NUMERO: 2180A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Lagona Enrico

MATERIA: Aerodinamica Applicata - Appunti e Esercizi - Prof. Di Cicca

GAETANO.DICICCA@POLITO.IT

30/09/2016

J.D. ANDERSON, FOUNDAMENTAL OF AERODYNAMIC, MC GRAW HILL

G. IUSO, F. QUORI - GAS DINAMICA, PROBLEMI RISOLTI E RICHIAMI DI TEORIA - LEVROTTO E BELLA.
SOLO DELLA PARTE VISCOSA.

D.P. RAYMER - AIRCRAFT DESIGN: A CONCEPTUAL APPROACH - AIAA EDUCATIONAL SERIES

BARNERS W. MC CORMICK - AERODYNAMICS, AERONAUTICS AND FLIGHT MECHANICS - JOHN WILES AND SONS.

QUORI - AERODINAMICA - LEVROTTO E BELLA.

I APPELLO SCRITTO 2h DOMANDE TEORIA RISP APERTA + MULTIPLA.
3-4 ESERCIZI

APPELLO ORALE 2 DOMANDE TEORIA → ESERCIZIO.

FLUIDO COME MEZZO CONTINUO

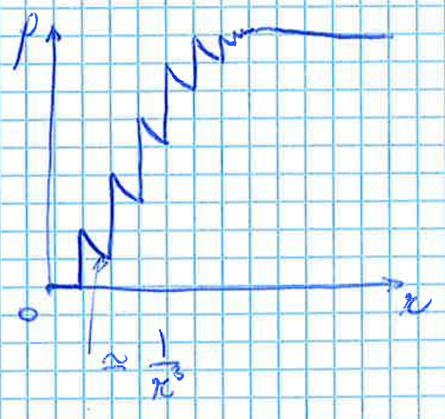
CONSIDERANDO UN VOLUME SI HA CHE

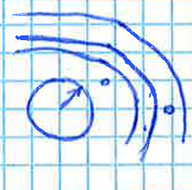
$$\rho = \frac{m \cdot n}{V}$$

m MASSA MOLECOLE

n NUMERO MOLECOLE

V VOLUME → NEL CASO DI SFERA $\frac{4}{3}\pi R^3$





SE IL VOLUME È SUFF. GRANDE
$\rho \simeq$ COST PER r MOLTO AMPI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 202

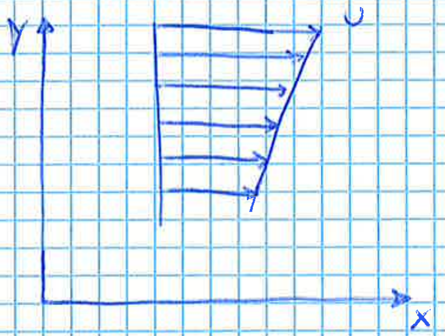
CONSIDERANDO I FLUSSI TERMICI

$\vec{q}$ FLUSSO TERMICO CONDUTTIVO

$\vec{q} = -K \nabla T$ $\boxed{\text{LEGGE DI FOURIER}}$ CON K CONDUCIBILITÀ TERMICA $\left[\frac{W}{mK}\right]$

$$\begin{cases} q_x = -K \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ q_y = -K \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ q_z = -K \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{cases}$$

RELAZIONE TRA τ E $\nabla \vec{V}$



$$\tau \propto \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$ $\boxed{\text{LEGGE DI NEWTON}}$

μ VISCOSITÀ DINAMICA $\left[\frac{kg}{m\,s}\right] = [Pa \cdot s]$

ν VISCOSITÀ CINEMATICA $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

NEL CASO DI ARIA STANDARD A QUOTA $h = 0$, $T = 15°C$, $\rho = 1{,}225 \frac{kg}{m^3}$

$p = 760\ mmHg = 101325\ Pa$

$\nu = 1{,}454 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$

$\mu = 1{,}781 \cdot 10^{-5}\ Pa \cdot s$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 202

μ ANGOLO DI ~~[illegible]~~ MACH

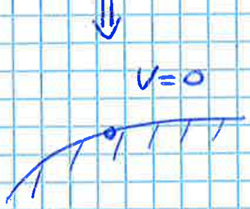
$$\operatorname{sen}\mu = \frac{MO_1}{O_1O_1} = \frac{c\,\cancel{\Delta t}}{V\,\cancel{\Delta t}} = \frac{c}{V} = \frac{1}{M} \qquad \text{con } M = \frac{V}{c}$$

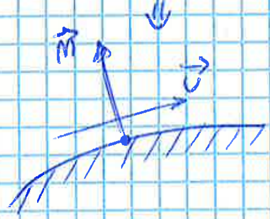
$$\mu = \arcsin \frac{1}{M}$$

APPROSSIMAZIONE DI FLUIDO IDEALE

$\mu = 0 \quad K = 0$ SE SI TRATTA DI FLUIDO IDEALE.

1) CONDIZIONE DI ADERENZA $\longrightarrow$ CONDIZIONE DI TANGENZA.





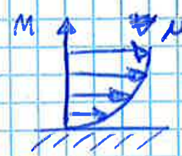
$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$$

2) NON C'È SCAMBIO TERMICO TRA FILETTI FLUIDI
TRA FILETTO FLUIDO E CORPO.

$\mu = 0 \quad K = 0 \quad \tau = 0 \quad q = 0$

NON CI SONO EFFETTI DIFFUSIVI.

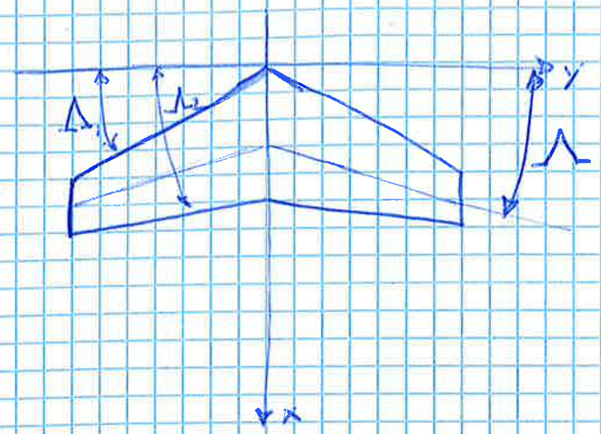
IL PROFILO DI VELOCITÀ NELLO STRATO LIMITE È



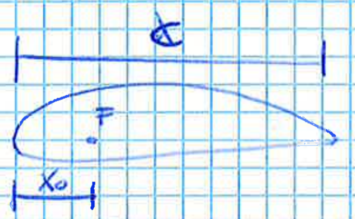
QUINDI POICHÉ I GRADIENTI DI VELOCITÀ SONO MOLTO FORTI NON SI PUÒ APPROSSIMARE A FLUIDO IDEALE.

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$$

ALA A FRECCIA CON RASTREMAZIONE

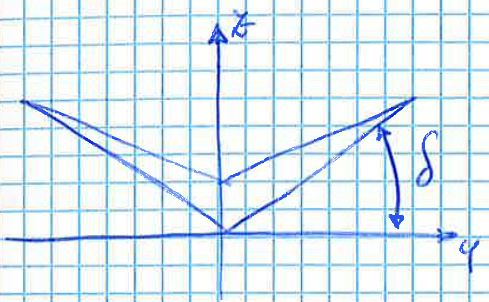


L'ANGOLO DI FRECCIA È L'ANGOLO TRA L'ASSE y E LA LINEA DEI FUOCHI.



$x_0 = 0{,}25\, c$

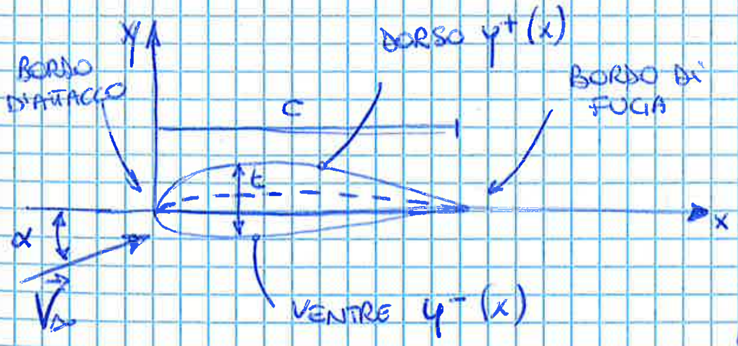
ANGOLO DIEDRO



δ ANGOLO DIEDRO.

PROFILI ALARI

α INCIDENZA GEOMETRICA



- - - - - LINEA MEDIA $y_m(x)$

$$y_m(x) = \frac{y^+(x) + y^-(x)}{2}$$

t SPESSORE MAX

t/c SPESSORE RELATIVO

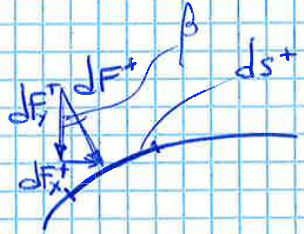
$$a(x) = \frac{y^+(x) + y^-(x)}{2}$$ SEMI SPESSORE

CALCOLO dF^+ E dF^-

$$dF^+ = (p^+ - p_\infty)\, ds^+ \cdot 1$$

$$dF^- = (p^- - p_\infty)\, ds^- \cdot 1$$

SE CONSIDERO SOLO LA PARTE DORSALE:



$$dF_x^+ = dF^+ \operatorname{sen}\beta$$

$$dF_y^+ = -dF^+ \cos\beta$$

PERCHÉ CONTRARIA AL S.R.

QUINDI

$$\begin{cases} dF_x^+ = (p^+ - p_\infty)\, ds^+ \operatorname{sen}\beta \\ dF_y^+ = -(p^+ - p_\infty)\, ds^+ \cos\beta \end{cases}$$

IN MODO ANALOGO SI PROCEDE PER LA PARTE VENTRALE. L'ANGOLO $\beta' \neq \beta$ MA SI PUÒ CONSIDERARE $\beta' \simeq \beta$

PER IL VENTRE

$$\begin{cases} dF_x^- = (p^- - p_\infty)\, ds^- \operatorname{sen}\beta \\ dF_y^- = (p^- - p_\infty)\, ds^+ \cos\beta \end{cases}$$

$\beta \ll 1\ rad \Rightarrow$ $\operatorname{sen}\beta \simeq \beta$

$\cos\beta \simeq 1$

$\operatorname{sen}\beta \ll \cos\beta$

ALLORA

$$|dF_x| \ll |dF_y|$$

$$R_x = \int_0^c (dF_x^+) + \int_0^c (dF_x^-)$$

$$R_y = \int_0^c (dF_y^+) + \int_0^c (dF_y^-)$$

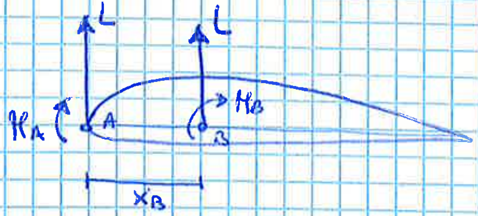
$$|R_x| \ll |R_y|$$

$$R_y = \int_0^c \left[-(p^+ - p_\infty) + (p^- - p_\infty)\right] dx$$

DOVE $dx = ds^+ \cos\beta$
$dx = ds^- \cos\beta$

$$= \int_0^c \left[(p^- - p_\infty) - (p^+ - p_\infty)\right] dx$$

$$M_B = M_A + L \cdot x_B$$



$$M_A + L\,x_{cp} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_{cp} = -\frac{M_A}{L}$$

CON x_{cp} CENTRO DI PRESSIONE

IN QUESTO PUNTO $M_B = 0$. DA QUESTO SI NOTA CHE M_A È PICCHIANTE.

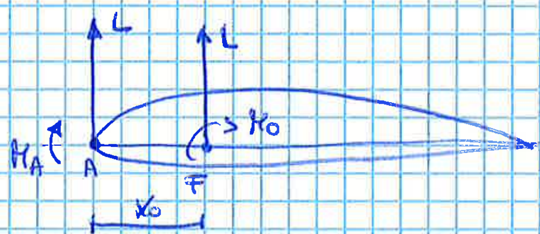
AUMENTANDO α SI HA CHE $L \to 0$ PER $\alpha \to \alpha_s$

$x_{cp} \to \infty$

SI CONSIDERA IL FUOCO DEL PROFILO COME CENTRO DI APPLICAZIONE.

IL FUOCO DEL PROFILO GODE DELLA PROPRIETÀ:

$$\frac{\partial M_0}{\partial \alpha} = 0$$



CON M_0 MOMENTO FOCALE

x_0 PER PROFILI SUBSONICI

$$x_0 = 0{,}25 \cdot c$$

COEFFICIENTI ADIMENSIONALI

CONSIDERO UN FLUIDO REALE E COMPRIMIBILE.

$$F = f(\text{GEOM}, \rho, p, V, \mu, \ell)$$

GEOM ⇒ INCIDENZA α + FORMA (SIMILITUDINE GEOMETRICA)

ALLORA

$$F = f(\alpha, \rho, p, V, \mu, \ell) \sim \ell^a V^b \rho^c \mu^d p^e$$

$$\frac{kg\,m}{s^2} = m^a \cdot \frac{m^b}{s^b} \cdot \frac{kg^c}{m^{3c}} \cdot \frac{kg^d}{m^d s^d} \cdot \frac{kg^e}{m^e s^{2e}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 202

NEL CASO DELL'ALA SI DEFINISCONO I COEFFICIENTI 04/10/2016

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}$$ COEFF. DI PORTANZA

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}$$ COEFF. DI RESISTENZA.

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho V^2 S c}$$ COEFF. DI MOMENTO ~~FOCALE~~

CONVENZIONALMENTE SI CONSIDERA LA SUPERFICIE IN PIANTA DELL'ALA.

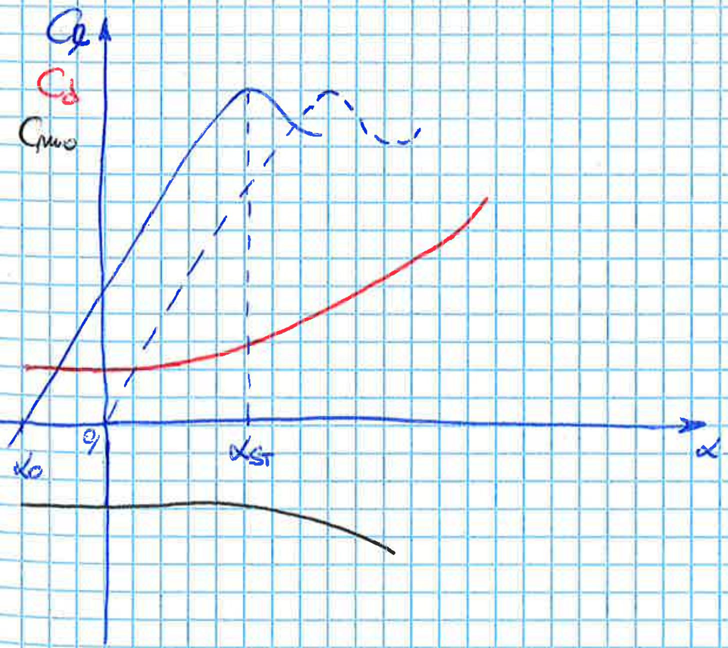
NEL CASO DEL PROFILO ALARE:

$$C_l = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 c \cdot 1}$$ COEFF. DI PORTANZA

$$C_d = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 c \cdot 1}$$ COEFF. DI RESISTENZA

$$C_m = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho V^2 c^2 \cdot 1}$$ COEFF. DI MOMENTO ~~FOCALE~~

ANDAMENTI DEI COEFFICIENTI



α_0 È L'INCIDENZA DI PORTANZA NULLA. SOLITAMENTE È NEGATIVO.

α_{ST} È L'INCIDENZA DI STALLO

PER UN PROFILO SIMMETRICO ~~$(\alpha = 0)$~~
$C_{m_0} = 0$, $\alpha = 0$

SI HA CHE

$$M_A = \int_0^c \left[(p^- - p_\infty) - (p^+ - p_\infty) \right] x \, dx$$

$$C_{MA} = \frac{M_A}{\frac{1}{2} \rho V^2 c^2} = \int_0^c \frac{\left[(p^- - p_\infty) - (p^+ - p_\infty) \right]}{\frac{1}{2} \rho V^2} \cdot \frac{x}{c} \frac{dx}{c} =$$

$$= \int_0^c (C_p^+ - C_p^-) \frac{x}{c} \cdot \frac{dx}{c} = -\int_0^c \Delta C_p \frac{x}{c} \frac{dx}{c} = -\int_0^1 \Delta C_p \frac{x}{c} d\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$M_B = M_A + L \cdot x_B$$

$$C_{MB} = C_{MA} + C_L \cdot \frac{x_B}{c}$$

RICHIAMI SUGLI OPERATORI MATEMATICI

∇ OPERATORE NABLA $\quad \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$

DATO f UNO SCALARE

∇f GRADIENTE DI f = $\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$

$\text{grad} f$ È UN VETTORE

DATO $\vec{q}$ UN VETTORE

$$\nabla \cdot \vec{q} = \text{div}\, \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$$

$\text{div}\, \vec{q}$ È UNO SCALARE.

SE CONSIDERO IL VETTORE VELOCITÀ $\vec{V} = u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k}$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

SE $\vec{q}$ È IL VETTORE VELOCITÀ $\vec{V}$

$$\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{V} = \nabla \wedge (\nabla \Phi) = 0$$

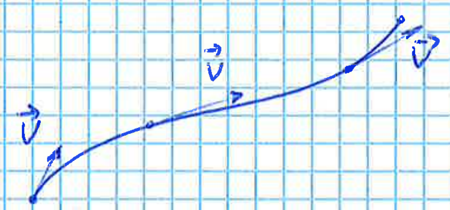
$$\vec{V} = \nabla \Phi$$

SI NOTA CHE

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \rho \nabla \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \rho$$

LINEE DI CORRENTE E TRAIETTORIE

LE LINEE DI CORRENTE O DI FLUSSO SONO LINEE CHE IN OGNI ISTANTE SONO TANGENTI AL VETTORE VELOCITÀ.

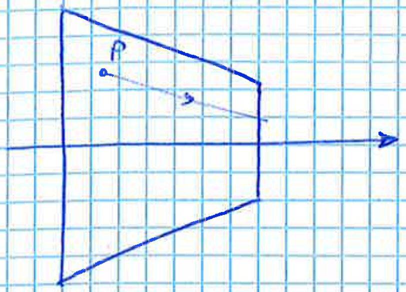


LA TRAIETTORIA È IL LUOGO DEI PUNTI OCCUPATO IN TEMPI SUCCESSIVI DA UNA PARTICELLA FLUIDA.

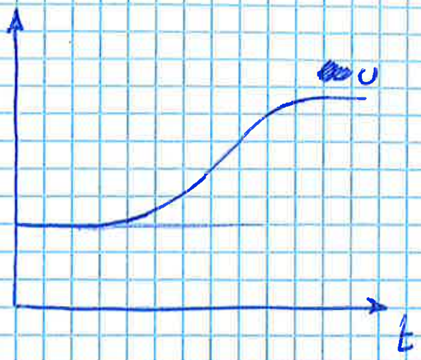
LINEE DI CORRENTE E TRAIETTORIE COINCIDONO IN REGIME STAZIONARIO; IN GENERALE CIÒ NON È VERO.

SUPPONIAMO UN CONDOTTO CONVERGENE

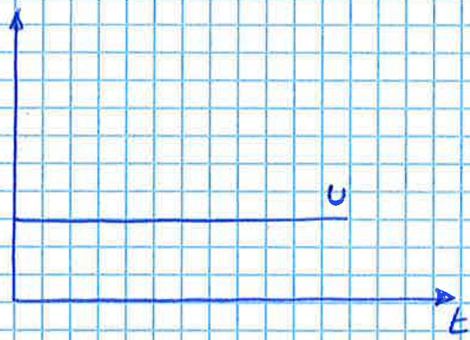
CASO STAZIONARIO



NEL CASO LAGRANGIANO



NEL CASO EULERIANO



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 202

POICHÉ

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla u$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla v$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla w$$

QUESTA SCRITTURA SI PUÒ COMPRIMERE COME

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$$

EQUAZIONI DEL MOTO.

EQ. DI BILANCIO MASSA, QDM, ENERGIA.

1)° EQUAZIONI DI EULERO.
VENGONO OMESSI I TERMINI DIFFUSIVI

2)° EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES
COMPAIONO I TERMINI VISCOSI E DIFFUSIVI.

1) FORMA INTEGRALE

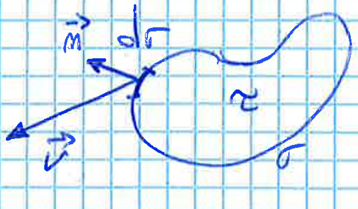
MASSA.

VOLUME CONTROLLO

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho \, d\tau = -\int_\sigma \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})\, d\sigma$$

VARIAZIONE MASSA NEL VOL. CONTROLLO

FLUSSO DI MASSA ATTRAVERSO σ



QDM

FORZA DI GRAVITÀ

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho\vec{V}\, d\tau = -\int_\sigma \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\, d\sigma - \int_\sigma p\vec{n}\, d\sigma + \int_\tau \rho\vec{g}\, d\tau$$

VARIAZIONE QDM NE VOL. CONTROLLO

FLUSSO QDM ATTRAVERSO σ

FORZE PRESSIONE AGENTI SU σ

(IL MENO PERCHÉ LA PRESS. COMPRIME σ)

IN ALTRO MODO

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

SE IL FLUIDO È INCOMPRIMIBILE, CIOÈ $\rho = \text{cost}$

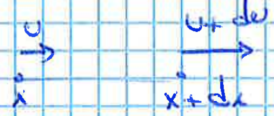
$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ E QUINDI $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ IL CAMPO DI $\vec{v}$ È SOLENOIDALE

QUESTO È VALIDO SIA NEL CASO DI CORRENTE STAZIONARIA E NON.

COSA SIGNIFICA $\nabla \cdot \vec{v} = 0$?

CONSIDERO 2 P.TI INFINITESIMAMENTE VICINI

$$\nabla \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$



QUESTO SIGNIFICA CHE LA PARTICELLA FLUIDA SI PUÒ DEFORMARE A VOLUME COSTANTE. QUESTO FA SÌ CHE LA PORTATA IN VOLUME SIA COSTANTE.

NEL CASO DI FLUIDO STAZIONARIO COMPRIMIBILE:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

ρ È COSTANTE NEL TEMPO

IN QUESTE CONDIZIONI LA PORTATA IN MASSA È COSTANTE.

— QDM

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho \vec{v}\, d\tau = -\int_\sigma \rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n})\, d\sigma - \int_\sigma p \vec{n}\, d\sigma + \int_\tau \rho \vec{g}\, d\tau$$

PER GAUSS

$$\int_\sigma \rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n})\, d\sigma = \int_\tau \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v})\, d\tau$$

$$\int_\sigma p \vec{n}\, d\sigma = \int_\tau \nabla p\, d\tau$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho E\vec{v}) = -\nabla\cdot(p\vec{v}) + \rho\vec{g}\cdot\vec{v}$$

IN MODO PIÙ COMPATTO:

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t} + E\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\vec{v}\cdot\nabla E + E\,\nabla\cdot(\rho\vec{v}) = -\nabla(p\vec{v}) + \rho\vec{g}\cdot\vec{v}$$

$$\rho\left(\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla E\right) + E\underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v})\right]}_{=0} = -\nabla\cdot(p\vec{v}) + \rho\vec{g}\cdot\vec{v}$$

ALLORA

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla E = -\frac{1}{\rho}\nabla(p\vec{v}) + \vec{g}\cdot\vec{v}$$

EQUAZIONI DI BILANCIO CON DERIVATE LAGRANGIANE, RIFERITE AL MOTO DELLE PARTICELLE FLUIDE

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla$$

- MASSA

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\nabla\cdot(\rho\vec{v}) = \rho\nabla\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\rho$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\rho}_{} + \rho\nabla\cdot\vec{v} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\vec{v}$$

- QDM

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} \quad\Rightarrow\quad \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$$

- ENERGIA

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla E = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(p\vec{v}) + \vec{g}\cdot\vec{v} \quad\Rightarrow\quad \frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(p\vec{v}) + \vec{g}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{D\vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$$ MOLTIPLICO I MEMBRI PER $\vec{v}$

$$\vec{v}\,\frac{D\vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{v}}{\rho}\cdot\nabla p + \vec{g}\cdot\vec{v}$$ MA $\vec{v}\cdot\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)$

QUINDI

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}\vec{v}\cdot\nabla p + \vec{g}\cdot\vec{v}$$

POICHÉ $\nabla\cdot(p\vec{v}) = \vec{v}\cdot\nabla p + p\nabla\cdot\vec{v}$

$$\frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho}p\nabla\cdot\vec{v} - \frac{1}{\rho}\vec{v}\cdot\nabla p + \vec{g}\cdot\vec{v}$$

SOSTITUENDO

$$\frac{DE}{Dt} - \frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}p\nabla\cdot\vec{v}$$ MA $E = e + \frac{v^2}{2}$

$\Rightarrow e = E - \frac{v^2}{2}$

$$\frac{D}{Dt}\left(E - \frac{v^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}p\nabla\cdot\vec{v}$$

$$\rho\frac{De}{Dt} = -p\nabla\cdot\vec{v}$$

CONSIDERO L'EQ. DI BILANCIO DELLA MASSA.

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\vec{v}$$ SE $\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho^2\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$

$$-\rho\nabla\cdot\vec{v} = -\rho^2\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) \Rightarrow \nabla\cdot\vec{v} = +\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

SOSTITUENDO NELL' EQ. ENERGIA INTERNA

$$\cancel{\rho}\frac{De}{Dt} = -p\cancel{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\frac{De}{Dt} = -p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) \Rightarrow \frac{De}{Dt} + p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

POICHÉ IL FLUSSO È ISENTROPICO

$$\log \frac{T_2}{T_1} \cdot \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma-1} = 0$$

$$\frac{T_2}{T_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma-1} = 1$$

IN GENERALE $\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \text{cost}$

SOSTITUENDO CON LEGGE GAS PERFETTI

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = \text{cost.}$$

QUANDO IL FLUSSO È ~~ISENTROPICO~~ OMO ?

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad \neq \quad \nabla s = 0$$

ISO $\qquad\qquad$ OMO

$$T ds = de + p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

ENTALPIA

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

$$dh = de + d\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

$$dh = de + p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} dp$$

ALLORA

$$dh = T ds + \frac{1}{\rho} dp$$

DERIVATA DIREZIONALE

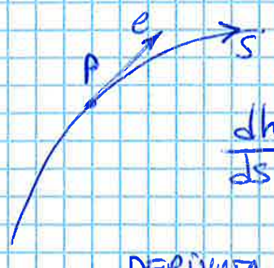
SE

$$d\vec{s} = ds\, \vec{e}$$

$$dh = (\nabla h \cdot \vec{e})\, ds$$

$$ds = (\nabla s \cdot \vec{e})\, ds$$

$$dp = (\nabla p \cdot \vec{e})\, ds$$



$$\frac{dh}{ds} = \nabla h \cdot \vec{e}$$

DERIVATA DIREZIONALE

QUINDI

$$\nabla h = T \nabla s + \frac{1}{\rho} \nabla p$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 202

EQ. BILANCIO ~~MASSA~~ (EULERO) 10/10/2016

- MASSA

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

- QDM

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}$$

- ENERGIA

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla E = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p \vec{V}) + \vec{g} \cdot \vec{V}$$

CONSIDERO UN FLUSSO STAZIONARIO E INCOMPRIMIBILE

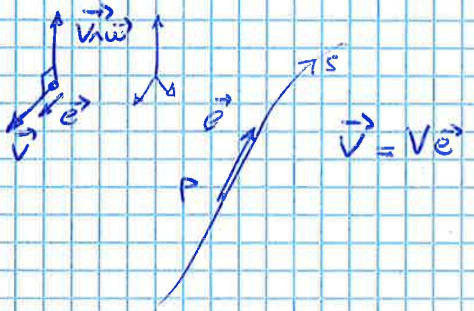
DA EQ. BIL. QDM CON VORTICITÀ

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{=0 \text{ STAZIONARIO}} - \vec{V} \wedge \vec{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) + \underbrace{\vec{g}}_{\text{TRASCURABILE}}$$

ALLORA

$$\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V} \wedge \vec{\omega} = 0$$

CONSIDERO UNA LINEA DI CORRENTE



MOLTIPLICANDO PER $\vec{e}$

$$\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \vec{e} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) \cdot \vec{e} - \underbrace{(\vec{V} \wedge \vec{\omega}) \cdot \vec{e}}_{=0} = 0 \qquad \cos 90° = 0$$

$$\cancel{\frac{1}{\rho} \nabla p} \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} + \frac{d}{ds}\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0$$

SE IL FLUIDO È INCOMPRIMIBILE

$$\frac{d}{ds}\left(p + \frac{1}{2} \rho V^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{cost}$$

LUNGO UNA LINEA DI CORRENTE.

IL VALORE DELLA COSTANTE È $p^{\circ} = p + \frac{1}{2} \rho V^2$

PRESSIONE TOTALE O DI ARRESTO.

SE IL FLUSSO È IRROTAZIONALE

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} = 0 \quad \text{E} \quad \vec{v} = \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \Phi) + \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{g} = 0$$

$$\nabla\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \nabla \mathcal{H} = 0$$

IL POTENZIALE DI $\vec{g}$ È $\mathcal{H}$. QUINDI

$$\vec{g} = \nabla \mathcal{H}$$

$$\mathcal{H} = -gz \quad \text{CON } z \text{ LA QUOTA.}$$

ρ È UNA COSTANTE. ALLORA

$$\nabla\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z\right) = 0$$

ALLORA

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = F(t) \rightarrow \text{FUNZIONE DEL SOLO TEMPO.}$$

BERNOULLI ~~CON~~ INCOMPRIMIBILE, IRROTAZIONALE, INSTAZIONARIO.

SUPPONIAMO CHE SIA STAZIONARIO

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = \text{COST}$$

SE $\vec{g}$ NON HA RUOLO

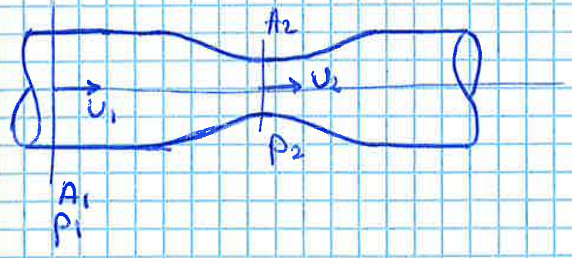
$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{COST} \rightarrow \text{TEOREMA DI BERNOULLI}$$

IN TUTTO IL CAMPO È COSTANTE.

TUBO DI VENTURI

PER CONTINUITÀ

$$A_1 U_1 = A_2 U_2$$



PER BERNOULLI

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 = \text{COST} = p_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2$$

SE $A \uparrow \quad U \downarrow \quad p \uparrow$

$A \downarrow \quad U \uparrow \quad p \downarrow$

EQ. VORTICITÀ - FLUSSO INCOMPRIMIBILE

$\rho = cost \iff \nabla \cdot \vec{v} = 0$

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} + \nabla \wedge \vec{f}$$

- $\vec{f}$ CAMPO DI FORZE IRROTAZIONALE, ES. $\vec{f} = \vec{g}$

$\nabla \wedge \vec{g} = 0 \qquad \nabla \wedge \vec{f} = 0$

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V}$$

- BIDIMENSIONALE CAMPO DI MOTO.

$\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} = 0$ PERCHÉ $\vec{V} \perp \vec{\omega}$

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = 0$$

SE IL CAMPO DI MOTO È INIZIALMENTE IRROTAZIONALE, LO SARÀ PER TUTTI GLI ISTANTI SUCCESSIVI.

- FLUSSO STAZIONARIO MA COMPRIMIBILE.

EQ. BIL. ENERGIA

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \cancel{\rho f} - \nabla \cdot (p\vec{v}) \qquad E = e + \frac{V^2}{2}$$

EQ. BILANCIO MASSA

$$\nabla \cdot (p\vec{v}) = p\nabla \cdot \vec{v} + \vec{V} \cdot \nabla p$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \nabla \cdot \vec{v} \\ \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) &= -\frac{1}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} \\ \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho^2 \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow +\cancel{\rho}\nabla \cdot \vec{v} = \cancel{-\frac{1}{\rho^2}\frac{D\rho}{}} + \rho^{\cancel{2}}\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

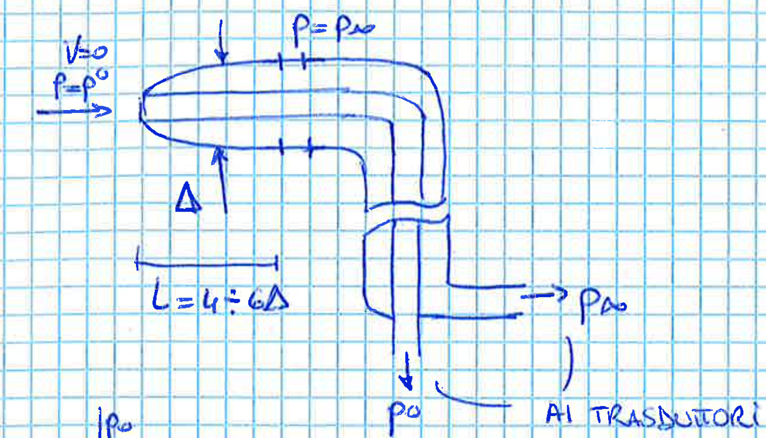
$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla p \Rightarrow \vec{V} \cdot \nabla p = \frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial p}{\partial t}$$

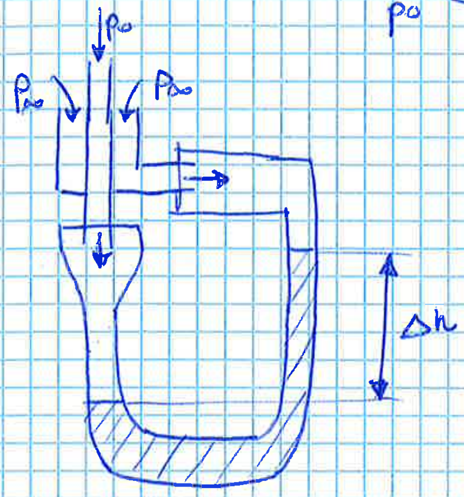
ALLORA

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{v} - \vec{V} \cdot \nabla p$$

TUBO PITOT

11/10/2016





CASO STAZIONARIO, INCOMPRIMIBILE

$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{COST}$

$c = \sqrt{\gamma R T} =$

$p_{AMB} = 101325\ Pa$

$\gamma_{H_2O} = 9{,}81\ N/dm^3 \Rightarrow 1\ Kg/dm^3 = \rho_{H_2O}$

$\gamma_{Hg} = 133{,}32\ N/dm^3 \Rightarrow 13{,}59\ Kg/dm^3 = \rho_{H_2O}$

$\rho_1 V_1 A = \rho_2 V_2 A$

$(\Delta h)_1 = 980{,}638\ Pa$

$(\Delta h)_2 = 1961{,}276\ Pa$

$T_{AMB} = 16°C = 289{,}15\ K$

$p_{AMB} = 760\ mmHg$

$(\Delta h)_1 = 100\ mm\,H_2O$

$(\Delta h)_2 = 200\ mm\,H_2O$

$\gamma_{H_2O} = 1\ Kgf/dm^3$

$\gamma_{Hg} = 13{,}59\ Kgf/dm^3$

$V_{\infty 1}$?

$V_{\infty 2}$?

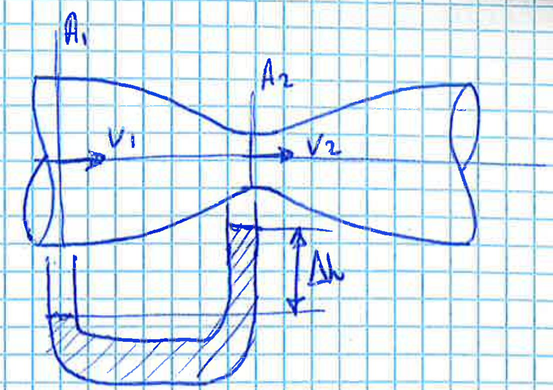
$p_1 - p_\infty = (\Delta h)_1 \Rightarrow p_1 = 102305{,}368\ Pa$

$p_2 = 103268{,}276\ Pa$

$V_{\infty 1} =$

$\Rightarrow$

TUBO DI VENTURI



$$\frac{A_1}{A_2} = 4$$

$\Delta h = 30$ mm H_2O

V_1 ?

$$\rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2$$

$$V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow V_1^2 = V_2^2 \frac{1}{16}$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho\left(V_2^2 - V_1^2\right)$$

$$p_2 - p_1 = \gamma_{H_2O} \cdot \Delta h = 294{,}3 \text{ Pa}$$

$$V_2^2 - V_1^2 = \frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}$$

$$V_2^2 = V_1^2 + \frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}$$

$$V_1^2 = \left(V_1^2 + \frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}\right)\frac{1}{16}$$

$$15 V_1^2 = \frac{2(p_2 - p_1)}{\rho} \Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{15\rho}} = \sqrt{32{,}03265} = 5{,}66 \text{ m/s}$$

$$\frac{\gamma R^*}{c_p} = \frac{c_p}{c_v} \cdot \frac{c_p - c_v}{c_p} = \gamma - 1$$

ALLORA

$$T^0 = T\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)$$

TEMPERATURA TOTALE

VALIDA IN CASO ISOENTROPICO E NON.

ALLORA SE

$$H = cost \Rightarrow T^0 = cost$$

SE IL FLUSSO È ANCHE ISOENTROPICO.

$$\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = cost = \frac{T^0}{\rho^{0\,\gamma-1}} \Rightarrow \rho^0/\rho = \left(T^0/T\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

ALLORA

$$\rho^0 = \rho\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

IN CONDIZIONI ISENTROPICHE $\boxed{\text{SOLO}}$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = cost = \frac{p^0}{\rho^{0\,\gamma}} \Rightarrow \frac{p^0}{p} = \left(\frac{\rho^0}{\rho}\right)^\gamma$$

ALLORA

$$p^0 = p\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

IN CONDIZIONI ISENTROPICHE $\boxed{\text{SOLO}}$

BERNOULLI CASO INCOMPR., STAZIONARIO, IRROTAZIONALE.

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = cost$$

SE SI HA UN CAMPO 2-D, INCOMPRIMIBILE

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = 0$$

$$\oint_l \frac{D}{Dt}\left(\vec{V}\cdot d\vec{s}\right) = \oint_l \frac{D\vec{V}}{Dt}\cdot d\vec{s} + \oint_l \vec{V}\cdot \frac{D}{Dt}(d\vec{s})$$

$$\frac{D}{Dt}(d\vec{s}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d\vec{s}_1 - d\vec{s}}{\Delta t}$$

A PERCORRE UNO SPAZIO $V\Delta t$

B PERCORRE UNO SPAZIO $(V+dV)\Delta t$

$$\vec{AA_1} + d\vec{s}_1 = \vec{BB_1} + d\vec{s}$$

$$d\vec{s}_1 - d\vec{s}_2 = \vec{BB_1} - \vec{AA_1} = (\vec{V}+d\vec{V})\Delta t - \vec{V}\Delta t = d\vec{V}\Delta t$$

QUINDI

$$\frac{D}{Dt}(d\vec{s}) = \frac{d\vec{V}\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}}$$

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta t} = \oint_l \frac{D\vec{V}}{Dt}d\vec{s} + \underbrace{\oint_l \vec{V}d\vec{V}}_{d\left(\frac{V^2}{2}\right)} \to 0$$

PERCHÉ L'INTEGRALE $\oint$ DI UN DIFFERENZIALE ESATTO È NULLO.

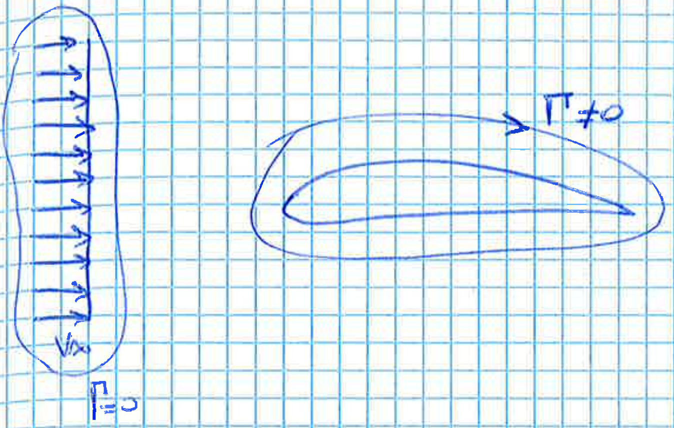
ALLORA

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_l \frac{D\vec{V}}{Dt}d\vec{s}$$

DALL'EQ. DI BILANCIO DI QDM $\quad \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -\oint_l \frac{1}{\rho}\underbrace{\nabla p \cdot d\vec{s}}_{dp} \qquad \text{MA} \quad \frac{dp}{ds} = \nabla p \cdot \vec{t}$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -\oint_l \frac{1}{\rho}dp$$



QUESTO PORTA ALLA NASCITA DI PORTANZA.

FLUIDI REALI VISCOSI

EQUAZIONI NAVIER-STOKES

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V}$$ MASSA

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \underbrace{\nu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\nu}{3}\nabla(\nabla \cdot \vec{V})}_{\text{TERMINI VISCOSITÀ}}$$ Q.D.M.

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p\nabla \cdot \vec{V} + K \nabla^2 T + D$$

K: CONDUCIBILITÀ TERMICA.

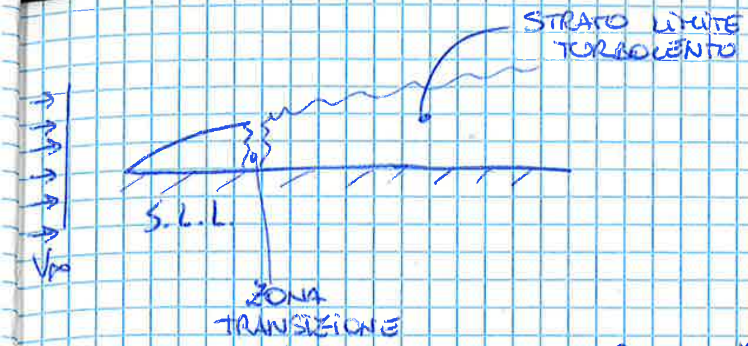
D: FUNZIONE DI DISSIPAZIONE LEGATA ALLA VISCOSITÀ DEL FLUIDO E AI GRADIENTI DI VELOCITÀ.

$K\nabla^2 T$ PUÒ ESSERE ANCHE SCRITTO COME $-\nabla \cdot \vec{q}$

CON $\vec{q}$ FLUSSO TERMICO CONDUTTIVO

$\vec{q} = -K\nabla T$ INFATTI $-\nabla \cdot \vec{q} = K \nabla \cdot (\nabla T)$ DOVE LA DIVERGENZA DEL GRADIENTE È IL LAPLACIANO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 202



$$R_{x_{tr}} = 5 \cdot 10^5 \qquad Re_x = \frac{x V_\infty}{\nu}$$

EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES 17/10/2016

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\nu}{3}\nabla(\nabla \cdot \vec{V})$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{V} + K \nabla^2 T + D$$

EQUAZIONI DI BILANCIO MEDIATE ALLA REYNOLDS (REYNOLDS AVERAGED NAVIER-STOKES EQUATIONS)

RANS

CASO INCOMPRIMIBILE $\rho = cost \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0$

① $\nabla \cdot \vec{V} = 0$

② $\dfrac{D\vec{V}}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V}$

③ $\rho \dfrac{De}{Dt} = K \nabla^2 T + D$

SI POSSONO RISOLVERE IL SISTEMA DI ① E ② DISACCOPPIATA DA ③ ALLORA

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ \rho\left(\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}\right) = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \end{cases}$$

IN QUESTO MODO CALCOLIAMO UN VALORE MEDIO E UN VALORE FLUTTUANTE ATTORNO AL VALORE MEDIO.

$$\left.\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ w &= \bar{w} + w' \end{aligned}\right\} \quad \vec{V} = \vec{\bar{V}} + \vec{V}' \qquad p = \bar{p} + p'$$

DECOMPOSIZIONE ALLA REYNOLDS.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ \rho \left[\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V}\vec{V}) + \dfrac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v'_i v'_j}) \right] = -\nabla \bar{p} + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \end{cases}$$

IN QUESTO CASO

$$\nabla \cdot (\vec{V}\vec{V}) = \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ \rho \left(\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla \bar{p} + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} + \dfrac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{v'_i v'_j}) \end{cases}$$

EQ. NS INCOMPRIMIBILE
MEDIATE ALLA REYNOLDS

VERSIONE NON MEDIATA

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

IL TERMINE

$-\rho \overline{v'_i v'_j}$ È IL TENSORE DEGLI SFORZI DI REYNOLDS LEGATO ALLE FLUTTUAZIONI TURBOLENTE.
QUESTO TENSORE HA 9 COMPONENTI, SIMMETRICO QUINDI SI HANNO 6 NUOVE INCOGNITE, PER QUESTO VIENE INTRODOTTO UN MODELLO PER GLI SFORZI DI REYNOLDS.

MODELLO BOUSSINESQ.

QUESTO MODELLO LEGA IL TENSORE DEGLI SFORZI ALTRI ALTRI ELEMENTI DELLE EQUAZIONI

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right)$$

VISCOSITÀ TURBOLENTA

TRASCURABILE $\delta \ll L$

$$\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{U_e^2}{L}} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\frac{U_e^2}{L}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\rho U_e^2}{L}} + \nu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\frac{U_e^2}{L^2}} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\frac{U_e^2}{\delta^2}}\right)$$

ALLORA

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

LUNGO Y

TRASCURABILE

$$\underbrace{u\frac{\partial v}{\partial x}}_{U_e\frac{U_e\delta}{L}\cdot\frac{1}{L}} + \underbrace{v\frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{U_e\delta}{L}\cdot\frac{U_e\delta}{L}\cdot\frac{1}{\delta}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}}_{\frac{1}{\rho}\frac{\rho U_e^2}{\delta}} + \nu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\frac{U_e\delta}{L}\cdot\frac{1}{L^2}\sim\frac{\delta}{L^3}} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\frac{U_e\delta}{L}\cdot\frac{1}{\delta^2}}\right)$$

$$\frac{U_e^2\delta}{L^2} \qquad \frac{U_e^2\delta}{L^2} \qquad \frac{U_e^2}{L} \qquad \nu\frac{U_e}{L\delta}$$

IN UNO STRATO LIMITE I TERMINI CONVETTIVI DEVONO EQUILIBRARE I TERMINI DIFFUSIVI E VISCOSI.

$$\frac{U_e^2}{L} \sim \nu\frac{U_e}{\delta^2} \Rightarrow \nu \sim \frac{U_e\delta^2}{L}$$

ALLORA

$$\nu\frac{U_e}{L\delta} \sim \frac{U_e\delta^2}{L}\cdot\frac{U_e}{L\delta} = \frac{U_e^2\delta}{L}$$

TUTTI I TERMINI SONO TRASCURABILI RISPETTO $\frac{\partial p}{\partial x}$. ALLORA PER LO S.L.

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow \text{LA P È COSTANTE LUNGO LA DIREZIONE NORMALE ALLA PARETE}$$

$$p = p(x)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 202

$$T^0 = T\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)$$

$M_1 = 0$

~~$M_2 = 0{,}55$~~

~~$M_3 = 0{,}66$~~

~~$M_4 = 0{,}50$~~

$$M_i = \frac{V_i}{a_i}$$

$V_\infty = 190\ m/s$

$V_1 = 0$

$V_2 = V_\infty$

$V_3 = 1{,}2\ V_\infty$

$V_4 = 0{,}9\ V_\infty$

$T_\infty = 293\ K$

$p_\infty = 100\,000\ Pa$

p_1, p_2, p_3, p_4

$C_{p_1}, C_{p_2}, C_{p_3}, C_{p_4}$

T_1, T_2, T_3, T_4

$$T^0 = T_\infty\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right) = 310{,}72\ K$$

$T_1 = T_\infty = \cancel{310{,}72\ K}\ 293\ K$

$T_2 = \cancel{310{,}72\ K}\ 293\ K$

~~$T_3 = 285{,}82\ K$~~

~~$T_4 = 295{,}93\ K$~~

$$a_\infty = \sqrt{\gamma R^* T_\infty} = 342{,}93\ m/s$$

$$M_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty} = 0{,}55$$

$$\rho_\infty = \frac{p_\infty}{R^* T_\infty} = 1{,}189\ \frac{kg}{m^3}$$

~~$$p^0 = p_\infty\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 122\,825{,}16\ Pa$$~~

~~$p_1 =$~~

~~p_2~~

~~$p_3 =$~~

~~$p_4 =$~~

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

~~$C_{p_1} =$~~

~~$C_{p_2} =$~~

$C_{p_3} =$

$C_{p_4} =$

~~$$\rho^0 = \rho_\infty\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 1{,}377\ \frac{kg}{m^3}$$~~

~~$\rho_1 =$~~

~~$\rho_2 =$~~

$\rho_3 =$

$\rho_4 =$

$\frac{dU_e}{dy} = 0$ ALLORA $U_e \frac{dU_e}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx}$ MA $p_e = p$ PER OGNI y

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = U_e\frac{dU_e}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

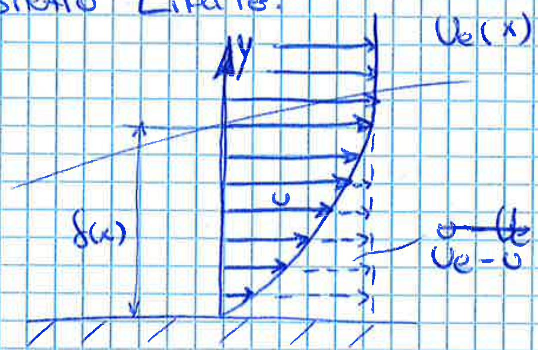
SE

$$\frac{dU_e}{dx} > 0 \Rightarrow \frac{dp_e}{dx} < 0$$

$$\frac{dU_e}{dx} < 0 \Rightarrow \frac{dp_e}{dx} > 0$$

QUESTE VALGONO SOLO ALL'INTERNO DELLO STRATO LIMITE, NON ALL'ESTERNO.

GRANDEZZE CARATTERISTICHE DELLO STRATO LIMITE.



SE NON CI FOSSE ν ~~u(x)~~ $u(x) = U_e(x)$

DEFINISCO LO SPESSORE DI SPOSTAMENTO

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$$

RAPPRESENTA IL FLUSSO IDEALE SPOSTATO DI δ^* RISPETTO ALLA PARETE.

$$\theta(x) = \int_0^\infty \frac{u}{U_e}\left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$$ SPESSORE DI QUANTITÀ DI MOTO.

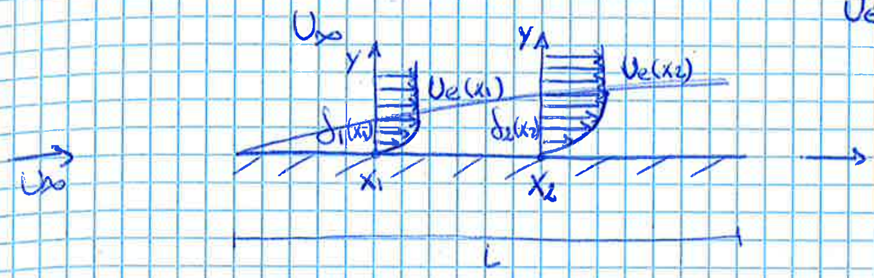
$$H = \frac{\delta^*}{\theta}$$ PARAMETRO DI FORMA DELLO STRATO LIMITE

NEL CASO DI SL SU PLACCA PIANA INVESTITA SENZA INCIDENZA

$$\begin{cases} H_{LAMINARE} = 2,605 \\ H_{TURBOLENTO} \cong 1,3 \end{cases}$$

QUESTI VALGONO SOLO IN QUESTO CASO SPECIFICO.
SE NON C'È INCIDENZA NON C'È GRAD. PRESS.

STRATO LIMITE SU PLACCA PIANA A INCIDENZA NULLA.



$U_e = U_\infty$ SOLO IN QUESTO CASO PARTICOLARE.

MUOVENDOSI LUNGO x A y FISSATA, LA VELOCITÀ U DIMINUISCE. CONSIDERANDO LE EQ. DI PRANDTL

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\underbrace{\cancel{\dfrac{\partial p}{\partial x}}}_{=0} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

LA PRESSIONE È LA STESSA PER OGNI x IN QUANTO SI HA INCIDENZA NULLA E QUINDI NESSUN GRADIENTE DI p.

ALLORA I TERMINI CONVETTIVI BILANCIANO I TERMINI VISCOSI

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

IL Re CRITICO È

$$Re_{x_{TR}} = \frac{U x_{TR}}{\nu} = 5\cdot 10^5$$

SOLO PER QUESTO CASO PARTICOLARE.

RISCRIVENDO PRANDTL CON LO SFORZO TANGENZIALE

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

CON μ SUPPOSTA COSTANTE

ALLORA $\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\mu\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$

DOVE $\tau = \mu\dfrac{\partial u}{\partial y}$

ALLORA

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

S.L. LAMINARE SU PLACCA PIANA CON CORRENTE A INCIDENZA NULLA.

$Re_x < 5 \cdot 10^5$

$$\delta(x) \cong 5\sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\delta^*(x) = 1{,}73\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

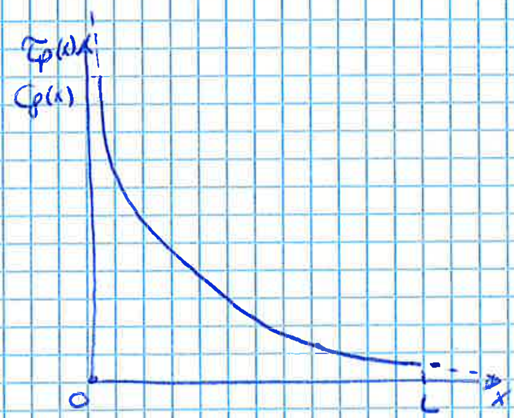
$$H = \frac{\delta^*}{\vartheta} = 2{,}605$$

$$\vartheta(x) = 0{,}664\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

$$\tau_p(x) = 0{,}332\sqrt{\frac{\rho\mu U^3}{x}} \propto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$C_f(x) = \frac{\tau_p(x)}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 0{,}664\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \propto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

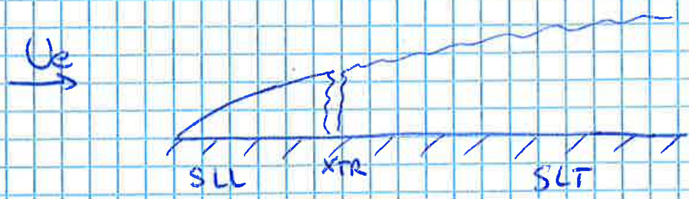
$$= 0{,}664 \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_x}}$$



$$\overline{\tau}_p = 0{,}664\sqrt{\frac{\rho\mu U^3}{L}}$$

$$C_D = \frac{\overline{\tau}_p}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1{,}328\sqrt{\frac{\nu}{UL}} = 1{,}328\frac{1}{\sqrt{Re_L}}$$

TRANSIZIONE DELLO STRATO LIMITE



EQ. DI S.L. MEDIATE ALLA REYNOLDS

CONSIDERO LA DECOMPOSIZIONE ALLA REYNOLDS:

$$u = \bar{u} + u' \qquad v = \bar{v} + v' \qquad p = \bar{p} + p' \qquad \bar{u}' = \bar{v}' = \bar{p}' = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

QUESTE VALGONO SIA PER SL. LAMINARE E TURBOLENTO.

CONSIDERO L'EQ. QDM LUNGO x

$$\rho\left[u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{EQ. BIL. MASSA QUINDI } \neq 0}\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho\left[\left(2u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + v\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho\left[2u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(u^2)}{\partial x} \cancel{+ \frac{\partial(uv)}{\partial y}} \qquad u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(u \cdot v)$$

$$\rho\left(\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(uv)\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ALLORA

$$\begin{cases} \overline{\dfrac{\partial}{\partial x}(\bar{u}+u') + \dfrac{\partial}{\partial y}(\bar{v}+v')} = 0 \\ \overline{\rho\left[\dfrac{\partial}{\partial x}(\bar{u}+u')^2 + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[(\bar{u}+u')(\bar{v}+v')\right]\right]} = \overline{-\dfrac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(\bar{u}+u')} \end{cases}$$

SI PUÒ RISCRIVERE

$$\left.\begin{aligned} &\mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho \overline{u'v'}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu+\mu_T)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right]$$

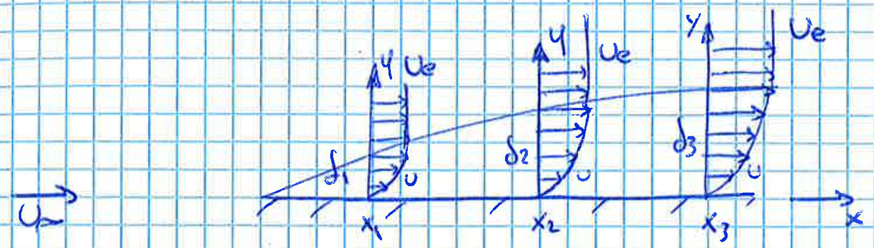
MA $(\mu+\mu_T)\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \tau$ SFORZI VISCOSI

ALLORA

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \rho\left(\bar{u}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau}{\partial y} \end{cases}$$

FORMALMENTE IDENTICA ALLA SCRITTURA NON MEDIATA

24/10/2016



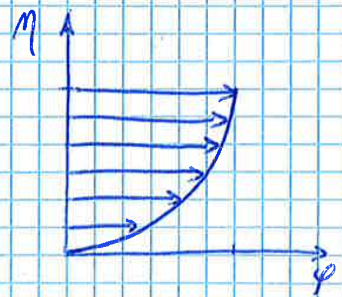
POICHÉ $\alpha = 0 \Rightarrow U_e = U_\infty$

PLACCA PIANA INCIDENZA NULLA

$\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad U_e = U_\infty$

SE S.L. LAMINARE

$\varphi = \dfrac{u}{U_e} \qquad \eta = \dfrac{y}{\delta(x)}$



I PROFILI SI IMPACCHETTANO TUTTI.

SE S.L. TURBOLENTO

SI HA AUTOSIMILITUDINE SOLO A FISSATO Re

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial \tau}{\partial y} \end{cases}$$

CASO S.L.L.
CON $\nabla p = 0$

SI PUÒ TROVARE LA SOL. ESATTA DI BLASIUS CON φ ED η.

$\tau_p \propto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

PER LO S.L. TURBOLENTO CON $\dfrac{dp}{dx} = 0$ CIOÈ $\alpha = 0$. LO STRATO LIMITE È TURBOLENTO DAL BORDO D'ATTACCO.

SE $5 \cdot 10^5 < Re_x < 10^7$

$M < 0,3$
QUINDI SUPPONIAMO INCOMPRESSIBILITÀ

$\delta(x) = \dfrac{0,37x}{Re_x^{1/5}}$ $\qquad$ $\delta^*(x) = \dfrac{\delta(x)}{8}$

$\theta(x) = \dfrac{7}{72}\delta(x)$ $\qquad$ $H = \dfrac{\delta^*}{\theta} = 1,286$

$\tau_p = 0,0288\, \rho U^2 \left(\dfrac{\nu}{Ux}\right)^{1/5} = \cancel{0,288}\ 0,0288\, \rho U^2 \cdot \dfrac{1}{Re_x^{1/5}}$

$C_f = \dfrac{\tau_p(x)}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \dfrac{0,0576}{Re_x^{1/5}}$ $\qquad$ $\bar{\tau}_p = 0,036\, \rho U^2 \left(\dfrac{\nu}{UL}\right)^{1/5} = \dfrac{0,036\, \rho U^2}{Re^{1/5}}$

$C_D = \dfrac{\bar{\tau}_p}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \dfrac{0,074}{Re_L^{1/5}}$

SE $Re_x > 10^7$

$\delta(x) = \dfrac{0,232x}{Re_x^{1/7}}$ $\qquad$ $\delta^*(x) = \dfrac{\delta(x)}{12}$ $\qquad$ $\theta(x) = \dfrac{11}{156}\delta(x)$

$H = \dfrac{\delta^*}{\theta} = 1,182$ $\qquad$ $\tau_p = 0,0115\, \rho U^2 \left(\dfrac{\nu}{Ux}\right)^{\frac{1}{7}} = 0,0115\, \rho U^2 \cdot \dfrac{1}{Re_x^{1/7}}$

$C_f = \dfrac{\tau_p(x)}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \dfrac{0,023}{Re_x^{1/7}}$ $\qquad$ $\bar{\tau}_p = 0,0134\, \rho U^2 \left(\dfrac{\nu}{UL}\right)^{1/7} = 0,0134\, \dfrac{\rho U^2}{Re_L^{1/7}}$

$C_D = \dfrac{\bar{\tau}_p}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \dfrac{0,0295}{Re_L^{1/7}}$

ALLORA

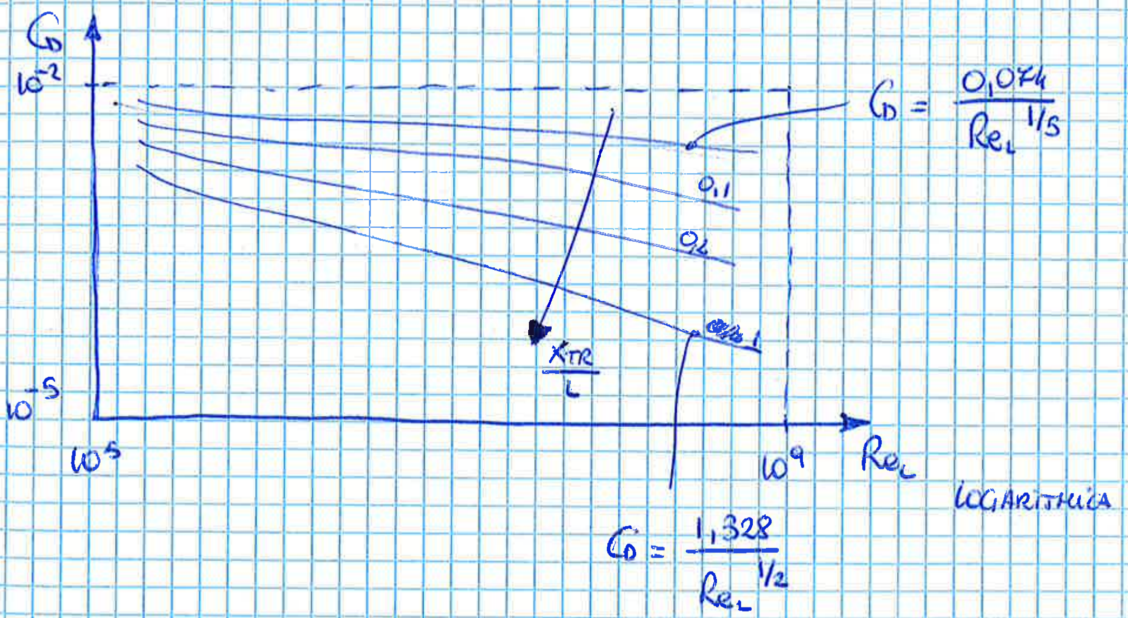
$$C_{D\,TURB}(Re_L) = \frac{0{,}074}{Re_L^{1/5}} \qquad C_{D\,TURB}(Re_{x_{TR}}) = \frac{0{,}074}{Re_{x_{TR}}^{1/5}}$$

$$C_{D\,LAM}(Re_{x_{TR}}) = \frac{1{,}328}{Re_{x_{TR}}^{1/2}}$$

$$\frac{x_{TR}}{L} = \frac{Re_{x_{TR}}}{Re_L} \Rightarrow Re_{x_{TR}} = \frac{x_{TR}}{L} Re_L$$

QUINDI

$$C_D = \frac{0{,}074}{Re_L^{1/5}} - \frac{x_{TR}}{L}\left[\frac{0{,}074}{\left(\frac{x_{TR}}{L} Re_L\right)^{1/5}} - \frac{1{,}328}{\left(\frac{x_{TR}}{2} Re_L\right)^{1/2}}\right]$$



STRATO LIMITE TERMICO

CONSIDERIAMO UN CASO ~~IN~~COMPRIMIBILE E ISOTERMO. QUINDI CON $M_\infty > 0,3$ SI PUÒ CONSIDERARE IL CASO IN CUI $T_P \neq T_E$. ALLORA SI POSSONO AVERE LO S.L. TERMICO DI SPESSORE δ_T E LO S.L. CINETICO DI SPESSORE δ.

SI DEVE DETERMINARE C_D PER LO S.L. TERMICO. SI APPLICA UNA CORREZIONE AL C_D.

CORREZIONE DEL COEFF. D'ATTRITO.

$$C_{f_{INCOM}} = C_{f_{INCOM}}(Re_{x_\infty})$$

$Re_{x_\infty} = Re_x$ IN CONDIZIONI ASINTOTICHE CIOÈ CASO ISOTERMO E INCOMPRIMIBILE

$$C_{f_{COMPR.}} = C_{f_{COMPR}}\left(Re_{x_\infty}, M_\infty, \frac{T_P}{T_\infty}\right)$$

$$C_{f_{COMPR.}} = C_{f_{INC}}(Re_{x_\infty}) \cdot \chi$$

χ FATTORE DI CORREZIONE

$$\chi = \chi\left(M_\infty, \frac{T_P}{T_\infty}\right)$$

$$\tau_{P_{COM}} = \tau_{P_{INC.}} \cdot \chi$$

χ È IL FATTORE DI CORREZIONE PER LO S.L. TERMICO

ALLORA

$$C_{D_{COMPR}} = C_{D_{INC.}}(Re_{L_\infty}) \cdot \chi\left(M_\infty, \frac{T_P}{T_\infty}\right)$$

$$\overline{\tau}_{P_{COM}} = \overline{\tau}_{P_{INC.}}(Re_{L_\infty}) \cdot \chi\left(M_\infty, \frac{T_P}{T_\infty}\right)$$

- NUMERO DI PRANDTL

$$Pr = \frac{\mu C_P}{K}$$

CON K CONDUCIBILITÀ TERMICA. $\left[\frac{W}{mK}\right]$

$$Pr = \frac{\mu C_P}{K} \cdot \frac{\rho}{\rho} = \frac{\nu}{\kappa}$$

DOVE $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ VISCOSITÀ CINEMATICA $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

$\frac{K}{\rho C_P} = \kappa$ DIFFUSIVITÀ TERMICA $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

N. PRANDTL ARIA

$$Pr = 0,71$$

SE LA PLACCA PIANA È ADIABATICA

$$T_p = T_{REC} = \cancel{T+R}\ T\left(1 + R\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right)$$

$$\chi_e = \left[\frac{T_\infty\left(1+R\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right)+T_\infty}{2T_\infty} + R\frac{\gamma-1}{2}\cdot\frac{M_\infty^2}{4}\right]^{-0,125} =$$

$$= \left[\frac{2+R\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2}{2} + R\frac{\gamma-1}{2}\frac{M_\infty^2}{4}\right]^{-0,125} =$$

$$= \left[1 + R\frac{\gamma-1}{4}M_\infty^2 + R\frac{\gamma-1}{2}\frac{M_\infty^2}{4}\right]^{-0,125} =$$

$$= \left(1 + R\frac{\gamma-1}{2}\frac{3M_\infty^2}{4}\right)^{-0,125}$$

$$\chi_t = \left(1 + R\frac{\gamma-1}{2}\frac{3}{4}M_\infty^2\right)^{-0,65}$$

EQUAZIONE INTEGRALE DELLO STRATO LIMITE

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = U_e\dfrac{dU_e}{dx} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

INTEGRIAMO QUESTE RELAZIONI

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - U_e\frac{dU_e}{dx} = \nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\int_0^\infty\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - U_e\frac{dU_e}{dx}\right)dy = \nu\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 202

$$\int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial x}\left[u(U_e - u)\right] + (U_e - u)\frac{dU_e}{dx}\right] dy = \frac{\tau_p}{\rho}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty u(U_e-u)\,dy + \cancel{\int_0^\infty (U_e -} + \frac{dU_e}{dx}\int_0^\infty (U_e - u)\,dy = \frac{\tau_p}{\rho}$$

POICHÉ $\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \Rightarrow U_e \delta^* = \int_0^\infty (U_e - u)\,dy$

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_e}\left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \rightarrow U_e^2 \theta = \int_0^\infty u(U_e - u)\,dy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(U_e^2\theta) + U_e \delta^* \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho}$$

POICHÉ θ E U_e DIPENDONO SOLO DA x:

$$\frac{d}{dx}(U_e^2\theta) + U_e \delta^* \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho}$$ EQ. INTEGRALE DELLO STRATO LIMITE

OSSERVIAMO CHE

$$\frac{d}{dx}(U_e^2\theta) = U_e^2 \frac{d\theta}{dx} + 2U_e\theta\frac{dU_e}{dx}$$

$$U_e^2\frac{d\theta}{dx} + 2U_e\theta\frac{dU_e}{dx} + U_e\delta^*\frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho}$$

DIVIDO PER U_e^2

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{2\theta}{U_e}\frac{dU_e}{dx} + \frac{\delta^*}{U_e}\frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2}$$ MA $H = \frac{\delta^*(x)}{\theta(x)}$

$$\frac{d\theta(x)}{dx} + \frac{\theta(x)}{U_e}\frac{dU_e}{dx}\left[2 + H(x)\right] = \frac{C_f(x)}{2}$$ $C_f = \frac{\tau_p(x)}{\frac{1}{2}\rho U_e^2}$

EQ. INTEGRALE S.L. CON θ, H, C_f

ES. COME IL PRECEDENTE MA

$U = 60 \, m/s$ CALCOLARE GLI STESSI VALORI.

$$Re_L = \frac{UL}{\nu} = 24,4 \cdot 10^5 > 5 \cdot 10^5$$ S.L. TURBOLENTO.

$$C_D = \frac{0,074}{Re_L^{1/5}} = 3,9 \cdot 10^{-3} \Rightarrow D = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 C_D S = 7,75 N$$

$$D_{TOT} = 15,51 \, N$$

$$Re_x = \frac{Ux}{\nu} = 12,19 \cdot 10^5 > 5 \cdot 10^5$$

$$\tau_p(x) = 0,0288 \frac{\rho U^2}{Re_x^{1/5}} = \cancel{1,04 \cdot 10^{4}} \; 7,70 \frac{N}{m^2}$$

$$\delta(x) = \frac{0,37x}{Re_x^{1/5}} = 6,73 \cdot 10^{-3} \, m$$

$$\delta^*(x) = \frac{\delta(x)}{8} = 8,41 \cdot 10^{-4} \, m$$

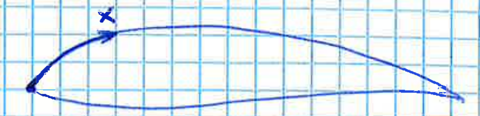
$$\theta(x) = \frac{7}{72} \delta(x) = 6,54 \cdot 10^{-4} \, m$$

$$H(x) = \frac{\delta^*(x)}{\theta(x)} = 1,28$$

ALLORA

$$\frac{U_e^6}{\nu}\frac{d\theta^2}{dx} + \frac{\theta^2}{\nu}\frac{dU_e^6}{dx} = 0{,}45\,U_e^5 \Rightarrow \frac{1}{\nu}\cdot\frac{d(\theta^2 U_e^6)}{dx} = 0{,}45\,U_e^5$$

SI PUÒ INTEGRARE DAL VALORE Ø AL VALORE x



$$\frac{d(\theta^2 U_e^6)}{dx} = 0{,}45\,\nu\,U_e^5$$

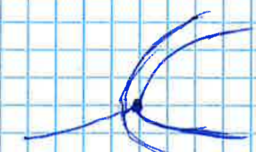
$$\int_0^x d(\theta^2 U_e^6) = \int_0^x 0{,}45\,\nu\,U_e^5(x')\,dx'$$

x' PER NON CONFONDERE CON x

$$\theta^2(x)\,U_e^6(x) - \theta^2(0)\,U_e^6(0) = 0{,}45\,\nu\int_0^x U_e^5(x')\,dx'$$

$\theta^2(0)\,U_e^6(0) = 0$ PERCHÉ

- PROFILO CON BORDO D'ATTACCO REGOLARE, BEN ARROTONDATO, DOVE $U_e(0) = 0$, $\theta(0) \neq 0$

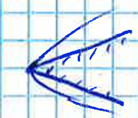


ALLORA

$$\theta^2(x) = 0{,}45\,\nu\cdot\frac{1}{U_e^6(x)}\int_0^x U_e^5(x')\,dx'$$

- PROFILO CON BORDO D'ATTACCO APPUNTITO, $U_e(0) \neq 0$, $\theta(0) = 0$

QUESTO CI PERMETTE DI VALUTARE θ PER OGNI PUNTO



RELAZIONI DI LEBECI - BRADSHAW

SI POSSONO SCRIVERE NEL CASO DI a) FLUSSO ACCELERATO CIOÈ

$\frac{dU_e}{dx} > 0$ $\quad \frac{dp_e}{dx} < 0$ E QUINDI

$$\begin{cases} \ell(\lambda) = 0{,}22 + 1{,}57\lambda - 1{,}8\lambda^2 \\ H(\lambda) = 2{,}61 - 3{,}75\lambda + 5{,}24\lambda^2 \end{cases}$$

b) CASO DI FLUSSO DECELERATO

$\frac{dU_e}{dx} < 0$ $\quad \frac{dp_e}{dx} > 0$ E QUINDI

$$\begin{cases} \ell(\lambda) = 0{,}22 + 1{,}402\lambda + \dfrac{0{,}018\lambda}{0{,}107+\lambda} \\ H(\lambda) = 2{,}088 + \dfrac{0{,}0731}{0{,}14+\lambda} \end{cases}$$

SE IL FLUSSO NON È ACCELERATO SI ARRIVA ALLA SOLUZIONE DI BLASIUS.

AVENDO SUPPOSTO U_e NOTA SI POSSONO CALCOLARE

$$\left(\theta, \frac{dU_e}{dx}\right) \Rightarrow \lambda \Rightarrow \begin{cases} \ell = \frac{1}{2} C_f Re_\theta \Rightarrow C_f \\ H = \dfrac{\delta^*}{\theta} \Rightarrow \delta^* \end{cases}$$

QUANDO LO STRATO LIMITE SUBISCE TRANSIZIONE IL METODO NON È PIÙ VALIDO

SE LO STRATO LIMITE SEPARA QUANDO È LAMINARE NON È PIÙ VALIDO IL MODELLO.

SPERIMENTALMENTE SI HA CHE

$$\upsilon_T = U_e \cdot 0{,}0306\,(H_1 - 3)^{-0{,}6169}$$

ALLORA

$$\frac{dU_e}{dx} = \frac{d}{dx}(U_e H_1 \Theta) = U_e \cdot 0{,}0306\,(H_1 - 3)^{-0{,}6169}$$

$$\begin{cases} H_1 = 3{,}3 + 0{,}8234\,(H - 1{,}1)^{-1{,}287} & \text{PER } H \leq 1{,}6 \\ H_1 = 3{,}3 + 1{,}5501\,(H - 0{,}6778)^{-3{,}064} & \text{PER } H > 1{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H = 1{,}1 + 0{,}8604\,(H_1 - 3{,}3)^{-0{,}777} & \text{PER } H_1 > 5{,}3 \\ H = 0{,}6778 + 1{,}1538\,(H_1 - 3{,}3)^{-0{,}3264} & \text{PER } H_1 \leq 5{,}3 \end{cases}$$

LEGGE DI LUDWIEG & TILLMANN

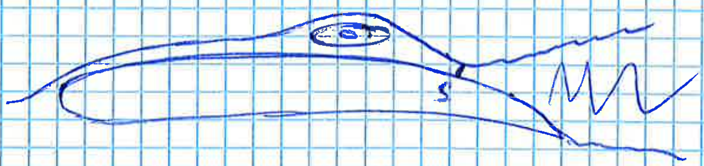
$$C_f = 0{,}246 \cdot 10^{-0{,}678 H}\, Re_\Theta^{-0{,}268} \qquad \text{CON } Re_\Theta = \frac{U\Theta}{\nu}$$

IN QUESTO CASO NON SI PUÒ INDIVIDUARE QUANDO LO STRATO LIMITE SI SEPARA. SI DEVE OSSERVARE IL PARAMETRO DI FORMA.

SE H CRESCE REPENTINAMENTE FINO A $H \cong 2{,}5 - 3$ È INDICE DI SEPARAZIONE TURBOLENTA.

SE H DIMINUISCE E POI CRESCE REPENT. FINO A $H \cong 2{,}5 - 3$ È INDICE DELLA POSSIBILE PRESENZA DI UNA BOLLA DI SEPARAZIONE.

SI DEVE CONTROLLARE IL VALORE DEL PARAMETRO DI FORMA



$$\begin{cases} \underbrace{\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}}_{=0} + \underbrace{\vec{v}\cdot\cancel{\nabla}\rho}_{=0} + \rho(\nabla\cdot\vec{v}) = 0 \implies \nabla\cdot\vec{v} = 0 \\ \underbrace{\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}}_{=0} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \\ \underbrace{\cancel{\frac{\partial E}{\partial t}}}_{=0} + \vec{v}\cdot\nabla E = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(p\vec{v}) \end{cases}$$

SI POSSONO RISOLVERE SEPARATAMENTE

SE SI CONSIDERA UN CASO INCOMPRIMIBILE E STAZIONARIO

$$\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \implies p + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{COST}$$ SU UNA LINEA DI CORRENTE

SE SI CONSIDERA UN CASO STAZIONARIO, INCOMPRIMIBILE E IRROTAZIONALE:

$\vec{\omega} = 0 = \nabla\wedge\vec{v}$ ALLORA:

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{v} = 0 \\ \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \\ \nabla\wedge\vec{v} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = \text{COST} \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

RISCRIVENDO IN TERMINI DI C_p

$$p - p_\infty = \frac{1}{2}\rho(V_\infty^2 - V^2) \qquad C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}$$

ALLORA

$$C_p = \frac{\frac{1}{2}\rho(V_\infty^2 - V^2)}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}$$ ALLORA $C_p = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}$ (BERNOULLI)

NEL CASO DI FLUIDO INCOMPRIMIBILE E IRROTAZIONALE

$\nabla\cdot\vec{v} = 0$

$\nabla\wedge\vec{v} = 0$ ESISTE Φ FUNZIONE POTENZIALE TALE CHE $\vec{v} = \nabla\Phi$

ALLORA

$$\nabla\cdot\vec{v} = \nabla\cdot(\nabla\Phi) = \nabla^2\Phi = 0$$ EQ. DI LAPLACE (LINEARE)

$$\nabla\wedge\vec{v} = \nabla\wedge(\nabla\Phi) = 0$$

ALLORA $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$

QUINDI

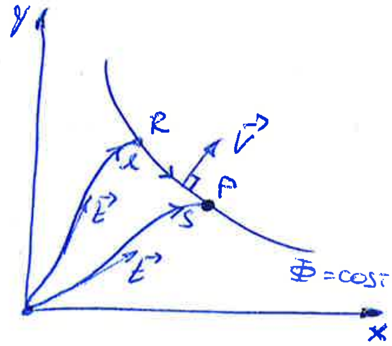
$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$$

$$\oint_{s-e} (\vec{V}\cdot\vec{t})\,ds = \int_{\sigma} (\nabla\wedge\vec{V})\cdot\bar{m}\,d\sigma = 0$$

PER STOKES

LINEA A Φ = COST. EQUIPOTENZIALE

$$\Phi_P = \int_{O,s}^{P} (\vec{V}\cdot\vec{t})\,ds = \int_{O,\ell}^{R} (\vec{V}\cdot\vec{t})\,ds + \int_{R}^{P} (\vec{V}\cdot\vec{t})\,ds$$



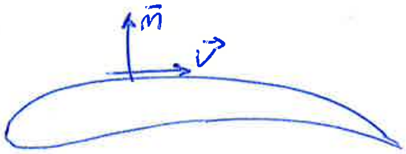
ALLORA

$$\int_{R}^{P} (\vec{V}\cdot\vec{t})\,ds = 0 \Rightarrow \vec{V}\cdot\vec{t} = 0$$

QUINDI $\vec{V} \perp$ ALLA LINEA.

SE CONSIDERIAMO IL PROFILO ALARE VUOL DIRE CHE $\vec{V}$ È SEMPRE TANGENTE ALLA PARETE.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m} = 0$$



$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ p + \dfrac{1}{2}\rho V^2 = p_\infty + \dfrac{1}{2}\rho V_\infty^2 = \text{COST} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

SUPPONIAMO NOTE p_∞ E $V_\infty \Rightarrow p^0$

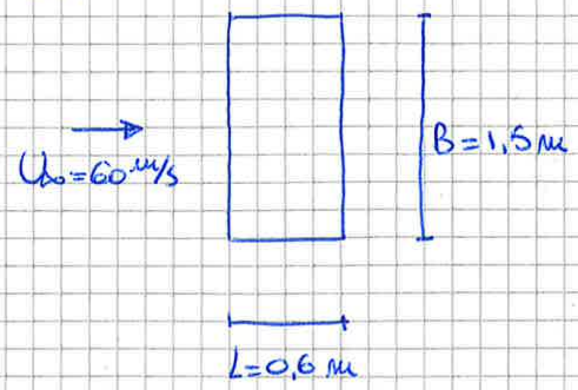
$u, v \Rightarrow V = \sqrt{u^2+v^2}$

p

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$V = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2}$$

LAMINA PIANA LAMBITA SU ENTRAMBE LE FACCE



a) D_{TR} TRANS. NATURALE

b) $D_{TR\ RIT.}$ TRANS. RITARDATA FINO AL 70% LUNGH. TOTALE

$$Re_L = \frac{\rho U_\infty L}{\mu} = 2476137$$

a) $$C_{D\,TR} = \frac{0{,}074}{Re^{1/5}} - \frac{1472}{Re_L} = 3{,}19 \cdot 10^{-3}$$

b) $$C_{D\,TRANS\,RIT.} = \frac{0{,}074}{Re^{1/5}} - 0{,}7\left[\frac{0{,}074}{(0{,}7 Re_L)^{1/5}} - \frac{1{,}328}{(0{,}7 Re_L)^{1/2}}\right] = 1{,}67 \cdot 10^{-3}$$

$$D_{TRANS} = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\, 2BL\, C_{D\,TR} = 12{,}66\ N$$

$$D_{TRANS.\,RIT.} = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\, 2BL\, C_{D\,TRANS\,RIT} = 6{,}64\ N$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 202

2 LAMINE PIANE ADIABATICHE DI UGUALI DIMENSIONI INVESTITE DALLA STESSA CORRENTE A $M_\infty = 6$

$Re_L = 10^5$ LAMINA 1 SL TUTTO LAMINARE

LAMINA 2 SL TUTTO TURBOLENTO (FORZATA)

? $\frac{D_{TURB}}{D_{LAM}}$

$C_\infty = \sqrt{\gamma R^* T_\infty} = 340{,}17 \, m/s \Rightarrow U_\infty = M_\infty C_\infty = 2041{,}04 \, m/s$

$$C_{D\,INC.} = \frac{0{,}0295}{(Re_L)^{1/7}} = 5{,}69 \cdot 10^{-3}$$

NEL CASO DI SL TUTTO LAMINARE

LAMINA ADIABATICA $\Rightarrow T_p = T_\infty$ $\quad R = Pr^{1/2} = 0{,}8426$

$$T_{REC} = T_\infty \left(1 + R \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) = 288\left(1 + 0{,}8426 \frac{0{,}4}{2} 6^2\right) = 2035{,}25 \, K$$

$$x_\ell = \left(\underbrace{\frac{T_p + \cancel{T_\infty}}{\cancel{2}T_\infty}}_{=1} + R \frac{\gamma-1}{2} \frac{M_\infty^2}{4}\right)^{-0{,}125} =$$

NO!

$T_p = T_{REC}$ PERCHÉ ADIABATICA

$$x_\ell = \left(1 + R \frac{\gamma-1}{2} \frac{3M_\infty^2}{4}\right)^{-0{,}125} = 0{,}7451$$

$$C_{D\,COMPR\,LAM} = C_{D\,INC} \cdot x_\ell = 4{,}44 \cdot 10^{-3}$$

NEL CASO DI SL TUTTO TURBOLENTO

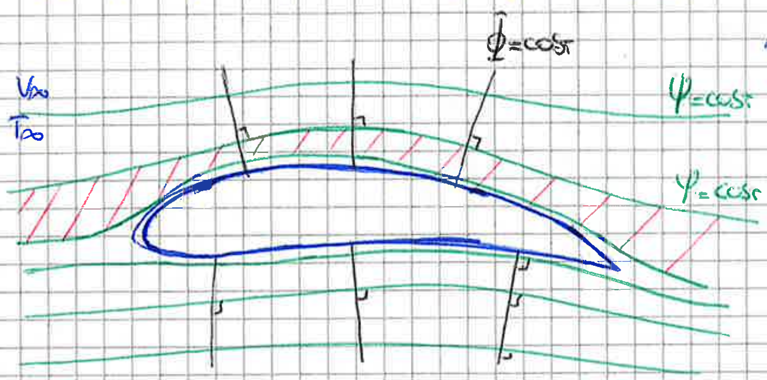
$T_{REC} = T_\infty \left(1 + R \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right) = 2137{,}88 \, K$ $\quad R = Pr^{1/3} = 0{,}8921$

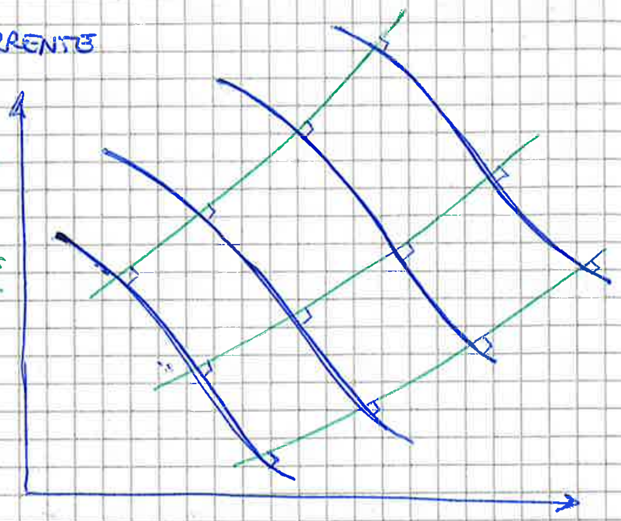
$$x_t = \left(1 + R \frac{\gamma-1}{2} \frac{3}{4} M_\infty^2\right)^{0{,}65} = 437{,}09$$

$$C_{D\,COMPR\,TURB} = C_{D\,INC.} \cdot x_t = 2{,}60$$

$$\frac{D_{TURB}}{D_{LAM}} = \frac{C_{D\,COMPR\,TURB}}{C_{D\,COMPR.\,LAM.}} = \frac{2{,}60}{4{,}44 \cdot 10^{-3}} = 586{,}72$$

LE LINEE A $\psi = cost$ SONO LINEE DI CORRENTE





SUL DORSO SI ADDENSANO LE LINEE DI CORRENTE: QUINDI V AUMENTA E PER BERNOULLI

LINEE A $\psi = cost \rightarrow \vec{V}$

LINEE A $\Phi = cost \perp \vec{V}$

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = cost$$

p DIMINUISCE

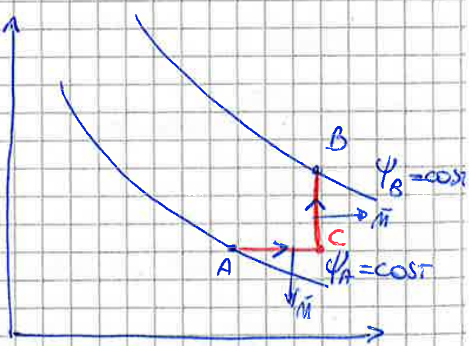
ANCHE LA PARETE DEL PROFILO È UNA LINEA A $\psi = cost$. CONSIDERANDO 2 LINEE DI CORRENTE SI INDIVIDUA IL TUBO DI FLUSSO. LA PORTATA CHE ATTRAVERSA IL TUBO DI FLUSSO È PARI ALLA DIFFERENZA TRA ψ_2 E ψ_1

LEGAME TRA $\vec{V}$ E ψ

$$\psi_B = \psi_A + d\psi$$

IL TUBO DI FLUSSO È

$$d\psi = \psi_B - \psi_A$$



VALUTO $d\psi = (\vec{V} \cdot \vec{n})ds = -v\,dx + u\,dy$

HA $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy$

ALLORA $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ $\quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

VERIFICANDO QUESTE RELAZIONI SI HA:

$$\nabla \wedge \vec{V} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0$$

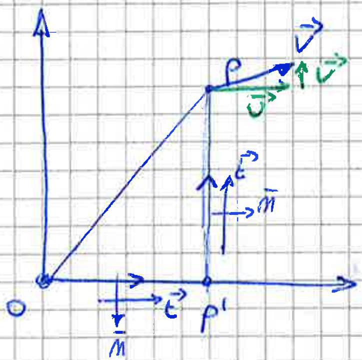
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \psi = 0$$

SOLUZIONE EQUAZIONE DI LAPLACE PER CAMPI SEMPLICI PIANI

TEOREMA DI KUTTA-JOUKOWSKI

CORRENTE UNIFORME

VALUTO ψ



$$\psi_P = \int_O^P (\vec{V}\cdot\bar{n})\,ds =$$

$$= \int_O^{P'} (\vec{V}\cdot\bar{n})\,ds + \int_{P'}^{P} (\vec{V}\cdot\bar{n})\,d =$$

$$= -\int_O^{x} v\,dx + \int_O^{y} u\,dy = -vx + uy$$

$$\psi_P = -vx + uy$$

$$\Phi_P = \int_O^{P'} (\vec{V}\cdot\vec{t})\,ds + \int_{P'}^{P} (\vec{V}\cdot\vec{t})\,ds = \int_O^{x} u\,dx + \int_O^{y} v\,dy = ux + vy$$

$$\Phi = ux + vy$$

$u = V_\infty$

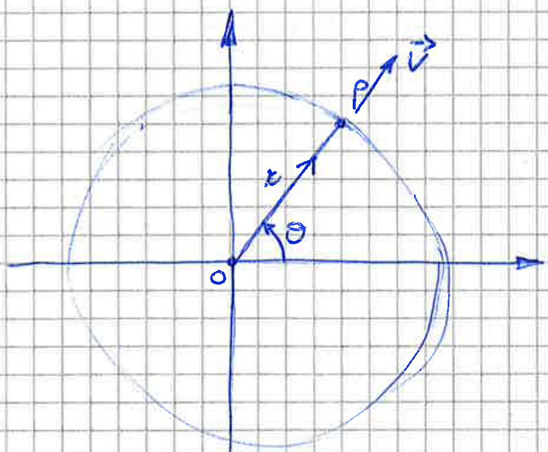
$v = 0$

PER UNA CORRENTE UNIFORME

$$\psi = V_\infty y$$

$$\Phi = V_\infty x$$

SORGENTE / POZZO



$Q > 0$ PER SORGENTE

$Q < 0$ PER POZZO

$$\begin{cases} V_r = \vec{V} \\ V_t = 0 \end{cases}$$

ALLORA $Q = 2\pi r V$

$$Q = \oint_{circ.} (\vec{V}\cdot\bar{n})\,ds = \oint_{circ.} V_r\, d\theta = V_r \oint_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r V$$

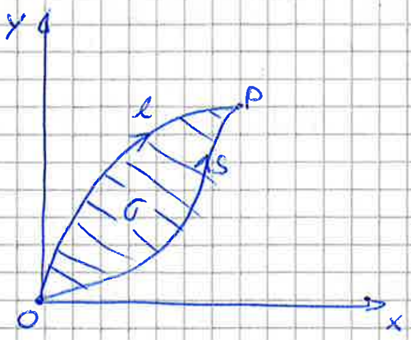
QUINDI

$$V = \frac{Q}{2\pi r}$$

$r \to 0 \;,\; V \to \infty$

$r \to \infty \;,\; V \to 0$

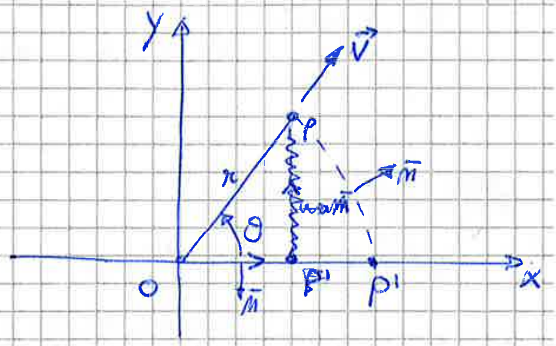
$$Q = \oint_{S-\ell} (\vec{V}\cdot\vec{n})\, ds = \int_{\sigma} (\nabla\cdot\vec{V})\, d\sigma = 0$$



SE CONSIDERO UNA LINEA CHIUSA CHE CONCATENA L'ORIGINE

$$Q = \oint_{circ} (\vec{V}\cdot\vec{n})\, ds = \int_{\sigma} (\nabla\cdot\vec{V})\, d\sigma \neq 0$$

VALUTO L'ESPRESSIONE DI ψ



$$\psi = \int_0^P (\vec{V}\cdot\vec{n})\, ds$$ MA O È PUNTO DI SINGOLARITÀ.

ALLORA SI PUÒ SCRIVERE

$$\psi_P = \int_0^{P'} \underbrace{\cancel{(\vec{V}\cdot\vec{n})}}_{=0} ds + \int_{P'}^{P} (\vec{V}\cdot\vec{n})\, ds = \int_{P'}^{P} V\, ds =$$

$$= \int_{P'}^{P} V r\, d\theta = \int_{P'}^{P} \frac{Q}{2\pi r} r\, d\theta = \frac{Q}{2\pi}\int_0^{\theta} d\theta = \frac{Q}{2\pi}\theta$$

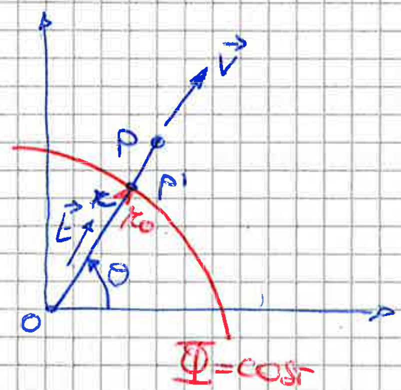
QUINDI $\nabla^2\psi = 0 \Rightarrow \psi = \frac{Q}{2\pi}\theta$ CON θ TRA 0 E 2π

POICHÉ

$$\begin{cases} V_r = \cancel{\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}}\ \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{Q}{2\pi r} \\ V_T = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

VALUTO L'ESPRESSIONE DI Φ

$$\Phi_P = \int_0^P (\vec{V}\cdot\vec{t})\, ds$$



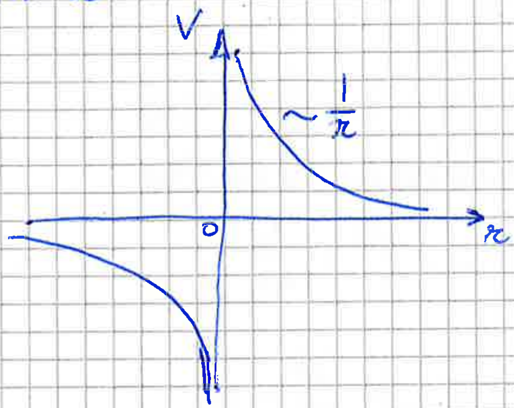
CONSIDERO UNA LINEA A Φ=COST E PONGO LÌ IL POTENZIALE A ZERO. ALLORA

$$\Phi_P = \int_0^{P'} \underbrace{\cancel{(\vec{V}\cdot\vec{t})}}_{=0} ds + \int_{P'}^{P} (\vec{V}\cdot\vec{t})\, ds =$$

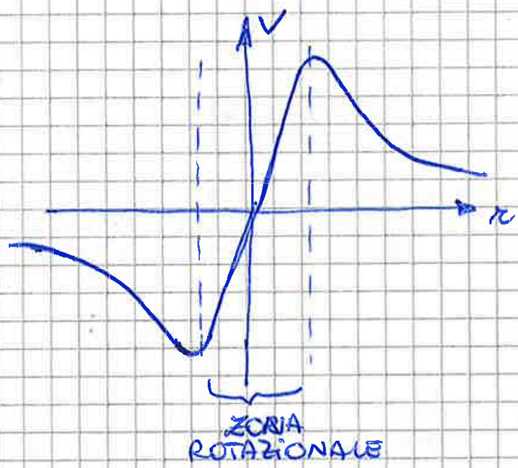
POTENZIALE DI P A Φ=COST

QUESTO SIGNIFICA CHE LE PARTICELLE FLUIDE SI MUOVONO LUNGO UNA TRAIETTORIA CIRCOLARE MA NON RUOTANO INTORNO AL LORO ASSE.

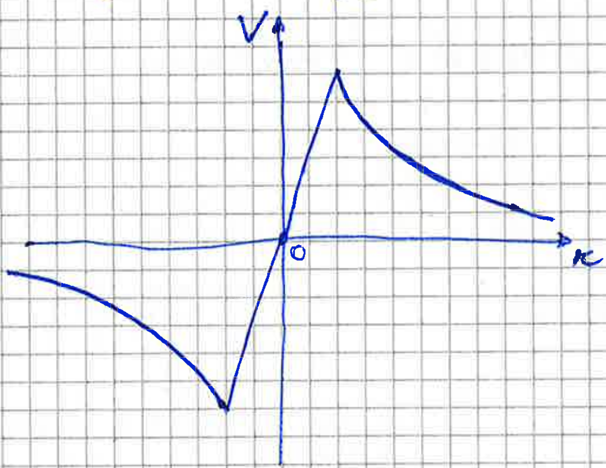
QUINDI PER IL VORTICE IRROTAZIONALE



NELLA REALTÀ I VORTICI HANNO UN CUORE



VORTICE DI RANKINE



IL VORTICE DI RANKINE È PIÙ VICINO AL CASO IRROTAZIONALE