



Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2201A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Solazzo Enrico

**MATERIA: Idraulica ambientale - Teoria + Esercizi - Prof.
Ridolfi**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

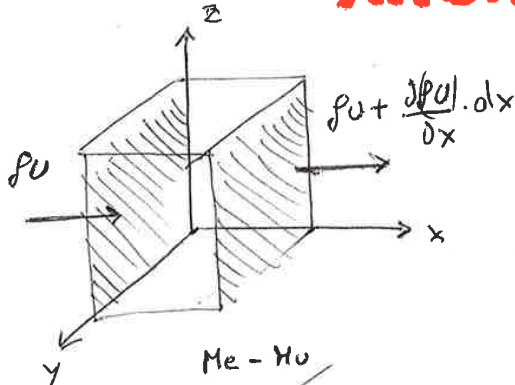
ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

Equazioni del moto di un fluido newtoniano

1)

1) EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

IDRAULICA AMBIENTALE



Massa entrante $\rho U dt dy dz$

Massa uscente $(\rho + \frac{\partial(\rho)}{\partial x} dx) U dt dy dz$

$$\begin{aligned}
 x: & \left\{ \begin{aligned} & \rho U dt dy dz - (\rho + \frac{\partial(\rho)}{\partial x} dx) U dt dy dz - \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} dx dt dy dz = \left(\frac{\partial(\rho U)}{\partial x} dx \right) dt dy dz \\ y: & \dots \\ z: & \dots \end{aligned} \right. \\
 & = \left(\frac{\partial(\rho U)}{\partial y} dy \right) dt dx dz \\
 & = \left(\frac{\partial(\rho U)}{\partial z} dz \right) dt dx dy
 \end{aligned}$$

$M_e - M_u =$ VARIAZIONE DELLA MASSA INTERNA

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial x} dx dy dz dt + \frac{\partial(\rho V)}{\partial y} dx dy dz dt + \frac{\partial(\rho W)}{\partial z} dx dy dz dt = - \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \text{div } \rho \vec{U} = 0}$$

Nel caso di fluido incompressibile ($\rho = \text{cost}$) e in moto permanente ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), l'equazione di continuità è:

$$\boxed{\text{div } \vec{U} = 0} \xrightarrow{\text{not. Einstein}} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

2) EQUAZIONE DI NAVIER STOKES - EQUAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\rho (\vec{R} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{U}$$

$$\rho \left(-g \delta_{i3} - \frac{DU_i}{Dt} \right) = \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

$$\frac{DU_i}{Dt} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\uparrow_1} + \underbrace{\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{\uparrow_2} - \underbrace{g \delta_{i3}}_{\uparrow_3}$$

tre attori responsabili della variazione di velocità legati a:

- 1) gradienti di pressione
- 2) viscosità cinematica
- 3) accelerazione di gravità

Equazione della quantità di moto del moto medio

3)

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - g \delta_{i3}$$

$$\vec{A} = \frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} + w \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial z}$$

Einstein $\rightarrow = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - g \delta_{i3}$$

Si nota che l'equazione è non lineare (vedi $\frac{DU_i}{Dt}$), quindi non si può dividere le grandezze medie da quelle turbolente

$$\underbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial t} (U_i + u_i) \right\rangle}_1 + \underbrace{\left\langle (U_j + u_j) \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i + u_i) \right\rangle}_2 = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle}_3 + \underbrace{\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial x_j}}_4 - g \delta_{i3}$$

Termine 1: $\frac{\partial}{\partial t} \langle (U_i + u_i) \rangle = \frac{\partial U_i}{\partial t}$

Termine 2: $\langle (U_j + u_j) \cdot \frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial x_j} \rangle = \langle U_j \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \rangle + \langle u_j \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \rangle + \langle U_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rangle + \langle u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rangle$

+ $\langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rangle$

$\rightarrow \langle U_j \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \rangle + \langle u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rangle = \langle U_j \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \rangle + \langle \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \rangle + \langle u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \rangle$

b. da = (a+b) - a - b

Il termine 2 sarà: $U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j}$!

↓ gradienti spaziali della covarianza delle componenti di agitazione turbolenta. Anche derivando l'equazione in termini medi le componenti di agitazione turbolenta danno contributo perché sono correlate fra loro. Se la turbolenza fosse tale da non creare correlazioni $\langle u_i \cdot u_j \rangle$ sarebbe nulla!

Termine 3: $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$

Termine 4: $\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$

$$\Rightarrow \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - g \delta_{i3}$$

$$\Rightarrow \frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \langle u_i u_j \rangle \right] - g \delta_{i3}$$

Equazione dell'energia del moto medio

5)

$$\frac{D\bar{U}_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \tau_{ij} \rangle - g \delta_{i3} \quad \text{eq della quantità di moto del moto medio}$$

$$\Rightarrow \bar{U}_i \cdot \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \tau_{ij} \rangle - g \delta_{i3} \right) \cdot \bar{U}_i$$

$$\bar{U}_i \cdot \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_i \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \tau_{ij} \rangle \bar{U}_i - g \delta_{i3} \bar{U}_i$$

da a = d(ab) / da b

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \bar{U}_i^2 \right) + \bar{U}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \bar{U}_i^2 \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \tau_{ij} \rangle \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \langle \tau_{ij} \rangle - g \bar{U}_i \delta_{i3}$$

Ricordando che $\langle \tau_{ij} \rangle = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \langle u_i u_j \rangle$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \bar{U}_i^2 \right) + \bar{U}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \bar{U}_i^2 \right) = \frac{1}{\rho} \cdot \bar{U}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \langle u_i u_j \rangle \right] - \frac{1}{\rho} \left[-p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \langle u_i u_j \rangle \right] \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - g \bar{U}_i \delta_{i3}$$

Ricordando che $E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \bar{U}_i^2 \right) = \frac{d}{dx_j} \left[\frac{-p \bar{U}_i}{\rho} + 2\nu \bar{U}_i E_{ij} - \langle u_i u_j \rangle \bar{U}_i \right] + \left[\frac{-p \delta_{ij} \partial \bar{U}_i}{\rho} + 2\nu E_{ij} - \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right] - g \bar{U}_i \delta_{i3}$$

$$\cdot 2\nu E_{ij} \cdot \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = 2 E_{ij} E_{ij}$$

$$\frac{1}{\rho} p \delta_{ij} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \quad \text{per } i=j \quad \delta_{ij}=1 \quad \text{ma } \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = 0$$

per $i \neq j \quad \delta_{ij}=0$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \bar{U}_i^2 \right) = \frac{d}{dx_j} \left[\frac{-p \bar{U}_i}{\rho} + 2\nu \bar{U}_i E_{ij} - \langle u_i u_j \rangle \bar{U}_i \right] - 2\nu \overbrace{E_{ij} E_{ij}}^{<0} + \overbrace{\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}}^{<0} - g \bar{U}_i \delta_{i3}$$

↓

variazione dell'energia cinetica per unità di massa

Ⓘ

termini di trasporto

Ⓢ

Energia dissipata in calore a causa della viscosità del fluido

Ⓣ

energia che la turbolenza sottrae al moto medio

Ⓙ

gioco fra energia cinetica e potenziale

$$\begin{cases} \text{div } \vec{0} = 0 \\ \rho(\vec{R}-A) = \text{grad } p - \mu \Delta^2 \vec{0} \end{cases}$$

Einstellen

$$\begin{cases} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 & \text{CONTINUITÀ} \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - g \delta_{i3} & \text{Q. NOTO (1)} \\ & \text{(2)} \\ & \text{(3)} \end{cases}$$

(4): gradienti di pressione
 (2): viscosità cinematica
 (3): accelerazioni di gravità

Tre fattori responsabili della variazione di velocità Lagrangiana:

- CONTINUITÀ moto medio
- $\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$
- CONTINUITÀ moto turbolento
- $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$

q di moto del NOTO MEDIO

- Si risolve l'eq. (1) in questo modo:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - g \delta_{i3}$$

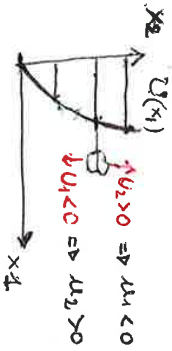
non lineare

- Si usa la decomposizione di Reynolds e si media

$$\Rightarrow \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j^2} - g \delta_{i3}$$

non lineare
La turbolenza rimane nell'eq. del moto medio

$\langle u_i u_j \rangle \neq 0$ e $\langle u_i \rangle = 0$!



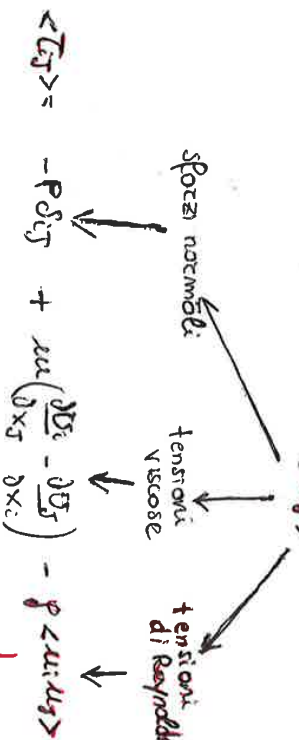
In maniera compatta

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \langle u_i u_j \rangle - g \delta_{i3}$$

VARIAZIONE DI VELOCITÀ MEDIA PARTICELLE $\frac{DU_i}{Dt}$ dipende

energia potenziale $-g \delta_{i3}$

gradienti spaziali delle tensione $\langle T_{ij} \rangle$



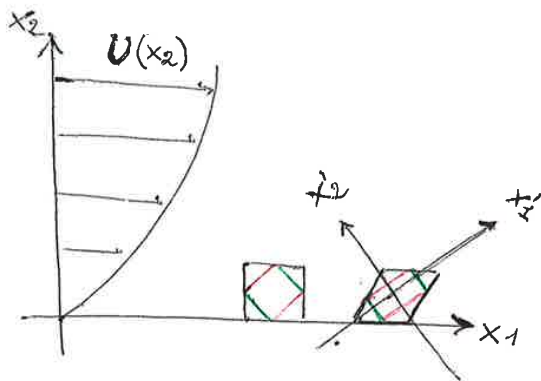
rubane energia di moto medio e sono la più importanti

Turbolenza come cascata di vortici

7)

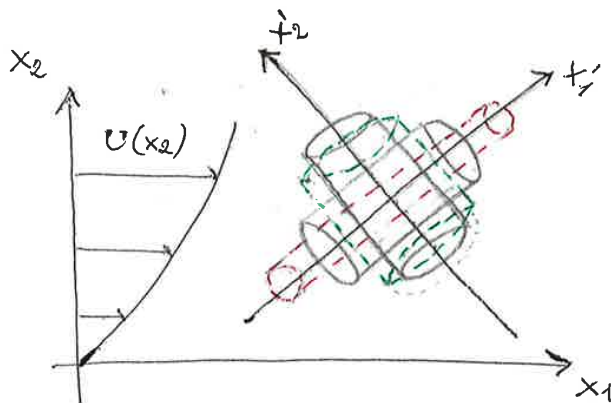
La turbolenza può essere vista come una sovrapposizione di vortici. Ogni vortice è essenzialmente un moto rotatorio con al suo interno più moti rotatori.

La turbolenza sottrae energia al moto medio. Il meccanismo con cui lo fa è chiamato VORTEX STRETCHING



Seguendo un volume di forma quadrata all'interno di un campo di moto per un tempo dt esso si deforma (diventa un parallelogramma). Un elemento quadrato nel suo interno non subisce deformazioni, ma

DILATAZIONI lungo x_1' e contrazioni lungo x_2'



considerando due vortici, all'interno del volume deformato, quello lungo x_1' tende ad essere stirato e tenderà a ruotare più velocemente per il principio di conservazione della quantità

di moto. Quello lungo x_2' viene schiacciato e tende a rallentare. Il campo di moto medio nel primo caso dovrà fare uno "sforzo" per far avvenire lo stiramento. Esso perde energia e il vortice aumenta la velocità.

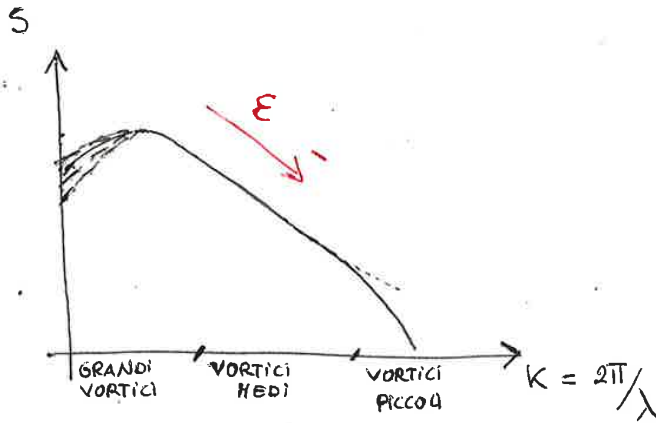
Nel secondo caso il vortice perde energia perché diminuisce la sua velocità.

Questi aspetti sono nascosti nel termine $\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \langle u_i u_j \rangle$

SPETTRO DELLA TURBOLENZA

g)

Come l'energia si ripartisce sulle varie armoniche



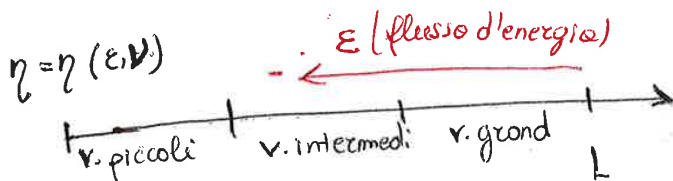
k. numero d'onda

L'energia maggiore è fornita dai vortici con k piccolo (maggiore lung. d'onda), quindi i più grandi.

Dato che sono influenzati dalle c.c. non c'è univocità nel primo tratto.

Il tratto intermedio, su scala log, ha andamento rettilineo. Kolmogoroff ne ha ricavato la pendenza sfruttando il Th. II

$$S = f(k, \epsilon) \Rightarrow S \propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad \text{legge dei } 5/3$$

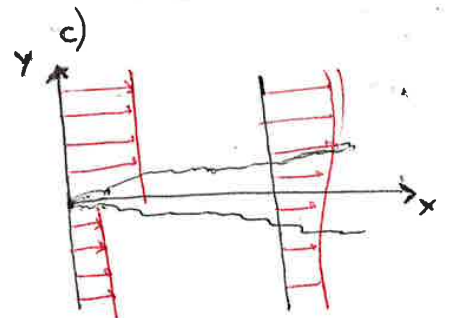
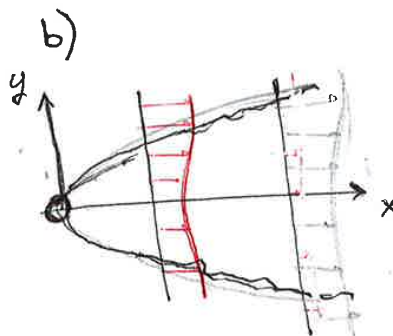
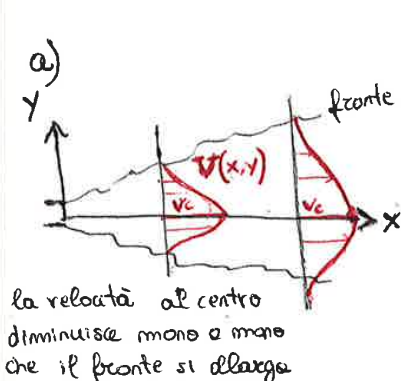


mm < vortici atmosfera < Km

Turbolenza libera

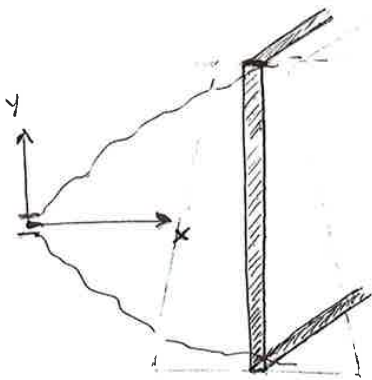
Il fluido non è contenuto in nessuna parete, tutta la stocasticità intrinseca della turbolenza può esprimersi ⇒ CASUALITÀ
Può manifestarsi come

- getti (es. un soffio dentro l'aria)
- scie (es. scia dietro una barca, un aereo)
- strati di miscelamento (es. interazione tra due correnti oceaniche) a causa dell'attrito si genera turbolenza.



Legge con cui si aprono i profili di velocità dei getti

11)



Equazione globale della dinamica

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

\downarrow forza peso \downarrow forze di contorno \downarrow Inerzie locali \downarrow flusso di quantità di moto $\int_A \rho \vec{v} dQ$ $[\frac{kg \cdot m}{s^2}]$

Applico l'equazione globale al volume scelto e proietto lungo \vec{x}

$P_x = 0$

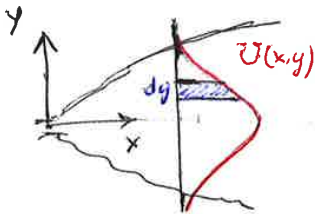
F_c : lungo \vec{x} , con l'ipotesi di piccolo angolo di apertura possiamo pensare che le traiettorie medie siano poco distanti dall'asse parallele \Rightarrow distribuzione idrostatica di pressione uguale e contraria nei due lati $\Rightarrow F_c = 0$

I : inerzie locali nulle perché il getto non varia nel tempo

$\Rightarrow \vec{M}_e = \vec{M}_u$

Flusso costante di quantità di moto

\Rightarrow portata costante a causa del fenomeno di inglobamento



$dQ = U \cdot dy \cdot 1$

$dQ \cdot U = U^2 dy$

$Q U = \int_{-\infty}^{+\infty} U^2 dy$

$\Rightarrow M = \rho Q U = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} U^2 dy = \text{cost}$

Si ricava ora U sfruttando l'autosimilarità:

$\frac{U}{U_c} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) \Rightarrow U = U_c f\left(\frac{y}{\delta}\right)$

combinazione variabile:

$dy = d\left(\frac{y}{\delta}\right) \cdot \delta$

$\Rightarrow M = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} U_c^2 f^2\left(\frac{y}{\delta}\right) dy$

$M = \rho U_c^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 d\left(\frac{y}{\delta}\right) \cdot \delta$

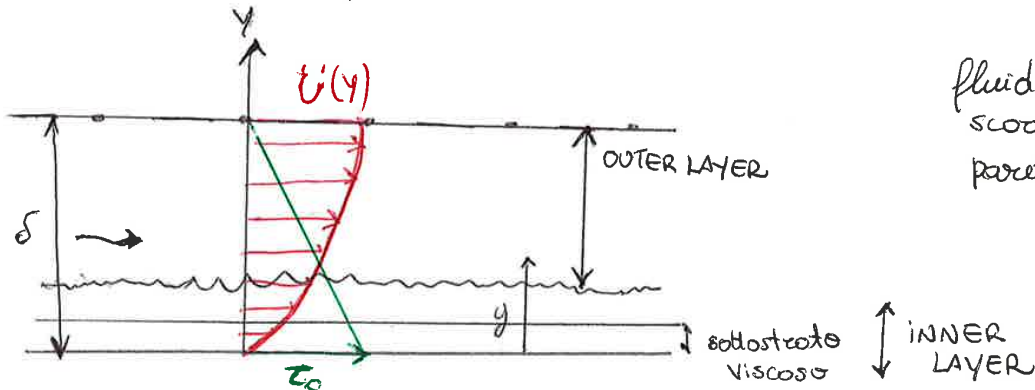
$M = \rho U_c^2 \cdot \delta \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \text{costante}$

Turbolenza di parete

(3)

- Componente deterministica vicino la parete che impone a tutti i punti a contatto con essa di muoversi con la sua velocità
- componente casuale

Ragionamento di Milliron



fluido viscoso che scorre sopra una parete liscia

Da cosa dipende il profilo di velocità nell'INNER LAYER?

$$u = u(y, \nu, \tau_0, \rho) \quad \leftarrow \text{cioè che accade vicino alla parete non dipende dalla scala globale del fluido}$$

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \left[\frac{L^2}{t^2} \right] \Rightarrow \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_* \text{ velocità di attrito}$$

$$u = u(y, \nu, u_*) \Rightarrow \frac{u}{u_*} = f\left(\frac{y u_*}{\nu}\right) = f(y_+)$$

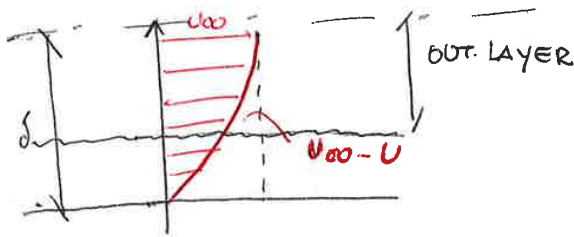
ha la struttura del Numero di Reynolds $Re = \frac{u \cdot d}{\nu}$

- Nell'inner layer
 - scala di velocità tipica u_*

- scala di lunghezza tipica $\frac{\nu}{u_*}$ $\frac{m^2}{s} \cdot \frac{s}{m} [m]$

OUTER LAYER

15)



Per convenzione la U è data come difetto di velocità, ossia nella forma $U_{\infty} - U$, dove U_{∞} è la velocità massima.

$$U_{\infty} - U = F(y, U_*, \delta) \Rightarrow \boxed{\frac{U_{\infty} - U}{U_*} = F\left(\frac{y}{\delta}\right) = F\left(\xi\right)}$$

STRATO DI SOVRAPPOSIZIONE

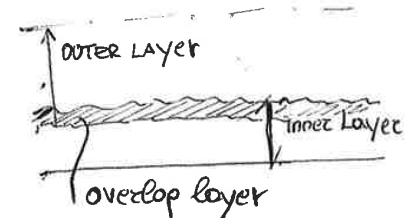
È la zona di sovrapposizione tra l'inner layer e l'outer layer

$$\frac{U}{U_*} = f(y_+)$$

$$\frac{U_{\infty} - U}{U_*} = F(\xi)$$

$$\frac{dU}{dy} = \frac{U_*^2}{\nu} \frac{df}{dy_+} \quad \text{inner layer}$$

$$\frac{dU}{dy} = \frac{U_*}{\delta} \frac{dF}{d\xi} \quad \text{outer layer}$$



$$\Rightarrow \frac{y}{U_*} \left(\frac{U_*^2}{\nu} \frac{df}{dy_+} \right) = \left(\frac{U_*}{\delta} \frac{dF}{d\xi} \right) \cdot \frac{y}{U_*}$$

$$\Rightarrow \frac{y U_*}{\nu} \frac{df}{dy_+} = \xi \frac{dF}{d\xi}$$

$$\Rightarrow \underbrace{y_+ \frac{df}{dy_+}}_{\text{funzione di sola } y_+} = \xi \frac{dF}{d\xi} = \frac{1}{k} = \text{costante}$$

(due funzioni di due variabile diverse sono uguali solo se sono costanti)

$$\begin{aligned} * \quad & f(y_+) = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{y U_*}{\nu}\right) + A \\ & F(\xi) = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{y}{\delta}\right) + B \end{aligned}$$

struttura logaritmica di f e F nella zona di sovrapposizione

$$* \quad y_+ \frac{df(y_+)}{dy_+} = \frac{1}{k} \Rightarrow \int_0^{y_+} \frac{1}{k} \frac{dy_+}{y_+} = \int_0^{\xi} dF(\xi) \Rightarrow f(y_+) = \frac{1}{k} \ln(y_+) + A$$

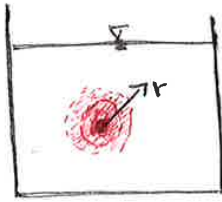
Processi di trasporto

1

Mecanismi di trasporto più efficienti

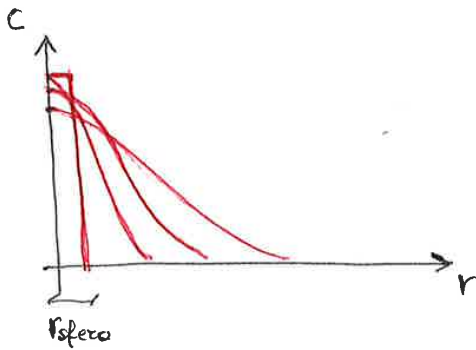
- 1 - diffusione molecolare
- 2 - convezione
- 3 - diffusione turbolenta
- 4 - dispersione per shear

1)



colocando una porzione di fluido, poco alla volta il colore si diffonde ovunque

La velocità con cui il sistema avanza va via via smorzandosi
 Scelto un s.r. centrato nella sfera



La velocità con cui avviene il processo è proporzionale al gradiente di $[]$, infatti si spegne quando la concentrazione dell'acqua è tutto uguale

N.B: la diffusione NON CREA GRADIENTI

Legge di Fick

$$\vec{q} = -D \nabla c$$

\vec{q} : flusso di sostanza che passa attraverso l'unità di superficie nell'unità di tempo $[\frac{kg}{m^2 \cdot s}]$

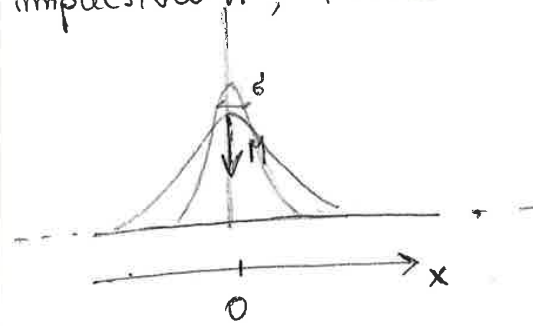
$$\nabla c = \left(\frac{\partial c}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial c}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial c}{\partial z} \hat{k} \right) = \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad (\text{come varia la concentrazione nello spazio})$$

La soluzione dell'equazione differenziale può evolvere nel tempo ma non diventa mai più complessa della c.i. Il termine diffusivo evita che ci siano troppe differenze nel campo di moto

Soluzione di Green nel caso monodimensionale

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad \text{con } C = C(x,t)$$

Ipotesi: dominio infinito. Si applica una sollecitazione impulsiva M , tradotta matematicamente:



$$\text{d.c.i. } C(x,t=0) = M \delta(x)$$

mette una massa in un punto
 c'è il limite per $\delta \rightarrow 0$ della funzione Gaussiana

$$\text{d.c.c. } \lim_{|x| \rightarrow \infty} C(x,t) = 0, \text{ dominio } \infty$$

La soluzione si trova applicando il teorema π

$$C = C(x, t, D, M)$$

$$C = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot g\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

n.b: la struttura di g è incognita

$$C = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot g(\eta) \quad \text{con } \eta = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$$

Sfrutto l'equazione differenziale e ricavo $\frac{\partial C}{\partial t}$ e $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$,

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \frac{dg}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{dx} = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \frac{dg}{d\eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{4Dt}}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \frac{d^2g}{d\eta^2} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \frac{d^2g}{d\eta^2} \cdot \frac{1}{4Dt}$$

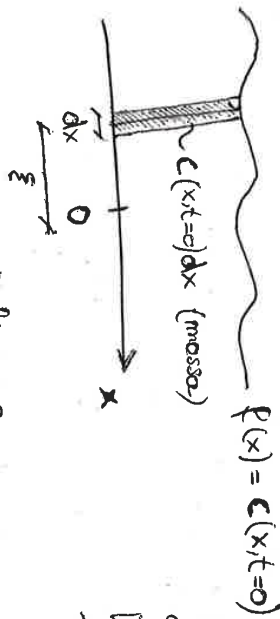
$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{M}{\sqrt{4\pi D}} \cdot \frac{1}{t^{3/2}} \cdot g(\eta) + \frac{dg}{d\eta} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4D}} \cdot \frac{1}{t^{3/2}} \cdot \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}}$$

Soluzione matrone di

$$C(x,t) = \frac{H}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Composizione della funzione matrone



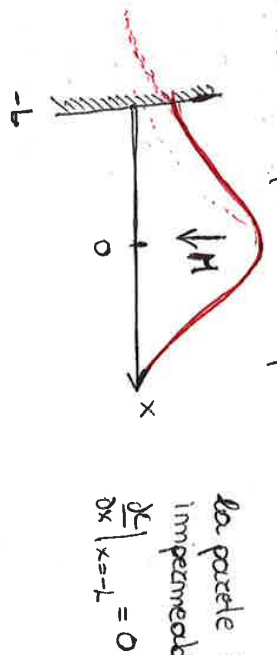
Poiché l'equazione è lineare

$$C(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}$$

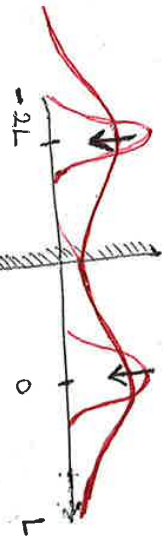
$f(\xi) d\xi$ cambio variabile, e rappresenta una massa
 $x-\xi$ Poiché la massa non è in $x=0$ ma si muove con ξ

Sia un certo andamento della [] in un istante $t=0$

Esempio 1
 Caso di dominio finito con parete in $x=-L$



Il problema è lineare, si usa il METODO DELLE IMMAGINI
 guardando il fenomeno considerando a specchio una massa $x=-2 \cdot L$. Per simmetria, in $x=L$ da destra e da sinistra occorrono gli stessi valori di [] e i flussi si compensano. Cioè Equivale ad avere una parete impermeabile in cui il flusso è nullo



$$C(x,t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{(x+2L)^2}{4Dt}}$$

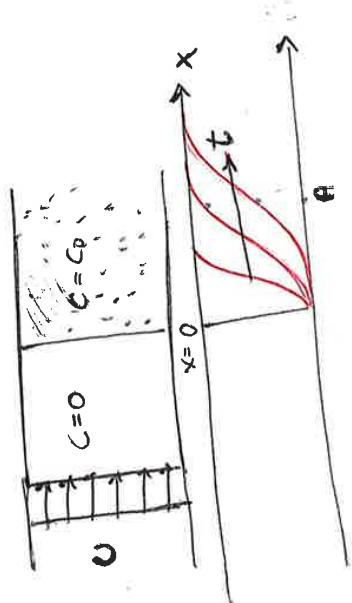
Se $x=2L$ il termine si annulla

Con 2 pareti:

$$C(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{(x+2nL)^2}{4Dt}}$$

con $n = n$ sorgenti!

ESEMPIO 1 CONVEZIONE - DIFFUSIONE



Il punto A diminuisce la [] col passare del tempo

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

Cambio s.r. passando ad un sistema mobile che si muove con velocità U

$$\xi = x - Ut$$

$$\tau = t$$

con

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial \xi} \cdot (-U) + \frac{\partial c}{\partial \tau}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial \tau} - U \frac{\partial c}{\partial \xi} + D \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} \Rightarrow c(\xi, \tau) = \frac{c_0}{2} \left[1 + \operatorname{Erf} \left(\frac{\xi}{\sqrt{4D\tau}} \right) \right]$$

e tornando al s.r. x, t

$$\Rightarrow c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left[1 + \operatorname{Erf} \left(\frac{x - Ut}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]$$

ESEMPIO 2: CONVEZIONE



Consideriamo che la [] non dipende dal tempo

$$\Rightarrow U \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(c)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}, \text{ posto } x' = \frac{x}{U}$$

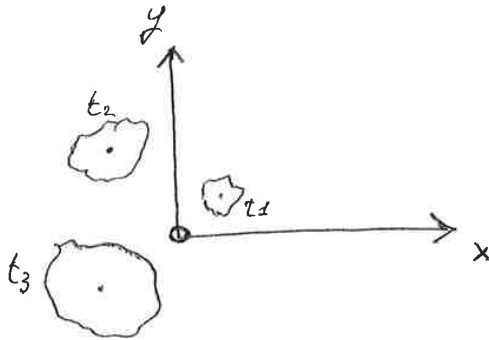
$$\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial x'} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \Rightarrow c(x, y) = \frac{c_0}{2} \left[1 + \operatorname{Erf} \left(\frac{y}{\sqrt{4Dx'}} \right) \right]$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

rispetto a convezione

Diffusione turbolenta

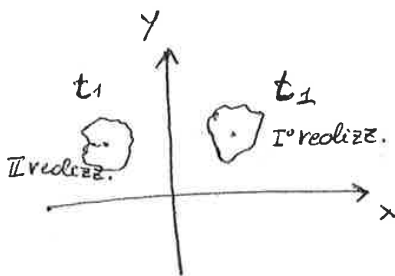
Immissione di una certa concentrazione di sostanza in un campo di moto turbolento



La turbolenza sposta la particella e ne complica il contorno

La macchia, deformata evolve sentendo tutte le scale della turbolenza

$C(x, y, t)$?



“ Ho n realizzazioni dello stesso processo di diffusione della stessa quantità di sostanza allo stesso tempo t_1 . Fornisco la concentrazione media di questa diffusione ”

Matematicamente ~~si~~ utilizza la media d'insieme $\langle C(x, y, z, t) \rangle$ cioè la media di tutti i possibili valori delle infinite realizzazioni.

N.B: considerare la media ^{d'insieme} è a sfavore di sicurezza: se scelgo un punto nel dominio, faccio n realizzazioni al tempo t_1

- $C_1(x, y, t_1) = C_1$
- $C_2(x, y, t_1) = 0$
- $C_3(x, y, t_1) = 0$
- $C_4(x, y, t_1) = C_4$
- ...

Facendo la $\langle \cdot \rangle$ otterrò un valore mediato da tutti 0!

Si utilizza allora la teoria di Taylor che considera la media delle variazioni rispetto un punto considerato

Allegato 3

3)

$$\frac{d}{dt} \overline{x_\alpha^2} = \overline{\frac{dx_\alpha^2}{dt}} = 2 \overline{x_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt}} = 2 \overline{x_\alpha u_\alpha}$$

Poiché

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = u_\alpha \Rightarrow x_\alpha = \int_0^t u_\alpha(t') dt'$$

$$\frac{d}{dt} \overline{x_\alpha^2} = 2 \cdot \overline{\int_0^t u_\alpha(t') dt' \cdot u_\alpha(t)} = 2 \int_0^t \overline{u_\alpha(t') u_\alpha(t)} dt'$$

Ricordando che : $\frac{\overline{u_\alpha(t) \cdot u_\alpha(t+\tau)}}{\overline{u_\alpha^2}} = \rho_\alpha(\tau)$ dividendo per $\overline{u_\alpha^2}$ ottengo la cross correlazione fra il campo di moto al tempo t' e il campo di moto al tempo t

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \overline{x_\alpha^2} = 2 \overline{u_\alpha^2} \int_0^t \rho_\alpha(\tau) d\tau = \frac{d \overline{x_\alpha^2}}{dt}$$

dipendenza dalla varianza del campo di moto (quanto è agitato il moto turb.)

quanto sono correlate le velocità lungo il percorso della particella

Integro nel tempo

$$\overline{x_\alpha^2}(t) = 2 \cdot \overline{u_\alpha^2} \int_0^t \int_0^{t'} \rho_\alpha(\tau) d\tau dt'$$

Integro x parti $\int f' g' = f g - \int g' f$

ponendo $g = \int_0^{t'} \rho_\alpha(\tau) d\tau$ e $f' = 1$

$$\Rightarrow \int_0^t \int_0^{t'} \rho_\alpha(\tau) d\tau \cdot 1 dt' = \left[\int_0^{t'} \rho_\alpha(\tau) d\tau \right]_0^t - \int_0^t \int_0^{t'} \rho_\alpha(t') dt'$$

$$= \left[t \int_0^t \rho_\alpha(\tau) d\tau - 0 \right] - \int_0^t \int_0^{t'} \rho_\alpha(t') dt'$$

$$= t \int_0^t \rho_\alpha(\tau) d\tau - \int_0^t \int_0^{t'} \rho_\alpha(t') dt'$$

1) moltiplico e divido per t il 2° integrale

2) $t' = \tau$

$$\Rightarrow t \int_0^t \rho_\alpha(\tau) d\tau - t \int_0^t \frac{\tau}{t} \rho_\alpha(\tau) d\tau = t \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) \rho_\alpha(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow \overline{x_\alpha^2}(t) = 2 \overline{u_\alpha^2} t \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) \rho_\alpha(\tau) d\tau$$

Nella diff. turbolenta la varianza delle particelle vale 2 volte la varianza del campo di moto per l'integrale di ρ_α

Se vole la legge ^{di Fick} la Diffusione turbolenta è descritta 5)
 come la diffusione molecolare

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

c : variabile di interesse
 ε : coeff. di diffusione turbolenta

$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y, z) \Rightarrow$ c'è anisotropia

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_z \frac{\partial c}{\partial z} \right)$$

Parallelismo con la diffusione molecolare

$$\bar{x}_d^2 \approx 2 \bar{v}_d^2 \tau$$

$$\sigma^2 \propto Dt$$

con $\varepsilon \propto \bar{v}_d^2 \cdot \tau$

$$\Rightarrow \bar{x}_d^2 \propto \varepsilon t$$

Riassumendo:

Tempi corti: $\tau \ll \tau$ la particella ha avuto tempo di vedere poche scale. La correlazione è fortissima. Il processo non segue la legge di Fick. (perché un processo Fickiano è frutto di tanti fenomeni tra loro indipendenti, mentre qui ce n'è un legame!)

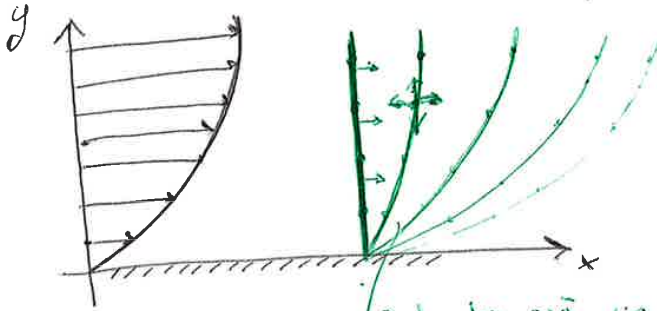
Tempi intermedi Non possiamo dire nulla, siamo lontani dal Th. del limite centrale

Tempi lunghi: $\tau \gg \tau$ Ho tante scale, le particelle vedono cose già viste, la correlazione è ininfluente ed è come avere tanti fenomeni fra loro indipendenti (il processo non ha memoria)
 \Rightarrow segue la legge di Fick

Dispersione per shear ^{'shear'}

1)

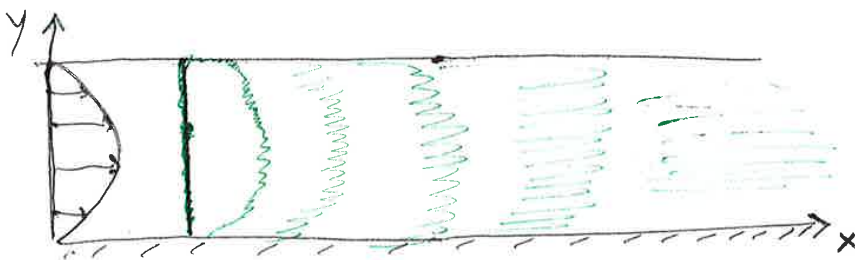
1) Sia un profilo di velocità medio di un fluido Newtoniano. Immaginiamo ad un certo istante di collocare un tratto verticale di fluido e di seguirlo nel tempo.



Dato che c'è un profilo di velocità le particelle vanno tanto più veloci quanto sono lontane dalla parete, il segmento viene sempre più stirato su un tratto più lungo e, quindi, la sua concentrazione scende.

2) Appena il profilo si deforma, sulla verticale ci sono gradienti di concentrazione spaziali che innescono processi di diffusione molecolare. Ne consegue che le particelle si muovono in tutte le direzioni (anche verticalmente) quindi nel tempo esplorano diversi valori di velocità media.

Qual'è la distribuzione complessiva che rende conto del profilo di velocità + diffusione molecolare?



All'inizio domina il profilo di velocità, successivamente la diffusione molecolare. A questo punto tutte

le particelle esplorano tutto il campo di moto dimenticandosi delle condizioni iniziali. (si perde il profilo di velocità) Si avvia una dispersione della sostanza per shear.

3)

L'equazione (1) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{c} + c') + (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{c} + c') = D \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\bar{c} + c') + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{c} + c') + u' \frac{\partial}{\partial x} (\bar{c} + c') = D \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2}$$

Cambio sistema di riferimento per far sparire il termine convettivo per cambiare s.r. $(x, y) \rightarrow (\xi, \tau)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau}$$

L'equazione (1) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\bar{c} + c') - \bar{u} \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{c} + c') + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{c} + c') + u' \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{c} + c') = D \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} + \frac{\partial c'}{\partial \tau} + u' \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} + u' \frac{\partial c'}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2} \quad (1)$$

(1) (2) (3)

Trascurando i termini 1, 2, 3

$$\Rightarrow \boxed{u' \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2}} \quad *$$

Dimostrazione

Mediando l'equazione * lungo la verticale $\frac{1}{h} \int_0^h \cdot dy$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} + 0 + 0 + \overline{u' \frac{\partial c'}{\partial \xi}} = 0 \quad (2)$$

è già mediato e rimane tale

la media degli scarti è nulla

$$1 - 2 \Rightarrow \frac{\partial c'}{\partial \tau} + \underbrace{u' \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi}}_a - \underbrace{\overline{u' \frac{\partial c'}{\partial \xi}}}_b = D \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2}$$

5)

L'equazione è

$$\boxed{u' \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2}}$$

Questa equazione afferma che per $t > \frac{h^2}{D}$ i processi convettivi lungo ξ sono in equilibrio con i processi diffusivi lungo y

Integrando due volte rispetto ad y

$$c'(y) = \frac{1}{D} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} \int_0^y \int_0^y u'(y) dy dy + c_0 \quad \uparrow D \downarrow c'$$

↑ profilo di [] degli scarti

Il flusso di massa di sostanza \dot{M} che passa attraverso una sezione generica è:

$$\dot{M} = \int_0^h u' \cdot (\bar{c} + c') dy = \int_0^h u' c' dy + \int_0^h u' \bar{c} dy = \int_0^h u' c' dy + \bar{c} \int_0^h u' dy$$

non vedo \bar{c} perché minimo su un sistema con velocità pari a \bar{u}

$$\dot{M} = \int_0^h u' c' dy$$

$$\Rightarrow \dot{M} = \frac{1}{D} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} \int_0^h u' \int_0^y \int_0^y u' dy dy dy$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{M} = -h \cdot k \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi}} \quad \text{dove } k = -\frac{1}{hD} \int_0^h u' \int_0^y \int_0^y u' dy dy dy$$

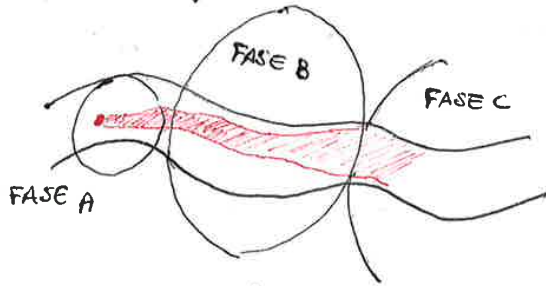
k : coefficiente di dispersione per shear. Ha le stesse dimensioni di D [m^2/s] e contiene due ingredienti: diffusione molecolare e il compo di moto

Il flusso di massa (anologo a \vec{q} della legge di Fick) è uguale a meno h (larghezza sezione) per il gradiente di concentrazione medio $\frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi}$ per k (una volta noto il compo di moto è un numero)

$$\dot{M} = \text{costante} \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} \cdot \text{numero} \Rightarrow \dot{M} \propto \text{grad. di } [c] \text{ medio} \Rightarrow \text{legge di Fick}$$

Trasporto nei fiumi

Supponiamo che la sorgente di inquinante sia in un punto.
Possiamo distinguere tre fasi:



FASE A: L'inquinante copre l'intera profondità della corrente. In questa fase c'è dipendenza dai processi di trasporto e dalla geometria locale.

FASE B: La sostanza si distribuisce sull'intera sezione trasversale. Fase guidata dai fenomeni di diffusione turbolenta specie nella direzione trasversale (ϵ_T).

FASE C: La sostanza viene diluita longitudinalmente, agisce la dispersione per shear (siano a tempi lunghi).

Fase B:

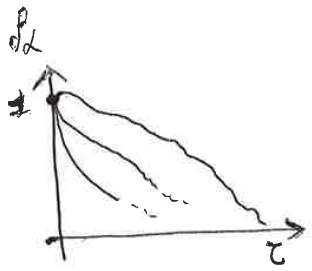
Nella teoria della diffusione turbolenta di Taylor si era ricavato come varia la varianza del vettore posizione:

$$\bar{x}_L^2 = 2\bar{U}_L^2 t \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) \rho_L(\tau) d\tau$$

Per tempi lunghi ($t \gg \tau$) $\Rightarrow \rho_L(\tau) \rightarrow 0$

$$\int \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) \rho_L(\tau) d\tau = \int \rho_L(\tau) d\tau - \frac{1}{t} \int \tau \rho_L(\tau) d\tau$$

" \int $\rightarrow 0$



$$\Rightarrow \bar{x}_L^2(t) = 2\bar{U}_L^2 \int t$$

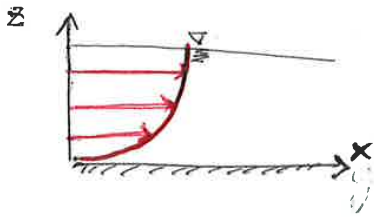
Per tempi lunghi la varianza varia linearmente con il tempo

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \bar{x}_L^2 = \int \bar{U}_L^2$$

$$\epsilon_L = \int \bar{U}_L^2$$

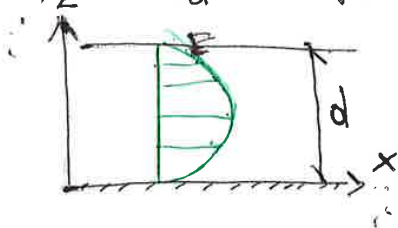
E_v verticale

E_v esprime l'efficacia della turbolenza a spostare le particelle lungo la verticale



Nota il profilo di velocità verticale si può risalire ad E_v che lo ha generato (analogia di Reynolds)

$$E_v = k d U_* \left(\frac{z}{d}\right) \left[1 - \left(\frac{z}{d}\right)\right]$$



↓ la turbolenza è un mescolamento dello q di moto e quindi è legato alle velocità. Nota lo q di moto (grazie al profilo di velocità, si calcola E_v)

$$E_v = 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} z=0 \\ z=d \end{cases}$$

$$k \cong 0,4$$

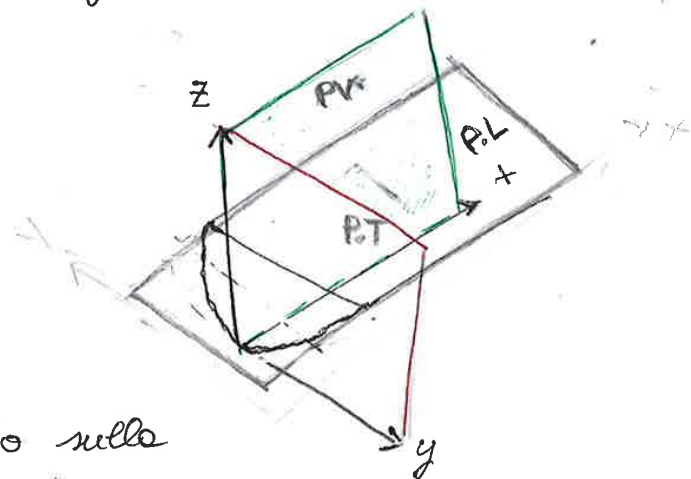
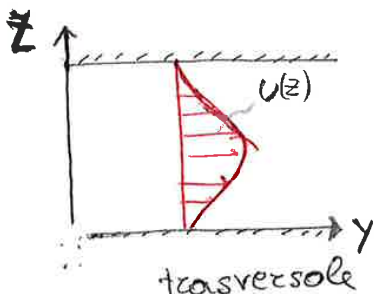
Per molti problemi è sufficiente considerare un valore medio \bar{E}_v sulla verticale

$$\bar{E}_v = 0,067 d U_*$$

E_T trasversale

Non essendo noto il profilo di velocità trasversale non si può utilizzare l'analogia di Reynolds

$$U = U(y, z)$$



Il profilo di velocità mediato sulla verticale è $U_z = \frac{1}{d} \int U(z, y) dy$



Questo profilo non è noto: dipende da p.to a p.to

In una canale si si aspetta in media sulla verticale che l'acqua sia più veloce sull'estradosso

ϵ_L longitudinale

Non si dispone di un profilo di velocità longitudinale
Alcuni studi hanno dimostrato che ϵ_L è dello stesso ordine di grandezza di ϵ_V

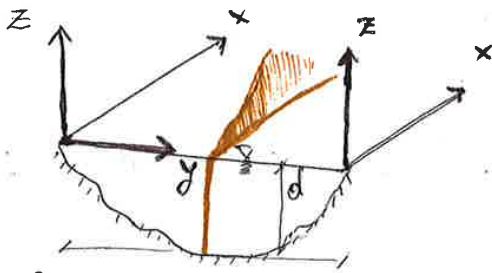
Inoltre il coefficiente di dispersione per shear nelle formula di Elder è $\kappa = 5,93 d u_*$

Considerando che i fenomeni di dispersione per shear e diffusione turbolenta sono additivi $(\kappa + \epsilon_L)$ e confrontando gli ordini di grandezza di κ con $\epsilon_L \approx \bar{\epsilon}_V = 0,0067 d u_*$

\Rightarrow si può trascurare ϵ_L

↓
I valori più grandi hanno lo stesso scala

Volendo $\epsilon_V, \epsilon_T, \epsilon_L$ si possono comprendere i meccanismi che regolano le varie fasi del trasporto nei fiumi:



La scala temporale delle fase A è trascurabile rispetto alla fase B e si può immaginare di avere una sorgente linea

con $[]$ uniforme w

Giustificiamo questa assunzione dimostrando che la fase A si esaurisce in tempi molto più brevi rispetto alle fase B

$w \gg d$ nei fiumi

$$\beta = \frac{w/2}{d}$$

$$t_v \approx \frac{d^2}{\epsilon_V} \rightarrow \text{SCALA TIPICA PROFONDITÀ}$$

$$\epsilon_V \rightarrow \text{MOTORE}$$

SCALA TEMPORALE TIPICA VERTICALE

$$t_T \approx \frac{w^2}{\epsilon_T}$$

$$\frac{t_T}{t_v} = \frac{w^2}{\epsilon_T} \cdot \frac{\epsilon_V}{d^2} = \left(\frac{w}{d}\right)^2 \cdot \frac{\epsilon_V}{\epsilon_T} \approx 10^3 \cdot 10^{-1} \approx 10^2$$

Fase c

Elder: $k = 5,93 d_0^*$

Sperimentalmente si ottengono però valori di $\frac{k}{d_0^*} = 10^2 \div 10^3$, maggiori dei valori trovati da Elder.

Elder quindi sottovaluta il processo di dispersione perché considera solo la dispersione verticale.

In un fiume ci sono due profili di velocità, uno trasversale e uno longitudinale; il secondo agisce su una scala molto maggiore del primo e risulta essere più importante.

Non avendo un profilo di velocità non riusciamo a ricavare k .

Immaginando di avere a disposizione informazioni sulla geometria e sul campo di moto, il valore sarebbe:

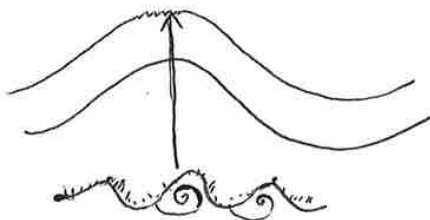
$$k = \frac{1}{A} \cdot \int_0^W u' d \int_0^y \frac{1}{E_T d} \int_0^y u' d dy dy dy \quad \text{tenendo presente di:}$$

- EFFETTO DELLE CURVE :

Dai una parte, la presenza di curve innesca correnti secondarie, le quali determinano un $\uparrow E_T$ e $\downarrow k$.

Dall'altra parte la presenza di curve determina un aumento delle u' $\Rightarrow \uparrow k$

- EFFETTO DELLE ZONE MORTE



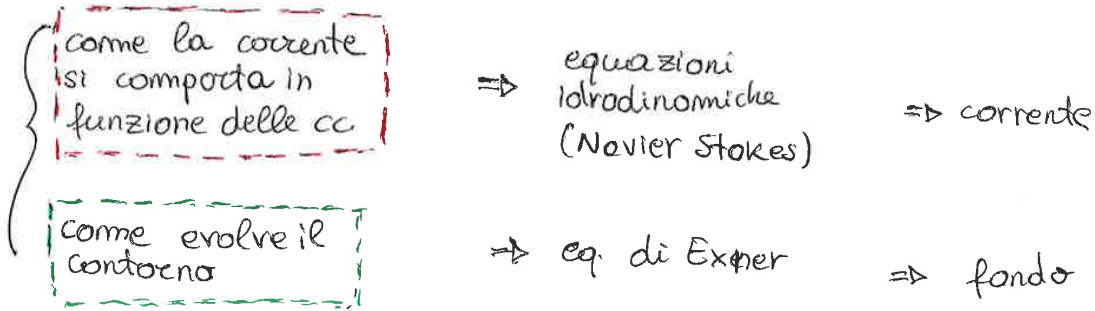
La presenza di irregolarità determina la formazione di correnti di ricambio. Le sponde trattengono pacchetti di sostanza che poco alla volta rilasciano

Il risultato è che la curva di $[]$ nello spazio non è simmetrica ma avrà una coda più lunga verso monte.



Idrodinamica fluviale

Corrente fluida che si muove su un fondo deformabile
 => nascono delle forme



Fra tutti i modelli di corrente monodimensionale ci occuperemo di quello più semplice, l'equazione di De Saint Venant

Equazione di De Saint Venant

Ipotesi semplificative:

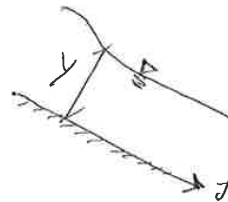
1) descrizione monodimensionale

=> $Q = Q(s, t)$

$U = U(s, t)$

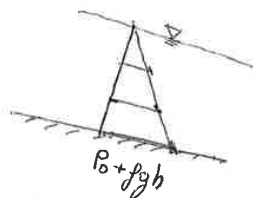
$\chi = \chi(s, t)$

=> CORRENTI (cioè un fluido che si muove sostanzialmente in una sola direzione)



2) corrente gradualmente variata, cioè che non abbia variazioni spaziali repentine

=> distribuzione idrostatica di pressioni



3) La corrente è turbolenta, quindi il profilo di velocità è quasi tutto piatto tranne che sul fondo (profilo logaritmico) approssimato a U costante



profilo reale

profilo approssimato

$(s, t) \rightarrow (x, t)$

⇒ Eq. di conservazione delle q. di moto (D.S.V.) nel nuovo s.r. (x, t) ³⁾

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = i\varphi - J$$

$i\varphi = -\frac{\partial \eta}{\partial x}$: pendenza fondo

$$\frac{\partial (y + \eta)}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = -J$$

$h = y + \eta$

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = -J$$

J: dissipazioni. Per il moto uniforme conosciamo le formule di Chesy

$$Q = \Omega \chi \sqrt{R J}$$

$$\Rightarrow J = \frac{Q^2}{\Omega^2 \chi^2 R}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{Q^2}{\Omega^2 \chi^2 R} = 0$$

moltiplico per g e sostituisco $v = \frac{Q}{\Omega}$

$$\Rightarrow g \frac{\partial h}{\partial x} + \left[\frac{Q}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{\Omega} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{\Omega} \right) \right] + \frac{Q^2 g}{\Omega^2 \chi^2 R} = 0 \cdot g \quad *$$

A $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{\Omega} \right) = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q}{\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial t}$

$$A = \frac{Q}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{\Omega} \right) + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q}{\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial t}$$

perché $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\Omega} \right) = -\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial t}$

Dall'equazione di continuità $-\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial t}$

$$A = \frac{Q}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{\Omega} \right) + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{\Omega^2} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Sostituendo A in * e moltiplicando tutto per Ω :

$$\Omega g \frac{\partial h}{\partial x} + \left[\frac{Q}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{\Omega} \right) + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} \right] + \frac{Q^2}{\Omega^2 \chi^2 R} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{\Omega} \right) + \Omega g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{Q^2 g}{\Omega^2 \chi^2 R} = 0$$

Eq. delle q. di moto nel nuovo s.r. (x, t)

5)

Equazioni della morfodinamica monodimensionale

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-p)b_f \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q_s}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad \text{Eq. di continuità per la fase solida}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad \text{Eq. di continuità per la fase liquida}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{\Omega} \right) + g \Omega \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g Q^2}{\Omega X^2 R} = 0 \end{array} \right. \quad \text{Eq. di cons. della q. di moto}$$

Il sistema è accoppiato attraverso una relazione di chiusura

$Q_s = Q_s(Q, \Omega)$ che lega le tre equazioni

VARIANZE NELLA SCRITTURA DELL'EQ. DI CONTINUITÀ:

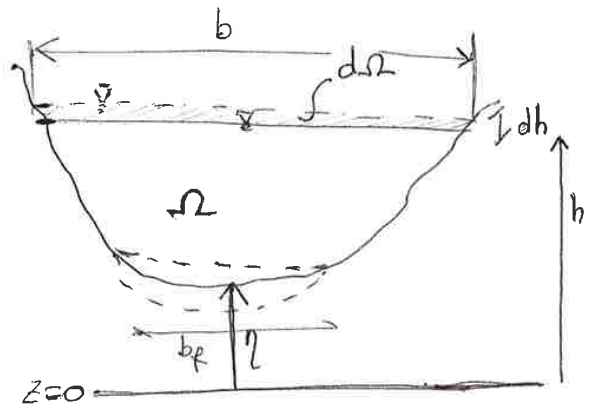
$\frac{\partial \Omega}{\partial t}$ da indicazioni su come varia la sezione del fiume nel tempo

Ω può variare perché:

- il livello si innalza
- C'è erosione o deposito

$$\Omega = \Omega [h(x,t), \eta(x,t)]$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \underbrace{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial h} \right)}_b \frac{\partial h}{\partial t} + \underbrace{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right)}_{-b_f} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

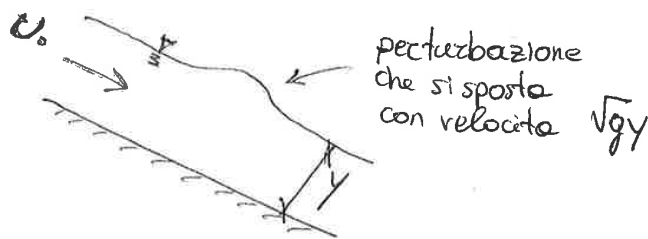


$$\Rightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial t} = b \frac{\partial h}{\partial t} - b_f \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

L'equazione di continuità per la fase liquida diventa:

$$\left[b \frac{\partial h}{\partial t} - b_f \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \right]$$

Da idraulica è possibile esprimere le velocità delle piccole perturbazioni (c_1, c_2) dallo studio di come si propagano le piccole perturbazioni su un'area a fondo fisso



$$c = \pm \sqrt{gy}$$

Si introduce un numero che esprime il rapporto tra velocità della corrente e velocità delle piccole perturbazioni

$$Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gy}} \left\{ \begin{array}{l} \text{correnti lente } Fr < 1 \Rightarrow \frac{U_0}{\sqrt{gy}} < 1 \Rightarrow U_0 < \sqrt{gy} \\ \text{correnti veloci } Fr > 1 \Rightarrow \frac{U_0}{\sqrt{gy}} > 1 \Rightarrow U_0 > \sqrt{gy} \end{array} \right.$$

correnti lente ($U_0 < \sqrt{gy}$)

1° onda $a_+ = U_0 + \sqrt{gy} > 0 \Rightarrow$ l'onda si muove in direzione della corrente

2° onda $a_- = U_0 - \sqrt{gy} < 0 \Rightarrow$ l'onda risale la corrente

correnti veloci ($U_0 > \sqrt{gy}$)

1° onda $a_+ = U_0 + \sqrt{gy} > 0 \Rightarrow$ l'onda si muove in dir. della corrente

2° onda $a_- = U_0 - \sqrt{gy} > 0 \Rightarrow$ l'onda si muove in direzione della corrente

Quindi $c_{1,2} = U \pm \sqrt{gy}$ sono legate alla perturbazione della superficie libera (onde idrodinamiche) e portano dietro tutte le informazioni relative alle eq. di De Saint Venant

ONDE DI FONDO c_3

c_3 , invece, è legata alle perturbazioni del fondo



$$c_3 \ll c_{1,2}$$

Quando c'è un fondo erodibile, esiste la possibilità di moto uniforme? 9

Siamo nel moto permanente $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$

Dall'equazione di Exner si ottiene:

$$(1-p) b_f \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q_s}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q_s}{\partial x} = 0 \Rightarrow Q_s = \text{costante}$$

Ipotizziamo che non ci siano variazioni di larghezza $b = b_f = \text{cost}$

$$Q_s = q_s \cdot b_f = \text{cost} \Rightarrow \begin{cases} q_s = \text{cost} \\ b_f = \text{cost} \end{cases}$$

$$\text{Se } q_s = \text{cost} \Rightarrow \bar{\phi} = \frac{q_s}{\sqrt{g s d} \cdot d} = \text{cost}$$

Dall'equazione di continuità:

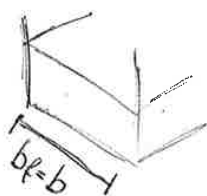
$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \Rightarrow Q = \text{cost}$$

Equazione della q di moto, ponendo $c^2 = \frac{\chi^2}{g}$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{\Omega} \right) + g \Omega \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{Q^2}{\Omega c^2 R} = 0, \text{ dividendo per } \Omega$$

$$g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{Q^2}{\Omega^2 c^2 R} + \frac{Q^2}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Omega} \right) = Q^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Omega} \right)$$

- alveo cilindrico



$$b_f = b = \text{cost}$$

$$q_s = \text{cost} \Rightarrow \bar{\phi} = \text{cost} \Rightarrow \tau_* = \text{cost} \Rightarrow U_* = \text{cost}$$

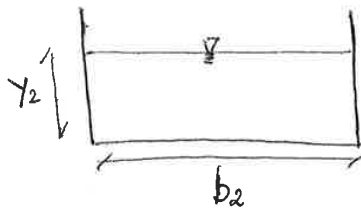
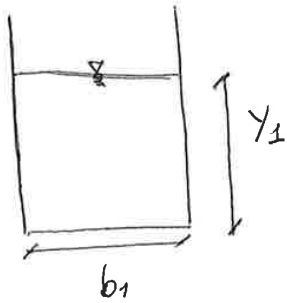
Applicazione metodi nomica

11)

Confrontiamo due situazioni in moto uniforme con la stessa portata ed elvei cilindrici a sezione rettangolare

CASO 1

CASO 2



Assegnati b_1 e y_1 quali relazioni ci sono con b_2 e y_2 ?

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

$$Q_{s1} = Q_{s2} \Rightarrow q_{s1} b_1 = q_{s2} b_2$$

Applicando la formula di Chien $q_s = 8 (\tau_* - \tau_{*,cr})^{3/2}$

Ipotizzando che $\tau_* \gg \tau_{*,cr}$, cioè siamo nel caso di trasporto solido molto importante, si ha: $q_s \propto \tau_*^{3/2}$

$$\Rightarrow \tau_* = \frac{\tau_0}{(s-1)d} = \frac{\tau_0/\rho}{(\frac{\rho_s}{\rho} - 1)gd} = \frac{\tau_0}{\rho(s-1)gd} = \frac{\rho Q^2}{\Omega^2 \chi^2 \rho g (s-1)d} = \frac{\rho g Q^2}{\rho g \Omega^2 \chi^2 (s-1)d}$$

posto $c^2 = \frac{\chi^2}{g} \Rightarrow \tau_* = \frac{Q^2 g}{g \Omega^2 \chi^2 (s-1)d} = \frac{Q^2}{g \Omega^2 c^2 c_1}$

posto $c_1 = (s-1)d = \text{cost}$

$$\Rightarrow q_s \propto \left(\frac{Q^2}{g \Omega^2 c^2 c_1} \right)^{3/2} = \frac{Q^3}{g^{3/2} \Omega^3 c^3 c_1} = \frac{Q^3}{g^{3/2} \Omega^3 c^3 c_2}$$

posto $c_2 = c_1^{3/2} = \text{cost}$

Introducendo $C = \frac{\chi}{\sqrt{g}} = \frac{c_{65} R^{1/6}}{\sqrt{g}} = \frac{c_{65} y^{1/6}}{\sqrt{g}}$

$$\Rightarrow q_s \propto \frac{Q^3}{\Omega^3 c_{65}^3 y^{1/2}} = \frac{Q^3}{b^3 y^3 c_{65}^3 y^{1/2}} = \frac{Q^3}{b^3 c_{65}^3 y^{7/2}}$$

posto $c_{65} = C^3 c_2$

CASO B

6)

ϵ_y non è costante al variare di y perché la turbolenza non lo è

$\epsilon_y = K U_*^3 y \left[1 - \frac{y}{Y} \right]$ Formula di Rouse

$K \approx 0,4$

Y : profondità corrente

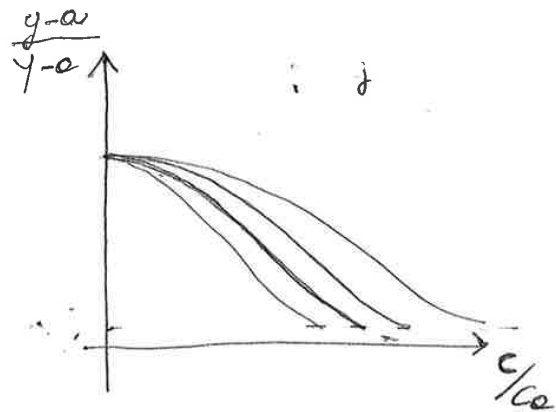
ϵ_y ha un andamento parabolico e si azzerava sulla parete $y=0$ e, sulla superficie libera $y=Y$

Inserendo ϵ_y nell'equazione differenziale

$$C \frac{dW_s}{dy} + \beta \epsilon_y \frac{dC}{dy} = 0$$

si ottiene una soluzione a coefficienti non costanti

$$\frac{C}{C_0} = \left(\frac{Y-y}{y} \cdot \frac{a}{Y-a} \right)^{\frac{W_s}{K U_*}}$$



Si tratta di una legge di potenza, la concentrazione è maggiore al fondo dove c'è più turbolenza

$\frac{W_s}{K U_*} \Rightarrow$ il profilo ha forti variazioni

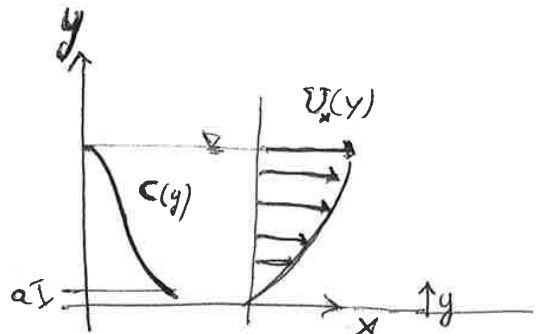
$$q_{ss} = \int_0^y C_{ss} \cdot \bar{U}_x(y) dy$$

$\frac{kg}{1.m}$ = portata x unità di larghezza

$Q_{ss} = q_{ss} \cdot b$

Formula di Von Rijn

$$q_{ss} = F \cdot \bar{U} \cdot Y \cdot C_e$$



- per $y > a$ si ha trasporto solido in sospensione
- per $y < a$ si ha trasporto solido al fondo

Utilizziamo un modello di chiusura che leghi le cross-correlazioni a grandezze note, ommettendo un certo errore

4)

Modello di chiusura di Boussinesq

$$\tau_{\text{com}} = \mu \frac{dU}{dy} \Rightarrow \frac{\tau_{\text{com}}}{\rho} = \nu \frac{dU}{dy} \Rightarrow \tau_{\text{com}} = \nu \rho \frac{dU}{dy} \quad (1)$$

Dove τ è una tensione tangenziale in un moto laminare
 Considerando $\langle u_i u_j \rangle$, moltiplicando per ρ si ha una tensione tang

$$\tau_{\text{turb}} = -\rho \langle uv \rangle = \rho \epsilon_e \frac{dU}{dy} \quad \epsilon_e: \text{viscosità turbolenta (proprietà dei FLUIDI)}$$

$$\Rightarrow -\langle UV \rangle = \epsilon_e \frac{dU}{dy}$$

Posto $\epsilon_e = \nu$ $\Rightarrow \tau_{\text{turb}} = \nu_{\text{turb}} \rho \frac{dU}{dy}$ che ha la struttura di τ_{com} (1)

Nel caso in questione, applicando il modello di Boussinesq si ha:

$$-\langle uv \rangle = (\epsilon_s) \cdot \frac{dC}{dy} \quad \text{e si pone}$$

$(\epsilon_s) = \beta \cdot \epsilon_y$ perchè legato al trasporto di particelle ^{solide} e non fluide come nel modello di Boussinesq

\Rightarrow l'equazione diventa

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial U_x C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[C' w_s + \beta \epsilon_y \frac{\partial C}{\partial y} \right]$$

~~turbolenza~~ + gravità $\uparrow \downarrow$

- Considerando un moto uniforme e permanente

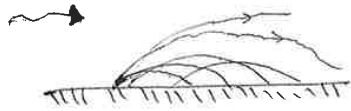
$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = 0$$

si è stabilito un profilo di equilibrio ~~in~~ in modo da non avere variazioni di concentrazione nel tempo

Trasporto solido in sospensione

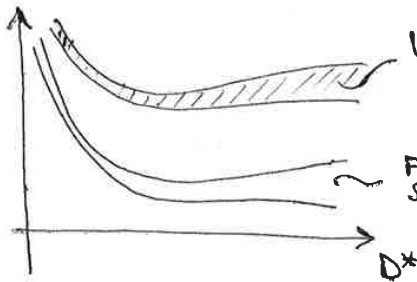
(1)

Le particelle non si depositano sul fondo ma sono tenute in sospensione dalla turbolenza. Questo tipo di trasporto è importante e composto da materiale fine ricco di nutrienti



Aumentando la portata le particelle iniziano a fare dei salti. $\uparrow Q$ questi salti sono sempre più lunghi, finché il materiale non rimane in sospensione.

$$\frac{\tau_0}{(\rho_s - \rho)d} = \theta = \tau_*$$



Fascio di Von Rijn \rightarrow trasporto solido in sospensione

Fascio di Shields \rightarrow trasporto al fondo

si nota 1) forte soggettività

2) Il trasporto s.s. si attiva non insieme al trasporto di fondo, ma per tensioni tangenziali più elevate ed esiste una zona di transizione

$$\theta_{cr, s.s.} = f\left(\frac{w_s^2}{g \Delta d_{50}}\right)$$

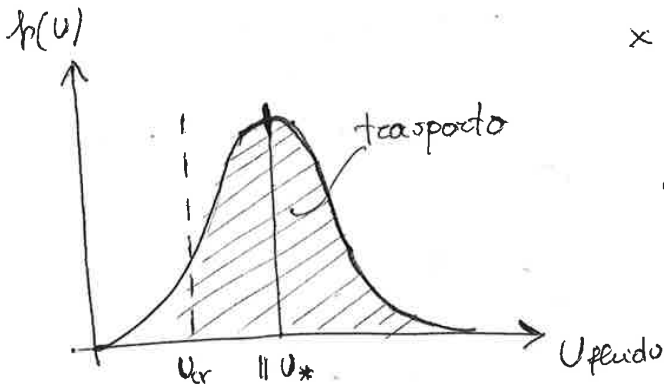
Qual'è il profilo verticale di concentrazione di materiale in sospensione nel caso di moto uniforme $C_{ss}(y)$?

$$C_{ss}(y) \rightarrow q_{ss} + q_s = \text{TRASPORTO SOLIDO TOTALE}$$

9) Quanto vale \bar{U}_s . Ipotesi:

12)

- 1) le particelle si muovono con velocità del fluido $U_s \equiv U$
- 2) Dato che c'è turbolenza supponiamo che la velocità del fluido sia distribuita secondo una gaussiana



x Kolinske:

$$\bar{U} = 11 U_*$$

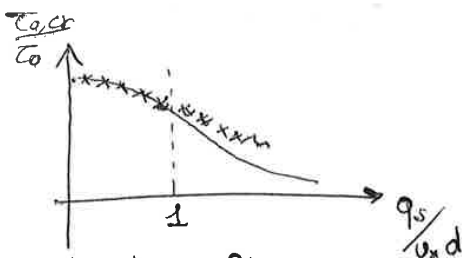
$$b = 0,25 \bar{U}$$

$$\bar{U}_s = \int_{U_{cr}}^{\infty} (U - U_{cr}) \cdot p(U) dU$$

Le particelle sono trasportate dalla turbolenza e quando sono catturate si muovono con la stessa velocità del fluido che sappiamo avere una distribuzione Gaussiana. Allora il valore medio della velocità delle particelle solide \bar{U}_s risulta essere la media delle velocità del fluido condizionata ad essere maggiore di U_{cr} (e quindi $\tau_{0,cr}$)

Si ricava

$$\frac{q_s}{U_* d} = f\left(\frac{\tau_{0,cr}}{\tau_0}\right) \quad \text{che funziona bene finché } \frac{q_s}{U_* d} < 1$$



Esplorando l'espressione matematica di $f \Rightarrow$ formula di Kolinske - Pezzoli

$$\frac{q_s}{U_* d} = 1,5 \left(\frac{\tau_{0,cr}}{\tau_0}\right)^{1/6} \cdot \left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{0,cr}}} - 1\right)^{5/3} \quad \text{valido anche per } \frac{q_s}{U_* d} > 1$$

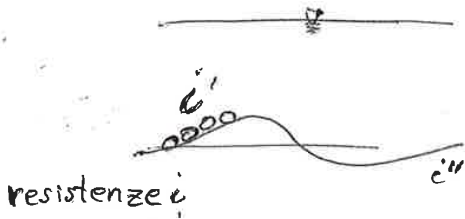
sostituendo in 1:

10)

$$q_s = 0 - \alpha_2 \tau_{ocr} \tau_0 \alpha_2 \tau_0^2$$

$$\Rightarrow q_s = \alpha_2 \tau_0 \cdot (\tau_0 - \tau_{ocr})$$

Formula di Meyer-Peter e Müller



- 1) dovute alle particelle i' (piccola scola)
- 2) dovute alle forme di fondo i'' (grande scola)

$$i = i' + i''$$

Ai fini del trasporto solido non compare la pendenza motrice i in toto, ma solo la quota parte dovuta alla scabrezza dei granuli

$$\frac{i'}{i} = \left(\frac{c_{6,s}}{c'_{6,s}} \right)^{2/3} \quad \text{dove} \quad c'_{6,s} = \frac{26}{d_{90}^{1/6}}$$

dipendenza dal granulo più grande. Sono i diametri > a dare più peso alle resistenze

$$\frac{R i'}{d_s} = 0,047 \cdot \frac{\rho_s - \rho}{\rho} = 0,25 \frac{q_s}{d_s \sqrt[3]{g \rho_s^2}}$$

R : raggio idraulico

d_s : diametro tipico particella

ρ/ρ_s : densità liquido/solido

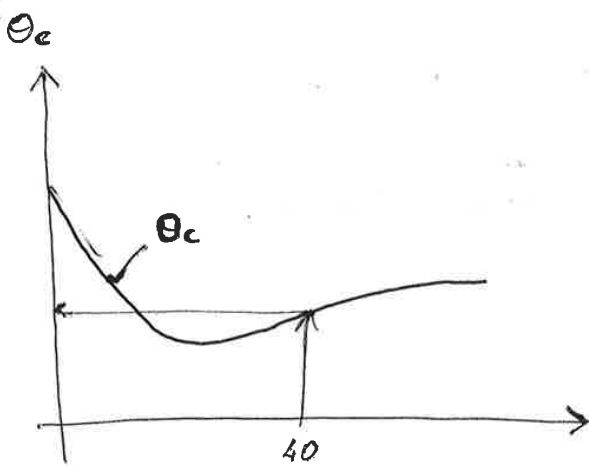
q_s : $\frac{kg}{m^2 \cdot s}$

i' : pendenza motrice

Siccome sia τ_* che Re_* dipendono da U_* si è pensato di eliminare la dipendenza di Re_* da U_* introducendo la grandezza ~~adimensionale~~

$$Re_*^2 \cdot \Theta^{-1} = \frac{U_*^2 \cdot d^2}{\nu^2} \cdot \frac{(\gamma_s - \gamma)d}{\tau_0} = \frac{U_*^2 d^2}{\nu^2} \cdot \frac{(\gamma_s - \gamma)d}{\rho U_*^2} = \frac{(\rho_s - \rho)gd^3}{\rho \nu^2} = \frac{\Delta g d^3}{\nu^2}$$

Diagramma di Shields modificato



$$\Theta_c = \frac{\tau_0}{(\gamma_s - \gamma)d} = \frac{U_*^2}{\Delta g d}$$

$$\Theta_c = \frac{U_{*,cr}^2}{g \Delta d}$$

$$D_* = d \sqrt{\frac{g \Delta}{\nu^2}} : \text{diometro di attrito}$$

noto $\Theta \rightarrow \tau_0 \rightarrow U \rightarrow Q$

L'espressione matematica è: $\Theta_c = 0,22 \cdot D_*^{-1} + 0,06 e^{-17,77 D_*^{-1}}$

Correzioni

Shields si è occupato di bassissime pendenze, $\alpha \approx 0$ valori del

Si possono ottenere il parametro Θ_c nel caso di pendenze non trascurabili

$$\Theta_c = f(Re_*) \cdot \left[\cos \alpha - \frac{\rho_s}{\rho - \rho_s} \frac{\sin \alpha}{\tan \phi} \right]$$

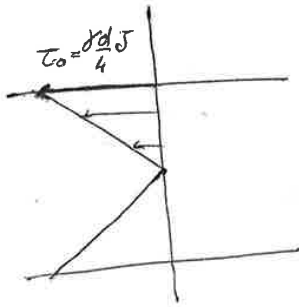
Shields tiene conto della pendenze

Nel caso di sommergenze non elevate si può utilizzare la formula di Armannini

I° Approccio: Si cerca la tensione tangenziale critica al fondo oltre la quale inizia il trasporto 5.1)

Ricorda:

τ nel caso di moto uniforme in un generico punto della superficie di un condotto cilindrico vale: $\gamma R J = \gamma \frac{R}{c} \cdot J = \gamma R i_f$



al centro $z = 0$
alle pareti $\tau = \gamma \frac{d}{4} J$

$\tau_0 = \rho g R \cdot i_f$, e per sez. rettangolari $R = y$

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{g y \cdot i_f}$$

$$U_f^2 \propto U_*^2$$

$$\tau_0 = K_s \cdot \rho \cdot U_f^2$$

U_* da informazioni sulla turbolenza. La turbolenza è responsabile di un certo mixing verticale delle q. di moto e quindi anche di un profilo di velocità medio. U_f è un valore di velocità ad una certa profondità di un profilo medio $\Rightarrow U_* \propto U_f$

A $U_{f,critica}$ corrisponderà il valore di $\tau_{0,cr}$

$$\tau_{0,cr} = K_s \cdot \rho \cdot U_{f,cr}^2$$

Questa espressione fa da ponte fra i due approcci. Il rontoggio sta nel cambio di scala del problema

U_f è a scala delle particelle.

τ_0 è a scale più grandi.

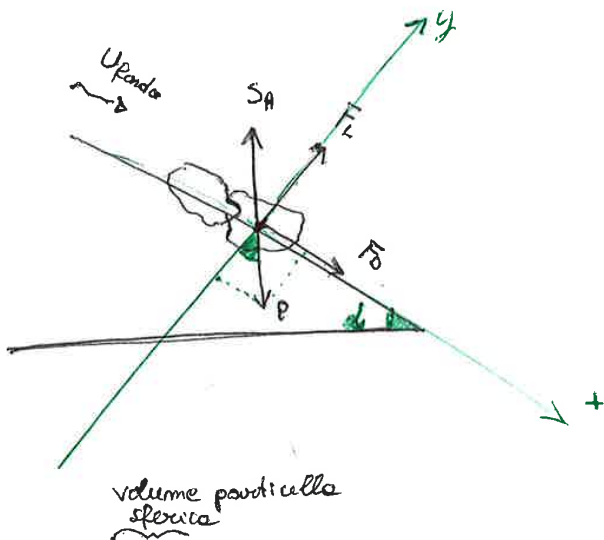
Si costruisce un valore di τ_0 adimensionale

$$\frac{\tau_{0,cr}}{(\rho_s - \rho) g d} = A'$$

Criteri di incipiente movimento

3)

I° approccio: fornire il valore di velocità critica oltre il quale inizia il fenomeno di trasporto



U_f : velocità di fondo

P : forza peso

S_A : spinta di Archimede

F_D : spinta dovuta al fluido che scorre sopra le particelle

F_L : forza di portanza

$$R = P_i - S_i = K_3 d^3 (\rho_s - \rho_f) = K_3 d^3 (\rho_s - \rho_f) \cdot g$$

peso immerso

$$F_D = \frac{1}{2} \rho C_D K_1 d^2 U_f^2$$

$$F_L = \frac{1}{2} \rho C_L K_2 d^2 U_f^2$$

lungo x: $R_i \sin \alpha + F_D = F_T$

lungo y: $-R_i \cos \alpha + F_L = F_N$

Nel moto incipiente deve essere verificata la condizione:

$$\frac{F_T}{F_N} = \frac{R_i \sin \alpha + F_D}{-R_i \cos \alpha + F_L} = \tan \varphi$$

φ : angolo di attrito interno

$$\Rightarrow \frac{P_i \sin \alpha + \frac{1}{2} \rho C_D K_1 d^2 U_f^2}{-P_i \cos \alpha + \frac{1}{2} \rho C_L K_2 d^2 U_f^2} = \tan \varphi$$

$$\frac{U_{f,cr}^2}{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d} = \frac{2 K_3 (\tan \varphi \cos \alpha - \sin \alpha)}{C_D \cdot K_1 + C_L \cdot K_2 \tan \varphi} = A$$

Not A $\Rightarrow U_{f,cr} \propto \sqrt{d}$

RAPPORTO ADIMENS.
CHE CONTIENE
LE VARIABILI IDRODIN.

- Formule empiriche di Ney
- " " di Cardens

velocità di sedimentazione

2)

Stia una particella sferica che cade in un fluido fermo:



\vec{F}_r : forza di resistenza subita da un corpo che si muove in un fluido

$$F_r = \frac{1}{2} \rho_{\text{fluido}} \cdot A \cdot w_{\text{sed}}^2 \cdot C_r$$

w_{sed} : velocità di sedimentazione

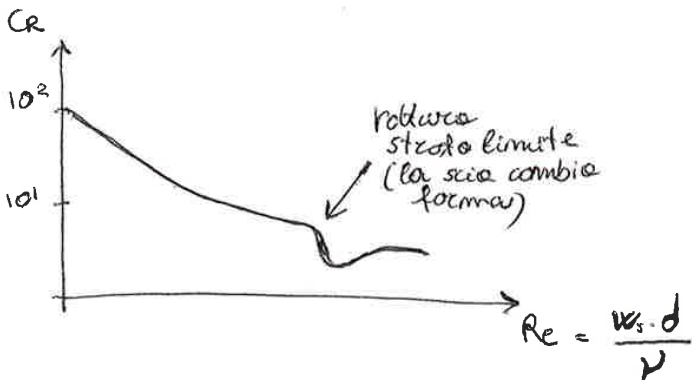
\vec{S}_a = spinta di archimede

C_r : coefficiente di resistenza

$$S_{av} = \rho_f \cdot g \cdot V = \gamma_f \cdot V = \gamma_f \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \gamma_f \cdot \frac{\pi}{6} d^3$$

$$\vec{R} = \vec{P} - \vec{S}_{av} = \frac{\pi}{6} d^3 \cdot (\gamma_s - \gamma_{\text{fluido}})$$

All'equilibrio: $F_r = R \Rightarrow w_s = \sqrt{\frac{4}{3C_r} \cdot \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \cdot d \cdot g} \Rightarrow \underline{w_s \propto \sqrt{d}}$



Dentro C_r c'è la struttura della turbolenza creata dietro il corpo che si muove ~~dentro~~. Si forma uno strato limite che poi si espone e forma una scia

• Formule di Kennedy

Quando la corrente è in grado di trasportare particelle solide? \Rightarrow Problema dell'incipiente movimento

I APPROCCIO: trovare v_{cr} oltre la quale si ha trasporto solido

II APPROCCIO: trovare τ_{ocr} oltre la quale si ha trasporto solido

Dinamica dei laghi

1)

Caratteristiche:

- Il lago non è fermo : forte miscelamento in inverno
forte stratificazione in estate
- I moti sono rilevanti e dovuti a piccoli gradienti di temp. e salinità
- Ci sono oscillazioni nel tempo

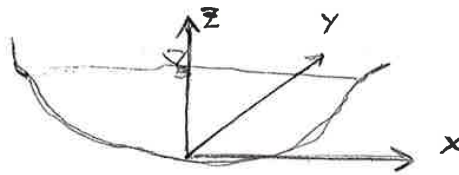
Dinamica dei fluidi stratificati

$$\rho = \rho_0 + \underbrace{\rho_e(z)}_{\substack{\text{gradiente} \\ \text{imposto} \\ \text{dall'esterno} \\ \text{(es. } \Delta T \text{ o} \\ \Delta \text{salinità)}}} + \underbrace{\rho(x, y, z, t)}_{\text{perturbazione}}$$

Come si caratterizza la stratificazione ?

$$\epsilon = - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_e}{dz}$$

"-" perché
decrea
verso
l'alto



ϵ indica quanto è intensa la stratificazione

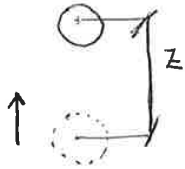
Se $\epsilon = 0$ non ci sono gradienti di densità \Rightarrow fluidi omogenei



2) spostando una particella dal basso verso l'alto quest'ultima³⁾ ha densità maggiore dell'ambiente circostante \Rightarrow torna in basso

Poiché la stratificazione rende più "robusto" il fluido alle azioni che cercano di spostarlo, reagisce spingendo in alto la particella

Viene a crearsi un moto armonico smorzato



$$-\epsilon \int_0^z \rho' \delta V \cdot g = \int_0^z \rho' \delta V \frac{d^2 z}{dt^2}$$

\downarrow
 forza di richiamo
 \downarrow
 $m \cdot a$

$$\Rightarrow -\epsilon z g = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

$$-N z = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

posto $N = \sqrt{\epsilon g}$ frequenza

eq. oscillatore armonico

Perturbando la massa con Δp questa reagisce con delle oscillazioni dette seste

Per le perturbazioni che inducono una rotazione delle massa, essa reagisce con una coppia di richiamo generando un moto oscillatorio detto BAROCLINO

Quanto è importante l'effetto della stratificazione su queste oscillazioni?

$$F_i = \frac{N^{-1}}{H/U} = \frac{\text{temporale}}{\text{SCALA TIPICA DELLE OSCILLAZIONI}} = \frac{U}{NH}$$

SCALA TEMPORALE
 Tipica della perturbazione imposta

$F_i \gg 1$ si può trascurare l'effetto della stratificazione

$F_i \leq 1$ occorre considerare l'effetto della stratificazione

Obiettivi Esercitazione 1

1) Calcolo flusso atmosferico di CO₂ emesso da terreno alpino

2) Analisi statistiche

- media, cv
- distr. di frequenza
- correlazioni

Dati disponibili:

- velocità del vento
- temp. aria
- [] CO₂

• serie di 30 minuti di misure con freq. 20 Hz → 0,05 s

⇒ $\frac{30 \cdot 60}{0,05} = 36'000$ misure

Tecnica eddy - covarianza (correlazione turbolenta)

Tecnica che serve per misurare i flussi di massa energia che una superficie vegetale scambia con l'atmosfera
 La tecnica mette in relazione la direzione del moto delle particelle di aria al di sopra della sup vegetale e la massa di gas trasportata in questo moto

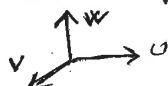
$$CO_2 \text{ IN} - CO_2 \text{ OUT} = CO_2 \text{ netto}$$

Applicazione

• ovunque ci sia uno scambio di sostanze tra una superficie (terreno, oceano...) e una corrente turbolenta (aria, acqua) che la lambisce

principio:

Calcolo ~~dei~~ dei flussi turbolenti di sostanze tramite misure di variazione di velocità verticale w' e di concentrazione c'



$$w'(t) = w(t) - W$$

$$c'(t) = c(t) - C$$

$$f(t) = w'(t) \cdot c'(t)$$

Infine calcolando la media di $f(t)$ si ottiene $F = -0,0004$ ovvero il flusso medio di CO_2 ~~mol/m²s~~

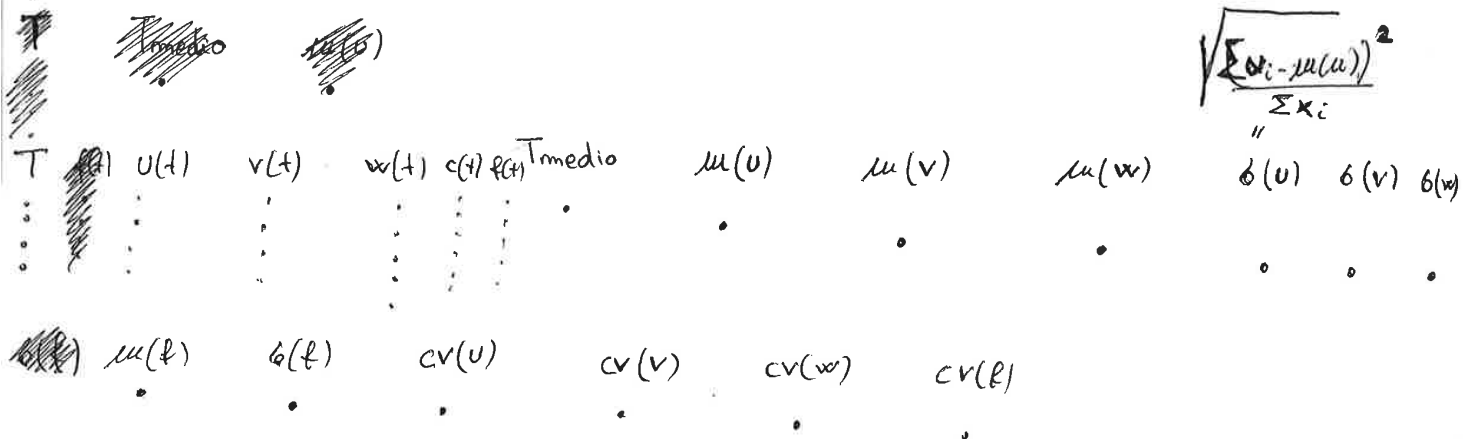
2) Volutare per la serie u, v, w, c, T, f

a) media $\mu, \sigma, CV = \frac{\sigma}{\mu}$

b) distribuzione di frequenza

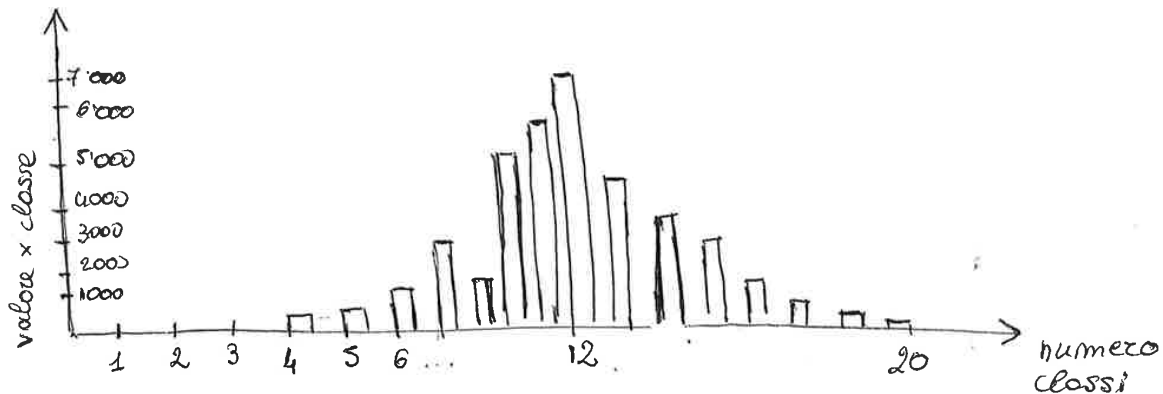
c) andamento dell'autocorrelazione

a)



b) calcolo delle distribuzioni di frequenze

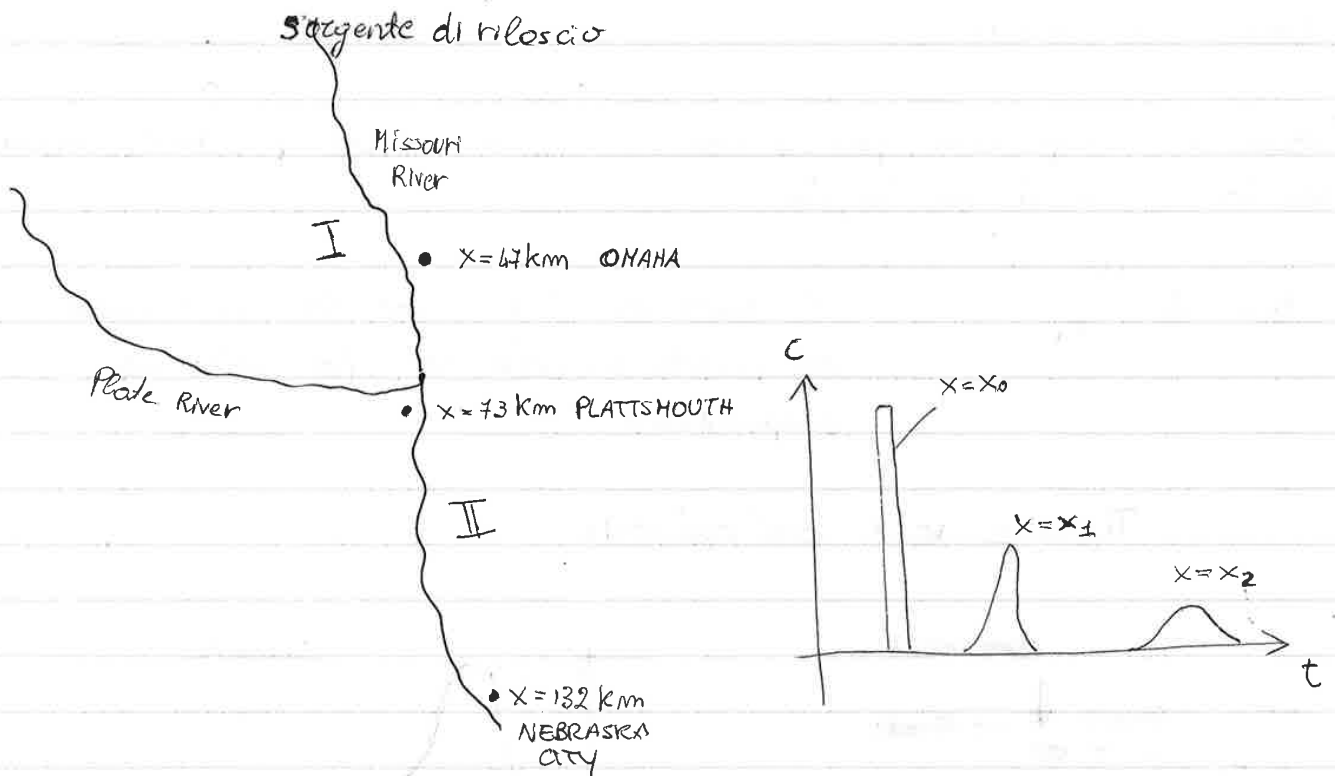
u:



u valore massimo 4,7 val. min -4,7 range 9,2 $\Delta = \frac{\text{range}}{20}$ 0,46 con 20 n. classi

Esercitazione 2

Rilascio istantaneo nel fiume di 100 kg di uranio in forma disciolta.
 • Determinare gli effetti sulle concentrazioni in corrispondenza di alcuni centri urbani $C(x,t)$, analizzando le condizioni di piena e di magra.
 Quando e per quanto tempo $C(x,t) > C_{LIM} = 15 \mu\text{g}/\text{l}$?



Equazione del trasporto 1-D

eq. dispersione x strato laminare

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

con $U = \frac{Q}{A}$ = velocità media corrente m/s

fornisce i valori di [J] medi sulla sezione del corso d'acqua

K: coeff. di dispersione m^2/s

Soluzione nel caso di rilascio istantaneo di una massa M di inquinante è:

$$C(x,t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4\pi K(t-t_0)}} \cdot \exp \left[-\frac{((x-x_0) - U(t-t_0))^2}{4K(t-t_0)} \right]$$

A: area sezione m^2
 x_0 : posizione di rilascio
 t_0 : istante di rilascio

N.B.: L'equazione 1D è valida nel caso di soluto ben miscelato su tutta la sezione (conc. uniforme sia verticalmente che trasversalmente)

Nei punti iniziali dei due tratti tale condizione è verificata dopo una distanza di miscelamento L_{mix} necessaria affinché il soluto sia miscelato dalla turbolenza E_t su tutta la larghezza v del corso d'acqua

$$L_{mix1} = 0,1 \frac{v^2}{E_t} \cdot U \quad (\text{immissione centrale})$$

$$L_{mix2} = 0,4 \frac{v^2}{E_t} \cdot U \quad (\text{immissione su sponda})$$

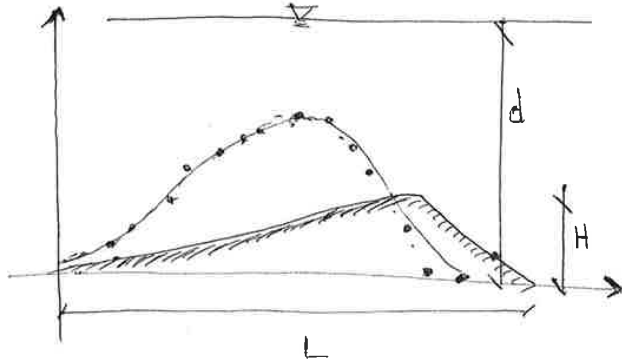
con E_t coeff. di dispersione turbolenta trasversale $E_t = 0,6 \cdot d \cdot U_*$

$$\text{con } U_* = \sqrt{gdS} \begin{matrix} \nearrow \text{pendenza alveo} \\ \downarrow \text{profondità} \end{matrix}$$

vel. attrito

② Teoria di scambio in olveo con dune

Sperimentalmente si osserva un ondamento del carico $h(x)$ e approssimativamente sinusoidale $h(x) = h_0 \sin(kx)$



$k = \frac{2\pi}{L}$ n. d'onda [m⁻¹]
 h_0 : semiampiezza del carico [m]

$h_0 = 0,28 \frac{U^2}{2g} \left(\frac{H_{duna}/d}{0,34} \right)^d$

con $d = \frac{3}{8}$ se $() \leq 1$
 $d = \frac{3}{2}$ se $() > 1$

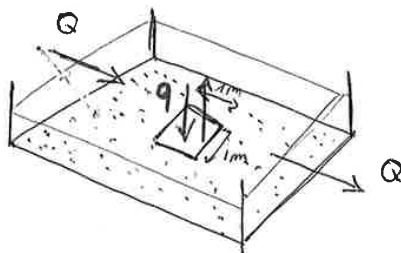
Nota h_0 è possibile ottenere una stima delle scale tipiche di:

- velocità di filtrazione (superficiale) $U_0 = K k h_0$ m/s K cond. idraulica
- tempo di filtrazione (superficiale) $t_0 = \frac{n}{K U_0}$ [s]

e di conseguenza calcolare

- 1) FLUSSO q [m³/s]: cioè la portata di acqua scambiata per unità di superficie $\frac{m^3}{m^2 \cdot s}$
- 2) DISTRIBUZIONE TEMPI DI RESIDENZA $R(t)$ [-]: cioè l'intervallo di tempo che una particella ^{di H₂O} può trascorrere nei sedimenti prima di tornare nel corso d'acqua

1) FLUSSO: $q = \frac{U_0}{\pi}$ [m³/s]



Calcolo di $m(t_i)$

4

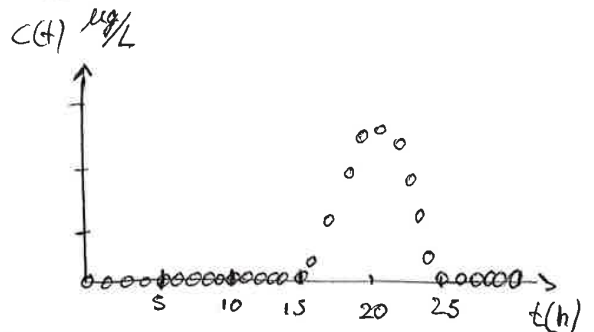
• Determinare $C(t)$ [nota] e $R(t)$ [da calcolare] su un intervallo temporale $t = [t_1, t_2 \dots t_n]$

• Per ogni valore di t_i su cui si vuole calcolare $m(t_i)$:

- 1) Definire $\tau = [t_1, t_2 \dots t_i]$
- 2) Individuare i valori $C(\tau) = [C(t_1), C(t_2) \dots C(t_i)]$ corrispondenti
- 3) Definire $t_i - \tau = [t_i - t_1, t_i - t_2 \dots t_i - t_i = 0]$ (ordine decrescente)
- 4) Calcolare $R(t - \tau)$
- 5) Calcolare $f(\tau) = q C(\tau) R(t - \tau)$
- 6) Integrare $m(t_i) = \sum_J f(\tau_J) \cdot (\tau_{J+1} - \tau_J)$

Per ogni istante (es $t_i = 20h$) voglio calcolare m_i

τ	$C(\tau)$	$t_i - \tau$	$R(t_i - \tau)$	$q \cdot C \cdot R \cdot \Delta \tau$
0h	$C(0)$	$20 - 0 = 20h$...	
1h	$C(1h)$	$20 - 1 = 19h$...	
2h	$C(2h)$	$20 - 2 = 18h$...	
...
20h	$C(20h)$	$20 - 20 = 0h$	1	



Ripetere per tutti i valori t_i scelti

τ	$C(\tau)$	<small>tempo di residenza</small> $t_i - \tau$	$R(t_i - \tau)$	$q C \cdot R \cdot \Delta \tau$
0	$C(0)$	$20 - 0$...	
1	$C(1h)$	$20 - 1$...	$q \cdot C \cdot R \cdot (1 - 0)$
2	$C(2h)$	$20 - 2$...	
3	
...
20h = t_i	$C(20h)$	$20 - 20$...	

$$m(t_i) = \int_0^{t_i} q C(\tau) R(t_i - \tau) d\tau = \int_0^{t_i} f(\tau) d\tau \cong \sum_J f(\tau_J) (\tau_{J+1} - \tau_J)$$

$T(\text{ore})$	$C(T)$	$t_i - T$	$R(t_i - T)$	$q C \cdot R \cdot \Delta T$
0	$1 \cdot 10^{-8}$	20	...	0
1	10^{-8}	19	...	$q C(1) R \cdot (1-0)$
2	...	18	...	$q C(2) R \cdot (2-1)$
3	...	17	...	$q C(3) R \cdot (3-2)$
4	...	16
...
20	10^{-8}	0	1	

$m(t_i = 20)$

$t_i = 20$

$T(\text{ore})$	$C(T)$	$t_i - T$	$R(t_i - T)$	$q C R \Delta T$
0	...	19	...	$q C(1) R (1-0)$
1	...	18
2	...	17
3
4
...
20	...	-1	1	

$m(t_i = 19)$

$t_i = 19$

VELOCITÀ DI SEDIMENTAZIONE

(2)

$$\uparrow F_D = \frac{\pi}{2} \rho C_R A \cdot w_s^2$$



$$\downarrow F' = F_g - \rho_a = \frac{\pi}{6} d^3 \cdot g (\rho_s - \rho)$$

F_D : forza idrodinamica

F' : forza peso del grano

All'equilibrio $F_D = F' \Rightarrow$ si calcola la velocità di sedimentazione w_s che influenza il trasporto solido in sospensione

Velocità adimensionale: $R_f = \frac{w_s}{\sqrt{\Delta g D}}$ con $\Delta = \frac{\rho_s}{\rho} - 1$

dove $R_f = \exp \{ -b_1 + b_2 \ln(Re_p) - b_3 \dots \}$

dove $Re_p = \frac{\sqrt{\Delta g D} \cdot D}{\nu}$ con $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ viscosità cinematica H_2O

Procedimento

• Per ogni Q_k di fondo calcolare la portata solida volumetrica per unità di larghezza $q_{b,k} [m^2/s]$ e in sospensione $q_{ss,k}$

• Calcolare le rispettive portate solide in massa $[kg/s]$

$$G_{b,k} = \rho_s \cdot q_{b,k} \cdot w_k \quad G_{ss,k} = \rho_s \cdot q_{ss,k} \cdot w_k$$

$\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m^2}{s} \cdot m$ $\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m^2}{s} \cdot m$

• Calcolare la portata media oraria

$$\bar{G}_b = \sum G_{b,k} \cdot P_k \quad \bar{G}_{ss,k} = \sum G_{ss,k} \cdot P_k$$

• Calcolare la portata solida totale

$$\bar{G}_{TOT} = \bar{G}_b + \bar{G}_{ss} \quad [Ht/anno]$$

↓ ↓
fondo + sospensione