NUMERO: 2181A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Brigantino Giulia

MATERIA: Fisica I - Appunti + Formulario + Esercitazioni - Prof. Andrianopoli

OBBIETTIVO: capire i fenomeni naturali con un numero limitato di concetti e principi fondamentali

APPROCCIO:
- SPERIMENTALE → metodo scientifico (Galileo)
- QUANTITATIVO → leggi espresse con lingua matematica

Grandezze fisiche <=> numeri
Relazioni tra GF <=> equazioni

FISICA CLASSICA
XVI - XIX secolo → fenomeni visibili a occhio nudo
Storicamente divisa in branche interconnesse:
- ottica, elettricità, magnetismo [FORZA ELETTROMAGNETICA]
- calore, termodinamica [MECCANICA DI SISTEMI DI MOLTE PARTICELLE]

Cosa non è fisica classica?
- MECCANICA QUANTISTICA [$L \sim 10^{-10}$ m]
determina il comportamento delle particelle microscopiche
$m_e \sim 10^{-31}$ kg | INCERTEZZE $m\delta x \, \delta v \geq \hbar \sim 10^{-34}$ Js

- RELATIVITÀ SPECIALE [$v \leq c$, $c = 300000$ km/s]
La velocità della luce è la massima velocità per ogni particella fisica in ogni sistema di riferimento

- RELATIVITÀ GENERALE [M]
Masse grandi concentrate

⇒ FISICA MODERNA = MQ, RS, RG
↳ centrali nucleari, LHC (MQ, RS)
↳ laser, app. elettroniche, semiconduttori (MQ)
↳ GPS (RG)

LONTANO DA CONDIZIONI ESTERNE LA FISICA CLASSICA DÀ DESCRIZIONI ACCURATE DELLA NATURA (correzioni tanto piccole da essere trascurate)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 240

$$[v_{MED}] = \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} = [L^1 t^{-1} M^0]$$

$$[a_{MED}] = \frac{[\Delta v_{MED}]}{[\Delta t]} = [v \cdot t^{-1}] = [L t^{-1} t^{-1}] = [L t^{-2}]$$

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} \dots$$

$$x(t) = A \sin\left(\frac{t}{t_0}\right) \text{ o } A \sin(\omega t) \qquad [A] = [L]$$

sin → no dim. angoli → adimens)

SISTEMA INTERNAZIONALE (SI, MKS)

L → m

M → kg

t → s

COME SI MISURA?

tutte le misure sono affette da INCERTEZZA (errore) ma deve essere tenuto sotto controllo per rendere la misura attendibile e utile. ($\ell = 24{,}7250$ m)

CIFRE SIGNIFICATIVE → tutte le cifre del numero dalla prima a sinistra fino all'ultima a dx (includendo lo zero)

se il risultato viene da calcoli con due cifre significative il risultato deve avere due cifre significative.

$\ell = 25$ m, 3cs $\ell = 24{,}7$ m

$\ell = 24{,}7 \pm 0{,}5$ m $\quad \delta\ell = 0{,}5$ m → INCERTEZZA

- ERRORI SISTEMATICI → affetta la misura sempre in più o in meno
- ERRORI CASUALI/STATISTICI → affettano la misura in direzioni casuali e si possono tenere sottocontrollo con un'analisi statistica della misura che implica molte misure

ANALISI STATISTICA DI ERRORI CASUALI

Prendo N misure di g.f. x

$\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$

$$g'(T) = \frac{dg}{dT}$$

$$g'(\bar{T}) = \left.\frac{dg}{dT}\right|_{\bar{T}}$$

$$g(\bar{T}+\delta T) = g(\bar{T}) + \delta T \left.\frac{dg}{dT}\right|_{\bar{T}}$$

$$\delta g = g(\bar{T}+\delta T) - g(\bar{T}) = \delta T \left.\frac{dg}{dT}\right|_{\bar{T}}$$ → prendo il valore assoluto

DERIVATA PARZIALE

$f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x, y) - f(x,y)}{\delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\delta y \to 0} \frac{f(x, y+\delta y) - f(x,y)}{\delta y}$$

$g(l,T)$

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial l} \cdot \delta l + \frac{\partial g}{\partial T} \delta T$$

$$\delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 \delta l^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 \delta T^2}$$ → se l'errore su l e T è casuale

8/MAR/2017

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial T} = -\frac{2}{T^3} 4\pi^2 l$$

$$\frac{\partial g}{\partial l} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

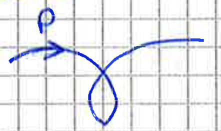
I vettori sono liberi: ogni vettore con la stessa lunghezza, direzione e verso definiscono lo stesso vettore libero
≠ VETTORI APPLICATI in un punto → importanza del punto di applicazione del vettore.

VERSORE: $\hat{u}_w = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$ $\quad |\hat{u}_w| = 1$ unitari

definiscono solamente DIREZIONE E VERSO, sono adimensionali (≠ vettori)

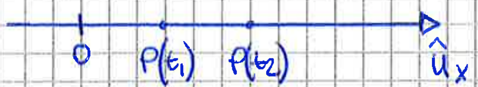
ATTORI DEL MOTO
- punto materiale (particella)
- sistemi di punti materiali
- corpi estesi

$P(t)$



Al variare del tempo descrive una curva nello spazio (TRAIETTORIA)

Moto in una direzione → Traiettoria = Retta
[MOTO 1D: MOTO RETTILINEO]



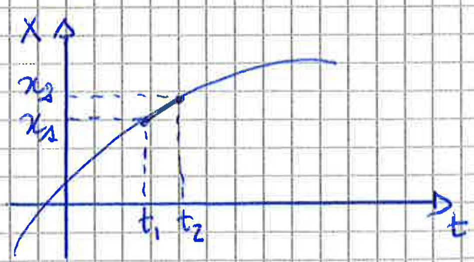
P varia la sua posizione rispetto al tempo.
$x = f(t)$

$x = x(t)$ LEGGE ORARIA DEL MOTO

$t_1 < t_2$, $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ spostamento di x

VELOCITÀ MEDIA

$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ $\quad \Delta t = t_2 - t_1$



$$\boxed{v_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

$x_1 = x(t_1)$
$x_2 = x(t_2)$

/ la pendenza di quel tratto da la v_m ⇒ Secante a $x(t)$ tra t_1 e t_2

$x(t)$ è la FUNZIONE PRIMITIVA di $v(t)$ $\Rightarrow$ posso ricavare la legge del moto di $x(t)$ da $v(t)$

$P(x)$ primitiva $f(x) = \frac{dP}{dx} \longrightarrow P(x) = \int f(x)dx + c$

$$P(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx = P(x) - P(x_0)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x(t) - x(t_0)$ come ricavo la posizione dalla velocità

$\boxed{dx = v\,dt}$ $\rightarrow$ questa espressione è come se calcolassi

$$x(t+dt) - \cancel{x(t)} = x(t) + dt\frac{dx}{dt}(t) + \dots - \cancel{x(t)}$$

$\hookrightarrow dx = v(t)dt$

Mi sono fermata allo sviluppo di Taylor all'ordine 1

Cambio variabile:

$t \rightarrow x(t)$

$dt \rightarrow dx = v(t)dt$

$t_0 \rightarrow x(t_0) = x_0$

$t \rightarrow x(t) = x$

$$\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} dx$$

Esempi: $- v(t) = v_0 = 2\,m/s$ $\qquad x(t)$?

$x(t_0 = 0) = x_0 = 1\,m$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0\,dt \Rightarrow x - x_0 = v_0 t\Big|_0^t = v_0 t$$

$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t}$

$- v(t) = A\cos(\omega t)$, A e ω = costanti $\qquad [A] = [L\,t^{-1}]$

$[\omega] = [t^{-1}]$

In generale $a = a(t)$

$dv = a(t)\,dt \longrightarrow \int_{v_0}^{v_1} dv = \int_{t_0}^{t_1} a(t)\,dt$

$\begin{cases} v_1 = v(t_1) \\ v_0 = v(t_0) \end{cases}$

$v(t) - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$

$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$

$\Rightarrow$ Nota $a(t)$ $\forall t$ in un certo Δt, e note $\underbrace{v(t_0) \text{ e } x(t_0)}$
allora è nota $x(t)$ $\forall t$ in Δt

CONDIZIONI INIZIALI DEL MOTO

caso particolare : $a = a_0$ costante $\boxed{\text{MUA}}$

$\begin{cases} v(t_0) = v_0 \\ a(t) = a_0 \end{cases} \Rightarrow v(t)$

$v(t) - v_0 = \int_{t_0}^{t} a\,dt = a_0(t - t_0)$

$$\boxed{v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)}$$

$x(t_0) = x_0$

$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} [v_0\,dt + a_0(t-t_0)\,dt] =$

$= v_0(t - t_0) + a\int_0^{t} z\,dz = v_0(t - t_0) + \frac{a_0}{2} z^2 \Big|_0^{t-t_0}$

$\begin{cases} t - t_0 = z \\ dt = dz \\ z = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2}$$

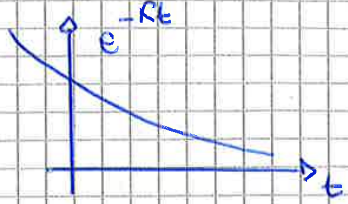
CADUTA GRAVE

$\downarrow x$ $a_0 = g = 9{,}81\ m/s^2$ accelerazione di gravità

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 240

MOTO SMORZATO

$$\boxed{v(t) = v_0 e^{-kt}}$$



$t_0 = 0 : v(0) = v_0 \qquad \lim_{t \to \infty} v(t) = 0$

$k \text{ cost} > 0 \quad [k] = [t^{-1}]$

Ricavo $a(t) \Rightarrow a = \dot{v} = -k v_0 e^{-kt} = -kv$

$$\frac{dv}{dt} = -kv \qquad \text{eq. diff } 1^\circ \text{ ord}$$

$x(0) = x_0$

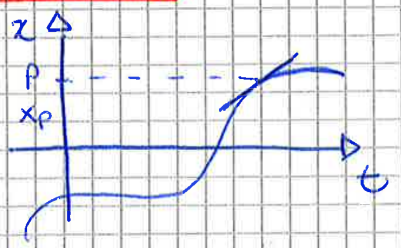
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = v_0 \int_0^t e^{-kt}\,dt = \frac{v_0}{(-k)} e^{-kt}\Big|_0^t = x(t) - x_0$$

$$x(t) = x_0 - \frac{v_0}{k}\left(e^{-kt} - 1\right) \rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$$

9|MAR|2017

CINEMATICA 1D

$\boxed{x = x(t)}$ LEGGE ORARIA



$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}}$$

$$\boxed{a(t) = \frac{dv}{dt} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}}$$

Note: $a(t)$, $v_0 = v(t_0)$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$x = x(t_0)$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

SPOSTAMENTO in Δt

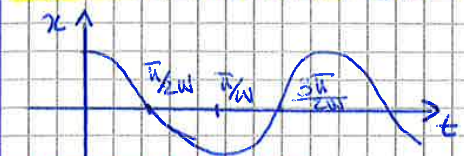
$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

M. PERIODICO (nel moto armonico)

$\exists T : \boxed{x(t+T) = x(t)}$

$$\left.\begin{aligned} x(t+T) &= A\cos(\omega t + \omega T + \varphi) \\ x(t) &= A\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

ω = PULSAZIONE del moto armonico

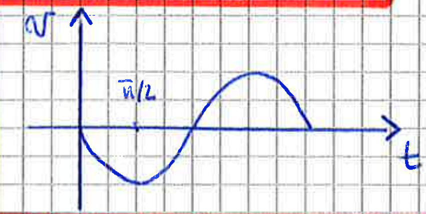


$$\left.\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ v(0) &= 0 \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} x_0 &= A\cos\varphi \\ 0 &= -A\omega\sin\varphi \end{aligned}\right. \Rightarrow \varphi = 0$$

$A = x_0$

$\boxed{x(t) = x_0 \cos \omega t}$ (con CI $v_0 = 0$)

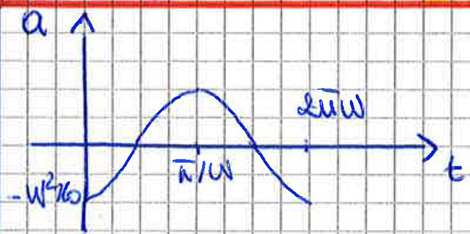
$\boxed{v(t) = -\omega x_0 \sin \omega t}$



$\omega t = \alpha$

$t = \frac{\alpha}{\omega}$ $\quad \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2\omega}$

$\boxed{a(t) = -\omega^2 x_0 \cos \omega t = -\omega^2 x(t)}$



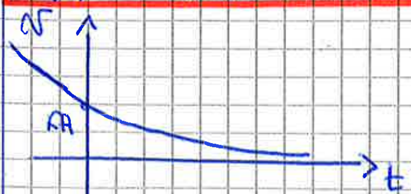
$a = -\omega^2 x$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ eq. diff moto a.s

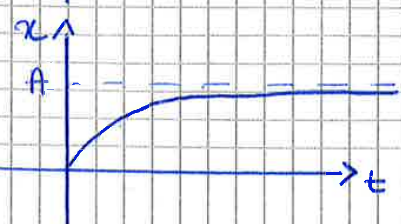
MOTO SMORZATO

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= A\left(1 - e^{-k(t-t_0)}\right) \\ v(t) &= +kA\, e^{-k(t-t_0)} \\ a(t) &= -k^2 A\, e^{-k(t-t_0)} = -kv \end{aligned}}$$

$\frac{dv}{dt} = -kv$ eq. diff. 1° ord



$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$



$\lim_{t\to\infty} x(t) = A$ dopo $t - t_0 = \frac{1}{k}$

$e^{-kt} \to \frac{1}{2{,}7} \sim \frac{1}{3}$

e^{-1} dopo $\Delta t = \frac{2}{k}$ la velocità è diminuita a

$e^{-2} \sim \frac{1}{8}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 240

13/MAR/2017

$\Delta S = s(t') - s(t)$ SPAZIO PERCORSO da P lungo la traiettoria tra t e t' (NO VETTORE)

$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t') - \vec{r}(t)$ VETTORE SPOSTAMENTO

$\Delta S = \overset{\frown}{PP'} \neq \overline{PP'} = |\Delta \vec{r}|$

- TRAIETTORIA DEL CORPO:

Curva nello spazio disegnata da P(t) nel suo moto.

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale:

$P(x, y, z)$

$\vec{r} = \vec{OP} = (x, y, z) = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z$

- MOLTIPLICAZIONE DI UNO SCALARE λ PER UN VETTORE $\vec{w}$

E' UN VETTORE $\lambda\vec{w}$

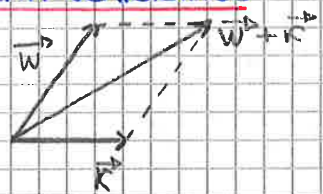
M $|\lambda||\vec{w}|$ → INTENSITA'

D $\vec{w}$

V $\vec{w}$ se $\lambda > 0$

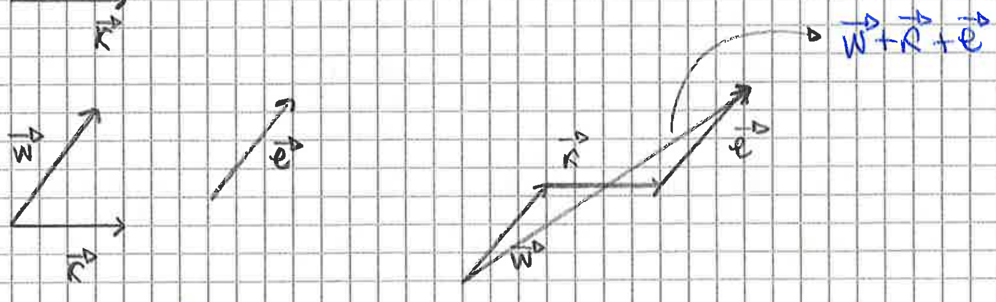
$-\vec{w}$ se $\lambda < 0$

- SOMMA VETTORIALE



REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA

$\vec{w} + \vec{r} = \vec{r} + \vec{w}$



in componenti:

$\vec{w} = w_x\hat{u}_x + w_y\hat{u}_y + w_z\hat{u}_z$

$\vec{r} = r_x\hat{u}_x + r_y\hat{u}_y + r_z\hat{u}_z$

$\vec{e} = e_x\hat{u}_x + e_y\hat{u}_y + e_z\hat{u}_z$

(V) **DIREZIONE e VERSO tangente alla traiettoria in P**

$\Rightarrow$ D e V del vettore $\vec{v}$ sono anche D e V della traiettoria

$\hat{u}_T$: versore tg alla traiettoria

$\vec{v}(t) = v\,\hat{u}_T$

Nel MOTO 1D: $\hat{u}_T = \hat{u}_x \quad \forall t$

- Note $v(t)$ e le CI $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$

$\Rightarrow$ Posso ricavare $\vec{r}(t)$ in Δt in cui è nota $\vec{v}(t)$

$$\begin{cases} \vec{v}_x(t) = \dfrac{dx}{dt} \\ \vec{v}_y(t) = \dfrac{dy}{dt} \\ \vec{v}_z(t) = \dfrac{dz}{dt} \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = \vec{v}_x(t)\,dt \\ dy = \vec{v}_y(t)\,dy \\ dz = \vec{v}_z(t)\,dt \end{cases}$$

! IPOTESI DI CONTINUITÀ DEL MOTO

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$
$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$
$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$$

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} dr(t) = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$$

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt$$

$$y(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} v_y(t)\,dt$$

$$z(t) - z_0 = \int_{t_0}^{t} v_z(t)\,dt$$

Diremo che il moto è uniforme se $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 = v_0\,\hat{u}_T$

$\hat{u}_T = \hat{u}$ cost

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt = v_0 \int_{t_0}^{t} dt = v_0\,(t - t_0)$$

$\Rightarrow$ IN QUESTO CASO IL MOTO È RETTILINEO

$\vec{v} = v\hat{u}_T \qquad v = \frac{ds}{dt}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt}$ (*)

Regola per tutti i versori (vettori di modulo costante)

$\vec{R}: |\vec{R}| = c \quad \Rightarrow |\vec{R}|^2 = c^2$

$\frac{d\vec{R}}{dt} \perp \vec{R}$

$|\vec{R}|^2 = \vec{R}\cdot\vec{R}$

$\frac{d}{dt}|\vec{R}| = 0$ (c è una costante)

$\frac{d}{dt}|\vec{R}|^2 = \frac{d}{dt}(\vec{R}\cdot\vec{R}) = \frac{d\vec{R}}{dt}\cdot\vec{R} + \vec{R}\cdot\frac{d\vec{R}}{dt} = 2\vec{R}\cdot\frac{d\vec{R}}{dt} = 0$

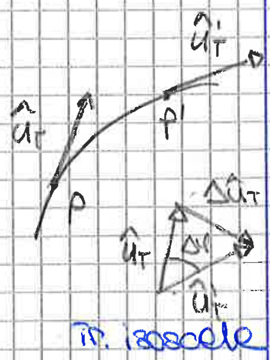
$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{R}}{dt} \perp \vec{R}} \iff |\vec{R}| = \text{cost}$

$|\hat{u}_T| = 1 \Rightarrow \frac{d\hat{u}_T}{dt} \perp \hat{u}_T$

Def $\hat{u}_N$ il versore normale $\hat{u}_N \perp \hat{u}_T$ e diretto verso la concavità della curva

$|\hat{u}_N| = 1$

$\frac{d\hat{u}_T}{dt} \parallel \hat{u}_N$



Calcolo $\left|\frac{d\hat{u}_T}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\hat{u}_T}{\Delta t}\right|$

$|\Delta\hat{u}_T| = 2|\hat{u}_T|\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$

$\left|\frac{\Delta\hat{u}_T}{\Delta t}\right| = \left|\frac{\Delta\hat{u}_T}{\Delta\varphi}\right|\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|$

$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta\varphi\to 0}}\frac{\Delta\hat{u}_T}{\Delta t} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta\hat{u}_T}{\Delta\varphi}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 240

$$\vec{r}(s(t)) \to \vec{v} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{ds}}_{u_T} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v}$$

$$\frac{d\hat{u}(x)}{dx} \perp \hat{u}(x) \Rightarrow \hat{u}_T(\varphi(t)) \quad \frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{d\hat{u}_T}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \hat{u}_N \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R_C}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \to d\vec{v} = \vec{a}\,dt \to d\vec{v}_x = \vec{a}_x\,dt$$

IN COORD. CARTESIANE $\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\hat{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\hat{u}_z$
$= a_x\hat{u}_x + a_y\hat{u}_y + a_z\hat{u}_z$

Nota $\vec{a}(t)$ $\forall t$ tra t_0 e t_f
Nota $\vec{v}(t_0)$ $(\Rightarrow v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$

$$\Rightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_f} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{a}(t)\,dt \Rightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt$$

$$\boxed{\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt}$$ Vale in tutti i sistemi di coord

Nota ancora $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_t} dr = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt \Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) - r_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt}$$ Vale in tutti i sistemi di coord.

(1) $\vec{a}(t) = 0$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} 0\,dt = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0}$$ $\boxed{\text{m.r.u}}$

(2) $\vec{a} = \text{cost} = a_0$ $\forall t$

$\boxed{\text{m.u.a}}$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{a}_0\,dt = a_0\int_{t_0}^{t} dt = a_0(t - t_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + a_0(t - t_0)}$$ $\rightsquigarrow$ traiettoria sempre in un piano

Il moto avviene in un piano, $\hat{u}_T$ giace nel piano identificato dai vettori $\vec{v}_0$ e $\vec{a}_0$ (costanti)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 240

$\ell = y - y_0$

$z_0 = 0$

$$z(y) = \frac{v_0 \sin\theta_0}{v_0 \cos\theta_0}(y - y_0) - \frac{1}{2} g \frac{(y-y_0)^2}{v_0^2 \cos^2\theta_0}$$

$$z(\ell) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\theta_0 \, \ell - \frac{1}{2} g \frac{\ell^2}{v_0^2 \cos^2\theta_0} = 0$$

$$\ell\left(\operatorname{tg}\theta_0 - \frac{1}{2} g \frac{\ell}{v_0^2 \cos^2\theta_0}\right) = 0$$

$\ell_1 = 0 \rightarrow$ primo punto in cui la palla tocca il suolo (all'inizio) $\Rightarrow$ non interessante

$$\ell = \frac{2 v_0^2 \sin\theta_0 \cos^{\cancel{2}}\theta_0}{g \cancel{\cos\theta_0}} = \boxed{\frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0)}$$

Det θ_0 / ℓ max

$$\frac{d\ell}{d\theta_0}(\theta_0) = 0$$

$$\frac{d\ell}{d\theta_0} = \frac{2 v_0^2}{g} \cos(2\theta_0) = 0 \qquad \cos(2\theta_0) = 0 \Rightarrow 2\theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\underbrace{\boxed{\theta_0 = \frac{\pi}{4}}}_{\text{INCLINAZIONE OTTIMALE PER MASSIMIZZARE LA GITTATA}}$$

Quanto tempo ci vuole? t^*

$y(t^*) = \ell$

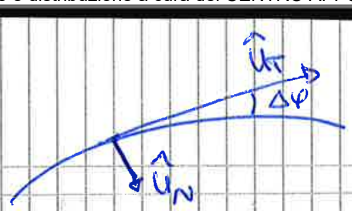
$z(t^*) = 0$

$\rightarrow y(t) = y_0 + v_{0y} t$

$$y(t^*) = v_0 \cos\theta_0 \, t^* = \ell$$

$$t^* = \frac{\ell}{v_0 \cos\theta_0} = \frac{2 v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{v_0 \cos\theta_0 \, g} = \frac{2 v_{0z}}{g}$$

$$\boxed{t^* = \frac{2 v_{0z}}{g}}$$



$$\frac{d\hat u_T}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\,\hat u_N = \vec w \times \hat u_T \longrightarrow \perp \hat u_T \qquad |\vec w| = \frac{d\varphi}{dt}$$

ACCELERAZIONE ANGOLARE

$$\boxed{\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{d\dot\theta}{dt} = \ddot\theta = \dot w}$$

$$[\alpha] = [t^{-2}] \overset{SI}{=} rad/s^2 = s^{-2}$$

→ VETTORE: $\boxed{\vec\alpha = \frac{dw}{dt}\,\hat u_z}$

$\vec a_T = \ddot s\,\hat u_T = R\ddot\theta\,\hat u_T$

$(s = R\theta(t))$

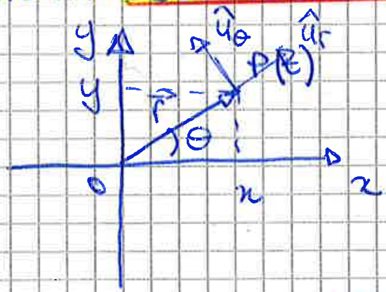
$\vec a_N = \frac{v^2}{R}\,\hat u_N = wR\,\hat u_N$

$$\vec v = \vec w \times \vec r \Rightarrow \vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d\vec w}{dt}\times\vec r + \vec w\times\frac{d\vec r}{dt}$$

$$\frac{d\vec w}{dt} = \vec\alpha \qquad \frac{d\vec r}{dt} = v = \vec w\times\vec r$$

$$\boxed{\vec a = \vec\alpha\times\vec r + \vec w\times(\vec w\times\vec r)}$$

MOTO IN COORDINATE POLARI (xy)



$P(x,y)$

$P(r,\theta)$

$\theta = x\hat{O}P \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$

$r = |\vec r| = \overline{OP} \ge 0$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\theta = y/x \end{cases}}$$

$$\hat u_r = \frac{\vec r}{|\vec r|} = \cos\theta\,\hat u_x + \sin\theta\,\hat u_y$$

$$\boxed{\hat u_\theta = \frac{d\hat u_r}{d\theta}} = -\sin\theta\,\hat u_x + \cos\theta\,\hat u_y$$

$\hat u_r(\theta(t))$

$\hat u_\theta(\theta(t))$

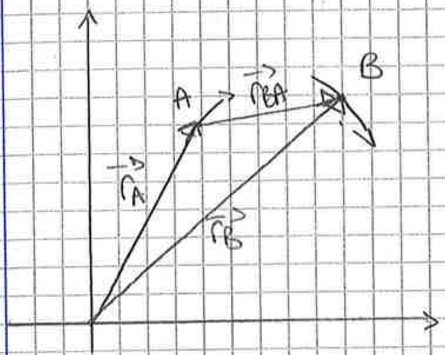
Dipendono da θ che dipende da t come $P(t)$, $r(t)$, $\theta(t)$

20/MAR/2017 – altro prof

MOTI RELATIVI

VELOCITÀ RELATIVA

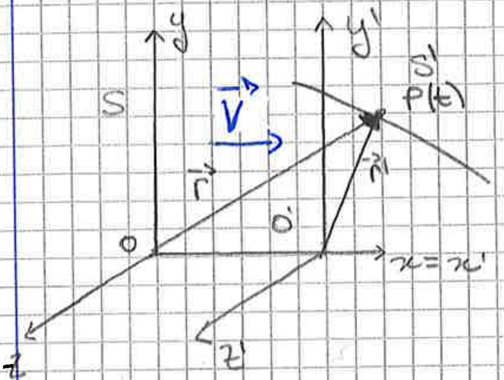
A e B in moto in un sist. rif. arbitrario



$\vec{r}_{BA}$ posizione relativa tra A e B

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}_{BA} &= \vec{r}_B - \vec{r}_A \\ \vec{v}_{BA} &= \vec{v}_B - \vec{v}_A \\ \vec{a}_{BA} &= \vec{a}_B - \vec{a}_A\end{aligned}}$$

(calcolo vettoriale)



O' si muove rx a O
ha quindi una velocità
perché sono in MRU
uno rx all'altro.

$\overrightarrow{OO'} = \vec{V}t$ → distanza che ha percorso O' rispetto ad O muovendosi alla velocità $\vec{V}$ per un t

$\vec{r} = \vec{r}' + \overrightarrow{OO'} = \vec{r}' + \vec{V}t$ → regola del parallelogramma

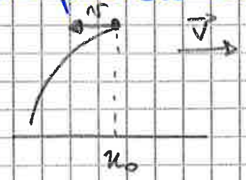
$$\boxed{\begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}}$$

MRU

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} v_x = v_x' + V \\ v_y = v_y' \\ v_z = v_z' \end{cases}}$

$\vec{a} = \vec{a}' \longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} a_x = a_x' \\ a_y = a_y' \\ a_z = a_z' \end{cases}}$

se prendo un SR in moto rispetto al primo



la velocità del grave è opposta alla velocità del nuovo SR

$x = x_0 - Vt$

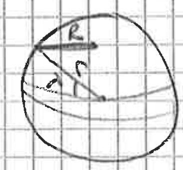
$y = y_0 - \frac{1}{2} \frac{(x-x_0)}{V^2} = \frac{x_0 - x}{V}$ PARABOLA

↳ la legge è la stessa (di gravità) e la descrizione che varia

LEGGI DI NEWTON

(I) Ogni corpo non soggetto a forze si muove di MRU

↳ Bisognerebbe specificare il SR ⇒ SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE



Sistema in cui egli stesso non è soggetto a forze, perché è suff. lontano da altri corpi

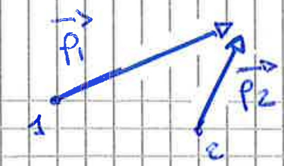
Un SR solidale con la Terra non è inerziale perché la Terra ruota con $\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600}$ e $a = \omega^2 R \approx \omega^2 r \cos\lambda \simeq 10^{-3}\ m/s^2$

↳ posso approssimare e dire che è inerziale.

Ma la Terra ruota attorno al sole in un'orbita ellittica ma per i periodi di tempo per cui osserviamo il fenomeno possiamo trascurare la sua velocità e considerare un MRU.

Prendo un SR con centro al centro del sole e come direzione degli assi le tre stelle fisse ⇒ miglior SR INERZIALE che posso prende ⇒ Nel CM del sole la risultante delle forze nulla.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 240



CONSERVAZIONE QUANTITÀ DI MOTO

$$\begin{cases} \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \\ \vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \\ \vec{p} = m\vec{v} \end{cases} \rightarrow \boxed{\frac{d\vec{p}_2}{dt} = -\frac{d\vec{p}_1}{dt}} \rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \rightarrow p_1 + p_2 = cost$$

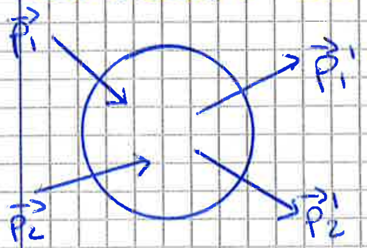
Misuro le p nel tempo e le sommo ogni volta, ho sempre la stessa quantità di moto:

$$\boxed{p_1(t_1) + p_2(t_1) = p_1(t_2) + p_2(t_2)} \Rightarrow \text{C.Q.M}$$

Si può anche dimostrare mettendo: $p_1 + p_2 = cost \Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

(Vale anche in meccanica quantistica) $\leftrightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = cost$

Cambiando SR il principio rimane valido $\Leftrightarrow m_{TOT} = cost$



$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \mu_1\vec{u}_1 + \mu_2\vec{u}_2$$
$$\mu u = q$$
$$mv = p$$

Nuovo SR: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$, $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{V}$

$$m_1(\vec{v}_1' + \vec{V}) + m_2(\vec{v}_2' + \vec{V}) = \mu_1(\vec{u}_1' + \vec{V}) + \mu_2(\vec{u}_2' + \vec{V})$$
$$m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = \mu_1\vec{u}_1' + \mu_2\vec{u}_2' + \underbrace{[(\mu_1+\mu_2) - (m_1+m_2)]\vec{V}}_{\text{deve essere } = 0}$$
$$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{q}_1' + \vec{q}_2'$$

$$\Rightarrow \mu_1 + \mu_2 = m_1 + m_2$$

RICAPITOLANDO:

1) PRINCIPIO DI RELATIVITÀ (valido per OSSERVATORI GALILEANI $\Rightarrow$ in m.u. l'uno rispetto all'altro)

2) I LN: $\vec{v} = cost \Leftrightarrow \vec{F} \equiv 0$ e SR è INERZIALE $(\vec{a} = 0)$

3) II LN: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$

4) III LN: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = cost \Rightarrow m_1 + m_2 = cost$

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2 \rightarrow \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = \left|\frac{m_1}{m_2}\right|$$

$$\boxed{\vec v' = \vec a' + \vec\omega\times\vec v' + \frac{d\vec\omega}{dt}\times\vec r' + \vec\omega(\vec v' + \vec\omega\times\vec r') + \vec a_{OO'}}$$

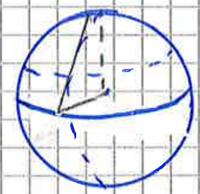
$$\boxed{\vec a = \vec a' + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r') + 2\vec\omega\times\vec v' + \vec a_{OO'}} + \cancel{\frac{d\vec\omega}{dt}\times\vec r'}$$

$\omega = cost$

se $\vec a = 0$ → $\vec a' \neq 0$ le forze in S' ci sono

$$\boxed{\vec a' = \vec a - \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r') - 2\vec\omega\times\vec v'}$$

acoriolis tende a spingere il corpo verso dx



$\vec F = m\vec g_0(\vec r')$

$g(\vec r) = -\frac{GM\hat u_r}{r^2}$

$\vec g = g_0 - \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r')$ $\quad g_0$ è la vera ag

La deviazione dalla vera g_0 è piccola e vale:

$-\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r') = \omega^2 R = \omega^2 r\cos\lambda$

$g = g_0 - \omega^2 r\cos\lambda$

[DIGRESSIONE]

Se ho un sistema accelerato devo aggiungere a $\vec F = m\vec a$ anche le forze inerziali:

$\vec a = \vec a' + \vec a_{rel}$

$\vec a_{rel} = \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r') + 2\vec\omega\times\vec v' + a_{OO'}$

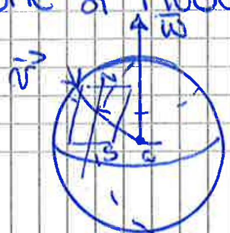
$\vec F = m\vec a \to \vec F = m(\vec a' + \vec a_{rel}) \to \vec F = m\vec a' + m\vec a_{rel}$

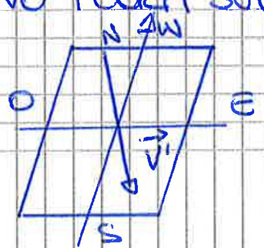
$\vec F - m\vec a_{rel} = m\vec a$

$\vec F - \vec F_{in} = m\vec a$

$\vec F_{in} = -m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r') - 2m\vec\omega\times\vec v' - m\vec a_{OO'} - m\frac{d\omega}{dr}\times\vec r'$

COME SI MUOVONO I CORPI SULLA TERRA?





$$\boxed{\vec a_{coriolis} = -2\vec\omega\times\vec v'}$$

IL CORPO CADE DEVIATO VERSO EST

27/MAR/2017

La descrizione degli eventi fisici dipende dal SR

I SR diversi possono essere "uniti"

SR INERZIALI → trasformazioni di galileo :

↓

In questi SR sono state formulate le leggi della dinamica.

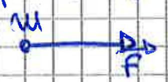
$\boxed{\text{SRI: } a_{rel} = 0 \text{ in quiete tra loro}}$

II $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\qquad \vec{p} = m\vec{v}$ QUANTITÀ DI MOTO

m = MASSA (inerziale) → quantità scalare
rappresenta l'inerzia di un corpo a variare il suo moto, ad essere accelerato
coincide con la massa gravitazionale

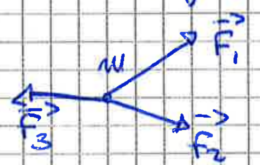
$\vec{F}$ agisce su un corpo di massa m e ne provoca un'accelerazione.

VETTORI → applicati in un punto ⇒ l'origine del vettore forza è applicato sul punto materiale su cui agisce



Se sul corpo di massa m agiscono più forze $\vec{F}$

$$\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$



$[F] = N$

$1N = 1kg\,\frac{m}{s^2}$

EQUILIBRIO: $\Sigma\vec{F} = 0 \quad (\vec{a} = 0)$

↳ posso considerare il sistema isolato rispetto ad altre forze, o le forze si annullano

III PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE

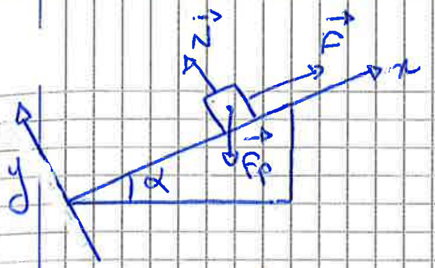
Le forze vanno pensate come interazione tra corpi

Se un corpo A agisce su un corpo B: $\vec{F}_{AB}$

⇒ B esercita su A: $\vec{F}_{BA}$

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

③ PIANO INCLINATO CON FORZA APPLICATA



$\vec{F} = F\,\hat{u}_x$

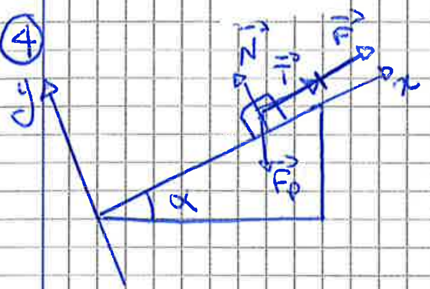
II LN: $\hat{u}_y$: $-mg\cos\alpha = 0$

$\hat{u}_x$ $\quad -mg\sin\alpha + F = ma$

Che valore deve avere $\vec{F}$ per avere $\underbrace{\vec{v} = \text{cost}}_{\vec{a}=0} \Rightarrow \Sigma\vec{F} = 0$

$F = mg\sin\alpha$

④



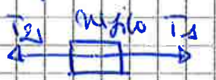
CORPO TIRATO CON UNA FUNE

$\Rightarrow$ c'è una tensione, no contatto diretto con la forza

FUNE IDEALE $\rightarrow$ INESTENSIBILE

$\vec{a}_{pu} = \vec{a}_{fune}$, ogni punto della fune ha la stessa $\vec{a}_{fune}$

Come è legata $\vec{T}$ a $\vec{F}$?

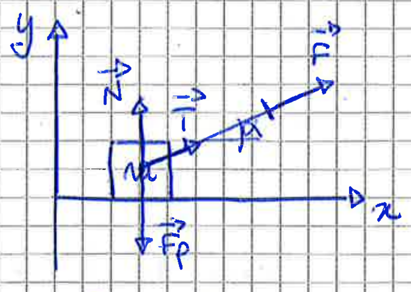


$\vec{T_1} + \vec{T_2} = m_f\,\vec{a_f}$

Se $m_f \cong 0 \Rightarrow \vec{T_1} + \vec{T_2} = 0$ $\qquad |\vec{T_1}| = |\vec{T_2}| = T$ $\forall$ porzione di filo

$\vec{F_p} + \vec{N} + \vec{T} = m\vec{a}$ $\qquad \vec{T} = T\,\hat{u}_x = \vec{F}$

⑤



FUNE IDEALE

$\vec{F_p} = -mg\,\hat{u}_y$

$\vec{N} = N\,\hat{u}_y$

$\vec{F} = F\cos\alpha\,\hat{u}_x + F\sin\alpha\,\hat{u}_y$

$\vec{a} = x\,\hat{u}_x + y\,\hat{u}_y$

II LN: $\vec{F_p} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}$

$\hat{u}_x$: $F\cos\alpha = a_x = m\ddot{x}$

$\hat{u}_y$: $-mg + N + F\sin\alpha = m\ddot{y}$

①	②
$\vec{F}_{p1} = -m_1 g \hat{u}_z$	$\vec{F}_{p2} = -m_2 g \hat{u}_z$
$\vec{T}_1 = T_1 \hat{u}_z$	$\vec{T}_2 = T_2 \hat{u}_z$
$\vec{a}_1 = -a_1 \hat{u}_z$	$\vec{a}_2 = a_2 \hat{u}_z$

m_1 e m_2 sono collegati con un filo inestensibile, teso e di massa trascurabile.

$\downarrow$

$a_1 = a_2 = a$

$\vec{F}_{p1} + \vec{T}_1 = m_1 a_1 \quad | \quad \vec{F}_{p2} + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2$

$T_1 - m_1 g = -m_1 a_1 \qquad T_2 - m_2 g = m_2 a$

EQUAZIONE MOTO ROTATORIO CARRUCOLA $\Rightarrow T_1 - T_2 = m_c R a$

$T_1 - T_2 \propto m_c \Rightarrow T_1 - T_2 \cong 0$

$T_1 = T_2 = T$

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ -m_2 g + T = m_2 a \end{cases}$$

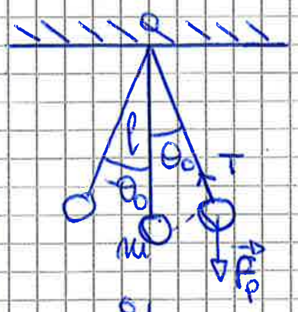
$(m_1 - m_2) g = (m_1 + m_2) a$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$T = m_1 (g - a) = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2} \left[\cancel{m_1} + m_2 - (\cancel{m_1} - m_2) \right] =$$

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

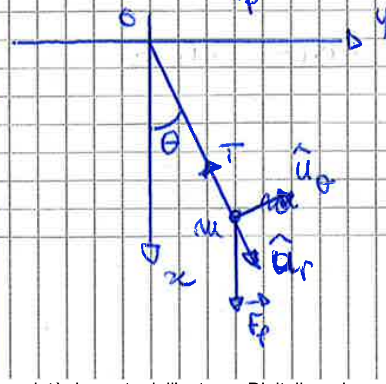
PENDOLO SEMPLICE



$\vec{T} + \vec{F}_p = 0$

EQUILIBRIO STABILE

$-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$

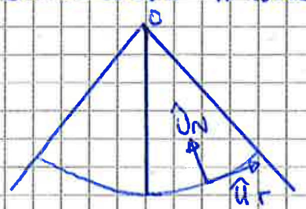


$\vec{F}_p = mg \cos\theta \, \hat{u}_r - mg \sin\theta \, \hat{u}_\theta$

$\vec{T} = -T \hat{u}_r$

$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$

Per descrivere il moto potremmo utilizzare coord. INTRINSECHE



$\vec{v} = v\hat{u}_T = \ell\dot{\theta}\hat{u}_T$

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R_C}\hat{u}_N$ qui $R_C = \ell$

$\vec{a} = \ell\ddot{\theta}\hat{u}_T + \frac{\ell^2\dot{\theta}^2}{\ell}\hat{u}_N$

$\vec{F}_p = -mg\sin\theta\,\hat{u}_T - mg\cos\theta\,\hat{u}_N$

$\vec{T} = -T\hat{u}_N$

$\hat{u}_T$: $-mg\sin\theta = m\ell\ddot{\theta}$

Se il pendolo si muove al contrario $\leftarrow \hat{u}_T$:

$\vec{F}_p = mg\sin\theta\,\hat{u}_T$

$\vec{v} = v\hat{u}_T = -\ell\dot{\theta}\hat{u}_T \rightarrow$ in questo caso $v > 0$

$\vec{a}_T = -\ell\ddot{\theta}\hat{u}_T$

ATTRITI

*** Attrito radente**

- Superficie scabra (non liscia)

Il contatto tra 2 sup è in zone molto piccole (10^4 volte)

$\Rightarrow$ sulle punte $\rightarrow$ legami molto forti

- FORZA di ATTRITO DINAMICO $\rightarrow$ $\boxed{F_{ad} = \mu_d N}$

si oppone al moto

$[\mu_d] = 1$ COEF. di ATTRITO DINAMICO

$\vec{F}_{ad} = -\mu_d|\vec{N}|\hat{u}_T$ $\left\{\hat{u}_T = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right\}$

$\vec{F}_{ad} = -\mu_d N\frac{\vec{v}}{v} = \vec{F}_{ad}(\vec{v})$

$\vec{F}_p + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_d = m\vec{a}$

$\uparrow \hat{u}_y$: $-mg + N = 0 \rightarrow N = mg$

$\rightarrow \hat{u}_x$: $F - \mu_d N = m\ddot{x}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 240

Per $\alpha > \alpha_{MAX} \Rightarrow$ MOTO $\Rightarrow a \neq 0$

$\vec{F}_p + \vec{N} + \vec{f}_d = m\vec{a}$

$\vec{f}_d = -\mu_d N \hat{u}_x$

$\hat{u}_y \Rightarrow N - mg\cos\alpha = 0 \qquad N = mg\cos\alpha$

$\hat{u}_x \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu_d N = m\ddot{x} \qquad mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha = m\ddot{x}$

ATTRITO VISCOSO

- attivo nei fluidi

$\boxed{\vec{F}_{visc} = -R\eta\vec{v}}$ STOKES

η: coef. di viscosità del fluido

$[\eta] = [M \cdot L^{-1} \cdot t^{-1}]$

R: dipende dalla forma del corpo che è immerso nel fluido

$[R] = [L]$

Studio il moto di una massa m in caduta libera in un mezzo viscoso.

$v(0) = 0$

$\vec{F}_p + \vec{f}_v = m\vec{a}$

$-mg + R\eta\vec{v} = -ma \qquad \forall t \geq 0$

$t=0 \rightarrow -mg + R\eta \cdot 0 = m\,a(0)$

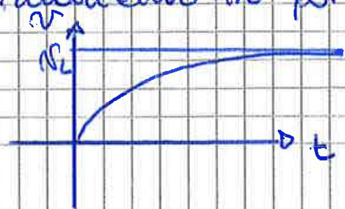
$t=0 \quad f_v = 0 \rightarrow a(0) = g$

$t>0 \quad v \neq 0 \Rightarrow f_v \neq 0 \Rightarrow a < a(0)$

$\exists\, v = v_L : mg - R\eta v_L = 0$ → VELOCITÀ LIMITE

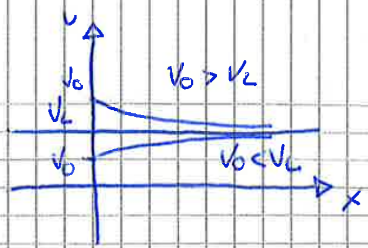
$$\boxed{v_L = \frac{mg}{R\eta}}$$

Da un certo momento in poi diventa un moto con $V = cost = V_L$



$$\ln \frac{v_f - v_L}{v_0 - v_L} = -\gamma t_f$$

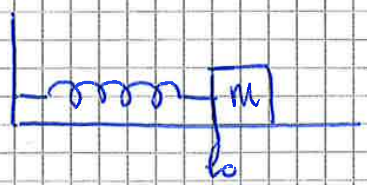
$$v(t) - v_L = (v_0 - v_L)\, e^{-\gamma t}$$



ELASTICITA'

Capacità di deformarsi sotto una forza e ritornare allo stato iniziale quando non c'è più la forza.

MOLLA → caso ideale → perfettamente elastica
→ massa trascurabile



k → costante elastica

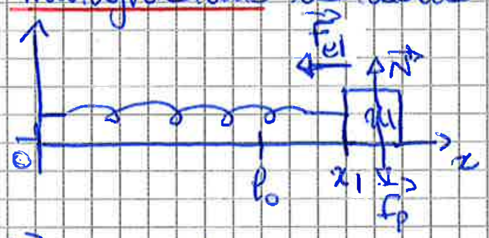
$[k] = [F L^{-1}] = [M L t^{-2} L^{-1}]$
$= [M t^{-2}]$

l_0 → posizione di riposo

LEGGE DI HOOKE: $\boxed{\vec{F}_{el} = -k(x - l_0)\,\hat{u}}$

FORZA DI RICHIAMO $\propto$ alla deformaz.

Allunghiamo la molla



$\vec{F}_p + \vec{N} + \vec{F}_{el} = m\vec{a}$

$\vec{a} = \ddot{x}\,\hat{u}_x$

$\Delta = |x_1 - l_0|$

$\vec{F}_p = -mg\,\hat{u}_y$

$\vec{N} = N\,\hat{u}_y$

$\vec{F}_{el} = -k(x - l_0)\,\hat{u}_x$

$\hat{u}_y$: $-mg + N = 0$ $\quad N = mg$

$\hat{u}_x$: $-k(x - l_0) = m\ddot{x}$

Eq. diff dell'ELONGAZIONE ELASTICA (oscillatore armonico)

$\ddot{x} = -\frac{k}{m}(x - l_0)$ $\quad \boxed{\ddot{z} = -\omega_0^2 z}$ $\quad$ moto armonico

PULSAZIONE: $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

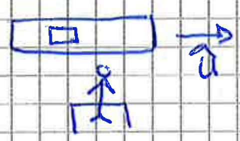
In S posso individuare, $\forall \vec{a}$, la forza che ne è responsabile

inerziale $\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$

S' $\Rightarrow m\vec{a}' = m(\vec{a} - \vec{a}_t) = \vec{F} + \vec{F}_{IN}$

non inerziale $\vec{F}_{IN} = -m\vec{a}_t \rightsquigarrow$ forze inerziali o fittizie

Un soggetto su una panchina vede passare un treno in cui c'è un pacco (no attrito)

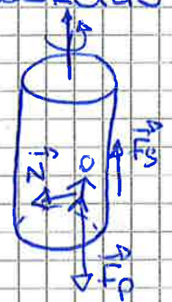


$\vec{v} = cost$

$t \geq 0$ freno

accelera $a > 0$

ESERCIZIO



$\vec{\omega}_0 = cost \Rightarrow$ si toglie il pavimento

SR INERZIALE

$\vec{N}$ reazione vincolare del piano sulla persona

$\vec{F}_p + \vec{N} + \vec{f}_s = m\vec{a}$

$\vec{a} = \omega_0^2 R \hat{u}_N$ acc. CENTRIPETA

$\uparrow \quad \vec{F}_p + \vec{f}_s = 0$

$\rightarrow \quad \vec{N} = m\vec{a}_{cp}$

3/APR/2017

IMPULSO

Def: $\boxed{\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt}$

$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \rightarrow \begin{cases} \vec{r}(t) \\ \vec{v}(t) \end{cases} \rightarrow \vec{F}(t)$

$$\langle \vec{F} \rangle_{\Delta t} = \frac{\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt}{\Delta t} \qquad \Delta t = t_f - t_i$$

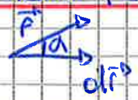
$$= \frac{\vec{J}}{\Delta t}$$

$\boxed{\vec{J} = \langle \vec{F} \rangle_{\Delta t}\, \Delta t}$ $\rightarrow$ Utile per stimare $\vec{F}$ non nota esattamente ma MOLTO INTENSA in Δt MOLTO PICCOLO

PROPRIETÀ

* 1) $\mathcal{L}$ è SCALARE

* 2) $d\mathcal{L}$ dipende dall'orientazione relativa di $\vec{F}$ e $d\vec{r}$, istante per istante



se $\alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow d\mathcal{L} > 0$ ↳ LAVORO MOTORE

se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow d\mathcal{L} < 0$

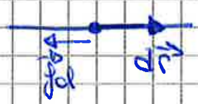
↳ LAVORO RESISTENTE

se $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow d\mathcal{L} = 0$

La forza CENTRIPETA compie lavoro $=0$. Per spostamenti lungo la circonferenza $\Rightarrow d\mathcal{L} = 0$

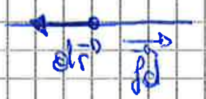
La forza d'ATTRITO RADENTE

$\vec{f}_d = \mu_d N(-\hat{u}_T)$, $d\vec{r} = v\,dt\,\hat{u}_T = ds\,\hat{u}_T$



$d\mathcal{L} = -\mu_d N ds$

$\Rightarrow \vec{f}_d$ si oppone sempre al moto



$d\mathcal{L} = -\mu_d N ds$

⇓

$d\mathcal{L} < 0$

La forza d'ATTRITO STATICO

$d\mathcal{L} = \vec{f}_s\, d\vec{r} = 0 \rightarrow f_s$ NON PRODUCE UNO SPOSTAMENTO

$[\mathcal{L}] = [F\,L] = [M\,L\,t^{-2}\,L] = [M\,L^2\,t^{-2}]$ → stesso dell'energia

$[\mathcal{L}] = J$ $\quad 1J = 1N \cdot 1m$ $\quad$ Joule

* $d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}||d\vec{r}|\cos\alpha = |\vec{F}|\cos\alpha\, ds = \vec{F}\hat{u}_T\, ds = \underline{F_{\parallel}\, ds}$

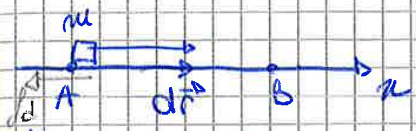
$d\vec{r} = ds\,\hat{u}_T$

$F_{\parallel} = \vec{F}\,\hat{u}_T = |\vec{F}|\cos\alpha$

$d\mathcal{L} = F_{\parallel}(s)\,ds$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 240

Calcolo $\mathcal{L}$ di $\vec{f_d}$



$|AB| = \ell$

$\vec{f_d} = -\mu_d N \hat{u}_x$ $\qquad N = mg$

$d\vec{r} = ds\, \hat{u}_x \qquad 0 \leq s \leq \ell$

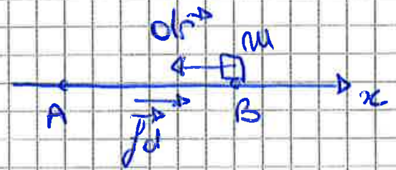
$\quad = dx\, \hat{u}_x \qquad 0 \leq x \leq \ell$

$\mathcal{L} = \int \vec{f_d} \cdot d\vec{r}$

$\mathcal{L} = \int_{x_A}^{x_B} (-\mu_d mg\, \hat{u}_x) \cdot \hat{u}_x\, dx$

$$\boxed{\mathcal{L} = -\mu_d mg\, \ell}$$

se mossa da B arrivo in A



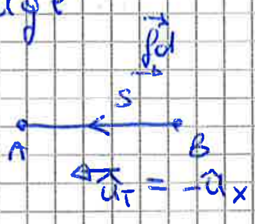
$\vec{f_d} = \mu_d mg\, \hat{u}_x$

$d\vec{r} = -dx\, \hat{u}_x$

$\mathcal{L} = \int_{x_B}^{x_A} \mu_d mg\, \hat{u}_x \cdot \hat{u}_x\, dx$

$\mathcal{L} = \mu_d mg\, x \Big|_{\ell}^{0} = -\mu_d mg\, \ell$

in coord intrinseche



$0 < s < \ell$

$d\vec{r} = -ds\, \hat{u}_x = ds\, \hat{u}_T$

$\mathcal{L} = \int_0^{\ell} \mu_d mg\, \hat{u}_x \cdot (-ds\, \hat{u}_x)$ $\rightsquigarrow$ sempre negativo

Parametrizzo lungo la traiettoria:

caso 2D $\rightarrow$ $\vec{F}(\vec{r}) = F_x(x,y)\hat{u}_x + F_y(x,y)\hat{u}_y$

$d\vec{r} = dx\,\hat{u}_x + dy\,\hat{u}_y$

$$\gamma(A,B): \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \qquad s_A \le s \le s_B \longrightarrow \begin{cases} dx = \frac{dx}{ds}\,ds \\ dy = \frac{dy}{ds}\,ds \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_{\gamma(A,B)} = \int_{x_A}^{x_B} \Big[\underbrace{F_x(x, g(x))}_{\frac{dx}{dx} = 1 \Rightarrow \text{non lo scrivo}} + F_y(x, g(x))\frac{dy}{dx}\Big]dx$$

γ: POSSO SCEGLIERE COME PARAM. $x \Rightarrow y = g(x)$

$$\mathcal{L}_{\gamma(A,B)} = \int_{x_A}^{x_B} \Big[F_x(x, g(x)) + F_y(x, g(x))\frac{dy}{dx}\Big]\,dx$$

Se cambio cammino $\Rightarrow \gamma' \quad y = \varphi(x)$

L'integrale generale sarà diverso

$\rightarrow$ seguendo i due cammini il risultato è diverso

FORZE CONSERVATIVE

Def: forze il cui lavoro dipende solo dai punti di partenza e arrivo e non dal percorso

$W_{\gamma_1(A,B)} = W_{\gamma_2(A,B)} = W_{\gamma_3(A,B)} \qquad [\mathcal{L} = W]$

$\mathcal{L}_{\gamma_2(A,B)} = -\mathcal{L}_{\gamma_2(B,A)} \qquad \boxed{\mathcal{L}_{\gamma(A,A)} = \oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0}$

$$\mathcal{L}_{\gamma(A,B)} = \varphi(\vec{r}_B) - \varphi(\vec{r}_A)$$

- ENERGIA POTENZIALE

$E_p = -\varphi \qquad E_p(\vec{r}) = -\varphi(\vec{r})$

Per le forze conservative
$$\boxed{\mathcal{L}_{\gamma(AB)} = \int_{E_p(\vec{r}_A)}^{E_p(\vec{r}_B)} -dE_p = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B)}$$

$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$

$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p}$

$E_p(\vec{r})$ è solo funzione della posizione

FORZE DISSIPATIVE

Dipendono da $\vec{v}$ (es. forza d'attrito)

$\hookrightarrow \vec{f}_d = -\mu_d N \hat{u}_r \quad \hat{u}_r = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

se dipendono solo da $\vec{r}$:
$$\frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Se è conservativa:

$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y}$

$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial x}$

Ma $\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}} \Rightarrow$ CONSERVATIVA

Differenziale esatto: $d\varphi$ → incremento della funzione che dipende dall'incremento delle variabili

$\delta\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ → differenziale non esatto ⇒ solo INCREMENTO INFINITESIMO

x forze conservative

$\delta\mathcal{L} = d(-E_p)$ → differenziale esatto → esiste una primitiva

NB:

$$\mathcal{L}(F_C) = E_p(A) - E_p(B) = \int_A^B d(-E_p)$$

E_p è def a meno di una costante arbitraria:
$E'_p = E_p + C$ è associato allo stesso $\mathcal{L}$ di E_p

$$\mathcal{L}(F_C) = E'_p(A) - E'_p(B)$$
$$= E_p(A) + \gamma - (E_p(B) + \gamma)$$
$$= E_p(A) - E_p(B)$$

CALCOLO DI E_p PER FORZE CONSERVATIVE

- forze costanti $\vec{F} = F_0 \hat{u}$

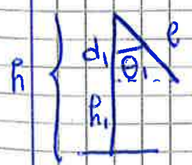
$$\delta\mathcal{L}(\vec{F}) = F_0 \hat{u} \cdot \hat{u}_T \, ds \qquad (\delta\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \; d\vec{r} = ds\,\hat{u}_T)$$

FORZA PESO: $\vec{F} = -mg\,\hat{u}_z \qquad d\vec{r} = dz(+\hat{u}_z) \qquad h_A \le z \le h_B$

$$\mathcal{L}(F_p) = mg \int (-\hat{u}_z)\, dz\, (+\hat{u}_z) \qquad \hat{u}_z \cdot \hat{u}_z = 1$$
$$= \int (-mg\hat{u}_z)(dz\,\hat{u}_z) = -mg \int_{h_A}^{h_B} dz = mg(h_A - h_B) =$$
$$= E_p(A) - E_p(B)$$

$$\boxed{E_p^{F_p}(h) = mgh + c}$$

$$\mathcal{L}(F_p) = mg\,\ell(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \quad \longrightarrow \text{PENDOLO SEMPLICE}$$



$$d = \ell\cos\theta$$
$$h_1 = h - d_1$$

$$\mathcal{L} = mg(d_2 - d_1) = mg(h - h_2 - (h - h_1)) = mg(h_1 - h_2) = E_p(h_1) - E_p(h_2)$$

$\vec{F} = F(x)\hat{u}_x$ è conservativa

Calcoliamo E_p della FORZA ELASTICA

$$\vec{F} = -k(x - \ell_0)\hat{u}_x \qquad d\vec{r} = dx\,\hat{u}_x$$

istante iniziale: $E = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh$

per t generico: $\frac{1}{2} m v^2(t) + mgz(t) = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh \quad \forall t$

$$\Rightarrow v^2(t) = v_0^2 + 2g(h-z)$$

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 + 2g(h - z(t))}$$

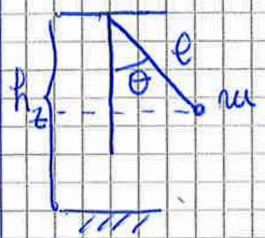
se $v_0 = 0$ e $z(t_f) = 0$

$$\Rightarrow v(t) = \sqrt{2gh}$$

Verificate che la stessa relazione vale per il moto BALISTICO

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Per il PENDOLO SEMPLICE



$$z = h - l\cos\theta$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_0^2 + 2g[h - (h - l\cos\theta(t))]}$$

$$= \sqrt{v_0^2 + 2gl\cos\theta(t)}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

$$v = |l\dot{\theta}|$$

$E = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} + E_p(\vec{r})$

se tutte le forze sono conservative: $\frac{dE}{dt} = 0$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m 2 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dE_p}{dt}$$

$$\frac{dE_p}{dt} = \frac{\partial E_p}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \vec{\nabla} E_p \vec{v}$$

$$\frac{dE}{dt} = m\vec{v}\cdot\vec{a} + \vec{v}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}E_p}_{-\vec{F}} = \vec{v}[m\vec{a} - \vec{F}] = 0 \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$$

↳ solo se f conservative

Quando tutte le forze sono conservative $\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

è equivalente alla componente nella direzione del moto ($\hat{u}_r$) della 2ª LN

$$\mathcal{L}_C = \int_{C(PP')} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_C F(r)\,\hat{u}_r \cdot d\vec{r}$$

$d\vec{r} = dr\,\hat{u}_r + r\,d\hat{u}_r \qquad \vec{r} = r\hat{u}_r \qquad d\hat{u}_r(\theta) = \frac{d\hat{u}_r}{d\theta}\,d\theta = \hat{u}_\theta\,d\theta$

$d\vec{r} = dr\,\hat{u}_r + r\,d\theta\,\hat{u}_\theta$

$$\mathcal{L}_{C(P,P')} = \int_{r_P}^{r_{P'}} F(r)\,dr$$

=> Sono conservative perchè il $\mathcal{L}$ dipende solo dagli estremi del cammino

Per $F(r) = -\frac{\gamma}{r^2}$ $\qquad \mathcal{L} = \int_{r_P}^{r_{P'}} -\frac{\gamma}{r^2}\,dr = \frac{\gamma}{r}\Big|_{r_P}^{r_{P'}} = \frac{\gamma}{r_P} - \frac{\gamma}{r_{P'}} =$

$= E_p(P) - E_p(P')$

=> Energia potenziale gravitazionale e coulombiana

$$\boxed{E_p = -\frac{\gamma}{r} + c}$$

$E_{pG} = -G\frac{Mm}{r}$ -> come è collegato a $E_{p_p} = mgh$?

$F(r) = -G\frac{Mm}{r^2} \qquad r = R_T + z$

$F(R_T + z) = -G\frac{mM}{(R_T+z)^2}$

se $z \ll R_T \qquad F \approx -mg \qquad g = G\frac{M_T}{R_T^2}$

$E_p(R_T + z) = -G\frac{M_T m}{R_T + z} + c = -\frac{GM_T m}{R_T}\,\frac{1}{1 + \frac{z}{R_T}} \qquad x = \frac{z}{R_T} \ll 1$

$\frac{1}{1+x} \xrightarrow{x \to 0} 1 - x + \dots$

$$E_p(z) \underset{z \ll R_T}{=} -\frac{GM_T}{R_T}\,m\left(1 - \frac{z}{R_T}\right)$$

Chiamo $v_{fuga} = v_0 \big|_{min} \ / \ v_{fin} \to 0$

$\downarrow$

$E=0$ — v_{fuga} è velocità iniziale minima / contributo cinetico bilancia E_p

$$\frac{1}{2} m v_{fuga}^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = 0$$

$$\boxed{v_{fuga} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}}$$

se $v_0 < v_{fuga}$ $\Rightarrow$ il corpo tornerà indietro

se $v_0 > v_{fuga}$ $\Rightarrow$ il corpo arriverà all'infinito con velocità non nulla

POTENZA

$$W = \frac{d\mathcal{L}}{dt}$$

se $\vec{F}(t)$ $\quad d\vec{r} = \vec{v}\,dt$

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \int_{C(A,B)} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(t)\, \vec{v}(t)\, dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d\mathcal{L}}{dt}\, dt$$

$$\boxed{W = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}}$$

$$[W] = [\mathcal{L}\cdot t^{-1}] = [ML^2t^{-3}]$$

$$[W] = J/s = W$$

$$1\,W = \underbrace{\frac{1\,J}{1\,s}}_{SI}$$

Per l'energia, si può usare il kW·h che è il lavoro compiuto da una macchina con una potenza di 1000 W in un'ora.

In Joule: $1\,kWh = 10^3\,W \cdot 3{,}6\times10^3\,s = 3{,}6\cdot10^6\,J \sim MJ$

- Se $E = E_2 = E_p(x_c) \Rightarrow v^2 = E - E_p(x)$

  $x \neq x_c \rightarrow v \neq 0$

  $x = x_c \rightarrow v = 0 \Rightarrow$ particella ferma in $x = x_c$

- Se $E = E_3 \Rightarrow v^2 \geq 0$ per $x_1 \leq x_2$

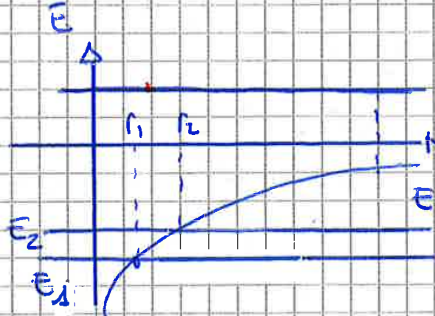
  x_1, x_2 punti di inversione del moto, la velocità della particella è $=0$ in x_1 e x_2 $\Rightarrow$ moto confinato $(v_{x_1} = v_{x_2} = 0)$

- Per $E = E_4 \Rightarrow$ 2 regioni di moto possibili $x_3 \leq x \leq x_4$ o $x_5 \leq x \leq x_6$

Esempio $E_p(r) = -\frac{\gamma}{r}$

$$\frac{2}{m}\left[E - E_p(r)\right] = v^2$$

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\gamma}{R_T}$$



Valore minimo di E / la particella si allontani indefinit. (fisso a $r \to \infty$)

$\Rightarrow E = 0 \Rightarrow v_0 = v_{fuga}$

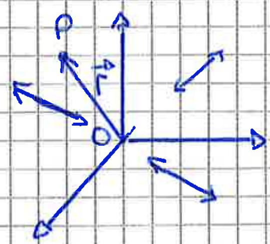
$E < 0 \Rightarrow$ moto confinato

$E > 0 \Rightarrow E - E_p(r) > 0 \ \forall r \Rightarrow v(r \to \infty) \neq 0$

12/APR/2017

FORZE CENTRALI

2D $\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{u}_r}$



RADIALI

MOMENTO ANGOLARE

$\boxed{\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p}}$ $\quad \vec{p} = m\vec{v}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \boxed{\underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{// \Rightarrow 0} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}}$$

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

Se F è centrale $\Rightarrow L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ COSTANTE DURANTE IL MOTO

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} mr^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + E_p(r)$$

posso sostituire $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$ in E

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} mr^2 \left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 + E_p(r)$$

$$\boxed{\begin{cases} E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{L^2}{mr^2} + E_p(r)}_{\text{dipendono solo da } r} \\ L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \end{cases}} \Rightarrow \text{MOTO } 1D$$

$$\frac{1}{2} \frac{L^2}{mr^2} = E_p^{cf}(r) \rightarrow \text{componente rotazionale dell'energia}$$

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_p^{eff}(r) \qquad \boxed{E_p^{eff}(r) = E_p(r) + E_p^{cf}(r)}$$

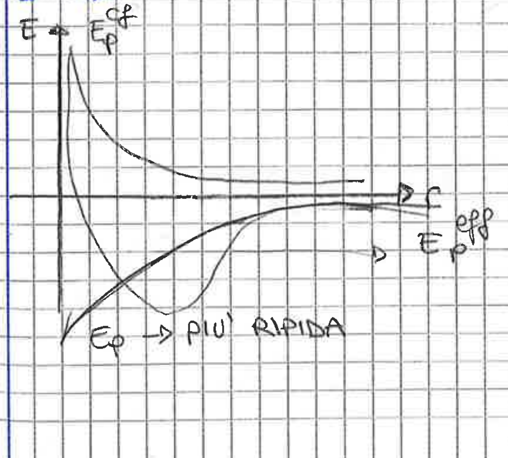
$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left[E - E_p^{eff}(r)\right] \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_p^{eff}(r)\right]}$$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2(t)}$ $\Rightarrow$ sostituisco e ricavo θ avendo trovato $r(t)$

oppure trovo r in funzione di θ $\quad r(t(\theta))$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = \pm \frac{mr^2}{L} \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_p^{eff}(r)\right]}$$

$$\frac{dr}{\frac{mr^2}{L}\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_p^{eff}(r)\right]}} = \pm d\theta$$



$$\frac{L^2}{mr^2} = E_p^{cf}(r) = \frac{\alpha}{r^2} \qquad \text{IPERBOLE}$$

$$E_p(r) = -\frac{\gamma}{r} \qquad \gamma > 0$$

$$E_p^{eff} = E_p^{cf} + E_p$$

Esempio: modello dell'atomo può essere descritto da un modellino classico, di cui l'e⁻ ruota in orbite circolari attorno al nucleo distante il raggio di Bohr r_0.

Energia di ionizzazione ε: $E+\varepsilon=0$ ⇒ MOTO NON PIÙ CONFINATO

$\vec{F} = -k\frac{q^2}{r_0^2}\hat{u}_r$, $E_p = -k\frac{q^2}{r_0}$ $\qquad r?\ \omega_0?\ \nu=\frac{\omega_0}{2\pi}?$

$$F = m\omega_0^2 r_0 = k\frac{q^2}{r_0^2}$$

$$\varepsilon = -E_0$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma}{r} \qquad \gamma = kq^2$$

$$\begin{cases} E_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 r_0^2 - \frac{\gamma}{r_0} = -\varepsilon \\ k\frac{q^2}{r_0^2} = m\omega_0^2 r \end{cases}$$

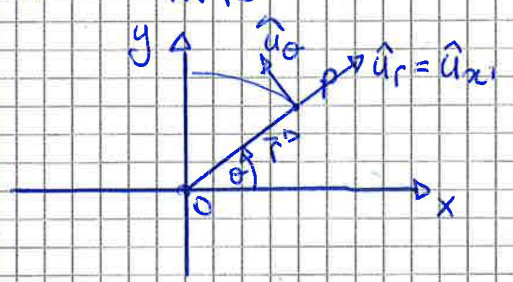
$$\frac{1}{2}\frac{kq^2}{r_0} - \frac{kq^2}{r_0} = -\varepsilon \Rightarrow r_0 = \frac{kq^2}{2\varepsilon}$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_p^{eff}(r)$$

$$E_p^{eff} = -\frac{\gamma}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

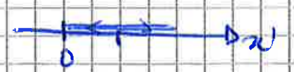
$$\vec{F}^{eff} = -\frac{dE_p^{eff}}{dr}\hat{u}_r = +\frac{L^2}{mr^3}\hat{u}_r$$

$$\frac{L^2}{mr^3} = \frac{(mr^2\omega)^2}{mr^3} = m\omega^2 r$$



$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

S': $\vec{r}' \equiv \vec{r}$ $\quad \hat{u}_{x'} = \hat{u}_r$



$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = E + \frac{\gamma}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$E_0 = E_{p\,min}^{eff} \qquad E_p^{eff} = -\frac{\gamma}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$r_0 = \frac{L^2}{m\gamma}$$

$$E_0 = E_p^{eff}(r_0) = -\frac{\gamma}{r_0} + \frac{L^2}{2mr_0^2} = -\frac{\gamma m \gamma}{L^2} + \frac{L^2}{2m}\frac{m^2\gamma^2}{L^4}$$

$$E_0 = -\frac{m\gamma^2}{2L^2}$$

- $E_0 \leq E_1 \leq 0$ Calcoliamo i punti di inversione del moto

$$\frac{dr}{dt} = 0 \qquad E + \frac{\gamma}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} = 0$$

$$r^2 + \frac{\gamma r}{E} - \frac{L^2}{2mE} = 0 \qquad r_\pm = -\frac{\gamma}{2E_1} \pm \sqrt{\frac{\gamma}{4E_1^2} + \frac{L^2}{2mE_1}}$$

$$r_\pm = -\frac{\gamma}{2E_1} \pm \frac{\gamma}{2E_1}\underbrace{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\gamma^2}}}_{=\varepsilon}$$

ECCENTRICITÀ

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\gamma^2}} < 1}$$

$0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow r_\pm = -\frac{\gamma}{2E_1}(1 \mp \varepsilon)$

Per $E = E_0 \Rightarrow \varepsilon = 0$ $\quad E_0 \leq E_1 \leq 0$

- $E = E_2 = 0$

$$\frac{dr}{dt} = 0 \longleftrightarrow \frac{\gamma}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} = 0$$

$$r_\Delta \gamma - \frac{L^2}{2m} = 0 \longrightarrow r_\Delta = \frac{L^2}{2m\gamma} = \frac{r_0}{2}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 2\frac{EL^2}{m\gamma^2}} \overset{E=E_2}{=} 1$$

26|APR|2017

MOTO OSCILLATORIO SMORZATO

MOTO ARMONICO: $\bar{F} = -k(x-l_0)\hat{u}$

$\bar{F}_e = m\bar{a} = m\ddot{x}\hat{u}$

$-k(x-l_0) = m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} = -\omega^2(x-l_0)$

$y = x - l_0 \,, \quad \dot{y} = \dot{x} \,, \quad \ddot{y} = \ddot{x} \qquad \ddot{y} = -\omega^2 y$

soluzione $\rightarrow y = x - l_0 = A\cos(\omega t + \phi)$

MOTO SMORZATO: $\bar{F}_\eta = -\tilde{k}\eta\bar{v} \rightarrow \bar{F}_\eta = m\bar{a}$

$-\tilde{k}\eta v = m\frac{dv}{dt} \rightarrow x(t) - x_0 = \frac{v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$

integro 2 volte

$\gamma = \frac{\tilde{k}\eta}{m}$

CONS. MOTO ARM. SMORZATO

$\bar{F}_e + \bar{F}_\eta + \bar{F}_0 = m\bar{a} \qquad \bar{F}_0 = cost$

$-k(x-l_0) - \tilde{k}\eta v + F_0 = ma$

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2(x-l_0) - \frac{F_0}{m} = 0$

dove $2\beta \equiv \frac{\tilde{k}\eta}{m}$

$\omega^2 = \frac{k}{m}$

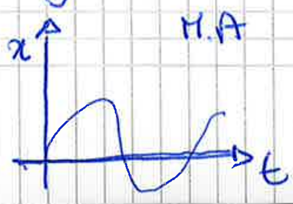
Mi libero dei termini costanti con un cambio variabile: $y = x - l_0 - \frac{F_0}{\omega^2 m}$

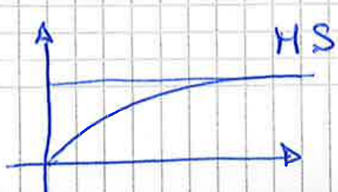
$\dot{y} = \dot{x}$

$\ddot{y} = \ddot{x}$

$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega^2 y = 0$

$\omega^2 = \frac{k}{m}$





Se chiamo $\alpha \equiv \frac{A}{2} e^{i\phi}$

$y(t) = \frac{A}{2}\left[e^{i(\sqrt{\Delta}t+\phi)} + e^{-i(\sqrt{\Delta}t+\phi)}\right] e^{-\beta t}$

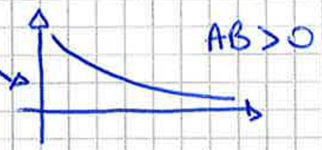
$= A\, e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\Delta}t+\phi) \longrightarrow$ MOTO SOTTOSMORZATO

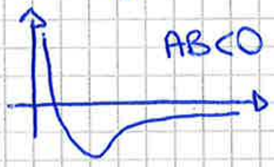
$\beta^2 = w^2$: smorzamento critico

$\Delta = 0 \quad \lambda_+ = \lambda_- = -\beta$

$y(t) = A e^{-\beta t} + Bt e^{-\beta t} = e^{-\beta t}(A + Bt)$ $\rightarrow$ soluzioni reali

MOTO SMORZATO $\rightarrow$ $y(t) = \frac{v_0}{\gamma}\left(1 - e^{-2\beta t}\right)$ $\quad \lambda_\pm = -\beta \pm \beta <^{-2\beta}_{0}$





$\bar{F} = f_0 \cos w_0 t\, \hat{u}$ FORZANTE

$-k(x - l_0) - \tilde{k}\eta v + f_0 \cos w_0 t = ma$

$m\ddot{x} + \tilde{k}\eta\dot{x} + k(x - l_0) = f_0 \cos(w_0 t)$

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w^2(x - l_0) = \frac{f_0}{m}\cos w_0 t$

In generale $w_0 \neq w = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$y = x - l_0$, $\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + w^2 y = \frac{f_0}{m}\cos w_0 t$

Soluzione generale

$y(t) = z(t) + y_0(t)$

$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + w^2 z = 0$ $\quad$ (!) $z(t)$ sol eq. omogenea associata

(!!) $y_0(t)$ sol. particolare di eq. completa

$y = e^{-\beta t}\left(A_+ e^{\sqrt{\beta^2 - w^2}\,t} + A_- e^{-\sqrt{\beta^2 - w^2}\,t}\right)$

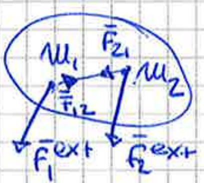
Scelgo la soluz. part. $y_0(t) = A\cos(w_0 t + \phi)$

$= \alpha e^{iw_0 t} + \underbrace{c.c.}_{\text{complesso coniug.}}$

$\alpha = \frac{A}{2} e^{i\phi} = \frac{A}{2}(\cos\phi + i\sin\phi)$

DINAMICA DI SISTEMI DI PARTICELLE

Sistema (m_1, m_2)



$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$ (3LN)

↳ forze interne al sistema

$\vec{F}_1^{ext}, \vec{F}_2^{ext}$ forze esterne

$$\begin{cases} \vec{F}_{12} + \vec{F}_1^{ext} = \dfrac{d\vec{p}_1}{dt}, & \vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 \\ \vec{F}_{21} + \vec{F}_2^{ext} = \dfrac{d\vec{p}_2}{dt}, & \vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 \end{cases}$$

2 punti di vista:

1) Studio la dinamica relativa di m_1 rispetto a m_2

↳ GUARDO ALL'INTERNO DEL SISTEMA

2) Studio il sistema nel suo complesso

↳ GUARDO COME SE FOSSE UN PTO MATERIALE

$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ → quantità di moto totale del sistema (concentrato in un punto)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = (\cancel{\bar{F}_{12}} + \bar{F}_1^{ext}) + (\cancel{\bar{F}_{21}} + \bar{F}_2^{ext})$$

penso al sistema come pto quindi le forze sono applicate allo stesso punto e posso sommarle

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} = \vec{F}^{ext}$$

↳ Le forze interne non contrib. alla dinamica collettiva del sistema

Se $\Sigma_i \bar{F}_i^{ext} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{cost.}$ Th. cons. qdm

$\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = 0 \iff \frac{d\bar{P}_1}{dt} = -\frac{d\bar{P}_2}{dt}$$

PER SISTEMI DI n PARTICELLE

$m_i,\ i = 1, \dots n$

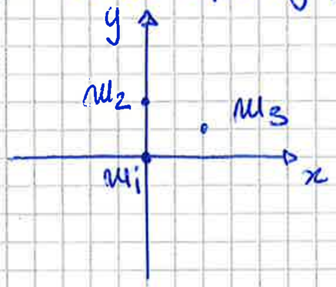
$\bar{P} = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i, \quad \dfrac{d\bar{P}_i}{dt} = \bar{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \bar{F}_{ij} \qquad (\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji})$

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \sum_i \bar{F}_i^{ext} \qquad \sum_i \Big(\sum_{j\neq i} \bar{F}_{ij}\Big) = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 240

es) $m_1 = 1{,}5\ kg$, $m_2 = 1{,}5\ kg$, $m_3 = 3\ kg$

$\bar{r}_1 = (0,0)$
$\bar{r}_2 = (0,2)$
$\bar{r}_3 = (2,1)$

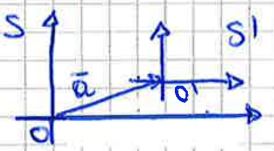


$M = \sum m_i = 6\ kg$

$$\bar{r}_{CM} = \begin{cases} x_{CM} = \dfrac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 0 + m_3 \cdot 2}{M} = 1\ m \\ y_{CM} = \dfrac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 2 + m_3 \cdot 1}{M} = 1\ m \end{cases} \qquad \bar{r}_{CM} = (1,1)$$

NB: la posizione del CM dipende dal sistema di riferimento, ma la posizione relativa del CM rispetto ai costituenti del sistema no, è intrinseca.

S': $\bar{r}_i = \bar{r}_i' + \bar{a}$



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum \bar{r}_i m_i}{\sum m_i}$$

$\bar{r}_i = \bar{r}_i' + a$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum (\bar{r}_i' + \bar{a}) m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \bar{r}_i' m_i}{\sum m_i} + \frac{\sum m_i \bar{a}}{\sum m_i} = \boxed{\bar{r}_{CM}' + \bar{a}} \frac{\sum m_i}{\sum m_i}$$

$$\bar{r}_i - \bar{r}_{CM} = \bar{r}_i' + \bar{a} - (\bar{r}_{CM}' + \bar{a}) = \bar{r}_i' - \bar{r}_{CM}'$$

Per sistemi in cui la massa è distribuita in modo continuo $\Rightarrow$ $m_i \Rightarrow dm = \rho\, dV$

ρ: densità di massa

$$\boxed{\rho = \frac{dm}{dV}}$$

$$\bar{r}_{CM} = \int \frac{dm\, \bar{r}}{M} = \int \frac{\rho(\bar{r})\, \bar{r}\, dV}{M}$$

Dinamica relativa

Consideriamo un sistema isolato $\left[\sum \bar{F}^{ext} = 0\right]$ composto da due particelle $m_1, \bar{r}_1, \bar{v}_1, \bar{a}_1$ e $m_2, \bar{r}_2, \bar{v}_2, \bar{a}_2$.

Studiamo il moto di m_1 relativamente a m_2

Solo $\bar{F}^{int} \rightarrow \bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$

$$\frac{d\bar{p}_1}{dt} = \bar{F}_{12} = m_1 \frac{d\bar{v}_1}{dt}$$

$$\frac{d\bar{p}_2}{dt} = \bar{F}_{21} = m_2 \frac{d\bar{v}_2}{dt}$$

VELOCITA' RELATIVA $\boxed{\bar{v}_{12} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2}$

$$\bar{a}_{12} = \frac{d\bar{v}_1}{dt} - \frac{d\bar{v}_2}{dt} = \frac{\bar{F}_{12}}{m_1} - \frac{\bar{F}_{21}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\bar{F}_{12}$$

$$\boxed{\bar{F}_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\bar{a}_{12} \equiv \mu \bar{a}_{12}}$$

$\mu \rightarrow$ MASSA RIDOTTA

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\bar{F}^{ext} = M\bar{a}_{CM}$$

$$\bar{F}_{12}^{(int)} = \mu \bar{a}_{12}$$

μ? considero $m_1 = m_2 = m$

in questo caso $\mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$

considero $m_1 \ll m_2$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx \frac{m_1 m_2}{m_2}$$

$\bar{r}_2 = 0$

$$\bar{r}_{CM} = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 0}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\bar{r}_1 \ll \bar{r}_1 \text{ (prossima a zero)}$$

$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\bar{v}_i \cdot \bar{v}_i)$

$\frac{1}{2} \sum m_i (\bar{v}_i' + \bar{v}_{CM}) \cdot (\bar{v}_i' + \bar{v}_{CM}) =$

$= \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 + \sum (m_i \bar{v}_i \cdot \bar{v}_{CM}) + \frac{1}{2} \sum (m_i v_{CM}^2)$

$K = K_{int} + \bar{v}_{CM} \cdot \sum_i (m_i \bar{v}_i') + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$

$K = K_{int} + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \bar{v}_{CM} \underbrace{\left(\sum m_i \bar{v}_i'\right)}_{=0 \quad SR_{CM}}$

3/MAG/2017

$m_i, v_i \qquad i = 1, \dots, n$

$\bar{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \bar{v}_i}{M} \quad ; \quad M = \sum m_i$

SR del CM

$\bar{v}_{CM}' = 0$

$\bar{v}_i' = \bar{v}_i - \bar{v}_{CM}$

$\bar{p}' = \sum_i m_i \bar{v}_i' = M \bar{v}_{CM}' = 0$

TEOREMA DI KÖNIG

$E_K = E_K^{int} + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$

$E_K^{int} = \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2$

se $i = 1, 2 \rightarrow 2$ particelle

$E_K^{int} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

$\bar{v}_{12} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$

$$\begin{cases} \bar{v}_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \bar{v}_{12} = \frac{\mu}{m_1} \bar{v}_{12} \\ \bar{v}_2' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \bar{v}_{12} = -\frac{\mu}{m_2} \bar{v}_{12} \end{cases}$$

$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

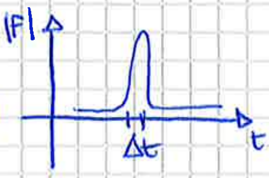
$U = E_k^{int} + E_p^{int}$ ENERGIA INTERNA

URTI

PROCESSI TRA PARTICELLE IN MOTO CHE INTERAGISCONO IN UNA REGIONE LIMITATA DI SPAZIO ΔV, E DURANTE UN INTERVALLO DI TEMPO BREVE Δt TALE PER CUI CAMBIANO IL LORO STATO DI MOTO

$$\boxed{\Delta\bar{P} = \int_0^{\Delta t} \bar{F}\,dt}$$

FORZE IMPULSIVE



=> CONSEGUENZE:

1) Le forze RESPONSABILI degli urti sono forze IMPULSIVE (molto intense in $\Delta t \to 0$)
2) Le altre forze (non impulsive) che agiscono sul sistema in $\Delta t \to 0$ non hanno tempo di modificare $\bar{P}$ e sono quindi trascurabili

Un sistema soggetto a un urto in un $\Delta t \to 0$ puo' essere considerato un sistema ISOLATO sottoposto ad una forza interna impulsiva.

Se penso al sistema composto da tutti gli oggetti sottoposti a urto so che $\boxed{\bar{P}_{TOT} = COST}$

Sistema isolato: [in: inizio, out: dopo urto]

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i^{\,INT} = \sum_{j=1}^{n} \bar{p}_j^{\,OUT} \to \boxed{\bar{p}^{IN} = \bar{p}^{OUT}}$$

In generale, $\boxed{E_K^{in} \neq E_K^{out}}$ -> Durante l'urto parte dell'E si converte in (es) calore o energia di deformaz.

$E_K = \Sigma_i E_{K_i}$ en. cin. tot

in questo caso i vincoli cinematici sono suff. a determ. v_i^{out}

$$m_1 (v_1^{in} - v_1^{out}) = m_2 (v_2^{out} - v_2^{in}) \quad (1)$$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 (v_1^{in\,2} - v_1^{out\,2}) = \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 (v_2^{in\,2} - v_2^{out\,2})$$

$$\rightarrow m_1 (v_1^{in} - v_1^{out})(v_1^{in} + v_1^{out}) = m_2 (v_2^{in} - v_2^{out})(v_2^{in} + v_2^{out}) \quad (2)$$

sostituisco (1) in (2)

$$m_2 (v_2^{out} - v_2^{in})(v_1^{in} + v_1^{out}) = m_2 (v_2^{out} - v_2^{in})(v_2^{out} + v_2^{in})$$

se $v_2^{out} \neq v_2^{in}$

$$\begin{cases} v_1^{in} + v_1^{out} = v_2^{in} + v_2^{out} & (a) \\ m_1 (v_1^{in} - v_1^{out}) = m_2 (v_2^{out} - v_2^{in}) & (b) \end{cases}$$

caso $v_2^{out} = v_2^{in}$ $\longrightarrow$ NO URTO

$m_1 (a) - (b)$:

$$2 m_1 v_1^{out} = (m_1 - m_2) v_2^{out} + (m_1 + m_2) v_2^{in}$$

sostituisco in (a)

$$v_1^{in} + \frac{(m_1 - m_2)}{2 m_1} v_2^{out} + \frac{m_1 + m_2}{2 m_1} v_2^{in} = v_2^{in} + v_2^{out}$$

$$v_2^{out} \left[\frac{m_1 - m_2}{2 m_1} - 1 \right] = v_2^{in} \left[\frac{2 m_1}{2 m_1} - \frac{m_1 + m_2}{2 m_1} \right] - v_1^{in}$$

$$- v_2^{out} \frac{m_1 + m_2}{2 m_1} = - v_1^{in} - \frac{m_2 - m_1}{2 m_1} v_2^{in}$$

$$v_2^{out} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1^{in} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2^{in}$$

$$v_1^{out} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 - m_2} v_1^{in} + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2^{in}$$

se $m_1 = m_2$

(3) $(p_1^{in})^2 = (p_1^{out})^2 + (p_2^{out})^2$ (a)

(1),(2) $\bar{p}_1^{in} = \bar{p}_1^{out} + \bar{p}_2^{out}$ (b)

$(p_2^{out})^2 = \bar{p}_2^{out} \cdot \bar{p}_2^{out} = (\bar{p}_1^{in} - \bar{p}_1^{out})(\bar{p}_1^{in} - \bar{p}_1^{out})$

$(p_2^{out})^2 = (p_1^{in})^2 + (p_1^{out})^2 - 2\bar{p}_1^{in} \cdot \bar{p}_1^{out}$

$(p_1^{in})^2 = \bar{p}_1^{in} \cdot p_1^{in} = (\bar{p}_1^{out} + \bar{p}_2^{out})(\bar{p}_1^{out} + \bar{p}_2^{out})$

$(p_1^{out})^2 + (p_2^{out})^2 + 2\bar{p}_1^{out} \cdot \bar{p}_2^{out} = (p_1^{in})^2$

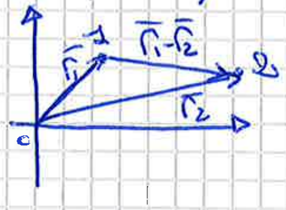
$(b)^2 = a$ se $\bar{p}_1^{out} \cdot \bar{p}_2^{out} = 0 \Rightarrow \bar{p}_1^{out} \perp \bar{p}_2^{out}$ $(\theta_1 + \theta_2 = \pi/2)$

$m_1 = m_2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 240

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \bar{r}_1 \times (\bar{F}_{12} + \bar{F}_1^{ext}) + \bar{r}_2 \times (-\bar{F}_{12} + \bar{F}_2^{ext})$$

$$= (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{F}_{12} + \bar{r}_1 \times \bar{F}_1^{ext} + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2^{ext}$$



$$\bar{F}_{12} \parallel \bar{r}_1 - \bar{r}_2$$

$$\Rightarrow (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{F}_{12} = 0$$

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \bar{\tau}_o^{ext}$$

$$\boxed{\bar{\tau}^{ext} = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1^{ext} + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2^{ext}}$$

SISTEMA di n PARTICELLE

$$\bar{L}_o = \sum \bar{L}_{i,o} = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{p}_i$$

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \sum_i \cancel{\frac{d\bar{r}_i}{dt} \times \bar{p}_i} + \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\bar{p}_i}{dt}$$

$$\frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\bar{p}_i}{m} \parallel \bar{p}_i$$

$$\frac{d\bar{p}_i}{dt} = \bar{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \bar{F}_{i,j}$$

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \underbrace{\sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{ext}}_{\bar{\tau}^{ext}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \sum_{j \neq i} \bar{F}_{ij}}_{\sum_i \sum_j (\bar{r}_i - \bar{r}_j) \times \bar{F}_{ij} \ (i<j)}$$

$$\bar{r}_i - \bar{r}_j \parallel \bar{F}_{ij} \Rightarrow \boxed{\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{ext} = \bar{\tau}_o^{ext}}$$

Se scelgo il polo $\Omega \neq 0$

$$\bar{L}_\Omega = \sum_i (\bar{r}_i - \bar{r}_\Omega) \times \bar{p}_i$$

$$\frac{d\bar{L}_\Omega}{dt} = \sum \left[(\bar{r}_i - \bar{r}_\Omega) \times \frac{d\bar{p}_i}{dt} \right] + \sum_i \left[-\frac{d\bar{r}_\Omega}{dt} \times \bar{p}_i \right] =$$

Dimostrazione:

$$\bar{L}_o = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{P}_i = \sum_i \left[(\bar{r}_i' + \bar{r}_{CM}) \times (\bar{P}_i' + m_i \vec{v}_{CM})\right]$$

$$\bar{L}_o = \sum_i (\bar{r}_i' \times \bar{P}_i) + \sum (\bar{r}_{CM} \times \bar{P}_i') + \sum_i (\bar{r}_i' \times m_i \bar{v}_{CM}) + \sum_i (\bar{r}_{CM} \times m_i \bar{v}_{CM})$$

$$\bar{L}_o = \bar{L}_C + \bar{r}_{CM} \times \underbrace{\cancel{\sum \bar{P}_i'}}_{0} + \underbrace{\left(\cancel{\sum_i m_i \bar{r}_i'}\right)}_{0} \times \bar{v}_{CM} + \left(\sum_i m_i\right) \bar{r}_{CM} \times \bar{v}_{CM}$$

$$\boxed{\bar{L}_o = \bar{L}_C + \bar{r}_{CM} \times M \bar{v}_{CM}}$$

8/MAG/2017

SR INERZIALE

$$\vec{L}_o = \sum_i \vec{L}_{i,o} = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{p}_i$$

$$\vec{L}_\Omega = \sum_i (\bar{r}_i - \bar{r}_\Omega) \times \bar{p}_i = \bar{L}_o - \bar{r}_\Omega \times \bar{P}$$

$$\bar{L}_o \equiv \sum_i \bar{r}_i' \times \bar{p}_i' \quad \text{con} \quad \begin{cases} \bar{r}_i' \equiv \bar{r}_i - \bar{r}_{CM} \\ \bar{P}_i' = m_i \dfrac{d\bar{r}_i'}{dt} ; \ \sum \bar{P}_i' = 0 \end{cases}$$

↳ MOMENTO ANG. INTERNO

In generale: $\sum_i \bar{P}_i = \bar{P} = M \bar{v}_{CM}$

(a) $\vec{L}_o = \vec{L}_c + M \bar{r}_{CM} \times \bar{v}_{CM}$ Th di König

(b) $\dfrac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{ext} \equiv \vec{\tau}^{ext}$

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{\tau}_\Omega^{ext} - \vec{v}_\Omega \times \bar{P}$$

da (a) $\dfrac{d\bar{L}_o}{dt} = \dfrac{d\bar{L}_c}{dt} + M \bar{v}_{CM} \times \bar{v}_{CM} + M \bar{r}_{CM} \times \bar{a}_{CM}$

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \frac{d\bar{L}_c}{dt} + \bar{r}_{CM} \times \bar{F}^{ext}$$

confronto con (b)

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \sum \left[(\bar{r}_i' + \bar{r}_{CM}) \times \bar{F}_i^{ext}\right] = \sum \bar{r}_i' \times \bar{F}_i^{ext} + \bar{r}_{CM} \times \bar{F}^{ext}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 240