



Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2175A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Mascolo Luigi

MATERIA: Aeroelasticità - Prof. Carrera

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

POLITECNICO DI TORINO

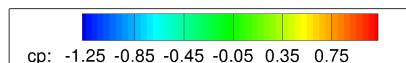
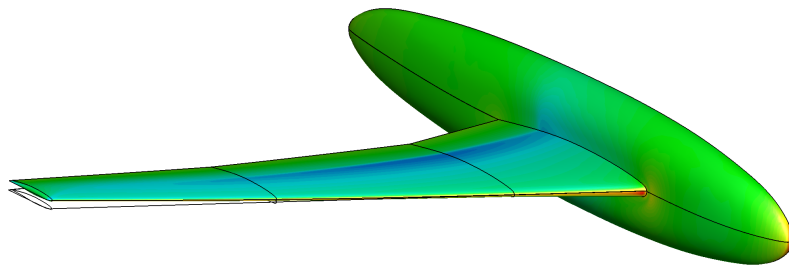
LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE E ASTRONAUTICA

CORSO DI AEROELASTICITÀ

PROF. ERASMO CARRERA



Teoria ed Esercitazioni



A.A. 2016/2017

LUIGI MASCOLO
221832

II	TEORIA - AERODINAMICA NON STAZIONARIA	57
1	Introduzione	58
1.1	Equazioni del moto	58
1.1.1	Equazione di bilancio della massa	58
1.1.2	Equazione di bilancio della quantità di moto	58
1.1.3	Equazione di bilancio dell'energia	60
1.2	Equazione di Crocco	61
1.3	Equazione di Bernoulli	63
1.4	Equazione del potenziale	65
1.5	Equazione del c_p	67
1.6	Linearizzazione	69
1.6.1	Equazione del potenziale linearizzata	69
1.6.2	Equazione del potenziale linearizzata in forma compatta	72
1.6.3	Equazione del c_p linearizzata	73
2	Metodi di risoluzione analitica	78
2.1	Metodo delle differenze finite	78
2.2	Metodo delle singolarità virtuali	79
2.2.1	Distribuzione di sorgenti lungo una linea	81
2.3	Metodo della funzione di Green	82
2.4	Metodo dei pannelli	84
2.4.1	Metodo di Hess-Smith	84
2.4.2	Metodo di Morino - caso stazionario	88
2.4.3	Metodo di Morino - caso instazionario	94
2.5	Metodo delle superfici portanti	103
2.5.1	Schema di Weissinger	103
2.5.2	Vortex Lattice Method - VLM	106
2.5.3	Piston Theory	108
III	ESERCITAZIONI	109
1	Esercitazione 1	111
1.1	Es. 1 - Bending static	111
1.2	Es. 2 - Bending modes	115
1.3	Es. 3 - Torsional modes	120
2	Esercitazione 2	126
2.1	Es. 1 - Divergence analysis with 1 DOF	126
2.2	Es. 2 - Divergence analysis with 2 DOF	130
3	Esercitazione 3	135
4	Esercitazione 4	145
4.1	Es. 1 - Spostamento verticale ad un estremo	145
4.2	Es. 2 - Angolo di torsione	153
4.3	Es. 3 - Trave a parete sottile	158

2.4	Doppietta μ	80
2.5	Vortice Γ	80
2.6	Vorticità di scia $\bar{\gamma}$	81
2.7	Corpo σ nel dominio Ω	82
2.8	Caso bidimensionale	84
2.9	N pannelli, $N q_i, \gamma$	85
2.10	Condizione di tangenza	85
2.11	Circuitazione Γ	88
2.12	Scia	91
2.13	Sovrapposizione	94
2.14	Due fronti d'onda - $M_\infty > 1$	99
2.15	Vortici a staffa	103
2.16	Discretizzazione a pannelli	103
2.17	Velocità indotte	104
2.18	VLM	106
1.1	Trave a sezione rettangolare piena (sx) e cava (dx)	111
1.2	Diagramma di corpo libero - trave cantilever	111
2.1	Profilo aerodinamico ad un DOF	126
2.2	Profilo aerodinamico a due DOF	130
3.1	Profilo alare finito (sx) e modello di trave equivalente (dx)	135
3.2	Andamento di $\vartheta(y)$ e $L'(y)$ al variare di U e per $x_0 = 0.5c$	142
3.3	Andamento di $\vartheta(y)$ e $L'(y)$ al variare di U e per $x_0 = 0.3c$	143
3.4	Confronto sull'andamento di ϑ_{tip} al variare di U nei due casi $x_0 = \{0.5c, 0.3c\}$	143
4.1	Trave cantilever caricata da carico puntiforme F_z nell'estremo libero	145
4.2	Calcolo di ϑ	154
4.3	Trave a parete sottile	158
4.4	Rappresentazione dei carichi e dei punti d'analisi	160
4.5	Deformazione in $z = \frac{h}{2}$ con ingrandimento x100	162
4.6	Dettaglio spigolo (sx, $x = 0$, $y = L$, $z = \frac{h}{2}$), centro trave (dx, $x = \frac{b}{2}$, $y = L$, $z = \frac{h}{2}$)	163
5.1	Trave cantilever	164
5.2	Calcolo di ϑ	166
5.3	$\vartheta = f(\vartheta_{mat})$ per $\Lambda = 0^\circ$ (sx) e $\Lambda = -5^\circ$ (dx)	170
5.4	Confronto $\vartheta = f(\vartheta_{mat})$ per $\Lambda = 0^\circ$ e $\Lambda = -5^\circ$	170
5.5	Sezione di semiala a tre celle	171
5.6	$u_z = f(V_\infty)$ per SOL 144 (sx) e SOL 102 (dx)	173
5.7	Confronto $u_z = f(V_\infty)$ per SOL 144 e SOL 102	173
6.1	Sezione alare e modellizzazione a trave a sbalzo	174
6.2	$U_D = f(\vartheta_{mat})$ per $\Lambda = 0^\circ$ (sx) e $\Lambda = -5^\circ$ (dx)	178
6.3	Confronto $\vartheta = f(\vartheta_{mat})$ per $\Lambda = 0^\circ$ e $\Lambda = -5^\circ$	178
7.1	Sezione tipica	179
8.1	Trave a sbalzo a sezione piena	207
8.2	Modo 1 - EULE 5 B4, 10 B4, 20 B4, 40 B4	209

8.52	Modo 8 (Deformazione x100) - Sweep $\Lambda = \{-20^\circ, 0^\circ, 20^\circ\}$	227
8.53	Modo 9 (Deformazione x100) - Sweep $\Lambda = \{-20^\circ, 0^\circ, 20^\circ\}$	227
8.54	Modo 10 (Deformazione x100) - Sweep $\Lambda = \{-20^\circ, 0^\circ, 20^\circ\}$	227
9.1	Trave a sbalzo a sezione piena	229
9.2	Modo 1, 2, 3, 4	231
9.3	Andamento $\Re(p)=\Gamma$, smorzamento, e $\Im(p)=\Omega$, frequenza, in funzione di U . . .	232
9.4	Modo 1, 2, 3, 4 - $\vartheta = 0^\circ$, mesh aerodinamica 6×20 , materiale ortotropo	237
9.5	$\Re(p)=\Gamma$ e $\Im(p)=\Omega$ vs $U - \vartheta = 0^\circ$, mesh aerodinamica 6×20 , materiale ortotropo	238
9.6	Modo torsionale di flutter $\vartheta = \{-90^\circ, -60^\circ, -30^\circ, 0^\circ, 90^\circ\}$, materiale ortotropo . . .	239
9.7	Modo torsionale di flutter $\Lambda = \{-5^\circ, -2.5^\circ, 0^\circ, 2.5^\circ, 5^\circ\}$, materiale ortotropo . . .	241
9.8	$\Re(p)=\Gamma$ e $\Im(p)=\Omega$ vs U - mesh aerodinamica 6×20 , isotropo, $\Lambda = 5^\circ$	241

List of Tables

3.1	Modi e caratteristiche di stabilità in funzione di Γ_k e Ω_k	33
5.1	Spostamento verticale in funzione della mesh aerodinamica	165
5.2	Angolo di torsione ϑ in funzione del modello teorico risolutivo	167
5.3	Angolo di torsione ϑ in funzione dello sweep Λ	168
5.4	Angolo di torsione ϑ in funzione del modello teorico risolutivo con $\Lambda = -10^\circ$	168
5.5	Torsione ϑ in funzione della laminazione $\vartheta_{mat} - \Lambda = 0^\circ$	169
5.6	Torsione ϑ in funzione della laminazione $\vartheta_{mat} - \Lambda = -5^\circ$	169
5.7	$u_z = f(V_\infty)$ al bordo d'attacco - SOL 144 vs SOL 102	172
6.1	$U_D = f(N_{AP})$ - divergenza al variare della mesh aerodinamica	175
6.2	Velocità di divergenza al variare della modello teorico	176
6.3	Velocità di divergenza U_D in funzione della laminazione $\vartheta_{mat} - \Lambda = 0^\circ$	177
6.4	Velocità di divergenza U_D in funzione della laminazione $\vartheta_{mat} - \Lambda = -5^\circ$	177
7.1	Condizioni del moto e della stabilità in funzione di $\Gamma = \Re(p)$ e $\Omega = \Im(p)$	191
7.2	Riassunto - Esercizio 4 - Punto 1	191
7.3	Confronto esercizio 4.2 - 5.1	203
7.4	Confronto esercizio 4.3 - 5.2	204
7.5	Confronto esercizio 4.4 - 5.3	206
8.1	Modi vibrazionali - EULE - materiale isotropo	211
8.2	Confronto modi vibrazionali - frequenze	211
8.3	Confronto frequenze vibrazionali fra modello analitico e modello FEM 5 B4	211
8.4	Modi vibrazionali - Confronto fra i modelli teorici	214
8.5	Confronto modi vibrazionali - frequenze	215
8.6	Modi vibrazionali - Trave a sbalzo a parete sottile	219
8.7	Confronto modi vibrazionali - frequenze	219
8.8	Modi vibrazionali - Trave a sbalzo a parete sottile vs Laminazione	224
8.9	Confronto modi vibrazionali - frequenze	224
8.10	Modi vibrazionali - Trave a parete sottile vs angolo di sweep Λ	227
8.11	Confronto modi vibrazionali - frequenze	228
9.1	Modi vibrazionali - EDTN $N = 4$ trave a sbalzo a sezione piena	231
9.2	Velocità U_F e frequenza ω_F di flutter - confronto modelli teorici	234
9.3	Velocità U_F e frequenza ω_F di flutter - confronto mesh aerodinamiche	235
9.4	Modi vibrazionali - $\vartheta = 0^\circ$, mesh aerodinamica 6×20 , materiale ortotropo	237
9.5	Flutter al variare della laminazione ϑ , mesh aerodinamica 6×20 , materiale ortotropo	239
9.6	Flutter al variare dello sweep Λ , mesh aerodinamica 6×20 , materiale isotropo	241

Part I

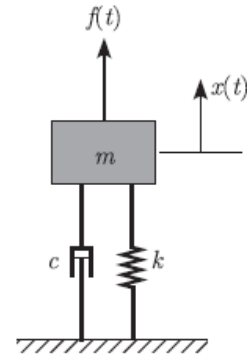
TEORIA - AEROELASTICITÀ

INTRODUZIONE

Vengono brevemente richiamate le equazioni della dinamica in un modello massa-molla-smorzatore. Tale sistema è ad un singolo grado di libertà e, per quanto i fenomeni reali siano a tutti gli effetti tridimensionali, la riduzione ad un sistema equivalente di questo tipo ad 1 DOF fornisce accurate approssimazioni.

Esista una massa m collegata ad una molla di rigidezza k e ad uno smorzatore di smorzamento c , posizionati in parallelo e vincolati all'altro estremo ad una superficie fissa. Esista inoltre una forzante $f(t)$. L'equazione di governo è

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{1.1}$$



In generale, nel caso aeronautico, i carichi, i componenti Figura 1.2: Sistema $m-k-c$ smorzanti e quelli assoggettabili a molle non sono concentrati in punti ma sono distribuiti lungo le superfici, ad esempio quella alare. Pertanto la (1.1) deve tramutarsi in un problema alle derivate parziali in cui la soluzione non può essere esatta: pertanto si ricorre a metodi approssimativi di discretizzazione, come ad esempio la FEM (*Finite Elements Method*), in cui si avrà

$$[M] \{\ddot{q}\} + [D] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\} \tag{1.2}$$

con M , $[D]$ e $[K]$, rispettivamente, matrice di massa, smorzamento e rigidezza.

Si suppone che esistano due casi differenti di soluzioni delle (1.1, 1.2), a seconda della situazione. Oltre al fatto che la risposta può essere oscillatoria, lineare o di altre forme, sicuramente di interesse è il fatto che questa possa essere stabile o instabile. Come si nota in Figura (1.3) una soluzione stabile tenderà a smorzare il moto oscillatorio nel tempo, mentre l'instabile lo accentuerà.

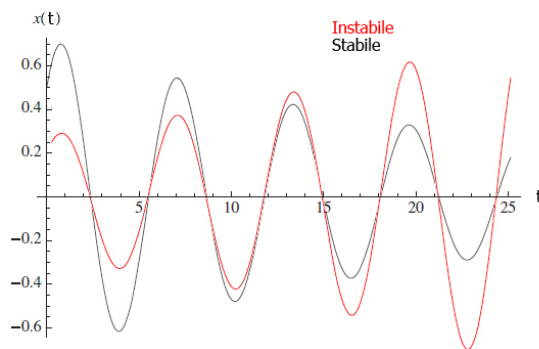


Figura 1.3: Risposte del sistema

Si può aggiungere che le $F_a(t)$ sono forze aerodinamiche del tipo $f_a(t) = f_a(\ddot{x}, \dot{x}, x)$, relate alla rigidezza aerodinamica k_a , allo smorzamento aerodinamico c_a e all'inerzia aerodinamica $m_a\ddot{x}$. Trascurando le forze statiche e derivanti da fenomeni termici, si può scrivere

$$F_a = k_a x + c_a \dot{x} + m_a \ddot{x} \tag{1.3}$$

Le (1.1, 1.3) si influenzano mutuamente, e in particolare le forze aerodinamiche modificano le proprietà dinamiche del sistema. Chiamando $\overline{f(t)} = f(t) - F_a(t)$, si ha

$$(m - m_a) \ddot{x} + (c - c_a) \dot{x} + (k - k_a) x = \overline{f(t)} \tag{1.4}$$

$$([M] - [M_a]) \{\ddot{q}\} + ([D] - [D_a]) \{\dot{q}\} + ([K] - [K_a]) \{q\} = \{\overline{f(t)}\}$$

La soluzione $x(t)$ dipende dal tempo e dalle condizioni di volo, tra cui anche la V_∞ . Ciò che è di rilievo in questa analisi è difatti ricercare le velocità di divergenza e di flutter, rispettivamente V_D e v_F . Vengono brevemente anticipate di seguito.

2. Aeroelasticità statica

Lo studio dell'aeroelastica statica tratta i fenomeni associati fra l'interazione delle forze e carichi aerodinamici del flusso su una struttura, e la sua risultante deformazione elastica.

Ad esempio, l'effettiva portanza distribuita su una superficie è mutuamente relazionata e dipendente dalla deformazione elastica della spessa. Si analizza anche l'instabilità statica (*divergenza*) di una superficie portante: quando una superficie si deforma a tal punto da far aumentare il carico aerodinamico effettivo, questo deforma ulteriormente la struttura, instaurando un continuo aumento di carico con la potenziale rottura del componente.

In prima analisi si studia il comportamento di un profilo alare in galleria del vento, e si introduce la nozione di elasticità con una molla torsionale alla quale il profilo è collegato.

2.1 Superfici alari rigide su supporti flessibili

Esista un profilo alare bidimensionale e rigido come quello in Figura (2.1). Siano

- O , di ascissa x_0 , l'aggancio con la molla torsionale (centro di torsione o asse elastico);
- x_{ac} l'ascissa del centro aerodinamico;
- x_{cg} l'ascissa del centro di gravità;
- c la corda alare;
- $U = V_\infty$ velocità della corrente a monte;
- α_R l'angolo d'incidenza del profilo;
- ϑ l'angolo aerodinamico elastico;
- k la rigidezza della molla torsionale;
- M_{ac} il momento attorno ad ac .

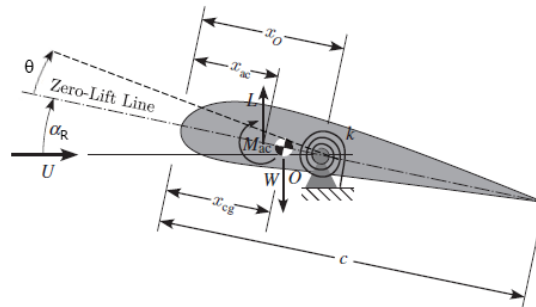


Figura 2.1: Sezione alare rigida su molla torsionale

Si suppone che l'angolo α_R sia piccolo e che, dunque, $M_{ac} \neq f(\alpha_R)$. Inoltre, già mancante in Figura (2.1), si suppone che la resistenza D sia trascurabile. Allora è possibile scrivere l'equazione di equilibrio alla rotazione attorno ad O come

$$M_{ac} + L(x_0 - x_{ac}) - W(x_0 - x_{cg}) - k\vartheta = 0 \quad \text{con } M_{ac} = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 SC_{M_{ac}}c = q_\infty SC_{M_{ac}}c \quad (2.1)$$

ϑ è la deformazione elastica ed è il componente che distingue la trattazione da caso rigido ad elastico. Se il supporto fosse unicamente rigido, l'angolo d'incidenza sarebbe semplicemente α_r : la presenza di un componente elastico crea un ulteriore contributo all'incidenza, ϑ , dipendente dalla rigidezza aerodinamica k_a . Per ricavare questo valore, è necessario in primo luogo descrivere la portanza nel caso rigido ed elastico, e pertanto

$$\begin{cases} L_r = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 SC_{L\alpha}\alpha_R \\ L_e = \underbrace{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 SC_{L\alpha}}_{q_\infty} (\alpha_R + \vartheta) = \underbrace{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 SC_{L\alpha}\alpha_R}_{L_r} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 SC_{L\alpha}\vartheta}_{\Delta L} \end{cases} \quad (2.2)$$

2.1. SUPERFICI ALARI RIGIDE SU SUPPORTI FLESSIBILI AEROLASTICITÀ STATICA

In maniera analoga si può ricavare il rapporto fra la portanza aggiuntiva ΔL , relazionata alla componente elastica, e la portanza nel caso rigido L_r . In tal caso

$$\frac{\Delta L}{L_r} = \frac{qSC_{L\alpha}\vartheta}{qSC_{L\alpha}\alpha_R} = \frac{\vartheta}{\alpha_R} = \frac{\frac{\alpha_R}{\frac{q_D}{q_\infty} - 1}}{\alpha_R} = \frac{1}{\frac{q_D}{q_\infty} - 1} = \frac{\frac{q_\infty}{q_D}}{1 - \frac{q_\infty}{q_D}} \tag{2.6}$$

Sia la (2.5) che la (2.6) divengono infinite per $q \rightarrow q_D$. Per valutare il loro comportamento, si pone ad esempio un velivolo avente $\alpha_R = 5^\circ$, $k = 8000 \text{ Nm}$, $S = 20\text{m}^2$, $C_{L\alpha} = 2\pi$, $x_0 = 0.5\text{m}$, $x_{ac} = 0.25\text{m}$, e si valuta l'andamento di ϑ e $\frac{\Delta L}{L_r}$ per $0.7q_D < q_\infty < q_D$.

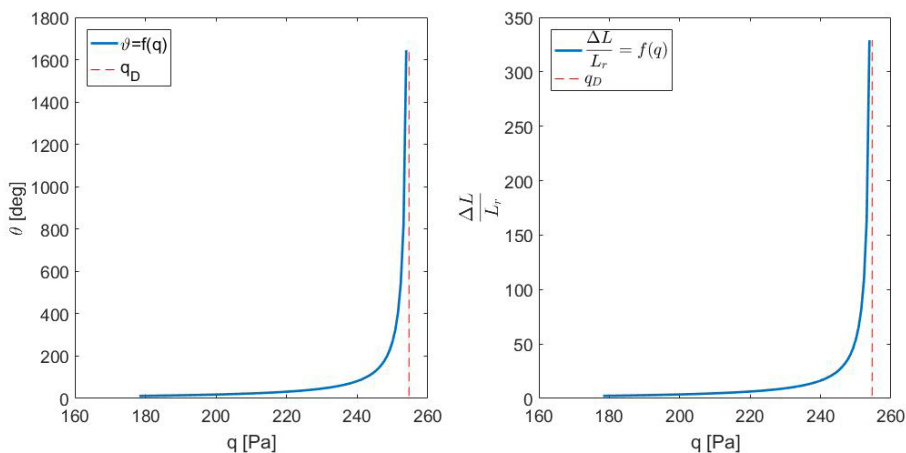


Figura 2.2: $\vartheta = f(q)$ (sx), $\frac{\Delta L}{L_r} = f(q)$ (dx)

Si precisa che entrambe le espressioni hanno dei limiti di validità. Difatti, la portanza non può aumentare infinitamente dato che sopraggiunge lo stallo, così come non esiste una tolleranza infinita alla deformazione strutturale: solitamente i componenti possono giungere a rottura ad una pressione dinamica e, quindi, ad un ϑ , inferiore alla q_D .

2.1.1 Inversione di comando in presenza di alettone

Il fenomeno dell'inversione di comando avviene quando l'alettone perde la sua efficacia e reagisce in maniera opposta a quella che ci si aspetterebbe a causa di una eccessiva deformazione strutturale dell'ala. Il profilo alare mostrato in Figura (2.3) è del tutto analogo a quello in Figura (2.1), ad eccezione del fatto che il centro di gravità coincide con l'asse elastico, e cioè $x_{cg} = x_0$. In questo caso l'equilibrio alla rotazione attorno ad O si configura come

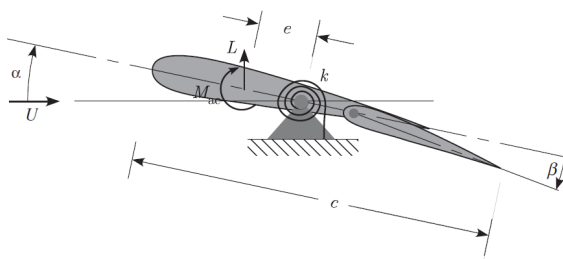


Figura 2.3: Profilo alare con alettone

$$M_{ac} + Le - k\vartheta = 0 \implies qSC_{M_{ac}}c + eqSC_L - k\vartheta = 0 \tag{2.7}$$

L'angolo β indica la deflessione dell'alettone, positivo per rotazioni orarie. Sia il profilo simmetrico, affinché $C_{M0} = 0$: allora si possono riscrivere i C_L e C_M come

2.1. SUPERFICI ALARI RIGIDE SU SUPPORTI FLESSIBILI AEROLASTICITÀ STATICA

La (2.12) mostra un interessante comportamento dei due termini moltiplicati da β : il primo, $C_{L\beta} > 0$, componente puramente aerodinamico, porta ad un incremento di portanza per $\beta > 0$; il secondo all'interno della parentesi tonda è, invece, aeroelastico. Poichè $C_{M\beta} < 0$, in quanto il momento è picchiante per $\beta > 0$ e $C_{L\alpha} > 0$, il termine è negativo, e pertanto questa componente tende a far diminuire la portanza per $\beta > 0$. Questi due effetti sono in disaccordo: a basse velocità il termine aerodinamico pesa maggiormente rispetto a quello aeroelastico, e pertanto la portanza cresce con $\beta > 0$: per $q \rightarrow q_D$, il termine aeroelastico supera di gran lunga quello aerodinamico.

La pressione dinamica alla quale avviene questo fenomeno è detta pressione dinamica di reversione q_R ed è trovata annullando la derivata della portanza rispetto a β . Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 &= \frac{qsC_{L\beta} \left(1 + \frac{qSC_{L\alpha}C_{M\beta}c}{kC_{L\beta}} \right)}{1 - \frac{eqSC_{L\alpha}}{k}} \\ \mathcal{N} \left(\frac{\partial L}{\partial \beta} \right) = 0 &\implies 0 = qsC_{L\beta} \left(1 + \frac{qSC_{L\alpha}C_{M\beta}c}{kC_{L\beta}} \right) \\ &= kC_{L\beta} + qSC_{L\alpha}C_{M\beta}c \\ &\boxed{q_R = -\frac{kC_{L\beta}}{SC_{L\alpha}C_{M\beta}c}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Se $q_R > q_D$, non si presenterà il fenomeno dell'inversione dei comandi ma direttamente la divergenza: se ci si trova a $q_R < q < q_D$, una deflessione positiva dell'alettone $\beta > 0$ farà diminuire la portanza anzichè aumentarla.

Sostituendo la (2.13), a numeratore, e la (2.10), a denominatore, nella (2.12), si ha una formulazione più maneggevole di L

$$\boxed{L = \frac{qs \left[C_{L\alpha}\alpha_R + C_{L\beta} \left(1 - \frac{q}{q_R} \right) \beta \right]}{1 - \frac{q}{q_D}}} \tag{2.14}$$

Dalla (2.14) è ancor più chiaro il fenomeno dell'inversione dei comandi: per $q < q_R$, β è moltiplicato ad un coefficiente positivo e pertanto $\beta > 0 \implies \Delta L > 0$; per $q = q_R \forall \beta \Delta L = 0$; per $q > q_R$, β è moltiplicato ad un coefficiente negativo e $\beta > 0 \implies \Delta L < 0$.

In ultimo, si può valutare l'efficienza aeroelastica dell'alettone η confrontando la sua portanza nel caso aeroelastico con quella nel caso rigido. Facendo ciò

$$\eta = \frac{L}{L_r} = \frac{qs \left[C_{L\alpha}\alpha_R + C_{L\beta} \left(1 - \frac{q}{q_R} \right) \beta \right]}{qsC_{L\alpha}\alpha_R + qSC_{L\beta}\beta} = \frac{1 - \frac{q}{q_R}}{1 - \frac{q}{q_D}} \tag{2.15}$$

L'efficienza è positiva, e pertanto il profilo non incorre in problemi di controllo nè divergenza, fintanto che $q < q_D \leq q_R$ o $q < q_R \leq q_D$, a seconda di quale sia maggiore.

2.2 Superfici alari flessibili continue

Rispetto al caso discreto analizzato nella Sezione (2.1), ora si suppone che l'intera ala sia elasticamente deformabile.

Esista una superficie alare come in Figura (2.5), modellizzabile come una trave a sbalzo incernierata all'ascissa $y = 0$ e libera ad $y = l$. La posizione dell'asse y coincide con l'asse elastico, qui supposto rigido sul suo piano: con questa ipotesi, qualsiasi forza perpendicolare a quest'asse fornisce come risultato unicamente una deformazione sul piano, senza torsione, e pertanto il centro elastico ed il centro di torsione coincidono.

Siano L' la portanza per unità di lunghezza, M'_{ac} il momento per unità di lunghezza, W' il peso per unità di lunghezza, e $S = 1 \cdot c$ la superficie unitaria.

L'obiettivo è valutare la distribuzione di portanza lungo l'ala in funzione della eventuale deformazione a causa di una rotazione attorno l'asse di torsione.

Si suppone che l'ala sia assimilabile ad una trave isotropa, coerente con il modello di trave di Eulero-Bernoulli.

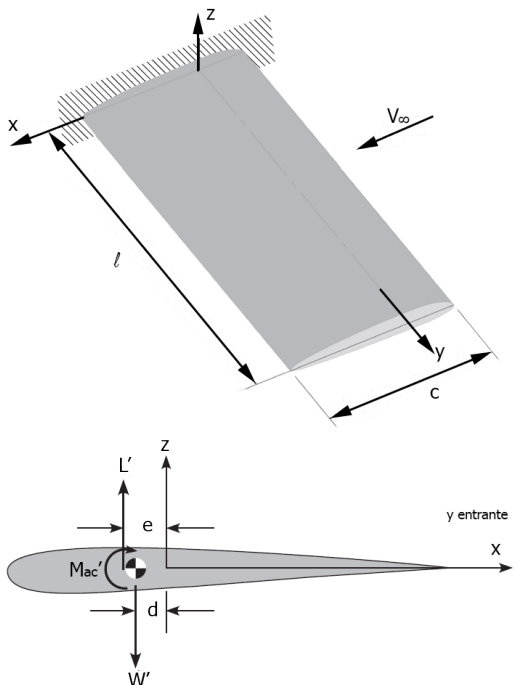


Figura 2.5: Ala flessibile uniforme non svergolata

Teoria della striscia

Tutti gli effetti aerodinamici tridimensionali associati ad ali ad allungamento finito, come i vortici d'estremità, sono trascurati. Pertanto, la distribuzione delle variabili d'interesse, come i carichi alari, è costante lungo la coordinate alare, cioè y .

È possibile valutare il momento complessivo attorno all'asse y per unità di lunghezza M'

$$M' = M'_{ac} + L'e - W'd \quad \text{con } W' = Nmg \quad (2.21)$$

dove N è il fattore di carico a contingenza ed m il peso elementare della sezione alare. Il momento e la portanza per unità di lunghezza sono esprimibili come segue

$$\begin{cases} L' = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c c_l = q c c_l & c_l(y) = a \alpha(y) = a [\alpha_R + \vartheta(y)] \\ M'_{ac} = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c^2 c_{Mac} = q c^2 c_{Mac} \end{cases} \quad (2.22)$$

si fa notare che i coefficienti di portanza e momento sono in minuscolo per distinguerli dal caso bidimensionale discreto. L'angolo di incidenza α è formato da un contributo rigido α_R e da una rotazione rigida della superficie $\vartheta(y)$, funzione della coordinata y : si ricorda che qualsiasi contributo di estremità, come l'effetto downwash, è trascurato nella teoria della striscia.

2.2. SUPERFICI ALARI FLESSIBILI CONTINUE

AEROLASTICITÀ STATICA

$$\frac{d^2\vartheta}{dy^2} + \lambda^2\vartheta = -\frac{\lambda^2}{qcae} (qc^2c_{Mac} + qcae\alpha_R - Nmgd) = -\lambda^2 (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) \tag{2.28}$$

La (2.28) è un'equazione differenziale ordinaria con soluzioni armoniche del tipo

$$\vartheta(y) = A \sin(\lambda y) + B \cos(\lambda y) - (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \vartheta(0) = 0 & B = \alpha_R + \bar{\alpha}_R \\ \frac{d\vartheta}{dy}(l) = 0 & A = B \tan(\lambda l) \end{cases} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned} \vartheta(y) &= B \tan(\lambda l) \sin(\lambda y) + B \cos(\lambda y) - (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) \\ &= (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) \tan(\lambda l) \sin(\lambda y) + (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) \cos(\lambda y) - (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) \\ \implies &\boxed{\vartheta(y) = (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) [\tan(\lambda l) \sin(\lambda y) + \cos(\lambda y) - 1]} \end{aligned} \tag{2.30}$$

La (2.30) descrive la risposta aeroelastica in forma chiusa, e si nota che essa dipende anche dalle condizioni di carico, contenute in $\bar{\alpha}_R$. Come fatto nel caso discreto, si analizza la condizione di singolarità, cioè la divergenza, per $\vartheta \rightarrow \infty$: questa condizione si verifica, dalla (2.30), quando $\lambda l \rightarrow \frac{n\pi}{2}$, con $n \in \mathbb{N}$. Allora dalla (2.27) si può ricavare q_D

$$\lambda^2 = \frac{qcae}{GJ} \implies q_D = \frac{GJ}{cae} \lambda^2 = \frac{GJ}{cae} \left(\frac{n\pi}{2l} \right)^2 \tag{2.31}$$

Dalla (2.31) si può ricavare un'ulteriore relazione

$$\begin{cases} q = q_D \implies \lambda l = \frac{n\pi}{2} \implies \frac{GJ}{cae} = q_D \frac{2l}{n\pi} \xrightarrow{(2.31)} \lambda = \sqrt{\frac{q}{q_D} \left(\frac{n\pi}{2l} \right)^2} \implies \lambda l = \frac{n\pi}{2} \sqrt{\frac{q}{q_D}} \\ \lambda = \sqrt{\frac{qcae}{GJ}} \end{cases} \tag{2.32}$$

Sostituendo la relazione (2.32) nella (2.30), con la notazione $\bar{q} = \frac{q}{q_D}$, si ottiene, per $y = l$,

$$\begin{aligned} \vartheta(l) = \vartheta_{tip} &= (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) \left[\tan\left(\frac{n\pi}{2}\sqrt{\bar{q}}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\sqrt{\bar{q}}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\sqrt{\bar{q}}\right) - 1 \right] \quad \tan x \sin x = \frac{\sin^2 x}{\cos x} \\ &= (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) \left[\underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\sqrt{\bar{q}}\right) + \cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\sqrt{\bar{q}}\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\sqrt{\bar{q}}\right)} - 1}_{\sec\left(\frac{n\pi}{2}\sqrt{\bar{q}}\right)} \right] = (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) \left[\sec\left(\frac{n\pi}{2}\sqrt{\bar{q}}\right) - 1 \right] \end{aligned} \tag{2.33}$$

L'andamento dell'angolo di deformazione elastica al tip alare ϑ_{tip} in funzione del rapporto delle pressioni dinamiche q e q_D è rappresentato in Figura (2.6). L'asintoto verticale ha rapporto unitario di pressioni, momento in cui si nota, dalla (2.33) che il termine fra parentesi tende nuovamente a $\frac{\pi}{2}$. Inoltre, $\bar{\alpha}_R$, dalla (2.27),

$$\bar{\alpha}_R = \frac{cc_{Mac}}{ae} - \frac{Nmgd}{qcae} \stackrel{(2.31)}{=} \frac{cc_{Mac}}{ae} - \frac{4l^2 Nmgd}{GJn^2\pi^2} \tag{2.34}$$

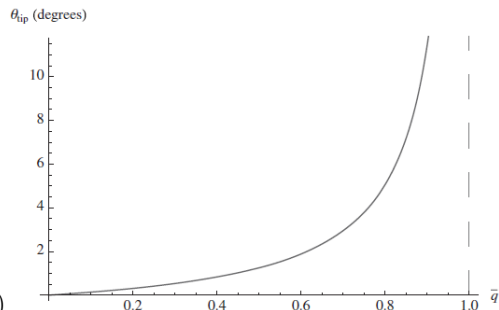


Figura 2.6: Angolo elastico $\vartheta = f(\bar{q})$

2.2. SUPERFICI ALARI FLESSIBILI CONTINUE

AEROLASTICITÀ STATICA

È possibile esplicitare ulteriormente la (2.36). Si nota che a numeratore è possibile sostituire la (2.31), e pertanto

$$N = \frac{2qcal^2 \left\{ ae\alpha_R + cc_{Mac} \left[1 - \frac{\lambda l}{\tan(\lambda l)} \right] \right\}}{ael \left\{ \frac{W\lambda l}{\tan(\lambda l)} + \frac{2mgdl}{e} \left[1 - \frac{\lambda l}{\tan(\lambda l)} \right] \right\}} \quad \text{con } qca = \frac{GJ\lambda^2}{e}$$

$$N = \frac{2GJ(\lambda)^2 \left\{ ae\alpha_R + cc_{Mac} \left[1 - \frac{\lambda l}{\tan(\lambda l)} \right] \right\}}{ael \left\{ \frac{We\lambda l}{\tan(\lambda l)} + 2mgdl \left[1 - \frac{\lambda l}{\tan(\lambda l)} \right] \right\}} \quad (2.37)$$

Analogamente, si ricava $\alpha_R = f(N)$,

$$Nael \left\{ \frac{We\lambda l}{\tan(\lambda l)} + 2mgdl \left[1 - \frac{\lambda l}{\tan(\lambda l)} \right] \right\} = 2GJ(\lambda)^2 ae\alpha_R + 2GJ(\lambda)^2 cc_{Mac} \left[1 - \frac{\lambda l}{\tan(\lambda l)} \right]$$

$$\alpha_R = \frac{Nael \left\{ \frac{We\lambda l}{\tan(\lambda l)} + 2mgdl \left[1 - \frac{\lambda l}{\tan(\lambda l)} \right] \right\} - 2GJ(\lambda)^2 cc_{Mac} \left[1 - \frac{\lambda l}{\tan(\lambda l)} \right]}{2GJ(\lambda)^2 ae}$$

$$\alpha_R = \frac{NWle}{2GJ\lambda l \tan(\lambda l)} + \left[1 - \frac{\lambda l}{\tan(\lambda l)} \right] \left[\frac{Nmg l^2 d}{GJ(\lambda)^2} - \frac{cc_{Mac}}{ae} \right] \quad (2.38)$$

Queste relazioni si rivelano utili per ricavare un certo N , fissato α_R o, viceversa, ricavare α_R per N fissato. Difatti vengono utilizzate, separatamente, per soddisfare le necessità di due studi differenti: il primo riguarda l'aerodinamica, in cui vengono posti come noti α_R e q e si ricavano la portanza totale L o, analogamente N ; il secondo è a livello strutturale, e implica di verificare la resistenza strutturale del velivolo e di creare un diagramma di involuppo $V-N$, e in questo caso si impongono N e q per ricavare α_R .

Quando è α_R ad essere specificato e costante (come, ad esempio, in volo uniforme o nei test in galleria del vento), allora la portanza, nel caso elastico, aumenta verso l'estremo alare rispetto al caso rigido, come si nota in Figura (2.7, sx). Quando, invece, N è fissato, la portanza totale nel caso rigido ed elastico è fissata ed è uguale: è allora necessario bilanciare l'aumento all'estremo con una riduzione alla radice, ad esempio per mezzo di un α_R ridotto con uno svergolamento o con dei vincoli strutturali, come si nota in Figura (2.7, dx).

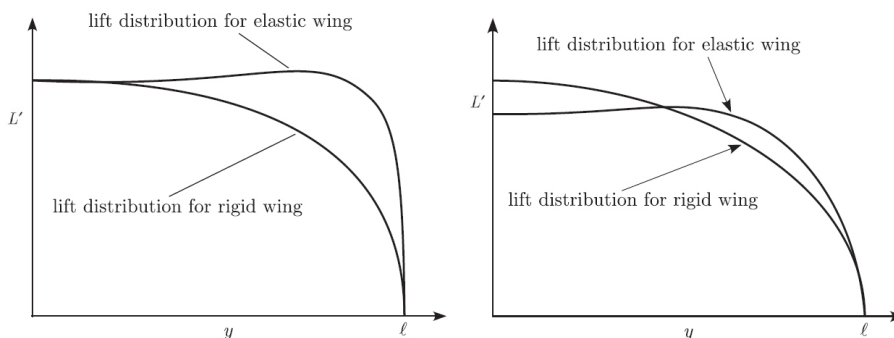


Figura 2.7: Andamento della L' per $\alpha_R = \text{cost}$ ($L_e > L_r$) (sx) e $N = \text{cost}$ ($L_e = L_r$) (dx)

Si precisa che i grafici in Figura (2.7) non sarebbero stati ottenibili per mezzo della sola teoria della striscia, la quale non contempla la diminuzione e il conseguentemente annullamento di portanza al tip alare a causa degli effetti tridimensionali.

2.2. SUPERFICI ALARI FLESSIBILI CONTINUE

AEROLASTICITÀ STATICA

Conoscendo l'andamento di ϑ si può computare la portanza complessiva della singola superficie alare integrando la portanza per unità di lunghezza. Allora

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^l L' dy \stackrel{(2.40)}{=} \int_0^l \{qca\vartheta + qcc_{l\beta}\beta\} dy \\
 &\stackrel{(2.43)}{=} \int_0^l \{qca\psi\beta [\tan(\lambda l) \sin(\lambda y) + \cos(\lambda y) - 1] + qcc_{l\beta}\beta\} dy \\
 &= qca\psi\beta \left[\tan(\lambda l) \left(-\frac{\cos(\lambda y)}{\lambda} \right)_0^l + \left(\frac{\sin(\lambda y)}{\lambda} \right)_0^l - l \right] + qclc_{l\beta}\beta \\
 &= qca\psi\beta \left[-\frac{\tan(\lambda l) \cos(\lambda l)}{\lambda} + \frac{\tan(\lambda l)}{\lambda} + \frac{\sin(\lambda l)}{\lambda} - l \right] + qclc_{l\beta}\beta \\
 &= qcal\psi\beta \left[-\frac{\cancel{\sin(\lambda l) \cos(\lambda l)}}{\cancel{\cos(\lambda l)}\lambda} + \frac{\tan(\lambda l)}{\lambda l} + \frac{\cancel{\sin(\lambda l)}}{\cancel{\lambda l}} - 1 \right] + qclc_{l\beta}\beta \\
 &= qcal\psi\beta \left[\frac{\tan(\lambda l)}{\lambda l} - 1 \right] + qclc_{l\beta}\beta \\
 &\stackrel{(2.41\psi)}{=} qcal\beta \frac{ec_{l\beta} + cc_{M\beta}}{ea} \left[\frac{\tan(\lambda l)}{\lambda l} - 1 \right] + qclc_{l\beta}\beta \\
 &= \frac{qcl}{e} \left[ec_{l\beta} \frac{\tan(\lambda l)}{\lambda l} - ec_{l\beta} + cc_{M\beta} \frac{\tan(\lambda l)}{\lambda l} - cc_{M\beta} + ec_{l\beta} \right] \beta \\
 &\boxed{L = \frac{qcl}{e} \left[(ec_{l\beta} + cc_{M\beta}) \frac{\tan(\lambda l)}{\lambda l} - cc_{M\beta} \right] \beta} \tag{2.44}
 \end{aligned}$$

Per calcolare la pressione dinamica di reversione q_R è possibile delineare due definizioni chiave: la prima consiste nell'affermare che q_R è la pressione dinamica alla quale la variazione di portanza rispetto alla variazione dell'angolo β si annulla; la seconda si riferisce alla variazione di momento. Prendendo come riferimento la prima e derivando la (2.44) si ottiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \beta} &= 0 = \frac{qcl}{e} \left[(ec_{l\beta} + cc_{M\beta}) \frac{\tan(\lambda l)}{\lambda l} - cc_{M\beta} \right] \\
 \implies \frac{\tan(\lambda l)}{\lambda l} &= \frac{cc_{M\beta}}{ec_{l\beta} + cc_{M\beta}}
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

La (2.45) può essere risolta per via numerica una volta noti il rapporto $\frac{e}{c}$ e i coefficienti di sezione, estrapolabili attraverso sperimentazione o simulazione al computer. Da queste simulazioni è possibile ricavare il più piccolo dei coefficienti di λl , noto come $\lambda_1 l$, affinché la pressione dinamica di reversione sia

$$\boxed{q_D = \frac{(\lambda_1 l)^2 GJ}{ceal^2}} \tag{2.46}$$

2.2. SUPERFICI ALARI FLESSIBILI CONTINUE

AEROLASTICITÀ STATICA

$$\begin{aligned}
 \vartheta(y) &= \left[B \tan(\lambda l) - \frac{p}{V_\infty \lambda} \sec(\lambda l) \right] \sin(\lambda y) + B \cos(\lambda y) - \left(\psi \beta - \frac{py}{V_\infty} \right) \\
 &= \left[\psi \beta \tan(\lambda l) - \frac{p}{V_\infty \lambda} \sec(\lambda l) \right] \sin(\lambda y) + \psi \beta \cos(\lambda y) - \left(\psi \beta - \frac{py}{V_\infty} \right) \\
 &= \psi \beta \left[\tan(\lambda l) \sin(\lambda y) + \cos(\lambda y) - 1 \right] - \frac{p}{V_\infty \lambda} \left[\sec(\lambda l) \sin(\lambda y) - \lambda y \right] \\
 \implies \vartheta(y) &= \frac{p}{V_\infty \lambda} \left[\lambda y - \sec(\lambda l) \sin(\lambda y) \right] + \psi \beta \left[\tan(\lambda l) \sin(\lambda y) + \cos(\lambda y) - 1 \right] \tag{2.51}
 \end{aligned}$$

È possibile valutare il momento della portanza attorno all'asse x : poichè si suppone che il velivolo sia rollando a velocità angolare costante, tale momento dev'essere uguale a zero. Pertanto, unendo le (2.40, 2.48, 2.51), si ha

$$\begin{aligned}
 M_{px} &= \int_0^l [yL'(y)] dy \stackrel{(2.40)}{=} \int_0^l \left\{ yqc \left[a \left(\vartheta - \frac{py}{V_\infty} \right) + c_{l\beta} \beta \right] \right\} dy = 0 \\
 &= \int_0^l \left\{ \underbrace{yqca\vartheta}_{\mathcal{K}_1} + \underbrace{\frac{qcpy^2}{V_\infty}}_{\mathcal{K}_2} + \underbrace{yqcc_{l\beta}\beta}_{\mathcal{K}_3} \right\} dy = 0 \tag{2.52}
 \end{aligned}$$

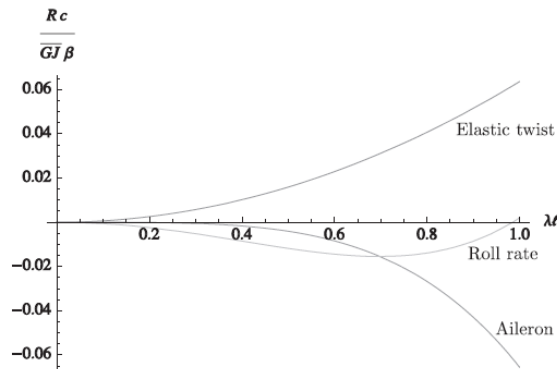
dove si notano i tre contributi al momento: il termine \mathcal{K}_1 è dato dalla torsione elastica della superficie alare, \mathcal{K}_2 dal rateo di rollio p e \mathcal{K}_3 dalla deflessione dell'alettone β . In ogni caso, una volta risolta la (2.52), si ricava il rapporto adimensionale

$$\frac{pl}{V_\infty} = \frac{\lambda l \left\{ cc_{M\beta} [(\lambda l)^2 - 2 \sec(\lambda l) + 2] - 2ec_{l\beta} [\sec(\lambda l) - 1] \right\} \beta}{2ae [\lambda l - \tan(\lambda l)]} \tag{2.53}$$

La pressione dinamica di reversione al rollio q_R è quella pressione dinamica oltre la quale il cambiamento del rateo di rollio, al variare dell'angolo di deflessione β , è nullo. Pertanto, derivando in β e ponendo uguale a zero la (2.53) si ottiene

$$\frac{\partial \left(\frac{pl}{V_\infty} \right)}{\partial \beta} = \frac{\lambda l \left\{ cc_{M\beta} [(\lambda l)^2 - 2 \sec(\lambda l) + 2] - 2ec_{l\beta} [\sec(\lambda l) - 1] \right\}}{2ae [\lambda l - \tan(\lambda l)]} = 0 \tag{2.54}$$

Risolvendo per λl e ricercando il valore minimo delle radici associate si trova la pressione di reversione. Analogamente si può plottare l'andamento delle tre \mathcal{K} in funzione di λl : quando il roll rate (\mathcal{K}_2) cambia segno, si è giunti alla q_R .



30 Figura 2.9: $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3 f(\lambda l)$

2.2. SUPERFICI ALARI FLESSIBILI CONTINUE

AEROLASTICITÀ STATICA

Questo effetto combinato fra flessione e torsione, detto accoppiamento meccanico flessotorsionale, influenza sia la risposta aeroelastica statica dell'ala così come le condizioni per le quali avviene la divergenza.

Volendo valutare ciò, si possono richiamare le (2.40), alle quali viene aggiunta la componente \overline{EI} nell'analisi della traslazione verticale. Dunque

$$\begin{cases} \frac{d}{d\bar{y}} \left(\frac{d\bar{\vartheta}}{GJ} \right) = -qce\bar{\alpha} - qc^2\overline{c_{Mac}} + Nmgd & \text{Equilibrio alla torsione} \\ \frac{d^2}{d\bar{y}^2} \left(\frac{d^2w}{EI} \right) = qc\bar{\alpha} - Nm g & \text{Equilibrio alla flessione} \end{cases} \quad (2.57)$$

Supponendo che \overline{GJ} e \overline{EI} siano costanti lungo l'ala, si sviluppano le (2.57). Partendo dall'equazione di equilibrio alla torsione, inserendo la (2.56), si ha

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{\vartheta}}{d\bar{y}^2} &= -\frac{1}{\overline{GJ}} (qcea\alpha_R \cos \Lambda + qce\vartheta \cos \Lambda + qc^2c_{Mac} \cos^2 \Lambda - Nmgd) \\ \frac{d^2\bar{\vartheta}}{d\bar{y}^2} + \frac{qcea}{\overline{GJ}} \cos \Lambda \vartheta &= -\frac{1}{\overline{GJ}} (qcea\alpha_R \cos \Lambda + qc^2c_{Mac} \cos^2 \Lambda - Nmgd) \\ \frac{d^2\bar{\vartheta}}{d\bar{y}^2} + \frac{qcea}{\overline{GJ}} \cos \Lambda \left(\bar{\vartheta} \cos \Lambda - \frac{dw}{d\bar{y}} \sin \Lambda \right) &= -\frac{1}{\overline{GJ}} (qcea\alpha_R \cos \Lambda + qc^2c_{Mac} \cos^2 \Lambda - Nmgd) \\ \boxed{\frac{d^2\bar{\vartheta}}{d\bar{y}^2} + \frac{qcea}{\overline{GJ}} \bar{\vartheta} \cos^2 \Lambda - \frac{qcea}{\overline{GJ}} \frac{dw}{d\bar{y}} \sin \Lambda \cos \Lambda} &= -\frac{1}{\overline{GJ}} (qcea\alpha_R \cos \Lambda + qc^2c_{Mac} \cos^2 \Lambda - Nmgd) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Mentre, risolvendo l'equazione di equilibrio alla flessione

$$\begin{aligned} \frac{d^4w}{d\bar{y}^4} &= \frac{1}{\overline{EI}} (qca\alpha_R \cos \Lambda + qca\vartheta \cos \Lambda - Nm g) \\ \frac{d^4w}{d\bar{y}^4} &= \frac{1}{\overline{EI}} \left[qca\alpha_R \cos \Lambda + qca \cos \Lambda \left(\bar{\vartheta} \cos \Lambda - \frac{dw}{d\bar{y}} \sin \Lambda \right) - Nm g \right] \\ \boxed{\frac{d^4w}{d\bar{y}^4} + \frac{qca}{\overline{EI}} \frac{dw}{d\bar{y}} \sin \Lambda \cos \Lambda - \frac{qca}{\overline{EI}} \vartheta \cos^2 \Lambda} &= \frac{1}{\overline{EI}} [qca\alpha_R \cos \Lambda - Nm g] \end{aligned} \quad (2.59)$$

Le equazioni differenziali (2.58, 2.59) sono da risolversi a sistema imponendo le seguenti condizioni al contorno, funzione della radice e del tip alare

$$\bar{y} = 0 \begin{cases} \bar{\vartheta} = 0 & \text{Rotazione torsionale} \\ w = 0 & \text{Deflessione} \\ \frac{dw}{d\bar{y}} = 0 & \text{Pendenza d'inarcamento} \end{cases} \quad \bar{y} = l \begin{cases} \frac{d\bar{\vartheta}}{d\bar{y}} = 0 & \text{Momento torcente} \\ \frac{d^2w}{d\bar{y}^2} = 0 & \text{Momento flettente} \\ \frac{d^3w}{d\bar{y}^3} = 0 & \text{Forza di taglio} \end{cases} \quad (2.60)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2\bar{\vartheta}}{d\bar{y}^2} + \frac{qcea}{\overline{GJ}} \bar{\vartheta} \cos^2 \Lambda - \frac{qcea}{\overline{GJ}} \frac{dw}{d\bar{y}} \sin \Lambda \cos \Lambda = -\frac{1}{\overline{GJ}} (qcea\alpha_R \cos \Lambda + qc^2c_{Mac} \cos^2 \Lambda - Nmgd) \\ \frac{d^4w}{d\bar{y}^4} + \frac{qca}{\overline{EI}} \frac{dw}{d\bar{y}} \sin \Lambda \cos \Lambda - \frac{qca}{\overline{EI}} \vartheta \cos^2 \Lambda = \frac{1}{\overline{EI}} [qca\alpha_R \cos \Lambda - Nm g] \end{cases} \quad (2.61)$$

2.2. SUPERFICI ALARI FLESSIBILI CONTINUE

AEROLASTICITÀ STATICA

Approfondimento

In particolare si nota, definendo k il rapporto fra il rapporto di accoppiamento flessor torsionale K e i due moduli,

$$k = \frac{K}{\sqrt{EI}\sqrt{GJ}} \quad (2.64)$$

che, a parità di tutti gli altri parametri, se l'accoppiamento flessor torsionale K aumenta, aumenta ovviamente anche k . Questa casistica nel tailoring aeroelastico mostra un fortissimo legame con l'angolo di freccia Λ . Difatti

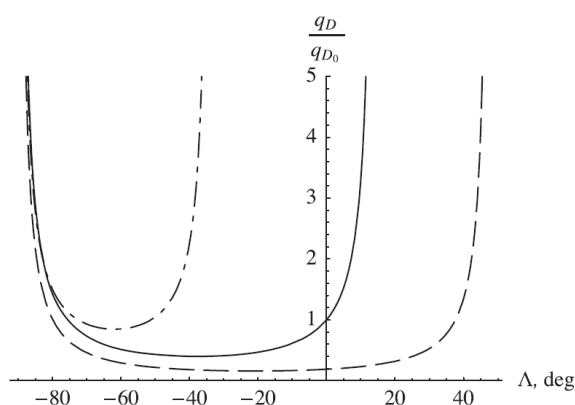


Figura 2.12: Tailoring aeroelastico - divergenza q_D vs freccia λ

sono mostrati in Figura (2.12) gli andamenti del rapporto fra la velocità di divergenza al variare dell'angolo di freccia, con $k = \{-0.4, 0, 0.4\}$, rispettivamente per curva tratto-punto, continua e tratteggiata. Si nota immediatamente il primo vantaggio del tailoring: al diminuire di k il range in cui si verifica divergenza è decisamente ridotto, e dunque valori positivi di k sono destabilizzanti. Ad esempio, avere $k = -0.4$ permette di avere angoli di freccia anche negativi (cioè verso avanti, notoriamente condizioni di volo instabili) e, ad esempio con $\Lambda = -20^\circ$, essere ancora al di fuori del campo della divergenza. In tal caso il tailoring aeroelastico ha migliorato notevolmente la stabilità di volo, fornendo la possibilità di impiegare profili alari meno convenzionali e solitamente instabili.

AEROLASTICITÀ DINAMICA

Quindi ν_k è un numero complesso ed ha dimensioni s^{-1} . Si nota che la soluzione (3.5) può fornire chiare indicazioni del fenomeno che si sta considerando: in primo luogo, il pedice k , cioè il numero della soluzione, indica il modo oscillatorio (o meno) che si sta analizzando; in seconda analisi, i valori del Γ e di Ω indicano, rispettivamente, lo smorzamento modale e la frequenza modale. Il primo è, dunque, indice di quanto il modo sia smorzato, costante o amplificato (rispettivamente per $\Gamma < 0$, $\Gamma = 0$, $\Gamma > 0$), mentre il secondo indica la frequenza di oscillazione propria. Poichè nello studio dell'aeroelasticità statica si era fatto riferimento a soluzioni non oscillanti, ma al più convergenti o divergenti, se ne deduce che qualsiasi valore di $\Omega \neq 0$ indica il campo dei modi dinamici, mentre $\Omega = 0$ quello degli statici. La seguente Tabella (3.1) mostra il tipo di modo e caratteristiche di stabilità al variare dei coefficienti di ν_k

Γ_k	Ω_k	MODO	STABILITÀ
< 0	$= 0$	Convergenza continua	Stabile
$= 0$	$= 0$	Tempo invariante	Stabilità limite
> 0	$= 0$	Divergenza continua	Instabile
< 0	$\neq 0$	Convergenza oscillatoria	Stabile smorzato
$= 0$	$\neq 0$	Armonica semplice	Stabilità limite
> 0	$\neq 0$	Divergenza oscillatoria	Instabile amplificato (flutter)

Tabella 3.1: Modi e caratteristiche di stabilità in funzione di Γ_k e Ω_k

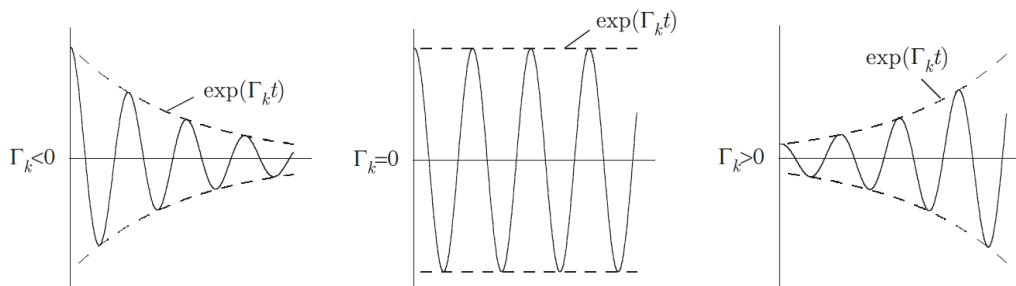


Figura 3.1: Andamento della stabilità al variare di Γ_k con $\Omega_k \neq 0$

In Figura (3.1) si nota chiaramente, per il caso dinamico $\Omega_k \neq 0$, che se $\Gamma_k < 0$ il modo è smorzato e, quindi, stabile; se $\Gamma_k = 0$ ci si trova nella condizione limite di stabilità e l'oscillazione è pura, cioè costante; se $\Gamma_k > 0$ il modo è amplificato, dunque instabile.

3.1. METODO P

AEROLASTICITÀ DINAMICA

Sostituendo nell'espressione di K della (3.8) la (3.9), supponendo angoli ϑ piccoli tali per cui $\cos \vartheta \approx 1$, si ottiene

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m \left[(-\dot{h}\hat{i}_2 - b\dot{\vartheta}x_\vartheta\hat{b}_2) \cdot (-\dot{h}\hat{i}_2 - b\dot{\vartheta}x_\vartheta\hat{b}_2) \right] + \frac{1}{2}I_C\dot{\vartheta}^2 \\ &= \frac{1}{2}m \left(\dot{h}^2 + bx_\vartheta\dot{h}\dot{\vartheta} + bx_\vartheta\dot{h}\dot{\vartheta} + b^2x_\vartheta^2\dot{\vartheta}^2 \right) + \frac{1}{2}I_C\dot{\vartheta}^2 \quad I_C = I_P - mb^2x_\vartheta^2 \\ &= \frac{1}{2}m \left(\dot{h}^2 + 2bx_\vartheta\dot{h}\dot{\vartheta} + b^2x_\vartheta^2\dot{\vartheta}^2 \right) + \frac{1}{2}I_P\dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2}mb^2x_\vartheta^2\dot{\vartheta}^2 \\ K &= \frac{1}{2}m \left(\dot{h}^2 + 2bx_\vartheta\dot{h}\dot{\vartheta} \right) + \frac{1}{2}I_P\dot{\vartheta}^2 \end{aligned} \tag{3.10}$$

L'espressione dell'energia potenziale, invece, è già completa come mostrata nella (3.8).

Ci si occupa ora di valutare i termini Q_i . È possibile esprimere la forza agente sul profilo, in funzione dei parametri h e ϑ , per mezzo delle forze aerodinamiche che agiscono nel punto Q . La generica velocità del punto Q \vec{v}_Q ed il generico spostamento virtuale (integrandola per infinitesimi) del punto Q sono pari a

$$\begin{aligned} \vec{v}_Q &= -\dot{h}\hat{i}_2 + b\dot{\vartheta} \left(\frac{1}{2} + a \right) \hat{b}_2 \\ \delta\vec{P}_Q &= -\delta h\hat{i}_2 + b\delta\vartheta \left(\frac{1}{2} + a \right) \hat{b}_2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

mentre la generica velocità angolare e rotazione virtuale si esprimono come

$$\begin{aligned} \vec{\vartheta} &= \dot{\vartheta}\hat{b}_3 \\ \delta\vec{\vartheta} &= \delta\vartheta\hat{b}_3 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Il lavoro delle forze aerodinamiche L e M è esprimibile come

$$\delta\bar{W} = \delta_{P_Q}L + \delta_\vartheta M_{1/4} \tag{3.13}$$

Per il principio dei lavori virtuali deve valere che il lavoro delle forze esterne deve uguagliare quello delle interne. Denominando Q_i il termine lagrangiano delle forze esterne applicate^[1] si ha

$$\begin{aligned} \delta_{P_Q}L + \delta_\vartheta M_{1/4} &= Q_h\delta h + Q_\vartheta\delta\vartheta \\ L \left[-\delta h + b\delta\vartheta \left(\frac{1}{2} + a \right) \right] + M_{1/4}\delta\vartheta &= Q_h\delta h + Q_\vartheta\delta\vartheta \\ \delta h(-L) + \delta\vartheta \left[b \left(\frac{1}{2} + a \right) L + M_{1/4} \right] &= Q_h\delta h + Q_\vartheta\delta\vartheta \implies \begin{cases} Q_h = -L \\ Q_\vartheta = M_{1/4} + b \left(\frac{1}{2} + a \right) L \end{cases} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Con i termini Q_i noti è possibile unire le (3.7, 3.8, 3.10, 3.14) per ricavare la soluzione delle equazioni del moto. In particolare si derivano l'energia cinetica e potenziale rispetto agli $i = 1, 2 = h, \vartheta$, e dunque

^[1]In questo caso $i = 1, 2$ in quanto i gradi di libertà sono solo due e coincidono con $i = 1 \implies Q_1 = Q_h, i = 2 \implies Q_2 = Q_\vartheta$.

3.1. METODO P

AEROLASTICITÀ DINAMICA

moto (3.16) e, supponendo soluzioni esponenziali del tipo $h = \bar{h}e^{\nu t}$, $\vartheta = \bar{\vartheta}e^{\nu t}$, si ricava la matrice associata. Viene fatto presente che l'analisi è compiuta a $t = 0$, e pertanto la riscrittura in forma esponenziale viene poi semplificata. Compiendo questi passaggi, con $L = 2\pi\rho_\infty bU^2\vartheta$, si ottiene

$$\begin{cases} m(\ddot{h} + bx_\vartheta\ddot{\vartheta}) + k_h h = -2\pi\rho_\infty bU^2\vartheta \\ I_P\ddot{\vartheta} + mbx_\vartheta\ddot{h} + k_\vartheta\vartheta = b\left(\frac{1}{2} + a\right)2\pi\rho_\infty bU^2\vartheta \end{cases} \\ \begin{cases} m(\nu^2\bar{h}e^{\nu t} + bx_\vartheta\nu^2\bar{\vartheta}e^{\nu t}) + k_h\bar{h}e^{\nu t} = -2\pi\rho_\infty bU^2\bar{\vartheta}e^{\nu t} \\ I_P\nu^2\bar{\vartheta}e^{\nu t} + mbx_\vartheta\nu^2\bar{h}e^{\nu t} + k_\vartheta\bar{\vartheta}e^{\nu t} = b\left(\frac{1}{2} + a\right)2\pi\rho_\infty bU^2\bar{\vartheta}e^{\nu t} \end{cases} \quad t = 0 \\ \begin{cases} m\nu^2\bar{h} + mbx_\vartheta\nu^2\bar{\vartheta} + k_h\bar{h} + 2\pi\rho_\infty bU^2\bar{\vartheta} = 0 \\ I_P\nu^2\bar{\vartheta} + mbx_\vartheta\nu^2\bar{h} + k_\vartheta\bar{\vartheta} - b\left(\frac{1}{2} + a\right)2\pi\rho_\infty bU^2\bar{\vartheta} = 0 \end{cases} \quad k_h, k_\vartheta \quad (7.3) \quad (3.20) \\ \begin{cases} m\nu^2\bar{h} + mbx_\vartheta\nu^2\bar{\vartheta} + m\omega_h^2\bar{h} + 2\pi\rho_\infty bU^2\bar{\vartheta} = 0 \\ I_P\nu^2\bar{\vartheta} + mbx_\vartheta\nu^2\bar{h} + I_P\omega_\vartheta^2\bar{\vartheta} - b\left(\frac{1}{2} + a\right)2\pi\rho_\infty bU^2\bar{\vartheta} = 0 \end{cases} \quad \cdot b \quad \text{Raccogliendo } \frac{\bar{h}}{b} \\ \begin{cases} mb^2\nu^2\frac{\bar{h}}{b} + mb^2x_\vartheta\nu^2\bar{\vartheta} + mb^2\omega_h^2\frac{\bar{h}}{b} + 2\pi\rho_\infty b^2U^2\bar{\vartheta} = 0 \\ I_P\nu^2\bar{\vartheta} + mb^2x_\vartheta\nu^2\frac{\bar{h}}{b} + I_P\omega_\vartheta^2\bar{\vartheta} - 2\left(\frac{1}{2} + a\right)\pi\rho_\infty b^2U^2\bar{\vartheta} = 0 \end{cases}$$

Riscrivendo la (3.20) in forma matriciale si ottiene

$$\begin{bmatrix} mb^2\nu^2 + mb^2\omega_h^2 & mb^2x_\vartheta\nu^2 + 2\pi\rho_\infty b^2U^2 \\ mb^2x_\vartheta\nu^2 & I_P\nu^2 + I_P\omega_\vartheta^2 - 2\left(\frac{1}{2} + a\right)\pi\rho_\infty b^2U^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\bar{h}}{b} \\ \bar{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \div mU^2 \\ \begin{bmatrix} \frac{b^2\nu^2}{U^2} + \frac{b^2\omega_h^2}{U^2} & \frac{b^2x_\vartheta\nu^2}{U^2} + \frac{2\pi\rho_\infty b^2}{m} \\ \frac{b^2x_\vartheta\nu^2}{U^2} & \frac{I_P\nu^2}{mU^2} + \frac{I_P\omega_\vartheta^2}{mU^2} - 2\left(\frac{1}{2} + a\right)\frac{\pi\rho_\infty b^2}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\bar{h}}{b} \\ \bar{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Si sostituiscono alla (3.21) cinque parametri, $\{\nu, V, \sigma, \mu, r^2\}$, pari a

$$\nu = \frac{pU}{b} \quad \mu = \frac{m}{\rho_\infty\pi b^2} \quad V = \frac{U}{b\omega_\vartheta} \quad \sigma = \frac{\omega_h}{\omega_\vartheta} \quad r^2 = \frac{I_P}{mb^2} \quad (3.22)$$

dove gli ultimi quattro sono adimensionali, V è detta velocità ridotta e p è l'autovalore complesso incognito da ricavare per il polinomio caratteristico (il quale definisce il Metodo p).

3.1. METODO P

AEROLASTICITÀ DINAMICA

Viene presentata una coppia di grafici in forma dimensionata (3.27).

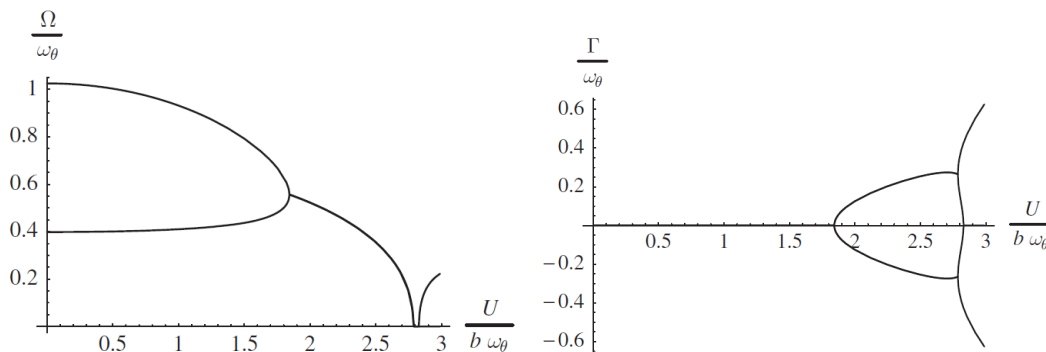


Figura 3.3: Frequenza $\frac{\Omega}{\omega_\theta}$ e smorzamento $\frac{\Gamma}{\omega_\theta}$ modale in funzione della velocità ridotta $V = \frac{U}{b\omega_\theta}$

Dal grafico $\frac{\Omega}{\omega_\theta} - \frac{U}{b\omega_\theta}$ si nota chiaramente che il fenomeno del flutter avviene ad una certa velocità V_F (o U_F) e ad una certa frequenza Ω_F corrispondente al punto d'intersezione fra la curva discendente del modo torsionale e quella ascendente del modo flessionale. Nel punto di coalescenza nasce la soluzione complessa coniugata, e difatti nel grafico $\frac{\Gamma}{\omega_\theta} - \frac{U}{b\omega_\theta}$ nascono due curve non nulle che rappresentano lo smorzamento (stabile o instabile a seconda del segno).

La condizione di divergenza, invece, avviene quando due rami della parte reale vanno nuovamente in coalescenza (e divengono successivamente nulli): questa situazione corrisponde alla nascita di una nuova curva non nulla nel campo delle frequenze.

Per quanto approssimata, l'analisi del Metodo p prevede correttamente che $V_F < V_D$ e che il flutter avvenga alla coalescenza dei modi vibrazionali flessionali e torsionali. Ovviamente la limitazione più grande nasce dal considerare l'aerodinamica stazionaria, e pertanto è importante considerare il modello aerodinamico scelto.

3.2. ANALISI DEL FLUTTER CLASSICA

AEROLASTICITÀ DINAMICA

3.2.1 Flutter classico ad un grado di libertà

Si premette che una soluzione di flutter classica prevede l'impiego di soluzioni armoniche: quindi non è contemplato in alcun caso lo smorzamento.

Detto ciò, per illustrare l'applicazione dell'analisi classica del flutter si fa riferimento ad una semplice configurazione di ala semplicemente incernierata su una molla torsionale di rigidezza k_ϑ . Dunque si scarta del tutto la componente flessionale di "affondamento". In tal caso il sistema (3.16) diviene semplicemente

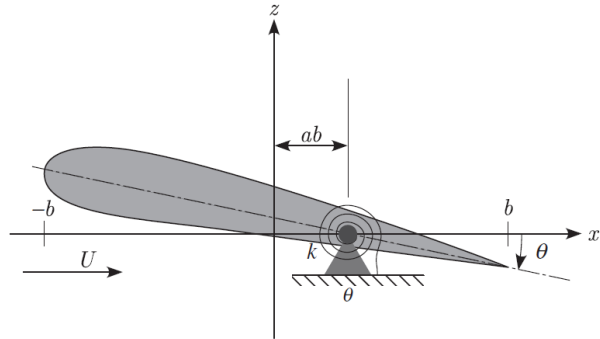


Figura 3.4: Profilo ad un grado di libertà

$$I_P \ddot{\vartheta} + k_\vartheta \vartheta = M \tag{3.32}$$

ricordandosi che $M = M_{1/4} + \mathcal{K}L$.

A questo punto si può imporre che la soluzione sia di tipo armonico e che il campo aerodinamico, essendo stazionario, abbia soluzioni simili. L'equazione (3.32) diviene

$$\begin{aligned} I_P i^2 \omega^2 \bar{\vartheta} e^{i\omega t} + k_\vartheta \bar{\vartheta} e^{i\omega t} &= \bar{M} e^{i\omega t} \\ -\omega^2 I_P \bar{\vartheta} e^{i\omega t} + k_\vartheta \bar{\vartheta} e^{i\omega t} &\stackrel{(3.31)}{=} \pi \rho_\infty b^4 \omega^2 \left[m_h(k, M_\infty) \frac{\bar{h}}{b} + m_\vartheta(k, M_\infty) \bar{\vartheta} \right] e^{i\omega t} \quad t = 0 \\ -\omega^2 I_P \bar{\vartheta} + k_\vartheta \bar{\vartheta} &= \pi \rho_\infty b^4 \omega^2 m_\vartheta(k, M_\infty) \bar{\vartheta} \quad \div \bar{\vartheta} \\ -\omega^2 I_P + k_\vartheta &= \pi \rho_\infty b^4 \omega^2 m_\vartheta(k, M_\infty) \end{aligned} \tag{3.33}$$

A questo punto si può sostituire nella (3.3) la frequenza naturale torsionale dalla (3.19) al posto della rigidezza torsionale k_ϑ . Facendo ciò e portando tutto a primo membro

$$\begin{aligned} -\omega^2 I_P + \omega_\vartheta^2 I_P - \pi \rho_\infty b^4 \omega^2 m_\vartheta(k, M_\infty) &= 0 \\ I_P (\omega_\vartheta^2 - \omega^2) - \pi \rho_\infty b^4 \omega^2 m_\vartheta(k, M_\infty) &= 0 \\ \frac{I_P}{\pi \rho_\infty b^4 \omega^2} (\omega_\vartheta^2 - \omega^2) - m_\vartheta(k, M_\infty) &= 0 \\ \frac{I_P}{\pi \rho_\infty b^4} \left(1 - \frac{\omega_\vartheta^2}{\omega^2} \right) + m_\vartheta(k, M_\infty) &= 0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

La (3.34) può essere risolta nelle incognite ω , ρ_∞ , k e M_∞ , supponendo noti i parametri I_P , ω_ϑ e b . Anzichè procedere in maniera assolutamente iterativa, è possibile procedere in altro modo: è noto che il coefficiente aerodinamico $m_\vartheta(k, M_\infty)$ è complesso, e quindi può essere scritto come

$$m_\vartheta(k, M_\infty) = \text{Re}[m_\vartheta(k, M_\infty)] + i \text{Im}[m_\vartheta(k, M_\infty)] \tag{3.35}$$

Ricordando che la soluzione limite precedente al flutter è che la frequenza (ridotta o meno, in questo caso k) è nulla, è possibile sfruttare la parte immaginaria della soluzione per ricavarla. In particolare si suppone di trovarsi nel campo incompressibile e di porre un ρ_∞ arbitrario e un $M_\infty = 0$. In tal caso imponendo

$$\text{Im}[m_\vartheta(k_F, 0)] = 0 \tag{3.36}$$

3.2. ANALISI DEL FLUTTER CLASSICA

AEROLASTICITÀ DINAMICA

Sostituendo le espressioni di L ed M dalla (3.40) nella (3.41) e raggruppando i termini nelle variabili \bar{h} e $\bar{\vartheta}$ si ottiene una coppia di equazioni algebriche omogenee e lineari

$$\begin{cases}
 -mb\omega^2 \frac{\bar{h}}{b} - mbx_\vartheta \omega^2 \bar{\vartheta} + k_h b \frac{\bar{h}}{b} = \pi\rho_\infty b^3 \omega^2 \ell_h(k, M_\infty) \frac{\bar{h}}{b} + \pi\rho_\infty b^3 \omega^2 \ell_\vartheta(k, M_\infty) \bar{\vartheta} \\
 -I_P \omega^2 \bar{\vartheta} - mb^2 x_\vartheta \omega^2 \frac{\bar{h}}{b} + k_\vartheta \bar{\vartheta} = \pi\rho_\infty b^4 \omega^2 m_h(k, M_\infty) \frac{\bar{h}}{b} + \pi\rho_\infty b^4 \omega^2 m_\vartheta(k, M_\infty) \bar{\vartheta} \\
 \left[-mb\omega^2 + k_h b - \pi\rho_\infty b^3 \omega^2 \ell_h(k, M_\infty) \right] \frac{\bar{h}}{b} + \left[-mbx_\vartheta \omega^2 - \pi\rho_\infty b^3 \omega^2 \ell_\vartheta(k, M_\infty) \right] \bar{\vartheta} = 0 & k_h, k_\vartheta \\
 \left[-mb^2 x_\vartheta \omega^2 - \pi\rho_\infty b^4 \omega^2 m_h(k, M_\infty) \right] \frac{\bar{h}}{b} + \left[-I_P \omega^2 + k_\vartheta - \pi\rho_\infty b^4 \omega^2 m_\vartheta(k, M_\infty) \right] \bar{\vartheta} = 0 \\
 \left[-mb\omega^2 + m\omega_h^2 b - \pi\rho_\infty b^3 \omega^2 \ell_h(k, M_\infty) \right] \frac{\bar{h}}{b} + \left[-mbx_\vartheta \omega^2 - \pi\rho_\infty b^3 \omega^2 \ell_\vartheta(k, M_\infty) \right] \bar{\vartheta} = 0 & \div \pi\rho_\infty b^3 \\
 \left[-mb^2 x_\vartheta \omega^2 - \pi\rho_\infty b^4 \omega^2 m_h(k, M_\infty) \right] \frac{\bar{h}}{b} + \left[-I_P \omega^2 + I_P \omega_\vartheta^2 - \pi\rho_\infty b^4 \omega^2 m_\vartheta(k, M_\infty) \right] \bar{\vartheta} = 0 & \div \pi\rho_\infty b^4 \\
 \left[-\frac{m\omega^2}{\pi\rho_\infty b^2} + \frac{m\omega_h^2}{\pi\rho_\infty b^2} - \omega^2 \ell_h(k, M_\infty) \right] \frac{\bar{h}}{b} + \left[-\frac{mx_\vartheta \omega^2}{\pi\rho_\infty b^2} - \omega^2 \ell_\vartheta(k, M_\infty) \right] \bar{\vartheta} = 0 & \div \omega^2 \\
 \left[-\frac{mx_\vartheta \omega^2}{\pi\rho_\infty b^2} - \omega^2 m_h(k, M_\infty) \right] \frac{\bar{h}}{b} + \left[-\frac{I_P \omega^2}{\pi\rho_\infty b^4} + \frac{I_P \omega_\vartheta^2}{\pi\rho_\infty b^4} - \omega^2 m_\vartheta(k, M_\infty) \right] \bar{\vartheta} = 0 \\
 \left[-\frac{m}{\pi\rho_\infty b^2} + \frac{m}{\pi\rho_\infty b^2} \frac{\omega_h^2}{\omega^2} - \ell_h(k, M_\infty) \right] \frac{\bar{h}}{b} + \left[-\frac{mx_\vartheta}{\pi\rho_\infty b^2} - \ell_\vartheta(k, M_\infty) \right] \bar{\vartheta} = 0 \\
 \left[-\frac{mx_\vartheta}{\pi\rho_\infty b^2} - m_h(k, M_\infty) \right] \frac{\bar{h}}{b} + \left[-\frac{I_P}{\pi\rho_\infty b^4} + \frac{I_P}{\pi\rho_\infty b^4} \frac{\omega_\vartheta^2}{\omega^2} - m_\vartheta(k, M_\infty) \right] \bar{\vartheta} = 0 \\
 \left[\frac{m}{\pi\rho_\infty b^2} \left(1 - \frac{\omega_h^2}{\omega^2} \right) + \ell_h(k, M_\infty) \right] \frac{\bar{h}}{b} + \left[\frac{mx_\vartheta}{\pi\rho_\infty b^2} + \ell_\vartheta(k, M_\infty) \right] \bar{\vartheta} = 0 \\
 \left[\frac{mx_\vartheta}{\pi\rho_\infty b^2} + m_h(k, M_\infty) \right] \frac{\bar{h}}{b} + \left[\frac{I_P}{\pi\rho_\infty b^4} \left(1 - \frac{\omega_\vartheta^2}{\omega^2} \right) + m_\vartheta(k, M_\infty) \right] \bar{\vartheta} = 0
 \end{cases} \tag{3.42}$$

Si sostituiscono ove possibile i coefficienti adimensionali μ e r dalla (3.22). Per semplicità i termini complessi di L ed M vengono indicati con i soli ℓ e m . Si ottiene

$$\begin{cases}
 \left[\mu \left(1 - \frac{\omega_h^2}{\omega^2} \right) + \ell_h \right] \frac{\bar{h}}{b} + [\mu x_\vartheta + \ell_\vartheta] \bar{\vartheta} = 0 \\
 [\mu x_\vartheta + m_h] \frac{\bar{h}}{b} + \left[\mu r^2 \left(1 - \frac{\omega_\vartheta^2}{\omega^2} \right) + m_\vartheta \right] \bar{\vartheta} = 0
 \end{cases} \tag{3.43}$$

Volendo si può sostituire nella prima equazione anche il termine $\sigma\omega_\vartheta = \omega_h$, per avere nell'intero sistema solo ω_ϑ . In ogni caso, la forma matriciale associata dal quale ricavare soluzioni non banali, cioè con determinante nullo, è

$$\begin{vmatrix}
 \mu \left(1 - \sigma^2 \frac{\omega_\vartheta^2}{\omega^2} \right) + \ell_h & \mu x_\vartheta + \ell_\vartheta \\
 \mu x_\vartheta + m_h & \mu r^2 \left(1 - \frac{\omega_\vartheta^2}{\omega^2} \right) + m_\vartheta
 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.44}$$

3.3. METODI INGEGNERISTICI RISOLUTIVI DEL FLUTTER AEROLASTICITÀ DINAMICA

3.3 Metodi ingegneristici risolutivi del flutter

L'assunzione fatta nel precedente paragrafo riguardo al moto semplicemente armonico al limite del flutter porta certamente a dei vantaggi risolutivi, ma anche a degli svantaggi. Ad esempio, diviene particolarmente difficile stimare, se non con la funzione di Theodorsen, il limite al flutter in condizione di flusso nonstazionario, così come per flussi compressibili.

Dopo la teoria di Theodorsen furono presentate numerose soluzioni analitiche in grado di prevedere correttamente l'andamento del flutter anche in presenza di flussi compressibili subsonici e supersonici. Di questi, due vengono trattati: il Metodo k, sicuramente rapido ma fortemente discusso per la sua accuratezza; ed il Metodo p-k, un compromesso fra la rapidità risolutiva del Metodo k e l'accuratezza assoluta del Metodo p.

3.3.1 Metodo k

Il Metodo k tenta di sopperire alla mancanza di termine smorzante nelle soluzioni armoniche dell'analisi classica del flutter. In particolare, il sistema delle equazioni del moto (3.16) vede inclusi, per entrambi i membri, dei termini fittizi di smorzamento direttamente proporzionali al quadrato dell'ampiezza dell'oscillazione del fenomeno e praticamente indipendenti dalla frequenza alla quale questo avviene.

In sostanza, l'aggiunta dei termini D_h e D_ϑ vuole simulare la perdita di energia per ciclo di oscillazione armonica dovuta allo smorzamento. Allora si ha

$$\begin{cases} m(\ddot{h} + bx_\vartheta\ddot{\vartheta}) + k_h h = -L + D_h \\ I_P\ddot{\vartheta} + mbx_\vartheta\ddot{h} + k_\vartheta\vartheta = M + D_\vartheta \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} D_h = \overline{D}_h e^{i\omega t} & \text{con } \overline{D}_h = -ig_h m\omega_h^2 \overline{h} \\ D_\vartheta = \overline{D}_\vartheta e^{i\omega t} & \text{con } \overline{D}_\vartheta = -ig_\vartheta I_P \omega_\vartheta^2 \overline{\vartheta} \end{cases} \quad (3.49)$$

i coefficienti g_h e g_ϑ sono coefficienti di smorzamento ed hanno valori rappresentativi^[2] compresi fra 0.01 e 0.05. In questa analisi verrà supposto genericamente

$$g_h \approx 0.01 \quad g_\vartheta = 0.03 \quad (3.50)$$

Seguendo in maniera del tutto analoga gli step compiuti nelle (3.40, 3.41, 3.42), e notando che i termini D_i hanno genericamente un andamento simile a quello dei termini a primo membro di entrambe le equazioni, si ricava il sistema compatto del tipo

$$\begin{cases} \left\{ \mu \left[1 - \frac{\omega_h^2}{\omega^2} (1 + ig_h) \right] + \ell_h \right\} \frac{\overline{h}}{b} + [\mu x_\vartheta + \ell_\vartheta] \overline{\vartheta} = 0 \\ [\mu x_\vartheta + m_h] \frac{\overline{h}}{b} + \left\{ \mu r^2 \left[1 - \frac{\omega_\vartheta^2}{\omega^2} (1 + ig_\vartheta) \right] + m_\vartheta \right\} \overline{\vartheta} = 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

Da cui

$$\begin{vmatrix} \mu \left[1 - \frac{\omega_h^2}{\omega^2} (1 + ig_h) \right] + \ell_h & \mu x_\vartheta + \ell_\vartheta \\ \mu x_\vartheta + m_h & \mu r^2 \left[1 - \frac{\omega_\vartheta^2}{\omega^2} (1 + ig_\vartheta) \right] + m_\vartheta \end{vmatrix} = 0 \quad (3.52)$$

^[2]Questa operazione è il motivo per il quale il Metodo k è così tanto argomentato e discusso per la sua accuratezza. Imporre con delle soluzioni semplici armoniche dei coefficienti di smorzamento (inesistenti) a priori, per quanto tale procedimento possa rappresentare buona parte dei velivoli convenzionali esistenti, non può considerarsi un metodo universale. Nel 1971, difatti, fu dimostrato che il Metodo k può, per velivoli ben all'interno del convenzionale, provocare una configurazione strutturale tale da accoppiare fortemente i modi oscillatori, risultando in danni catastrofici.

4. Sistemi portanti

Lo studio dei sistemi portanti continui, cioè strutture elasticamente deformabili nel loro complesso, è perseguibile per due vie. La prima è l'approssimazione dei risultati per mezzo di analisi agli elementi finiti, o FEM, ed è quella che viene trattata in questo capitolo; la seconda sfrutta il Vortex Lattice Method (VLM), il quale è più atto ad essere eseguito su software di calcolo in quanto non fornisce risultati in forma chiusa, e pertanto è trattato nella Parte III.

In questo caso si tenterà di approssimare l'elemento ala ad una piastra ed il campo aerodinamico sarà tale da poter sfruttare il Metodo p: pertanto, il moto sarà incomprimibile. Verranno analizzate anche soluzioni con materiali ortotropi multistrato, per verificare come questi compositi riescano a ritardare o eliminare l'insorgenza della divergenza.

In tali soluzioni approssimate si incontreranno soluzioni forti e deboli: le prime hanno convergenze molto rapide ed i suoi risultati sono confermati per via sperimentale; le ultime si avvicinano all'intorno della soluzione reale, con buona approssimazione.

4.1 Metodo dei residui pesati

Il primo metodo analizzato è quello dei residui pesati. In questo caso si sta trattando un'analisi in grado di fornire soluzioni in forma debole da un sistema del tipo

$$0 \leq x \leq 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right) + u = 0 \\ u(0) = 1 \\ \left(x \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=1} = 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Nel sistema (4.1) sono state imposte condizioni sul dominio (range di x) ed al contorno (la seconda e terza equazione). Si suppone che esista una soluzione esatta $u(x)$ valida sia nel dominio che al contorno e di volerne calcolare una approssimata, funzione di una sola variabile, $u_N \approx u$ e si utilizzi un'espansione in serie per descriverla

$$u_N(x) = \varphi_0 + \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(x) \quad (4.2)$$

con N , sia a pedice che come limite della sommatoria, ad indicare l'ordine di espansione, c_j pari ad una costante e φ_j una funzione qualsiasi che funga da base. Si suppone una base di guess e si verifica se la soluzione approssimata è congruente con il dominio ed al contorno. Pertanto

$$\varphi_j = x^j \quad N = 2 \implies \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = 1 \\ \varphi_1 = x \\ \varphi_2 = x^2 \end{array} \right. \implies u_2 = \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 = 1 + c_1 x + c_2 x^2 \quad (4.3)$$

4.2 Approssimazione agli elementi finiti

Si introduce l'approssimazione matriciale FEM. Si considera un'asta e si applica il principio dei lavori virtuali: le forze esterne devono equivalere a quelle interne. Dunque

$$\delta L_{ext} = \int_{\mathcal{V}} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \{\delta s\}^T [K] \{s\} \quad (4.10)$$

dove con $\{\delta s\}^T$ si è indicato il vettore degli spostamenti virtuali, con $[K]$ la matrice di rigidità dell'asta e con $\{s\}$ il vettore degli spostamenti. Si va ad esplicitare la (4.10).

La legge di Hooke relaziona gli sforzi σ alle deformazioni ε per mezzo del coefficiente elastico E , pertanto

$$\sigma = E\varepsilon \implies \delta L_{int} = \int_{\mathcal{V}} \{\delta\varepsilon\}^T \sigma dV = \int_{\mathcal{V}} \{\delta\varepsilon\}^T E\varepsilon dV \quad (4.11)$$

Si introducono le funzioni di forma $N_i(x)$ per ottenere una formulazione estesa della deformazione elastica ε

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d}{dx} (N_A(x)u_A + N_B(x)u_B) = N_{A,x}(x)u_A + N_{B,x}(x)u_B \quad \text{con} \quad \begin{cases} N_A(x) = 1 - \frac{x}{L} \\ N_B(x) = \frac{x}{L} \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\text{da cui } \delta\varepsilon = N_{A,x}(x)\delta u_A + N_{B,x}(x)\delta u_B \quad (4.13)$$

Chiamando B la matrice di forma, tale per cui $[B] = [-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}]$, si possono riscrivere in forma matriciale le (4.12, 4.13) come

$$\begin{cases} \{\varepsilon\} = [B] \{s\} \\ \{\delta\varepsilon\}^T = [B]^T \{\delta s\}^T \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \{s\} = \{u_A, u_B\} \\ \{\delta s\}^T = \{\delta u_A, \delta u_B\} \\ [B] = \left[-\frac{1}{L}, \frac{1}{L} \right] \end{cases} \quad (4.14)$$

Pertanto, sostituendo le (4.14) nella (4.10), si ottiene

$$\delta L_{int} = \int_{\mathcal{V}} \{\delta s\}^T [B]^T E [B] \{s\} dV \quad \text{con} \quad \int_{\mathcal{V}} [B]^T E [B] dV = [K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Con tale premessa si va ad analizzare una qualsiasi superficie portante suddivisa con elementi finiti piastra. L'equazione di governo del moto è

$$([K] - [K_a]) \{q\} + ([D] - [D_a]) \{\dot{q}\} + ([M] - [M_a]) \{\ddot{q}\} = \{\lambda(t)\} \quad (4.16)$$

dove $\{q\}$ è il vettore degli spostamenti.

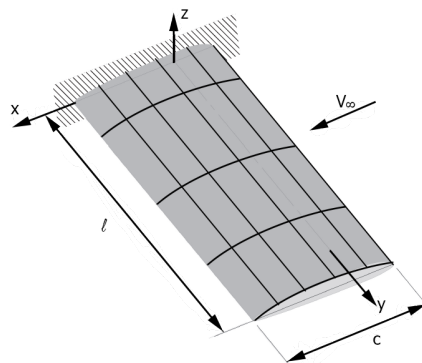


Figura 4.1: Superficie portante schematizzata con elementi finiti piastra

4.3. TEORIA DI REISSNER-MINDLIN

APPROSSIMAZIONE FEM

Chiamando N_{xx} la risultante assiale lungo x delle forze si può scrivere

$$N_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz = \sum_{i=1}^{NS} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \sigma_{xx}^k dz \quad \text{Supponendo } NS = 1 \quad N_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz$$

$$\text{con } \sigma_{xx}^k \stackrel{(4.19)}{=} Q_{11}^k \varepsilon_{xx}^k + Q_{12}^k \varepsilon_{yy}^k + Q_{16}^k \varepsilon_{xy}^k \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x} \stackrel{(4.20)}{=} u_{,x}^0 + z \varphi_{x,x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = v_{,y} \stackrel{(4.20)}{=} v_{,y}^0 + z \varphi_{y,y} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \stackrel{(4.20)}{=} u_{,y}^0 + v_{,x}^0 + z (\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x}) \end{cases} \quad (4.21)$$

In questo caso si è applicata la cinematica di RM alle relazioni costitutive. Sostituendo questi ε_{ij} nell'espressione della risultante assiale N_{xx} si ottiene

$$N_{xx} = A_{11} u_{,x} + B_{11} \varphi_{x,x} + A_{12} u_{,y} + B_{12} \varphi_{y,y} + A_{16} (u_{,y}^0 + v_{,x}^0) + B_{16} (\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x}) \quad (4.22)$$

dove si ricorda che la notazione $_{,x}$ indica che quel valore è derivato rispetto ad x . Le matrici $[A]$ e $[B]$ sono, rispettivamente, la matrice di rigidità membranale e la matrice di accoppiamento, calcolate come

$$[A] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [Q] dz \quad [B] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [Q] z dz \quad [D] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [Q] z^2 dz \quad (4.23)$$

dove si è introdotta anche la matrice di rigidità flessor-torsionale $[D]$. Quest'ultima è utile per esprimere la risultante torsionale attorno ad x , e cioè

$$M_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xx} dz = B_{11} u_{,x}^0 + D_{11} \varphi_{x,x} + B_{12} v_{,y}^0 + D_{12} \varphi_{y,y} + B_{16} (\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x}) \quad (4.24)$$

Il termine che permette di far nascere l'accoppiamento è B_{16} . Si precisa che, se il laminato è simmetrico, $[B] = [0]$.

In generale, quindi, è possibile esprimere le generiche N_{xx} , N_{yy} , N_{zz} , M_{xx} , M_{yy} , M_{zz} e le Q_x e Q_y . Queste ultime due indicano gli accoppiamenti flessor-torsionali.

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz & N_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} dz & N_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz \\ M_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xx} dz & M_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{yy} dz & M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xy} dz \\ Q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz & Q_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz \end{aligned} \quad (4.25)$$

In particolare $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0\} + z \{k\}$, dove k rappresenta la curvatura. Si ha

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & 0 \\ [B] & [D] & 0 \\ 0 & 0 & [Q] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\} \\ \{k\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0\} + z \{k\} \\ \{\varepsilon_0\} = \{u_{,x}^0, v_{,y}^0, u_{,y}^0, v_{,x}^0, \dots\} \\ \{k\} = \{\varphi_{x,x}, \varphi_{y,y}, \varphi_{x,y}, \varphi_{y,x}, 0, 0\} \end{cases} \quad (4.26)$$

A questo punto si può ricavare la rigidità $[K]$ nel classico modo, per mezzo del PLV. Si ha

$$[K] = \int_V [B]^T [Q] [B] dV \quad (4.27)$$

4.3. TEORIA DI REISSNER-MINDLIN

APPROSSIMAZIONE FEM

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{2\rho_\infty V_\infty^2 \sqrt{\frac{c-x}{x}}}_{a(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\tilde{K}_a]} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Inoltre, il campo di moto $\{s^0\}$ è anche funzione delle quattro matrici diagonali N_i , contenenti le funzioni di forma. È possibile scrivere

$$\begin{aligned} \{s^0\} &= \begin{bmatrix} \diagdown & & & \\ & N_1 & & \\ & & \diagdown & \\ & & & \diagdown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \diagdown & & & \\ & N_2 & & \\ & & \diagdown & \\ & & & \diagdown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \diagdown & & & \\ & N_3 & & \\ & & \diagdown & \\ & & & \diagdown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \diagdown & & & \\ & N_4 & & \\ & & \diagdown & \\ & & & \diagdown \end{bmatrix} \{s\} \\ \implies \delta w^0 &= N_1 \delta w_1 + N_2 \delta w_2 + N_3 \delta w_3 + N_4 \delta w_4 \end{aligned} \quad (4.35)$$

A questo punto si può sostituire δw nella (4.32), così come l'espressione del Δp della (4.34) in forma compatta. Si ottiene

$$\delta L_{ext} = \int_\Omega \{\delta s^0\}^T \{\Delta p\} \, d\Omega = \int_\Omega \{\delta s\}^T \underbrace{[N]^T a(x) [\tilde{K}_a] [N]}_{[K_a]} \{s\} \, d\Omega \quad (4.36)$$

Da cui si ricava la matrice di rigidezza aerodinamica $[K_a]$

$$\delta L_{ext} = \{\delta s\}^T [K_a] \{s\} \implies [K_a] = 2\rho_\infty V_\infty^2 \int_\Omega \sqrt{\frac{c-x}{x}} [N]^T [\tilde{K}_a] [N] \, d\Omega \quad (4.37)$$

La (4.37) è riscrivibile localmente, cioè per un elemento ij di pannello, come

$$[K_a]_{ij} = 2\rho_\infty V_\infty^2 \int_\Omega \sqrt{\frac{c-x}{x}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i N_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \, d\Omega \quad (4.38)$$

4.3. TEORIA DI REISSNER-MINDLIN

APPROSSIMAZIONE FEM

Inoltre si può formulare il lavoro delle forze esterne, funzione della matrice di rigidezza e smorzamento aerodinamico $[K_a]$ e $[D_a]$, per mezzo del PLV. Si ha

$$\delta L_{ext} = \{\delta S\}^T [K_a] \{S\} + \{\delta S\}^T [D_a] \{\dot{S}\}$$

$$\text{con } [D_a]_{ij} = \begin{matrix} & dw \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{u_\infty} N_i N_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \dot{w} \end{matrix} \implies [D_a] = \begin{bmatrix} [D_a]_{11} & [D_a]_{14} \\ [D_a]_{14} & [D_a]_{14} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Supponendo una soluzione esponenziale al problema si trasforma il problema omogeneo in un problema agli autovalori con incognita ν^2 . In tal caso si ha

$$([K] - [K_a]) \{q\} + \left([D] - [D_a] \right) \{\dot{q}\} + \left([M] - [M_a] \right) \{\ddot{q}\} = 0$$

$$([K] - [K_a]) \{\bar{q}\} e^{\nu t} - [D_a] \nu \{\bar{q}\} e^{\nu t} + [M] \nu^2 \{\bar{q}\} e^{\nu t} = 0 \quad \div e^{\nu t} \quad (4.46)$$

$$([K] - [K_a] - \nu [D_a] + \nu^2 [M]) \{\bar{q}\} = 0$$

La (4.46) ha per soluzioni delle coppie complesse coniugate di ν

$$\nu_i = \text{Re}(\nu) + i \text{Im}(\nu) \quad (4.47)$$

Diagrammando la parte reale e la parte immaginaria rispetto alla u_∞ si ricava un grafico del tutto analogo all'andamento di frequenze (parte immaginaria) e smorzamenti (parte reale) del flutter classico analizzato. In particolare si nota che l'ascissa in cui lo smorzamento passa da valori nulli o negativi a positivi coincide con l'ascissa in cui le due curve ν_1 e ν_2 vanno in coalescenza: questa condizione è quella di flutter, e la $U_F = u_\infty$.

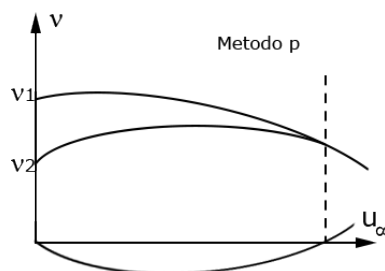


Figura 4.4: $\nu_i = \text{Re}(\nu) + i \text{Im}(\nu)$

Part II

TEORIA - AERODINAMICA NON STAZIONARIA

1.1. EQUAZIONI DEL MOTO

INTRODUZIONE

$\bar{\tau}_{eq}$ è legato al fluido in equilibrio locale, e dunque presenta solo sforzi normali alle superfici, mentre $\bar{\tau}_{dis}$ è legato al fluido in movimento, con differenze di velocità locali e quindi gradienti di velocità. Richiamando l'equazione costitutiva per i fluidi Newtoniani si ha

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{dis} &= 2\mu\bar{D} + \lambda(\nabla \cdot \vec{V})\bar{I} & \lambda &= -\frac{2}{3}\mu \\ \bar{\tau}_{dis} &= 2\mu\bar{D} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{V})\bar{I} = 2\mu\left[\bar{D} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \vec{V})\bar{I}\right] \end{aligned} \tag{1.4}$$

con $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ derivante dall'ipotesi di Stokes e \bar{D} detto tensore di velocità di scorrimento (o di deformazione), il quale deve essere simmetrico. Si può esplicitare per mezzo del gradiente di viscosità $\nabla \cdot \vec{V} = \bar{D} + \bar{A}$: si ha

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \bar{D} + \bar{A} \\ \nabla \cdot \vec{V} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\bar{D}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Si nota che la matrice \bar{D} è simmetrica mentre la \bar{A} è antisimmetrica.

Sfruttando le (1.1, 1.4) si ottengono due notazioni per l'equazione di bilancio della QDM. È possibile anche introdurre il concetto di vorticità per ottenerne una terza: in tal caso si introduce

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \nabla \cdot \left[\frac{\|\vec{V}\|^2}{2} + \underbrace{\vec{V} \wedge (\nabla \wedge \vec{V})}_{\vec{\omega}} \right] \tag{1.6}$$

Con questa aggiunta, le tre notazioni divengono

$$\begin{aligned} \textcircled{1} & \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) \\ \textcircled{2} & \quad \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) \\ \textcircled{3} & \quad \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \wedge \vec{\omega} + \nabla \left(\frac{\|\vec{V}\|^2}{2} \right) \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) \end{aligned} \tag{1.7}$$

1.2 Equazione di Crocco

Si suppone di trovarsi in condizione di flusso isentropico ed ideale: la prima ipotesi implica che la variazione di entropia nel tempo sia nulla ($s = \text{cost}$), la seconda che i fenomeni termici e di conducibilità siano trascurabili ($\mu = k = 0$). Le tre equazioni di Navier-Stokes ritrovate nel caso di fluido reale e viscoso si traducono nelle seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Reale} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) \\ \rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{V} + \rho \mathcal{D} - \nabla \cdot \vec{q} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ideale } \mu = k = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla p \\ \rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{V} \end{array} \right. \quad (1.17)$$

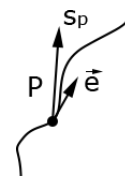
dove l'ultima può anche essere scritta nella forma $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost}$. In ogni caso, la prima e la terza equazione portano ad avere due incognite scalari, p e ρ , mentre la seconda mostra un'incognita vettoriale, $\vec{V} = \{u, v, w\}$: dunque il sistema è di tre equazioni in cinque incognite.

È di interesse valutare se è possibile avere una formulazione che includa la funzione potenziale Φ al posto delle tre componenti di \vec{V} . Per far ciò bisogna verificare se, oltre alla condizione di isentropia, sia verificata anche quella di omoentropia ($\nabla s = 0$), cioè se il flusso è ad entropia costante in tutto il campo di moto.

Si prendono i primi due principi della termodinamica e si uguagliano

$$\left\{ \begin{array}{l} Tds = de + pd \left(\frac{1}{\rho} \right) \\ dh = de + d \left(\frac{p}{\rho} \right) = de + pd \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} dp \end{array} \right. \implies Tds = dh - \frac{1}{\rho} dp \quad (1.18)$$

Si passa dalla notazione differenziale a quella con i gradienti. Supponendo di compiere uno spostamento s_p lungo una generica linea, e supponendo di analizzare l'andamento dei valori del campo del punto P in figura, chiamando \vec{e} il versore normale alla traiettoria locale si può scrivere



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dh}{ds_p} = (\nabla h \cdot \vec{e}) \implies dh = (\nabla h \cdot \vec{e}) ds_p \\ \frac{ds}{ds_p} = (\nabla s \cdot \vec{e}) \implies ds = (\nabla s \cdot \vec{e}) ds_p \\ \frac{dp}{ds_p} = (\nabla p \cdot \vec{e}) \implies dp = (\nabla p \cdot \vec{e}) ds_p \end{array} \right. \quad (1.19)$$

Sostituendo le (1.19) nella (1.18) si ottiene

$$T \nabla s = \nabla h - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.20)$$

Dalla terza notazione delle (1.7), per $\mu = 0$, è possibile ricavare

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \wedge \vec{\omega} + \nabla \left(\frac{\|\vec{V}\|^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.21)$$

1.3 Equazione di Bernoulli

Si vuole dimostrare l'equazione di Bernoulli per campo non stazionario, comprimibile ed irrotazionale

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{V}\|^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{\|\vec{V}_\infty\|^2}{2} + \frac{c_\infty^2}{\gamma - 1}$$

$$\vec{V} = \nabla \Phi \implies \text{QDM (1.7 (3))} \implies \text{derivate (1.19)} \implies \int_{\bar{x}} \implies c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$$

Si analizza il caso di fluido stazionario, compressibile ed irrotazionale. Se è irrotazionale, in particolare,

$$\nabla \wedge \vec{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (0, 0, 0) \implies \omega = 0 \tag{1.24}$$

Se e solo se valgono le due precedenti, cioè se l'intero campo è irrotazionale, esiste una funzione Φ chiamata potenziale cinetico tale per cui

$$\vec{V} = \nabla \Phi \tag{1.25}$$

Riprendendo l'equazione di bilancio della quantità di moto (1.7 (3)) si ha

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\|\vec{V}\|^2}{2} \right) \right] &= -\nabla p \\ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) + \nabla \left(\frac{\|\vec{V}\|^2}{2} \right) &= -\frac{1}{\rho} \nabla p \\ \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{V}\|^2}{2} \right) &= -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad \xrightarrow{(1.19)} \quad d \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{V}\|^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} dp \end{aligned} \tag{1.26}$$

Poichè il campo è isentropico, considerando la pressione e la densità indisturbata p_∞ e ρ_∞ , si può esplicitare dp

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \implies p = \rho^\gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \implies dp = \gamma \rho^{\gamma-1} d\rho \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \tag{1.27}$$

Sostituendo la (1.27) nella (1.26) si ha

$$d \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{V}\|^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \gamma \rho^{\gamma-1} d\rho \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} = -\gamma \rho^{\gamma-2} d\rho \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \tag{1.28}$$

Entrambi i membri della (1.28) possono essere integrate fra ∞ ed un valore arbitrario \bar{x} che sia all'interno del campo di moto. Si ottiene

1.4 Equazione del potenziale

Si vuole dimostrare l'equazione del potenziale Φ per campo non stazionario, comprimibile ed irrotazionale

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\|\nabla \Phi\|^2) + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla (\|\nabla \Phi\|^2) \right] = 0$$

$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V} \implies c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{s=const} \implies \text{QDM (1.7(3))} \cdot \vec{V} \implies \text{Bernoulli (1.31)} \implies p = \frac{\rho c^2}{\gamma} \implies \frac{d}{dt}(1.31).$

Si prende l'equazione di continuità e la si relazione alla derivata sostanziale fra dp e c

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V} \\ c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{s=const} \implies dp = c^2 d\rho \xrightarrow{(1.19)} \frac{Dp}{Dt} = c^2 \frac{D\rho}{Dt} \end{cases} \implies \boxed{\frac{Dp}{Dt} = c^2 \frac{D\rho}{Dt} = -c^2 \rho \nabla \cdot \vec{V}} \quad \text{con } \frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla p \quad (1.32)$$

Poichè ci si trova in campo irrotazionale, si semplifica opportunamente la (1.7 (3)) e la si moltiplica per \vec{V}

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \nabla (\|\vec{V}\|^2) &= -\nabla p \\ \boxed{\rho \vec{V} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \vec{V} \nabla (\|\vec{V}\|^2)} &= -\vec{V} \cdot \nabla p \end{aligned} \quad (1.33)$$

Richiamando l'equazione di Bernoulli e derivandola nel tempo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{V}\|^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\|\vec{V}_\infty\|^2}{2} + \frac{c_\infty^2}{\gamma-1} \right) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \vec{V} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{\partial c^2}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

Oltre alla considerazione che i valori indisturbati non varino nel tempo, è necessario esplicitare la derivata della velocità del suono. Si richiama la formulazione $c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$, si relaziona p a p_∞ e la si deriva

$$\begin{aligned} c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \implies \frac{p}{p_\infty} &= \frac{\frac{\rho c^2}{\gamma}}{\frac{\rho_\infty c_\infty^2}{\gamma}} = \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{c^2}{c_\infty^2} & \frac{\rho}{\rho_\infty} &= \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ \implies \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} &= \frac{c^2}{c_\infty^2} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} &= \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial c^2}{\partial t} \implies \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{\partial p}{\partial t} = p_\infty^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \frac{\gamma-1}{\gamma} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}-1} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial c^2}{\partial t} \end{aligned}$$

1.5 Equazione del c_p

Si vuole dimostrare l'equazione del coefficiente di pressione c_p per campo stazionario, comprimibile ed irrotazionale

$$c_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[1 - \frac{\gamma-1}{c_\infty^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{V}\|^2}{2} - \frac{\|\vec{V}_\infty\|^2}{2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\}$$

$c_p = \frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} \implies c_p = f(M_\infty) \implies \text{Bernoulli (1.31)} \implies \frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{c^2}{c_\infty^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$.

Sia il campo di moto stazionario, compressibile e irrotazionale. Si vuole valutare il coefficiente di pressione c_p sapendo che questo è funzione di Φ . Per definizione

$$\begin{aligned} c_p = f(\Phi) &= \frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} \quad \div p_\infty \\ &= \frac{\frac{p}{p_\infty} - 1}{\frac{1}{2} \frac{\rho_\infty}{p_\infty} V_\infty^2} \quad c_\infty^2 = \gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \implies \frac{\rho_\infty}{p_\infty} = \frac{\gamma}{c_\infty^2} \\ &= \frac{\frac{p}{p_\infty} - 1}{\frac{1}{2} \gamma \frac{V_\infty^2}{c_\infty^2}} \quad V_\infty^2 = M_\infty^2 c_\infty^2 \\ &\implies \boxed{c_p = \frac{2}{\gamma M_\infty} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right)} \end{aligned} \tag{1.38}$$

Dall'isentropica si ricava

$$\left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{c^2}{c_\infty^2} \implies \frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{c^2}{c_\infty^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{1.39}$$

Il problema principale, nella (1.38), era il calcolo del rapporto delle pressioni, mentre inserendo la (1.39) diviene il calcolo del rapporto delle velocità del suono locali ed indisturbate. In realtà è possibile eliminare tali variabili reintroducendo l'equazione di Bernoulli per campo stazionario, comprimibile ed irrotazionale (1.31) e sostituendola all'interno della (1.39). Si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{V}\|^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} &= \frac{\|\vec{V}_\infty\|^2}{2} + \frac{c_\infty^2}{\gamma-1} \\ \frac{c^2}{\gamma-1} &= \frac{c_\infty^2}{\gamma-1} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{V}\|^2}{2} - \frac{\|\vec{V}_\infty\|^2}{2} \right) \quad \times \frac{\gamma-1}{c_\infty^2} \\ \frac{c^2}{c_\infty^2} &= 1 - \frac{\gamma-1}{c_\infty^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{V}\|^2}{2} - \frac{\|\vec{V}_\infty\|^2}{2} \right) \end{aligned} \tag{1.40}$$

1.6 Linearizzazione

1.6.1 Equazione del potenziale linearizzata

Si vuole dimostrare l'equazione del potenziale linearizzata per campo non stazionario, comprimibile, irrotazionale e per piccole perturbazioni

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{2}{V_\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \right)$$

$\vec{V} = \vec{V}_\infty + \vec{V}_p \implies u, v, w \ll 1 \implies \nabla \Phi_\infty$ e $\nabla(\vec{V}_\infty \varphi) \implies \Phi = \vec{V}_\infty(x + \varphi) \implies \Delta \rho \implies$
 continuità $\implies \|\vec{V}\|^2, \|\vec{V}_\infty\|^2 \implies$ Taylor.

Il generico campo di velocità, così come il potenziale e la densità, può essere inteso come somma di un contributo di corrente asintotico ed uno perturbativo. Siano

$$\begin{aligned} \vec{V}_\infty & \text{ velocità della corrente asintotica} \\ \vec{V}_p & \text{ velocità di perturbazione} \end{aligned} \tag{1.43}$$

Sia la corrente asintotica collineare con il versore x di riferimento, e cioè che $\vec{V}_\infty = V_\infty \hat{i}$. Allora

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \vec{V}_\infty + \vec{V}_p = \begin{pmatrix} V_\infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_\infty u \\ V_\infty v \\ V_\infty w \end{pmatrix} \quad \text{con } V_\infty u, V_\infty v, V_\infty w \ll V_\infty \implies u, v, w \ll 1 \tag{1.44}$$

Con la semplificazione di piccole perturbazioni le tre componenti del vettore velocità \vec{V} possono essere riscritte in forma estesa come

$$\begin{cases} V_x(x, y, z, t) = V_\infty + V_\infty u(x, y, z, t) = V_\infty(1 + u) \\ V_y(x, y, z, t) = V_\infty v(x, y, z, t) = V_\infty v \\ V_z(x, y, z, t) = V_\infty w(x, y, z, t) = V_\infty w \end{cases} \tag{1.45}$$

Per quanto riguarda il potenziale, invece, sia Φ_∞ il potenziale dovuto alla velocità asintotica, mentre si introduce il potenziale di perturbazione

$$\begin{aligned} [\Phi_\infty] &= \text{m s}^{-1} && \text{Potenziale asintotico} \\ [\varphi] &= \text{m} && \text{Potenziale di perturbazione, con } \vec{V}_\infty \varphi = \vec{V}_p \end{aligned} \tag{1.46}$$

Il legame fra i due potenziali lo si ritrova esplicitando i termini $\nabla \Phi_\infty$ e $\nabla(V_\infty \varphi)$. Si ha

$$\begin{aligned} \nabla \Phi_\infty &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_\infty}{\partial t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{(1.25)}{=} \vec{V}_\infty = \begin{pmatrix} V_\infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \frac{\partial \Phi_\infty}{\partial t} = V_\infty \implies \Phi_\infty = V_\infty x + \overset{0}{k} \\ \nabla(\vec{V}_\infty \varphi) &= \vec{V}_\infty \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \vec{V}_p = \begin{pmatrix} V_\infty u \\ V_\infty v \\ V_\infty w \end{pmatrix} \implies \cancel{\vec{V}_\infty} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{V_\infty} u \\ \cancel{V_\infty} v \\ \cancel{V_\infty} w \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.47}$$

1.6. LINEARIZZAZIONE

INTRODUZIONE

$$\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \hat{i} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \hat{j} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \hat{k} \implies 1 + 2\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \implies \boxed{\|\vec{V}\|^2 \approx V_\infty^2 \left(1 + 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)} \quad (1.55)$$

dove si sono trascurati gli infinitesimi di ordine superiore. Risostituendo le (1.54, 1.55) nella (1.53) si ottiene

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{c_\infty^2} \left(V_\infty \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{V_\infty^2}{2} + V_\infty^2 \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{V_\infty^2}{2}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (1.56)$$

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{c_\infty^2} V_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left[1 - (\gamma-1)M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Si precisa che si è lasciato il segno di somma e non di sottrazione al termine $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ come spesso in letteratura, includendo tale contributo nella perturbazione φ . Eseguendo uno sviluppo di Taylor del secondo membro della (1.56) arrestato al prim'ordine si ottiene

$$(1-x)^\alpha \approx 1 - \alpha x \implies \frac{\rho}{\rho_\infty} = \left[1 - (\gamma-1)M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \approx 1 - M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \quad (1.57)$$

$$\text{Si ricava } \Delta\rho = \rho - \rho_\infty \implies \frac{\Delta\rho}{\rho_\infty} = \frac{\rho}{\rho_\infty} - 1 \stackrel{(1.57)}{=} -M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \quad (1.58)$$

$$\Delta\rho = -\rho_\infty M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$$

Si può sostituire nell'equazione della continuità (1.52) il termine sopra ricercato, ottenendo

$$\underbrace{-\rho_\infty M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}\right)}_{\mathcal{K}} + \nabla \cdot \left[(\rho_\infty + \Delta\rho) (V_\infty \hat{i} + V_\infty \nabla\varphi)\right] = 0$$

$$-\mathcal{K} + \rho_\infty V_\infty \nabla \cdot \left[\left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_\infty}\right) (\hat{i} + \nabla\varphi)\right] = 0 \quad \frac{\Delta\rho}{\rho_\infty}$$

$$-\mathcal{K} + \rho_\infty V_\infty \nabla \cdot \left[\left(1 - M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right) (\hat{i} + \nabla\varphi)\right] = 0$$

$$-\mathcal{K} + \rho_\infty V_\infty \nabla \cdot \left[\hat{i} + \nabla\varphi - M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \hat{i} - M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \nabla\varphi\right] = 0$$

$$-\rho_\infty M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) + \rho_\infty V_\infty \left[\nabla^2\varphi - M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\right] = 0 \quad \div \rho_\infty V_\infty$$

$$-M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}\right) + \nabla^2\varphi - M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) = 0 \quad \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2, y^2, z^2}$$

$$-M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}\right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$-M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{2}{V_\infty} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}\right) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - M_\infty^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0$$

$$\boxed{(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{2}{V_\infty} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}\right)} \quad (1.59)$$

1.6.3 Equazione del c_p linearizzata

Si vuole dimostrare l'equazione del coefficiente di pressione linearizzata in forma compatta per campo non stazionario, comprimibile, irrotazionale e per piccole perturbazioni

$$c_p = -\frac{2}{V_\infty} \frac{D\varphi}{Dt}$$

$$c_p \stackrel{(1.38)}{=} \frac{2}{\gamma M_\infty} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) \implies \rho = \rho_\infty + \Delta\rho \implies (1.58).$$

Si sa per definizione che il coefficiente di pressione c_p

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} \stackrel{(1.38)}{\implies} \boxed{c_p = \frac{2}{\gamma M_\infty} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right)} \quad (1.63)$$

Per le relazioni isentropiche e per piccole perturbazioni si può scrivere il legame fra pressioni e densità e la variazione di densità (1.50)

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_\infty} &= \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^\gamma & \rho &= \rho_\infty + \Delta\rho \\ &= \left(\frac{\rho_\infty + \Delta\rho}{\rho_\infty} \right)^\gamma \\ &= \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_\infty} \right)^\gamma & \text{Taylor I ordine} \\ &\approx 1 + \gamma \frac{\Delta\rho}{\rho_\infty} \end{aligned} \quad (1.64)$$

Nel processo di linearizzazione del potenziale si era trovato che il rapporto fra componente perturbativa ed asintotica era correlato a

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\rho}{\rho_\infty} &= -M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \\ \implies \frac{p}{p_\infty} &= 1 - \gamma M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.65)$$

Sostituendo la (1.65) nella (1.63) ed introducendo la derivata sostanziale si ottiene

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{2}{\gamma M_\infty} \left[1 - \gamma M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) - 1 \right] \\ &= -2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{2}{V_\infty} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) & \frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla f \\ &\boxed{c_p = -\frac{2}{V_\infty} \frac{D\varphi}{Dt}} \end{aligned} \quad (1.66)$$

Condizioni al contorno

Esistono due condizioni al contorno per definire completamente il problema della linearizzazione del potenziale. La prima condizione riguarda il potenziale di perturbazione φ , mentre la seconda è imposta sul corpo.

Brevemente, la condizione al contorno sul potenziale di perturbazione impone che questo si annulli all'infinito a monte, e cioè che

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \varphi(\bar{x}, t) = \varphi_\infty = 0$$

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \bar{V} \stackrel{(1.25)}{=} \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \nabla \Phi \stackrel{(1.48)}{=} \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \nabla(\Phi_\infty + V_\infty \varphi_\infty) = \bar{V}_\infty = \nabla \Phi_\infty \implies \varphi_\infty = 0 \tag{1.69}$$

Più di interesse è l'imposizione della condizione al contorno sul corpo: la velocità del flusso è tangente in ogni punto della superficie, e cioè le componenti normali della velocità -sia del flusso che del corpo- sono uguali; il corpo è libero di muoversi (e deformarsi) nel fluido, ciò che importa è che le mutue velocità relative, proiettate sulla normale locale della superficie, coincidano.

Si prende un sistema di riferimento body e si definisce la \bar{V}_B come la velocità del corpo nel fluido, mentre con \bar{V} la velocità del flusso. Sia inoltre \hat{n} il versore normale localmente alla superficie: deve valere

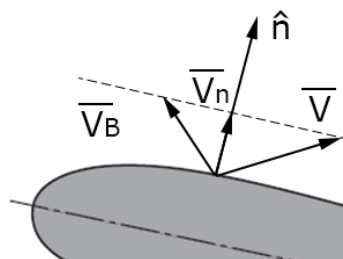


Figura 1.1: Condizione di tangenza

$$\bar{V} \cdot \hat{n} = V_n = V_{Bn} = \bar{V}_B \cdot \hat{n} \implies \boxed{V_n = V_{Bn} \quad \bar{V} \cdot \hat{n} = \bar{V}_B \cdot \hat{n}} \tag{1.70}$$

Richiamando e sostituendo la formulazione $\bar{V} = f(\varphi)$ (1.49) si ottiene

$$(V_\infty \hat{i} + V_\infty \cdot \nabla \varphi) \cdot \hat{n} = \bar{V}_B \cdot \hat{n} \implies \boxed{V_\infty (\hat{i} \cdot \hat{n} + \nabla \varphi \cdot \hat{n}) = \bar{V}_B \cdot \hat{n}} \tag{1.71}$$

La \bar{V}_B è supposta nota, ma è necessario esprimere V_{Bn} ed \hat{n} stesso in funzione del moto della struttura. Viene introdotto un sistema di coordinate curvilineo $\{\xi, \eta\}$ su una generica superficie mobile e deformabile: il generico vettore posizione \bar{x} sarà, in quanto calcolato su una superficie mobile, anche funzione del tempo. Si ha

$$\bar{x} = \bar{x}(\xi, \eta, t) \implies \bar{x} = \begin{cases} x(\xi, \eta, t) \\ y(\xi, \eta, t) \\ z(\xi, \eta, t) \end{cases} \tag{1.72}$$

Dato che si stanno analizzando le condizioni al contorno di equazioni linearizzate, è possibile esprimere la generica posizione \bar{x} di un punto sulla superficie come somma di un contributo stazionario (con superficie fissa nel tempo) e di un contributo instazionario (che descrive lo spostamento e/o la deformazione della superficie nel tempo). Rispettivamente

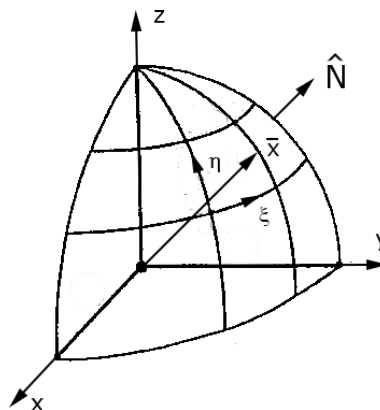


Figura 1.2: Riferimento ξ, η

$$\begin{cases} \bar{x}_a = \bar{x}_a(\xi, \eta) & \text{Stazionario} \\ \bar{u} = \bar{u}(\xi, \eta, t) & \text{Instazionario} \end{cases} \tag{1.73}$$

1.6. LINEARIZZAZIONE

INTRODUZIONE

$$\begin{aligned}
 V_\infty (\hat{i} \cdot \hat{n} + \nabla \varphi \cdot \hat{n}) &= \vec{V}_B \cdot \hat{n} \\
 V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi_s + \nabla \varphi_i) \hat{n} &= \vec{V}_B \cdot \hat{n} \quad \vec{V}_B = \dot{\vec{u}} \\
 V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi_s + \nabla \varphi_i) \hat{n} &= \dot{\vec{u}} \cdot \hat{n} \quad \hat{n} \quad (1.77) \\
 V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi_s + \nabla \varphi_i) [\hat{n}_0 (1 + \hat{n}_0 \cdot \Delta \hat{n}) - \Delta \hat{n}] &= \dot{\vec{u}} [\hat{n}_0 (1 + \hat{n}_0 \cdot \Delta \hat{n}) - \Delta \hat{n}] \\
 V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi_s) [\hat{n}_0 (1 + \hat{n}_0 \cdot \Delta \hat{n}) - \Delta \hat{n}] + V_\infty \cdot \nabla \varphi_i [\hat{n}_0 (1 + \hat{n}_0 \cdot \Delta \hat{n}) - \Delta \hat{n}] &= \dot{\vec{u}} [\hat{n}_0 (1 + \hat{n}_0 \cdot \Delta \hat{n}) - \Delta \hat{n}] \\
 V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi_s) \hat{n}_0 + V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi_s) [\hat{n}_0 (\hat{n}_0 \cdot \Delta \hat{n}) - \Delta \hat{n}] + V_\infty \cdot \nabla \varphi_i \hat{n}_0 + V_\infty \cdot \nabla \varphi_i [\hat{n}_0 (\hat{n}_0 \cdot \Delta \hat{n}) - \Delta \hat{n}] &= \dot{\vec{u}} \cdot \hat{n}_0 + \dot{\vec{u}} [\hat{n}_0 (\hat{n}_0 \cdot \Delta \hat{n}) - \Delta \hat{n}]
 \end{aligned}$$

Da quest'ultima vengono eliminati i termini di ordine superiore nel tempo, e cioè i termini che contengono un prodotto fra $\nabla \varphi_i$ e $\Delta \hat{n}$ oppure fra $\dot{\vec{u}}$ e $\Delta \hat{n}$ (sottolineati). Dunque si ricava

$$\boxed{V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi_s) \hat{n}_0 + V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi_s) [\hat{n}_0 (\hat{n}_0 \cdot \Delta \hat{n}) - \Delta \hat{n}] + V_\infty \cdot \nabla \varphi_i \hat{n}_0 = \dot{\vec{u}} \cdot \hat{n}_0} \quad (1.80)$$

$$A_{staz} + A_{instaz} = B_{staz} + B_{instaz}$$

La (1.80) è formata da due termini per ambo i membri, suddivisi fra stazionari ed instazionari. Poichè deve valere l'uguaglianza fra i soli stazionari o i soli instazionari, si ottengono due equazioni che identificano due condizioni al contorno

$$\begin{cases}
 A_{staz} = B_{staz} & \textcircled{1} & V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi_s) \hat{n}_0 = 0 \\
 A_{instaz} = B_{instaz} & \textcircled{2} & V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi_s) [\hat{n}_0 (\hat{n}_0 \cdot \Delta \hat{n}) - \Delta \hat{n}] + V_\infty \cdot \nabla \varphi_i \hat{n}_0 = \dot{\vec{u}} \cdot \hat{n}_0
 \end{cases} \quad (1.81)$$

La (1.81) $\textcircled{1}$ è la condizione al contorno riferita al regime stazionario, e cioè la condizione di tangenza riscritta nella forma del potenziale di perturbazione. Quindi, questa formulazione è valida per un fluido ideale e stazionario, per corpo fermo e per velocità normale del corpo alla superficie nulla.

La (1.81) $\textcircled{2}$ è la condizione al contorno del regime instazionario, in quanto è presente la velocità di deformazione del corpo $\dot{\vec{u}}$. La (1.81) $\textcircled{2}$ può essere alternativamente scritta come

$$V_\infty \cdot \nabla \varphi_i \hat{n}_0 = \dot{\vec{u}} \cdot \hat{n}_0 - V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi_s) [\hat{n}_0 (\hat{n}_0 \cdot \Delta \hat{n}) - \Delta \hat{n}] \quad (1.82)$$

da cui si può esplicitare il termine $\nabla \varphi_i \hat{n}_0$. Difatti questo termine è utile nella definizione della derivata del potenziale di perturbazione instazionario in direzione \hat{n}_0 . Dunque si ha

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \nabla \varphi_i \cdot \hat{n}_0 = \underbrace{\frac{\dot{\vec{u}} \cdot \hat{n}_0}{V_\infty}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{(\hat{i} + \nabla \varphi_s) [\hat{n}_0 (\hat{n}_0 \cdot \Delta \hat{n}) - \Delta \hat{n}]}_{\textcircled{2}} \quad (1.83)$$

La variazione del potenziale di perturbazione è data quindi da due contributi: il primo $\textcircled{1}$ è il termine dinamico, dipendente esplicitamente dalla velocità di deformazione del corpo $\dot{\vec{u}}$. Tale contributo non è nullo solo nel caso in cui la deformazione del corpo sia dipendente dal tempo, come ipotizzato nell'analisi delle condizioni al contorno.

Invece il contributo $\textcircled{2}$ è il termine geometrico, sempre presente anche nel caso in cui u non dipenda dal tempo, e cioè se $\vec{x} = \vec{x}(\xi, \eta)$.

2.2. METODO DELLE SINGOLARITÀ VIRTUALI METODI DI RISOLUZIONE ANALITICA

2.2 Metodo delle singolarità virtuali

FLUSSO INCOMPRESSIBILE ED IRROTAZIONALE $\stackrel{(1.37)}{\implies} \nabla^2 \varphi = 0 \implies \nabla^2 \Phi = 0$
 Incognita: intensità campi fondamentali

Il metodo delle singolarità virtuali è valido solo per campi incompressibili ed irrotazionali. Dunque l'equazione del potenziale può essere notevolmente semplificata e, data la linearità del problema, il potenziale di perturbazione può essere trascurato e pertanto si può esprimere l'intero potenziale per mezzo di Φ . Se ne deduce

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\|\vec{V}\|^2 \right) + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \left(\|\vec{V}\|^2 \right) \right] = 0 \implies \nabla^2 \varphi = 0 \implies \nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.2)$$

Il corpo aerodinamico in esame è simulato attraverso una distribuzione di campi fondamentali, come sorgenti, pozzi, doppiette, vortici: essendo linearizzato, il problema supporta la sovrapposizione di questi campi fondamentali.

L'incognita del problema è l'intensità dei campi fondamentali: per poterla determinare, sarà necessario imporre delle condizioni al contorno e delle condizioni di chiusura; in altri termini, la portata totale dei campi (la differenza fra ciò che riceve, ad esempio, un pozzo, e ciò che emana una sorgente) deve essere nulla.

Vengono di seguito evidenziate delle soluzioni notevoli dell'equazione di Laplace (2.2).

Corrente uniforme

Sia il campo di moto piano (x, y) . La \vec{V}_∞ è somma delle componenti

$$\begin{aligned} \vec{V}_\infty &= u_\infty \hat{i} + v_\infty \hat{j} \\ \nabla \Phi = \vec{V}_\infty &\implies \boxed{\Phi(x, y) = u_\infty x + v_\infty y} \end{aligned} \quad (2.3)$$

mentre il generico punto P è ad una distanza r dal sistema di riferimento, con

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \vec{r} &= x \hat{i} + y \hat{j} \end{aligned} \quad (2.4)$$

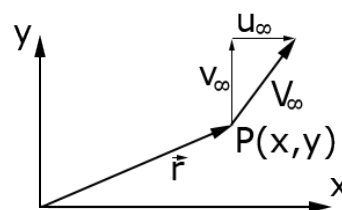


Figura 2.2: Corrente uniforme

Sorgente (pozzo) di portata Q

Il riferimento è polare (r, ϑ) . Sia r_0 una generica lunghezza di riferimento, e Q il valore della portata generata nell'origine: se $Q > 0$ il campo fondamentale è una sorgente, altrimenti è un pozzo. Il potenziale vale

$$\boxed{\Phi(r, \vartheta) = \frac{Q}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right)} \quad (2.5)$$

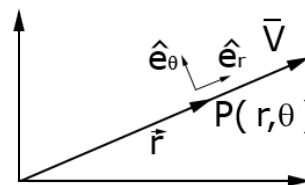


Figura 2.3: Sorgente $Q > 0$

Il campo di velocità è unicamente radiale, lungo il versore \hat{e}_r . Si ha

$$\vec{V} = \nabla \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \hat{e}_\vartheta + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{e}_r = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{1}{r_0} \hat{e}_r \implies \boxed{\vec{V} = \frac{Q}{2\pi r} \hat{e}_r} \quad (2.6)$$

2.2. METODO DELLE SINGOLARITÀ VIRTUALI METODI DI RISOLUZIONE ANALITICA

2.2.1 Distribuzione di sorgenti lungo una linea

Ciascun campo fondamentale è soluzione dell'equazione di Laplace (2.2), e per la linearizzazione qualsiasi combinazione lineare di campi fondamentali sarà ancora soluzione della (2.2). Pertanto si può considerare una distribuzione $\sigma(Q)$ di campi fondamentali di intensità Q (o μ) incognita e si definisce soluzione dell'equazione lungo una linea, una superficie o un volume l'integrale

$$\begin{aligned} \text{Integrale di linea lungo } \ell \quad \Phi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\ell} \sigma(Q) \ln r \, d\ell \\ \text{Integrale di superficie lungo } S \quad \Phi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \iint_S \sigma(Q) \ln r \, dS \\ \text{Integrale di volume lungo } \mathcal{V} \quad \Phi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \sigma(Q) \ln r \, d\mathcal{V} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ovviamente, se si considera un solo campo fondamentale, $\sigma(Q) = Q$.

Inoltre, poichè l'interesse principale è fissato sui corpi portanti, è necessario che valga la condizione di Kutta: le velocità presso il dorso ed il ventre del bordo di fuga devono coincidere. Con tale condizione verificata, il campo di moto è irrotazionale.

La portanza può essere simulata per mezzo di un campo fondamentale di tipo vortice: però, per la condizione di chiusura, la vorticità totale del campo dev'essere nulla; sarà la scia, simulata da una vorticità uguale e contraria, a garantire l'equilibrio.

Per dimostrare ciò si procede da un caso di corpo fermo: in questo caso non c'è vorticità, nè sul corpo nè in tutto il campo; non appena il corpo si muove, su di esso nasce una vorticità che simula la portanza; nella regioned di spazio "vuota" appena lasciata dal corpo, a prescindere dal resto del campo, deve essere nata una vorticità uguale e contraria, che corrisponde alla scia. Si precisa che avere vorticità in scia è, in effetti, un fenomeno rotazionale: considerando piccole perturbazioni e piccoli angoli di incidenza, questo contributo può essere trascurato in quanto il suo dominio nello spazio diviene molto piccolo.

Sia indicata con $\bar{\gamma}$ la distribuzione di intensità di vorticità di scia, e sia P un generico punto mosso con velocità $\vec{V}(P)$, distante \vec{r} dall'origine del vortice e indotto da $\bar{\gamma}$. Per la legge di Biot-Savart la velocità indotta dalla vorticità è pari a

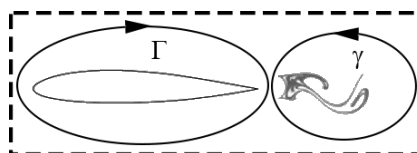


Figura 2.6: Vorticità di scia $\bar{\gamma}$

$$\vec{V}(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\bar{\gamma} \wedge \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \, d\mathcal{V} \tag{2.12}$$

A titolo di esempio, per "costruire" la corrente fluida che incide un profilo alare è necessario inserire una distribuzione di sorgenti a differente Q in modo da simulare la presenza e lo spessore del profilo, una distribuzione di doppiette che serve per la condizione di chiusura e una serie di correnti uniformi per simulare la corrente avanzante.

Per tale motivo, il metodo delle singolarità virtuali è impiegato solo per corpi con geometria semplice. Talvolta trovare simulazioni per geometrie complesse può divenire fin troppo oneroso computazionalmente o può accadere che non esistano soluzioni dell'equazioni di Laplace.

La soluzione, in questo caso, è l'implementazione di algoritmi matematici che permettano una risoluzione approssimata, come il metodo dei pannelli.

2.3. METODO DELLA FUNZIONE DI GREEN METODI DI RISOLUZIONE ANALITICA

Per dimostrare la validità del modello, si mettono a sistema le equazioni (2.15, 2.17). L'una e l'altra vengono moltiplicate per il termine loro mancante: la prima viene moltiplicata per \mathcal{G} e la seconda per Φ . Si ottiene, integrando

$$\begin{aligned} \begin{cases} \nabla^2 \Phi = g(\vec{r}) \\ \nabla^2 \mathcal{G} = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \end{cases} \times \begin{cases} \mathcal{G} \\ \Phi \end{cases} \implies \begin{cases} \mathcal{G} \nabla^2 \Phi = \mathcal{G} g(\vec{r}) & - \\ \Phi \nabla^2 \mathcal{G} = \Phi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) & = \end{cases} \\ \mathcal{G} \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \mathcal{G} = \mathcal{G} g(\vec{r}) - \Phi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\int_{\Omega} (\mathcal{G} \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \mathcal{G}) \, d\Omega = \int_{\Omega} [\mathcal{G} g(\vec{r}) - \Phi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)] \, d\Omega$$

Cercando di esplicitare i termini a primo membro, si può scrivere con la divergenza

$$\begin{aligned} \nabla(\mathcal{G} \nabla \Phi) &= \mathcal{G} \nabla(\nabla \Phi) + \nabla \mathcal{G} \cdot \nabla \Phi = \mathcal{G} \nabla^2 \Phi + \nabla \mathcal{G} \cdot \nabla \Phi \implies \mathcal{G} \nabla^2 \Phi = \nabla(\mathcal{G} \nabla \Phi) - \nabla \mathcal{G} \cdot \nabla \Phi \\ \nabla(\Phi \nabla \mathcal{G}) &= \Phi \nabla(\nabla \mathcal{G}) + \nabla \Phi \cdot \nabla \mathcal{G} = \Phi \nabla^2 \mathcal{G} + \nabla \Phi \cdot \nabla \mathcal{G} \implies \Phi \nabla^2 \mathcal{G} = \nabla(\Phi \nabla \mathcal{G}) - \nabla \Phi \cdot \nabla \mathcal{G} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Sostituendo le (2.20) nella (2.19) si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\nabla(\mathcal{G} \nabla \Phi) - \nabla \mathcal{G} \cdot \nabla \Phi - \nabla(\Phi \nabla \mathcal{G}) + \nabla \Phi \cdot \nabla \mathcal{G}] \, d\Omega &= \int_{\Omega} [\mathcal{G} g(\vec{r}) - \Phi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)] \, d\Omega \\ \int_{\Omega} [\nabla(\mathcal{G} \nabla \Phi) - \nabla(\Phi \nabla \mathcal{G})] \, d\Omega &= \int_{\Omega} \mathcal{G} g(\vec{r}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \Phi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \, d\Omega \end{aligned} \tag{2.21}$$

Per definizione di delta di Dirac, l'ultimo termine, se si è scelto $\vec{r}_0 \in \Omega$, è pari a $\Phi(\vec{r}_0)$. Dunque si può esplicitare tutto come

$$\Phi(\vec{r}_0) = \int_{\Omega} \mathcal{G} g(\vec{r}) \, d\Omega + \int_{\Omega} [\nabla(\Phi \nabla \mathcal{G}) - \nabla(\mathcal{G} \nabla \Phi)] \, d\Omega \tag{2.22}$$

Per il teorema di Gauss della divergenza si può trasformare l'integrale di volume su un integrale di superficie, del tipo

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{q} \, d\Omega = \int_{\sigma} \vec{q} \cdot \hat{n} \, d\sigma \tag{2.23}$$

Applicando tale teorema al secondo termine a secondo membro della (2.22) si ottiene

$$\Phi(\vec{r}_0) = \int_{\Omega} \mathcal{G} g(\vec{r}) \, d\Omega + \int_{\sigma} (\Phi \nabla \mathcal{G} \cdot \hat{n} - \mathcal{G} \nabla \Phi \cdot \hat{n}) \, d\sigma \tag{2.24}$$

Esplicitando anche le divergenze si ottiene, infine

$$\left. \begin{aligned} \nabla \mathcal{G} \cdot \hat{n} &= \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} \\ \nabla \Phi \cdot \hat{n} &= \frac{\partial \Phi}{\partial n} \end{aligned} \right\} \implies \boxed{\Phi(\vec{r}_0) = \underbrace{\int_{\Omega} \mathcal{G}(\vec{r}, \vec{r}_0) g(\vec{r}) \, d\Omega}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\int_{\sigma} \left[\Phi(\vec{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} - \mathcal{G}(\vec{r}, \vec{r}_0) \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] d\sigma}_{\textcircled{2}}} \tag{2.25}$$

Confrontando i secondi membri della (2.25) e della soluzione generalizzata dell'equazione di Laplace (2.16) si nota che i termini $\textcircled{1}$ coincidono, e dunque che si è trovata l'espressione del contributo legato alla condizione sul bordo

$$\boxed{\Phi(\vec{r}_0)|_{cc} = \int_{\sigma} \left[\Phi(\vec{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} - \mathcal{G}(\vec{r}, \vec{r}_0) \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] d\sigma} \tag{2.26}$$

Nello studio del metodo dei pannelli verrà impiegato il parametro $E = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ in sostituzione della condizione al contorno, il cui valore indicherà, rispettivamente, se si sta considerando un punto del dominio nel corpo, sulla sua superficie o al di fuori.

2.4. METODO DEI PANNELLI

METODI DI RISOLUZIONE ANALITICA

Le intensità incognite del problema sono la distribuzione delle sorgenti $q(S)$ e la distribuzione dei vortici $\gamma(S)$ lungo la linea o superficie S . Dimensionalmente sono intensità per unità di lunghezza o superficie. Queste vengono indicate nella discretizzazione di un profilo in N pannelli, a partire dal bordo di fuga numerati in senso antiorario. Nel bordo di fuga, per rispettare la condizione di Kutta, è posto un pannello "zero" fittizio.

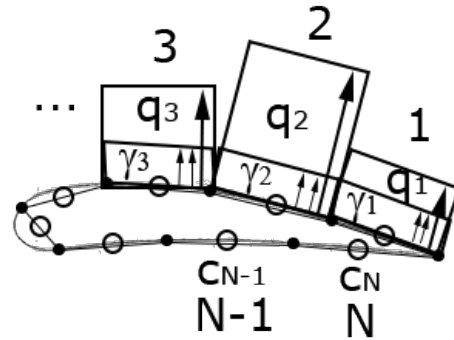


Figura 2.9: N pannelli, N q_i , γ

Le $q_i(S)$ sono le distribuzioni i -esime di sorgenti sull' i -esimo pannello, e possono avere distribuzione costante o lineare ed essere diverse fra loro. La prima ipotesi è che le sorgenti abbiano distribuzione costante, quindi non funzione di S ; la seconda è che ogni distribuzione può essere diversa dalle altre (Figura (2.9)).

Al contrario, si suppone che le distribuzioni i -esime di vortici $\gamma_i(S)$ siano sia costanti che uguali da pannello a pannello. Queste due condizioni al contorno si riducono nel seguente sistema

$$\begin{cases} q_i(S) = q_i & q_i \neq q_j \quad \forall i \neq j \\ \gamma_i(S) = \gamma_i & \gamma_i = \gamma_j \quad \forall i, j \end{cases} \quad (2.30)$$

Per N pannelli esisterà un'unica incognita γ ed N incognite q_i , conducendo ad un sistema di $N+1$ incognite. Per poterlo risolvere è necessario imporre $N+1$ condizioni al contorno, precisamente poste nei punti di controllo o collocazione c_i , nella mezzeria di ciascun pannello (i cerchi in Figura (2.9)). Queste condizioni al contorno sono delle condizioni di tangenza: in ogni punto di controllo la velocità del corpo normale alla superficie deve essere nulla, e cioè

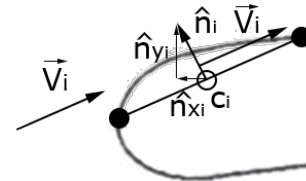


Figura 2.10: Condizione di tangenza

$$\vec{V}(c_i) \hat{n}_i = \vec{V}_i \hat{n}_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (2.31)$$

A queste N equazioni si aggiunge la condizione di Kutta nel pannello fittizio, imponendo anche in quel caso la condizione di tangenza. Così facendo si hanno $N+1$ equazioni nelle $N+1$ incognite.

Ciò posto, si può scomporre la generica velocità \vec{V} nelle componenti x ed y per ogni pannello. Inoltre, ogni pannello è influenzato da velocità indotte generate da tutte le vorticità e da tutte le sorgenti esistenti. Si può generalmente scrivere

$$\vec{V}_i = u_i \hat{i} + v_i \hat{j} = \vec{V}_\infty + \vec{V}_i^{(s)} + \vec{V}_i^{(v)} \quad (2.32)$$

Dato che le $V_i^{(k)}$, con k sorgente o vortice, indicano la sommatoria di tutte le generiche velocità indotte da ogni sorgente o vortice presente su un j -esimo pannello, la (2.32) può essere scomposta in u_i e v_i divenendo

$$\begin{cases} u_i = \vec{V}_i \cdot \hat{i} = V_\infty \cos \alpha + \sum_{j=1}^{N+1} q_j u_{ij}^{(s)} + \gamma \sum_{j=1}^{N+1} u_{ij}^{(v)} \\ v_i = \vec{V}_i \cdot \hat{j} = V_\infty \sin \alpha + \sum_{j=1}^{N+1} q_j v_{ij}^{(s)} + \gamma \sum_{j=1}^{N+1} v_{ij}^{(v)} \end{cases} \quad (2.33)$$

2.4. METODO DEI PANNELLI

METODI DI RISOLUZIONE ANALITICA

in Figura (2.10). Allora questa $V_i^t = \vec{V}_i = \sqrt{u_i^2 + v_i^2}$, poichè si sarà risolto il sistema (2.35), sarà esprimibile sostituendo le (2.33). Facendo ciò e chiamando $\hat{\tau} = \hat{\tau}_x + \hat{\tau}_y$ il versore tangente al pannello si ottiene

$$V_i^t = \sqrt{u_i^2 + v_i^2} = u_i \hat{i} \cdot \hat{\tau}_i + v_i \hat{j} \cdot \hat{\tau}_i = u_i \hat{\tau}_{xi} + v_i \hat{\tau}_{yi}$$

$$V_i^t = V_\infty (\cos \alpha \hat{n}_{xi} + \sin \alpha \hat{n}_{yi}) + \sum_{j=1}^{N+1} q_j (u_{ij}^{(s)} \hat{n}_{xi} + v_{ij}^{(s)} \hat{n}_{yi}) + \gamma \sum_{j=1}^{N+1} (u_{ij}^{(v)} \hat{n}_{xi} + v_{ij}^{(v)} \hat{n}_{yi}) = |\vec{V}_i| = V_i \quad (2.38)$$

2.4. METODO DEI PANNELLI

METODI DI RISOLUZIONE ANALITICA

Dunque la circuitazione Γ può essere computata sia con la differenza di potenziali $\Gamma^{(\Delta)}$ sia con l'integrale $\Gamma^{(f)}$. Come verifica del metodo si computa inizialmente $\Gamma^{(f)} = \oint_{\ell} \vec{V} \, dl$, poi si procede con uno studio a convergenza, data una certa tolleranza ϵ , del tipo

$$\begin{aligned}
 \text{Gammaint} &= \oint_{\ell} \vec{V} \, dl \\
 \text{while err} &> \epsilon \\
 \quad \text{N} &= \text{N} + 1; \\
 \quad \text{Gammadelta} &= \varphi_1 - \varphi_N; \\
 \quad \text{err} &= \text{Gammadelta} - \text{Gammaint}; \\
 \text{end} &
 \end{aligned}
 \tag{2.44}$$

Se l'errore fra i due metodi è elevato, è probabile che il numero N di pannelli sia piccolo.

Al di là del processo di pannellizzazione, vengono di seguito analizzati due soluzioni del potenziale linearizzato nei differenti casi stazionari di campo compressibile o incompressibile.

Caso stazionario comprimibile

L'equazione del potenziale linearizzato (1.59), con le ipotesi di compressibilità ($M_{\infty} \neq 0$) e stazionarietà ($\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$), diventa

$$\boxed{(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0}
 \tag{2.45}$$

Caso stazionario incompressibile

L'equazione del potenziale linearizzato (1.59), con le ipotesi di incompressibilità ($c_{\infty} \rightarrow \infty \implies M_{\infty} \rightarrow 0$) e stazionarietà ($\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$), diventa

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = 0}
 \tag{2.46}$$

Si nota che, se nella (2.45) viene operato il cambio di variabili di Prandtl-Glauert

$$X = \frac{x}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} \quad Y = y \quad Z = z
 \tag{2.47}$$

è possibile ricondurre la (2.45) alla formulazione di Laplace (2.46). Pertanto i due problemi sono analizzabili analogamente, e viene portato avanti il solo caso incompressibile.

Viene reintrodotta la funzione di Green e vengono seguiti i medesimi passaggi effettuati nella Sezione 2.3 dalla (2.19) in poi. In questo caso, il termine sorgente $g(\vec{r}) = 0$: si ha

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \nabla^2 \mathcal{G} = \delta(\vec{r} - \vec{r}_c) \end{cases} \times \begin{cases} \mathcal{G} \\ \varphi \end{cases} \implies \begin{cases} \mathcal{G} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \varphi \nabla^2 \mathcal{G} = \varphi \delta(\vec{r} - \vec{r}_c) \end{cases} = \begin{cases} - \\ = \end{cases} \\
 \mathcal{G} \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \mathcal{G} = -\varphi \delta(\vec{r} - \vec{r}_c)
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

$$\int_{\Omega} (\mathcal{G} \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \mathcal{G}) \, d\Omega = \int_{\Omega} [-\varphi \delta(\vec{r} - \vec{r}_c)] \, d\Omega$$

Cercando di esplicitare i termini a primo membro, si può scrivere con la divergenza

$$\begin{aligned}
 \nabla(\mathcal{G} \nabla \varphi) &= \mathcal{G} \nabla(\nabla \varphi) + \nabla \mathcal{G} \cdot \nabla \varphi = \mathcal{G} \nabla^2 \varphi + \nabla \mathcal{G} \cdot \nabla \varphi \implies \mathcal{G} \nabla^2 \varphi = \nabla(\mathcal{G} \nabla \varphi) - \nabla \mathcal{G} \cdot \nabla \varphi \\
 \nabla(\varphi \nabla \mathcal{G}) &= \varphi \nabla(\nabla \mathcal{G}) + \nabla \varphi \cdot \nabla \mathcal{G} = \varphi \nabla^2 \mathcal{G} + \nabla \varphi \cdot \nabla \mathcal{G} \implies \varphi \nabla^2 \mathcal{G} = \nabla(\varphi \nabla \mathcal{G}) - \nabla \varphi \cdot \nabla \mathcal{G}
 \end{aligned}
 \tag{2.49}$$

2.4. METODO DEI PANNELLI

METODI DI RISOLUZIONE ANALITICA

La scia è modellizzata per mezzo di due superfici parallele e distanziate da un piccolo ε . A sua volta, dunque, il contributo della scia sarà dato dalla “superficie” della faccia superiore sommato al contributo di quella inferiore. Imponendo che $\hat{n}_u = -\hat{n}_\ell = \hat{n}$ si ha

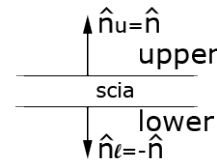


Figura 2.12: Scia

$$\begin{aligned}
 \int_{S_w} \left[\varphi(\vec{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} - \mathcal{G}(\vec{r}, \vec{r}_c) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS &= \int_{S_{w_u}} \left[\varphi_u(\vec{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n_u} - \mathcal{G}(\vec{r}, \vec{r}_c) \frac{\partial \varphi}{\partial n_u} \right] dS + \int_{S_{w_\ell}} \left[\varphi_\ell(\vec{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n_\ell} - \mathcal{G}(\vec{r}, \vec{r}_c) \frac{\partial \varphi}{\partial n_\ell} \right] dS \\
 &= \int_{S_{w_u}} \left[\varphi_u(\vec{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} - \mathcal{G}(\vec{r}, \vec{r}_c) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS + \int_{S_{w_\ell}} \left[-\varphi_\ell(\vec{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} + \mathcal{G}(\vec{r}, \vec{r}_c) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS \\
 &= \int_{S_{w_u}} \varphi_u(\vec{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} dS - \int_{S_{w_\ell}} \varphi_\ell(\vec{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} dS - \int_{S_{w_u}} \mathcal{G}(\vec{r}, \vec{r}_c) \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS + \int_{S_{w_\ell}} \mathcal{G}(\vec{r}, \vec{r}_c) \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \\
 &= \int_{S_w} (\varphi_u - \varphi_\ell)(\vec{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} dS = \int_{S_w} \Delta \varphi_s(\vec{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} dS = \int_{S_w} \Delta \varphi_{BU}(\vec{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} dS = \int_{S_w} (\varphi_1 - \varphi_N)(\vec{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} dS
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Risostituendo nella (2.58) si ottiene un'equazione integro-differenziale in cui sono esplicitati i termini riferiti al corpo (body) ed al bordo fittizio della scia (wake).

$$\frac{1}{2} \varphi(\vec{r}_c) = \int_{S_b} \left[\varphi(\vec{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} - \mathcal{G}(\vec{r}, \vec{r}_c) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS + \int_{S_w} \Delta \varphi_{BU}(\vec{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} dS \tag{2.60}$$

La (2.60) non ha soluzioni analitiche, e pertanto viene risolta numericamente. Richiamando la Figura (2.11), e ricordando che il pannello 1 corrisponde al dorso presso il bordo di fuga e il pannello N al ventre presso il bordo di fuga, si suddivide la (2.60) in N integrali, i quali vedono ciascuno un potenziale $\varphi_i(\vec{r}_c)$ influenzato dagli altri $k = 1, 2, \dots, N$, con $k \neq i$, contributi potenziali dei pannelli. Tale considerazione si traduce nella seguente

$$\frac{1}{2} \varphi_i(\vec{r}_c) = \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{S_{b_k}} \left[\varphi_k(\vec{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} - \mathcal{G}(\vec{r}, \vec{r}_c) \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right] dS + \int_{S_{w_k}} \Delta \varphi_{BU}(\vec{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} dS \right\} \tag{2.61}$$

Se il numero di pannelli è sufficientemente grande, i pannelli sono di dimensioni ridotte e si possono considerare pressochè costanti

$$\varphi_k \approx \text{cost} \qquad \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \approx \text{cost} \qquad \Delta \varphi_{BU} = \text{cost in tutta la scia} \tag{2.62}$$

In particolare si considerano costanti e pari al valore che avrebbero se calcolati alla mezzerie del pannello i -esimo, cioè nel punto di controllo c_i , mentre il valore della scia è chiaramente costante e non dipendente neanche da k . Inoltre si ricorda che

$$\Gamma = \Delta \varphi_{BU} \tag{2.63}$$

con queste considerazioni si può nuovamente riscrivere la (2.61) nella forma

$$\frac{1}{2} \varphi_i(\vec{r}_c) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(\vec{r}_c) \int_{S_{b_k}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} dS - \sum_{k=1}^N \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \int_{S_{b_k}} \mathcal{G}(\vec{r}, \vec{r}_c) dS + \sum_{k=1}^N \Delta \varphi_{BU}(\vec{r}_c) \int_{S_{w_k}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} dS \tag{2.64}$$

che in forma matriciale diviene

$$\frac{1}{2} \{\varphi\} = [D] \{\varphi\} + [Z] \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} \tag{2.65}$$

con $[D]$ matrice contenente termini relativi alle distribuzioni di singolarità di tipo doppietta (quindi dipoli), e $[Z]$ matrice delle distribuzioni di singolarità di tipo pozzi e/o sorgenti. Inoltre,