



Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2196A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Bortolini Rodrigo

MATERIA: Scienza delle costruzioni - Prof. Chiaia

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

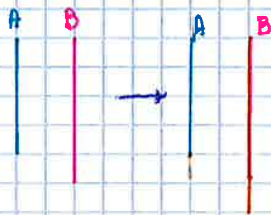
ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

ANALISI della DEFORMAZIONE = è lo studio dei cambiamenti di forma e volume di un corpo soggetto ad azioni esterne

La deformazione NON è: - spostamento
- rotazione
- allungamento assoluto.

quindi nasce in allungamento relativo

Prendiamo un'asta, e confrontiamola con un'asta di differente lunghezza. Se noi produciamo un allungamento del 10% identico; definiamo la deformazione assiale

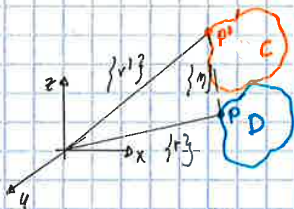


$$\epsilon = \frac{L_f - L_i}{L_i} = \frac{\Delta L}{L_i}$$

L'asta A subisce una deformazione maggiore rispetto alla B.

Le deformazioni sono delle grandezze esprimibili in % quindi ADIMENSIONALI

MISURA delle DEFORMAZIONI



Dobbiamo introdurre delle quantità di tipo INFINITESIMO

Consideriamo un corpo tridimensionale nello spazio (x, y, z) descritto da un dominio di punto D nello spazio.

A deformazione avvenuta il corpo Ω è trasformato nella configurazione C .

Il punto P in Ω è portato nella posizione P'

P individuato da $\{r\}$ (vettore posizione) in Ω è trasformato in $\{r'\}$; la distanza tra P e P' in C è chiamata VETORE SPOSTAMENTO $\{m\}$.

$$\{m\} = \{r'\} - \{r\}$$

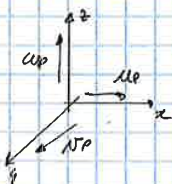
In generale vogliamo trovare in funzione spostamento f tale che ci porti dal dominio

$$f: D \rightarrow C \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Oppure $f: \{r\} \rightarrow \{r'\}$

$f: P \rightarrow \{m\}$ $P = \text{qualsunque punto del solido}$

• Il vettore spostamento avrà 3 componenti:



$$\{m\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

• la funzione f : - DEFORMAZIONE
 - SPOSTAMENTO - MOTO RIGIDO (traslazione + rotazione) || COMPRESSE

quindi dalla funzione dobbiamo estrarre la parte deformativa dal moto rigido (dobbiamo escluderli)

Dobbiamo quindi scomporre $[J_p]$ in rotazione + deformazione.
 ed è possibile farlo solo con la rotazione $[J_p] = [\varphi]$

$$\varphi_p = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ +\varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{matrice di rotazione rigida} \\ \text{antisimmetrica}$$

Ci ricordiamo che la nostra matrice, essendo quadrata, è composta da una parte simmetrica e una antisimmetrica.

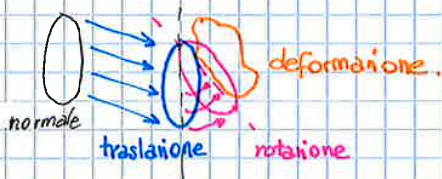
antisimmetrica = rotazione
 simmetrica = deformazione

$$[J_p] = \frac{1}{2} ([J_p] + [J_p]^t) + \frac{1}{2} ([J_p] - [J_p]^t)$$

$[E_p]$
 $[\varphi_p]$

quindi

$$\{m_{e_j}\} = \{m_p\} + [\varphi_p] \{dr_j\} + [E_p] \{dr_j\} \quad \text{traslazione + rotazione + deformazione}$$



I moti rigidi non procurano differenze del materiale, solo la deformazione procura uno sforzo.

la Jacobiana si scrive come:

$$[J_p] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Per differenza; conoscendo φ ; si possono ricavare E

$$[E_p] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

fuori diagonale: abbiamo le derivate miste; non sei termini simmetrici.
 Per semplicità possiamo ricavarla come:

$$E_p = \begin{bmatrix} E_x & \frac{1}{2} \delta_{yx} & \frac{1}{2} \delta_{zx} \\ \frac{1}{2} \delta_{xy} & E_y & \frac{1}{2} \delta_{zy} \\ \frac{1}{2} \delta_{xz} & \frac{1}{2} \delta_{yz} & E_z \end{bmatrix}$$

E = dilatazioni assiali
 δ = scorrimenti angolari

$[E]$ adimensionali. Valori molto piccoli.

↳ piccoli spostamenti

Sappiamo che per un vettore la sua componente si ottiene moltiplicando il vettore per il versore trasponso.

$$M_{nn} = \text{componente lungo } n \text{ per lo spostamento } \{m_n\} = \{n_j\}^t \cdot \{m_n\} = \{n_j\}^t [E_p] \cdot \{n_j\}$$

$$M_{nm} = \{m_j\}^t \{m_n\} = \{m_j\}^t [E_p] \{n_j\}$$

$$M_{mm} = \{m_j\}^t \{m_m\} = \{m_j\}^t [E_p] \{m_j\}$$

$$M_{mn} = \{n_j\}^t \{m_m\} = \{n_j\}^t [E_p] \{m_j\}$$

L'algebra ci permette di tirare fuori la legge di reciprocità delle proiezioni del vettore spostamento.

$$M_{nm} = M_{mn}$$

vale per qualsiasi direzione.

ci basta osservare che $[E_p]$ è una matrice SIMMETRICA.

Se inglobiamo i coseni direttori dei nuovi assi in una matrice di rotazione $[N]$ è facile dimostrare per la quale la matrice

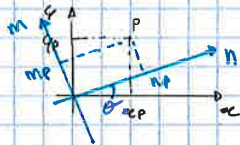
$$[N] = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ m_x & m_y & m_z \\ p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}$$

matrice di rotazione

$$[E_p]_{nme} = [N] [E_p]_{xyz} [N]^t$$

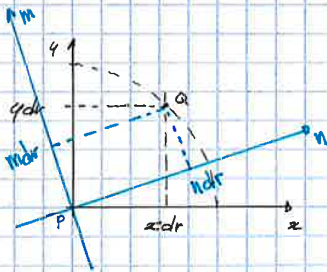
$$[E_p]_{nme} = \begin{bmatrix} E_n & \frac{1}{2} \delta_{nm} & \frac{1}{2} \delta_{ne} \\ \frac{1}{2} \delta_{nm} & E_m & \frac{1}{2} \delta_{me} \\ \frac{1}{2} \delta_{ne} & \frac{1}{2} \delta_{me} & E_e \end{bmatrix}$$

Dimostriamo:



Individuiamo un punto P in un sistema di riferimento normale e in uno rotato. Il pennucchio di traslazione di P da xyz a nme è governato dalla matrice di rotazione

$$P_{xyz} = N P_{nme}$$



ci poniamo nel punto P e lavoriamo in un intorno sferico infinitesimo, considerando un punto Q di distanza dr da P. Dobbiamo calcolare il valore di dr_{xyz} rispetto a dr_{nme}

Dalla trattazione vista in precedenza, nel sistema di riferimento xyz, avremo

$$M_{a,xyz} = E_{p,xyz} \cdot dr_{xyz}$$

Ora possiamo scomporre $M_{a,xyz}$ nel nuovo sistema di riferimento

$$M_{a,xyz} = N M_{a,nme} = E_{p,xyz} \cdot dr_{xyz} = E_{p,xyz} N dr_{nme}$$

N è una matrice di rotazione tale per cui $N = N^{-1}$, moltiplichiamo per entrambi i membri N^{-1}

$$N M_{a,xyz} = E_{p,xyz} \cdot N dr_{nme}$$

$$M_{a,nme} = {}^t N E_{p,xyz} N dr_{nme}$$

Confrontando con $M_{a,nme} = E_{p,nme} \cdot dr_{nme}$ avremo:

$$E_{p,nme} = {}^t N E_{p,xyz} N$$

• $J_1 = \text{tr}[E] = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$

INVARIANTE LINEARE

• $J_2 = -\det \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \epsilon_z \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y \end{pmatrix}$

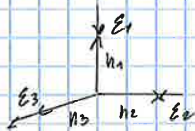
INVARIANTE QUADRATICO

• $J_3 = \det[E_p]$

INVARIANTE CUBICO

Risolviendo; ci ricaveremo 3 soluzioni \rightarrow autovalori del tensore $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ andranno inseriti nella matrice dei coefficienti $[A]$ una alla volta e risolvendo il sistema lineare \rightarrow ci da le 3 incognite $\{n_1, n_2, n_3\}$ che sono i 3 autovettori del sistema e rappresentano le 3 direzioni principali di deformazione.

Quando impiego ϵ_1 otterrò n_1 ; analogo per gli altri.



$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 =$ dilatazioni principali

$\{n_1\}, \{n_2\}, \{n_3\} =$ direzioni principali.

• Questa equazione cubica ha necessariamente una soluzione reale ma ne può avere due complesse.

\hookrightarrow grazie alla SIMMETRIA del tensore $[E_p]$, le soluzioni $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ sono sempre in campo reale

• Il tensore risulta diagonalizzato

$$[E_p]_{n_1, n_2, n_3} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{13} = 0$

• Le tre dilatazioni principali sono il grado di estremo tra le dilatazioni assiali in P.

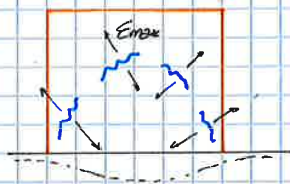
Se $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$

ϵ_1 max dilatazione in P $\parallel \epsilon > 0$
 ϵ_3 min dilatazione in P

ϵ_1 min contrazione $\parallel \epsilon < 0$
 ϵ_3 max contrazione

Questi sono gli assi che soffrono di più.

• Nei materiali fragili le fessure si propagano ortogonalmente alla massima dilatazione possibile.



Il cedimento fa sì che si propagano delle fessure e formano un distacco di una parte del arco che sembra staccarsi dal resto del pannello. ci permette di dire che la ϵ_{max} sarà ortogonale alla direzione di propagazione della fessura stessa

Nei materiali duttili la crisi avviene nei piani di massimo scorrimento angolare σ_{max} .

EQUAZIONI di COMPATIBILITÀ da tensori di deformazione posso calcolarmi dei stati di spostamento che sia omeomorfici.

Lo sono le ipotesi di partenza.

Il nostro vettore spostamento ha 3 componenti indipendenti $\{m\} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, al nostro vettore spostamento abbiamo associato un tensore $[E_p] \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$, con 9 componenti dove 6 sono indipendenti (in virtù della simmetria)

$[E_p]$ applicazione che trasforma vettori in vettori e tensori in tensori; se riferito ad uno spostamento però rappresenta un pennaggio da \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^6 .

- Non tutti i campi tensionali continui producono dei campi di spostamenti (per integrazione) che siano omeomorfici.

Per fare sì che sia verificato l'omeomorfismo c'è bisogno che le 6 componenti indipendenti di $[E_p]$ siano legate da 3 relazioni differenziali che ne limitano la mutua indipendenza.

- DERIVIAMO I 3 SCORRIMENTI ANGOLARI RISPETTO ALLE 2 COORDINATE di COMPETENZA

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad \gamma_{xy} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

Si ragiona allo stesso modo sulle altre componenti.

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}$$

N.B. Per ricavarci le deformazioni devo fare un pennaggio intermedio.

$$E_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad E_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Per la E_z derivo 2 volte per y e per E_y due volte per x .

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Coni posso sostituire nell'equazione di sopra.

$\{t_n\} = \underline{\text{VETTORE TENSIONE}}$

vettore a 3 componenti. Rappresenta la forza scambiata tra due parti del corpo nei punti della superficie di separazione.

In generale $\{t_n\}$ non è \perp al piano di taglio π (come invece accade nei fluidi in pressione).

$\{t_n\} = t_n(P, \{n\})$

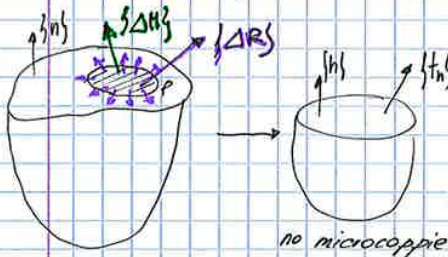
t_n : funzione del punto P, ma anche funzione del piano di taglio.

Tensione si misura in $\boxed{\text{Pa}}$ (pressione)

Nel momento in cui consideriamo un altro piano π_2 , passante per P e normale $\{m\}$. I vettori tensori sono differenti.

$\{t_m(P)\} \neq \{t_n(P)\}$

Il vettore tensore rappresenta un concetto limite (non ne esiste una dimostrazione matematica). La tensione non è misurabile; le deformazioni sono misurabili.



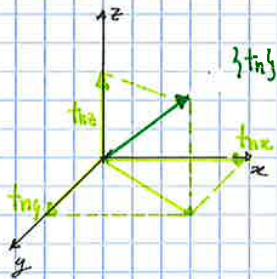
Consideriamo un area dR sulla superficie di separazione. La risultante delle forze mutue agente su dR la chiameremo $\{ΔR\}$ e una risultante momento $\{ΔM\}$.

$\lim_{dR \rightarrow 0} \frac{\{ΔR\}}{dR} = \{t_n\}$

$\lim_{dR \rightarrow 0} \{ΔM\} = \{0\}$

assenza di MICROCOPPIE

COMPONENTI CARTESIANE di $\{t_n\}$

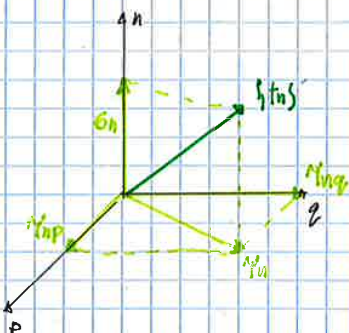


$\{t_n\} = t_{nx} \cdot \vec{i} + t_{ny} \cdot \vec{j} + t_{nz} \cdot \vec{k}$

Nello studio della tensione si preferisce suddividere il nostro vettore tensione su due componenti (direzioni) particolari.



G_n = componente normale (al piano π)
 T_n = componente tangenziale



$\{t_n\} = G_n \cdot \vec{n} + T_{np} \cdot \vec{p} + T_{nq} \cdot \vec{q}$

Componenti speciali del vettore TENSIONE

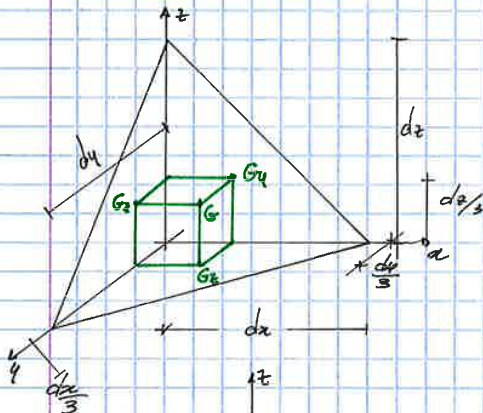
È analogo al tensore di deformazione:

$$\{ \epsilon_n(p) \}_y = [\epsilon_p] \{ n \}_y$$

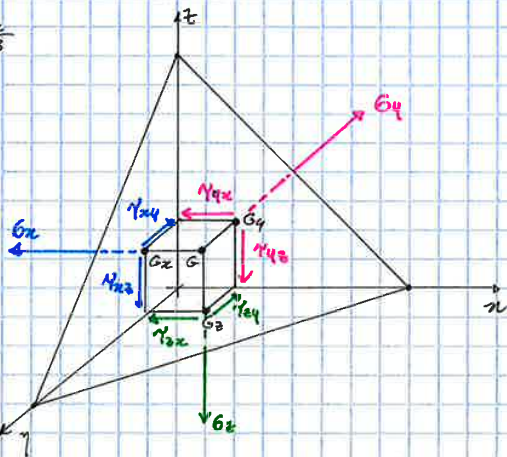
$$\{ \sigma_n(p) \}_y = [\sigma_p] \{ n \}_y$$

quindi visto che: $[\epsilon_p]$ è un tensore del secondo ordine il nostro $[\sigma_p]$ sarà un tensore del secondo ordine che trasforma il vettore normale $\{ n \}_y$ nel relativo vettore tensione $\{ \sigma \}_y$

SIMMETRIA della MATRICE di TENSIONE



Scriviamo l'equilibrio alla rotazione attorno a 3 direzioni particolari // agli assi x, y, z.
In particolare a delle direzioni: G_{Gx}, G_{Gy}, G_{Gz}
Vogliamo fare l'equilibrio alle rotazioni intorno a G_{Gx}, G_{Gy} e G_{Gz}



- le componenti di $\{ \sigma \}_y$ non hanno braccio perché sono applicate in G.
- le componenti di $\{ t_{xy} \}, \{ t_{yz} \}, \{ t_{zx} \}$ possono aver braccio rispetto a queste direzioni.

concentriamoci sulla G_{Gx} .

- G_x, G_y, G_z hanno braccio nullo
- T_{xy} e T_{yx} perché convergono nella direzione G_{Gx} (effetto coppia)
- T_{yz} e T_{zy} sono parallele a G_{Gx} ci rimangono solo più: T_{yz} e T_{zy}

$$\underbrace{T_{yz} dRz dz}_{\text{FORZA}} \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{BRACCIO}} - \underbrace{T_{zy} dRy dy}_{\text{FORZA}} \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{BRACCIO}} = 0$$

sapendo che:

$$\frac{1}{3} dRy dy = \frac{1}{3} dRz dz = dV$$

Semplificando dall'espressione di sopra otteniamo:

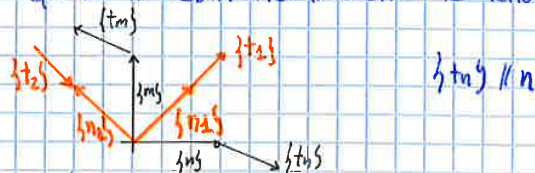
$$T_{yz} = T_{zy}$$

"reciprocità delle tensioni tangenziali"

quindi noi sappiamo che le frecce non possono essere concordi nella rotazione attorno a G_{Gx} .

Quindi: la matrice $[\sigma]$ deve essere SIMMETRICA, I termini due a due delle τ sono uguali.

DIREZIONI PRINCIPALI del TENSORE : esistono delle direzioni (nel punto P) nel quali si ottengono soltanto le tensioni normali.



Devono valere contemporaneamente:

• equazione tensoriale $\{t_n\} = [G] \{n\}$

• equazione vettoriale $\{t_n\} = \sigma_n \{n\}$ (cerca del parallelismo)
 σ_n scalare

Vale solo per quelle direzioni privilegiate // od $\{n\}$

Sottraggo l'equazione vettoriale con quella tensoriale

$$[G] \{n\} - \sigma_n \{n\} = \{0\}$$

Raccolgo

$$([G] - [I] \sigma_n) \cdot \{n\} = \{0\}$$

È un problema agli AUTOVALORI ed AUTOVETTORI di $[G]$

$$\begin{bmatrix} G_x - \sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & G_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & G_z - \sigma_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

matrice dei coefficienti incognite $[A]$

$n_x = n_y = n_z = 0$ non ha senso fisico perché deve sussistere la relazione di normalità tra i coseni direttori $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

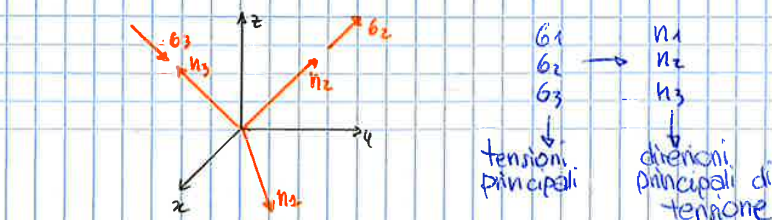
Per avere soluzioni diverse dalla banale $\det[A] = 0 = \det([G] - [I] \sigma_n)$

$$\sigma_n^3 - T_1 \sigma_n^2 - T_2 \sigma_n - T_3 = 0$$

invarianti della tensione (indipendenti dal sistema di riferimento)

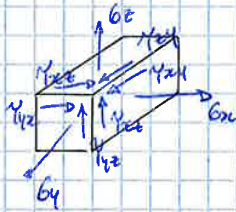
- $T_1 = G_x + G_y + G_z$ (invariante lineare)
- $T_2 = - \begin{vmatrix} G_x & \tau_{yz} \\ \tau_{xy} & G_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} G_y & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & G_x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} G_x & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & G_z \end{vmatrix}$ (invariante quadratico)
- $T_3 = \det[G]$ (invariante cubico)

dal $\det[A]$ troviamo eq. di 3° ordine → 3 soluzioni (autovalori G_1, G_2, G_3)
 → sostituisco una alla volta nella matrice $[A]$ e risolvo il sistema lineare → 3 soluzioni (autovettori n_1, n_2, n_3)



TENSORE IDROSTATICO

TENSORE DEVIATORICO



All'intorno di un punto P all'interno di un corpo c'è una funzione di sforzo generale che prevede la presenza delle 9 componenti del tensore degli sforzi.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

9 componenti della quale 6 sono indipendenti

La TENSIONE NORMALE MEDIA:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{I_1}{3}$$

valore medio delle 3 tensioni principali; ma anche la somma delle 3 tensioni normali su qualunque sistema di riferimento.

È possibile scomporre la sollecitazione in 2 parti distinte:

$$[\sigma] = [\sigma^i] + [\sigma^d]$$

tensore idrostatico tensore deviatorico

$$[\sigma^i] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma^d] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \bar{\sigma} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} - \bar{\sigma} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} - \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

È responsabile della variazione di volume. Dal punto di vista energetico è associato alla parte sferica della deformazione (indipendente dalla terna di riferimento)

Sarà il vero responsabile della crisi dei materiali in quanto sono associati le distorsioni del materiale
 ↳ cambiamenti forma del materiale
 Dipende dal sistema di riferimento.

CERCHI di MOHR

descrivere lo stato di sforzo all'intorno di un punto in maniera grafica. Viene descritto in un piano \$(\sigma, \tau)\$ detto PIANO delle TENSIONI

Può essere applicata allo studio grafico dei tensori del secondo ordine.

Assegnato in generico stato tensionale tramite questa teoria si possono calcolare:
 - le tensioni principali
 - le direzioni principali all'intorno di un punto partendo da un qualsiasi sistema di riferimento.

Posizioniamoci mentalmente nel sistema principali \$n_1, n_2, n_3\$, il vettore tensore sarà:

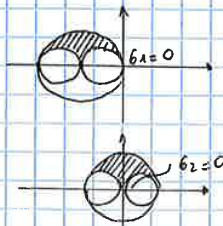
$$\{t_n\} = [\sigma] \{n\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

La componente normale si ottiene facendo il prodotto scalare di \$\{t_n\}\$ per il vettore \$n\$.

$$\sigma_n = \{n\}^t [\sigma] \{n\} = \{n_1 \ n_2 \ n_3\} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

CASI PARTICOLARI

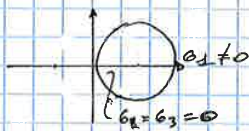
- STATO BIASSIALE $\sigma_1 = 0$ (uno delle tre tensioni è nulla)



Stato tensionale ovunque di compressione!

Stato di sforzo più di trazione che di compressione. $\sigma_1 =$ trazione $\sigma_2 =$ compressione
Solido De Saint-Venant

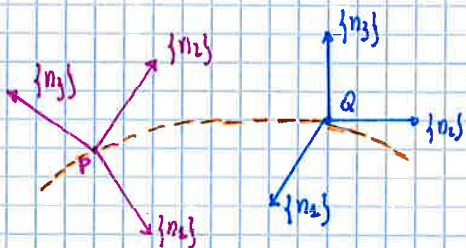
- MONOASSIALE e_1 : asta tesa



- IDROSTATICO (liquidi perfetti)

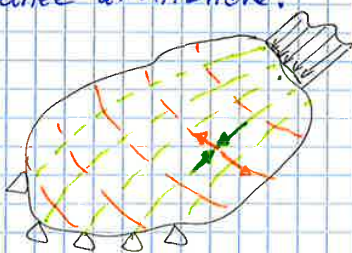


LINEE ISOSTATICHE



In ogni punto all'interno del corpo noi possiamo definire 3 direzioni principali della tensione.
Prendiamo due punti vicini P e Q definite da 2 terne. Se prendiamo la tangente di $\{n_1\}$ per P e la tangente ad $\{n_1\}$ per Q; e congiungendo le tangenti nel passaggio da P a Q descriviamo una linea isostatica (che segue le tangenti ad una tensione principale).

L'involuppo ci porta a definire 3 famiglie di linee che sono le linee isostatiche.



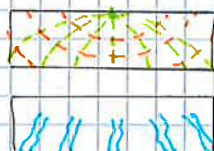
Portiamo in un piano.

- isostatiche di trazione
- isostatiche di compressione

↳ sono delle linee di forza che vanno dal carico verso gli appoggi.

Le particelle materiali lungo l'isostatica sono soggette a sola tensione normale. (esempio ma regolatele, ossa)

FESSURAZIONE MATERIALI FRAGILI



Trave concava in mezzo ed appoggiata nelle estremità. Lo sforzo σ sempre flessione dal punto di applicazione verso gli appoggi. Lo comportamento ad arco.
Le trazioni lavorano come costole degli archi compressi. La trazione (isostatica) governa la rottura e fa nascere le fessure ortogonamente alle tensioni principali di trazione. ↳ segue le isostatiche di compressione!

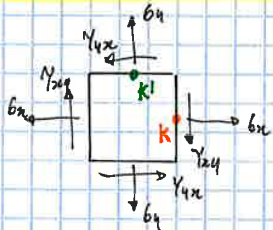
Se scriviamo il valore di

$$\gamma_{xy}^* = \gamma_{xy} \cos 2\theta - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta = 0$$

si ricava l'angolo θ (o $\theta + 90^\circ$ antiorario) di cui devo ruotare le inteme XY per raggiungere il sistema principale $X^* Y^*$

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\gamma_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad \text{POSITIVO } \rightarrow \text{ANTIORARIO}$$

LOSTRUZIONE CERCHIO di MOHR GRAFICAMENTE

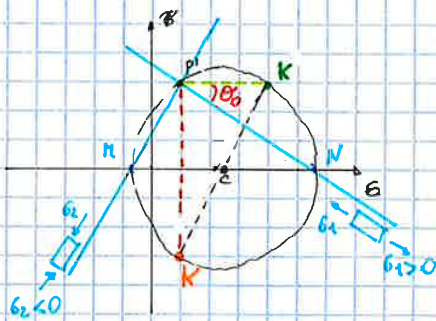


Ripartiamo nel piano di Mohr $(\sigma_x - \gamma_{xy})$ i valori di tensione nei punti $K(\sigma_x; \gamma_{xy})$ e $K'(\sigma_y; -\gamma_{xy})$

Per convenzione:

- $\sigma > 0$ se di trazione
- $\gamma > 0$ se orario in K

$K(\sigma_x; \gamma_{xy})$ $K'(\sigma_y; -\gamma_{xy})$



Ripartiamo i punti nel piano di Mohr. Nell'intersezione ricaviamo il centro C del cerchio di Mohr.

CK rappresenta il raggio del cerchio di Mohr

Tracciamo per K la parallela all'asse delle ascisse e per K' la // all'asse delle ordinate.

Nell'intersezione troviamo il punto P*, ora possiamo disegnare il cerchio passante per questi 3 punti.

Il cerchio sarà il cerchio di Mohr!

Da P* possiamo tracciare le due rette perpendicolari per N e H; e rappresentano le direzioni principali. Rappresentano l'inclinazione del sistema principale e ci permettono di leggere i valori delle tensioni principali.

N leggiamo la trazione
H " compressione

L'angolo θ_0 tra P*NK.

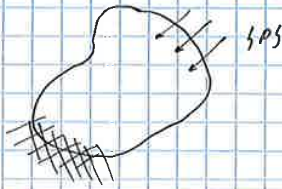
Se noi vogliamo l'elemento di potenza di un angolo θ_0 ; troviamo le direzioni principali e quindi avremo le tensioni principali (trazione e compressione).

Gli altri cerchi di Mohr si possono ricavare disegnarli i cerchi che hanno per estremi σ_1, σ_2 e la $\sigma_3 = 0$. Se σ_1 e σ_2 hanno segno differente



Se σ_1 e σ_2 hanno lo stesso segno

EQUAZIONI di ECUVALENZA ALLA FRONTIERA



Sulla frontiera agiscono le forze $\{p\}$ (superficiali), la frontiera sarà divisa in 2 parti:
 - frontiera LIBERA S_L
 - frontiera VINCOLATA S_V (permette di assicurare l'equilibrio)

$$\begin{aligned} t_{nx} &= G_{xx} N_x + Y_{yx} N_y + Y_{zx} N_z = p_x \\ t_{ny} &= Y_{xy} N_x + G_{yy} N_y + Y_{zy} N_z = p_y \\ t_{nz} &= Y_{xz} N_x + Y_{yz} N_y + G_{zz} N_z = p_z \end{aligned}$$

L'equazioni della frontiera, ci dicono che in ogni punto della frontiera stessa, il vettore tensione deve coincidere con la forza superficiale $\{p\}$. Tutto questo succede grazie il principio azione e reazione. $t_n = p$

I concetti di congruenza ed equilibrio possono esprimersi in forma matriciale. I campi di tensione e deformazione sono funzioni del punto e della geometria. Non per altro gli abbiamo espressi come quantità tensoriali.

↳ $[G(p)]$ $[E(p)]$ $\neq PEV$ sono tensori simmetrici; sono solo 6 le componenti indipendenti.

Possiamo utilizzare dei vettori a 6 componenti (anziché dei tensori a 9 componenti)

TENSORE $[E(p)] \rightarrow$ VETTORE $\{E(p)\}$

TENSORE $[G(p)] \rightarrow$ VETTORE $\{G(p)\}$

ETTORE delle DEFORMAZIONI

$$\{E\} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{dilatazioni} \\ \text{specifiche} \\ \text{scorimenti} \\ \text{angolari} \end{array} \right\}$

(ANALOGO per le TENSIONI)

EQUAZIONI CINEMATICHE

$$\{E\} = [a] \{u\}$$

↑
matrice
derivata cinematica

ha delle derivate parziali degli zen

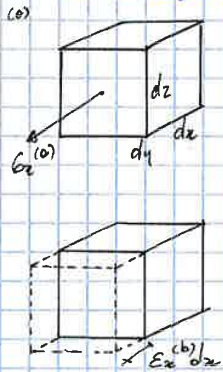
$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Dati questi due sistemi, l'uno equilibrato e l'altro congruente, il PZV afferma l'uguaglianza tra il lavoro virtuale esterno e il lavoro virtuale interno

$$L^{*}_{ESTERNO} = L^{*}_{INTERNO}$$

Il lavoro virtuale interno nei corpi rigidi è nullo (perché le deformazioni interne sono nulle).

DIMOSTRAZIONE EURISTICA: si dimostrerà come in ogni componente di tensione lavoro per effetto della corrispondente componente di deformazione.



Qual'è il lavoro di deformazione delle ϵ ?

Prendiamo una faccia di x e abbiamo una $G_x^{(a)}$
 → vogliamo una forza → $G_x^{(a)} \cdot dy \cdot dz$.

$$G_x^{(a)} \cdot dy \cdot dz$$

Ora prendiamo un volume uguale e vediamo che spostamento compierà la forza in precedenza. Lo spostamento sarà in direzione x . Corrisponde ad una deformazione normale $\epsilon_x^{(b)}$.

$$dW^{(b)} = \epsilon_x^{(b)} \cdot dx$$

Allora scriviamo il lavoro delle forze per questo spostamento.

$$L^{*}_{INTERNO} = G_x^{(a)} \cdot \epsilon_x^{(b)} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = G_x^{(a)} \cdot \epsilon_x^{(b)} \cdot dV$$



Questo si può intendere anche alle altre componenti normali.

Ora qual'è il lavoro di deformazione delle γ ?

$$\tau_{xy}^{(a)} \cdot dy \cdot dz$$

area della faccia

Devo compiere uno spostamento dV ; deriva da uno scivimento angolare $\gamma_{xy}^{(b)}$

$$dV^{(b)} = \gamma_{xy}^{(b)} \cdot dx$$

La variazione di angolo a partire dall'angolo retto



$$dL^{*}_{int} = \tau_{xy}^{(a)} \cdot \gamma_{xy}^{(b)} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \tau_{xy}^{(a)} \cdot \gamma_{xy}^{(b)} \cdot dV$$

Le forze lavorano, gli spostamenti. Si possono intendere per le altre γ .

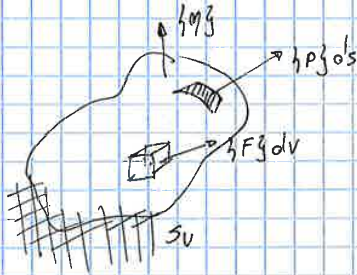
$$L^{*}_{INTERNO} = \int_V \{ \sigma_{ij}^t \cdot \epsilon_{ij} \} dV$$

sono indipendenti; ci assicura la virtualità del lavoro.

IPERELASTICITÀ: un corpo deformabile è iperelastico quando la sua energia di deformazione (lavoro che viene fornito al corpo per portarlo ad un certo stato deformativo $\{e\}$) NON dipende dal processo di como ma de solo lo stato finale

ENERGIA di DEFORMAZIONE (accumulata all'interno del corpo)
= FUNZIONE di STATO

Il lavoro che viene immagazzinato nel corpo è un DIFFERENZIALE ESATTO.



Introduciamo questo potenziale elastico; cerchiamo di tirar fuori una formula corretta di questo potenziale elastico.

Prendiamo un corpo deformabile nello spazio tridimensionale (equilibrio).

- $\int_V \{F\} dv$ = forze di volume
- $\int_S \{p\} ds$ = forze di superficie
- $\int_V \{m\}$ = spostamenti.

Nel vincolo gli spostamenti $\{m\} = 0$ o nono comunque noti.

Incrementiamo le forze esterne di una quantità infinitesima (dF e dF) con un incremento delle deformazioni e degli spostamenti (dovuto a dF e dF).

si ha per congruenza

Applico il PLV pensando come sistema di forze - termini; il sistema delle forze $\{F\}$, $\{p\} \rightarrow \{e\}$ qui come sistema cinematicamente ammissibile $\{dm\} \rightarrow \{de\}$

|| SISTEMA STATICAMENTE AMMISSIBILE $\rightarrow \{F\}, \{p\} \rightarrow \{e\}$
|| SISTEMA CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE $\rightarrow \{dm\} \rightarrow \{de\}$

Faccio lavorare le $\{F\}, \{p\}$ con $\{dm\}$ e $\{e\}$ con $\{de\}$

In questo caso il nostro lavoro sarà un lavoro REALE! (applicazione di forze reali)

È possibile trascurare il lavoro degli incrementi delle forze esterne, perché in tutto un infinitesimo di ordine superiore.

Scriviamo il lavoro virtuale:

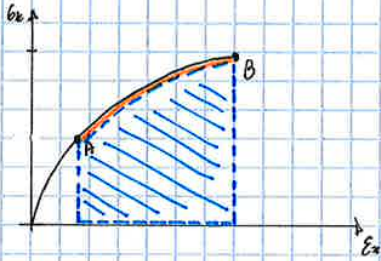
$$L_e = \int_V \{F\}^T \{dm\} dv + \int_S \{p\}^T \{dm\} ds$$

$$L_v = \int_V \{e\}^T \{de\} dv$$

uguagliamo $L_e = L_v$

Ora studiamo più in dettaglio il comportamento interno del corpo IPERELASTICO quando il lavoro di deformazione è un differenziale esatto \rightarrow Emite un potenziale delle deformazioni (energia potenziale)

\rightarrow implica da un punto di vista fisico che il processo deformativo avviene fornendo energia al corpo. \rightarrow richiede a equazione di energia che poi verrà necessariamente contribuito dal carico delle de formazioni.



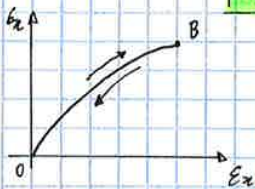
Se andiamo a graficare nel piano $(\epsilon_x; \sigma_x)$ l'andamento delle tensioni in funzione di ϵ , abbiamo una legge biunivoca. Load ogni ϵ abbiamo un valore di σ .

A, B sono due punti successivi della nostra asta. De andare da A, B abbiamo per ogni questo tratto di curva; andando ad immaginare quella energia ϕ (area al di sotto della curva) che sarebbe l'integrale visto in precedenza.

L'area sottesa dalla curva è l'energia IMMAGAZINATA nel corpo.

L'energia di deformazione da A e B è data dalla stato finale e quello iniziale.

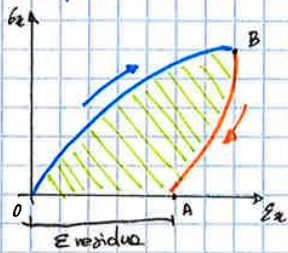
$$dL_{A \rightarrow B} = \phi_B - \phi_A$$



I percorsi di carico e scarico devono coincidere.

$$L_{B \rightarrow A} = 0$$

Invece per un materiale elastico non vale. Il materiale avrà una deformazione residua.



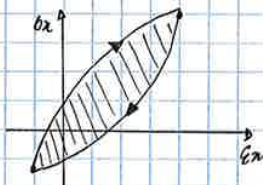
Non tutta l'energia è stata restituita meccanicamente, ma solo una parte sotto la curva di scarico.

Le funzioni ϕ e σ_x non sono più monovalenti \rightarrow posso avere 2 diverse ϵ_x che dipendono dallo stato di carico. STORIA DEFORMAZIONI \rightarrow IMPORTANTE

ENERGIA DISSIPATA

$$L_{B \rightarrow A} \neq 0$$

Percorrendo cicli di carico e scarico le traiettorie dovranno originare ad una dissipazione per ISTERESI.



Questo è un ciclo che avviene anche invertendo il segno del σ (negative e positive). In ogni ciclo viene dissipata un'energia pari all'area sottesa. Questo processo porta alla rottura dei materiali (è quello che succede con un filo di ferro).

POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE

$$d\psi = \int \sigma \epsilon^t \cdot \epsilon \cdot d\epsilon$$

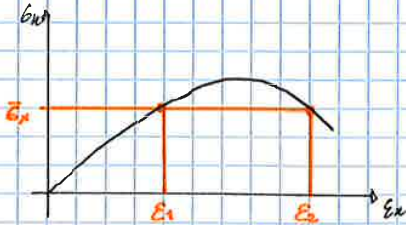
se prendiamo questa volta il lavoro in finitissimo prendendo gli incrementi di tensione; notiamo che la somma di $d\psi + d\phi$ non è altro che il differenziale del prodotto di ψ e ϵ .

Possiamo riscriverlo in forma additiva

$$d\phi + d\psi = \int \sigma \epsilon^t \cdot \epsilon \cdot d\epsilon + \int d\sigma \epsilon^t \cdot \epsilon$$

Noi sappiamo che il potenziale elastico ϕ ed il prodotto scalare $\int \sigma \epsilon^t \cdot \epsilon$ devo essere entrambi funzione di stato.

$$d\left(\int \sigma \epsilon^t \cdot \epsilon \right) \parallel \text{differenziali esatti}$$



Se la curva di carico, dopo aver raggiunto un massimo, ha anche un tratto in discesa con aumento di deformazioni mentre le tensioni diminuiscono, \rightarrow comportamento ISTENIC \rightarrow il materiale rammollisce nonostante le tensioni aumentano. A un generico valore di σ_x corrispondono

due valori di $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow$ si è perso la biunivocità \rightarrow non si può più invertire il legame elastico complementare

$$\hookrightarrow \beta \Psi \rightarrow \beta E = E(\epsilon)$$

Ψ è una funzione strettamente convessa e definita positiva

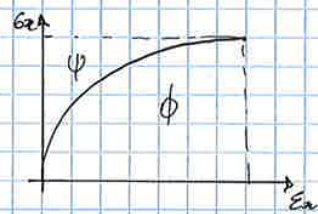
$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \right] \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} > 0$$

convessità

$$\phi(\epsilon_{ij}) > 0 \quad \forall \epsilon_{ij} \neq 0$$

strettamente positivo

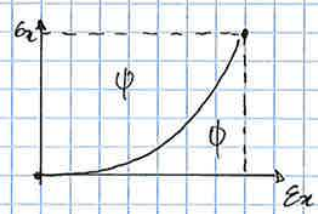
MATERIALI COME LA GOMMA \rightarrow ELASTICITÀ NON LINEARE



$$\phi > \Psi$$

energia accumulata è maggiore dell'energia complementare

MATERIALI BIOLOGICI \rightarrow ELASTICITÀ NON LINEARE

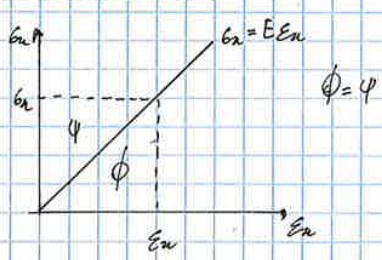


$$\phi < \Psi$$

quindi ci fa immaginare meno energia potenziale all'interno del corpo rispetto l'energia complementare

\hookrightarrow deriva dalle forme delle molecole, molto deformabili all'inizio e meno deformabili man mano aumenta il carico.

ELASTICITÀ LINEARE



la curva di carico è una retta. $E =$ modulo di elasticità

Rimangono soltanto i termini con le derivate seconde.

Possiamo ordinare le derivate seconde in un matrice Hesse del potenziale elastico e troveremo in espressione quadratica del potenziale elastico.

$$[H]$$

Le derivate 2e di ϕ tra loro indipendenti sono 21 e quindi sarà una matrice 6×6 di cui 21 saranno indipendenti.

$$H = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x^2} \right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x \partial \gamma_{yz}} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_y \partial \epsilon_x} \right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_y^2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_y \partial \gamma_{yz}} \right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma_{yz} \partial \epsilon_x} \right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma_{yz} \partial \epsilon_y} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma_{yz}^2} \right)_0 \end{bmatrix}$$

Matrice 6×6
 • sulla diagonale deriva rispetto alle componenti di deformazione ϵ, γ
 • fuori dalla diagonale otteniamo quelle miste che sono simmetriche.

Sono tutti dei numeri! Lo COSTANTI ELASTICHE.

Se lo riscriviamo in forma matriciale compatta:

$$\phi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^t [H] \{\epsilon\}$$

(Analogo all'oscillatore armonico $\frac{1}{2} kx^2$)

Vediamo come trasformarlo in forma tridimensionale. È sufficiente derivare rispetto ϵ l'espressione del potenziale. $\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon}$

Troviamo $\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\}$

Se andiamo a sostituire nell'espressione del potenziale elastico:

$$\phi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^t [H] \{\epsilon\} = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^t \{\sigma\}$$

Il potenziale elastico può essere: - forma quadratico delle deformazioni ($\frac{1}{2} kx^2$ analogo)
 - forma bilineare delle tensioni e delle deformazioni.

Cosa succede al potenziale complementare?

Ora vogliamo che il LEGAME COSTITUTIVO sia INVERTIBILE; quindi scrivere ϵ in funzione di σ (inverso del legame costitutivo) → la matrice inversa deve risultare definita positiva.

$$\det[H] > 0$$

Lo stato indeformato sarà un minimo assoluto del potenziale ϕ ; sarà sempre positivo avendo annullato $\phi = 0$ nell'origine.

la definizione positiva di H ci assicura l'invertibilità del legame costitutivo e quindi la legge inversa.

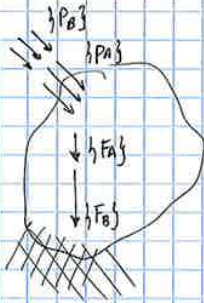
$$[\epsilon] = [H]^{-1} \{\sigma\}$$

L'incognita principe del problema è rappresentata dal vettore spostamento.

PRINCIPIO FONDAMENTALE : TEOREMA FONDAMENTALE

Le equazioni che otteniamo appena visto sono eq. lineari; l'incognita (componenti vettori spostamento) compaiono alla 1ª potenza; sono quindi eq. differenziali lineari.

1ª principio: **SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI**: consente di studiare separatamente gli effetti delle varie sollecitazioni.



- Consideriamo un sistema elastico lineare in un sistema di forze F_A e P_A . Per effetto di queste forze nascerà un campo di deformazioni $\{M_A\}$; $[E_A]$; $[G_A]$ (spostamenti e tensioni)

- Applichiamo un sistema di forze B, F_B , P_B per effetto di queste forze nasceranno dei nuovi campi $\{M_B\}$; $[E_B]$; $[G_B]$

È possibile dimostrare, sfruttando la linearità delle equazioni, che l'unione

simultanea dei sistemi A e B produce la somma degli effetti:

$$\{F_A\} + \{F_B\} \quad \text{e} \quad \{P_A\} + \{P_B\}$$



$$\{M_A\} + \{M_B\}$$

$$[E_A] + [E_B]$$

$$[G_A] + [G_B]$$

È molto comodo questo teorema! Perché se ragioniamo al contrario; preso un qualunque sistema di forze applicato su un corpo noi possiamo scomporlo in componenti elementari da studiare singolarmente → poi successivamente poterli sommare.

NON VALE PER L'ENERGIA!

$$L_{A+B} \neq L_A + L_B$$

2ª principio: **TEOREMA UNICITÀ SOLUZIONE ELASTICA (KIRCHHOFF)**: A assegnate delle forze $\{F_A\}$; $\{P_A\}$ e dei nodi $\{M_A\}$; se la soluzione



$\{M_A\}$ esiste; essa è UNICA.

Il campo di spostamenti $\{M_A\}$ se esiste è unico → $[E_A] \rightarrow [G_A]$

Si può dimostrare ragionando per assurdo che in un generico sistema di F, P; generici due diverse soluzioni A e B. Andiamo ad applicare il PLV al sistema differenza dei due sistemi.

Ipotesiamo che un generico sistema di F, P;

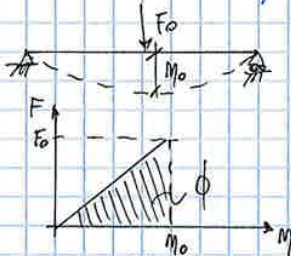
$$\{M_A\} [G_A] [E_A]$$

$$\{M_B\} [G_B] [E_B]$$

$$\frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dV + \frac{1}{2} \int_S \rho \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \, dS = \int_V \phi \, dV$$

Il lavoro di deformazione compiuto dalle forze esterne per portare il corpo dallo stato indeformato a quello deformato finale è pari alla metà del lavoro che le forze stesse compierebbero se agissero con il loro valore finale durante tutto il processo di carico.

Lo stesso avviene per forze e spostamenti; l'energia che andiamo a dare in un corpo elastico lineare è pari alla metà del lavoro dei valori finali delle F e spostamenti.



Supponiamo trave elastica lineare su cui agisce una forza F che passa da 0 a F0 gradualmente. La contemporanea si inflette gradualmente.

La crescita graduale tra F e m

Il potenziale elastico sarà in area triangolare. Il lavoro di deformazione vale $\frac{1}{2} F_0 m_0$.
 Caso generico:

$$L_{DEF} = \int_0^{m_0} F(m) \, dm$$

Non ci interessa sapere cosa succede all'interno, ma sapere direttamente cosa succede all'inizio e alla fine.

4° principio: **TEOREMA di BETTI**: dimostrare i lavori mutui tra due o più sistemi di forze sono tra loro uguali.

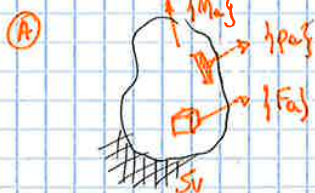
Studio di due diversi tipi di forze che agiscono su un corpo e se ne calcola e calcolate il lavoro mutuo ipotizzando una successione inversa dei carichi applicati.

Il principio di "sovrapposizione degli effetti" non vale il lavoro!
 Per la presenza del cosiddetto LAVORO MUTUO!

Il lavoro mutuo è il lavoro compiuto da un sistema di forze già preesistente sulla nostra struttura per effetto degli spostamenti che vengono generati da un secondo sistema di forze applicate successivamente?

↳ LAVORO di TRASCINAMENTO

Betti: sancisce uguaglianza dei due sistemi di forze indipendentemente dall'ordine di applicazione dei carichi.



Parliamo di un corpo tridimensionale di:

$\{F_i\}$, $\{p_i\}$ e vincolato da S_u .

Questo primo sistema lo chiamiamo "A";

Il lavoro di deformazione compiuto da questo sistema di forze vale $L_A =$ energie che è stato immagazzinato nel solido sotto l'azione delle forze F_i , p_i in maniera quasi statica. (sotto H_p di Clapeyron)

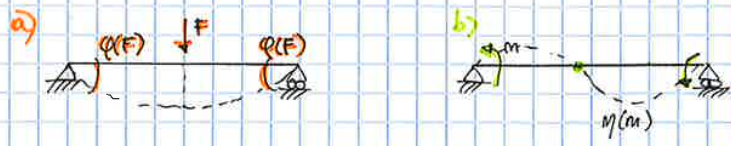
$$L_{a+b} = L_a + L_b + L_{ab} \rightarrow L_{ab} = L_{ba}$$

$$L_{b+a} = L_b + L_a + L_{ba}$$

TEOREMA di Betti
uguaglianza dei lavori mutui.

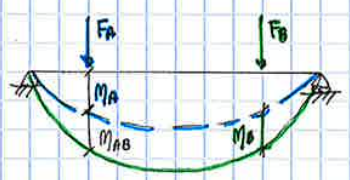
Non sempre il lavoro mutuo è DIVERSO da ZERO; possiamo avere dei sistemi di forze ENERGETICAMENTE ORTOGONALI; quando dot 2 sistemi di forze (a) e (b) applicati su un corpo vincolato

$$L_{ab} = 0 \neq L_{ba}$$



$$F \cdot 0 = m \phi(F) - m \phi(F) = 0$$

UN ALTRO METODO (in maniera più semplificata e meno generale)



si consideri una trave soggetta ad un primo sistema di forze A che determini uno spostamento M_A .

$$L_A = \frac{1}{2} F_A M_A$$

Ora si suppone un II sistema di forze B che viene applicato insieme ad A.

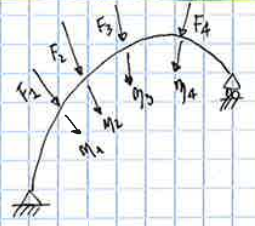
$$L_B = \frac{1}{2} F_B M_B$$

Il punto d'applicazione della forza F_A per effetto di F_B si è abbassata di M_{AB} e in virtù di questo spostamento F_A compie ancora lavoro

$$L_{AB} = F_A M_{AB}$$

M_{AB} = lavoro di trascinamento. la forza F_A viene trascinata dalla forza F_B .

TEOREMA di CASTIGLIANO: consente di avere un metodo alternativo all'applicazione del PLV per calcolare gli spostamenti elastici dei solidi in assenza di distorsioni e acciamenti vincolari



Prendiamo una trave generica; dove siano applicate "n" forze e chiamiamo come "m" lo spostamento duale delle forze; quindi lo spostamento dei punti d'applicazione delle forze nella direzione della forza stessa

PRINCIPIO SOVRAPP. degli EFFETTI: $m_i = \sum_{j=1}^n \psi_{ij} F_j \quad i=1, \dots, n \quad \psi_{ij} = \text{coeff. d'influenza}$

ψ_{ij} = rappresenta lo spostamento generato nel i-esimo punto dall'azione j-esima forza unitaria.

Possiamo ricavare il lavoro di deformazione:

$$L_{DEF} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i m_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_i F_j \psi_{ij}$$

Le tensioni e le deformazioni sono legati attraverso i potenziali:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_z} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{xz}} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{yz}} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned}$$

Con una dilatazione normale dipende in generale da tutte e 3 le tensioni normali. \hookrightarrow è difficile avere uno stato monoassiale di deformazione; anche una sola ϵ_x produce tutte e tre le ϵ .
A stati monoassiali ^{di tensione} NON CORRISPONDO stati monoassiali di deformazione.

Per gli scorrimenti angolari e differenza delle dilatazioni gli scorrimenti angolari dipendono

cioè non soltanto dell'omologo tensione tangenziale.

Se vogliamo i termini in forma matriciale possiamo scrivere:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

matrice $[H]^{-1}$. $[\epsilon] = [H]^{-1} [\sigma]$
contiene queste 3 costanti elastiche.
 \hookrightarrow in realtà avremo solo 2 costanti indipendenti

Se vogliamo scrivere la relazione diretta $[\sigma] = [H][\epsilon]$

$$\frac{1}{2G} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{2} & \frac{\nu}{2} & \frac{\nu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & \frac{\nu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{2} & \frac{\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

matrice $[H] = E$ è definita positiva affinché lo stato indefor-
mato sia un minimo assoluto \hookrightarrow determinante > 0

$\det[H] > 0$

Il rapporto ν si può scrivere come il rapporto tra le dilatazioni ortogonali e quella parallela alla direzione di sollecitazione.

$$\nu = \frac{|E_y|}{|E_x|} = \frac{|E_z|}{|E_x|}$$

$$E_y = -\nu E_x$$

$$E_z = -\nu E_x$$

Le contrazioni sono sempre di segno discorde alla tensione dominante e portano a dire che il coeff. di Poisson deve essere positivo!

Quindi ricaviamo una limitazione fisica più stringente.

$$0 < \nu < 1/2$$

VARIAZIONE di VOLUME

In uno stato monoassiale, la tensione normale ha lo stesso segno della variazione di volume!

$$\frac{\Delta V}{V} = E_x + E_y + E_z = \frac{E_x (1 - 2\nu)}{E}$$

primo invariante di deformazione

si può solo scrivere con l'Hp di ISOTROPIA. (E_x mono assiale)

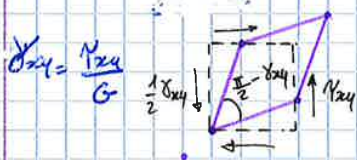
Il segno di $\frac{\Delta V}{V}$ è concorde con il segno di E_x e allora

$E > 0 \quad \nu < 1/2$. Corpo teso \rightarrow aumento di volume
Corpo compresso \rightarrow diminuzione di volume

Come con $\nu = 1/2$; corpi INCOMPRESSIBILI. $\Delta V/V = 0$

G = COSTANTE ELASTICA

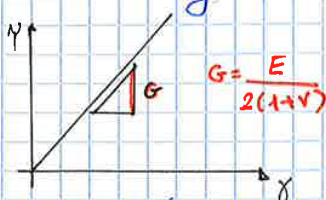
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



Legge in maniera diretta le γ con τ . Sottinteso uno scorrimento angolare $\delta\alpha$ (variazione di angolo rispetto l'angolo retto). Tanto + il materiale si oppone alla distorsione \rightarrow tanto + grande sarà G .

G rappresenta la proporzionalità tra tensioni tangenziali e scorrimenti angolari. $G =$ MODULO di ELASTICITÀ TANGENZIALE

Per questo diagramma in un grafico la crescita delle distorsioni proporzionale alla crescita delle tensioni e vediamo che la pendenza di questa retta nel piano $(\tau; \gamma)$ rappresenta G .



Le direzioni principali di tensione e le direzioni principali di deformazione coincidono \rightarrow proporzionalità diretta!

Nelle direzioni dove sono nulle le deformazioni, sono le direzioni dove sono nulle le tensioni.

controllo di deformazione

4

Con macchine particolari si può ricreare la parte deformativa finale del nudo. → fase instabile, perché basterebbe un piccolissimo aumento di carico e il materiale si romperebbe.

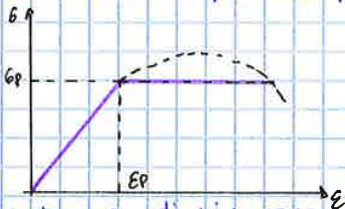
UR = STRIZIONE le contrazioni trasversali diventano così forti che la sezione A_0 incomincia a diminuire in maniera macroscopica.

Qu è importante. Se noi scendiamo da un generico punto B, percorriamo un tratto di pendenza "E", quindi parallelo al tratto elastico. Torna in punto C che non è l'origine!

OC rappresenta una deformazione permanente.

L'area tratteggiata mi indica la dissipazione d'energia che non è stata restituita al materiale. Ha potuto restituire solo l'area triangolare BCD.

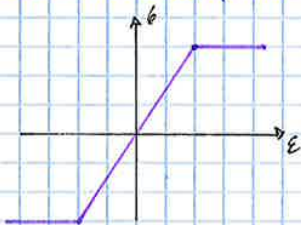
La curva viola prima; però in termini ingegneristici, viene espressa con una bilinea più semplice → **LEGAME ELASTO-PLASTICO PERFETTO**.



Invece di avere un tratto curvilineo, definiamo una **TENSIONE DI SOTTENDAMENTO** σ_p (viene calcolato in funzione di ϵ_p che è una deformazione limite); al di sopra della quale il comportamento viene ipotizzato piatto → **PLASTICITÀ PERFETTA**.

In vantaggio di sicurezza andiamo a trascurare questo incremento di tensione che il materiale teoricamente potrebbe ancora sostenere e diciamo che oltre a ϵ_p possiamo avere deformazione oltre rottura, MA NON POSSIAMO AVERE INCREMENTI DI CARICO.

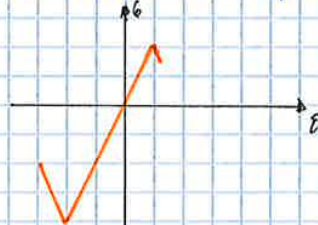
MATERIALI DUTILI (esteso fore plastica (ma in trazione che compressione))



- tensione ultima trazione
- trazione ultima a compressione
- acciaio; legno

MATERIALI FRAGILI

- rocce, calcestruzzo
- non hanno una fase plastica

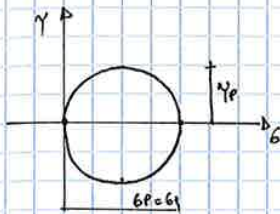


- avremo rottura repentina → è pericolosa
- resistenza trazione <<< resistenza a compressione

Il primo criterio di resistenza è valido per un caso monodimensionale con una forza F , con $\sigma_x = F/A$.



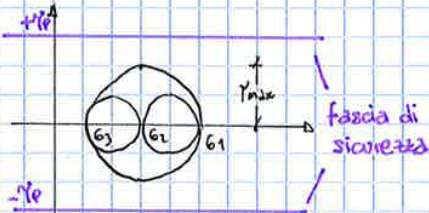
la tensione è all'interno dell'asta ma sempre minore della σ_{mz} di trazione e maggiore della tensione σ_{mz} di compressione. Non è di facile determinazione quale d'essere il valore limite del materiale, perché se noi svolgiamo n -prove su n -provini: non troveremo mai la stessa resistenza, perché le dispersioni statistiche sono molto alte. Ogni materiale sarà caratterizzato da un valore medio in cui viene associata una varianza. Minore è la varianza più preciso è il valore.



$\tau_p = \frac{1}{2} 6P$

Qual'è la tensione tangenziale limite da dover confrontare con la tensione tangenziale massima?
 La ricaviamo dalle prove di laboratorio monoassiale.
 Su un materiale duttile, la τ_p è pari a $6P/2$

È immediato scrivere rappresentandolo sul piano di Mohr il criterio di Tresca. Tutti i tre cerchi di Mohr devono essere contenuti all'interno di una fascia di sicurezza di dimensione τ_p .

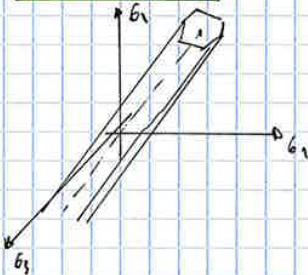


$\tau_{max} < \tau_p$ il materiale è considerato verificato.

$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|) < \frac{1}{2} 6P = \tau_p$

Se passiamo nel spazio

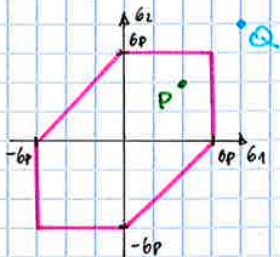
$|\sigma_1 - \sigma_2| < 6P$
 $|\sigma_1 - \sigma_3| < 6P$
 $|\sigma_2 - \sigma_3| < 6P$



$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, queste equazioni identificano un dominio TRIDIMENSIONALE, le equazioni ora sono 6, corrispondente ad una doppia disuguaglianza per le trazioni e le compressioni. Produco un prisma a base indefinita lungo l'asse idrostatico. Le tensioni idrostatiche non danno contributo per lo snervamento.

CASO PARTICOLARE ($\sigma_3 = 0$) *biassiale.*

$|\sigma_1| < 6P$
 $|\sigma_2| < 6P$
 $|\sigma_1 - \sigma_2| < 6P$



6 equazioni nel piano σ_1, σ_2 . Si tratta di un esagono non più regolare, allungato nei quadranti positivi perché come se noi mettiamo un cilindro a rotolare con un piano orizz. all'asse σ_3 il cilindro inclinato.

Intervengono sugli assi il valore $\bar{\epsilon}$ $6P$; però tensioni dello stesso segno - ci danno un dominio allungato \rightarrow benefico per il materiale

Un punto P contenuto nel dominio \rightarrow VERIFICATO
 " " Q esterno del dominio \rightarrow NON VERIFICATO

Nel caso del SOLIDO di DE - SAINT VENANT

$N, M_x, M_y \rightarrow \sigma_z$

$T_x, T_y, M_z \rightarrow \tau_z = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$

Avremo lo stesso piano e l'equazione di Tresca $6\sigma_z = \sqrt{6z^2 + 4\tau_z^2} < \frac{6P}{\gamma}$

contrarre dominio di resistenza.

Se noi ora sviluppiamo i termini T_1 e T_2 avremo:

$$\begin{aligned} \phi^d &= \frac{1+\nu}{3E} (T_1^2 + 3T_2) = \\ &= \frac{1+\nu}{3E} [(6_1 + 6_2 + 6_3)^2 - 3(6_1 6_2 + 6_1 6_3 + 6_2 6_3)] = \\ &= \frac{1+\nu}{3E} (6_1^2 + 6_2^2 + 6_3^2 - 6_1 6_2 - 6_1 6_3 - 6_2 6_3) \end{aligned}$$

Questo valore ϕ^d andrà confrontato con il valore di energia deviatorica nel caso monoassiale.

Quando facciamo un prova monoassiale il valore deviatorico sarà:

$$\phi_{\text{monassiale}}^d = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_p^2 \quad \sigma_p = \text{tensione snervamento, punto di crisi}$$

Il criterio di Von Mises:

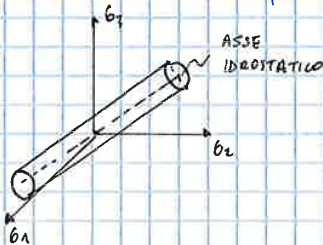
$$\phi^d < \phi_{\text{monassiale}}^d$$

$$\frac{1+\nu}{3E} (6_1^2 + 6_2^2 + 6_3^2 - 6_1 6_2 - 6_1 6_3 - 6_2 6_3) < \frac{1+\nu}{3E} \sigma_p^2$$

$$[(6_1^2 + 6_2^2 + 6_3^2) - (6_1 6_2 + 6_1 6_3 + 6_2 6_3)] < \sigma_p^2$$

TENSORE IDEALE di VON MISES

Nello spazio delle tensioni principali $6_1, 6_2, 6_3$. Assume la forma di un cilindro con raggio = σ_p



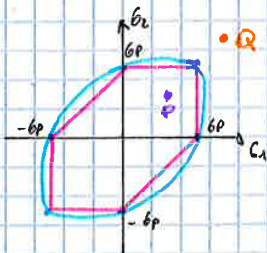
La frontiera del dominio è una frontiera CONTINUA e ha una sola inequazione, ci permette di controllare il criterio di Von Mises in qualunque situazione. (Tresca ne aveva 6)

NEL CASO PIANO $6_3 = 0$: l'equazione diventa un'equazione di un'ellisse.

$$(6_1^2 + 6_2^2 - 6_1 6_2) \leq \sigma_p^2$$

P($6_1, 6_2$) = VERIFICATO

Q($6_1, 6_2$) = NON VERIFICATO

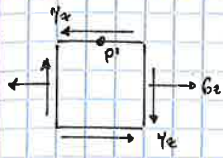


Questo dominio è allungato nei quadranti positivi \rightarrow TENSIONI STRESSO SECCO \rightarrow BENEFICHE MATERIALE

CONCLUSIONI:

- condizioni di carico idrostatico NON provocano la crisi del materiale
- Il criterio di Von Mises è meno cautelativo di quello di Tresca

CRITERI di RESISTENZA per il SOLIDO di DE SAINT VENANT



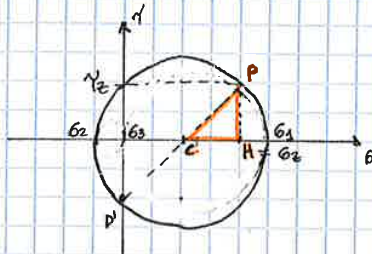
$$[σ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_{xz} \\ 0 & 0 & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & G_z \end{bmatrix}$$

I criteri di Tresca e von Mises possono essere specializzati al caso di SOLIDO di DE SAINT VENANT; dove le uniche tensioni non nulle sono:

$$\gamma_z = \sqrt{\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2} \neq 0 \quad G_z \neq 0 \quad \sigma_x = \sigma_y = \gamma_{xy} = 0$$

• CRITERIO di TRESCA

$$\sigma_p = \max \{ |G_1 - G_2|; |G_1 - G_3|; |G_2 - G_3| \}$$



$G_3 = 0$ perché avremo uno stato di tensione biassiale o se si fa il cerchio di Mohr avendo due punti

$$P(G_z, \gamma_z) \quad P'(0, -\gamma_z)$$

Ora, dopo aver trovato i vari valori di G_i , sappiamo che interviene il diametro massimo (cioè tensione tangenziale massima) ed è pari a $G_1 - G_2$; infatti nella costruzione del solido le due tensioni G_1 e G_2 sono opposte in quanto

ci sono sempre degli sforzi di trazione e compressione. la tensione equivalente:

$$G_{eq} = |G_1 - G_2| = 2 \cdot CP$$

considerando il triangolo $\triangle CHP$ dove noi conosciamo $CH = \frac{G_z}{2}$ e $PH = \frac{\gamma_z}{2}$

$$\begin{aligned} CP &= \sqrt{CH^2 + PH^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{G_z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_z}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{G_z^2 + 4\gamma_z^2} \end{aligned}$$

Sostituendo:

$$G_{eq} = \sqrt{G_z^2 + 4\gamma_z^2}$$

• VON MISES

Riscriviamo la formulazione per un sistema $Ox'y'z'$ in cui avremo:

$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \quad \gamma_{xy} = 0$$

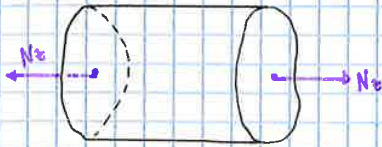
$$\begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + 3(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)} = \\ &= \sqrt{G_z^2 + 3\gamma_{xz}^2 + 3\gamma_{yz}^2} \\ &= \sqrt{G_z^2 + 3\gamma_z^2} \end{aligned}$$

$$G_{eq} = \sqrt{G_z^2 + 3\gamma_z^2}$$

Rispetto a Tresca si può notare che cambia il fattore davanti a γ_z , che passa da 3 a 4, per cui Von Mises è meno restrittivo di Tresca.

Nelle figure compatte: la distanza di omogeneizzazione è pari all'altezza. Le sezioni sottili hanno una distanza molto più grande rispetto le tozze.

SFORZO NORMALE CENTRATO: positivo: TRAZIONE
negativo: COMPRESSIONE



Se la curva delle pressioni = con l'asse baricentrico → SFORZO NORMALE CENTRATO

Prendiamo il solido con due forze agenti sulle basi dirette secondo l'asse z e che si fanno equilibrio!

Vogliamo determinarci [ε] → [ε] sotto l'azione di N_z. Se le forze agiscono solo sulle basi possiamo scrivere le cond. di equivalenza ^(statiche) sulle basi

$$\int_{A_1} p dA = \int_{A_1} t_z dA = \begin{cases} \int_A \gamma_{zz} dA = 0 \\ \int_A \gamma_{zy} dA = 0 \end{cases} \quad \int_{A_1} b_z dA = N$$

noi per De Saint Venant
 $\gamma_{zz} \neq 0$ $\gamma_{zy} \neq 0$ $b_z \neq 0$
 $b_x = b_y = \gamma_{xy} = 0$

il cono direttore è n_z t_z = tensione sulla base → proiettato sulle 3 componenti

$\int_{A_1} b_z dA$ equazione fondamentale per la risoluzione del problema

METODO SEMI-INVERSO: andiamo a ipotizzare una soluzione (tensionale) e andiamo a verificare che questa soluzione soddisfi tutte le equazioni del problema elastico.

Ipotizziamo una soluzione tensionale ^{di tipo statico} plausibile sotto sforzo normale. Ci aspettiamo:

$$\begin{cases} b_x = b_y = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \\ b_z = c = \text{costante in ogni punto del solido} \end{cases}$$

“ Verifichiamo se soddisfa tutte le equazioni del problema elastico

- equazioni del volume $F=0$ è soddisfatta
- $p=0$ “ “ (le componenti tangenziali sono nulle e b_x, b_y e abbiamo solo b_z costante e quindi ci danno soltanto delle identità “

Andiamo a vedere cosa succede sulle basi

$$N = \int_{A_1} b_z dA = c \cdot A \rightarrow c = \frac{N}{A} \rightarrow b_z = \frac{N}{A}$$

b_z è costante in tutti i punti del solido
↳ STATO MONODIMENSIONALE

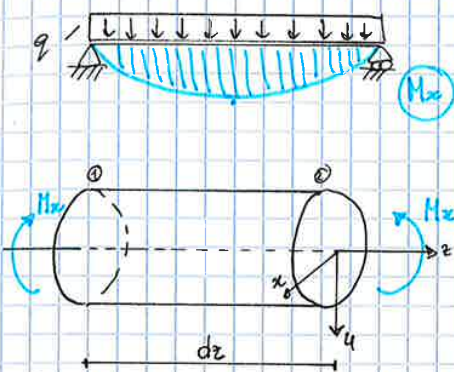
VERIFICA - STATICA

- eq. indefinita d'equilibrio $\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0$ se sostituisco $b_z = \text{costante}$ → anche la derivata è nulla e quindi soddisfatta in ogni punto del volume

- eq. al contorno $n_z = 0$ in ogni punto della superficie laterale non ci sono tensioni di nessun tipo (nella formulazione di Cauchy i vettori direttore)

$$\begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & n_x & 0 & n_z & 0 & n_y \\ 0 & 0 & n_x & 0 & n_z & n_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

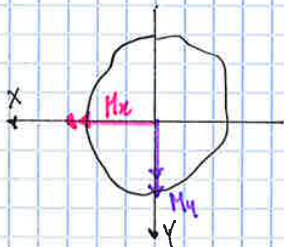
FLESSIONE RETTA : momento esercitato su un asse centrale



Supponiamo che il piano della trave sia zy ; sotto un carico distribuito nasce il diagramma parabolico del momento flettente M_x . Vogliamo studiare cosa succede all'interno della trave per la sollecitazione momento flettente.

Prendiamo un conico di trave di dimensione dz , consideriamo alle due basi i momenti flettenti M_x (uguali ed opposti per soddisfare l'equilibrio). Dobbiamo determinare $[e]$ e $[e']$ sotto l'azione di M_x .

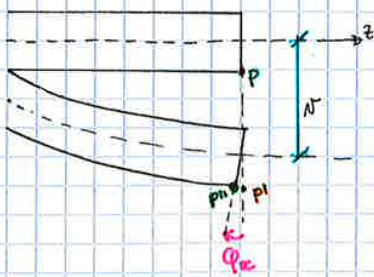
Si definisce **FLESSIONE RETTA** l'applicazione di una componente di momento attorno ad un asse centrale (x, y)



M_x potrà essere caratterizzato da un vettore giacente sull'asse x ; o un vettore M_y giacente sull'asse y .

METODO SEMI-INVERSO : facciamo un'ipotesi di tipo cinematico : ipotizziamo una soluzione congruente sul campo deformativo e di spostamenti e poi vediamo se questa soluzione soddisfa le varie equazioni.

Ipotesi di Eulero - Bernoulli : → conservazione delle sezioni piane



La trave subisce una inflessione (abbassamento \checkmark lungo y) e contemporaneamente le sezioni trasversali ruotano di un angolo φ_x (attorno asse x) che assumiamo positivo quando è di segno antiorario. Il baricentro G subisce soltanto un abbassamento w , mentre tutti gli altri punti subiscono degli spostamenti w in direzione z generati da φ_x . Il punto P si sposta in P' (abbassamento) e poi resta verso sinistra in P'' .

la rotazione data da $\varphi_x = - \frac{\partial w}{\partial z}$

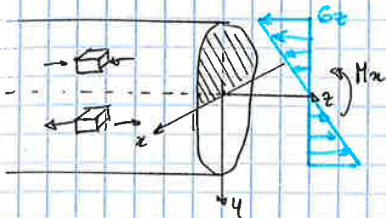
lo spostamento assiale $u_p = \varphi_x \cdot y$

deformazione assiale - derivata degli spostamenti $\epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} \cdot y$

la $\frac{\partial \varphi_x}{\partial z}$ la chiamiamo **CURVATURA**, se sostituiamo al posto $\varphi_x = - \frac{\partial w}{\partial z}$

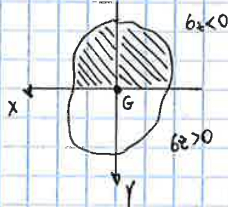
$\epsilon_z = - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} y$ DISTANZA DAL BARICENTRO
↳ CURVATURA NEGATIVA

Se grafichiamo la formula di Navier:



Avremo un diagramma bilineare; con tensioni nulle nel baricentro $y=0$, e che crescono allontanandosi dal baricentro.
Ci dà delle tensioni di segno diverso; compressione e trazione.

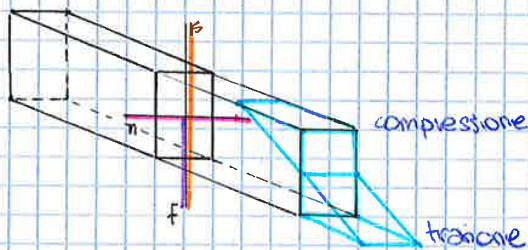
X asse neutro \rightarrow fibra baricentrica!



X divide la sezione in una parte compressa ($\sigma_z < 0$) e una parte tesa ($\sigma_z > 0$).

$\sigma_z < 0$ CONTRAZIONI
 $\sigma_z > 0$ DILATAZIONI

Se disegniamo lo stato deformativo in un concio



La nostra sezione trasversale resta piana!

N = asse sul quale giace il vettore momento
S = l'asse neutro, asse di simmetria e la traccia del piano dei coni
F = asse di flessione; traccia del piano d'inflexione; il piano sul quale si va a deformare la trave per via del momento flettente

In presenza di flessione retta:

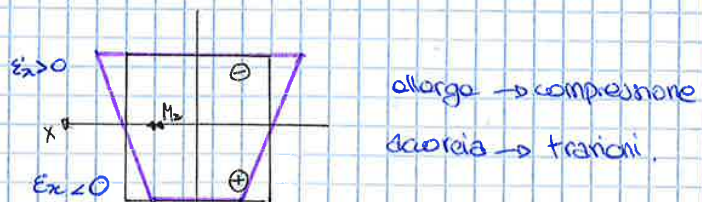
- $f \perp N$
- $f \in S \rightarrow S \perp N$

Al mio concio di arco che le fibre saranno compresse al di sopra dell'asse neutro e al di sotto si allungano. Le fibre sull'asse neutro non variano di lunghezza!

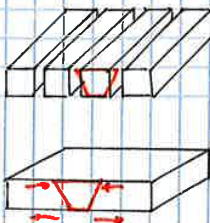
Lo stato deformativo sarà PLURIASSIALE

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x}{EI_x} \cdot y \\ \epsilon_x = \epsilon_y &= -\nu \epsilon_z = \\ &= -\nu \frac{M_x}{EI_x} \cdot y \end{aligned}$$

Le dilatazioni trasversali saranno di segno opposto alla dilatazione assiale e saranno più piccole!



Se noi abbiamo n-travi adiacenti tra loro indipendenti, ciascuna di queste travi nono dilatarsi e contrarsi trasversalmente.



Se consideriamo una lastra piana; ciascuna di queste atisce per effetto della flessione vorrebbe potersi allargare e contrarre ma queste deformazioni sono ostacolate dalle strisce adiacenti (analogo del cerchiaggio) \rightarrow nasce sollecitazioni \rightarrow blocchiamo rigidità struttura

Il rapporto $M_y/M_x = \tan \delta$

$$\frac{I_x}{I_y} = \frac{A p_x^2}{A p_y^2}$$

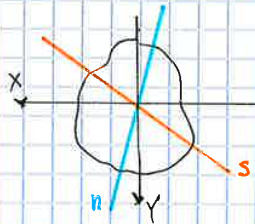
p = RAGGIO d'INERZIA

si può scrivere come:

$$\varphi = \tan \delta \cdot \left(\frac{p_x}{p_y} \right)^2 \cdot x$$

EA-ASSE NEUTRO (12)

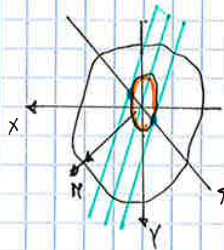
l'asse neutro in generale non è ortogonale all'asse s per via del termine (p_x^2/p_y^2)



la condizione per avere $s \perp n$; solo quando $p_x = p_y$ mi ha ortogonalità!



SEZIONI GIROSCOPICHE (cerchio, quadrato, ...)

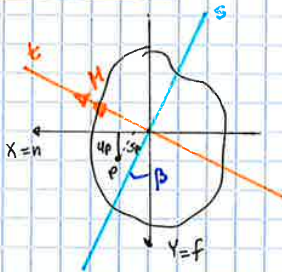


Se consideriamo l'**ellisse centrale** d'inerzia (costruita attorno al baricentro); con M (vettore momento) e S (asse di sollecitazione); consideriamo i punti s dove interseca l'ellisse centrale.

Tracciamo le tangenti a questi due punti \rightarrow hanno una direzione congiunti all'ascissa di s rispetto all'ellisse centrale; si può dimostrare che **ASSE NEUTRO** sarà tangente a queste tangenti e passante per il baricentro

LA **ASSE NEUTRO** e **ASSE** di sollecitazione sono direzioni coniugate rispetto all'ellisse centrale d'inerzia.

FORMULA DIRETTA senza sovrapposizione degli EFFETTI,



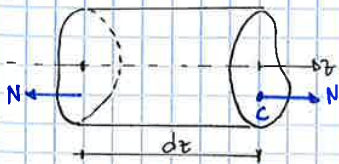
basta scrivere le coordinate dei punti s rispetto alla retta t (legge coordinate // all'asse di sollecitazione)

$$y_s = s_p \cos \beta \quad \beta = \text{angolo sollecitazione rispetto } y$$

$$I_x = I_t \cos^2 \beta \quad I_t = \text{momento inerzia lungo } t \text{ dove agisce il vettore } M$$

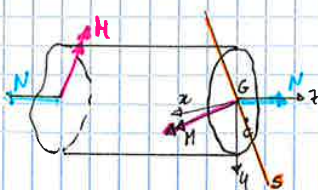
$$G_x = \frac{M \cdot s_p}{I_t}$$

SFORZO NORMALE ECCENTRICO: quando la risultante dei carichi N ha una retta d'azione parallela ma non coincidente con l'asse baricentrico z della trave.



C = centro di pressione; interazione retta d'azione di N sulla sezione trasversale

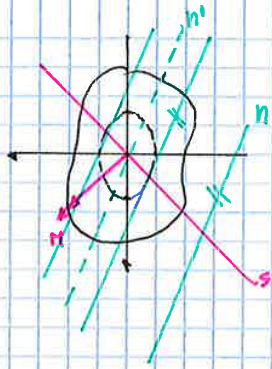
Tale sollecitazione può essere vista come la sovrapposizione di uno sforzo normale + momento flettente che hanno come asse di sollecitazione la retta passante per G .



lo sforzo normale può essere portato da C a G con l'uso del MOMENTO di TRASPORTO

$M_{CG} = M + S$

CG = asse di sollecitazione del solido



Immaginando quindi:
 c = centro di pressione; ca = asse di collegamento
 M = vettore momento
 Immaginiamo di avere n come asse neutro.
 ca retta n bidirezionale coniugata con s
 nella polarità d'inerzia delle derivate

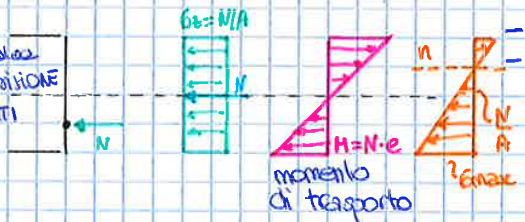
La posizione dell'asse neutro dipende dalle coordinate del centro di pressione ($e_x; e_y$) ed è fondamentale l'angolo α che è inclinato l'asse s .
 Queste comandano la posizione dell'asse neutro.
 P_x^2, P_y^2 sezione del materiale.

$$1 + \frac{e_y}{P_x} y + \frac{e_x}{P_y} z = 0$$

Quindi come si può notare non conta l'entità dello sforzo normale (grandezza) N influenza le e_z ; non l'asse neutro.

Per disegnare le tensioni σ_z : - trovare posizione asse neutro tramite equazione.

GRABIE o la sovrapposizione degli effetti



- sarà un diagramma lineare
 - si può disegnare una retta di riferimento ortogonale all'asse neutro e riportando:
 • $\sigma_z = 0 \rightarrow$ asse neutro
 • $\sigma_z = N/A \rightarrow$ baricentro

Avremo un diagramma non più simmetrico; e in questo caso è piezzo flessione quindi prevalgono le compressioni.

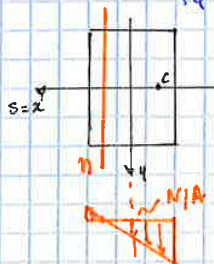
CASI PARTICOLARI

• $e_x = 0$ $1 + \frac{e_y}{P_x} y = 0$ asse neutro parallelo all'asse x .



$$y_n = - \frac{P_x^2}{e_y}$$

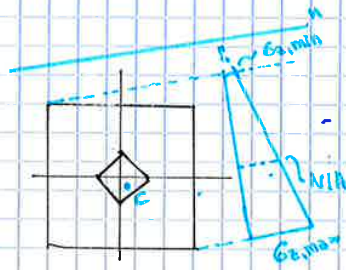
• $e_y = 0$ $1 + \frac{e_x}{P_y} z = 0$



• $e_x = e_y = 0$ $c = G$ SFORNO NORMALE CENTRATO.

• e_x e $e_y \rightarrow$ too FLESSIONE DEVIATA

$$|N| = 0$$

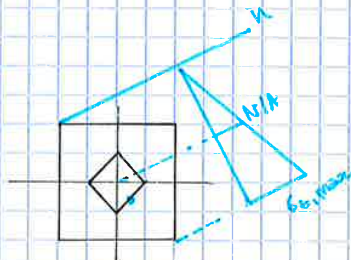


Per vedere l'effetto, analizziamo in caso generale.

- se centro di pressione è INTERNO, genera un asse neutro esterno alla sezione

Lo il diagramma tra tensioni tutte dello stesso segno; quindi in pressoflessione la struttura sarà tutto compressa

Importanza è elevata; infatti se un materiale non reagisce bene a trazione → va progettato in modo da farlo cadere nel 3° medio. → sola COMPRESSIONE



- caso LIMITE = centro di pressione su borde, ci dà un diagramma triangolare con tensioni tutte dello stesso segno.



- caso SFAVOREVOLE: centro di sollecitazione ESTERNO. Allora mi dà una zona di compressione di trazione, perché l'asse neutro cade nella struttura. Quindi questo tipo di materiale deve reagire bene sia a trazione che a compressione.

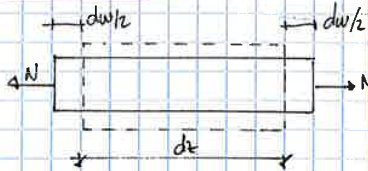
Se il materiale non è in grado di sopportare la trazione, nascerà una fessura e in compressione, reagirà quindi solo in area inferiore della sezione.

//

LAVORO di DEFORMAZIONE: energia che si accumula nel corpo secondo le sollecitazioni studiate.

Gli stati tensionali studiati finora sono STATI MONOASSIALI. Utilizziamo il teorema di Clapeyron (lavoro immagazzinato all'interno di un corpo elastico lineare e è pari alla metà della forza finale per lo spostamento finale → processo quasi statico)

SFORZO NORMALE



conosci lunghezza dz e lo assogettiamo ad uno sforzo N → abbiamo un allungamento del corpo pari a dw/2 (per lato).

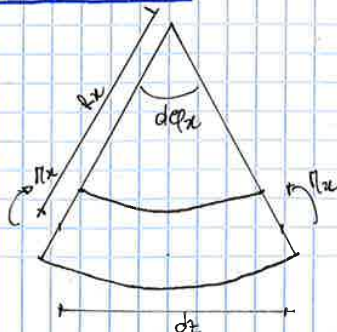
$$dL = \frac{1}{2} N \cdot dw = \frac{1}{2} N \cdot \epsilon_z \cdot dz$$

$$L \cdot dw = \epsilon_z \cdot dz$$

Sottitubendo, mi ricavo il lavoro di deformazione

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} \quad \epsilon_z = \frac{N}{EA} \quad EA = \text{RIGIDEZZA ESTENSIONALE}$$

FLESSIONE RETTA



Il momento Mx causa una rotazione dφx e abbiamo dφx/dz = Rx

$$dL = \frac{1}{2} M_x \cdot d\phi_x = \frac{1}{2} M_x \cdot \chi_x \cdot dz$$

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EI_x} \quad EI_x = \text{RIGIDEZZA FLESSIONALE}$$

Applico la sovrapposizione degli effetti:
- fibre inferiori

$$Y = +h/2$$

$$\sigma_{z,max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} = 131,63 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{z,max} < \sigma_y \quad \underline{\text{VERIFICATO}}$$

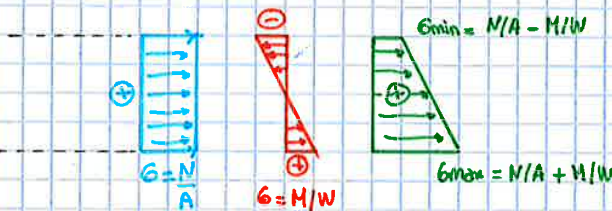
- fibre superiori

$$Y = -h/2$$

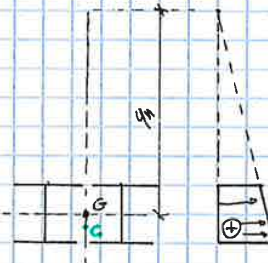
$$\sigma_{z,max} = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} = 78,93 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{z,max} < \sigma_y \quad \underline{\text{VERIFICATO}}$$

Possiamo diagrammare le tensioni



L'asse neutro sarà esterno alla sezione (N cade all'interno del nocciolo centrale d'inerzia)

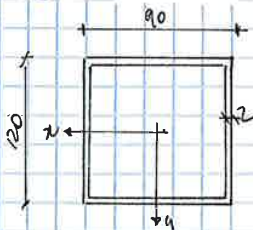


L'eccentricità:

$$M_x = N \cdot e_y \rightarrow e_y = \frac{M_x}{N} = 3,65 \text{ cm}$$

$$y_n = -\frac{I_{xz}}{I_{xx}} = -\frac{I_{xz}}{A \cdot e_y} = -79,3 \text{ cm}$$

2.



sezione scatolare, stesso acciaio; sarà compressa!

le sollecitazioni sono:
 $N_x = -8077 \text{ kN}$
 $M_x = 1847 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 $M_y = 0$

studiando la geometria:

$A = 824 \text{ cm}^2$
 $I_{xx} = 1773579 \text{ cm}^4$
 $I_{yy} = 1141459 \text{ cm}^4$
 $W_x = 29559,64 \text{ cm}^3$
 $W_y = 25365,75 \text{ cm}^3$

• fibre inferiori:

$$\sigma_{z,max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} = -35,54 \text{ N/mm}^2 \quad \underline{\text{VERIFICATO}}$$

• fibre superiori

$$\sigma_{z,max} = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} = -160,50 \text{ N/mm}^2 \quad \underline{\text{VERIFICATO}}$$



Avremo in diagramma tutto compresso visto all'interno del nocciolo!

$$e_y = \frac{M_x}{N} = -22,87 \text{ cm}$$

$$y_n = 94,11 \text{ cm}$$

ASSE NEUTRO!

$$1 + \frac{e_y}{p_x^2} y + \frac{e_x}{p_y^2} x = 0$$

$$10 - 0,85 \cdot y - 0,64 \cdot x = 0$$

troviamo due punti caratteristici
 $P_1(0; 11,76)$ $P_2(1,51; 0)$, che sono le intersezioni con x e con y

COA SUCCEDERE QUANDO IL MATERIALE NON RIESCE A SOPPORTARE TRAZIONE?

Sono materiali come rocce, CCS, materiali ceramici, che resistono bene a compressione ma non sono in grado di sopportare trazione.

Avviene quando abbiamo un diagramma a farfalle; nel momento in cui abbiamo trazione \rightarrow fessurazione \rightarrow il materiale non può più trasmettere le sollecitazioni \rightarrow sezione penalizzata

Se il centro di pressione è fuori il terzo medio \rightarrow diagramma a farfalla

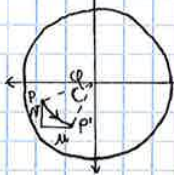
TORSIONE - SEZIONE CIRCOLARE

Avremo delle sollecitazioni di tipo tangenziale.



Ipotesi portanza: nolido sottoposto alle due braccia con un momento torcente M_z . Le coppie sono uguali ed opposte per far risultare l'equilibrio statico del corpo.

Facciamo un'IPOTESI CINEMATICA: ogni sezione trasversale del nolido, ruota attorno al baricentro tenendo piano. Le componenti di spostamento si ottengono come componenti dello spostamento PP' .



$\phi_z =$ rotazione
 $u, v =$ componenti di spostamento

L'angolo positivo vale ANTICORARIO.

$$\begin{aligned} u &= -\phi_z \cdot y \\ v &= +\phi_z \cdot x \\ w &= 0 \end{aligned}$$

$w = 0$ spostamento nullo lungo z.

ANGOLO UNITARIO di TORSIONE: detta ϕ_z ; θ ma l'angolo unitario di torsione \rightarrow curvatura torsionale (rad/m)

$$\theta = \frac{d\phi_z}{dz}$$

$\phi_z =$ rotazione infinitesima

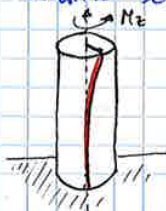
Per la linearità di questa derivata possiamo scrivere:

$$\phi_z = \theta \cdot z$$

$$z = 0 \rightarrow \phi_z = 0$$

quindi ϕ_z crescerà linearmente.

Ipoteziamo che le braccia del nolido siano ferme; la rotazione ϕ_z cresce con z fino al valore $\phi_z = \theta \cdot z$. Le fibre lungo l'asse z subiscono una deformazione EUCLOIDALE.

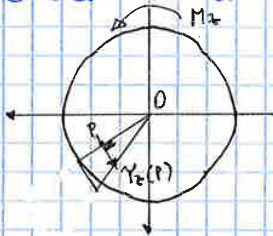


Guardiamo la III equazione

$$\tau_{zx} \tau_{xz} + \tau_{zy} \tau_{yz} = 0$$

Significa che il vettore tensione sulla superficie laterale è tangente alla superficie interna. Quindi in una sezione circolare la tensione tangenziale è ortogonale al raggio vettore in corrispondenza del contorno.

Quanta ortogonalità vale in qualsiasi punto P all'interno della sezione trasversale. Se ci mettiamo in P e consideriamo il raggio vettore OP (di modulo r); scriviamo il prodotto scalare che sarà nullo perché $\tau_z(P)$ e OP sono ortogonali.



$$\tau_z \cdot r = -G \cdot \theta \cdot yz + G \cdot \theta \cdot xy = 0$$

Ora vediamo le condizioni di equidiversione sulle basi

↳ le sollecitazioni normali sono nulle (immediato perché $\epsilon_z = 0$)

$$N = M_x = M_y = 0 \quad (\epsilon_z = 0)$$

- il taglio nullo:

$$T_x = \int_A \tau_{zx} dA = -G \cdot \theta \int_A y dA = -G \cdot \theta S_x = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Per ipotesi è nullo perché} \\ \text{è in asse centrale} \\ \text{d'inerzia!} \end{array}$$

$$T_y = \int_A \tau_{zy} dA = -G \cdot \theta \int_A x dA = -G \cdot \theta S_y = 0$$

L'unica non nulla è il momento M_z

$$M_z = \int_A \tau_{zy} \cdot y - \tau_{zx} \cdot x dA \neq 0$$

Sviluppando e sostituendo i suoi valori all'interno

$$M_z = \int_A (x \cdot \tau_{zy} - y \cdot \tau_{zx}) dA = G \cdot \theta \int_A r^2 dA = G \cdot \theta \cdot I_p$$

$$M_z = G \cdot \theta \cdot I_p$$

I_p = momento d'inerzia polare della sezione

ci possiamo calcolare il valore di θ

$$\theta = \frac{M_z}{G \cdot I_p} = \frac{z \cdot M_z}{G \cdot \pi \cdot R^4}$$

$G \cdot I_p$ = RIGIDEZZA TORZIONALE e dipende da:
- qualità del materiale: cioè più è alto G più è nullo piccolo

- momento d'inerzia polare; se si raddoppia il raggio l'angolo unitario di torsione

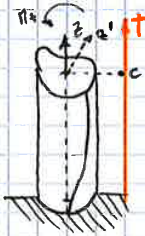
Quindi la rotazione torzionale di un'estremità: diminuisce di 16 volte

$$\theta = \frac{d\phi}{dz}$$

$$\phi_z(z) = \frac{M_z \cdot z}{G \cdot I_p}$$

si può notare che tanto più è lungo l'asta tanto più l'estremità libera ruoterà.

Da un punto di vista deformativo, le fibre (l'asse z) continuano e subire una deformazione elicoidale (anche l'asse z si deformerà)



ASSE t = asse di torsione

Come si può notare t non è detto che passi all'interno della sezione!

Analiticamente il campo di spostamenti si può scrivere

$$\begin{aligned} u &= -\theta \cdot z (y - y_c) \\ v &= \theta \cdot z (x - x_c) \\ w &= \theta \cdot W(x, y) \end{aligned}$$

x_c, y_c perché si ruota attorno a c e non a G

$W(x, y)$ è una funzione a due variabili definite nella sezione trasversale e si chiama = **FUNZIONE INGOMBAMENTO** [m^2]

Derivando queste equazioni cinematiche otteniamo le deformazioni:

$$\begin{aligned} \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} &= 0 \\ \gamma_{zy} &= -\theta (y - y_c) + \theta \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{zx} &= \theta (x - x_c) + \theta \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}$$

Compiono: - coordinate del centro di torsione $(x - x_c)$ e $(y - y_c)$
- e le derivate prime funzione ingobbamento

Dalle EQ. COSTITUTIVE otteniamo le tensioni:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{zx} &= G \theta \left[\frac{\partial w}{\partial x} - (y - y_c) \right] \\ \tau_{zy} &= G \theta \left[\frac{\partial w}{\partial y} + (x - x_c) \right] \end{aligned}$$

Come facciamo a trovare la funzione ingobbamento?

Verifichiamo con le equazioni statiche. Dalla 3^a eq. indefinita d'equilibrio otteniamo

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad \text{sostituendo}$$

$$G \theta \frac{\partial w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y^2} \cdot G \theta = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y^2} = 0$$

1. Questo significa dire che w deve essere una FUNZIONE ARMONICA

1. $\nabla^2 w = 0$

2. Equazione di contorno sulla superficie laterale (nelo specifico la 3^a)

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} - (y - y_c) \right] n_x + \left[\frac{\partial w}{\partial y} + (x - x_c) \right] n_y = 0 \quad \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_x n_x + \sigma_y n_y = 0$$

Allora definiamo $I_t =$ FATTORE di RIGIDEZZA TORSIONALE \rightarrow dipende soltanto dalla geometria della sezione

$$\theta = \frac{M_z}{G \cdot I_t}$$

Per qualunque tipo di sezione

$$I_t \leq I_p$$

La sezione circolare è la sezione OTTIMALE per lavorare a TORSIONE! Ci offre la massima resistenza dal punto di vista geometrico

\rightarrow ci offre tutto il suo momento d'inerzia polare.

LAVORO di DEFORMAZIONE

Per il teorema di Biot-Savart

$$dL = \frac{1}{2} M_z \cdot \theta dz$$

$\theta dz =$ rotazione del conico dz

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{G \cdot I_p}$$

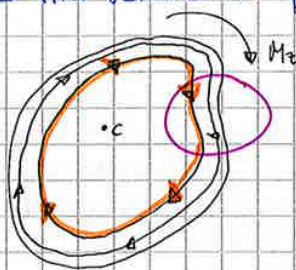
Esistono delle analogie per lo studio della TORSIONE.

ANALOGIA IDRODINAMICA si può dimostrare che le linee di flusso delle tensioni tangenziali (derivanti dalla divergenza del vettore σ) coincidono con le linee di flusso delle velocità dei punti di un liquido perfetto inserito in un recipiente (forma identica sezione trasversale) che venga messo in rotazione attorno l'asse di torsione.

Nel momento in cui si ferma la torsione, il liquido per inerzia continua ruotare all'interno del recipiente e se ci fosse un tracciante si potrebbe vedere le linee di flusso che coincidono con le linee di flusso delle tensioni.

Equazione di tipo divergente $\text{div} \{ \sigma \}$

Presa una sezione di forma qualsiasi

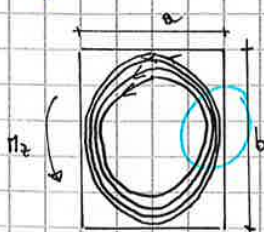


se noi mettiamo in senso orario in rotazione il recipiente attorno al centro C di torsione e poi blocchiamo la rotazione, il liquido descrive queste linee di flusso che rappresentano le linee di flusso della tensione.

si ha l'addensamento in corrispondenza delle concavità.

\rightarrow aumento velocità del fluido
 \rightarrow incremento delle τ_z

Se guardiamo la sezione RETANGOLARE.



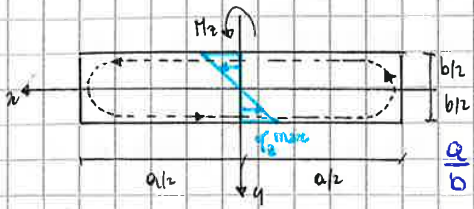
I filetti di liquido si dispongono in modo tale d'aver l'addensamento massimo dei filetti sia nei PUNTI MEDI dei lati lunghi.

Quindi τ_{max} si hanno nei punti medi dei lati lunghi del rettangolo.

Negli spigoli i filetti non ci sono \rightarrow liquido fermo
 \rightarrow le tensioni saranno NULLE!

$\alpha=3$ e $\beta=1$ sono i valori che utilizzeremo nella torsione delle travi in sezione rettangolare aperta.

La sezione rettangolare sottile si presta ad essere studiata in quanto si compone di tante sezioni rettangolari sottili appunto in una trave sottile aperta.



Se guardiamo il generico rettangolo sottile, la tensione tangenziale ha delle linee di flusso che sono curve chiuse con lati paralleli al lato maggiore a ; si invertono solo alle zone terminali (da oix e verticali)

Sullo spessore b (piccolo rispetto ad a) l'unica componente tangenziale non è τ_{xz} (perché la τ_{xy} è trascurabile) (z è la direzione del lato più lungo)
 Il diagramma delle tensioni dà un diagramma LINEARE BIRIANGOLARE

$$\tau_{xz}(y) = - \frac{6 \cdot M_z}{a \cdot b^3} \cdot y$$

Questo vale per un rettangolo sottile!

Il valore massimo varrà:

$$\tau_{xz}^{max} = \frac{3 \cdot M_z}{a \cdot b^2}$$

Raddoppiando lo spessore b posso ridurre la tensione massima di 4 volte.
 Il fattore di rigidezza torsionale sarà:

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b^3$$

$$\beta = \frac{1}{3}$$

Se inseriamo $I_t \rightarrow \tau_{xz}^{max}$

$$\tau_{xz}^{max} = \frac{M_z \cdot b}{I_t}$$

Forza molto simile alla tensione massima delle travi inflesse

Se facciamo in EQUIVALENZA tra il momento torcente esterno e la risultante delle coppie interne generate dalla τ_{xz} per un braccio; notiamo che τ_{xz} non sono sufficienti ad assicurare l'equilibrio con il momento torcente esterno

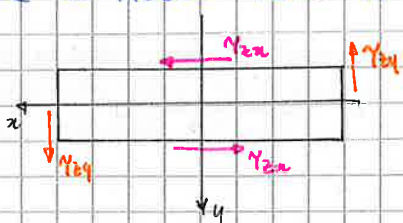
$$M_z = - \int_A y \tau_{xz} da \Rightarrow \frac{6 \cdot M_z}{a \cdot b^3} \int_{-a/2}^{+a/2} dx \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 dy$$

Il risultato è pari a:

$$M_z(\tau_{xz}) = \frac{M_z}{2}$$

quindi non riusciamo ad equilibrare il momento ($M_z(\tau_{xz}) = M_z$ in questo caso è equilibrato)

Nelle zone terminali del rettangolo invece delle τ_{xz} che per quanto piccole in modulo hanno un braccio molto grande e quindi compensano l'altra metà del momento torcente

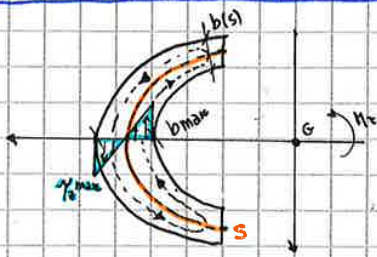


Dal punto di vista ingegneristico hanno scarsa importanza $\tau_{xy} \ll \tau_{xz}$

Quindi:

il momento torcente si ripartisce tra i rettangoli proporzionalmente alle inerzie torsionali.

SEZIONE APERTA SOTTILE - CURVILINEA



Il generico elemento $b(s)$ lungo la linea media "s".

Dobbiamo trasformarle le sommatorie in integrali

$$\tau_{zs}(s) = \frac{M_z \cdot b(s)}{I_t}$$

$$\tau_z^{max} = \frac{M_z \cdot b_{max}}{I_t}$$

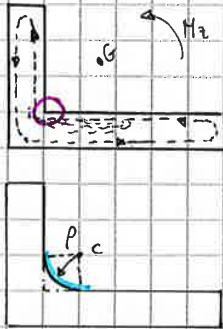
$$I_t = \frac{1}{3} \int_c b^3(s) ds$$

Le tensioni tangenziali sono // alla linea MEDIA c e si invertono allo spessore.

↳ queste linee di flusso realizzano un assorbimento di sforzo non adatto a lavorare a torsione.

Il braccio interno è molto piccolo → condizione sfavorevole di sforzo perché avendo un $M = F \cdot b$ se ho b molto piccolo F deve essere molto grande.

↳ anche delle tensioni tangenziali molto alte questo che ottiamo studiando role nell'ipotesi di escludere le concentrazioni di tensioni. In realtà gli angoli concavi hanno una concentrazione di tensioni.



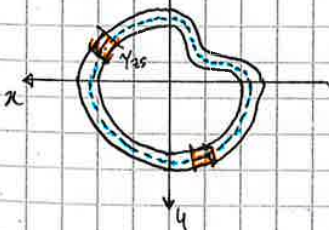
Guarda le linee di flusso vediamo che si ha un addensamento linee di flusso ↳ addensamento degli sforzi.

Per ridurre questi sforzi si usano i RACCORDI tra i RETTANGOLI.

↳ curva di RAGGIO p
Il flusso delle tensioni viene addolcito: eliminando quel forte addensamento di tensioni ed avremo una tensione che è in proporzione inversa del raggio di curvatura.

più largo è il raggio di raccordo → più è dolce l'andamento delle tensioni!

SEZIONI SOTTILI CHIUSE



Le condizioni di sforzo sono favorevoli rispetto alle condizioni delle sezioni aperte.

Il flusso non si inverte sullo spessore ma compie una circolazione completa seguendo la linea media

Il braccio interno è enormemente più grande che nel caso delle sezioni sottili aperte (perché si può collocare rispetto il baricentro per esempio).

↳ GRANDI RIGIDETÀ ma a parità di materiale e momento torcente, uno sforzo molto inferiore rispetto le sezioni aperte.

τ_{zs} sarà ovunque parallela alla linea media (anche all'interno dello spessore) → sarà COSTANTE (ipotesi che facciamo, ed è tanto più valida quanto è più piccolo lo spessore)

Sostituendo amemo:

$$\tau_{zs}(s) = \frac{M_z}{2 \cdot R \cdot b(s)}$$

FORMULA di BREDT

L'unica quantità variabile sarà lo spessore; quando lo sarà minimo si avrà la tensione tangenziale massimo.

$$\tau_{zs}^{max} = \frac{M_z}{2 \cdot R \cdot b_{min}}$$

dove avrà delle strozzature dove b_{min}
Nelle sezioni sottili aperte lo τ era
proporzionale allo spessore massimo!

FATTORE di RIGIDEZZA TORZIONALE - SEZIONI CHIUSE

Se applichiamo il th di Clapeyron

$$dL = \frac{M_z \cdot \varphi_z}{z} = \frac{1}{z} M_z \cdot \theta \cdot dz = \frac{1}{z} \frac{M_z^2}{G \cdot I_t} dz$$

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} \quad \theta = \frac{M_z}{G \cdot I_t}$$

Possiamo scrivere il lavoro tramite il potenziale elastico complementare

$$dL = \frac{1}{2} \int_V \varphi dV = \frac{1}{2G} \int_V \tau_{zs}^2 dV = \frac{dz}{2 \cdot G} \int_V \tau_{zs}^2 dA \quad dW = dz \cdot dA$$

$$\varphi = \frac{\tau_{zs}^2 \cdot z}{2 \cdot G}$$

Confrontato con Clapeyron ci permette di mettere in evidenza I_t

$$I_t = \frac{4 \cdot R^2}{\int \frac{ds}{b(s)}}$$

Quando avremo spessore COSTANTE

$$I_t = \frac{4 \cdot R^2 \cdot b}{L}$$

L = linea media.

Se CONFRONTIAMO la sezione sottile chiusa con quella aperta di pari materiale; è facile notare che la sezione chiusa presenta una rigidizzo molto maggiore della sezione sottile aperta.

APERTE
 $I_t = \frac{1}{3} a \cdot b^3$

CHIUSA
 $I_t = \frac{4 \cdot R^2 \cdot b}{L}$

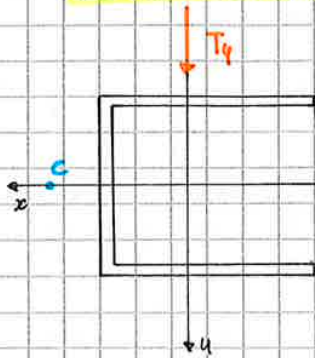
quindi a parità di b ; se noi prendiamo un valore piccolo, I_t delle aperte sarà inferiore di quelle chiuse.

A parità di materiale impiegato

CHIUSE ☺
APERTE ☹

TAGLIO RETTO: forza giacente sul piano della sezione diretta secondo uno degli assi centrali d'inerzia.

CENTRO di TAGLIO (centro di torsione)



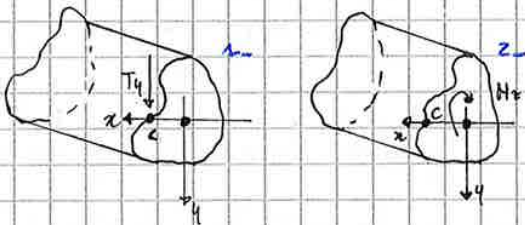
Il T_y induce una rotazione torsionale della sezione; perché non passa per il centro di torsione della sezione stessa.

Quando T_y passa per C non ruota la nostra sezione, ma trasla.

CENTRO di torsione = intersezione asse di torsione (il z) sul piano della sezione

↳ è l'asse che non si deforma per effetto dello torsione.

Dimostriamo che il T e M_z sono energeticamente ortogonali, quando il T stesso è passante per il centro di torsione.



1. consideriamo T_y passante per C
2. momento torcente M_z

- Chiamiamo $\varphi_z(T)$ l'eventuale rotazione della sezione attorno a z provocata da T_y .

- $\eta_c(M_z)$ lo spostamento del piano zy del punto C provocato da M_z .

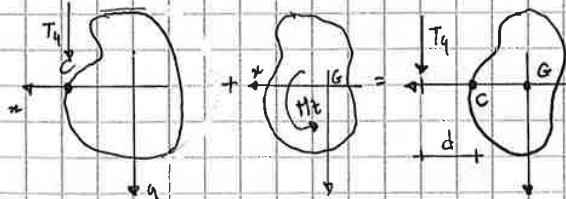
Scriviamo il lavoro mutuo di questi due sistemi di forze (Th di Betti)

$$\{T\}^t \{ \eta_c(M_z) \} = M_z \varphi_z(T)$$

$\eta_c(M_z)$ del centro di torsione è nullo per definizione; allora i lavori mutui sono nulli e allora sarà nulla la $\varphi_z(T_y)$.

↳ la $\varphi_z(T)$ è nulla → taglio non induce rotazione torsionale

La sollecitazione composta di taglio torsione equivale ad una forza // al taglio con braccio



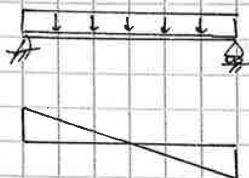
$$d = \frac{M_z}{T_y}$$

rispetto al centro di torsione sommando i due effetti, ritroviamo una forza T_y traslata della quantità d rispetto al centro di torsione stesso. (questo è permesso grazie al principio di sovrapposizione degli effetti)

TAGLIO RETTO - FORMULA di JOURAFKI: sarà una formula approssimata

Che cos'è una sollecitazione di taglio?

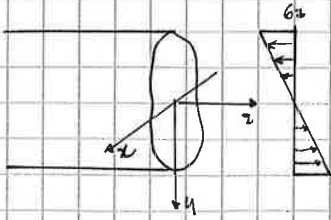
Dato una trave appoggiata e soggetta ad una carico; il taglio è un diagramma derivato dal momento.



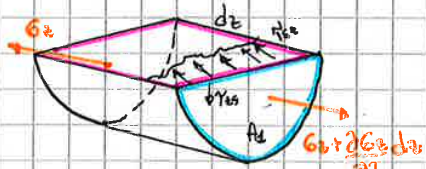
$$T_y = \frac{dM_z}{dx}$$

reciproche delle τ_{sz} . $\tau_{sz} = \tau_{zs}$.

" Poiché M_z è variabile linearmente lungo la trave, vuole dire che le σ_z non sono costanti su tutta la trave (distribuzione a forfora) \hookrightarrow massima alle basi.



Allora tensioni tangenziali servono per equilibrare la variazione delle tensioni normali del momento e noi ci spostiamo da una sezione z a quella distante dz , le tensioni σ_z che agiscono su z passano a $\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$ aumentando per questo



piccolo incremento infinitesimo. Questa variazione di coordinata deve essere equilibrata dalle tensioni tangenziali τ_{sz} (per far valere l'equilibrio).

Scriviamo l'equilibrio da direzione z di questo elementino di trave.

" $\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz - \sigma_z - \tau_{sz} = 0$ Quindi agiranno le $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$ sulla faccia di destra e le τ_{sz} sulla faccia superiore.

$$\left[\int_B^B \tau_{sz}(z) dz \right] dz = \int_{A'} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \cdot dA$$

M_z NON DIPENDONO da z (perché abbiamo detto che il taglio è costante lungo la trave).

Ci ricordiamo la formula di Navier $\sigma_z = \frac{M_z}{I_x} \cdot y$ e quindi

$$\int_{A'} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \cdot dA = \int_{A'} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{M_z}{I_x} \cdot y \right) dz \cdot dA \quad I_x, y \text{ non dipende da } z. \text{ l'unica quantità che dipende da } z \text{ è } M_z$$

Noi sappiamo che $T_y = \frac{\partial M_z}{\partial z}$ inoltre nell'integrale da dA si può estrarre tutto tranne la y

$$\int_{A'} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{M_z}{I_x} \cdot y \right) dz dA = \int_{A'} \frac{T_y}{I_x} \cdot y dz dA = \frac{T_y}{I_x} dz \cdot S_x^{(A')} \quad S_x^{(A')} = S_x^{(A)}$$

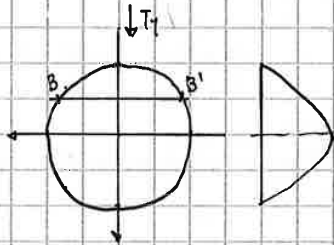
Quindi sostituendo avremo:

$$\left[\int_B^B \tau_{sz}(z) dz \right] dz = \frac{T_y \cdot S_x^{(A')}}{I_x} dz$$

Non è possibile conoscere la quantità di τ_{sz} . Facciamo l'approssimazione fondamentale \rightarrow ci accontentiamo del VALORE MEDIO sulla CORDA!

$$\int_B^B \tau_{sz}(z) dz = \bar{\tau}_{sz} \cdot b = \frac{T_y \cdot S_x^{(A')}}{I_x}$$

SEZIONE CIRCOLARE: analogo del rettangolo. Il momento torcente sarà massimo sull'asse baricentrico

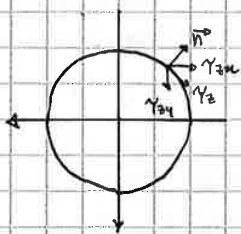


Il calcolo viene più complicato perché devo utilizzare delle coordinate polari.

$$\tau_{zy} = \frac{T_y \cdot S_{zz}}{I_{zz} \cdot b} = \frac{4}{3} \frac{T_y \cdot \sin^3 \alpha}{\pi R^2}$$

La distribuzione sarà sinoidale! Il valore massimo quando $\sin = 1$.

La τ_{zx} non sempre si può trascurare in questo caso. La superficie laterale per De Saint Venant, la tensione tangenziale deve essere tangente al contorno del solido \rightarrow ortogonale alla normale uscente ($\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$)



\rightarrow significa che allontanandoci dal baricentro, oltre alle τ_{zy} , ci sono delle τ_{zx} che non saranno trascurabili (in prossimità del contorno)

\rightarrow più entriamo verso il baricentro più le τ_{zx} vanno ad estinguersi!

La tensione tangenziale massima si può scrivere tramite un coefficiente (fattore geometrico maggiore dell'unità) che chiamiamo " s_y ".

$$\tau_{zy} = s_y \cdot \frac{T_y}{A}$$

Nel caso della sezione rettangolare $s_y = 3/2$

sezione circolare $s_y = 4/3$

Questo fattore geometrico si può calcolare per ogni figura conosciuta.

STATO TENSIONALE derivante dal taglio. È uno stato biassiale

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \det[G] = 0$$

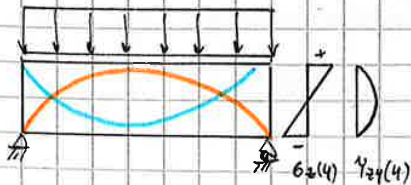
$$T_2 \neq 0$$

minore non nullo

quindi in qualunque caso avremo due tensioni principali $\neq 0$

$$[G^*] = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

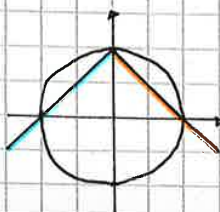
In una trave soggetta anche a taglio, vi saranno delle linee isonormali di trazione e compressione.



Sulle corde baricentriche: - tensioni normali nulle
- tensioni tangenziali massime

queste isonormali sono inclinate a 45°

Le classiche fessure da taglio nei materiali, sono fessure inclinate a 45° ortogonalmente alla tensione principale di trazione.



Il cerchio di Mohr sulla corde baricentrica, sarà un cerchio di taglio puro con direzioni principali inclinate a 45° .

LAVORO di DEFORMAZIONE del TAGLIO nel concio infinitesimo rappresenta l'energia elastica che viene accumulata nel concio di solido per effetto delle sollecitazioni.

Qual'è l'ente deformativo duale della sollecitazione stessa

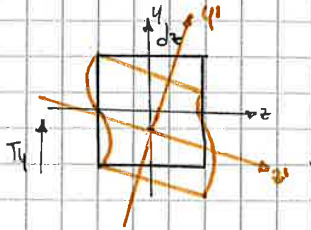
→ scorrimento angolare!

Equazione costitutiva! $\theta = E \cdot \epsilon$

$$\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G} = \frac{6 \cdot T_y}{G \cdot b h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

legge PARABOLICA!

Saranno massimi sul baricentro e saranno nulli sul lembo superiore ed inferiore



Avremo una distorsione di tipo INGOMBAMENTO!

Sul lembo superiore ed inferiore gli assi yz restano ortogonali; sulla fibra baricentrica abbiamo la massima distorsione.

Quindi in questo caso vale:

$$\tau_{zy} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{A} \quad s.g. = \frac{3}{2} \rightarrow \gamma_{zy} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{A \cdot G}$$

Però noi ci accentiamo il valore medio $\bar{\gamma}_y$



Trascuriamo l'ingobbamento del punto di vista grafico, assegnando uno scorrimento a tutte le fibre; invece di avere un andamento parabolico avremo un andamento costante in quale valgono dappertutto

SCORRIMENTO MEDIO DURANTE TAGLIO $\bar{\gamma}_y = \frac{dV}{dz}$

$dV =$ abbassamento provocato dal taglio T_y

Rappresenterà la caratteristica duale alla sollecitazione di taglio.

Detto questo il lavoro di deformazione si può scrivere con il teorema di Clapeyron.

$$L = \frac{1}{2} T_y dV = \frac{1}{2} T_y \bar{\gamma}_y dz$$

$$dV = dz \cdot \bar{\gamma}_y$$

Al fine di trovare un'espansione per $\bar{\gamma}_y$ utilizziamo il lavoro di deformazione tramite il potenziale elastico complementare

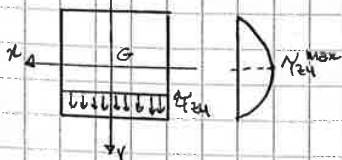
$$dL = \frac{1}{2} \int_V \psi dV = \frac{dz}{2G} \int_V \tau_{zy}^2 dA$$

$$\psi = \frac{\tau_{zy}^2}{2G}$$

Le tensioni tangenziali le scriviamo con la formula di Jourdainky

$$\tau_{zy} = \frac{T_y \cdot S_y^A}{I_y \cdot b}$$

$$\tau_{zy} = \frac{6 T_y}{b h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

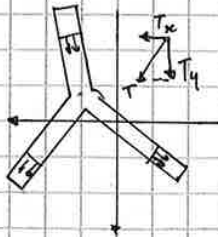


$$dL = \frac{dz}{2G} \int_{-b/2}^{+b/2} dyc \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{36 \cdot T_y^2}{b^2 h^6} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy \rightarrow dL = \frac{dz}{2G} \frac{6 T_y^2}{5 b h}$$

Unendo l'espressione 1- con la 2- avremo:

$$\bar{\gamma}_y = \frac{6}{5} \frac{T_y}{G b h}$$

Per sezioni sottili è facile perché la tensione tangenziale τ_z in ogni corda, è parallela alla linea media ed è costante sulla corda stessa.



ci possiamo fare un'ipotesi degli effetti dovute al taglio X e Y , questo è un grande vantaggio. \rightarrow possiamo sommare le τ algebricamente quindi nominando le due formule di Jourawsky. ($T_x; T_y$)

$$M_{zs}(s) = \frac{T_y S_z(s)}{I_x b(s)} + \frac{T_x S_x(s)}{I_y b(s)}$$

Se scriviamo il lavoro di deformazione tramite il potenziale elastico

$$dL = \frac{dz}{2G} \int_c M_{zs}^2 b ds = \frac{dz}{2GA} (t_x T_x^2 + t_y T_y^2 + 2 t_{xy} T_x T_y)$$

Risolendo il quadrato ci dà il prodotto misto! Questo è il lavoro misto! ($\neq 0$)

Scriviamo i fattori di taglio t_x e t_y

$$t_x = \frac{A}{I_y^2} \int_c \frac{dy^2}{b}$$

$$t_y = \frac{A}{I_x^2} \int_c \frac{dx^2}{b}$$

Il fattore di taglio misto

$$t_{xy} = \frac{A}{I_x I_y} \int_c \frac{dx dy}{b}$$

I momenti statici sono in funzione di s ; pertanto l'integrale va inteso lungo la linea media. Qualora non sia una simmetria retta il prodotto dentro l'integrale si annulla e non ha lavoro misto.

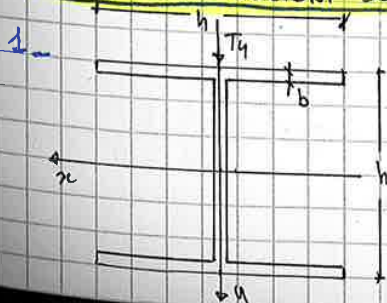
Il lavoro misto quindi compare solo se non si ha simmetria retta!

Gli scorrimenti ANGOLARI saranno funzione dello scorrimento da entrambe le direzioni.

$$\delta_x = \frac{1}{GA} (t_x T_x + T_y \cdot t_{xy}) \quad \text{contributo } T_x$$

$$\delta_y = \frac{1}{GA} (t_y T_y + T_x \cdot t_{xy}) \quad \text{contributo } T_y$$

TAGLIO nelle sezioni sottili



Prendiamo una sezione a "doppio-T". Questa sezione ottimizza il comportamento flessionale in quanto la materia è confinata più perpendicolarmente verso il baricentro; quindi a parità di materiale ci dà una forte inerzia nella direzione X .

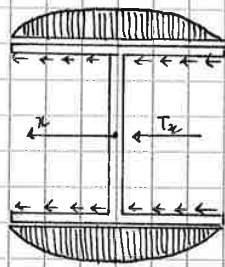
Si può dimostrare praticamente che tutta l'area assorbe il taglio T_y , ne integriamo le τ_{xy} per tutta l'anima, troviamo proprio il taglio T_y

$$\int_D \tau_{xy} \cdot b \, ds = T_y$$

Quindi possiamo notare che:

- momento flettente \rightarrow ali
- taglio \rightarrow anima

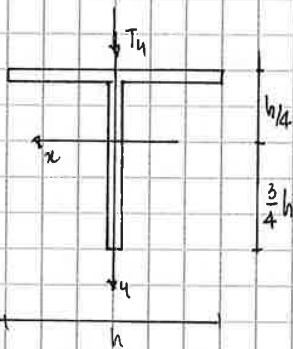
Quando avremo il taglio T_x , dovremo usare la formula per il taglio T_x



$$\tau_{xy} = \frac{T_x \cdot S_y^{(A')}}{I_y \cdot b}$$

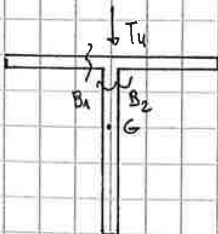
Tutto il taglio sarà assorbito dalle ali \rightarrow andamento parabolico!
 Dall'anima, con $S_y^{(A')} = 0$ non avremo tensioni tangenziali.

2.



Presenta asse di simmetria retta quindi non nasce lo scorrimento α ; le tensioni tangenziali saranno lineari sulle ali e paraboliche sull'anima. Dalla geometria delle aree il momento statico S_x sarà massimo \rightarrow massime tensioni tangenziali.

Calcoliamo i momenti statici.



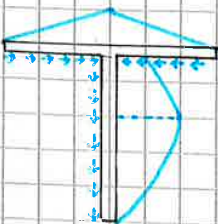
$$S_x^{(A')} (B_1) = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

$$S_x^{(A')} (B_2) = b \cdot h \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4}$$

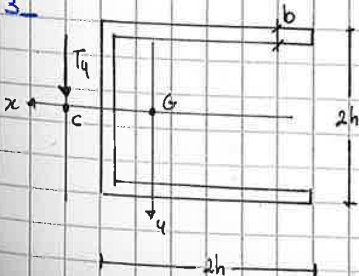
$$S_x^{(A')} (G) = \frac{bh^2}{4} + b \cdot h \cdot \frac{h}{8} = \frac{9}{32} bh^2$$

$$\tau_{xy} (G) = \frac{27}{32} \frac{T_y}{bh}$$

sarà molto più grande rispetto al doppio T



3.



Questa applicazione ci permette di trovare la posizione del centro di taglio C.
 Supponiamo di avere un taglio netto e che passi per il centro C \rightarrow non nasce il momento torcente.
 Avremo solo uno scorrimento α perché T_x appartiene all'asse di simmetria della trave! \rightarrow non avremo lavoro mutuo.

PROBLEMA ELASTICO LINEARE - TRAVI RETTILINEE

TEORIA TECNICA della TRAVE = estensione delle formule di De Saint Venant ai sistemi di travi. Possiamo farlo perché nelle travi che teniamo conto, abbiamo dei modelli molto semplici e quindi molto approssimabili.

Hip. Le $\{\epsilon\}$ e $\{\gamma\}$ nelle sezioni delle travi sono calcolate con le formule di De Saint Venant introducendo, al posto delle sollecitazioni che agiscono sulle basi, le caratteristiche delle sollecitazioni interne agenti sulla superficie considerata.

In particolare De Saint Venant viene esteso ad:

- trave ad asse non rettilineo
- trave a sezione debolmente variabile
- travi che sono caricate su superficie laterale e soggette a forze di volume

Come ci ricordiamo le formule di De Saint Venant non consideravano le forze di volume e a materiali solo omogenei. Quindi ora stiamo facendo delle ipotesi molto importanti!

PROBLEMA ELASTICO LINEARE - TRAVI RETTILINEE

$$[\sigma]^T \{\epsilon\} = -\{\gamma\} F$$

$$[N]^T \{\epsilon\} = \{p\}$$

EQUAZIONI STATICHE

- legano componenti dei vettori $\{\sigma\}$ con le forze di volume F
- legano componenti dei vettori $\{\sigma\}$ con le forze di superficie (sono equazioni al contorno)

$$\{\epsilon\} = [\alpha] \{\gamma\}$$

$$\{\gamma\} = \{\gamma_0\}$$

EQ. CINEMATICHE

- legano componenti di deformazione con il vettore spostamenti
- avremo degli spostamenti assegnati e sono le condizioni al contorno.

$$\{\epsilon\} = [H] \{\gamma\}$$

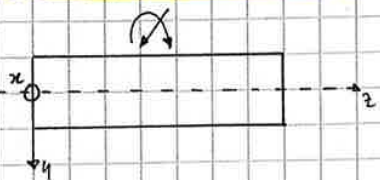
EQ. COSTITUTIVE

- dipendono dal tipo di materiale e legano le caratteristiche della tensione con le caratteristiche della deformazione.

Noi abbiamo un modello di solido tridimensionale, le variabili (x, y, z) sono INDIPENDENTI.

Ora vogliamo elaborare una teoria monodimensionale per le travi in cui la variabile indipendente sia la variabile z . → problema molto semplificato

IPOTESI e GRANDEZZE



IPOTESI

- z = asse della trave
- la sezione della trave sia simmetrica rispetto all'asse y
- travi caricate nel piano y, z



Avremo un **PROBLEMA PIANO**: l'asse della trave e deformazione avvenuta rimane contenuto nel piano (y, z) . (non sposta in x)

Le caratteristiche della sollecitazione interna si riducono da 6 a 3.

$$\begin{aligned} \rightarrow \{\sigma\}^T &= \{T_x, T_y, N, M_x, M_y, M_z\} \\ \rightarrow \{\sigma\}^T &= \{T_y, N, M_x\} \end{aligned}$$

- MOMENTO FLETENTE : provoca l'insorgere ma curvatura χ_x



$$\chi_x = \frac{M}{EI_x}$$

Potrebbe essere riscritta in una matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} \gamma_y \\ \epsilon_z \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{GA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ M \end{bmatrix}$$

$$\{q\} = [H^{-1}] \{Q\}$$

Il lavoro di deformazione del concio elementare sarà:

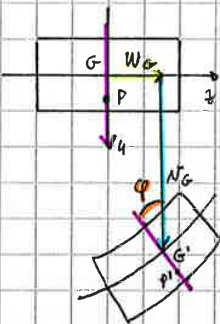
$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \{Q\}^t \{q\} = \frac{1}{2} T \gamma_y + \frac{1}{2} N \epsilon_z + \frac{1}{2} M \chi_x$$

se andiamo ad esprimere le deformazioni in funzione delle sollecitazioni

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{GA} T^2 + \frac{1}{EA} N^2 + \frac{1}{EI} M^2 \right)$$

Deriviamo le equazioni cinematiche cioè ci occorre sapere il legame tra le caratteristiche della deformazione e il vettore degli spostamenti generalizzati. Avremo sempre in ipotesi di piccoli spostamenti (anche a deformazione avvenuta). Il campo degli spostamenti può essere descritto in funzione delle componenti di spostamento del baricentro G della sezione e della rotazione della sezione stessa.

Consideriamo il generico concio di trave caratterizzato da una generica



sezione; a deformazione avvenuta il concio si sarà spostato, l'asse della trave non sarà più rettilineo ma la sezione rimane rettilinea! Il baricentro G ora è in posizione G'.

Avremo le componenti di spostamento del baricentro w_G, v_G, φ (φ è la rotazione, non è uno spostamento)

se prendiamo un generico punto P della sezione avrà anche lui due componenti di deformazione w, v .

Semplicemente utilizzando il disegno possiamo esprimere w, v che saranno funzione di w_G, v_G, φ .

$$P: \begin{cases} v = v_G(z) \\ w = w_G(z) + \varphi(z) y \end{cases}$$

Vale nell'ipotesi di piccoli spostamenti, infatti abbiamo trascurato: $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$ e $\cos \varphi \approx 1$

Ora andiamo a calcolare il campo di deformazione relative al campo di spostamenti. \rightarrow richiamiamo le equazioni cinematiche del solido indeformato. Il campo delle componenti di deformazioni si fa:

$$\begin{cases} \epsilon_y = \partial v / \partial y \\ \epsilon_z = \partial w / \partial z \\ \chi_x = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

Quindi vado a sostituire le relazioni di P all'interno di questo campo di deformazioni!