



Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2174A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Cavallo Federico

MATERIA: Fisica II - Riassunto - Prof. Iotti

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Riassunto di Fisica 2

LEGGI DI GAUSS

DISTRIBUZIONE DISCRETA

$$\phi_{S_{chiusa}}(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{v}_n dS = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$$

cariche all'interno della superficie

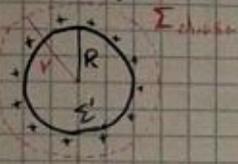
DISTRIBUZIONE CONTINUA

$$\phi_{S_{chiusa}}(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

densità di carica
contenuto nella superficie

APPLICAZIONI DELLA LEGGE DI GAUSS

buscio sferico uniformemente carico 3D



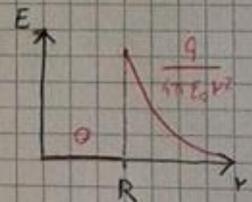
\vec{E} è radiale verso l'esterno, $q > 0$

$$\phi_S(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \int_{\Sigma} dS = 4\pi r^2 E = \phi_S(E) = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

superficie esterna della sfera chiusa

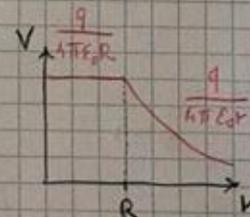
E fuori della sfera $r > R$ $4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2}$

E dentro la sfera $r < R$ $4\pi r^2 E = 0 \rightarrow E = 0$

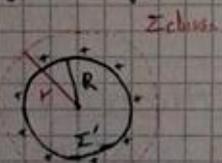


V fuori della sfera $r > R$ $V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r}$

V dentro la sfera $r < R$ $V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R}$!!!



Sfera uniformemente carica



\vec{E} è radiale verso l'esterno, $q > 0$

$$\rho = \frac{q_{tot}}{V_{sfera}} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

densità di carica per unità di volume

$$\phi_S(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \int_{\Sigma} dS = 4\pi r^2 E = \phi_S(E) = \begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) & r < R \\ \frac{q}{\epsilon_0} & r > R \end{cases}$$

E fuori della sfera $r > R$ $4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2}$

E dentro la sfera $r < R$ $4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right) \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \rightarrow E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{r}{R^3}$

LEGGI DI GAUSS IN FORMA LOCALE

$$\phi_{\text{Schiusa}}(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{Schiusa}} \rho \, dV \quad \leftarrow \text{Legge di Gauss in forma INTEGRALE}$$

$$\int_{\text{Schiusa}} \nabla \cdot \vec{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{Schiusa}} \rho \, dV \rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{in qualsiasi punto P}$$

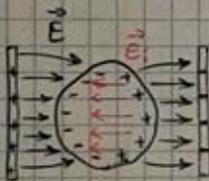
PRIMA EQUAZIONE DI MAXWELL

CONDUTTORI

CONDUTTORE IN EQUILIBRIO ELETTROSTATICO

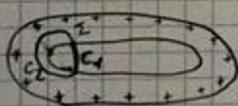
- $\vec{E} = 0$ all'interno
- $\rho = 0$ all'interno
- \vec{E} all'esterno è \perp alla superficie
- La carica in eccesso si trova sulla superficie esterna
- Il conduttore è equipotenziale $\Delta V = 0$

CONDUTTORE IMMERSO IN UN CAMPO \vec{E} ESTERNO



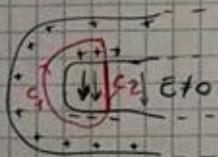
Le cariche sulla superficie si spostano e si crea un campo \vec{E}_i indotto che si oppone alla presenza di un \vec{E} , dentro il conduttore in modo che $E_{\text{tot}} = \vec{E} + \vec{E}_i = 0 \forall$.

CONDUTTORE CAVO (SCHERMO ELETTROSTATICO)



Nella superficie interna non c'è \vec{E} perché il flusso è nullo. Non ci sono neanche cariche. DIMOSTRAZIONE:

Supponiamo $E \neq 0$ dentro il cavitò



$$\int_{C_1+C_2} E \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} E \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} E \cdot d\vec{r} > 0$$

$\int_{C_1} E \cdot d\vec{r} = 0$ (dentro un conduttore non c'è campo)
 $\int_{C_2} E \cdot d\vec{r} > 0$ (è diverso da zero perché il campo, cioè E , è equivoaco al campo E e positivo)

Ma la circolazione deve essere zero perché \vec{E} è un campo conservativo, quindi quest'ipotesi non regge.

CONDUTTORE CAVO CONTENENTE UN CONDUTTORE ISOLATO CARICO



per induzione le cariche di C_1 si trasferiscono su C_2 (gli e^- di C_2 vengono attratti dalle cariche positive di C_1) lasciando la superficie esterna di C_2 carica positiva mentre proprio di $+q$.

• CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE

$$C = \frac{q}{\Delta V} \rightarrow q = \Delta V \cdot C \rightarrow \Delta V = \frac{q}{C} \quad \text{udm d. C: } \left[\frac{C}{V} \right] = \text{Farad}$$

• IN CONDENSATORI CILINDRICI



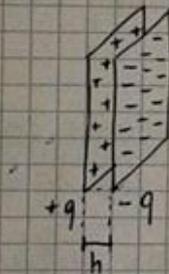
Abbiamo induzione completa solo se consideriamo $h \gg R_1, R_2$ (buchi sopra e sotto).

$$\lambda = \frac{q}{h} \quad E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad R_1 < r < R_2$$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E \, dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0 \cdot \lambda \cdot h}{\frac{\lambda}{h} \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi h \epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = C$$

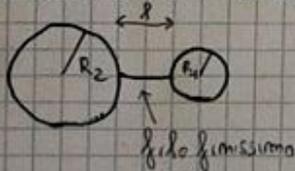
• IN CONDENSATORI PIANI



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h, \quad q = \sigma S$$

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} h} = \epsilon_0 \frac{S}{h}$$

• DUE CONDUTTORI COLLEGATI TRA LORO: DISTRIBUZIONE DELLE CARICHE SULLA SUPERFICIE



$$V_1 = V_2 \rightarrow \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \rightarrow \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$$

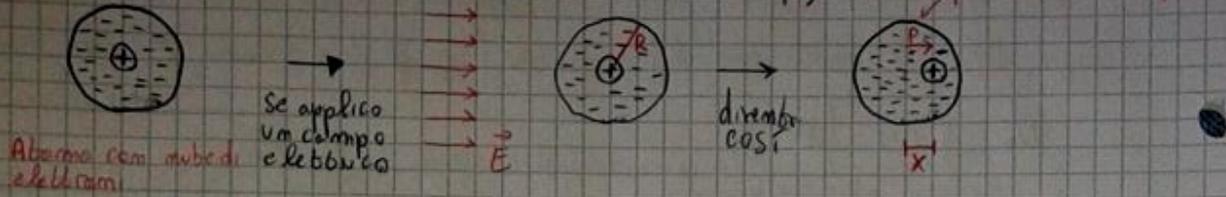
$$q = q_1 + q_2, \quad l \gg R_1, R_2$$

$$q_1 = q \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad q_2 = q \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} = \frac{q}{4\pi R_1 (R_1 + R_2)}, \quad \sigma_2 = \frac{q}{4\pi R_2 (R_1 + R_2)} \rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

\vec{E} è più grande vicino alla sfera più grande

• POLARIZZAZIONE PER DEFORMAZIONE (c'è sempre)



In presenza di un campo elettrico \vec{E} la nuvola degli elettroni viene "abbruttita" in direzione del campo, mentre il nucleo se ne allontana. Si crea quindi un momento di dipolo "indotto" che tende a riportare le cose al loro posto;

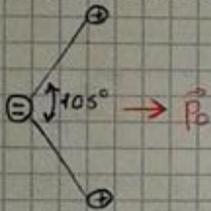
$$E = E_e \rightarrow E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{R^3} \rightarrow \vec{p} = qd = 4\pi R^3 \epsilon_0 \vec{E} = \alpha \epsilon_0 \vec{E} = \vec{p}$$

il campo che il sistema usa per riportare il protone al suo posto

$\alpha = 30 \frac{10^{-30}}{10^{-32}}$

DIELETTICI LINEARI

• POLARIZZAZIONE PER ORIENTAMENTO (per molecole polari)



Nelle molecole polari il centro delle cariche negative non coincide col centro delle cariche positive, e questo genera un momento di dipolo (intrinseco) \vec{p}_0 .

In assenza di campo elettrico esisteranno questi dipoli molecolari

Sono orientati a caso, quando però si applica un campo \vec{E} esterno sui dipoli agisce il momento meccanico di dipolo $\vec{M} = \vec{p}_0 \times \vec{E}$ che causa un allineamento parziale dei dipoli col campo \vec{E} (tale allineamento migliora al diminuire di T e all'aumentare di E). Ogni molecola ha quindi un momento di dipolo medio $\langle \vec{p} \rangle$ parallelo e concorde ad \vec{E} .

In un volume τ contenente N atomi e molecole la Polarizzazione P vale:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{\tau} = \frac{N}{\tau} \langle \vec{p} \rangle = n \langle \vec{p} \rangle = n \alpha \epsilon_0 \vec{E} = \chi \epsilon_0 \vec{E} = \vec{P}$$

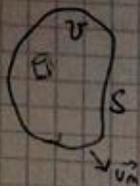
• DIMOSTRAZIONE CHE IL DISCORSO SULLA POLARIZZAZIONE E' ESATTO



$$E = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$E = E_0 + E_p = E_0 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = E_0 - \chi E \rightarrow E = \frac{E_0}{1 + \chi} = \frac{E_0}{\epsilon_r} \quad \checkmark$$

LEGGI DI CONSERVAZIONE DELLA CARICA



$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

$q_{int} = \int_V \rho \, dx \, dy \, dz$ e broto lo q_{int} , che però cambia a dipendere del tempo...

posso derivare rispetto a dt : $\frac{dq}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV$

dato che $i = - \frac{dq}{dt} = \oint_S \vec{j} \cdot \vec{u}_n \, dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \, dV$

immaginiamo: carica positiva che esce, quindi nel tempo la carica diventa più negativa.
 applico la divergenza

Quindi $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$ in un punto P

EQUAZIONE DI CONTINUITA' DELLA CORRENTE

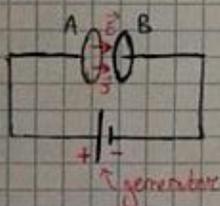
CORRENTE ELETTRICA STAZIONARIA

E' quando non dipende dal tempo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \rightarrow \oint_S \vec{j} \cdot \vec{u}_n \, dS = 0$$

si dice che \vec{j} è SOLENOIDALE (se $\phi(\vec{j}) = 0 \rightarrow i = 0$)

RESISTENZA ELETTRICA



- $V_A > V_B \rightarrow \Delta V > 0$
- E va dal potenziale maggiore al potenziale minore
- $\vec{j} \parallel \vec{E}$

$$R = \frac{V_A - V_B}{i}$$

RESISTENZA

udm di R: Ohm [Ω]

si stabilisce: $\sim \frac{1}{m}$

Un conduttore si dice Ohmico (o lineare) quando la resistenza non dipende dalla tensione ($V_A - V_B = Ri$)

$V_A - V_B = Ri$ PRIMA LEGGE DI OHM

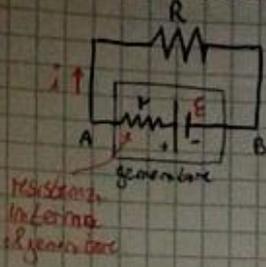
- per conduttori ohmici omogenei a sezione S costante

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{\rho}{\sigma S}$$

RESISTIVITA' ELETTRICA

CONDUCIBILITA' ELETTRICA

FORZA ELETTRO MOTRICE



u.d.m. della fem: volt $\left[\frac{\text{Weber}}{\text{secondo}} \right]$
 per la legge di Ohm $V_A - V_B = \int_A^B E \, ds = Ri$, che in un circuito chiuso diremo $\oint E \cdot ds = R_{\text{totale}} i$
 = fem \leftarrow Resistenza Totale del circuito

Cioè in un circuito chiuso per far circolare una corrente i è necessaria la presenza di una fem, ovvero di un campo E la cui circolazione non sia nulla.

Però ci deve essere un generatore (un conduttore cavo) cui all'interno è presente un campo E^* di natura non elettrostatica, che chiamiamo CAMPO ELETTRO MOTRICE, capace di far muovere le cariche nel circuito contro il campo elettrostatico. Questo campo E^* può essere generato da reazioni chimiche (pile), meccaniche o altro.

$$E = \oint E^* \, dl = \int_A^B E^* \, dl$$

È una linea chiusa intorno al generatore

Eseguendo il giro del circuito partendo da B abbiamo il potenziale:

$$V_B + E - r i - R i = V_B \quad \text{quindi} \quad \boxed{E = (r + R) i = R_{\text{eff}} i}$$

Inoltre $V_A - V_B = R i = E - r i$

Quindi la fem è pari alla ddp misurata ai capi del generatore a circuito aperto ($i=0$), ed è numericamente pari al lavoro fornito dal generatore alla carica unitaria che lo attraversa:

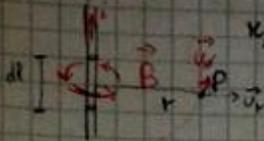
$$E \cdot dq = R i \, dq + r i \, dq \quad \xrightarrow{dq = i \, dt} \quad E i \, dt = R i^2 \, dt + r i^2 \, dt$$

$$\dot{P} = R i^2 + r i^2 = R_{\text{eff}} i^2$$

potenza elettrica

$$\boxed{P = E i}$$

CAMPI MAGNETICI GENERATI DA CARICHE IN MOTO



regola della vite

In un punto P

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{dl \times \vec{u}_r}{r^2}$$

LEGGI DI AMPERE - LAPLACE
e
PRIMA LEGGE DI LAPLACE

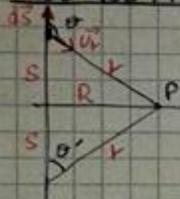
$$\frac{\mu_0}{4\pi} \approx 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} = 10^{-7} \frac{H}{m}$$

μ_0 : permeabilità magnetica nel vuoto

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

CAMPO MAGNETICO DI UNA CARICA IN MOTO

FILO RETTILINEO



$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \times \vec{u}_r}{r^2} \rightarrow dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \sin \theta}{r^2}$$

osserviamo che: $r \sin(\pi - \theta) = r \sin \theta = R \rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2 \theta}{R^2}$

$s \sin(\pi - \theta) = -s \sin \theta = R \rightarrow ds = \frac{R d\theta}{\sin^2 \theta}$

Quindi $dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{R} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d(\cos \theta)}{R}$

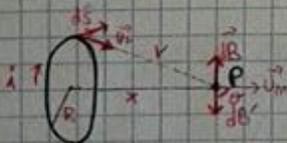
Il tratto di filo di lunghezza s (mezzo filo) produce quindi un campo:

$$B_s = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_{\cos \theta}^0 d(\cos \theta) = \frac{\mu_0 i \cos \theta}{4\pi R} \quad \text{e tutto il filo} \quad B = \frac{\mu_0 i \cos \theta}{2\pi R}$$

Per un filo rettilineo indefinito ($\theta' \rightarrow 0, \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}, \cos \theta' = 1$)

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{u}_\phi \quad \text{LEGGI DI BIOT-SAVART}$$

SPIRA CIRCOLARE



un elemento ds genera $dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 i ds}{4\pi r^2}$ dato che $ds \perp \vec{u}_r$. In campo medio lungo l'asse x tale $dB_x = \frac{\mu_0 i ds}{4\pi r^2} \cos \theta$

Faccendo l'integrale lungo tutta la lunghezza della spira le componenti parallele all'asse x si sommano, mentre quelle trasversali si eliminano due a due.

In totale $B = \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} ds = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} 2\pi R \vec{u}_m$

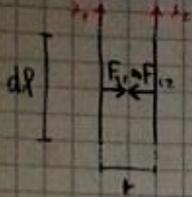
Se definiamo $r^2 = x^2 + R^2$
e $\cos \theta = R/r$

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

per $x=0$

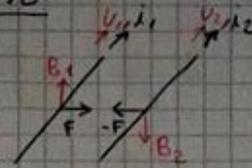
$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} \quad \text{e max}$$

INTERAZIONE TRA DUE FILI PERCORSI DA CORRENTE



fili lunghi indefinibili $l \gg r$

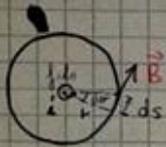
$$d\vec{F}_{12} = i_2 d\vec{l} \times \vec{B}_1 = i_2 d\vec{l} \vec{u}_2 \times \vec{B}_1$$



La forza per unità di lunghezza è $\vec{F}_{1,2} = i_2 \vec{u}_2 \times \vec{B}_1$ attrattiva se le correnti sono equiverse e repulsive se sono contrarie.

Allo stesso modo $\vec{F}_{21} = i_1 \vec{u}_1 \times \vec{B}_2$. Quindi:
$$F_{12} = F_{21} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r}$$

LEGGI DI AMPERE



$$B \cdot ds = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \cdot ds \quad r d\theta = ds \quad \downarrow \quad = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\theta$$

La ds in funzione del r

Se lo calcolo su tutta la circonferenza:

$$\oint B \cdot ds = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\theta$$

Nel caso in cui la circonferenza contenga la corrente (legge attrattiva):

$$\oint B \cdot ds = \frac{\mu_0 i}{2\pi} 2\pi = \mu_0 i \quad \text{LEGGI DI AMPERE}$$

Nel caso in cui la circonferenza non contenga la corrente:

$$\oint B \cdot ds = 0$$

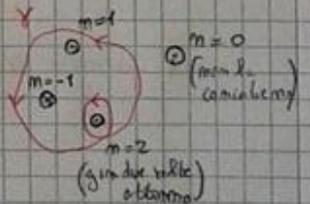
Queste regole valgono per qualunque circuito percorso da corrente e per qualunque linea chiusa che le contenga.

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 \sum_k i_k m_k$$

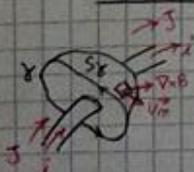
LEGGI DI AMPERE GENERALE

m_k : grado di contornamento

(m è positiva se γ gira nel verso concorde alla regola della vite)



FORMA LOCALE DELLA LEGGE DI AMPERE



Applico il teorema di Stokes alla circolazione di \vec{B} lungo γ : $\oint B \cdot ds = \int_{S_\gamma} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, dS_\gamma$

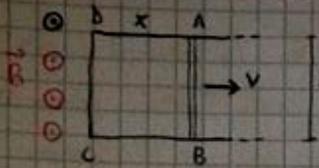
dove S_γ è una qualunque superficie appoggiata sulla linea chiusa γ .

Attraverso S_γ , dove passa il filo, passa la corrente $i = \int_{S_\gamma} \vec{j} \cdot \vec{u}_n \, dS_\gamma$.

La legge di Ampere diventa $\int_{S_\gamma} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, dS_\gamma = \mu_0 \int_{S_\gamma} \vec{j} \cdot \vec{u}_n \, dS_\gamma \rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$

LEGGI DI AMPERE in forma LOCALE

INDUZIONE ELETTROMAGNETICA DI MOVIMENTO



Consideriamo un circuito con un lato composto da una sbarretta mobile che si muove di velocità v . Sull'elettrone di conduzione, che sono in moto alla velocità v della sbarretta, agisce una forza di Lorentz pari a $F_L = qv \times B$ e un campo elettromotore $\vec{E}_i = \frac{F_L}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$. Possiamo calcolare la circolazione lungo $\overset{P, R, Q, S}{ABCD}$:

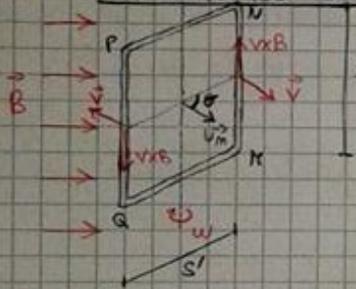
$$E_i = \oint_{ABCD} \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \int_{AB} \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = -vBb \text{ in quanto solo sul lato } AB \ v \neq 0.$$

Se proviamo ad applicare la legge di Faraday (fissando x la distanza di AB da CD) otteniamo:

$$E_i = -\frac{d\phi(B)}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\int B \cdot d\vec{s} \right) = -\frac{d}{dt} \left(Bbx \right) = -Bb \frac{dx}{dt} = -Bbv$$

che è lo stesso risultato.

GENERATORE DI CORRENTE ALTERNATA



Il campo magnetico di B attraversa la spirale di area S e:

$$\phi(B) = \int_S \vec{B} \cdot \vec{u}_n dS = BS \cos(\theta) = BS \cos(\omega t)$$

La forza elettromagnetica risulta: $E_i = -\frac{d\phi(B)}{dt} = \omega BS \sin(\omega t)$

Ossia la forza varia sinusoidalmente col tempo, e il suo valore massimo è $E_{max} = \omega BS$. Più la spirale gira velocemente più alta è la fem (frequenza di variaz.). La corrente che circola (R è la resistenza del circuito) è:

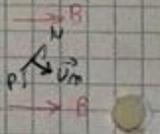
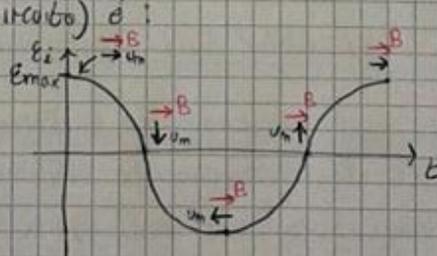
$$i = \frac{E_i}{R} = \frac{\omega BS}{R} \sin(\omega t)$$

La potenza elettrica dissipabile vale:

$$P = E_i \cdot i = Ri^2 = \frac{E_i^2}{R} = \frac{E_{max}^2}{R} \sin^2(\omega t)$$

e la potenza media vale:

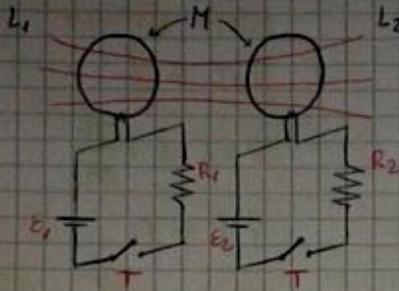
$$P_{m} = \frac{E_{max}^2}{2R}$$



CORRENTI DI FOUCAULT

Quando il campo magnetico è variabile all'interno di un conduttore metallico il campo E_i dà origine a correnti concorrenti alle linee di B , che provocano un riscaldamento del conduttore (si veda nei forni ad induzione). Questa avviene anche se un metallo si muove (tipo pendolo) in un campo \vec{B} uniforme ed è dovuta alla forza di Lorentz sugli elettroni. Questa forza rallenta il moto del metallo nel campo \vec{B} (abbia elettromagnetica) e si usa come freno elettromagnetico.

ENERGIA MAGNETICA DI DUE CIRCUITI ACCOPPIATI



A $t=0$ $i=0$. Portiamo i_2 a regime. La potenza erogata dal generatore è: $\mathcal{E}_1 i_1 = R_1 i_1^2 + L_1 \frac{di_1}{dt}$ e il lavoro nel tempo dt è $\mathcal{E}_1 i_1 dt = R_1 i_1^2 dt + L_1 i_1 di_1$.

Lavoro speso per far passare corrente nel generatore.
Lavoro speso per far circolare corrente nel circuito e dissipata in calore (effetto Joule).
Lavoro speso per far fermare l'autoinduzione \mathcal{E}_1 per far aumentare la corrente da 0 a i_1 .

Immediatamente dopo la chiusura del circuito il generatore deve spendere, per combattere \mathcal{E}_L nel momento in cui la corrente passa da 0 a i_{10} , il lavoro: $W = \int_0^{i_{10}} L_1 i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2$ che viene detto

ENERGIA INTRINSECA DELLA CORRENTE $U_L = \frac{1}{2} L_1 i_1^2$.

Il lavoro speso dal primo circuito per portare i_1 a regime è quindi $U_1 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2$. Se successivamente si porta i_2 a regime mentre i_1 resta costante il generatore \mathcal{E}_2 spende $U_2 = \frac{1}{2} L_2 i_2^2$ e il primo generatore (\mathcal{E}_1), dovendo lavorare contro le fem di mutua induzione \mathcal{E}'_1 causata dalla variazione di i_2 , spende

$$U_{21} = - \int \mathcal{E}'_1 i_1 dt = \int M_{21} \frac{di_2}{dt} i_1 dt = M_{21} i_1 \int di_2 = M_{21} i_1 i_2$$

Se si fosse proceduto nell'ordine inverso, chiudendo prima il circuito 2 e poi il circuito 1, la U_{12} sarebbe stata $M_{12} i_1 i_2$ da cui si concludere, essendo le stesse le condizioni iniziali, che $M_{12} = M_{21}$.

L'espressione dell'ENERGIA MAGNETICA del sistema dei due circuiti accoppiati è il lavoro totale speso dai generatori che si è trasformato in energia legata alla presenza del campo magnetico:

$$U_{mm} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

LEGGI DI AMPERE-MAXWELL

Condizione di stazionarietà: la corrente che entra in una superficie è uguale a quella che ne esce.

$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i_c$ corrente di conduzione (Legge di Ampere)

Ma se consideriamo la seguente figura in cui S_2 avvolge un pezzo di condensatore ma vediamo alcuna corrente uscire dalla superficie. In realtà la armatura di un condensatore non scarica corrente di conduzione, ma sulle due armature si verifica una variazione di carica ($\frac{dq}{dt}$ sulla prima, $-\frac{dq}{dt}$ sulla seconda) che "compensa" una corrente uscente $i = -(-\frac{dq}{dt}) = \frac{dq}{dt}$. Si è definita pertanto la presenza di una corrente di spostamento i_s all'interno del condensatore legata alla variazione del campo \mathbf{E} : $i_s = \epsilon_0 \frac{d\phi(E)}{dt}$ attraverso una qualunque sezione all'interno del condensatore.

La legge di Ampere-Maxwell unifica la legge di Ampere e stabilisce che i campi magnetici sono prodotti sia dalle i_c nei fili sia dalle variazioni temporali del campo elettrico: $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 (i_c + \epsilon_0 \frac{d\phi(E)}{dt})$ LEGGE DI AMPERE-MAXWELL