



Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2171A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Mascolo Luigi

MATERIA: Meccanica del Volo - Prof. Gili

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

POLITECNICO DI TORINO

LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE E ASTRONAUTICA

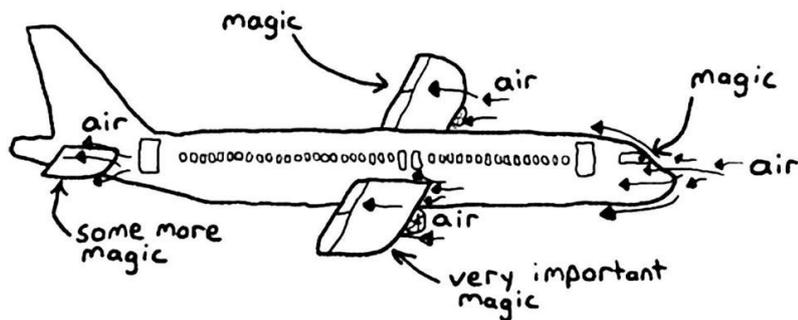
CORSO DI MECCANICA DEL VOLO

PROF. PIERO GILI



Teoria e Dimostrazioni

how planes fly



A.A. 2016/2017

LUIGI MASCOLO
221832

3.3.5	Stabilità statica e dinamica	68
3.3.6	Sistema ridotto longitudinale	71
3.3.7	Qualità di volo - diagrammi di opinione	71
3.3.8	Dinamica longitudinale a comandi liberi	74
3.3.9	Soluzioni del sistema a comandi liberi	77
3.3.10	Derivata di smorzamento $H_{\dot{\delta}}$	78
3.3.11	Risposta alla manovra	79
3.4	Dinamica latero-direzionale	84
3.4.1	Derivate aerodinamiche	87
3.4.2	Derivate aerodinamiche rispetto a β	88
3.4.3	Derivate aerodinamiche rispetto a p	92
3.4.4	Derivate aerodinamiche rispetto a r	94
3.4.5	Risoluzione del sistema adimensionalizzato a comandi bloccati	96
3.4.6	Roll mode	98
3.4.7	Spiral mode	99
3.4.8	Dutch Roll	100
3.4.9	Risposta alla manovra degli alettoni	101
	Appendice	102
	Appendix A Unità di Misura	102
	Appendix B Dimostrazioni aggiuntive	104
B.1	Ricerca del α_{eq} (1.30, 1.31)	104
B.2	Sviluppo della (1.46)	104
B.3	Sviluppo della (2.15)	104
	Appendix C Esempi di calcolo	105
C.1	Calcolo delle variabili di corto periodo e fugoide per due velivoli	105

List of Figures

1.1	Forze agenti sul velivolo e sistema di riferimento	11
1.2	Grafico $C_M - \alpha$	11
1.3	Schematizzazione di un velivolo	12
1.4	Particolare geometrico dell'impennaggio di coda	13
1.5	$C_{Lwb} = f(\alpha_{wb})$ vs $C_{Lt} = f(\alpha_t)$	15
1.6	$C_{Lwb} = f(\alpha_{wb})$ vs $C_L = f(\alpha)$	15
1.7	Angoli α del velivolo completo	16
1.8	α_P, α_{P0}	16
1.9	Posizione del punto neutro N per avere $C_{M\alpha} < 0$	18
1.10	Elevone con escursione $\delta_{el} < 0$	19
1.11	Stabilizzatore con equilibratore avente escursione $\delta > 0$	20
1.12	Grafico $\tau - \frac{c_e}{c_t}$	20
1.13	Andamento del $C_{Leq} = f(\delta_{eq})$	21
1.14	$C_L(\alpha)$ e $C_{Leq}(\alpha_{eq})$	23
1.15	$C_{MG} - \alpha$ e α_{eq}	23
1.16	Speed Stability - $\delta_{eq} = f(V_{eq})$	24
1.17	Estrapolazione x_N	24
1.18	Forze di pressione	25
1.19	Aletta <i>tab</i> e momento di cerniera H	25
1.20	Configurazione del trim <i>tab</i>	31
1.21	Escursione $\delta_{tt} = f(C_{Leq})$	32
1.22	Estrapolazione x'_N	32
1.23	Configurazione del servo <i>tab</i>	33
1.24	Riduzione H	33
1.25	Arretramento c_b	33
1.26	Configurazione dell'antiservo <i>tab</i>	34
1.27	Schema di trasmissione del comando	35
1.28	Contributi P_0 e B	36
1.29	$P = f(V)$ senza δ_{tab} (sx) e in presenza di equilibratore (dx)	37
1.30	Insensibilità del trim	37
2.1	Moto accelerato - richiamata	38
2.2	Effetto di q sulla coda	39
2.3	Ala a delta - lamina piana (sx) con V e q ; lamina curva (centro-dx) con V	42
2.4	$\frac{x_M}{c}, \frac{x_G}{c} = f\left(\frac{x_G}{c}\right)$	43
2.5	Artificio m o $m^* + m' = m$ per soddisfare $\frac{dP}{dn}$	46
2.6	$\frac{x_{M'}}{c}, \frac{x_G}{c} = g\left(\frac{x_G}{c}\right)$	46

3.44	Derivata $(C_{y_r})_v$	94
3.45	Derivata $(C_{l_r})_{ala}$	95
3.46	λ del Roll mode nel tempo	98
3.47	Stabilità laterale $C_{l_p} > 0$ nel roll mode	98
3.48	Dutch roll	100
3.49	Analisi di un periodo completo - Dutch roll mode	100
3.50	Risposta al comando - virata e rollio	101

Part I

TEORIA

1.1. IL VELIVOLO CONVENZIONALE

INTRODUZIONE

Si introduce una schematizzazione geometrica della posizione e dei valori relativi alle superfici alari di un velivolo convenzionale.

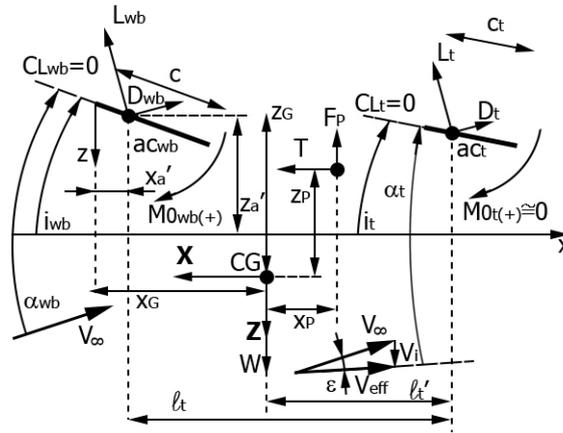


Figura 1.3: Schematizzazione di un velivolo

L'asse x definisce l'orizzonte locale, mentre le due rette al di sopra più spesse sono rappresentative dell'ala, di corda c , e dell'impennaggio orizzontale di coda, di corda c_t .

Nell'analisi dell'ala (wing w) si include l'interazione con la fusoliera (body b): la direzione di portanza nulla C_{Lwb} ha calettamento i_{wb} rispetto all'orizzonte locale x e angolo di assetto α_{wb} rispetto alla velocità del flusso indisturbato V_∞ ; dal centro aerodinamico ac_{wb} si considerano portanza L_{wb} e resistenza D_{wb} , rispettivamente perpendicolare e parallela a V_∞ , e momento M_{0wb} ; tale ac_{wb} si trova ad una distanza x_G, z_G dal centro di gravità (CG) del velivolo.

Invece l'impennaggio orizzontale ha, dalla direzione di portanza nulla $C_{Lt} = 0$, calettamento i_t ed assetto α_t rispetto alla direzione della velocità effettiva della corrente V_{eff} . Questa velocità è la risultante dopo che la V_∞ è stata perturbata dalla velocità di influsso V_i dell'ala. Il suo centro aerodinamico act è distante l'_t dal CG e l_t dall' ac_{wb} . Sussiste una relazione fra le caratteristiche geometriche di ala e impennaggio di coda, e cioè

$$\bar{V} = \frac{S_t l_t}{S_c}$$

In ultimo, T e F_P sono caratteristiche del sistema propulsivo, a x_P e z_P dal CG.

Si vogliono ricavare dei valori per il velivolo utili per successive analisi. In particolare questi sono dei coefficienti di momento: in ultimo si vuole ricavare il C_{M_G} del velivolo completo, e per far ciò si ricaveranno separatamente il $C_{M_{Gwb}}$ ed il $C_{M_{Gt}}$, rispettivamente di un velivolo tutt'ala e del solo impennaggio orizzontale.

1.1.1 L'ala - calcolo del $C_{M_{Gwb}}$

Iniziando dal $C_{M_{Gwb}}$, si ricercano le componenti normali N_{wb} e tangenziali C_{wb} delle forze aerodinamiche sull'ala (rispetto ad x), supponendo che l'angolo fra V_∞ e l'orizzonte locale, cioè $\alpha_{wb} - i_{wb}$, sia sufficientemente piccolo, e che $D_{wb} \ll L_{wb}$.

$$\begin{cases} N_{wb} = L_{wb} \cos(\alpha_{wb} - i_{wb}) + D_{wb} \sin(\alpha_{wb} - i_{wb}) \approx L_{wb} + D_{wb}(\alpha_{wb} - i_{wb}) \approx L_{wb} \\ C_{wb} = -L_{wb} \sin(\alpha_{wb} - i_{wb}) + D_{wb} \cos(\alpha_{wb} - i_{wb}) \approx D_{wb} - L_{wb}(\alpha_{wb} - i_{wb}) \end{cases} \quad (1.3)$$

Ora è possibile calcolare il momento $M_G = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{M_G} c$ attorno al centro di gravità.

1.1. IL VELIVOLO CONVENZIONALE

INTRODUZIONE

Il coefficiente ε è il down-wash angle (o fattore di induzione) ed è significativo il termine al suo interno, ε_0 , non dipendente da α_{wb} : quest'ultimo indica che, anche se $\alpha_{wb} = 0$, il down-wash angle non è nullo se l'ala non è svergolata. In ultimo, il down-wash factor è solitamente $0.6 \leq (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) \leq 0.95$ e i è il calettamento aerodinamico ala-coda.

Si passa ora a calcolare il C_{MGt} nello stesso modo del caso dell'ala, esplicitando N_t e C_t .

$$\begin{cases} N_t = L_t \cos(\alpha_t - i_t) + D_t \sin(\alpha_t - i_t) \approx L_t + D_t \sin(\alpha_t - i_t) \approx L_t \\ C_t = -L_t \sin(\alpha_t - i_t) + D_t \cos(\alpha_t - i_t) \approx D_t - L_t \sin(\alpha_t - i_t) \end{cases} \quad (1.8)$$

A questo punto si applica un'ulteriore semplificazione, e cioè che $D_t \ll L_t \implies C_t \ll N_t$. Inoltre, si fa notare che $l'_t = l_t - (x_G - x'_a)$. Si può ricavare un termine analogo a \bar{V} anche nel caso dell'impennaggio di coda, \bar{V}' , relazionato al primo proprio per mezzo di l'_t . Difatti

$$\begin{cases} \bar{V} = \frac{S_t l_t}{S c} \\ \bar{V}' = \frac{S_t l'_t}{S c} = \frac{S_t}{S c} [l_t - (x_G - x'_a)] = \frac{S_t l_t}{S c} - \frac{S_t}{S} \frac{x_G - x'_a}{c} = \bar{V} - \frac{S_t}{S} \frac{x_G - x'_a}{c} \end{cases} \quad (1.9)$$

Siano $L_t = \frac{1}{2} \rho V^2 S_t C_{Lt}$ la portanza dell'impennaggio di coda e $C_{Lt} = a_t \alpha_t$ il coefficiente di portanza, funzione della V_{eff} .

Dalla (1.8) trova M_{Gt} e lo si divide, come prima, per $\frac{1}{2} \rho V^2 S c$

$$\begin{aligned} M_{Gt} &\approx -L_t l'_t && \text{perchè provoca momento a picchiare} \\ \implies C_{MGt} &= \frac{M_{Gt}}{\frac{1}{2} \rho V^2 S c} = \frac{-L_t l'_t}{\frac{1}{2} \rho V^2 S c} = \frac{-\frac{1}{2} \rho V^2 S_t C_{Lt} \cdot l'_t}{\frac{1}{2} \rho V^2 S c} = -C_{Lt} \frac{S_t l'_t}{S c} = -C_{Lt} \bar{V}' = -C_{Lt} \left(\bar{V} - \frac{S_t}{S} \frac{x_G - x'_a}{c} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

1.1.3 Velivolo completo - esplicitazione del C_{MG}

Introducendo il C_{MP} , coefficiente di momento angolare generato dal gruppo propulsivo, è possibile calcolare il C_{MG} dell'intero velivolo unendo le (1.5, 1.10).

$$\begin{aligned} C_{MG} &= C_{MGwb} + C_{MGt} + C_{MP} \\ &= C_{M0wb} + C_{Lwb} \frac{x_G - x'_a}{c} - C_{Lt} \bar{V} + C_{Lt} \frac{S_t}{S} \frac{x_G - x'_a}{c} + C_{MP} \\ &= C_{M0wb} + \underbrace{\left(C_{Lwb} + C_{Lt} \frac{S_t}{S} \right)}_{L=Lwb+Lt \implies C_L} \frac{x_G - x'_a}{c} - C_{Lt} \bar{V} + C_{MP} \\ &= C_{M0wb} + C_L \frac{x_G - x'_a}{c} - C_{Lt} \bar{V} + C_{MP} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Sviluppando ulteriormente il C_L , con l'ausilio della (1.7), si ha

$$\begin{aligned} C_L &= C_{Lwb} + C_{Lt} \frac{S_t}{S} = a_{wb} \alpha_{wb} + a_t \alpha_t \frac{S_t}{S} \stackrel{(1.7)}{=} a_{wb} \alpha_{wb} + a_t \left[\alpha_{wb} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) - i \right] \frac{S_t}{S} \\ &= a_{wb} \alpha_{wb} \left[1 + \frac{a_t}{a_{wb}} \frac{S_t}{S} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) \right] - a_t \frac{S_t}{S} i && \text{sia } F = \frac{a_t}{a_{wb}} \frac{S_t}{S} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) > 0 \\ &= a_{wb} \alpha_{wb} (1 + F) - a_t \frac{S_t}{S} i \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.1. IL VELIVOLO CONVENZIONALE

INTRODUZIONE

Si nota che $\alpha_{stallo} > \alpha_{wb, stallo}$. In Figura (1.6) l'incremento è molto accentuato rispetto al caso reale: se stalla l'ala, stalla l'intero velivolo, e α_{stallo} è maggiore di una quantità irrisoria.

Disegnando un velivolo completo si possono apprezzare le descrizioni appena fatte.

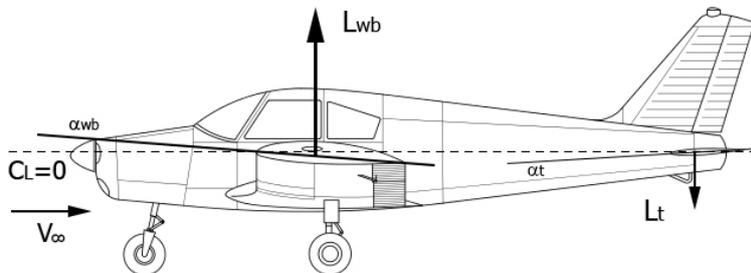


Figura 1.7: Angoli α del velivolo completo

Si nota che la direzione di portanza nulla, cioè per $\alpha = 0 \implies C_L = 0 \implies L = 0$, è compresa fra la direzione di portanza nulla del complesso ala-fusoliera $C_{Lwb} = 0$, definita dall'angolo α_{wb} , e quella della coda $C_{Lt} = 0$. Si nota, infine, che $|\alpha_t| > |\alpha_{wb}|$: ciò avviene in quanto, per avere portanza nulla, deve valere $L_t = -L_{wb}$; essendo la $S_t < S$, a parità di tutti gli altri parametri, sarà α_t a dover essere più grande di α_{wb} , in valore assoluto, per compensare.

Pertanto, nel grafico in Figura (1.6), è corretto supporre che l'ordinata C_L sia più vicina a quella di C_{Lwb} rispetto a quella di C_{Lt} .

A questo punto si può migliorare la formulazione dell'angolo α_{wb} da inserire nell'espressione del C_{M_G} nella (1.11). Dall'espressione del C_L nella (1.12)

$$C_L = a\alpha = a_{wb}\alpha_{wb}(1 + F) - a_t \frac{S_t}{S} i \implies \alpha_{wb} = \frac{a\alpha + a_t \frac{S_t}{S} i}{\alpha_{wb}(1 + F)} \stackrel{(1.14)}{=} \alpha + \frac{a_t}{a} \frac{S_t}{S} i \tag{1.15}$$

in cui si è ricondotto α_{wb} a soli termini riguardanti il velivolo completo e la coda. Oppure, osservando la (1.15), si nota che la differenza fra α e α_{wb} è proprio il contributo dato dall'impennaggio di coda.

Prima di ricavare il C_{M_G} finale si ricava un'espressione più esplicita per il C_{M_P} . Facendo riferimento alla Figura (1.8), si nota che α_{P0} è l'angolo fra la direzione di portanza nulla $C_L = 0$ e la direzione della spinta/trazione T , mentre α_P è l'angolo fra quest'ultima e la direzione della velocità del flusso V_∞ . La somma di questi due coincide con α , e pertanto si può ricavare la variazione del coefficiente di momento in funzione di quest'ultima. In formule

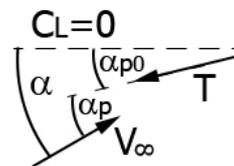


Figura 1.8: α_P, α_{P0}

$$\frac{\partial C_{M_P}}{\partial \alpha} = \frac{\partial C_{M_P}}{\partial \alpha_P} \frac{\partial \alpha_P}{\partial \alpha} \stackrel{\approx 1}{\implies} \frac{\partial C_{M_P}}{\partial \alpha_P} \alpha_P \approx \frac{\partial C_{M_P}}{\partial \alpha} (\alpha - \alpha_{P0}) = \frac{\partial C_{M_P}}{\partial \alpha} \alpha - \underbrace{\frac{\partial C_{M_P}}{\partial \alpha} \alpha_{P0}}_{C_{M_{P0}} = \text{cost}} \tag{1.16}$$

Introducendo tali risultato nella formulazione (1.11), in aggiunta all'espressione dell'angolo α_t dalla (1.7), si ricava

1.1. IL VELIVOLO CONVENZIONALE

INTRODUZIONE

centro di gravità del velivolo CG sarebbe coincidente con il fuoco dello stesso^[2]. Riprendendo la (1.19) e ponendo $C_{M\alpha} = 0$, si ricerca il $\frac{x_G}{c} \Big|_{C_{M\alpha}=0} = \frac{x_N}{c}$

$$C_{M\alpha} = 0 \implies \frac{x_G}{c} \Big|_{C_{M\alpha}=0} = \frac{x_N}{c} \stackrel{(1.19)}{\implies} \frac{x_N}{c} = \frac{x'_a}{c} + \frac{a_t \bar{V}}{a} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{a} \frac{\partial C_{M_P}}{\partial \alpha} \quad (1.20)$$

Esplicitando $\frac{x'_a}{c}$ (o qualsiasi altro termine a secondo membro) della (1.20) e sostituendolo nella (1.19) è possibile ricavare un'importante formulazione per il $C_{M\alpha}$.

$$\implies C_{M\alpha} = a \left[\frac{x_G}{c} - \left(\frac{x_N}{c} - \frac{a_t \bar{V}}{a} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial C_{M_P}}{\partial \alpha} \right) - \frac{a_t \bar{V}}{a} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial C_{M_P}}{\partial \alpha} \right] \quad (1.21)$$

$$\boxed{C_{M\alpha} = a \frac{x_G - x_N}{c}} \quad \implies C_{M\alpha} < 0 \iff x_G < x_N$$

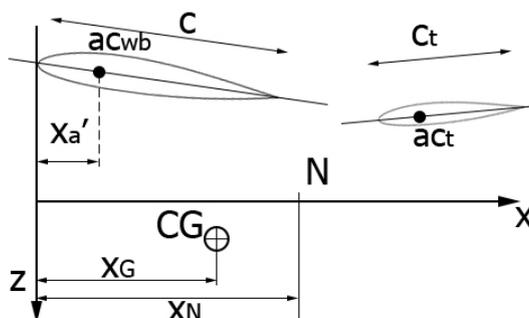
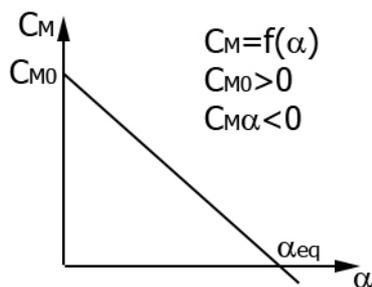


Figura 1.9: Posizione del punto neutro N per avere $C_{M\alpha} < 0$

Il termine $\frac{x_G - x_N}{c}$ è detto margine statico. La posizione di N è sicuramente all'ascissa x_N e ad una qualche ordinata, qui non definita. È poi il tail a garantire l'equilibrio e, quindi, ad annullare il C_{M_G} . Richiamando la Figura (1.2)



si vogliono trovare dei metodi che permettono pur sempre di annullare il $C_{M_G} = C_{M0} + C_{M\alpha}\alpha$ della (1.17) ma che consentono di avere diversi α_{eq} . In particolare si ricercano dei termini nel C_{M0} e nel $C_{M\alpha}$, rispettivamente nelle (1.18, 1.21), che permettono di raggiungere tale scopo. Vengono di seguito elencati brevemente per poi essere analizzati in dettaglio in seguito.

^[2]Termini analoghi a "fuoco": *aircraft aerodynamic center*, o centro aerodinamico del velivolo; *neutral point*, o punto neutro

1.2 L'equilibratore

Si analizza il metodo più utilizzato per variare il C_{MG} di un velivolo. Viene di seguito presentato lo schema geometrico di un impennaggio orizzontale di coda con configurazione a superficie fissa e mobile, rispettivamente stabilizzatore ed equilibratore di lunghezze c_t e c_e .

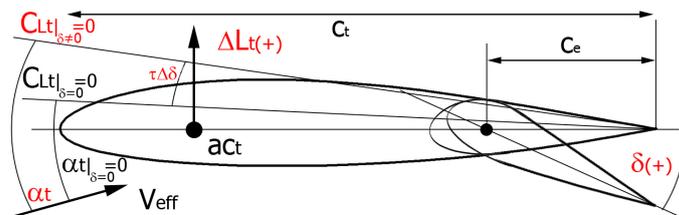
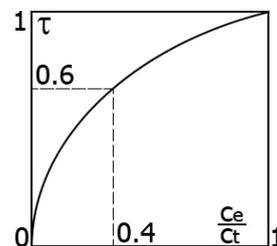


Figura 1.11: Stabilizzatore con equilibratore avente escursione $\delta > 0$

L'equilibratore ha escursione positiva $\delta > 0$ per rotazioni orarie. Dalla Figura (1.11) si nota che la direzione di portanza nulla, con equilibratore in posizione neutra $\delta = 0$, è $C_{Lt}|_{\delta=0} = 0$, con assetto $\alpha_t|_{\delta=0}$ rispetto alla V_{eff} e non coincide con la corda alare: un'escursione $\delta > 0$ provocherà una variazione della direzione di portanza nulla ed un aumento di portanza $\Delta L_t > 0$. In particolare, $C_{Lt}|_{\delta \neq 0} = 0$ varia di un $\tau \Delta \delta$ ed avrà assetto α_t , e cioè



$$\Delta \alpha_t = \tau \Delta \delta \quad \text{con } \tau \approx 0.6 \quad \text{per } \frac{c_e}{c_t} \approx 0.4 \quad (1.22) \quad \text{Figura 1.12: Grafico } \tau - \frac{c_e}{c_t}$$

Quindi un'escursione dell'equilibratore, ad esempio, di 10° farà variare l'assetto complessivo al più di 6° circa, considerando valori soliti per il rapporto fra lunghezza dell'equilibratore e del tail complessivo, $\frac{c_e}{c_t} \approx 0.6$, come si evince dalla curva in Figura 1.12.

Si aggiunge nella (1.7) il termine $\tau \delta$, pertanto

$$\alpha_t = \alpha_{wb} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) - i + \tau \delta \quad (1.23)$$

Da cui si ricavano $C_{Lt} = a_t \alpha_t$ e C_L e C_{MG} del velivolo complessivo.

$$\begin{aligned} C_{Lt} &= a_t \alpha_t = a_t \left[\alpha_{wb} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) - i + \tau \delta \right] \\ C_L &= C_L|_{\delta=0} + \frac{\partial C_L}{\partial \delta} \delta = C_{L\alpha} \alpha + C_{L\delta} \delta \\ C_{MG} &= C_{MG}|_{\delta=0} + \frac{\partial C_{MG}}{\partial \delta} \delta = C_{M0}|_{\alpha=0} + C_{M\alpha} \alpha + C_{M\delta} \delta \quad \text{con } C_{M\delta} < 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

Il termine $C_{M\delta}$ è detto *elevator power*, e questa derivata indica quanto la coda sia in grado di far variare il coefficiente di momento di beccheggio e, quindi, quanto sia capace di garantire diverse condizioni di equilibrio; il suo segno, come si nota in Figura (1.11), è negativo, in quanto a rotazioni positive di δ corrispondono variazioni positive di $C_{Lt}|_{\delta \neq 0} = 0$, le quali generano portanza aggiuntiva $\Delta L_t > 0$ e, in un velivolo convenzionale, ciò comporta un momento picchiante aggiuntivo attorno al centro aerodinamico del velivolo complessivo.

1.2. L'EQUILIBRATORE

INTRODUZIONE

Dividendo brevemente l'analisi per velivoli convenzionali e quelli tutt'ala, è possibile riscrivere opportunamente le $C_{L\delta}$ e $C_{M\delta}$ nei due casi. Richiamando le (1.12, 1.11) e derivando in $\partial\delta$, e ricordando che nell'esplicitare Δ i x_G divengono x_N , si ha

$$\Rightarrow \begin{cases} C_L = C_{Lwb} + C_{Lt} \frac{S_t}{S} \\ C_{MG} = C_{M_{0wb}} + C_L \frac{x_G - x'_a}{c} - C_{Lt} \bar{V} + C_{MP} \\ \frac{\partial C_L}{\partial \delta} = C_{L\delta} = \frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta} + \frac{\partial C_{Lt}}{\partial \delta} \frac{S_t}{S} \\ \frac{\partial C_{MG}}{\partial \delta} = C_{M\delta} = \frac{\partial C_{M_{0wb}}}{\partial \delta} + \frac{\partial C_L}{\partial \delta} \frac{x_G - x'_a}{c} - \frac{\partial C_{Lt}}{\partial \delta} \bar{V} + \frac{\partial C_{MP}}{\partial \delta} \approx 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{VELIVOLO CONVENZIONALE} \\ \left\{ \begin{array}{l} C_{L\delta} = \frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta} + \frac{\partial C_{Lt}}{\partial \delta} \frac{S_t}{S} = \frac{\partial C_{Lt}}{\partial \alpha_t} \frac{\partial \alpha_t}{\partial \delta} \frac{S_t}{S} = \frac{S_t}{S} a_t \tau \\ C_{M\delta} = \frac{\partial C_{M_{0wb}}}{\partial \delta} + \frac{\partial (C_{Lwb} + C_{Lt} \frac{S_t}{S})}{\partial \delta} \frac{x_G - x'_a}{c} - \frac{\partial C_{Lt}}{\partial \delta} \bar{V} = \frac{S_t}{S} a_t \tau \frac{x_G - x'_a}{c} - a_t \tau \bar{V} \\ \Delta = C_{L\alpha} C_{M\delta} - C_{M\alpha} C_{L\delta} = C_{L\alpha} \left(\frac{S_t}{S} a_t \tau \frac{x_N - x'_a}{c} - a_t \tau \bar{V} \right) - a \frac{x_N - x_N}{c} \frac{S_t}{S} a_t \tau \end{array} \right. \\ \text{VELIVOLO TUTT'ALA} \\ \left\{ \begin{array}{l} C_{L\delta} = \frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta} + \frac{\partial C_{Lt}}{\partial \delta} \frac{S_t}{S} = \frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta} \\ C_{M\delta} = \frac{\partial C_{M_{0wb}}}{\partial \delta} + \frac{\partial (C_{Lwb} + C_{Lt} \frac{S_t}{S})}{\partial \delta} \frac{x_G - x'_a}{c} - \frac{\partial C_{Lt}}{\partial \delta} \bar{V} = \frac{\partial C_{M_{0wb}}}{\partial \delta} + \frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta} \frac{x_G - x'_a}{c} \\ \Delta = C_{L\alpha} C_{M\delta} - C_{M\alpha} C_{L\delta} = C_{L\alpha} \left(\frac{\partial C_{M_{0wb}}}{\partial \delta} + \frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta} \frac{x_N - x_N}{c} \right) - a \frac{x_N - x_N}{c} \frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.28)$$

Si precisa che, nelle espressioni del velivolo tutt'ala, il δ è riferito all'elevone e non all'equilibratore. Riassumendo si è trovato

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{VELIVOLO CONVENZIONALE} \\ \left\{ \begin{array}{l} C_{L\delta} = \frac{S_t}{S} a_t \tau \\ C_{M\delta} = \frac{S_t}{S} a_t \tau \frac{x_G - x'_a}{c} - a_t \tau \bar{V} \\ \Delta = C_{L\alpha} \frac{S_t}{S} a_t \tau \frac{x_N - x'_a}{c} - C_{L\alpha} a_t \tau \bar{V} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{VELIVOLO TUTT'ALA} \\ \left\{ \begin{array}{l} C_{L\delta} = \frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta} \\ C_{M\delta} = \frac{\partial C_{M_{0wb}}}{\partial \delta} + \frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta} \frac{x_G - x'_a}{c} \\ \Delta = C_{L\alpha} \frac{\partial C_{M_{0wb}}}{\partial \delta} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Vale sempre $C_{L\alpha} > 0$. Per il velivolo convenzionale $\bar{V} \gg \frac{S_t}{S} \frac{x_N - x'_a}{c} \implies \Delta < 0$, con $\Delta \neq f(x_G)$; per il velivolo tutt'ala, analogamente, poichè ad escursioni positive dell'elevone si ha un momento picchiante, $\frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta} < 0$, e dunque anche in questo caso $\Delta < 0$ e $\Delta \neq f(x_G)$.

1.2. L'EQUILIBRATORE

INTRODUZIONE

1.2.1 Speed Stability

La speed stability è la tendenza del velivolo a mantenere una certa velocità di equilibrio preesistente V_{eq} anche a seguito di un disturbo. L'analisi è analoga a quella del $C_{L_{eq}} = f(\delta_{eq})$ in Figura (1.13), anche se ora si ricerca una relazione fra $V_{eq} = f(\delta_{eq})$. Introducendo l'espressione della portanza o del peso $L = W$ (1.1) con $C_L = C_{L_{eq}}$ e sostituendola opportunamente nella (1.27) si ottiene

$$W = L_{eq} \implies C_{L_{eq}} = \frac{W/S}{\frac{1}{2}\rho_0 V_{eq}^2} \implies \delta_{eq} = -\frac{C_{L\alpha} C_{M0}}{\Delta} - \frac{C_{M\alpha} C_{L_{eq}}}{\Delta} = -\frac{C_{L\alpha} C_{M0}}{\Delta} - \frac{C_{M\alpha}}{\Delta} \frac{W/S}{\frac{1}{2}\rho_0 V_{eq}^2} \quad (1.32)$$

Dal grafico in Figura (1.16) si nota che il termine noto funge da asintoto, per $x_G = x_N$, verso il quale tendono tutte le curve $\delta_{eq}(V_{eq})$: per tale motivo si tenta di avere $-\frac{C_{L\alpha} C_{M0}}{\Delta} < \delta_{max}$.

In questo grafico il campo di velocità operativo tale per cui $V_{eq} \in [V_{min}, V_{max}]$ limite l'ascissa, mentre l'escursione dell'equilibratore, in questo caso supposta $\delta \in [-20^\circ, 20^\circ]$, limite l'ordinata. Si nota che solo x_{G2} garantisce la possibilità di avere un $\delta_{eq} \forall V_{eq}$: in generale, δ a cabrare (negativi) portano ad una velocità inferiore, viceversa per δ picchianti.

La speed stability implica, inoltre, che, considerando ad esempio $0 < \delta_A < \delta_B$, questi provochino al tail un $L_{tA} < L_{tB}$. Seguendo l'esempio, per δ picchianti c'è un proporzionale aumento di portanza al tail che fa proporzionalmente picchiare il velivolo e, dunque, la V_{eq} sarà proporzionalmente maggiore, con $V_{eqA} < V_{eqB}$. In condizioni di instabilità (cioè per $x_G \geq x_N$), a parità di δ si avrebbero $L_{tA} > L_{tB}$, con le ovvie conseguenze. Se, invece, si è a δ_A e il moto viene perturbato con un $\partial\delta > 0$, ci si troverà a picchiare senza aver però modificato il δ effettivo: ciò comporterà l'aver una L_t non idonea all'equilibrio (maggiore) ed una velocità maggiore; avendo $\delta_A > \delta_A + \partial\delta$, la speed stability tenderà a far cabrare il velivolo e a riportarlo alla condizione iniziale.

Dunque esiste speed stability se la pendenza della curva δ_{eq} è positiva, $\frac{d\delta_{eq}}{dV_{eq}} > 0$.

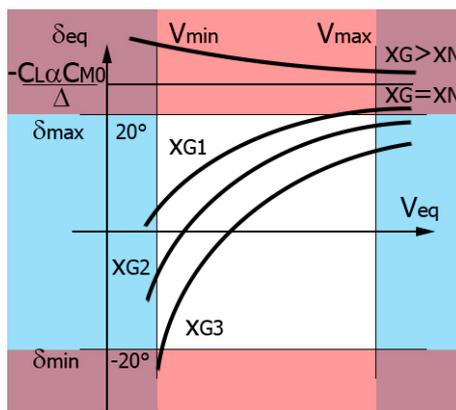


Figura 1.16: Speed Stability - $\delta_{eq} = f(V_{eq})$

1.2.2 Determinazione sperimentale di x_N

Derivando il δ_{eq} rispetto al coefficiente di portanza in condizione di equilibrio, $C_{L_{eq}}$, dalla (1.26),

$$\frac{d\delta_{eq}}{dC_{L_{eq}}} = -\frac{C_{M\alpha}}{\Delta} \frac{(1.21)}{c} - \frac{a}{\Delta} \frac{x_G - x_N}{c} = -\frac{C_{L\alpha}}{\Delta} \frac{x_G - x_N}{c} \quad (1.33)$$

si può determinare la posizione del fuoco del velivolo, x_N , per estrapolazione numerica^[5]. In particolare, registrando il C_L ed il valore del δ_{eq} per due diverse condizioni di volo, e tracciando questa coppia di valori in un grafico $\frac{d\delta}{dC_L}|_{eq}(x)$, con x ascissa di riferimento avente origine nel muso del velivolo, si ottiene x_N come nel grafico a fianco.

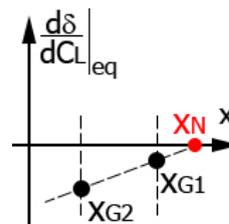


Figura 1.17: Estrapolazione x_N

Condizioni equivalenti di stabilità statica longitudinale

$C_{M\alpha} < 0$	$\frac{d\delta_{eq}}{dV_{eq}} > 0$	$\frac{d\delta_{eq}}{dC_{L_{eq}}} < 0$
-------------------	------------------------------------	--

^[5]Si ricorda che la differenza $x_G - x_N$ è detta margine statico.

1.2. L'EQUILIBRATORE

INTRODUZIONE

La negatività dei coefficienti è ricavabile in Figura (1.19). Si consideri inizialmente il profilo simmetrico in alto, con $\delta = 0$ e $\delta_{tab} = 0$: l'unico fenomeno che può creare $C_H \neq 0$ è $\alpha_s \neq 0$. Se $\alpha_s > 0$ come in Figura, sul dorso dell'equilibratore c'è una depressione, sul ventre una sovrappressione: ciò implica un momento picchiante attorno all'asse dell'equilibratore, e cioè che all'aumentare di α_s il C_H è negativo, e pertanto $b_1 = \frac{\partial C_H}{\partial \alpha_s} < 0$.

Guardando il secondo profilo simmetrico in Figura (1.19) si nota che sia $\delta > 0$ che $\delta_{tab} > 0$, mentre il profilo è investito con corrente parallela e coincidente con la direzione di portanza nulla, e pertanto $\alpha_s = 0$. Supponendo di scindere i due contributi, sia inizialmente $\delta > 0$ e $\delta_{tab} = 0$ (quindi il tab è allineato con l'equilibratore inclinato): questa situazione provoca lo stesso effetto del caso precedente, la deflessione provoca una depressione sul dorso ed una sovrappressione sul ventre, con una risultante tale da provocare un momento picchiante di cerniera, e pertanto $b_2 = \frac{\partial C_H}{\partial \delta} < 0$. Anche considerando $\delta = 0$ e $\delta_{tab} > 0$ si ha lo stesso effetto, più o meno ingente a seconda della geometria, ma comunque $b_3 = \frac{\partial C_H}{\partial \delta_{tab}} < 0$.

I coefficienti b_1, b_2 e b_3 sono influenzati da numerosi fattori: sicuramente dipendono dal fluido (M, Re) e dalla geometria del profilo.

In particolare, i due rapporti $\frac{c_e}{c_t}$ e $\frac{c_b}{c_e}$ variano l'entità del momento generato a parità di variazioni angolari, così come anche β , angolo di apertura in uscita del profilo al bordo di fuga, la forma del becco dell'equilibratore (cioè la superficie di separazione fra stabilizzatore ed equilibratore, semicircolare in Figura 1.19), l'esistenza e la forma di una eventuale fessura fra stabilizzatore ed equilibratore (per ritardare il lo stallo anticipato all'equilibratore), e la forma del bordo d'uscita (a punta in Figura 1.19, ma potrebbe avere un certo spessore troncato $s \approx 0.5$ mm).

Ricavando una relazione fra α_s e α_t , per mezzo della (1.7), è possibile scrivere il C_H in funzione di un termine non dipendente da α (del velivolo complessivo), C_{H0} , uno dipendente, $C_{H\alpha}$, ed i restanti termini funzione dei δ, δ_{tab} . Allora

$$\begin{aligned} & \begin{cases} C_H = C_{H0} + C_{H\alpha}\alpha + b_2\delta + b_3\delta_{tab} \\ \alpha_s = \alpha_t \Big|_{\substack{\delta=0 \\ \delta_{tab}=0}} \stackrel{(1.7)}{=} \alpha_{wb} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i \end{cases} \quad \text{con } \alpha_{wb} \stackrel{(1.15)}{=} \alpha + \frac{a_t}{a} \frac{S_t}{S} i \\ \implies \alpha_s &= \alpha \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) + \frac{a_t}{a} \frac{S_t}{S} i \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i \\ &= \alpha \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i \left[1 - \frac{a_t}{a} \frac{S_t}{S} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)\right] \\ &\stackrel{(1.14)}{=} \alpha \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i \left[1 - \frac{a_t}{a_{wb}(1+F)} \frac{S_t}{S} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)\right] \quad \text{con } F \stackrel{(1.12)}{=} \frac{a_t}{a_{wb}} \frac{S_t}{S} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) \\ &= \alpha \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i \left(1 - \frac{F}{1+F}\right) = \alpha \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - \frac{i}{1+F} \end{aligned} \tag{1.37}$$

Sostituendo il risultato di α_s della (1.37) nella vecchia formulazione del C_H (1.35) si ha

$$\begin{aligned} C_H &= b_0 + b_1 \left[\alpha \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - \frac{i}{1+F} \right] + b_2\delta + b_3\delta_{tab} \\ &= \underbrace{b_0 - b_1 \frac{i}{1+F}}_{C_{H0}} + \underbrace{b_1 \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)}_{C_{H\alpha}} \alpha + b_2\delta + b_3\delta_{tab} \end{aligned} \tag{1.38}$$

1.3.1 Fuoco a comandi liberi

Si analizza il comportamento del fuoco x_N di un velivolo quando i comandi non sono più bloccati, e cioè quando non c'è più azione da parte del pilota o, analogamente, non c'è più un attuatore o altro componente analogo a mantenere le superfici mobili nella loro posizione originaria.

In particolare si vuole dimostrare che la condizione a comandi liberi è meno stabile di quella a comandi bloccati e che $\frac{x'_N}{c} < \frac{x_N}{c}$. Si riprendono la (1.20, 1.21) e la si riscrive con i termini a comandi liberi, introducendo il *free elevon/elevator factor* $0 < f < 1$, a seconda che si parli di velivolo tutt'ala o convenzionale, che riduce a o a_t .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_N}{c} = \frac{x'_a}{c} + \frac{a_t}{a} \bar{V} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{a} \frac{\partial C_{MP}}{\partial \alpha} \\ \frac{x'_N}{c} = \frac{x'_a}{c} + \frac{f a_t}{a'} \bar{V} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{a'} \frac{\partial C_{MP}}{\partial \alpha} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} C_{M\alpha} = a \frac{x_G - x_N}{c} \\ C'_{M\alpha} = a' \frac{x_G - x'_N}{c} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Comandi bloccati} \\ \text{Comandi liberi} \end{array} \quad (1.43)$$

Come fatto nella (1.40), è possibile esprimere anche il C'_{MG} come somma di due coefficienti, uno indipendente da α , C'_{M0} , ed uno dipendente, $C'_{M\alpha}$. Dunque, in analogia alla (1.24),

$$\begin{aligned} C'_{MG} &= C_{M0} + C_{M\alpha}\alpha + C_{M\delta}\delta_{float} = C'_{M0} + C'_{M\alpha}\alpha \\ &\stackrel{(1.39)}{=} C_{M0} + C_{M\alpha}\alpha - \frac{C_{M\delta}}{b_2} (C_{H0} + C_{H\alpha}\alpha + b_3\delta_{tab}) \\ &= \underbrace{C_{M0} - \frac{C_{M\delta}}{b_2} (C_{H0} + b_3\delta_{tab})}_{C'_{M0}} + \underbrace{\left(C_{M\alpha} - \frac{C_{M\delta}C_{H\alpha}}{b_2} \right)}_{C'_{M\alpha}} \alpha \end{aligned} \quad (1.44)$$

È già possibile fare una considerazione sulla stabilità di un velivolo a comandi liberi: il termine $C'_{M\alpha}$ nella (1.44) è composto dal $C_{M\alpha}$ a comandi bloccati a cui viene sottratto un certo termine; in particolare, $C_{M\delta} < 0$ per le considerazioni fatte nella (1.29), $C_{H\alpha} < 0$ in quanto $b_1 < 0$ (1.36) con il down-wash factor positivo (o unitario per velivolo tutt'ala), e $b_2 < 0$ (1.36). Dunque il termine in realtà va a sommarsi al $C_{M\alpha}$ facendo sì che

$$C_{M\alpha} < C'_{M\alpha} < 0 \quad (1.45)$$

Essendo $C_{M\alpha}$ negativo, un valore maggiore implica una “minore negatività” e, pertanto, una stabilità inferiore (seppure il $C'_{M\alpha}$ resti negativo per garantire la stabilità).

Unendo le (1.43, 1.44) si ricava un'utile formulazione, sia per il velivolo tutt'ala che per quello convenzionale, riguardo al margine statico, e cioè

$$\begin{aligned} \frac{x_G - x'_N}{c} &= \frac{C'_{M\alpha}}{a'} \stackrel{(1.44)}{=} \frac{1}{a'} \left(C_{M\alpha} - \frac{C_{M\delta}C_{H\alpha}}{b_2} \right) \\ &\stackrel{(1.43)}{=} \frac{1}{a'} \left(a \frac{x_G - x_N}{c} - \frac{C_{M\delta}C_{H\alpha}}{b_2} \right) \end{aligned} \quad (1.46)$$

Qualitativamente, studiando i segni della (1.46) e supponendo che $\frac{a}{a'} = \frac{C'_{L\alpha}}{C_{L\alpha}} \approx 1$ (1.42), si nota che il margine statico del velivolo a comandi liberi è anteriore rispetto a quello a comandi bloccati, e cioè $x'_N < x_N$. Se il velivolo è stabile, e cioè $x_G < x_N$, può sia accadere che a comandi liberi resti ancora stabile ($x_G < x'_N$), se esisteva già prima sufficiente margine statico, oppure che diventi instabile. Si chiarisce la situazione più precisamente analizzando il tutto prima per un velivolo tutt'ala e poi uno convenzionale.

1.3. COMANDI LIBERI

INTRODUZIONE

$$\left\{ \begin{aligned} C'_{Lt} &\stackrel{(1.39)}{=} a_t \alpha_s - \frac{a_e}{b_2} (b_0 + b_1 \alpha_s + b_3 \delta_{tab}) \\ &= \underbrace{-\frac{a_e}{b_2} (b_0 + b_3 \delta_{tab})}_{C'_{Lt_0}} + \underbrace{\left(a_t - a_e \frac{b_1}{b_2}\right)}_{C'_{Lt\alpha}} \alpha_s \\ \frac{\partial C_{Lt}}{\partial \alpha_s} &= a'_t = a_t - a_e \frac{b_1}{b_2} = a_t - a_t \tau \frac{b_1}{b_2} = a_t \underbrace{\left(1 - \tau \frac{b_1}{b_2}\right)}_f \end{aligned} \right. \quad (1.50)$$

dove si è introdotto il *free elevator factor* f . L'ultima equazione della (1.50) indica che, per quanto $\frac{b_1}{b_2} \approx 1$ e τ sia piccolo, comunque ad α_t è sottratto un termine positivo e, dunque, l'equilibrio al tail è ridotto a comandi liberi rispetto al caso dei comandi bloccati.

Invece, per dimostrare che $x'_N < x_N$, si riscrivono inizialmente le formulazioni opportune del $C_{M\delta}$ e $C_{L\delta}$ dalla (1.29), per poi sostituirle nella (1.46).

$$\begin{aligned} C_{L\delta} &= \frac{S_t}{S} a_t \tau, & C_{M\delta} &= \frac{S_t}{S} a_t \tau \frac{x_G - x'_a}{c} - a_t \tau \bar{V} = C_{L\delta} \frac{x_G - x'_a}{c} - a_e \bar{V} & (1.51) \\ \frac{x_G - x'_N}{c} &= \frac{1}{a'} \left(C_{M\alpha} - \frac{C_{M\delta} C_{H\alpha}}{b_2} \right) \stackrel{(1.21)}{=} \frac{1}{a'} \left(a \frac{x_G - x_N}{c} - \frac{C_{M\delta} C_{H\alpha}}{b_2} \right) \\ &\stackrel{(1.51)}{=} \frac{1}{a'} \left(a \frac{x_G - x_N}{c} - \frac{C_{H\alpha}}{b_2} C_{L\delta} \frac{x_G - x'_a}{c} + \frac{C_{H\alpha}}{b_2} a_e \bar{V} \right) \\ &= \frac{a}{a'} \frac{x_G}{c} - \frac{a}{a'} \frac{x_N}{c} - \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} C_{L\delta} \frac{x_G}{c} + \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} C_{L\delta} \frac{x'_a}{c} + \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} a_e \bar{V} & \frac{x'_a}{c} &= \frac{x'_a - x_N}{c} + \frac{x_N}{c} \\ &= \frac{x_G}{a' c} \left(a - \frac{C_{H\alpha}}{b_2} C_{L\delta} \right) - \frac{x_N}{a' c} \left(a - \frac{C_{H\alpha}}{b_2} C_{L\delta} \right) + \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} C_{L\delta} \frac{x'_a - x_N}{c} + \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} a_e \bar{V} \\ &= \frac{x_G}{c} - \frac{x_N}{c} + \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} C_{L\delta} \frac{x'_a - x_N}{c} + \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} a_e \bar{V} & \text{Sostituisco le (1.38 } C_{H\alpha}, 1.51 C_{L\delta}) \\ &= \frac{x_G}{c} - \frac{x_N}{c} + \frac{b_1}{a' b_2} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) \frac{S_t}{S} a_e \frac{x'_a - x_N}{c} + \frac{b_1}{a' b_2} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) a_e \bar{V} & \text{raccolgo } \frac{a_e b_1}{a' b_2} \\ &= \frac{x_G}{c} - \frac{x_N}{c} - \frac{a_e b_1}{a' b_2} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) \left(\bar{V} + \frac{S_t}{S} \frac{x'_a - x_N}{c} \right) \\ &\quad \boxed{\frac{x'_N}{c} = \frac{x_N}{c} - \frac{a_e b_1}{a' b_2} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) \left(\bar{V} - \frac{S_t}{S} \frac{x_N - x'_a}{c} \right)} & (1.52) \end{aligned}$$

Il termine che si sottrae ad $\frac{x_N}{c}$ nella (1.52) è positivo ed è una costante una volta definito il velivolo. Ciò significa che, anche nel caso di velivolo convenzionale a comandi liberi, $x'_N < x_N$, elemento che va ad aggiungersi alla considerazione fatta nella (1.50) riguardo la stabilità al tail.

Margine statico a comandi bloccati K_N e liberi K'_N

$K_N = \frac{x_N - x_G}{c} \%$	$K'_N = \frac{x'_N - x_G}{c} \%$
--------------------------------	----------------------------------

1.4. L'ALETTA (TAB)

INTRODUZIONE

Con riferimento alla $\delta_{tt}^{[9]}$ della (1.54), il termine noto (TN) , e cioè la prima parte non dipendente da C_{Leq} , è negativo, costante e definito dalla configurazione del velivolo. La derivata della (1.54) indica, invece, la pendenza della retta $\delta_{tt} = f(C_{Leq})$: essendo $b_3 < 0, b_2 < 0, \Delta < 0$, il segno dipende dalla condizione di stabilità statica a comandi liberi; la derivata, e dunque la pendenza della retta, è positiva per $x_G < x'_N$, nulla per $x_G = x'_N$ e negativa per $x_G > x'_N$.

Si costruisce, in analogia alle Figure (1.13, 1.16), un grafico che mostri le escursioni necessarie di δ_{tt} in base alla condizione di volo (C_{Leq}).

Si pone lungo le ascisse il C_{Leq} , limitato da un C_{Leqmin} , corrispondente alla V_{eqmax} , e da un C_{Leqmax} , corrispondente alla V_{eqmin} . Lungo le ordinate è posto il δ_{tt} , limitato da un $\delta_{ttmax} \approx 20^\circ + \varepsilon$ e da un $\delta_{ttmin} \approx -20^\circ + \varepsilon$: la $\varepsilon > 0$, in questo caso, indica che viene preferito avere escursioni positive (deflessioni orarie) massime maggiori di quelle negative, in quanto il flusso sul ventre è tendenzialmente più efficace rispetto al dorso. In altri termini, poichè il flusso sul dorso si distacca prima rispetto al ventre, si preferisce porre di progetto delle escursioni positive maggiori, in quanto il ventre sarà lambito complessivamente di più.

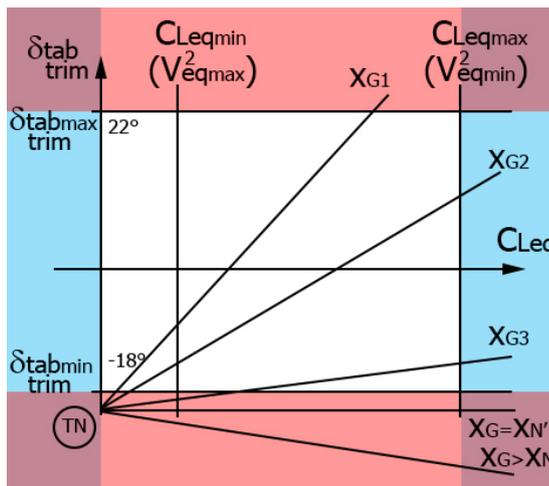


Figura 1.21: Escursione $\delta_{tt} = f(C_{Leq})$

Dalla Figura (1.21) si nota, inoltre, che in realtà il termine noto è un'estrapolazione puramente fisica: non si può effettivamente volare a $C_{Leq} = 0$ (presupporrebbe una velocità infinita). In ogni caso, sono state poste tre posizioni del baricentro anteriori al fuoco a comandi liberi, $x_{G1} < x_{G2} < x_{G3} < x'_N$: si nota che l'unica posizione in grado di garantire che $\exists \delta_{tt} \forall C_{Leq}$ al fine di avere la condizione di trimmaggio è x_{G2} : x_{G1} non garantisce δ_{tt} per elevati C_{Leq} così come x_{G3} non garantisce un trimmaggio per un limitato range di C_{Leq} basso^[10].

Determinazione sperimentale di x'_N

Come fatto nel Paragrafo (1.2.2), si valutano due o più C_{Leq} durante il volo, e si procede per estrapolazione numerica fino a trovare il punto neutro del velivolo a comandi liberi, x'_N . In particolare si avrà

$$C_{Leq} = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho_0 V_{eq}^2 S} \tag{1.55}$$

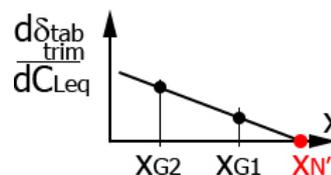


Figura 1.22: Estrapolazione x'_N

dove V_{eq} è la velocità equivalente di trimmaggio, cioè la velocità indicata a meno di errori di strumento, di posizione e senza alcun effetto di comprimibilità, misurata a seguito di un corretto trimmaggio del velivolo.

^[9]Per sintesi, nel testo, viene impiegato il pedice δ_{tt} per indicare δ_{tab}^{trim} .

^[10]In realtà non è necessario, nella fase di progetto, garantire la trimmabilità per l'intero range di C_{Leq} o, analogamente, per V_{eq} . La Federal Aviation Regulation 23 (FAR 23) della Federal Aviation Administration (FAA) specifica gli airworthiness standards per ogni categoria di velivolo (normal, utility, aerobatic e commuter): il velivolo deve essere trimmabile per velocità $V_{eqmin} \approx 1.2V_{st} < V_{eq} < 2.4V_{st}$, dove V_{st} è la velocità di stallo.

1.4. L'ALETTA (TAB)

INTRODUZIONE

1.4.3 Aletta scompensatrice (Antiservo tab, $P \uparrow \iff C_H \uparrow$)

L'aletta scompensatrice sfrutta lo stesso principio di funzionamento della compensatrice, con l'unica differenza che la deflessione del tab è concorde a quella dell'equilibratore. Ciò comporta un aumento di momento di cerniera H e, dunque, un aumento di sforzo di barra P da parte del pilota: per quanto possa sembrare una soluzione unicamente controproducente, è spesso impiegata su velivoli in cui i controlli sono eccessivamente leggeri. Questa operazione viene fatta se non è sufficiente la compensazione fornita dal punto (2) in Figura (1.25): dunque l'aletta scompensatrice viene impiegata per rapporti $\frac{c_b}{c_e}$ non solo coincidenti col punto (2), in cui $b_2 = 0$, ma anche fino a (3), in cui $b_2 > 0$.

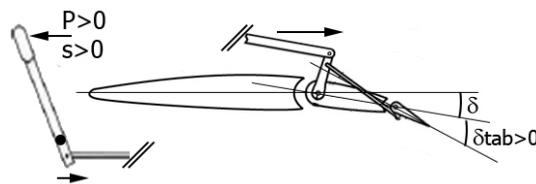


Figura 1.26: Configurazione dell'antiservo tab

$$\delta_{tab} = k\delta \quad k = \left| \frac{\partial \delta_{tab}}{\partial \delta} \right| \approx 1 > 0 \tag{1.58}$$

In maniera del tutto analoga alla (1.57) si ricava la relazione fra C_H , δ e k

$$C_H = b_0 + b_1\alpha_s + \delta b_2 \left(1 + k \frac{b_3}{b_2} \right) \quad \text{con } k \frac{b_3}{b_2} < 0, \left| k \frac{b_3}{b_2} \right| > 1 \implies |kb_3| > |b_2| \tag{1.59}$$

Essendo *solo in questo caso* $b_2 \stackrel{(1.36)}{=} \frac{\partial C_H}{\partial \delta} > 0$, sembrerebbe non rispettata la condizione di stabilità: a deflessioni positive dell'equilibratore il coefficiente di momento di cerniera aumenta ulteriormente.

In altri termini, in questo caso $|b_2| > |b_3|$: questo comporta un cambio di segno nella parentesi della (1.59). Inoltre, le considerazioni della (1.59) possono essere riscritte come

$$\begin{cases} \left(1 + k \frac{b_3}{b_2} \right) < 0 \implies \left| \left(1 + k \frac{b_3}{b_2} \right) \right| < 1 \\ b_2 \left(1 + k \frac{b_3}{b_2} \right) < 0 \implies \left| b_2 \left(1 + k \frac{b_3}{b_2} \right) \right| < |b_2| \end{cases} \tag{1.60}$$

Il termine in δ della (1.59) è ridotto, come si nota dal modulo della (1.60), ma comunque è moltiplicato per un coefficiente negativo: pertanto, è rispettata comunque la condizione di stabilità del comando.

1.5. TRASMISSIONE DEL COMANDO

INTRODUZIONE

La (1.61) si può riscrivere come

$$P = -GH \stackrel{(1.34)}{=} -G \frac{1}{2} \rho V^2 S_e c_e C_H \quad \text{con} \quad \begin{cases} C_H \stackrel{(1.37)}{=} C_{H0} + C_{H\alpha} \alpha_{eq} + b_2 \delta_{eq} + b_3 \delta_{tab} & \text{Volo generico} \\ C_H = 0 = C_{H0} + C_{H\alpha} \alpha_{eq} + b_2 \delta_{eq} + b_3 \delta_{\substack{tab \\ trim}} & \text{Volo trimmato} \end{cases} \quad (1.62)$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni del C_H nella (1.62), sostituendo a $\delta_{\substack{tab \\ trim}}$ la (1.54) e a C_{Leq} la sua espressione esplicita, si ha

$$\begin{aligned} C_H &= b_3 \left(\delta_{tab} - \delta_{\substack{tab \\ trim}} \right) = b_3 \delta_{tab} - b_3 \delta_{\substack{tab \\ trim}} \\ &\stackrel{(1.54)}{=} b_3 \delta_{tab} - b_3 \left[-\frac{1}{b_3} \left[C_{H0} + \frac{C_{M0}}{\Delta} (C_{H\alpha} C_{L\delta} - b_2 C_{L\alpha}) \right] + \frac{1}{b_3} \frac{a' b_2}{\Delta} \frac{x_G - x'_N}{c} C_{Leq} \right] \\ &= b_3 \delta_{tab} + C_{H0} + \frac{C_{M0}}{\Delta} (C_{H\alpha} C_{L\delta} - b_2 C_{L\alpha}) - \frac{a' b_2}{\Delta} \frac{x_G - x'_N}{c} \frac{W/S}{\frac{1}{2} \rho V^2} \end{aligned} \quad (1.63)$$

A questo punto si sostituisce la (1.63) nell'espressione di P della (1.62), separando i termini dipendenti (B) e indipendenti (P_0) da $\frac{1}{2} \rho V^2$. Dunque

$$\begin{aligned} P &= -G \frac{1}{2} \rho V^2 S_e c_e \left[b_3 \delta_{tab} + C_{H0} + \frac{C_{M0}}{\Delta} (C_{H\alpha} C_{L\delta} - b_2 C_{L\alpha}) - \frac{a' b_2}{\Delta} \frac{x_G - x'_N}{c} \frac{W/S}{\frac{1}{2} \rho V^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \rho V^2 \left\{ \underbrace{-G S_e c_e \left[b_3 \delta_{tab} + C_{H0} + \frac{C_{M0}}{\Delta} (C_{H\alpha} C_{L\delta} - b_2 C_{L\alpha}) \right]}_B \right\} + \underbrace{G S_e c_e \frac{W}{S} \frac{a' b_2}{\Delta} \frac{x_G - x'_N}{c}}_{P_0} \\ &\implies \boxed{P = P_0 + B \frac{1}{2} \rho V^2} \end{aligned} \quad (1.64)$$

L'andamento di P dipende dal segno dei due contributi P_0 e B , dove P_0 è uno sforzo di barra fittizio che si avrebbe a velocità $V = 0$. In particolare si vuole verificare se i requisiti (4) ($\forall V_{eq} \in [V_{eqmin}, V_{eqmax}] \exists V_{trim}$) e (5) ($\frac{dP_{eq}}{dV_{eq}} > 0$), definiti nella Tabella (1.1), sono rispettati: prima di calcolare i singoli contributi si fa un'analisi grafica.

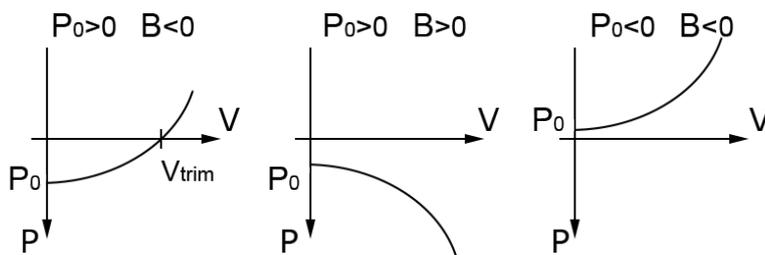


Figura 1.28: Contributi P_0 e B

(4) ✓ (5) ✗ (4) ✗ (5) ✓ (4) ✗ (5) ✗

Nessuno dei tre casi valida contemporaneamente i due requisiti. Ciò significa che dovrà valere $P_0 < 0$ e $B > 0$. Difatti si può subito verificare che, essendo $G > 0$, $b_2 < 0$, $\Delta < 0$ e $x_G < x'_N$ (supponendo un velivolo stabile), il termine P_0 contenuto nella (1.64) è sicuramente negativo, essendo gli altri coefficienti positivi per definizione. Più arduo è il computo di B , ma graficamente si ricava che l'insieme delle moltiplicazioni e sottrazioni dei suoi componenti fra parentesi quadre debba essere negativo, affinché $B > 0$ (poichè contiene un segno -).

2. Moto curvo

Si considera la condizione di volo di moto accelerato con accelerazione normale alla traiettoria, cioè moto curvo (richiamata/picchiata) contenuto nel piano di simmetria del velivolo.

Per semplicità L e W , il quale è moltiplicato per fattore di carico a contingenza n , coincidono nel baricentro. Inoltre, si considera il volo a regime: $V = \text{cost}$, mentre la portanza L varia durante la richiamata. Nel punto minimo in Figura (2.1) si ha

$$\begin{cases} L = nW \\ nW = W \cos \gamma + F_c = W \cos \gamma + a_c m = W \cos \gamma + \frac{V^2}{R} \frac{W}{g} \end{cases} \implies n = \cos \gamma + \frac{V^2}{gR} \quad (2.1)$$

Poichè $L \neq \text{cost}$ e $V = \text{cost}$, deve valere $\alpha \neq \text{cost}$, ma per semplicità si suppone che nell'intorno del punto che si considera $\alpha \approx \text{cost}$ e che, dunque, fra due punti successivi $\dot{\alpha} \approx 0$.

Si introduce la velocità angolare di beccheggio q , costante per richiamata corretta

$$\boxed{q = \dot{\psi} = \frac{V}{R}} \quad \text{Sostituendo la (2.1) } n = 1 + \frac{V^2}{gR} = 1 + q \frac{V}{g} \implies \boxed{q = (n - 1) \frac{g}{V}} \quad (2.2)$$

Ne consegue che nell'intorno di un generico punto $n \approx \text{cost}$ e, dunque, anche l'angolo di rampa $\gamma \approx \text{cost}$. Si studia il punto più basso della traiettoria, a $\gamma = 0$.

Ci si interessa di valutare come varino due parametri al variare del fattore n . In particolare, per un moto rettilineo uniforme, ad una certa velocità V corrispondono le variabili di equilibrio δ_{eq} e P_{eq} : per un moto uniformemente accelerato, come quello in Figura (2.1), si ha un $\Delta n = n - 1$ rispetto al rettilineo uniforme e si hanno delle variabili di equilibrio del tipo $\delta_{eq} + \Delta \delta_{eq}$, $P_{eq} + \Delta P_{eq}$.

Queste variazioni $\Delta \delta_{eq}$, ΔP_{eq} sono entrambe proporzionali al Δn e definiscono il sesto ed il settimo requisito della trasmissione del comando. In particolare

$$\begin{cases} \text{Elevator angle per } g & \textcircled{6} & \frac{\Delta \delta_{eq}}{\Delta n} < 0 \\ \text{Stick force per } g & \textcircled{7} & \frac{\Delta P_{eq}}{\Delta n} < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

In sostanza il requisito $\textcircled{6}$ richiede che all'aumentare di n rispetto al volo rettilineo orizzontale, e cioè all'aumentare del beccheggio q , l'angolo dell'equilibratore dovrà essere inferiore. Difatti, supponendo che per il volo orizzontale $\delta_{eq} = 0$, sicuramente per una cabrata $\delta_{eq} < 0$.

Il requisito $\textcircled{7}$ implica, invece, che il modulo dello sforzo di barra aumenti con n , ma che questo sia negativo: difatti, dalla Figura (1.27) si nota che $P > 0$ lo si ha per deflessioni a picchiare $\delta > 0$, mentre per una richiamata (la quale ha $\Delta n > 0$) si ha $P < 0$ con $\delta < 0$ ^[1].

^[1]Si fa presente che l'intero discorso è valido anche per una picchiata continua, ad esempio una manovra a microgravità: in tal caso $\delta > 0$ e $P > 0$, ma al contempo $\Delta n = n - 1 < 0$, e pertanto la derivata $\textcircled{7}$ resta negativa.

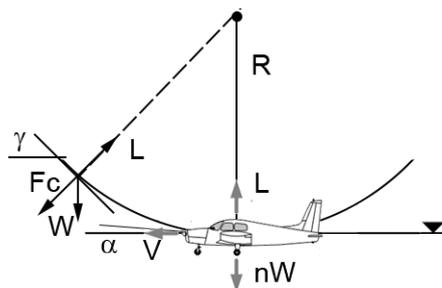


Figura 2.1: Moto accelerato - richiamata

2.1. CONTRIBUTO DELLA CODA ALLE DERIVATE AERODINAMICHE MOTO CURVO

La (2.8) mostra che $C_{Lq} > 0$, definito una volta noto il velivolo.

Il momento di beccheggio causato dal tail e trasportato al baricentro si ottiene moltiplicando la portanza al tail per il suo braccio. Ricordando che $M_G > 0$ per rotazioni orarie, si ha

$$\begin{cases} (\Delta M_G)_{tail} = -\Delta L_t l'_t \\ (\Delta C_{M_G})_{tail} = -\Delta L_t l'_t \frac{1}{\frac{1}{2}\rho V^2 S c} \quad \text{con} \quad \frac{\Delta L_t}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} = (\Delta C_L)_{tail} = \Delta C_{L_t} \frac{S_t}{S} \end{cases} \\ \implies (\Delta C_{M_G})_{tail} = -(\Delta C_L)_{tail} \frac{l'_t}{c} \stackrel{(2.8)}{=} -\Delta C_{L_t} \frac{S_t}{S} \frac{l'_t}{c} = -\Delta C_{L_t} \bar{V}' \quad (2.9)$$

Dunque, sostituendo la (2.7) nella (2.9), si ottiene

$$(\Delta C_{M_G})_{tail} = -2a_t \frac{l'_t}{c} \hat{q} \bar{V}' \implies \boxed{\frac{\partial C_{M_G}}{\partial \hat{q}} = C_{M_q} = \frac{\partial (\Delta C_{M_G})_{tail}}{\partial \hat{q}} = -2a_t \frac{l'_t}{c} \bar{V}'} \quad (2.10)$$

La (2.8) e la (2.10) esprimono le due derivate aerodinamiche in funzione di q , e cioè C_{Lq} e C_{Mq} . Poichè entrambe contengono il termine l'_t , entrambe dipendono da x_G . Sintetizzando

$$\boxed{C_{Lq} = 2a_t \bar{V}' > 0} \quad \boxed{C_{Mq} = -2a_t \frac{l'_t}{c} \bar{V}' < 0} \quad (2.11)$$

2.1.1 Il parametro di massa relativo μ

Si introduce il parametro di massa relativa (o massa del velivolo adimensionalizzata) μ

$$\mu = \frac{2W}{g\rho S c} \quad \frac{[\text{kgms}^{-2}]}{[\text{ms}^{-2} \text{kgm}^{-3} \text{m}^2 \text{m}]} = [\text{n/a}] \quad (2.12)$$

rapporto fra massa del velivolo $\frac{W}{g}$ e massa d'aria a contatto con il volume dell'ala frontale $\frac{1}{2}\rho S c$, ed il suo valore cresce al diminuire della densità, e cioè all'aumentare della quota z .

Riprendendo la (2.2) si può legare $L_{n=1}$ con Δn nel moto curvo per ricavare ΔL

$$\begin{cases} L_{n=1} = W_{n=1} = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L_{n=1}} \\ \Delta n = n - 1 \stackrel{(2.2)}{=} \frac{qV}{g} \end{cases} \implies \begin{cases} \Delta L = W_{n=1} \Delta n = W_{n=1} \frac{qV}{g} = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L_{n=1}} \frac{qV}{g} \\ \Delta C_L = C_{L_{n=1}} \frac{qV}{g} \end{cases} \quad (2.13)$$

A questo punto si moltiplica e divide la (2.13) per $\frac{c}{2V}$ e si risostituisce $C_{L_{n=1}}$

$$\begin{aligned} \Delta C_L = C_{L_{n=1}} \frac{V}{g} \underbrace{q \frac{c}{2V}}_{\hat{q}} \frac{2V}{c} &= C_{L_{n=1}} 2 \frac{V^2}{gc} \hat{q} & C_{L_{n=1}} &= \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \\ &= \frac{2\hat{q}}{gc} \frac{W}{\frac{1}{2}\rho S} = 2\hat{q} \frac{2W}{g\rho S c} \stackrel{(2.12)}{=} 2\hat{q}\mu & \boxed{\Delta C_L = 2\hat{q}\mu} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dalla (2.13) si può ricavare una relazione fra q e $C_{L_{n=1}}$ ^[2]. Unendo la (2.2) alla (2.13) si ha

$$\begin{aligned} \Delta C_L = C_{L_{n=1}} \frac{qV}{g} \stackrel{(2.2)}{=} C_{L_{n=1}} (n - 1) \\ \implies C_{L_{n=1}} (n - 1) = 2\hat{q}\mu \implies \boxed{\hat{q} = \frac{C_{L_{n=1}}}{2\mu} (n - 1)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

^[2]In Appendice A.3 è presente un'ulteriore dimostrazione.

2.2 Contributo dell'ala alle derivate aerodinamiche

Si suppone di analizzare un velivolo tutt'ala, in maniera da dover assoggettare le derivate aerodinamiche C_{Lq} e C_{Mq} , in funzione di q , al beccheggio che l'unica ala principale fornisce.

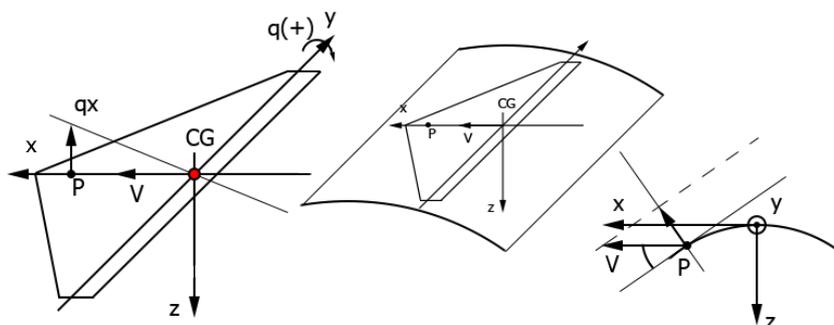


Figura 2.3: Ala a delta - lamina piana (sx) con V e q ; lamina curva (centro-dx) con V

In Figura (2.3, sx) è presentata un'ala a delta modellizzata come una lamina piana: gli assi body sono centrati nel baricentro CG e tale lamina è animata da una velocità V e da una velocità di beccheggio $q > 0$ in senso orario (il velivolo sta cabrando). Tale q è funzione della distanza dal baricentro x : la qx è chiamata velocità cinematica di beccheggio, funzione della generica distanza x , e va a comporsi vettorialmente con V .

Se invece si involuppa la lamina piana su una superficie cilindrica, come in Figura (2.3, centro), si avrà una lamina curva. Si suppone di animare tale lamina con la sola velocità V : come si nota in Figura (2.3, dx), al generico punto P la velocità V si può scomporre in una certa velocità normale v_n , ed un'altra tangenziale (non rappresentata). Si vuole dimostrare che la rappresentazione con lamina piana e con lamina curva è identica aerodinamicamente: se l'angolo sotteso fra la tangente alla lamina curva e la velocità V è piccola è corretto approssimare

$$v_n = V \frac{\partial z}{\partial x} = qx \implies \partial z = \frac{q}{V} x dx \implies z = \int \partial z = \int \left(\frac{q}{V} x \right) dx = \frac{q}{V} \frac{x^2}{2} \stackrel{(2.6)}{=} \frac{\hat{q}}{V} \frac{2V}{c} \frac{x^2}{2}$$

$$z = \frac{\hat{q}}{c} x^2$$

(2.19)

Se la lamina piana in Figura (2.3, dx) è incurvata secondo una legge parabolica (2.19) con vertice superiore (massimo incurvamento) coincidente con il baricentro, allora la lamina piana animata da V e q e quella curva animata dalla sola q sono aerodinamicamente coincidenti.

In sostanza, chiamando B il profilo ulteriormente inarcato per simulare la presenza di q ed A quello base (in Figura 2.3 è una lamina piana, ma potrebbe essere un profilo curvo generico), si può scrivere

$$C_{Mq} = \frac{(C_{MG})_B - (C_{MG})_A}{\hat{q}} = \frac{\Delta C_{MG}}{\Delta \hat{q}} \tag{2.20}$$

In questo modo, anche variando V e quindi variando q , la derivata fondamentale non varia.

2.3. REQUISITI DI MANOVRABILITÀ $\frac{\Delta\delta}{\Delta n}$, $\frac{\Delta P}{\Delta n}$

MOTO CURVO

Trovato il requisito (6) di manovrabilità nella (2.23), si ricerca una formulazione valida per il (7). Questo requisito passa sicuramente per il coefficiente di momento di cerniera, direttamente relazionato allo sforzo di barra P : si ricerca, dunque, una formulazione del tipo $\frac{\Delta C_H}{\Delta n}$. Dalla (1.57), per una richiamata continua a $\delta = \text{cost}$, si ha

$$C_H = b_0 + b_1\alpha_s + \delta b_2 \left(1 - k \frac{b_3}{b_2}\right) \implies \boxed{\Delta C_H = b_1\alpha_s = b_1\Delta\alpha_t} \quad (2.25)$$

con α_s angolo misurato fra direzione del flusso a monte e direzione $C_{Lt} = 0$, con $\delta = 0$. Sostituendo la (2.4) e moltiplicando e dividendo per $\frac{c}{2}$ si ottiene una relazione fra ΔC_H e \hat{q} , dalla quale si può ricavare una nuova derivata aerodinamica C_{Hq}

$$\left\{ \begin{array}{l} C_H = b_1\Delta\alpha_t \\ \Delta\alpha_t = \frac{ql_t''}{V} \end{array} \right. \implies \Delta C_H = b_1 \underbrace{\frac{q}{V} \frac{c}{2}}_{\hat{q}} \frac{2}{c} l_t'' = 2b_1 \frac{l_t''}{c} \hat{q} \implies \boxed{\frac{\partial C_H}{\partial \hat{q}} = C_{Hq} = 2b_1 \frac{l_t''}{c}} \quad (2.26)$$

La derivata $C_{Hq} < 0$ fintanto che, come di solito avviene, $b_1 < 0$; inoltre, $C_{Hq} = f(x_G)$. Fra la condizione $n = 1$ e $n > 1$, il C_H vede comparire un valore aggiuntivo tale per cui

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 1 \implies C_H = C_{H0} + C_{H\alpha}\alpha + b_2\delta + b_3\delta_{tab} \\ n > 1 \implies C_H + \Delta C_H = C_{H0} + C_{H\alpha}(\alpha + \Delta\alpha) + b_2(\delta + \Delta\delta) + b_3\delta_{tab} + C_{Hq}\hat{q} \\ \Delta C_H = C_{H\alpha}\Delta\alpha + b_2\Delta\delta + C_{Hq}\hat{q} \end{array} \right. \quad (2.27)$$

A questo punto, sostituendo la (2.15) nella (2.27) e dividendo tutto per $\Delta n = n - 1$, si ottiene la formulazione ricercata $\frac{\Delta C_H}{\Delta n}$. Questa può essere ulteriormente affinata sostituendo il $\Delta\alpha$ nella stessa, ricavato dal $\Delta C_L = C_{L_{n-1}}(n - 1)$ della (2.16). Dunque

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta C_H = C_{H\alpha}\Delta\alpha + b_2\Delta\delta + C_{Hq} \frac{C_{L_{n-1}}}{2\mu} (n - 1) \\ \Delta\alpha = -\frac{1}{C_{L\alpha}} \left[C_{L\delta}\Delta\delta + C_{Lq} \frac{C_{L_{n-1}}}{2\mu} (n - 1) - C_{L_{n-1}}(n - 1) \right] \end{array} \right. \quad (2.28)$$

$$\Delta C_H = -\frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}} \left[C_{L\delta}\Delta\delta + C_{Lq} \frac{C_{L_{n-1}}}{2\mu} (n - 1) - C_{L_{n-1}}(n - 1) \right] + b_2\Delta\delta + C_{Hq} \frac{C_{L_{n-1}}}{2\mu} (n - 1)$$

$$\frac{\Delta C_H}{\Delta n} = \frac{\Delta C_H}{n - 1} = -\frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}} \left[C_{L\delta} \frac{\Delta\delta}{n - 1} + C_{Lq} \frac{C_{L_{n-1}}}{2\mu} - C_{L_{n-1}} \right] + b_2 \frac{\Delta\delta}{n - 1} + C_{Hq} \frac{C_{L_{n-1}}}{2\mu}$$

Separando i termini a secondo membro della (2.28) fra i dipendenti da $\frac{\Delta\delta}{n-1}$ e quelli da $C_{L_{n-1}}$, e richiamando la (1.47), si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\Delta C_H}{n - 1} &= \frac{\Delta\delta}{n - 1} \left(b_2 - C_{L\delta} \frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}} \right) + C_{L_{n-1}} \left(-\frac{C_{Lq}}{2\mu} \frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}} + \frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}} + \frac{C_{Hq}}{2\mu} \right) \\ &= \frac{\Delta\delta}{n - 1} \frac{b_2}{C_{L\alpha}} \underbrace{\left(C_{L\alpha} - C_{L\delta} \frac{C_{H\alpha}}{b_2} \right)}_{a' \text{ (1.47)}} + \frac{C_{L_{n-1}}}{2\mu C_{L\alpha}} \left[C_{H\alpha} (2\mu - C_{Lq}) + C_{L\alpha} C_{Hq} \right] \\ &= \frac{\Delta\delta}{n - 1} \frac{b_2}{C_{L\alpha}} a' + \frac{C_{L_{n-1}}}{2\mu C_{L\alpha}} \left[C_{H\alpha} (2\mu - C_{Lq}) + C_{L\alpha} C_{Hq} \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.3. REQUISITI DI MANOVRABILITÀ $\frac{\Delta\delta}{\Delta N}$, $\frac{\Delta P}{\Delta N}$

MOTO CURVO

2.3.1 Considerazioni aggiuntive su $\frac{dP}{dn}$

Esplicitando il carico alare $\frac{W}{S}$ nella (2.34) si è reso il $\frac{dP}{dn} \neq f(V)$. Però essendo presente μ , resta sempre valido che $\frac{dP}{dn} \uparrow \iff z \uparrow \implies \mu \downarrow$.

Il requisito (7) viene fornito in base alla categoria di velivolo al quale appartiene: difatti, supponendo che un velivolo acrobatico può giungere ad elevati valori di n , ciò significa che il suo $\frac{dP}{dn} \approx 1 \frac{\text{kg}}{g}$; per un velivolo da trasporto, invece, può valere $\frac{dP}{dn} \approx 4 \frac{\text{kg}}{g}$.

Una volta definito il velivolo, è opportuno poter essere in grado di variare il $\frac{dP}{dn}$ senza stravolgere la sua configurazione. Si sfruttano delle masse aggiuntive poste in alcuni punti.

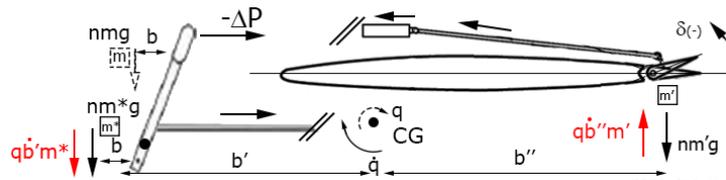


Figura 2.5: Artificio m o $m^* + m' = m$ per soddisfare $\frac{dP}{dn}$

Supponendo una cabrata, ciò causerà un certo beccheggio q . In condizione di moto non vario, cioè in assenza di \dot{q} , è sufficiente porre una massa m ad un certo braccio b dal comando affinché questa generi un peso aggiuntivo equilibrante nmg .

Se invece si è in condizione di moto vario, esiste anche \dot{q} : in questo caso si desidera mantenere il beccheggio q ma annullare $\dot{q} = 0$; per far ciò è possibile scindere la massa m in due masse $m^* + m' = m$, una posta nei pressi del comando ed in grado di generare il peso nm^*g e l'altra in coda, all'equilibratore, che genererà un peso $nm'g$. Ovviamente il peso complessivo sarà $nmg = nm^*g + nm'g$: al contempo, scegliendo opportunamente m^* e m' , è possibile fare in modo che queste inerzie si annullino, come in Figura (2.5).

Concludendo, si ricerca una certa $g = \left(\frac{x_G}{c}\right)$ tale per cui si può ricavare per interpolazione l'ascissa $\frac{x_{M'}}{c}$, si riprende la (2.30) e si sostituisce al suo interno $f\left(\frac{x_G}{c}\right) = \frac{x_M}{c}$ (2.24). Allora

$$\frac{\Delta C_H}{n-1} = -C_{L_{n-1}} \left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right) \frac{a'b_2}{\Delta} \left[-\frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}} \frac{\Delta}{a'b_2} - \frac{C_{Hq}}{2\mu - C_{Lq}} \frac{\Delta}{a'b_2} + \frac{x_G}{c} - f\left(\frac{x_G}{c}\right) \right] \quad (2.36)$$

Sia

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x_G}{c}\right) &= f\left(\frac{x_G}{c}\right) + \frac{\Delta}{a'b_2} \left(\frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}} + \frac{C_{Hq}}{2\mu - C_{Lq}}\right) \\ \implies \frac{\Delta C_H}{n-1} &= -C_{L_{n-1}} \left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right) \frac{a'b_2}{\Delta} \left[\frac{x_G}{c} - g\left(\frac{x_G}{c}\right) \right] \quad (2.37) \\ \implies \left(\frac{x_G}{c}\right)_{\frac{\Delta C_H}{\Delta n}=0} &= g\left(\frac{x_G}{c}\right) = \frac{x_{M'}}{c} = \left(\frac{x_G}{c}\right)_{\frac{\Delta P}{\Delta n}=0} \end{aligned}$$

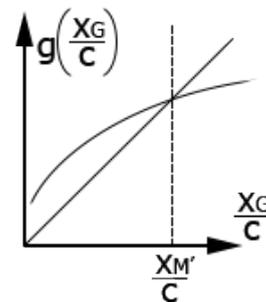


Figura 2.6: $\frac{x_{M'}}{c}$, $\frac{x_G}{c} = g\left(\frac{x_G}{c}\right)$

È possibile descrivere, come fatto per il margine statico a comandi liberi e bloccati, un margine di manovra a comandi liberi $K_{M'}$ e bloccati K_M .

Margine di manovra a comandi bloccati K_M e liberi $K_{M'}$

$K_M = \frac{x_M - x_G}{c} \%$	$K_{M'} = \frac{x_{M'} - x_G}{c} \%$
--------------------------------	--------------------------------------

2.4. CONCLUSIONE

MOTO CURVO

Concludendo, viene presentato l'involuppo di volo di un velivolo convenzionale.

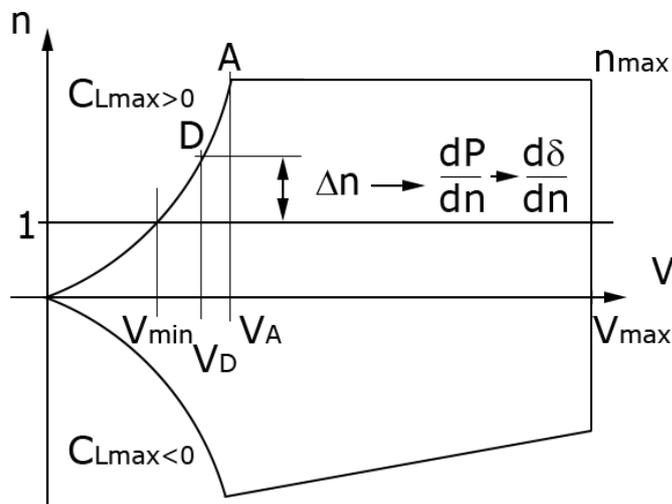


Figura 2.9: Inviluppo di volo

Si nota in figura la velocità V_{min} che, in volo rettilineo uniforme ($n = 1$), è la condizione corrispondente al C_{Lmax} . Analogamente, la condizione A è quella per cui, strutturalmente, si può ottenere il massimo fattore di contingenza n_{max} per la massima velocità operativa ^[4].

Prendendo, ad esempio, un certo punto D tale per cui $V_{min} < V_D < V_A$, si può notare che il massimo n raggiungibile sarà funzione dell'angolo $\delta < 0$ (in quanto $n > 1$ implica una cabrata): ciò significa che il δ necessario al volo orizzontale, $n = 1$, sarà inferiore. Proseguendo con questo ragionamento, nel caso in cui il diagramma in Figura (2.7) non fosse stato calcolato opportunamente, si potrebbe giungere ad una certa V in cui il δ dovrebbe essere talmente tanto basso, per il volo rettilineo orizzontale, da non garantire questa condizione.

^[4]Arco verde o giallo sull'anemometro, a seconda del costruttore, solitamente verde.

3.1. SISTEMA DI RIFERIMENTO NED

DINAMICA DEL VELIVOLO

Il sistema di riferimento NED è supposto inerziale, ma tale ipotesi è verificata solo se il tempo di analisi di un certo fenomeno è molto più piccolo del tempo di riferimento scelto^[1].

Per verificare ciò si calcolano le tre accelerazioni principali (centrifuga a_c dovuta alla rotazione Terrestre, centrifuga a dovuta alla traiettoria e di Coriolis a_C) e le si confrontano con g .

Ponendosi nel caso più conservativo si considerano i valori più elevati conosciuti di quota e velocità di volo per un velivolo commerciale: il Concorde volava a $z = 20$ km e a $V = 550$ m/s. Allora, avendo il raggio terrestre $R_\oplus = 6378$ km $\implies R = R_\oplus + z \approx 6.4 \cdot 10^6$ m, si ha

$$\begin{aligned}
 a_c &= \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{84600}\right)^2 \cdot 6.4 \cdot 10^6 \approx 0.033 \text{ ms}^{-2} \approx \frac{g}{300} \\
 a &= \frac{V^2}{R} = \frac{550^2}{6.4 \cdot 10^6} \approx 0.047 \text{ ms}^{-2} \approx \frac{g}{200} \\
 a_C &= 2V \wedge \omega \stackrel{(V \perp \omega)}{=} 2 \cdot 550 \frac{2\pi}{86400} \approx 0.08 \text{ ms}^{-2} \approx \frac{g}{125}
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Poichè tali accelerazioni sono almeno due ordini di grandezza più piccole, possono essere trascurate.

3.1.1 Matrice di Trasformazione B_B

Per portare il sistema ABC a coincidere con il sistema NED sono necessarie tre rotazioni fondamentali di quest'ultimo degli angoli $\{\Psi, \vartheta, \Phi\}$, detti angoli di Eulero:

- 1) $\Psi > 0$ orario attorno a $z_{NED} = D$, cioè si trasforma $\{N, E, D\}$ in $\{x_1, y_1, D\}$;
- 2) $\vartheta > 0$ orario attorno a y_1 , cioè si trasforma $\{x_1, y_1, D\}$ in $\{x_2, y_1, z_2\}$;
- 3) $\Phi > 0$ orario attorno a $x_B = x_2$, cioè si trasforma $\{x_2, y_1, z_2\}$ in $\{x_B, y_B, z_B\} = \{A, B, C\}$.

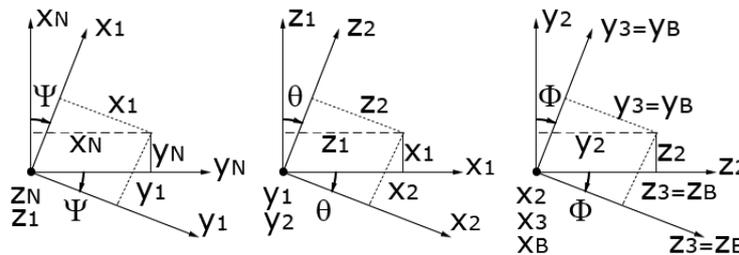


Figura 3.2: Rotazioni elementari $\{\Psi, \vartheta, \Phi\}$ di Eulero - Matrice B_B

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{NED} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{NED} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{NED}$$

(3.4)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{ABC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{NED} = B_\Phi B_\vartheta B_\Psi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{NED} = B_B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{NED}$$

^[1]Ad esempio, se si studia la dinamica di un moto oscillatorio del velivolo che si smorza completamente in qualche decina di secondi, allora si potrà considerare il sistema NED inerziale, tralasciando il periodo di rotazione terrestre di $T = 24$ h. Analogamente, in base al problema si deve poter trascurare la rivoluzione terrestre ($T_{riv} \approx 365$ giorni), la nutazione ($T_{nut} \approx 18.75$ anni), e così via.

3.2 Equazioni di equilibrio dinamico

Si suppone di lavorare su un velivolo assunto a corpo rigido (ABC) rispetto ad un sistema di riferimento inerziale NED . Si possono scrivere equazioni di equilibrio delle forze \mathcal{F} e dei momenti, suddivisi in contributi attivi a , dei vincoli v e di inerzia i : ricordando che il polo del sistema di riferimento è il centro di gravità (e che dunque $\vec{V} \wedge \vec{Q} = 0$, dove Q è la quantità di moto), si ha

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{F}}_a + \vec{\mathcal{F}}_v + \vec{\mathcal{F}}_i = 0 & \quad \text{con } \vec{\mathcal{F}}_i = -\frac{d\vec{Q}}{dt} \\ \vec{\mathcal{M}}_a + \vec{\mathcal{M}}_v + \vec{\mathcal{M}}_i = 0 & \quad \text{con } \vec{\mathcal{M}}_i = -\frac{d\vec{K}}{dt} - \vec{V} \wedge \vec{Q} = 0 \end{aligned} \implies \begin{cases} \vec{\mathcal{F}}_a = -\vec{\mathcal{F}}_i = \frac{d\vec{Q}}{dt} \\ \vec{\mathcal{M}}_a = -\vec{\mathcal{M}}_i = \frac{d\vec{K}}{dt} \end{cases} \quad (3.6)$$

Dove si è semplificato $\implies \vec{\mathcal{F}}_v = \vec{\mathcal{M}}_v = 0$ in quanto il velivolo non è vincolato. Con l'ausilio delle (3.1, 3.2) si scrive il sistema di 6 equazioni come segue

$$\begin{cases} F_x = m(\dot{u} + qw - rv) \\ F_y = m(\dot{v} + ru - pw) \\ F_z = m(\dot{w} + pv - qu) \\ L = \dot{p}J_x - \dot{r}J_{xz} - pqJ_{xz} + qr(J_z - J_y) - J_{yz}(q^2 - r^2) - J_{xy}(\dot{q} - rp) \\ M = \dot{q}J_y - pr(J_x - J_z) - J_{xz}(r^2 - p^2) - J_{xy}(\dot{p} + qr) - J_{yz}(\dot{r} - pq) \\ N = \dot{r}J_z - \dot{p}J_{xz} + pq(J_y - J_x) + qrJ_{xz} - J_{xy}(p^2 - q^2) - J_{yz}(\dot{q} + rp) \end{cases} \quad (3.7)$$

Nel caso in cui esista un piano di simmetria longitudinale, sia geometrico che di masse, $J_{xy} = J_{yz} = 0$, mentre nel piano xz continua a valere $J_{xz} \neq 0$. I momenti della (3.7) divengono

$$\begin{cases} L = \dot{p}J_x - \dot{r}J_{xz} - pqJ_{xz} + qr(J_z - J_y) \\ M = \dot{q}J_y - pr(J_x - J_z) - J_{xz}(r^2 - p^2) \\ N = \dot{r}J_z - \dot{p}J_{xz} + pq(J_y - J_x) + qrJ_{xz} \end{cases} \quad (3.8)$$

Se come assi di riferimento vengono scelti degli assi principali di inerzia (o assi di stabilità S , Figura (3.4)), cioè assi ruotati attorno ad y_B di un angolo μ attorno al CG, vale $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$ e la (3.8) diventa

$$\begin{cases} L = \dot{p}J_x + qr(J_z - J_y) \\ M = \dot{q}J_y - pr(J_x - J_z) \\ N = \dot{r}J_z + pq(J_y - J_x) \end{cases} \quad (3.9)$$

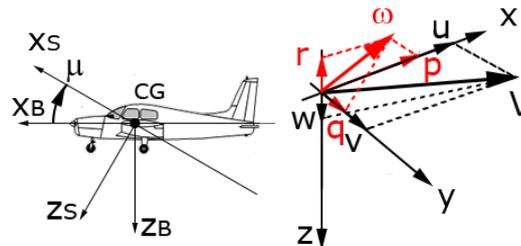


Figura 3.4: Assi principali di inerzia (o stabilità)

Si suppone di trovarsi in una certa condizione iniziale ① di moto uniforme, in equilibrio (\vec{V} contenuto nel piano di simmetria), e di analizzare cosa avviene dopo un certo Δt nella condizione perturbata ②: si suppone che questa perturbazione (ad esempio una raffica o un doublet^[2]) influenzi tutti i parametri della velocità $V = \{u, v, w\}$ e della rotazione $\omega = \{p, q, r\}$, come in Figura (3.4).

^[2]Manovra effettuata dal pilota per simulare una raffica.

3.2. EQUAZIONI DI EQUILIBRIO DINAMICO

DINAMICA DEL VELIVOLO

Invece, come accennato poco prima, la linearizzazione si rende necessaria per disaccoppiare il moto laterodirezionale da quello longitudinale. Difatti, analizzando ad esempio un moto rettilineo uniforme con deriva a causa del vento laterale, quindi angolo di sideslip $\beta > 0$

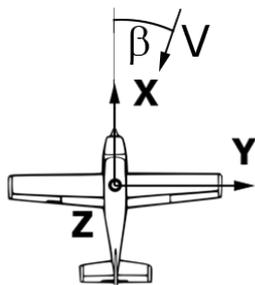


Figura 3.5: Interconnessione moto laterodirezionale con longitudinale

Se β non è piccolo la velocità u lungo x non è più $u \approx V$, e dunque il moto laterodirezionale sta influenzando direttamente sul longitudinale. Al contrario, per quanto possono essere grandi le perturbazioni nel longitudinale (grandi Δu e grandi Δw), comunque il vettore \vec{V} resta nel piano xz , e pertanto la linearizzazione non è assolutamente indispensabile per l'analisi.

Si può separare il moto fra longitudinale e laterodirezionale come segue

LONGITUDINALE	LATERODIREZIONALE	
$\begin{cases} F_x = m (\Delta \dot{u} + qw_{eq}) \\ F_z = m (\Delta \dot{w} - qu_{eq}) \\ M = \dot{q}J_y \end{cases}$	$\begin{cases} F_y = m (\dot{v} + ru_{eq} - pw_{eq}) \\ L = \dot{p}J_x - \dot{r}J_{xz} \\ N = \dot{r}J_z - \dot{p}J_{xz} \end{cases}$	(3.14)

3.3. MOTO LONGITUDINALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

Ad un certo istante t vale

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_{eq} + \Delta\gamma \\ \vartheta = \vartheta_{eq} + \Delta\vartheta \\ \alpha = \alpha_{eq} + \Delta\alpha \end{cases} \quad (3.18)$$

Sostituendo nella (3.17)

$$\Delta\gamma = \Delta\vartheta - \Delta\alpha \stackrel{(3.18)}{\implies} \gamma - \gamma_{eq} = \vartheta - \vartheta_{eq} - \alpha + \alpha_{eq} \quad (3.19)$$

Derivando $\dot{\gamma} = \dot{\vartheta} - \dot{\alpha} = q - \dot{\alpha}$

Si nota subito che si sarebbe ottenuta la stessa soluzione per $\dot{\gamma}$ anche se si fosse supposto nella (3.18) che il volo fosse rettilineo orizzontale: in tal caso le variabili di equilibrio sarebbero state nulle. In ogni caso, poichè nella (3.19) si deriva per sostituire il risultato nella (3.16), che i termini di equilibrio siano presenti ma costanti (e quindi con derivata nulla) o che siano stati eliminati prima, poco cambia. Sostituendo nella (3.16) si ottiene

$$\begin{cases} F_x = m\dot{V} \\ F_z = -mV_{eq}(q - \dot{\alpha}) \\ M = \dot{q}J_y \end{cases} \quad (3.20)$$

tutte le espressioni sono funzione delle variabili fondamentali $\{V, \alpha, \vartheta\}$ per gli assi vento ($\{u, w, q\}$ per gli assi corpo). Ovviamente $\dot{\vartheta} = q$.

Esplicitato il secondo membro di ognuna delle espressioni del sistema longitudinale, ci si occupa di estrapolare una formulazione per il primo. In generale le forze ed i momenti saranno $f(V, \alpha, \vartheta, \dot{V}, \dot{\alpha}, \dot{\vartheta}, \ddot{V}, \ddot{\alpha}, \ddot{\vartheta}, \dots)$ e funzione di una certa condizione di equilibrio iniziale e di un disturbo: se il moto iniziale è uniforme e se si è in equilibrio, $F_{i_{eq}} = M_{eq} = 0$. Si ha

$$\begin{cases} F_x = F_{x_{eq}} + \Delta F_x & F_x = \frac{\partial F_x}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial F_x}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{\partial F_x}{\partial \vartheta} \Delta \vartheta + \dots \\ F_z = F_{z_{eq}} + \Delta F_z & F_z = \frac{\partial F_z}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial F_z}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{\partial F_z}{\partial \vartheta} \Delta \vartheta + \dots \\ M = M_{eq} + \Delta M & M = \frac{\partial M}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial M}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{\partial M}{\partial \vartheta} \Delta \vartheta + \dots \end{cases} \quad (3.21)$$

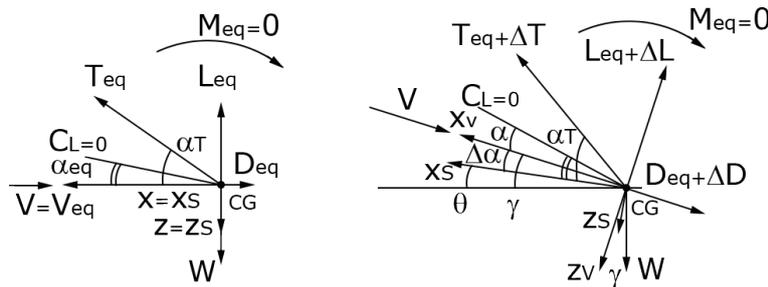


Figura 3.8: Condizione generica del moto longitudinale

Si prendano ad esempio le due condizioni di volo sopra riportate in Figura (3.8)^[4]. La prima è in condizione di volo uniforme (nello specifico rettilineo per semplificare, ma l'ipotesi non è

^[4]L'angolo α_T , il quale identifica la direzione del thrust rispetto alla velocità di volo, è il calettamento del thrust. Non è una incidenza, anche se solitamente l'angolo α è riservato per tale denominazione (angle of attack).

3.3. MOTO LONGITUDINALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

3.3.1 Esplicitazione delle derivate aerodinamiche

Derivate aerodinamiche della resistenza D_K

D_V

$$D_V = \frac{\partial D}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S C_D \right) = \frac{1}{2} \rho_{eq} S \left(\frac{\partial C_D}{\partial V} V_{eq}^2 + 2 C_{D_{eq}} V_{eq} \right) \quad (3.26)$$

Dunque ci sono due termini (parentesi della 3.26) che variano con la velocità V .

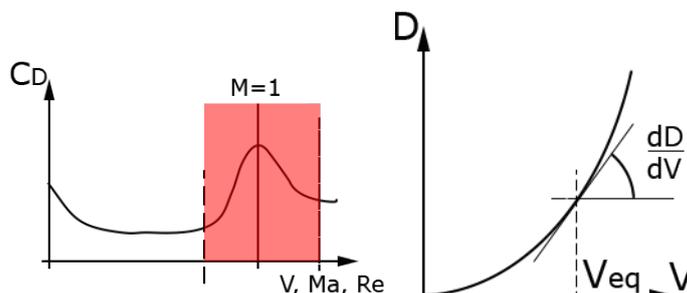


Figura 3.9: $D_V - C_D = f(Ma)$ (sx), $D = f(V)$ (dx)

Supponendo fissate le condizioni di volo α, ρ, Re, \dots , $D_V \propto C_{D_V} = \frac{\partial C_D}{\partial V}$, e si nota che per campi di velocità soliti il $D_V \approx 0$. A velocità basse si risentono ancora gli effetti del Reynolds Re .

Una volta entrati nel campo compressibile, si ha un $D_V > 0$ per regime compressibile subsonico e $D_V < 0$ per supersonico basso: in condizioni di alto supersonico D_V si annulla nuovamente.

Analogamente si nota in Figura (3.9) a destra un complessivo aumento di resistenza con l'aumento di velocità, e pertanto il contributo a D_V del secondo termine contenuto nella (3.26) fra parentesi (dato che $C_D = C_{D_{eq}}$) provoca un $D_V > 0$.

D_α

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial D}{\partial \alpha} = D_\alpha = \frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S C_{D\alpha} \\ C_{D\alpha} = \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(C_{D0} + \frac{a^2}{\pi A_e} \alpha^2 \right) = \frac{2a^2}{\pi A_e} \alpha_{eq} \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_e = e\lambda = e \frac{b}{c_m} = e \frac{1}{c_m} c_{ma} A \\ \alpha_{eq} = \frac{C_{L_{eq}}}{a} = \frac{1}{a} \frac{W}{\frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

La variazione di D in funzione dell'incidenza α è direttamente proporzionale alla variazione di C_D rispetto ad α . In particolare, l'unico contributo del C_D alla derivata è il secondo termine fra parentesi nella (3.27), dove si precisa che A_e è una variabile che tiene conto del rapporto fra corda media aerodinamica e geometrica, $\frac{c_{ma}}{c_m}$. Dalla (3.27) si nota che, a sua volta, $C_{D\alpha} = f(\alpha_{eq})$: pertanto, anche il grafico $C_L - \alpha$ (Figura (1.14)) entra in gioco.

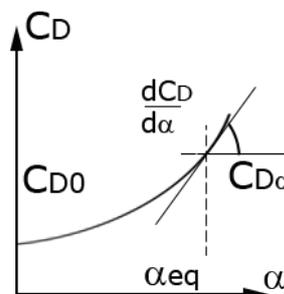


Figura 3.10: $C_D = f(\alpha)$

3.3. MOTO LONGITUDINALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

Derivate aerodinamiche del momento M_K

M_V

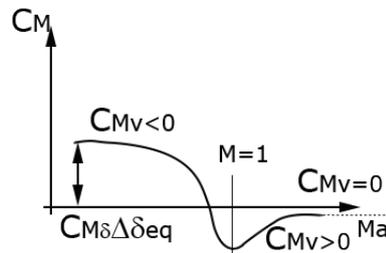


Figura 3.12: $C_M = f(Ma)$

Supponendo una condizione di equilibrio, il $C_{M_{eq}} = 0$. Allora

$$M_V = \frac{\partial M}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S C_M c \right) = \frac{1}{2} \rho_{eq} S c \left(\frac{\partial C_M}{\partial V} V_{eq}^2 + 2 C_{M_{eq}} V_{eq} \right) \overset{C_{M_{eq}}=0}{=} \frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S c \frac{\partial C_M}{\partial V} \quad (3.31)$$

Per regimi di volo supersonici e subsonici anche $\frac{\partial C_M}{\partial V} \approx 0$ (in realtà per il subsonico è leggermente negativo ma è trascurabile), e dunque $\frac{\partial M}{\partial V} \approx 0$ mentre per il transonico vale la (3.31) scritta come

$$0.8 < M < 1.2 \implies M_V = \frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S c C_{M_V} \quad (3.32)$$

M_α

$$M_\alpha = \frac{\partial M}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S c C_{M_\alpha} \quad (3.33)$$

Si ripresenta l'andamento analizzato nella Figura (1.2) del capitolo introduttivo.

M_q

$$\begin{aligned} M_q &= \frac{\partial M}{\partial q} = \frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S c \frac{\partial C_M}{\partial q} && \times \div \frac{c}{2V} \\ &= \frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S c \frac{c}{2V_{eq}} \underbrace{\frac{2V_{eq}}{c} \frac{\partial C_M}{\partial q}}_{C_{M_q}} && (3.34) \\ &= \frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq} S c \frac{c}{2} \frac{\partial C_L}{\partial \hat{q}} = \frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq} S \frac{c^2}{2} C_{L_q} \end{aligned}$$

$M_{\dot{\alpha}}$

La derivata aerodinamica $M_{\dot{\alpha}}$ ricalca l'analisi fatta per la $L_{\dot{\alpha}}$.

Derivata aerodinamica della spinta T_V

$$\Delta T = \Delta T(V) = \frac{\partial T}{\partial V} \Delta V = T_V \Delta V \quad (3.35)$$

3.3. MOTO LONGITUDINALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

3.3.2 Equazioni adimensionalizzate

Si vogliono adimensionalizzare le equazioni presentate nel sistema (3.24). In particolare, questo verrà fatto dividendo ambo i membri per $\frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}^2S$. Viene presentata, per esempio, l'adimensionalizzazione della prima equazione, ΔF_x , analizzando un termine alla volta della (3.36)

Si ricorda la formulazione del tempo aerodinamico $t^* = \frac{c}{2V_{eq}}$.

$$m\dot{V} \xrightarrow{\div \frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}^2S} \frac{m}{\frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}^2S} \frac{dV}{dt} \xrightarrow{x \div t^*} \frac{2m}{\frac{1}{2}\rho_{eq}Sc} \frac{c}{V_{eq}} \frac{dV}{dt} \frac{1}{2V_{eq}} = 2\mu \frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} \quad (3.39)$$

$$T_V = \frac{\partial T}{\partial V} = \frac{1}{2}\rho_{eq}S \left(\frac{\partial C_T}{\partial V} V_{eq}^2 + 2C_{T_{eq}} V_{eq} \right) \quad \frac{\partial C_T}{\partial V} = \frac{C_{TV}}{V_{eq}} \quad (3.40)$$

$$= \frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq} (C_{TV} + 2C_{T_{eq}})$$

$$D_V = \frac{1}{2}\rho_{eq}S \left(\frac{\partial C_D}{\partial V} V_{eq}^2 + 2C_{D_{eq}} V_{eq} \right) \quad \frac{\partial C_D}{\partial V} = \frac{C_{DV}}{V_{eq}} \quad (3.41)$$

$$= \frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}S (C_{DV} + 2C_{D_{eq}})$$

$$\frac{T_{eq}}{\frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}^2S} = C_{T_{eq}} \quad (3.42)$$

$$D_\alpha \stackrel{(3.27)}{=} \frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}^2SC_{D\alpha} \quad (3.43)$$

$$\frac{W}{\frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}^2S} = C_{T_{eq}} = C_{W_{eq}} \quad (3.44)$$

L'equazione dimensionale si presentava come

$$\dot{V} = -\frac{-T_V \cos \alpha_T + D_V}{m} \Delta V - \frac{T_{eq} \sin \alpha_T + D_\alpha - W}{m} \Delta \alpha - g\vartheta \quad (3.45)$$

In primis si riporta m a primo membro (come si poteva già notare dall'adimensionalizzazione nella (3.39)). Successivamente si divide tutto per $\frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}^2S$ e si usa la (3.39) per esplicitare il primo membro, le (3.40, 3.41) per i termini in $\Delta \hat{V}$, le (3.42, 3.43, 3.44) per i termini in $\Delta \alpha$ e sempre la (3.44) per il neo-termini mg in ϑ . Facendo ciò si ottiene

$$\boxed{2\mu \frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} = \left[(C_{TV} + 2C_{T_{eq}}) \cos \alpha_T - (C_{DV} + 2C_{D_{eq}}) \right] \Delta \hat{V} + (C_{W_{eq}} - C_{D\alpha} - C_{T_{eq}} \sin \alpha_T) \Delta \alpha - C_{W_{eq}} \vartheta} \quad (3.46)$$

Un'ulteriore rappresentazione della (3.46) prevede di scindere i termini di equilibrio dagli altri. Si fa questo in quanto, nelle condizioni iniziali è assicurato l'equilibrio in x e z e pertanto si ha

$$C_{T_{eq}} \cos \alpha_T - C_{D_{eq}} = 0 \quad C_{W_{eq}} - C_{T_{eq}} \sin \alpha_T = C_{L_{eq}} \quad (3.47)$$

Pertanto si ha

$$2\mu \frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} = \left[C_{TV} \cos \alpha_T - C_{DV} + 2(C_{T_{eq}} \cos \alpha_T - C_{D_{eq}}) \right] \Delta \hat{V} + (C_{W_{eq}} - C_{D\alpha}) \Delta \alpha - C_{T_{eq}} \sin \alpha_T \Delta \alpha - C_{W_{eq}} \vartheta$$

$$\implies \boxed{2\mu \frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} = (C_{TV} \cos \alpha_T - C_{DV}) \Delta \hat{V} + (C_{L_{eq}} - C_{D\alpha}) \Delta \alpha - C_{W_{eq}} \vartheta} \quad (3.48)$$

3.3. MOTO LONGITUDINALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

Le variabili $\Delta\hat{V}$, $\Delta\alpha$ e ϑ assumono soluzioni del tipo

$$\begin{cases} \Delta\hat{V} = \rho_{11}e^{\lambda_1\hat{t}} + \rho_{12}e^{\lambda_2\hat{t}} + \rho_{13}e^{\lambda_3\hat{t}} + \rho_{14}e^{\lambda_4\hat{t}} \\ \Delta\alpha = \rho_{21}e^{\lambda_1\hat{t}} + \rho_{22}e^{\lambda_2\hat{t}} + \rho_{23}e^{\lambda_3\hat{t}} + \rho_{24}e^{\lambda_4\hat{t}} \\ \vartheta = \rho_{31}e^{\lambda_1\hat{t}} + \rho_{32}e^{\lambda_2\hat{t}} + \rho_{33}e^{\lambda_3\hat{t}} + \rho_{34}e^{\lambda_4\hat{t}} \end{cases} \quad (3.53)$$

Dunque tutte le variabili sono influenzate idealmente nello stesso modo, cioè oscillerebbero all'unisono se non fossero pesate opportunamente dai diversi ρ_{ij} , i quali si determinano dalle condizioni iniziali. Inoltre, si nota che le variabili sono influenzate da tutti i modi, e cioè ogni variabile è risultante dalla sovrapposizione del contributo dei vari λ_i .

Soluzione reale del sistema

Si suppone di analizzare l'andamento della soluzione $\Delta\hat{V}$ a partire da un certo disturbo iniziale $\Delta\hat{V}_0$, con $\lambda_i = a \in \mathbb{R}$.

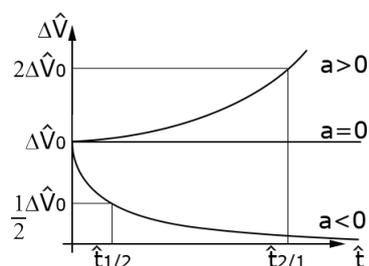


Figura 3.13: $\Delta\hat{V} = f(a, t)$ - soluzione reale, moto aperiodico

Si nota che l'andamento è funzione della soluzione reale a . Se $a > 0$ il moto aperiodico è divergente, se $a = 0$ è costante e se $a < 0$ è smorzato. Prendendo le due condizioni limite, è possibile definire un tempo di raddoppio $t_{2/1}$ e di dimezzamento $t_{1/2}$, rispettivamente per $a > 0$ e $a < 0$, come il tempo necessario per raddoppiare o dimezzare il disturbo iniziale.

Soluzione complessa coniugata

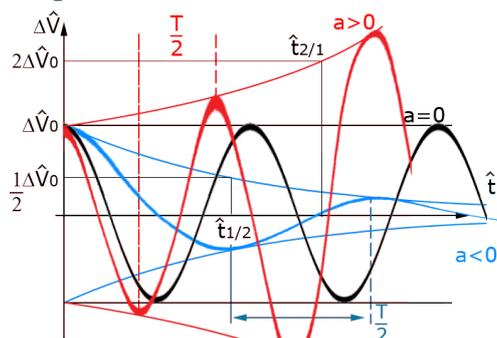


Figura 3.14: $\Delta\hat{V} = f(a, t)$ - soluzione complessa coniugata $\lambda = a \pm ib$, moto oscillatorio

Anche in questo caso si notano i $t_{1/2}$ e $t_{2/1}$. A partire da un disturbo iniziale $\Delta\hat{V}_0$, è possibile notare che l'andamento dei moti oscillatori è funzione del coefficiente reale a . Se $a > 0$, il moto oscillatorio è amplificato; se $a = 0$ è costante; per $a < 0$ c'è un'oscillazione smorzata.

Si nota, inoltre, chiamando il semiperiodo del moto amplificato, costante e smorzato rispettivamente T_a, T, T_s , si ha $T_a < T < T_s$.

3.3. MOTO LONGITUDINALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

La colonna di termini in λ_1 rappresenta il corto periodo, mentre in λ_3 il modo fugoide. Prendendo separatamente questi contributi si possono rappresentare separatamente i due modi, fermo restando che il moto vario è sovrapposizione di questi.

In particolare si può rappresentare per ognuno dei modi parte reale ed immaginaria delle variabili con riferimento a $\vartheta = 1$.

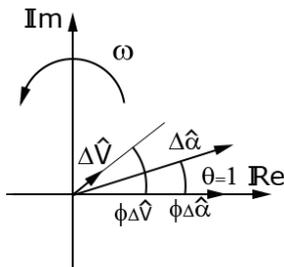


Figura 3.15: Modo corto periodo, $\lambda_1 = a + ib = \zeta\omega_n + \omega$

Gli angoli di fase $\varphi_{\Delta\hat{V}}$ e $\varphi_{\Delta\hat{\alpha}}$ sono positivi per rotazioni antiorarie (in quanto la pulsazione $b = \omega$ per λ_1 è positiva). Per il corto periodo il $\Delta\hat{V}$ è sempre almeno due-tre ordini di grandezza più piccolo rispetto alle altre due variabili, ed è dunque poco importante. Molto rilevanti sono le variazioni $\Delta\alpha$ e ϑ . Infine, si nota che tutte e tre le variabili sono quasi in fase.

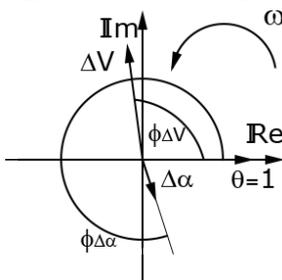


Figura 3.16: Modo fugoide, $\lambda_3 = c + id = \zeta\omega_n + \omega$

Anche in questo caso la pulsazione $d = \omega$ per λ_3 è positiva. Per il modo fugoide è il $\Delta\alpha$ ad essere poco influenzante, mentre sono molto rilevanti le variazioni $\Delta\hat{V}$ e ϑ : la prima è quasi in quadratura di fase in anticipo su ϑ , mentre $\Delta\alpha$ è circa in quadratura in ritardo su ϑ ed in opposizione a $\Delta\hat{V}$.

Analizzando un generico andamento di un modo fugoide si notano le variazioni delle variabili.

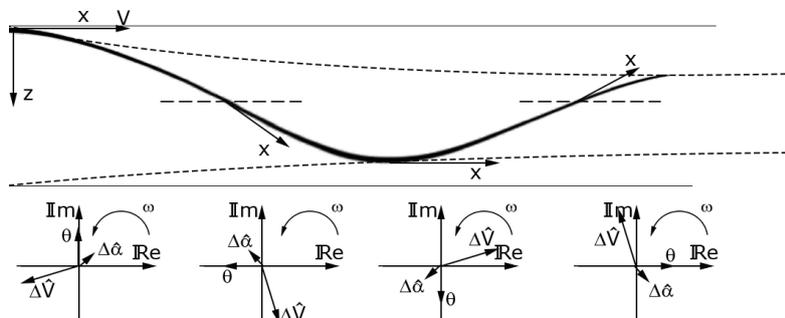


Figura 3.17: Analisi nel tempo del modo fugoide

3.3. MOTO LONGITUDINALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

3.3.5 Stabilità statica e dinamica

Le condizioni di stabilità statica e dinamica sono influenzate, rispettivamente, dal valore del coefficiente di momento rispetto ad α $C_{M\alpha}$ e dal valore della parte reale della soluzione agli autovalori a . In particolare, se entrambi sono negativi ci si trova in una situazione dinamicamente e staticamente stabile; se entrambi sono positivi in una dinamicamente e staticamente instabile.

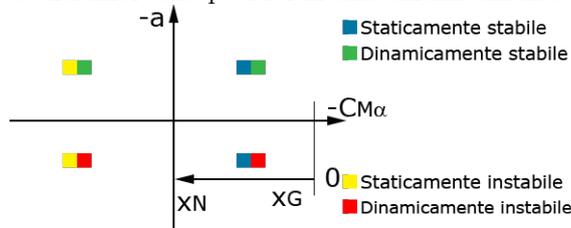


Figura 3.18: Quadranti di stabilità statica e dinamica

Il grafico in Figura (3.18) $-a, -C_{M\alpha}$ ha parte negativa lungo ascisse ed ordinate. Seguire l'ascissa $-C_{M\alpha}$ equivale a partire da un certo valore limite anteriore di x_G (bordo d'attacco del velivolo) ed arretrarlo fino ad x_N ed oltre: ovviamente, x_N coincide con l'ascissa $C_{M\alpha} = 0$.

Rappresentando su questo grafico le soluzioni mostrate nella (3.58) si ottiene un'approfondita analisi del fenomeno, di seguito mostrata

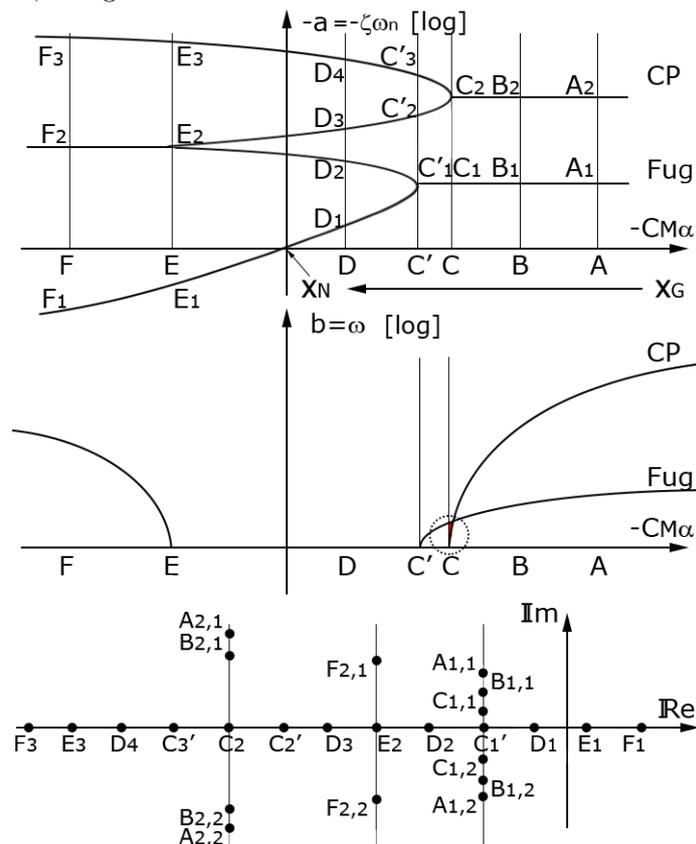


Figura 3.19: Grafico $-a, -C_{M\alpha}$ e root locus (da sx a dx: CP, 3° modo, fugoide)

3.3. MOTO LONGITUDINALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

Invece, per quanto riguarda i modi oscillatori, si analizza in primo luogo il CP. A partire dal punto A_2 si ha una certa frequenza $\pm b$ e una parte reale $a < 0$. In particolare, questa b è sicuramente la maggiore in valore assoluto fra tutte le frequenze dei modi oscillatori. Pertanto, viene disegnata la coppia alla stessa ascissa di C_2 e ad ordinate speculari. Analogamente si assegnano i punti $B_{2,1}$ e $B_{2,2}$, rispettivamente per $+b$ e $-b$, alla stessa a . L'insieme dei valori alla stessa ascissa rappresenta il modo corto periodo.

Discorso analogo è fatto per il terzo modo oscillatorio, in cui vengono segnati i punti $F_{2,1}$, E_2 e $F_{2,2}$.

Il modo fugoide è l'ultimo ad essere rappresentato, e vede segnati i valori $A_{1,1}$, $B_{1,1}$, $C_{1,1}$, $C'_{1,1}$, $C_{1,2}$, $B_{1,2}$ ed $A_{1,2}$, a decrescenti valori di b e alla stessa a .

Si precisa che la dicitura $_{i,j}$, per un certo punto, indica con la i l'effettivo numero segnato nel primo grafico in Figura (3.19), mentre con il secondo indica $+b$ o $-b$, rispettivamente per $j = 1, 2$.

3.3. MOTO LONGITUDINALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

Le semplificazioni fatte nel sistema (3.59) si rivelarono esatte, in quanto si notò come fosse proprio la dinamica del corto periodo quella maggiormente fastidiosa per un pilota, in quanto il suo sviluppo è talmente tanto breve da poter essere più rapido del tempo di reazione del pilota (nonchè dannoso, perchè correggere in ritardo un errore può portare in opposizione di fase la correzione del pilota e, quindi, amplificare il fenomeno).

A prescindere dai parametri cambiati dal controllore, erano due le variabili fondamentali che cambiavano la risposta del pilota ed il suo giudizio: la frequenza $\omega_n \propto f_n$ naturale e lo smorzamento ξ (il quale può essere anche negativo, ed in questo caso anzichè smorzare amplifica).

Dopo diversi test si raccolsero i risultati e su base statistica si costruirono gli iso-opinion plot, o diagrammi di opinione (giudizio), come di seguito

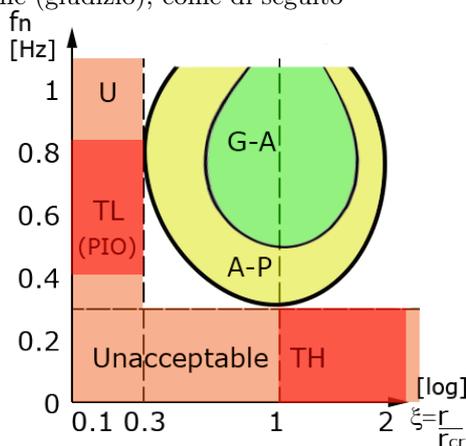


Figura 3.21: Iso-opinion plot - corto periodo

Il grafico ha in ordinate la frequenza naturale del sistema non smorzato e in ascisse lo smorzamento, su scala logaritmica. La qualità di volo migliore (Good to Acceptable) fu riscontrata per smorzamenti $0.5 < \xi < 1.7$ e per frequenze naturali $f_n > 0.55$, mentre è ancora considerato accettabile (Acceptable to Poor) il comando per $0.3 < \xi < 2$ e $f_n > 0.35$.

Qualsiasi altra combinazione provoca un giudizio insoddisfacente (Unacceptable), se non peggiore: difatti, non solo qualsiasi condizione al di sotto dello 0.3 (sia per f_n che per ξ) è insoddisfacente, ma per $1 < \xi < 2$, con $f_n < 0.3$, e $0.4 < f_n < 0.85$, con $\xi < 0.3$, il velivolo tende rispettivamente a non rispondere (o a rispondere parzialmente) ad un comando, oppure a rispondere troppo prontamente. Nel primo caso si parla di condizione Too Heavy (TH), nel secondo di Too Light (TL), nella quale c'è il rischio che l'intervento di un pilota a ristabilire qualsiasi disturbo sia in opposizione di fase, a tal punto da amplificarlo indefinitamente: queste sovraeccitazioni involontarie del comando sono chiamate *Pilot Induced Oscillations*.

Importanza molto minore fu data al modo fugoide, per il quale comunque fu costruito un diagramma di opinione. In realtà questa casistica diventa rilevante solo nel caso in cui il volo diventi IFR per visibilità, e cioè quando i sensi del pilota non sono in grado di equilibrare, per mancanza di riferimenti esterni, i lenti, prevedibili e correggibili modi dinamici del fugoide. Si notano test effettuati anche a smorzamenti negativi (cioè amplificazioni): per un dato smorzamento un velivolo può ricadere in diversi range a seconda della sua personale qualità dinamica di volo.

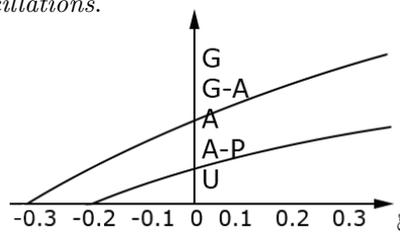


Figura 3.22: Diagramma di opinione - modo fugoide

3.3. MOTO LONGITUDINALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

3.3.8 Dinamica longitudinale a comandi liberi

Si passa ora ad analizzare la dinamica longitudinale a comandi liberi. In particolare, non è detto che la dinamica qui in analisi sia riservata ai soli velivoli con comandi reversibili (meccanici) classici, in quanto anche i velivoli con servomotori in grado di bloccare i comandi possono deformarsi a causa di disturbi aeroelastici e comportarsi analogamente ai comandi liberi.

In ogni caso, essendo l'analisi a comandi liberi, si include la variazione $\Delta\delta$ dell'equilibratore, la quale è una variabile indipendente ed incognita che causa l'aggiunta di un'equazione dinamica ed una cinematica al sistema analizzato finora.

$$\begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \ddot{\delta} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} V \\ \alpha \\ q \\ \dot{\delta} \\ \vartheta \\ \delta \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \frac{dV}{dt} = -h'_{11}\Delta V - h'_{12}\Delta\alpha - h'_{14}\vartheta - h'_{16}\Delta\delta & \text{con } h'_{16} \propto D_\delta \propto C_{D\delta} \approx 0 \\ \frac{d\alpha}{dt} = -h'_{21}\Delta V - h'_{22}\Delta\alpha - h'_{23}q - h'_{26}\Delta\delta & \text{con } h'_{16} \propto L_\delta \propto C_{L\delta} \\ \frac{dq}{dt} = -h'_{31}\Delta V - h'_{32}\Delta\alpha - h'_{33}q - h'_{36}\Delta\delta & \text{con } h'_{16} \propto M_\delta \propto C_{M\delta} \\ \frac{d^2\delta}{dt^2} = -h'_{41}\Delta V - h'_{42}\Delta\alpha - h'_{43}q - h'_{44}\dot{\delta} - h'_{46}\Delta\delta - h'_{47}\dot{\alpha} - h'_{48}\dot{q} \\ \frac{d\vartheta}{dt} = -h'_{53}q & \text{con } -h'_{53} = 1 \\ \frac{\delta}{dt} = -h'_{64}\dot{\delta} & \text{con } -h'_{64} = 1 \end{cases} \quad (3.61)$$

Scritto il sistema^[7], è possibile apportare alcune semplificazioni: in primo luogo le due equazioni della cinematica hanno i termini $h'_{i,j} = 1$, e pertanto le equazioni si riducono semplicemente alle identità $\dot{\vartheta} = q$ e $\frac{d\delta}{dt} = \dot{\delta}$; le prime tre equazioni, invece, vedono i propri coefficienti h'_{i6} proporzionali, rispettivamente, alla variazione di resistenza, portanza e momento rispetto a δ . Mentre il primo è certamente trascurabile, il secondo dipende dal caso, e verrà analizzato in seguito; il terzo, invece, tende ad essere considerato sempre.

Con queste considerazioni il sistema (3.61) diviene

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = -h'_{11}\Delta V - h'_{12}\Delta\alpha - h'_{14}\vartheta \\ \frac{d\alpha}{dt} = -h'_{21}\Delta V - h'_{22}\Delta\alpha - h'_{23}q - h'_{26}\Delta\delta \\ \frac{dq}{dt} = -h'_{31}\Delta V - h'_{32}\Delta\alpha - h'_{33}q - h'_{36}\Delta\delta \\ \frac{d^2\delta}{dt^2} = -h'_{41}\Delta V - h'_{42}\Delta\alpha - h'_{43}q - h'_{44}\dot{\delta} - h'_{46}\Delta\delta - h'_{47}\dot{\alpha} - h'_{48}\dot{q} \\ \frac{d\vartheta}{dt} = q \\ \frac{\delta}{dt} = \dot{\delta} \end{cases} \quad (3.62)$$

Ci si occupa di dimostrare la quarta equazione.

^[7]In primo luogo si precisa che la matrice di stato $A \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$, e dunque per congruenza matematica sia \bar{x} che \bar{x} dovrebbero essere dei vettori colonna ad 8 elementi. Difatti è così, in \bar{x} ci sono due righe nulle ed in \bar{x} si ritrovano, dalla quarta equazione di \bar{x} in $\dot{\delta}$, due soluzioni in $\dot{\alpha}$ e \dot{q} . Dato che queste ultime dipendono dalla prima, che le due variabili non sono fondamentali e dato che tutti i termini sono nulli, eccetto per l'elemento relativo a $\dot{\delta}$, è questo il motivo per il quale il sistema è presentato in letteratura come mostrato nella (3.61).

3.3. MOTO LONGITUDINALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

Derivate aerodinamiche del momento di cerniera H_K

H_V

$$H_V = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S_e c_e C_H \right) = \frac{1}{2} \rho_{eq} S_e c_e \left(\frac{\partial C_H}{\partial V} V_{eq}^2 + 2 C_{H_{eq}} V_{eq} \right) \implies H_{V_{eq}} \approx 0 \quad (3.67)$$

La variazione del coefficiente di momento di cerniera $\frac{\partial C_H}{\partial V} \approx 0$. Al contempo, per l'imposizione della condizione iniziale trimmata, il $C_{H_{eq}} = 0$. Pertanto la variazione del momento di cerniera rispetto alla velocità è, in queste condizioni, trascurabile.

H_α

La derivata H_α è stata già ricavata in funzione del $C_{H\alpha}$ (1.38)

$$C_{H\alpha} = \frac{\partial C_H}{\partial \alpha_s} = b_1 \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) \quad (3.68)$$

con $\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right)$ pari al fattore di induzione.

$H_{\dot{\alpha}}$

$$H_{\dot{\alpha}} \implies \frac{\partial C_H}{\partial \dot{\alpha}} \implies \frac{\partial C_H}{\partial \hat{\alpha}} = C_{H\dot{\alpha}} \quad (3.69)$$

Tale derivata è molto complessa da calcolare analiticamente e di solito i suoi valori vengono computati in galleria del vento.

H_q

Anche $\frac{\partial C_H}{\partial q}$ è stata già calcolata, nella versione adimensionalizzata (2.26).

$$H_q \implies \frac{\partial C_H}{\partial q} \implies \frac{\partial C_H}{\partial \hat{q}} = C_{Hq} = 2b_1 \frac{l'_t}{c} \quad (3.70)$$

H_δ

$\frac{\partial C_H}{\partial \delta}$ è stata già calcolata nel paragrafo relativo al momento di cerniera dell'equilibratore (1.36).

$$H_\delta \implies \frac{\partial C_H}{\partial \delta} = b_2 \quad (3.71)$$

$H_{\dot{\delta}}$

Con le considerazioni appena fatte si possono unire le (3.65, 3.66) per riscrivere la quarta equazione, completamente esplicitata eccetto per la derivata $H_{\dot{\delta}}$ che verrà calcolata successivamente, in quanto importantissima derivata di smorzamento dell'equilibratore. Si ritrova

$$\begin{aligned} (J_e + m_e x_e l''_t) \dot{q} - m_e x_e V_{eq} q + m_e x_e V_{eq} \dot{\alpha} + J_e \ddot{\delta} &= H_V \overset{\approx 0}{\Delta V} + H_\alpha \Delta \alpha + H_{\dot{\alpha}} \Delta \dot{\alpha} + H_q q + H_\delta \Delta \delta + H_{\dot{\delta}} \Delta \dot{\delta} \\ J_e \ddot{\delta} &= H_\alpha \Delta \alpha + (m_e x_e V_{eq} + H_q) q + H_{\dot{\delta}} \dot{\delta} + H_\delta \Delta \delta - (m_e x_e V_{eq} - H_{\dot{\alpha}}) \dot{\alpha} - (J_e + m_e x_e l''_t) \dot{q} \\ \ddot{\delta} &= \underbrace{\frac{H_\alpha}{J_e}}_{-h'_{42}} \Delta \alpha + \underbrace{\frac{m_e x_e V_{eq} + H_q}{J_e}}_{-h'_{43}} q + \underbrace{\frac{H_{\dot{\delta}}}{J_e}}_{-h'_{44}} \dot{\delta} + \underbrace{\frac{H_\delta}{J_e}}_{-h'_{46}} \Delta \delta - \underbrace{\frac{m_e x_e V_{eq} - H_{\dot{\alpha}}}{J_e}}_{-h'_{47}} \dot{\alpha} - \underbrace{\frac{J_e + m_e x_e l''_t}{J_e}}_{-h'_{48}} \dot{q} \end{aligned} \quad (3.72)$$

3.3. MOTO LONGITUDINALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

3.3.10 Derivata di smorzamento $H_{\dot{\delta}}$

Si suppone di posizionare un modello di velivolo in galleria del vento, quindi perfettamente fermo, investito da un flusso d'aria costante, e di andare a perturbare per un istante l'equilibratore, per poi lasciarlo libero. In questo modo si ricalca la dinamica dei comandi liberi senza però alcun tipo di assunzione sulla trascurabilità o meno dei termini $q, \dot{q}, \dot{\alpha}, \Delta\alpha, \Delta V$: questi sono a tutti gli effetti nulli. Allora la quarta equazione del sistema (3.61), esplicitata nella (3.72), si riduce a

$$J_e \ddot{\delta} + H_{\dot{\delta}} \dot{\delta} - H_{\delta} \delta = 0 \tag{3.76}$$

All'interno della (3.76) sono presenti due termini molto rilevanti in questa analisi: il termine smorzante $-\frac{H_{\dot{\delta}}}{J_e}$, con $H_{\dot{\delta}} < 0$, e il termine elastico $-\frac{H_{\delta}}{J_e}$, con $H_{\delta} < 0$; pertanto entrambi i termini risultano positivi nel complesso, essendo $J_e > 0$.

Il primo termine, che qui si vuole ricavare, è trovato sperimentalmente (a meno che non ci sia un modo per valutare lo smorzamento a monte della sperimentazione). In particolare la (3.76) si configura come la classica equazione dinamica massa-molla-smorzatore, per cui

$$\ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad \text{NB } \lambda = a \pm ib, \text{ con } a = \xi \omega_n, \text{ } b = \omega$$

$$\ddot{\delta} + 2\xi\omega_n \dot{\delta} + \omega_n^2 \Delta\delta = 0 \implies \begin{cases} \omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} = \sqrt{-\frac{H_{\delta}}{J_e} - \frac{H_{\dot{\delta}}^2}{4J_e^2}} \\ \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{-\frac{H_{\delta}}{J_e}} \quad \text{con } \omega_n = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ r_{cr} = 2\sqrt{mk} \\ \xi = \frac{r}{r_{cr}} = \frac{r}{2\sqrt{mk}} \quad \xi = -\cos \angle \underline{\lambda} = -\cos \left(\tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \right) \end{cases} \tag{3.77}$$

In sostanza, al di là delle formulazioni, conoscendo le caratteristiche elastiche e geometriche del modello ($\frac{H_{\delta}}{J_e}$) è possibile valutare la frequenza naturale ω_n . Eseguendo la sperimentazione senza termine smorzante (quindi oscillazione libera) si calcola il periodo naturale T_n , mentre eseguendola con lo smorzamento si valuta il periodo smorzato $T > T_n$. A questo punto da T si ricava ω e da questo si può calcolare ξ , come di seguito

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \implies \frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - \xi^2} \implies \xi = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \tag{3.78}$$

Calcolati tutti questi termini, alcuni per via teorica ed altri per via sperimentale, si valuta la derivata di smorzamento $H_{\dot{\delta}}$ come

$$\boxed{H_{\dot{\delta}} = -2\xi\omega_n J_e} \tag{3.79}$$

A questo punto il sistema (3.61) è completamente esplicitato.

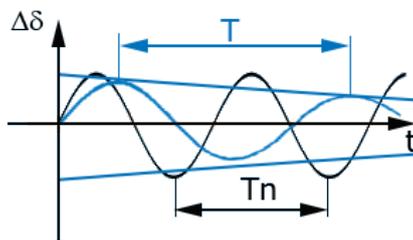


Figura 3.25: Smorzamento $H_{\dot{\delta}} = f(\xi)$

3.3. MOTO LONGITUDINALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

Il termine h_{15} è trascurabile, in quanto il $C_{D\delta}$ è piccolo, ancor di più se diviso per un numero relativamente grande, 2μ . Il termine h_{35} non è trascurabile, in quanto contiene l'elevator power $C_{M\delta}$, mentre h_{25} è da valutare caso per caso.

Il sistema (3.80) contiene tre equazioni di equilibrio dinamico ed una cinematica, ma al contrario dei casi precedenti contiene una nuova matrice B ed un vettore dei comandi \bar{u} , e cioè

$$\bar{\dot{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} \quad \text{con } B = \begin{bmatrix} h_{15} & h_{16} \\ h_{25} & h_{26} \\ h_{35} & h_{36} \\ h_{45} & h_{46} \end{bmatrix} \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta th \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

dove Δth è la variazione della manetta (throttle).

Facendo un' ipotesi semplificativa è possibile ottenere una soluzione approssimata in forma chiusa dal sistema (3.80). Si impone che il tempo di analisi del fenomeno sia al più una frazione del periodo del modo fugoide, $t_{max} \leq 0.1T_{PH}$. Facendo ciò, la variabile importante nel fugoide, ΔV , non ha tempo di eccitarsi sufficientemente, mentre $\Delta\alpha$ e ϑ hanno ultimato la loro evoluzione: dunque si può supporre $\Delta\hat{V} = 0 \implies \hat{V} = \text{cost}$. Il sistema (3.80) si semplifica nel seguente

$$\begin{cases} 0 = -h_{12}\Delta\alpha - h_{14}\vartheta \\ \frac{d\alpha}{d\hat{t}} = -h_{22}\Delta\alpha - h_{23}\hat{q} - h_{25}\Delta\delta(t) \\ \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}} = -h_{32}\Delta\alpha - h_{33}\hat{q} - h_{35}\Delta\delta(t) \\ \frac{d\vartheta}{d\hat{t}} = -h_{43}\hat{q} \end{cases} \quad (3.82)$$

Per valutare opportunamente cosa cambi nella soluzione nel considerare h_{25} nullo o meno, è possibile prima effettuare l'analisi con $h_{25} = 0$ e $h_{35} \neq 0$, e poi computarla nuovamente con $h_{25} \neq 0$ ma con $h_{35} = 0$. Al termine si sovrappongono gli effetti, sommandoli, per avere una soluzione più simile al caso reale. Qui viene presentata la sola prima casistica: prendendo la seconda equazione del sistema (3.82), esplicitando \hat{q} e derivandolo nel tempo, è possibile uguagliare tale soluzione alla terza equazione, ri-sostituire \hat{q} dalla seconda nella terza, e da questa ricavare la tipica equazione differenziale di secondo ordine massa-molla-smorzatore. Dunque

$$\hat{q} = -\frac{h_{22}}{h_{23}}\Delta\alpha - \frac{1}{h_{23}}\frac{d\alpha}{d\hat{t}} \implies \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}} = -\frac{h_{22}}{h_{23}}\frac{d\alpha}{d\hat{t}} - \frac{1}{h_{23}}\frac{d^2\alpha}{d\hat{t}^2} \quad (2)$$

$$\frac{d\hat{q}}{d\hat{t}} = -h_{32}\Delta\alpha - h_{33}\hat{q} - h_{35}\Delta\delta(t) \quad (3)$$

$$\implies -\frac{h_{22}}{h_{23}}\frac{d\alpha}{d\hat{t}} - \frac{1}{h_{23}}\frac{d^2\alpha}{d\hat{t}^2} = -h_{32}\Delta\alpha - h_{33}\hat{q} - h_{35}\Delta\delta(t)$$

$$\implies -\frac{h_{22}}{h_{23}}\frac{d\alpha}{d\hat{t}} - \frac{1}{h_{23}}\frac{d^2\alpha}{d\hat{t}^2} = -h_{32}\Delta\alpha - h_{33}\left(-\frac{h_{22}}{h_{23}}\Delta\alpha - \frac{1}{h_{23}}\frac{d\alpha}{d\hat{t}}\right) - h_{35}\Delta\delta(t)$$

$$-h_{22}\frac{d\alpha}{d\hat{t}} - \frac{d^2\alpha}{d\hat{t}^2} = -h_{23}h_{32}\Delta\alpha + h_{22}h_{33}\Delta\alpha + h_{33}\frac{d\alpha}{d\hat{t}} - h_{23}h_{35}\Delta\delta(t)$$

$$\frac{d^2\alpha}{d\hat{t}^2} + \underbrace{(h_{22} + h_{33})}_{2\xi\omega_n}\frac{d\alpha}{d\hat{t}} + \underbrace{(h_{22}h_{33} - h_{23}h_{32})}_{\omega_n^2}\Delta\alpha = \underbrace{h_{23}h_{35}\Delta\delta(t)}_{F(t)}$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = F(t) \quad (\ddot{\alpha} + 2\xi\omega_n\dot{\alpha} + \omega_n^2\alpha = F(t) = 0)} \quad (3.83)$$

3.3. MOTO LONGITUDINALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

È di interesse la valutazione di \hat{t}_1^* , il tempo impiegato dalla risposta smorzata $0 < \xi < 1$ per raggiungere $\Delta\alpha_{max}$, in rosso in Figura 3.27. In particolare, valutandolo in maniera dimensionale, deve valere $\hat{t}_1^* \leq t_{max} \leq 0.1T_{PH}$, altrimenti il tempo di analisi supera il limite entro il quale le siffatte approssimazioni hanno valore.

Per calcolare \hat{t}_1^* , in primis, si inseriscono le seguenti variabili compatte nella (3.86), esplicitando il rapporto $\frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta}$, e ponendo la sua derivata come nulla

$$\begin{cases} k_1 = \frac{h_{23}h_{35}}{\omega_n^2} \\ k_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \\ k_3 = \xi\omega_n \\ k_4 = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta} = k_1 \left[1 - k_2 e^{-k_3 \hat{t}} \sin(k_4 \hat{t} + \varphi) \right] \\ \frac{d}{d\hat{t}} \frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta} = k_1 k_2 e^{-k_3 \hat{t}} \left[-k_4 \cos(k_4 \hat{t} + \varphi) + k_3 \sin(k_4 \hat{t} + \varphi) \right] = 0 \end{cases} \quad (3.88)$$

A questo punto si può computare cosa avviene per $t \rightarrow \infty$. Il termine all'esterno della parentesi della derivata (3.88) indica semplicemente che per $t \rightarrow \infty$ la curva tende alla tangente: allora ci si occupa di valutare l'argomento delle funzioni trigonometriche, ponendo

$$\beta = k_4 \hat{t} + \varphi \quad (3.89)$$

Si calcola l'argomento fra parentesi della (3.88), ponendolo uguale a zero. Allora

$$k_4 \cos \beta = k_3 \sin \beta \implies \tan \beta = \frac{k_4}{k_3} = \frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{\xi \omega_n} = \sqrt{\frac{1}{\xi^2} - 1} \stackrel{(3.85)}{=} \tan \varphi \quad (3.90)$$

Quindi β e φ sono direttamente correlate a meno di una costante $n \in \mathbb{N}$, e cioè $\beta = \varphi + n\pi$.

$$\begin{cases} n = 0 \implies \beta = \varphi \stackrel{(3.89)}{=} k_4 \hat{t} + \varphi \implies \hat{t} = 0 \\ n = 1 \implies \beta = \varphi + \pi \stackrel{(3.89)}{=} k_4 \hat{t} + \varphi \implies \hat{t}_1^* = \frac{\pi}{k_4} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \end{cases} \quad (3.91)$$

A questo punto si può calcolare il valore di incidenza massimo raggiunto per il $\Delta\delta$ fornito come manovra a gradino, sostituendo \hat{t}_1^* all'interno dell'espressione (3.88) $\frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta}$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\alpha_{max}}{\Delta\delta} &= k_1 \left[1 - k_2 e^{-\frac{k_3}{k_4} \pi} \sin\left(k_4 \frac{\pi}{k_4} + \varphi\right) \right] && \sin(x + \pi) = -\sin x \\ &= k_1 \left(1 + k_2 e^{-\frac{k_3}{k_4} \pi} \sin \varphi \right) \\ &= \frac{h_{23}h_{35}}{\omega_n^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \pi} \sin \varphi \right) && \sin \varphi = \sqrt{1-\xi^2} \\ &= \frac{h_{23}h_{35}}{\omega_n^2} \underbrace{\left(1 + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{\xi^2}-1}}} \right)}_{\mathcal{K}_A} = \mathcal{K}_A \frac{h_{23}h_{35}}{\omega_n^2} \end{aligned} \quad (3.92)$$

Quindi si è trovato il primo legame, fra $\Delta\alpha_{max}$ e $\Delta\delta$, anche in funzione del coefficiente di amplificazione \mathcal{K}_A .

3.4 Dinamica latero-direzionale

Si riprendono le tre equazioni lasciate da parte nell'analisi della dinamica longitudinale, nel sistema completo linearizzato (3.14). Si fa presente che sia nelle immagini che nelle formulazioni, per chiarezza, si utilizza la variabile \mathcal{L} per indicare il momento di rollio, mentre L continua ad indicare la portanza. Quindi il seguente differisce dal (3.14) per la sola "sostituzione" di \mathcal{L} .

$$\begin{cases} F_y = m(\dot{v} + ru_{eq} - pw_{eq}) \\ \mathcal{L} = \dot{p}J_x - \dot{r}J_{xz} \\ N = \dot{r}J_z - \dot{p}J_{xz} \end{cases} \quad (3.98)$$

Le variabili fondamentali sono $\{v, p, r\}$, rispettivamente velocità lungo y , velocità di rollio e velocità di imbardata (le ultime due sono in rad/s e non deve essere confusa la r con rollio).

Nel caso dello studio della dinamica latero-direzionale, si fa riferimento agli assi body. Non avrebbe senso lavorare con assi vento in quanto le inerzie variano il loro valore nel tempo, e sarebbe in tal caso necessario computarle istante per istante.

Poichè gli assi body sono assi di stabilità, la $w_{eq} = 0$ e, dunque, $u_{eq} = V_{eq}$. Allora il sistema (3.98) si può riscrivere come

$$\begin{cases} F_y = m(\dot{v} + rV_{eq}) \\ \mathcal{L} = \dot{p}J_x - \dot{r}J_{xz} \\ N = \dot{r}J_z - \dot{p}J_{xz} \end{cases} \quad (3.99)$$

Si passa ad esplicitare i primi membri. Sia il termine Y la risultante delle forze esterne che agiscono lungo y_B (body). Allora si ha

$$\begin{cases} F_y = \frac{\partial Y}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial Y}{\partial p}\Delta p + \frac{\partial Y}{\partial r}\Delta r + mg \sin \varphi = m(\dot{v} + rV_{eq}) \\ \mathcal{L} = \mathcal{L}_v v + \mathcal{L}_p p + \mathcal{L}_r r = \dot{p}J_x - \dot{r}J_{xz} \\ N = N_v v + N_p p + N_r r = \dot{r}J_z - \dot{p}J_{xz} \end{cases} \quad (3.100)$$

Non deve stupire la presenza di un termine inerziale nella F_y . In presenza di angolo di sbandamento $\varphi \neq 0$, una componente del peso va a caricare l'asse y e pertanto deve essere considerata nel computo totale, come si nota dalla successiva Figura 3.29.

Tra l'altro, è opportuno notare che in generale l'angolo di sbandamento è diverso dall'angolo di rollio φ_1 , in funzione degli angoli di assetto e beccheggio della dinamica longitudinale. Dato che si sta analizzando il comportamento del moto latero-direzionale separatamente da quello longitudinale, d'ora in avanti tali angoli possono essere confusi, e pertanto $\varphi \approx \varphi_1$.

La prima equazione del sistema (3.100), la forza lungo y F_y , non verrà ulteriormente esplicitata e basterà la sua formulazione compatta

$$\begin{aligned} F_y &= Y_v \Delta v + Y_p p + Y_r r + mg \sin \varphi = m(\dot{v} + rV_{eq}) \\ \implies \dot{v} &= \frac{Y_v}{m} v + \frac{Y_p}{m} p + \left(\frac{Y_r}{m} - V_{eq} \right) r + g \varphi \end{aligned} \quad (3.101)$$

Al contrario, dall'unione della seconda e terza equazione del sistema (3.100) è possibile esplicitare la velocità di rollio \dot{p} e la velocità di imbardata \dot{r} in funzione delle inerzie e dei vari coefficienti aerodinamici.

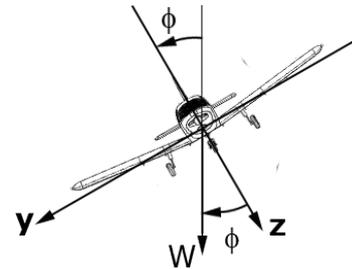


Figura 3.29: Sbandamento φ

3.4. DINAMICA LATERO-DIREZIONALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

A questo punto si raccolgono nelle (3.104) i contributi delle variabili fondamentali $\{v, p, r\}$ separatamente e si esplicita il sistema completo dimensionale, incluso F_y .

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v} = \frac{Y_v}{m}v + \frac{Y_p}{m}p + \left(\frac{Y_r}{m} - V_{eq}\right)r + g\varphi \\ \dot{p} = \left(\frac{\mathcal{L}_v}{J'_x} + N_v J'_{xz}\right)v + \left(\frac{\mathcal{L}_p}{J'_x} + N_p J'_{xz}\right)p + \left(\frac{\mathcal{L}_r}{J'_x} + N_r J'_{xz}\right)r \\ \dot{r} = \left(\mathcal{L}_v J'_{xz} + \frac{N_v}{J'_x}\right)v + \left(\mathcal{L}_p J'_{xz} + \frac{N_p}{J'_x}\right)p + \left(\mathcal{L}_r J'_{xz} + \frac{N_r}{J'_x}\right)r \\ \dot{\varphi} = p \\ \dot{\psi} = r \end{array} \right. \quad (3.105)$$

Si nota chiaramente che le accelerazioni di rollio e di imbardata sono fortemente interconnesse dalle derivate aerodinamiche \mathcal{L}_K e N_K , con $K = v, p, r$. Inoltre, alle tre equazioni di equilibrio dinamico si aggiungono due equazioni cinematiche.

3.4. DINAMICA LATERO-DIREZIONALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

3.4.2 Derivate aerodinamiche rispetto a β

$C_{y\beta}$

La derivata del coefficiente di forza laterale rispetto a β $C_{y\beta}$ è data dalla sovrapposizione degli effetti dei contributi principali mostrati in Tabella 3.3. Dunque

$$C_{y\beta} = (C_{y\beta})_b + (C_{y\beta})_v \tag{3.106}$$

$(C_{y\beta})_b$

Si suppone che esista un certo angolo di derapata $\beta > 0$, dunque il vettore V di volo è ruotato in senso orario rispetto alla direzione x_b . Questo provoca una reazione da parte della fusoliera, la quale produce una certa resistenza D , parallela a V , ed una componente di forza laterale C , simile alla portanza. Dalla risultante R viene estratta la componente proiettata su y per ricavare la forza laterale Y , da cui

$$\begin{aligned} Y &= -C \cos \beta - D \sin \beta \\ C_y &= -C_c \cos \beta - C_D \sin \beta \\ \frac{\partial C_y}{\partial \beta} &= C_c \sin \beta - \frac{\partial C_c}{\partial \beta} \cos \beta - C_D \cos \beta - \frac{\partial C_D}{\partial \beta} \sin \beta \end{aligned} \tag{3.107}$$

FUSOLIERA $(C_{y\beta})_b \approx -\frac{\partial C_c}{\partial \beta} - C_D < 0$

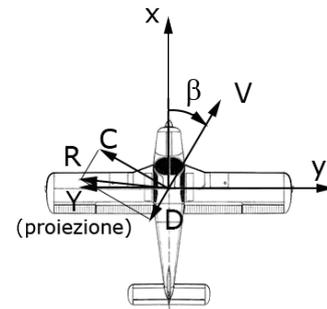


Figura 3.31: Derivata $(C_{y\beta})_b$

Complessivamente il contributo è minore di zero. Ovviamente tale contributo è nullo se ci si trova in una condizione di equilibrio, cioè $\beta = \beta_{eq} = 0 \implies (C_{y\beta})_b = 0$.

$(C_{y\beta})_v$

Analogamente si considera l'effetto della derapata sulla coda. Come si nota in Figura (3.32), in maniera del tutto analoga al downwash factor per la dinamica longitudinale, l'ala provoca un sidewash factor che devia il flusso in coda di un angolo σ . In ogni caso il flusso a velocità V incide con un angolo $\alpha_v = \beta - \sigma$ tale per cui si crei portanza L_v , quindi momento di imbardata $N > 0$ che tenderà a riportare x_b a coincidere con V , annullando β . Ergo, anche $(C_{y\beta})_v < 0$ è una derivata di smorzamento. Si ha forza laterale C_v

$$C_v = \frac{1}{2} \rho V^2 S_v C_{L_v}$$

$$(C_y)_v = -(C_C)_v = -C_{L_v} \frac{S_v}{S} \text{ Trasportato in CG}$$

$$(C_{y\beta})_v = \left(\frac{\partial C_y}{\partial \beta} \right)_v = -\frac{S_v}{S} \frac{\partial C_{L_v}}{\partial \alpha_v} \frac{\partial \alpha_v}{\partial \beta} \quad \text{con} \quad \frac{\partial \alpha_v}{\partial \beta} = 1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \tag{3.108}$$

IMPENNAGGIO $(C_{y\beta})_v = -\frac{S_v}{S} \frac{\partial C_{L_v}}{\partial \alpha_v} \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right)$

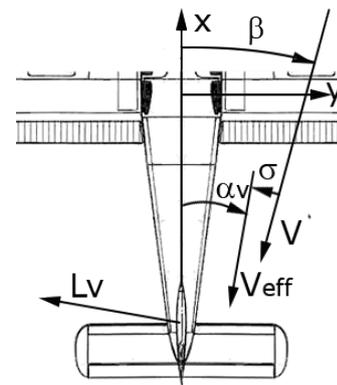


Figura 3.32: Derivata $(C_{y\beta})_v$

3.4. DINAMICA LATERO-DIREZIONALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

$$(C_{l_\beta})_\Lambda$$

In questo caso bisogna considerare quale sia la porzione della V , ruotata di $\beta > 0$, che va ad incidere efficacemente, cioè normalmente alla linea focale. In Figura (3.35) si nota che al lato destro del pilota, cioè dal lato in cui sta arrivando effettivamente V , la $V_n \approx V$. Al contrario, dal lato sinistro, le due velocità sono molto diverse. Il momento di rollio complessivo è dato dal momento di rollio fornito dalla semiala destra sommato a quello della semiala sinistra. Si ha

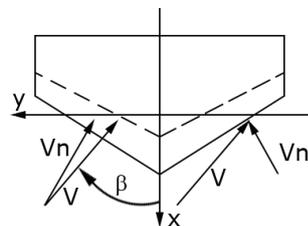


Figura 3.35: Derivata $(C_{l_\beta})_\Lambda$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Lambda &= -\mathcal{L}_{dx} + \mathcal{L}_{sx} \quad \text{con} \quad \mathcal{L}_{dx,sx} = \frac{1}{2} \rho V_n^2 \int_0^{b/2} c_{CL} y \, dy \\ V_{n_{dx,sx}} &= V \cos(\beta \mp \Lambda) \implies \beta > 0 \implies \mathcal{L} < 0 \implies \boxed{(C_{l_\beta})_\Lambda < 0} \end{aligned} \tag{3.111}$$

Ad esempio, se $\beta \approx \Lambda$, $V_{n_{dx}} \approx V \gg V_{n_{sx}}$, e pertanto si genera un $\mathcal{L} < 0$, cioè un rollio antiorario.

$$(C_{l_\beta})_{ind}$$

In generale, un'ala lascia una scia vorticoso con rotazione verso l'interno tale da generare disturbo e resistenza, nonché diminuzione di portanza per la sezione alare interessata. Arrivando una V con angolo di derapata $\beta > 0$, l'ala maggiormente esposta (cioè quella destra vista pilota) ha la scia vorticoso che copre buona parte della superficie alare; al contempo, la sinistra vede distaccarsi il vortice in allontanamento. Ciò implica che per $\beta > 0$ l'ala destra avrà un $\Delta L < 0$ maggiore in valore assoluto della perdita di portanza dell'ala sinistra: dunque, l'aereo tenderà ad avere rollio orario, e dunque un $\mathcal{L} > 0$. Pertanto

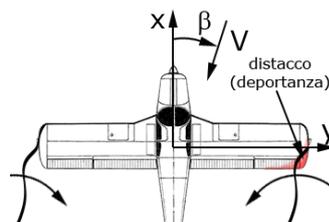


Figura 3.36: Derivata $(C_{l_\beta})_{ind}$

$$\beta > 0 \implies \mathcal{L} > 0 \implies \boxed{(C_{l_\beta})_{ind} > 0} \tag{3.112}$$

$$(C_{l_\beta})_v$$

Con $\beta > 0$, dopo aver subito il sidewash effect σ , la V incide sull'impennaggio verticale con un angolo α_v . Questo comporta una portanza L_v , come già visto nel caso del $(C_{y_\beta})_v$. La differenza è che qui si sta considerando un momento di rollio \mathcal{L} attorno ad x , e pertanto è necessario considerare il braccio di questa portanza rispetto ad x_b , cioè la distanza fra l'asse x_b ed il centro aerodinamico dell'impennaggio orizzontale, z_v . Si ha

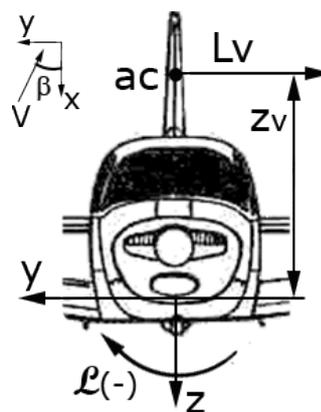


Figura 3.37: Derivata $(C_{l_\beta})_v$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -L_v z_v \quad \text{con} \quad L_v = \frac{1}{2} \rho V^2 S_v C_{L_v} \alpha_v \\ \implies \boxed{(C_{l_\beta})_v} &= \left(\frac{\partial C_l}{\partial \beta} \right)_v = -C_{L_v} z_v \frac{S_v}{S} \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) < 0 \end{aligned} \tag{3.113}$$

3.4. DINAMICA LATERO-DIREZIONALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

3.4.3 Derivate aerodinamiche rispetto a p

$(C_{y_p})_v$

La derivata del coefficiente di forza laterale lungo y rispetto a p C_{y_p} è data principalmente dal contributo $(C_{y_p})_v$. Se esiste un rollio $p > 0$ attorno all'asse x_b (senso orario), la V avrà una incidenza apparente α_v tale da generare una portanza laterale: in particolare, la velocità cinematica indotta sul piano di coda verticale sarà sempre più grande tanto più si avrà braccio dal piano $x - y$.

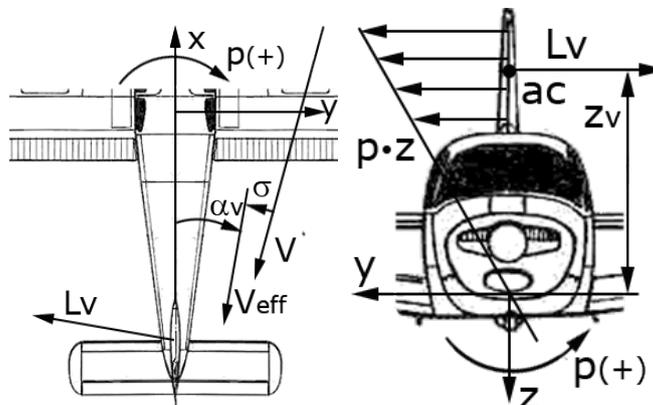


Figura 3.39: Derivata $(C_{y_p})_v$

Per cui, $p > 0$ genera velocità cinematica e, quindi, incidenza apparente: l'impennaggio verticale risponde con una portanza L_v diretta in senso opposto e che tende a bilanciare p stesso. Pertanto, con Y forza laterale rispetto y , si ha

$$Y = -L_v \implies C_y = -C_{l_v} \tag{3.116}$$

$$\left(\frac{\partial C_l}{\partial p}\right)_v = \boxed{(C_{y_p})_v < 0}$$

C_{l_p}

La derivata del coefficiente di momento di rollio attorno a x rispetto a p C_{l_p} è data dalla sovrapposizione degli effetti dei contributi principali mostrati in Tabella 3.3. Dunque

$$C_{l_p} = (C_{l_p})_{ala} + (C_{l_p})_v \tag{3.117}$$

$(C_{l_p})_{ala}$

Esiste una $p > 0$ che genera un rollio orario attorno ad x_b (cioè virata a destra). Tale azione genera una velocità cinematica su entrambe le semiali funzione del proprio braccio dal piano $x - z$, cioè y . Questa generica velocità è segnata in Figura (3.40) con w , essendo diretta lungo z_b : per una generica sezione alare, questa si compone con la velocità di volo V dando luogo ad una risultante inclinata di $\Delta\alpha$ rispetto a V . La semiala destra (vista pilota) si abbassa, e pertanto ha velocità cinematica dell'aria rispetto ad essa verso l'alto: questo causa un $\Delta\alpha > 0$ che implica un $\Delta C_L > 0$. Al contempo, l'ala che si innalza (sinistra vista pilota), ha velocità cinematica verso il basso, generando un $\Delta\alpha < 0$ e dunque un $\Delta C_L < 0$. Questo implica una distribuzione di portanza ΔL lungo tutta la superficie alare che tenderà a ristabilire il velivolo in posizione orizzontale, contrastando il rollio con un momento di rollio $\mathcal{L} < 0$, cioè diretto in senso antiorario rispetto ad x .

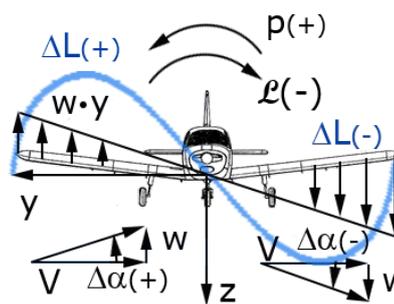


Figura 3.40: Derivata $(C_{l_p})_{ala}$

3.4. DINAMICA LATERO-DIREZIONALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

C_{n_p}

La derivata del coefficiente di momento di imbardata attorno a z rispetto a p C_{n_p} è data dalla sovrapposizione degli effetti dei contributi principali mostrati in Tabella 3.3. Dunque

$$C_{n_p} = (C_{n_p})_{ala} + (C_{n_p})_v \quad \text{Per velivoli convenzionali } C_{n_p} \approx 0.008 - 0.1C_{L_{eq}} \quad (3.120)$$

$(C_{n_p})_{ala}$

Il generico rollio $p > 0$, in questo caso, porta la semiala sinistra (vista pilota) ad innalzarsi e la destra ad abbassarsi, roteando in senso orario attorno all'asse x_b . Ciò comporta, in base alla distanza y dal piano $x-z$, una velocità cinematica py che va a comporsi con la V a monte: per l'ala sinistra tale componente genera un $\Delta\alpha < 0$, mentre per la destra un $\Delta\alpha > 0$. Dunque l'ala destra registra un $\Delta C_L > 0$ mentre la sinistra un $\Delta C_L < 0$: al contempo la direzione della portanza sull'ala destra è più avanzata rispetto a quella di sinistra, e pertanto si genera complessivamente un momento di imbardata $N < 0$ antiorario attorno a z che tende a riportare il velivolo nella condizione originaria. Dunque la $(C_{n_p})_{ala} < 0$ è una derivata di smorzamento.

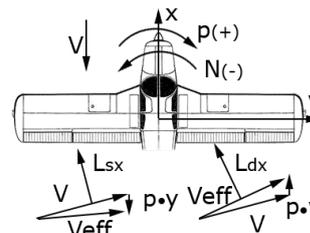


Figura 3.43: Derivata $(C_{n_p})_{ala}$

$(C_{n_p})_v$

Al contrario, sull'impennaggio verticale si genera una L_v con braccio x_v diretta in senso $-y$. Pertanto la $(C_{n_p})_v > 0$. Comunque il suo contributo è minimo e complessivamente la $C_{n_p} < 0$.

3.4.4 Derivate aerodinamiche rispetto a r

$(C_{y_r})_v$

La derivata del coefficiente di forza laterale lungo y rispetto ad r C_{y_r} è data principalmente dal contributo $(C_{y_r})_v$.

L'imbardata $r > 0$, antioraria attorno a z entrante, genera una distribuzione di velocità cinematica sull'impennaggio verticale: qualitativamente, l'impennaggio verticale, ruotando in senso orario sul piano $x-y$, incide sempre più ingentemente contro l'aria in base alla sua distanza x_v dal piano $y-z$. Tale distribuzione di velocità genera un L_v concorde con y , il quale genera una forza laterale $Y > 0$. Pertanto $(C_{y_r})_v > 0$.

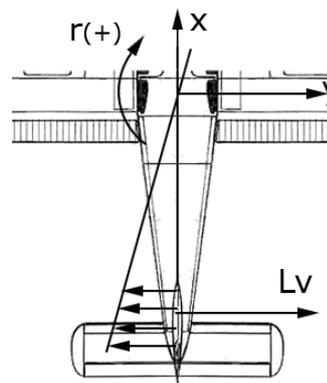


Figura 3.44: Derivata $(C_{y_r})_v$

C_{l_r}

La derivata del coefficiente di momento di rollio attorno a x rispetto ad r C_{l_r} è data dalla sovrapposizione degli effetti dei contributi principali mostrati in Tabella 3.3. Dunque

$$C_{l_r} = (C_{l_r})_{ala} + (C_{l_r})_v \quad (3.121)$$

3.4. DINAMICA LATERO-DIREZIONALE

DINAMICA DEL VELIVOLO

3.4.5 Risoluzione del sistema adimensionalizzato a comandi bloccati

Non viene dimostrata l'adimensionalizzazione del sistema (3.105), ma viene direttamente presentata la sua formulazione qui di seguito. Si fa presente che i k_{ij} sono gli analoghi degli h_{ij} del caso dinamico longitudinale. Si ha, per le cinque equazioni differenziali ordinarie di primo grado nelle cinque variabili di stato

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\hat{p}} \\ \dot{\hat{r}} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \beta \\ \hat{p} \\ \hat{r} \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \frac{d\beta}{d\hat{t}} + k_{11}\beta + k_{12}\hat{p} + k_{13}\hat{r} + k_{14}\varphi = 0 & \text{con } \beta = \hat{v} = \frac{v}{V_{eq}} \\ \frac{d\hat{p}}{d\hat{t}} + k_{21}\beta + k_{22}\hat{p} + k_{23}\hat{r} = 0 \\ \frac{d\hat{r}}{d\hat{t}} + k_{31}\beta + k_{32}\hat{p} + k_{33}\hat{r} = 0 \\ \frac{d\varphi}{d\hat{t}} = \frac{1}{A}\hat{p} \\ \frac{d\psi}{d\hat{t}} = \frac{1}{A}\hat{r} \end{cases} \quad \text{con } A = \frac{b}{c} \text{ Allungamento alare} \quad (3.123)$$

Questo è il sistema a comandi bloccati: difatti, i termini forzanti a secondo membro sono tutti quanti nulli. La matrice di stato $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$.

Viene dato un accenno di come si presenterebbe il sistema adimensionalizzato nel caso in cui i comandi non fossero bloccati ma ci fosse una forzante. Nella prima, seconda e terza equazione comparirebbero, rispettivamente, i termini

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \dots &= \mathcal{K}C_{y\delta_a} + \mathcal{K}C_{y\delta_r} \\ \textcircled{2} \dots &= \mathcal{K}C_{l\delta_a} + \mathcal{K}C_{l\delta_r} \\ \textcircled{3} \dots &= \mathcal{K}C_{n\delta_a} + \mathcal{K}C_{n\delta_r} \end{aligned} \quad (3.124)$$

cioè sarebbero presenti i coefficienti di momento relativi al comando degli alettoni δ_a e a quello del timone di coda δ_r . In tal caso la formulazione matriciale del sistema differenziale diventerebbe

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} \quad \text{con } B = \begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{Bmatrix} \quad (3.125)$$

con la matrice dei comandi $B \in \mathbb{R}^{5 \times 2}$.

Ritornando al sistema adimensionalizzato a comandi bloccati, cioè in assenza di forzante, è possibile supporre soluzioni esponenziali del tipo

$$\begin{cases} \beta = \beta_1 e^{\lambda \hat{t}} & \frac{d}{d\hat{t}}\beta = \beta_1 \lambda e^{\lambda \hat{t}} \\ \varphi = \varphi_1 e^{\lambda \hat{t}} & \frac{d\varphi}{d\hat{t}} = \varphi_1 \lambda e^{\lambda \hat{t}} = \frac{1}{A}\hat{p} \implies \hat{p} = A\varphi_1 \lambda e^{\lambda \hat{t}} \implies \frac{d}{d\hat{t}}\hat{p} = A\varphi_1 \lambda^2 e^{\lambda \hat{t}} \\ \psi = \psi_1 e^{\lambda \hat{t}} & \frac{d\psi}{d\hat{t}} = \psi_1 \lambda e^{\lambda \hat{t}} = \frac{1}{A}\hat{r} \implies \hat{r} = A\psi_1 \lambda e^{\lambda \hat{t}} \implies \frac{d}{d\hat{t}}\hat{r} = A\psi_1 \lambda^2 e^{\lambda \hat{t}} \end{cases} \quad (3.126)$$

Sostituendo nel sistema (3.123) si ottiene

$$\begin{cases} \beta_1 \lambda e^{\lambda \hat{t}} + \beta_1 k_{11} e^{\lambda \hat{t}} + k_{12} A \varphi_1 \lambda e^{\lambda \hat{t}} + k_{13} A \psi_1 \lambda e^{\lambda \hat{t}} + k_{14} \varphi_1 e^{\lambda \hat{t}} = 0 \\ A \varphi_1 \lambda^2 e^{\lambda \hat{t}} + \beta_1 k_{21} e^{\lambda \hat{t}} + k_{22} A \varphi_1 \lambda e^{\lambda \hat{t}} + k_{23} A \psi_1 \lambda e^{\lambda \hat{t}} = 0 \\ A \psi_1 \lambda^2 e^{\lambda \hat{t}} + \beta_1 k_{31} e^{\lambda \hat{t}} + k_{32} A \varphi_1 \lambda e^{\lambda \hat{t}} + k_{33} A \psi_1 \lambda e^{\lambda \hat{t}} = 0 \end{cases} \quad (3.127)$$