



Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2169A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Andrea Cardella

MATERIA: Esercitazioni svolte e Temi d'Esame - Idrologia -
Prof. Claps

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**



Politecnico di Torino
Laurea Magistrale in Ing. Civile

A.A 2016/2017

Corso di Idrologia A-M

Prof. Pierluigi Claps

ELABORATI SVOLTI e REVISIONATI
DURANTE IL CORSO

TESTO ESERCITAZIONE

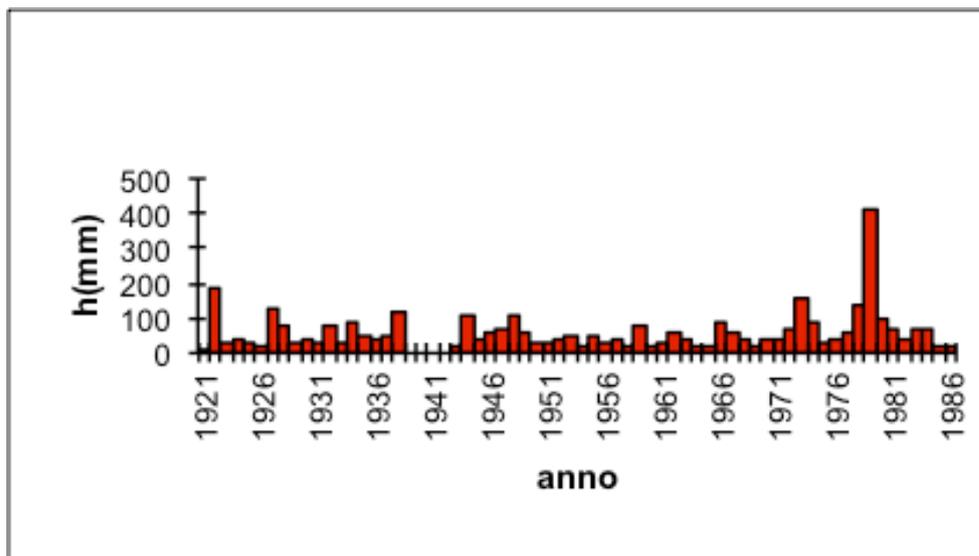
Idrologia A_M

A.A. 2016-2017

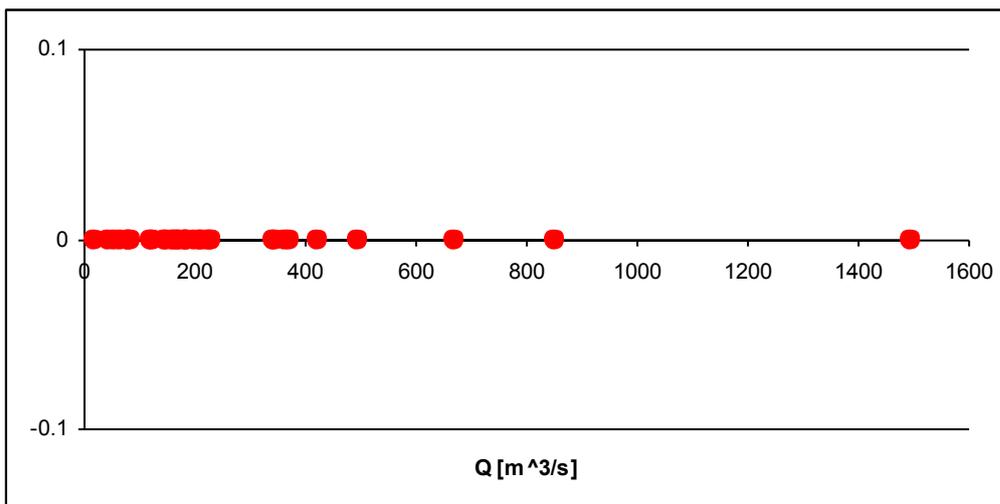
ESERCITAZIONE 1: ANALISI ESPLORATIVA DI UNA SERIE DI DATI.

Si considerino le due serie storiche di massimi annui riportati al fondo del documento. Si effettuino per entrambe le serie le seguenti operazioni:

1. Tracciamento del diagramma cronologico della serie

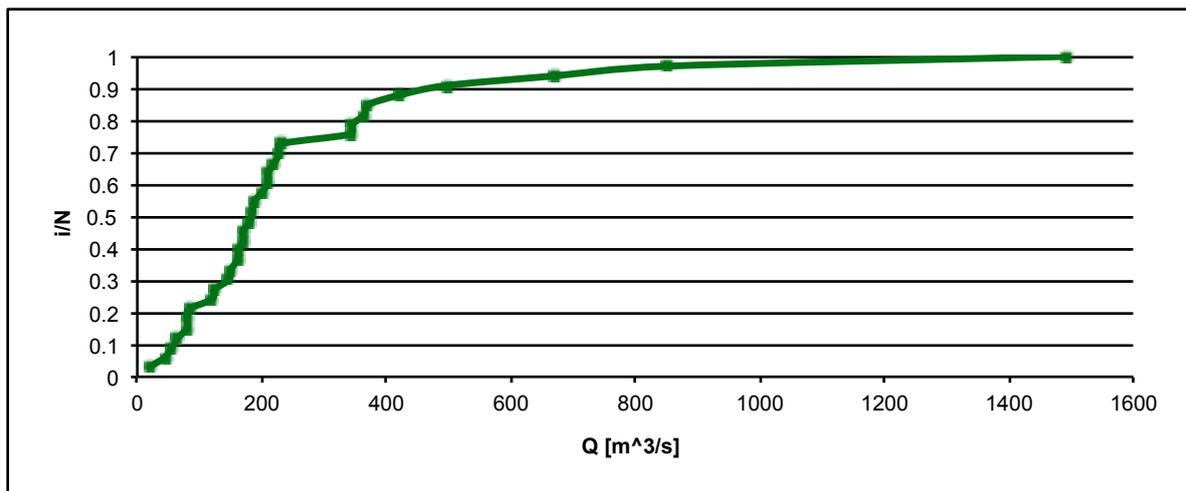


2. Tracciamento del diagramma a punti

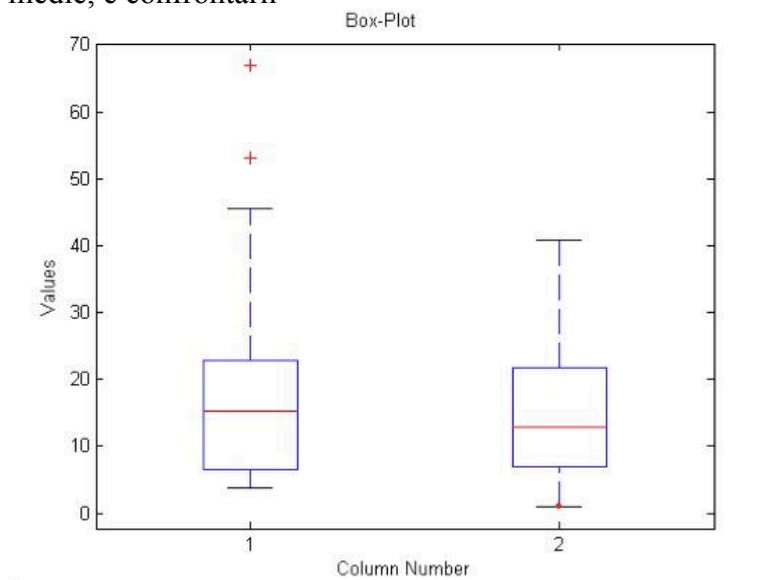


3. Tracciamento del diagramma delle frequenze assolute e relative:

- ordinare in senso crescente gli elementi del campione, detti x nel seguito;
- dividere in k classi di uguale ampiezza l'intervallo $[x_{\min}, x_{\max}]$, con $k = \text{int}(1 + 3.3 \text{Log}_{10}(N))$ e $N = \text{numero dati}$;
- costruire il diagramma della frequenza assoluta ed il diagramma della frequenza relativa.



6. [Facoltativo] Creare il box plot delle due serie, dopo averle adimensionalizzate per le rispettive medie, e confrontarli



Seconda serie di dati: massimi annui di precipitazione di durata 24h

Dati Pragelato (TO) (Anno – altezza (mm))

1955	30.0
1956	69.8
1957	114.0
1958	41.8
1959	75.0
1961	27.0
1962	113.0
1963	49.6
1964	58.0
1965	60.6
1966	35.0
1969	41.6
1970	36.0
1971	63.0
1972	79.0
1973	106.8
1974	59.6
1975	57.0
1976	80.6
1979	51.0
1980	38.2
1981	139.0
1982	34.2
1984	30.8
1985	49.4
1986	77.0

Svolgimento

Si consideri la serie storica dei massimi annui dei colmi di piena osservati alla stazione San Martino del fiume Chisone (dati riportati al fondo), eseguendo le operazioni sotto descritte:

1. Costruire il diagramma delle frequenze cumulate e la curva di probabilità cumulata della distribuzione normale (nel piano (X,F)), ovvero:

- disporre i valori x_i del campione in ordine crescente e associare a ciascun valore il numero d'ordine i ;
- stimare la frequenza empirica di non superamento usando l'espressione

$$F(i) = \frac{i}{n + 1}$$

- sovrapporre al diagramma delle frequenze cumulate l'andamento della funzione di probabilità cumulata Normale dopo aver calcolato i parametri con il metodo dei momenti.

$$\begin{cases} \mu = \widehat{\theta}_1 = \bar{x} \\ \sigma^2 = \widehat{\theta}_2^2 = s^2 \end{cases}$$

Verifica preliminare

2. Verificare graficamente l'adattamento della funzione di probabilità (la distribuzione Normale) al campione usando la carta probabilistica normale, ovvero:

- Tracciare la retta relativa alla distribuzione Normale (in ascissa i valori di X e in ordinata la variabile ridotta u mediante la posizione

$$u = \frac{x - \theta_1}{\theta_2}$$

- diagrammare in ascissa i valori di portata campionari x_i e in ordinata il valore delle u_i ottenute per inversione della funzione Normale standardizzata Cumulata

$$f(i) = F(u_i) \rightarrow u_{(i)} = INV.NORM.ST(F(i))$$

Definizione della condizione di progetto e stima del relativo quantile

3. Assegnare al rilevato arginale un orizzonte progettuale pari ad $N=10$ anni

Data la formula

$$R_N = [1 - (1 - Pr(s))^N]$$

Con $Pr(s) = 1 - F =$ probabilità di superamento, legata al periodo di ritorno T dalla relazione

$$1 - F = Pr(s) = \frac{1}{T}$$

calcolare:

- Il periodo di ritorno che deriva dall'assegnare $Rn = 5\%$;
- il valore di rischio Rn associato ad un periodo di ritorno fissato a 200 anni
- per entrambi ricavare la portata di progetto ipotizzando valida la legge normale

NOTE EXCEL: comandi

DISTRIB.NORM: restituisce la distribuzione normale per la media e la distribuzione standard specificate.

Sintassi DISTRIB.NORM(x;media;dev_standard;cumulativo)

x è il valore in corrispondenza del quale si desidera il calcolo della distribuzione.

Media è la media della distribuzione (parametro θ_1).

Dev_standard è la deviazione standard della distribuzione (parametro θ_2).

Cumulativo è un valore logico che determina la forma assunta dalla funzione. Se cumulativo è VERO, DISTRIB.NORM restituirà la funzione di ripartizione, se è FALSO restituirà la funzione di densità di probabilità.

DISTRIB.NORM.ST: restituisce la funzione di ripartizione normale standard cumulativa. La distribuzione ha una media uguale a 0 (zero) e una deviazione standard uguale a uno.

Sintassi: DISTRIB.NORM.ST(u)

u è il valore della variabile normale standard in corrispondenza del quale si desidera il calcolo della funzione di ripartizione. Esempio: DISTRIB.NORM.ST(1)= 0.841344746

IDROLOGIA A_M

A.A. 2016-2017

PARTE C): *Conclusione della procedura di inferenza statistica con decisione sulla stima della portata di progetto.*

Stima del modello probabilistico GEV

Con riferimento alla serie storica dei massimi annui dei colmi di piena osservati alla stazione del Chisone a San Martino, procedere alla stima dei parametri della distribuzione GEV e rappresentarla in carta (LnT, Q) insieme alle frequenze cumulate dei dati osservati (sempre calcolate con la relazione di Weibull $\Phi(i)=i/(n+1)$).

Verifica dei modelli probabilistici:

Sottoporre le distribuzioni LOGNormale, di Gumbel e GEV ai test di adattamento del Massimo Valore, del Chi Quadrato di Pearson e di Anderson-Darling, adottando sempre un livello di significatività α del 5%. Per il max valore si usi la procedura speditiva proposta per distribuzioni qualsiasi.

Si considerino sia i parametri stimati con il metodo dei momenti che quelli stimati con gli L-Momenti. Si applichi Anderson-Darling solo ai casi che passano almeno il test di Pearson.

Si riportino in una tabella finale tutti i risultati, insieme ai corrispondenti P-values, dove è possibile determinarli.

Si posizioni poi il punto (τ_3, τ_4) sul diagramma Diagnostico di Hosking-Wallis per riscontrare il risultato dei test.

Infine, si definisca il valore prescelto della portata di progetto seguendo la logica della media d'insieme e di scelta del valore maggiormente cautelativo.

Tutti gli elementi per procedere all'effettuazione dei test sono contenuti nella dispensa:

http://www.idrologia.polito.it/didattica/Idrologia/2016/blocco1/Dispensa_Verifica_Ipotesi_test_2016.pdf.

IDROLOGIA A_M

A.A. 2016-2017

Utilizzando i dati riportati in tabella si eseguano le seguenti elaborazioni:

1. Determinare la relazione che lega la media dei massimi di precipitazione \bar{h}_d alle durate utilizzando un modello di regressione $\bar{h}_d = a \cdot d^n$, con $d =$ durata (ore). Stimare a ed n tramite regressione lineare sui logaritmi. Per farlo è necessario calcolare le medie dei massimi annui di precipitazione registrati nelle 5 durate. Rappresentare in grafico osservazioni e retta interpolare.
2. Considerando l'uso del modello probabilistico di Gumbel, con parametri stimati con i momenti ordinari, e del modello GEV – L-Momenti. Rappresentare in grafico i valori dei parametri adimensionali in funzione della durata di riferimento (1-24 h). Nel primo caso si tratterà dei coefficienti di variazione relativi alle 5 durate; nel caso della GEV saranno i parametri adimensionalizzati Θ_1/μ , Θ_2/μ e Θ_3 . Assumere quindi valori unici, pari alle medie sulle 5 durate, per tutti i parametri.
3. Rappresentare le curve IDF come quantili di precipitazione relativi alle generiche durate d per diversi periodi di ritorno T: 10, 50 e 100 anni (curve IDF). Usare le rappresentazioni sia in coordinate cartesiane che in scala bi-logaritmica.
4. Per la durata $d = 6$ ore, si stimino i quantili $h_{6,T=100}$ con le 2 distribuzioni e si costruisca un pluviogramma di progetto con il metodo dei blocchi alternati (Chicago discretizzato). Per chiarire la differenza che esiste tra intensità media in una durata d ed intensità marginali di un pluviogramma, rappresentare i 2 pluviogrammi ottenuti (Gumbel e GEV) ordinando le intensità in senso decrescente e sovrapponendoli alle rispettive curve di intensità media ottenute con le relazioni $i_{d,q00} = h_{d,100}/d$.

Uso di un sistema WEB-GIS per riscontro dei parametri morfologici di bacino

I parametri morfologici del bacino Chisone a S.Martino si possono rilevare dalla rappresentazione su web-gis grazie ad un applicativo sviluppato al Politecnico di Torino.

I passi da compiere sono:

- 1) Andare alla pagina: <http://130.192.28.30/maps/jquery/default.html?mapset=mappaprincipale>
- 2) Cliccare a destra, nel pannello con gli strumenti, sull'icona "i" (Pannello di ricerca)
- 3) In alto a sinistra si aprirà il pannello di ricerca. Selezionare il layer "Bacini" nel menù a tendina e cliccare su Ricerca. A questo punto inserire nel campo Corpo idrico e comune : Chisone a San Martino. Poi cliccare il tasto Cerca.
- 4) Nel box di destra verranno a questo punto riportate le caratteristiche del bacino selezionato. Per zoomare sul bacino (oltre alle classiche funzionalità di zoom) è possibile cliccare l'icona a forma di lente accanto alla voce Azioni presente nel box.
- 5) Selezionando il simbolo dei "piani sovrapposti" si possono ottenere rappresentazioni del contorno del bacino usando diversi sfondi. Inoltre, in questa schermata, è presente una sezione 'Idrologia', dentro la quale esiste il tracciato del reticolo idrografico in forma discreta (raster), che va sotto il nome di raster_tca. Questa visualizzazione è essenziale per il passo successivo.

Si può infatti verificare sul web-gis anche il funzionamento dell'algoritmo di delimitazione automatica, a seguito del quale non verranno però fornite informazioni quantitative sulla morfologia del bacino. Per fare questo si devono prima ottenere le coordinate della sezione di chiusura in coordinate che, nel sistema EPSG, sono denominate: 32632 (WGS84 UTM-32N). Le coordinate devono essere ottenute direttamente sulla mappa che si ha davanti, cliccando sul simbolo dell'asterisco. Per consentire il funzionamento dell'algoritmo sarà necessario un posizionamento accurato del punto prescelto all'interno dei pixel del reticolo, che rimane visualizzato.

Cliccando sul punto prescelto verranno copiate le coordinate nei riquadri X e Y. Queste coordinate devono essere trasformate, usando il software https://epsg.io/transform#s_srs=4326&t_srs=3857 selezionando la trasformazione **dal sistema 3857** (WGS 84 / Pseudo-Mercator) (usato da Google Maps) **al sistema 32632** (WGS84 UTM-32N).

Ricopiando le coordinate trasformate (senza valori decimali) nei rispettivi riquadri, si può finalmente cliccare sul pulsante "delimitazione".

Parte B) Stima dell'idrogramma di piena dalle piogge nette**1. Pluviogramma lordo areale**

Utilizzando il metodo cinematico con ipotesi isocorrive = isoipse, applicare due metodi di assorbimento semplificati per pervenire alla stima indiretta della Q_{100} nella sezione del Chisone a S. Martino. Per determinare lo ietogramma (lordo) di progetto si utilizzi il metodo indice.

Sia la media che il fattore di crescita $K(T)$ dovranno essere rappresentativi di tutto il bacino. In questi casi si ricostruiscono i valori medi areali dei parametri. Per il bacino di interesse i parametri necessari per costruire la curva IDF media (coefficiente pluviale orario medio a e esponente n della curva) possono essere reperiti sull'Atlante dei bacini imbriferi piemontesi

(http://www.idrologia.polito.it/web2/open-data/Renerfor/atlante_bacini_piemontesi_LR.pdf).

Nota la curva IDF media per si costruisca il corrispondente pluviogramma lordo con il metodo Chicago discretizzato, considerando un tempo di pioggia pari a 6 ore ed intervalli di 1 ora.

Si dispongano le intensità parziali di pioggia in ordine temporale usando 3 forme:

- Picco iniziale (ietogramma decrescente)
- Picco finale (ietogramma crescente)
- Picco centrale (ietogramma quasi-simmetrico)

2. Pluviogramma netto**a) Metodo Ψ**

Immaginando di dover effettuare la stessa valutazione indiretta di Q_T in un sottobacino di quello per il quale si hanno dati, si proceda alla taratura di Ψ sul bacino chiuso a S. Martino, ricercando quel valore che consente di ottenere un idrogramma (calcolato con il metodo della corrivazione) che abbia portata al colmo uguale alla media campionaria dei massimi delle osservazioni disponibili per il Chisone a S.Martino. Servirà lo ietogramma lordo medio, cioè avente $K(T)=1$. Si tiri il coefficiente Ψ nei tre casi corrispondenti alle diverse forme di pluviogramma lordo.

Si confrontino i tre valori di Ψ ottenuti con quello ricavato usando la formula razionale:

$$Q_T = \Psi \cdot i_{d,T} \cdot \frac{A}{3.6}$$

nella quale l'evento è rettangolare e l'intensità media di precipitazione (sempre nel caso $K(T)=1$) è determinata per $d = t_c$.

Parte C) Criterio variazionale per la stima indiretta della piena indice

Nell'ambito di applicazione del metodo dell'evento critico per il progetto idrologico *Alfieri et al. (2008)* hanno mostrato che, tra le varie forme di ietogramma più efficienti, si distingue per efficacia e semplicità lo ietogramma rettangolare, purché non vincolato ad avere una durata pari al tempo di corrivazione. La *durata "critica"* dipende dalla forma della funzione di risposta del bacino ed è da ricavare attraverso prove successive, definendo così un metodo che viene chiamato 'variazionale'.

Una volta ricavata la durata critica, questa diventa una proprietà del bacino e può essere usata con riferimento ad una formulazione avanzata del metodo razionale, detta *formulazione geomorfoclimatica*. Il metodo, come descritto nell'articolo, consiste nel calcolare le portate al picco derivanti da ietogrammi rettangolari di diverse durate. Affinché questi mantengano sempre la conformità con la curva di possibilità pluviometrica, il loro volume sarà sempre dato da $K_T ad^n$. La durata per la quale si ottiene il picco massimo sarà quella critica.

Con riferimento al bacino del Chisone a S. Martino ed alla curva IDF areale già nota si ricerchi, tramite convoluzione, il valore più elevato del picco di piena che risulta dall'applicazione di **ietogrammi ad intensità costante di durata variabile tra 1/6 e 6/6 del tempo di corrivazione**, imposto pari a 6 ore. Si utilizzi la precipitazione media, cioè con $K_T=1$. La durata di pioggia che produrrà il valore massimo di picco risulterà essere la **durata critica** per quel bacino

Per il calcolo degli assorbimenti si proceda utilizzando il metodo percentuale Ψ (con $\Psi=0.21$) calcolando gli ietogrammi netti per tutte le durate considerate. Per verifica controllare che la pioggia di durata pari al tempo di corrivazione produca un valore di picco di piena uguale a quello della formula razionale tradizionale.

[Facoltativo] Provare a modificare la sequenza delle intensità variabili ottenute nella scorsa esercitazione fino ad ottenere quella particolare combinazione che rende massimo il valore stimato del picco (sempre con $\Psi=0.21$).

Costruire poi analiticamente gli idrogrammi di piena ottenuti per gli stessi pluviogrammi netti usando l'IUH del **metodo dell'invaso** con tempo di ritardo (parametro K) pari alla metà del tempo di corrivazione.

Alfieri L., Laio F., Claps P., A simulation experiment for optimal design hyetograph selection, *Hydrological Processes* 22(6): 813-820, 2008, ISSN: 0885-6087. DOI:10.1002/HYP.6646, 2008
[<http://www.idrologia.polito.it/~claps/Papers/AlfieriHP.pdf>]

TESTO ESERCITAZIONE

IDROLOGIA A_M

A.A. 2016-2017

ESERCITAZIONE 6 : SIMULAZIONE DI UNA SEQUENZA DI INFILTRAZIONE CON IL METODO DI HORTON

Si consideri il modello di infiltrazione di Horton applicato ad un terreno con parametri $f_0=55$ mm/h, $f_1=4$ mm/h e $\alpha = 1.5$ h⁻¹. Si prenda in considerazione un pluviogramma di durata complessiva pari a 4 ore costituito da tre eventi parziali rettangolari:

- nelle prime due ore si ha: $w_1 = 10$ mm/h
- nella terza ora si ha $w_2 = 20$ mm/h
- nella quarta ora si ha $w_3 = 10$ mm/h

Si ricostruiscano gli andamenti di:

- tasso di infiltrazione effettivo
- volume specifico (mm) di infiltrazione cumulata effettiva
- intensità del deflusso superficiale

Suggerimenti:

- Con riferimento al primo intervallo ricercare se e quando si raggiungono per la prima volta le condizioni di ponding.
- Se queste non si raggiungono entro il termine del primo intervallo a precipitazione costante determinare, usando la (53) di pag. 5.15 della dispensa di Tarboton (*), il valore del tasso potenziale di infiltrazione e stabilire una nuova condizione iniziale per controllare se il terreno risulti o no subito saturo con la nuova intensità di precipitazione
- Se non dovesse risultare saturo, procedere nuovamente a ricercare il tempo di ponding usando la nuova condizione iniziale

(*) La (53) è

$$F = \frac{f_0 - f_c}{k} - \frac{f_1}{k} \ln \left(\frac{f_c - f_1}{f_0 - f_1} \right) \quad (53)$$

nella quale $k=\alpha$ e f_c è l'incognita.

Esercizio a casa 1

VALUTAZIONE DELLA RARITÀ DI UN EVENTO DI PIENA

Con riferimento all'evento di piena del 23-25 Novembre 2016 si vuole stimare il periodo di ritorno delle portate di picco verificatesi in alcune sezioni del Piemonte occidentale. Per confronto si farà anche una valutazione esemplificativa del periodo di ritorno della precipitazione.

In allegato sono riportate le schede relative a tre sezioni idrometriche e ad una stazione pluviometrica.

Per tutte le stazioni idrometriche le scale di deflusso sono reperibili su questo rapporto tecnico:

http://www.idrologia.polito.it/web2/open-data/wp_scaledeflusso.pdf

Riferirsi alla scala di deflusso finale, ottenuta a seguito del filtraggio di eventuali valori non congruenti. Un esempio è allegato per la sezione di S.Martino.

Il rapporto tecnico di riferimento per l'analisi regionale delle portate al picco di piena è:

http://www.idrologia.polito.it/gndci/rapportiPdf/Rapporto_VaPi_NO%202001_UO1-8.pdf

Tutti i dati relativi alle grandezze fisiche dei bacini sono reperibili qui:

http://www.idrologia.polito.it/web2/open-data/Renerfor/atlante_bacini_piemontesi_LR.pdf

Per le tre sezioni di misura si determinino quindi i periodi di ritorno delle portate al picco, usando l'analisi regionale VAPI. I bacini ricadono interamente nella zona omogenea di piena B (Alpi e Prealpi Occidentali). Per la stima della media si usi la seguente formula empirica (tarata con il metodo della regressione statistica):

$$q_{indice} = c_0 + X_1^{c_1} + X_2^{c_2}$$

con c_0 , c_1 e c_2 riportate nella Tabella contenuta nel rapporto VAPI, e le X ottenibili dall'atlante.

Successivamente, per la stazione pluviometrica di Pragelato si determini il diagramma di severità dell'evento di precipitazione descritto nella scheda allegata, usando come riferimento le due distribuzioni già usate ad esercitazione.

Non essendo i massimi sulle varie durate orarie riferiti alla giornata di maggiore intensità di pioggia, si usi come intensità di riferimento l'intensità costante ottenibile dividendo per 24 ore il massimo valore misurato in una giornata, come riportato nella scheda.

nome: TORINO MURAZZI PO 223 m s.l.m.

comune: TORINO (TO)

Ultimo rilevamento: 26-NOV-2016 08:56:06 UTC

LO IDROMETRICO

ultimo dato

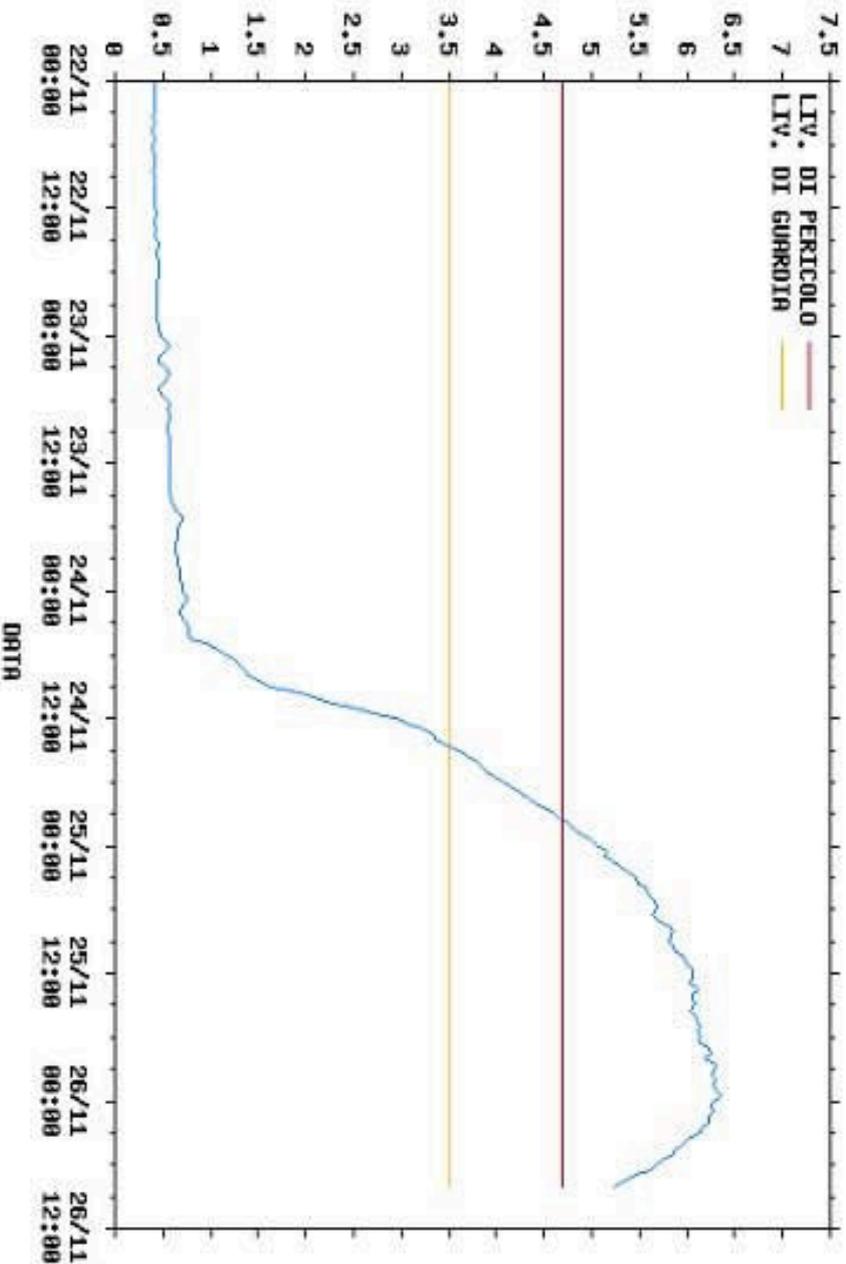
5.24 m

Idrometro (m)

AGGIORNAMENTO: 26/11/16 08:56:06 UTC

0 IDROGRAFICO	PO
0 ULTIMO DATO (m)	5.24
0 CODICE 2 (m)	3.50
0 CODICE 3 (m)	4.70
0 NEL MINIMO NELLE ULTIME 24 ORE	26/11/16
0 EL MINIMO NELLE ULTIME 24 ORE	08:00
0 0 MINIMO NELLE ULTIME 24 ORE (m)	5.24
0 NEL MASSIMO NELLE ULTIME 24 ORE	25/11/16
0 EL MASSIMO NELLE ULTIME 24 ORE	23:30
0 0 MASSIMO NELLE ULTIME 24 ORE (m)	6.35

STAZIONE TORINO MURAZZI PO
LIVELLO IDROMETRICO [m] - QUOTA DELLO ZERO IDROMETRICO: 269,71 n s.l.n.





Stazione: **SAN MARTINO CHISONE** 410 m s.l.m. Comune: **PINEROLO (TO)** Ultimo rilevamento: **26-NOV-2016 00:06:05 UTC**

PIOGGIA CUMULATA oggi **55.6 mm**

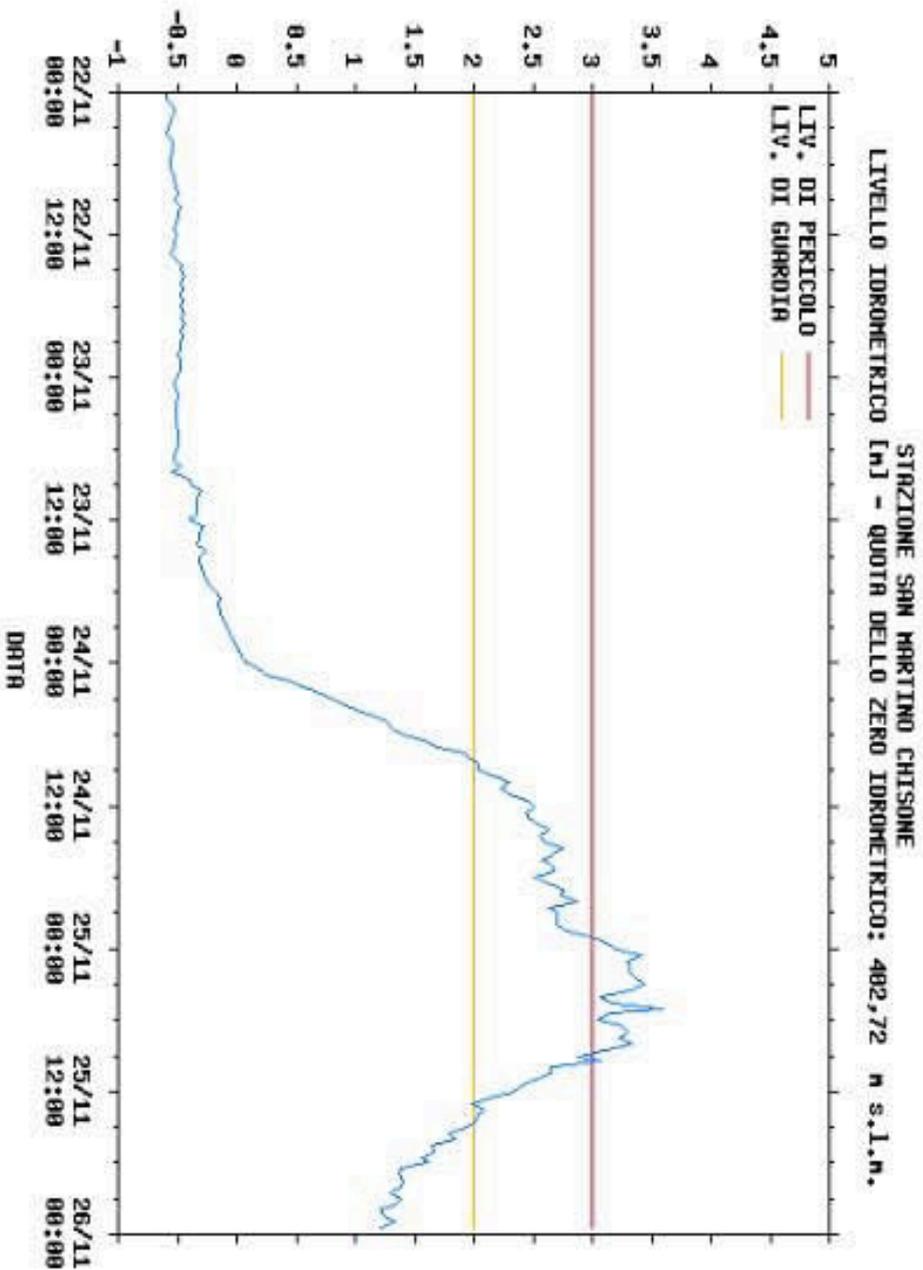
LIVELLO IDROMETRICO ultimo dato **1.21 m**

Pioggia (mm)

Idrometro (m)

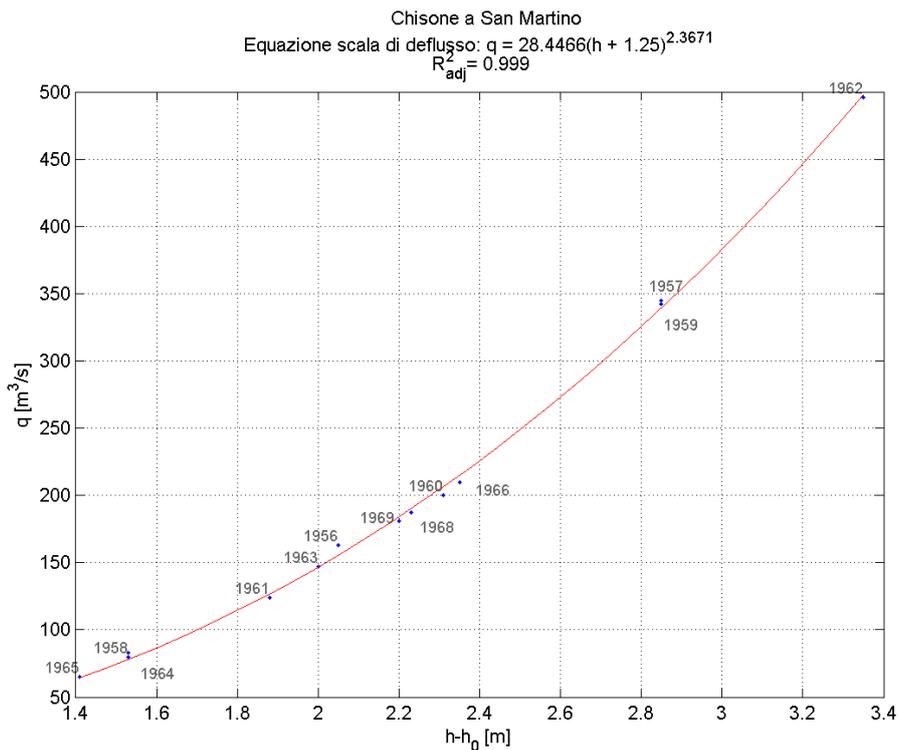
AGGIORNAMENTO: 26/11/16 00:06:05 UTC

BACINO IDROGRAFICO	PELLICE
LIVELLO ULTIMO DATO (m)	1.21
SOGLIA CODICE 2 (m)	2.00
SOGLIA CODICE 3 (m)	3.00
DATA DEL MINIMO NELLE ULTIME 24 ORE	25/11/16
ORA DEL MINIMO NELLE ULTIME 24 ORE	22:00
LIVELLO MINIMO NELLE ULTIME 24 ORE (m)	1.21
DATA DEL MASSIMO NELLE ULTIME 24 ORE	25/11/16
ORA DEL MASSIMO NELLE ULTIME 24 ORE	05:00
LIVELLO MASSIMO NELLE ULTIME 24 ORE (m)	3.59



Analisi dei valori anomali

L'analisi dei valori anomali ha consentito di rilevare alcune anomalie, risolte con una ricerca sugli Annali (come spiegato nel testo). La scala di deflusso di piena risultante alla fine di questo approfondimento viene riportata nella figura che segue:



IDROLOGIA A_M

A.A. 2016-207

ESERCIZIO 2 A CASA

REGOLE

Compilare **al più** il tutto in due facciate: totale max 2 pagine A4.

Formato: **Solo PDF**

Nominativo obbligatorio su ogni pagina

Nome file: **matricola.pdf**

Potranno essere assegnate frazioni di punto (0.5)

Alla fine dei conteggi, a coloro che avranno raggiunto un punteggio non intero il computo verrà effettuato come segue:

L'approssimazione verrà considerata per eccesso (all'intero superiore) quando il voto della prova scritta sarà minore od uguale a 24. Per voti di esonero superiori al 24 l'approssimazione sarà effettuata per difetto (all'intero inferiore).

E' possibile fare domande, ma esclusivamente sul forum!

Consegna:

Caricamento **nell'area elaborati tassativamente** entro le **8.00** di **lunedì 9 gennaio**.

Buon Lavoro!

Tabella 1

t [h]	h [mm]
10:30	4
11:00	6
11:30	4
12:00	9
12:30	15
13:00	8
13:30	9
14:00	7
14:30	9
15:00	7
15:30	4
16:00	5
16:30	10
17:00	11
17:30	8
18:00	3
18:30	6
19:00	6
19:30	4
20:00	2

- **PARTE C**) : Conclusione della procedura di inferenza statistica con decisione sulla stima della portata di progetto.....46
- Stimare i parametri della distribuzione GEV e la portata di progetto X_T per asseganto tempo di ritorno $T = 50, 100$ e 200 anni e rappresentare in carta probabilistica ($\ln T, Q$) la distribuzione insieme alle frequenze cumulate $F(i)$ del campione di dati osservati;
- Confrontare le distribuzioni Lognormale, Gumbel e GEV con i relativi tempi di ritorno in carta ($\ln T, Q$) con le frequenze cumulate $F(i)$ dei dati osservati;
- Verifica dei modelli probabilistici con l'uso dei seguenti test:
 - Massimo valore;
 - Chi quadrato di Pearson;
 - Anderson- Darling;

Esercitazione 3 : COSTRUZIONE DI UN PLUVIOGRAMMA DI PROGETTO.....64

- Determinare la relazione che lega la media dei massimi di precipitazione h_d alle durate;
- Rappresentare usando il modello probabilistico di Gumbel, e il modello GEV i valori dei parametri θ_1 e θ_2 adimensionali in funzione della durata di riferimento (1 -12 ore);
- Rappresentare le curve IDF come quantili di precipitazione relativi alle generiche durate d per diversi periodi di ritorno T : 10, 50 e 100 anni (curve IDF).
- Per la durata $d = 6$ ore, si stimino i quantili h con le 2 distribuzioni e si costruisca un pluviogramma di progetto con il metodo dei blocchi alternati (Chicago discretizzato).

Esercitazione 4 : PIENA DI PROGETTO STIMATA CON METODI INDIRETTI..... 81

PARTE A) Ricostruzione di un idrogramma di piena lordo con il metodo cinematico

- Riportare i quantili della curva ipsografica espressi in percentuale forniti dall'Atlante su un grafico $[a(z), z]$;
- Tracciare la curva ipsografica;
- Costruire, la curva aree-tempi;
- Determinare l'idrogramma unitario del bacino (U_h);
- Costruire lo ietogramma di progetto per una pari a t_c usando il metodo degli alternating blocks;
- Metodo della convoluzione per la costruzione del idrogramma di piena "lordo".

ESERCITAZIONE N° 1

ANALISI ESPLORATIVA DI UNA SERIE DI DATI

In questa esercitazione delle due serie storiche di massimi annui:

- Portate del torrente Chisone, misurati in localita San Martino (TO), nel corso dei 33 anni presi in esame (v. *Tabella 1.1*);
- Altezze di pioggia di durata 24 ore, misurate in località Pragelato (TO) nel corso dei 26 anni presi in esame (v. *Tabella 1.2*),

Verrà fatta un'analisi preliminare dei dati osservati avvalendosi di tabelle e rappresentazioni grafiche. In particolare per le 2 serie di dati si traccierà:

1. Diagramma cronologico della serie
2. Diagramma a punti
3. Diagramma delle frequenze assolute e relative
4. Calcolo dei valori centrali e dei momenti campionari
5. Diagramma delle frequenze cumulate.

Anno	Portata [m ³ /s]	Anno	Portata [m ³ /s]
1955	55,60	2003	120,00
1956	163,00	2004	80,00
1957	345,00	2005	170,00
1958	79,80	2006	185,00
1959	342,00	2007	160,00
1960	200,00	2008	670,00
1961	124,00	2009	228,00
1962	496,00	2010	365,00
1963	147,00		
1964	83,10		
1965	64,90		
1966	210,00		
1967	18,00		
1968	187,00		
1969	181,00		
1970	43,80		
1977	1493,00		
1993	230,00		
1994	370,00		
1997	150,00		
1998	170,00		

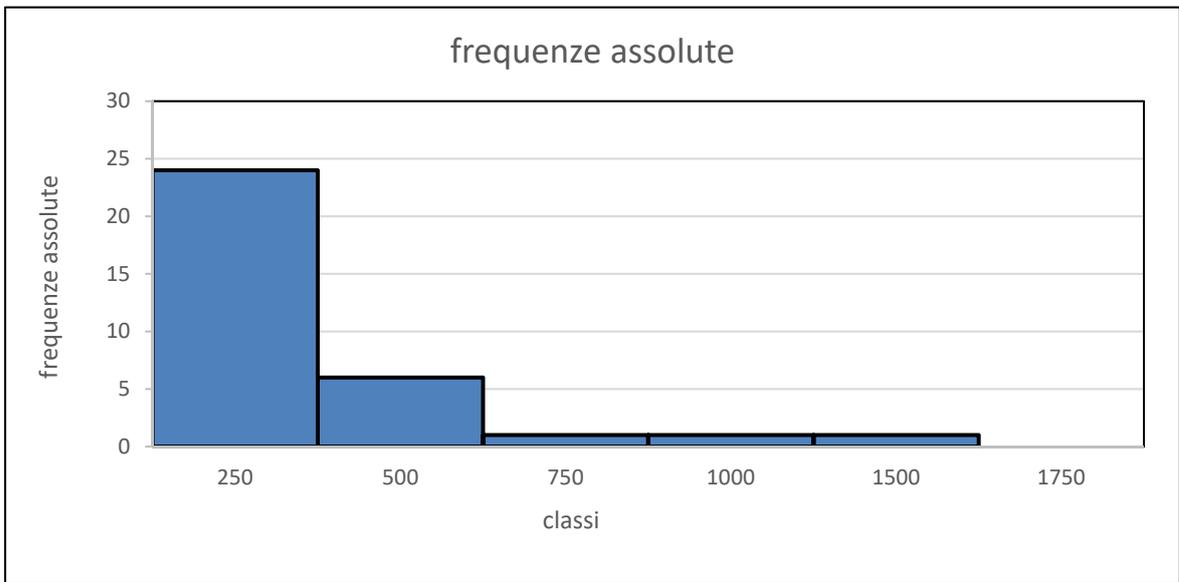


Grafico 1.3

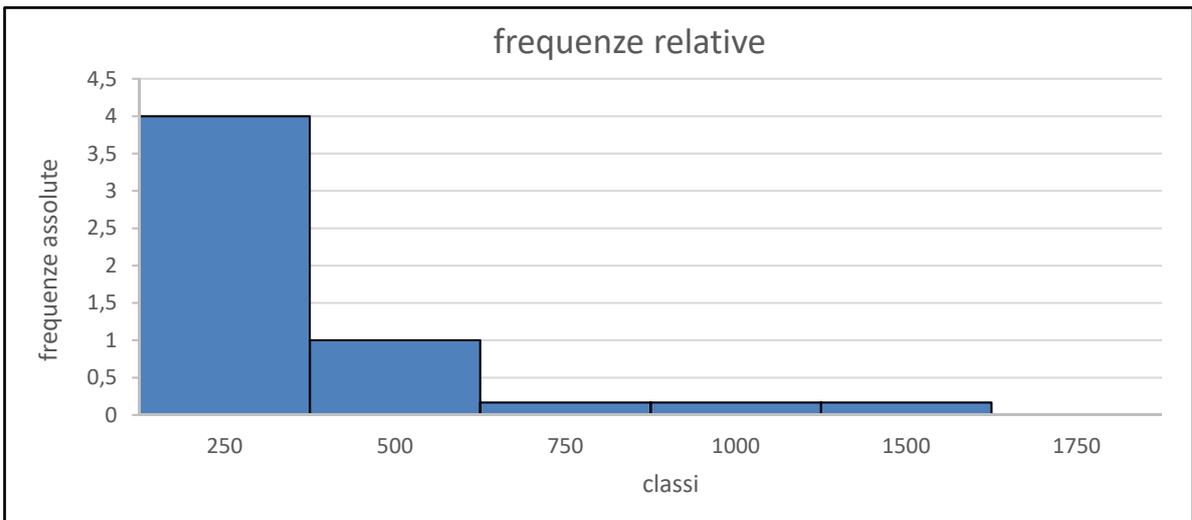


Grafico 1.4

5) Diagramma delle frequenze cumulate

Per costruire tale diagramma occorre:

- ordinare in senso crescente gli elementi del campione;
- associare a ciascun valore il numero d'ordine "i";
- determinare la frequenza di non superamento (frequenza cumulata) usando l'espressione : $F(i) = i/N$, con N = numero di elementi del campione (v. *Tabella 1.5*).

Il grafico che otteniamo presenta sull'asse delle ascisse le portate Q e sull'asse delle ordinate le frequenze cumulate (v. *grafico 1.5*)

i	Q[m ³ /s]	F(i)
1	18,00	0,03
2	43,80	0,06
3	55,60	0,09
4	64,90	0,12
5	79,80	0,15
6	80,00	0,18
7	83,10	0,21
8	120,00	0,24
9	124,00	0,27
10	147,00	0,30
11	150,00	0,33
12	160,00	0,36
13	163,00	0,39
14	170,00	0,42
15	170,00	0,45
16	181,00	0,48
17	185,00	0,52
18	187,00	0,55
19	200,00	0,58
20	210,00	0,61
21	210,00	0,64
22	220,00	0,67
23	228,00	0,70
24	230,00	0,73
25	342,00	0,76
26	345,00	0,79
27	365,00	0,82
28	370,00	0,85
29	420,00	0,88
30	496,00	0,91
31	670,00	0,94
32	850,00	0,97
33	1493,00	1,00

Sezione 2: Chisone , Prigelato (TO)

Anno	h [mm]
1955	30,00
1956	69,80
1957	114,00
1958	41,80
1959	75,00
1961	27,00
1962	113,00
1963	49,60
1964	58,00
1965	60,60
1966	35,00
1969	41,60
1970	36,00
1971	63,00
1972	79,00
1973	106,80
1974	59,60
1975	57,00
1976	80,60
1979	51,00
1980	38,20
1981	139,00
1982	34,20
1984	30,80
1985	49,40
1986	77,00

Tabella 2.1

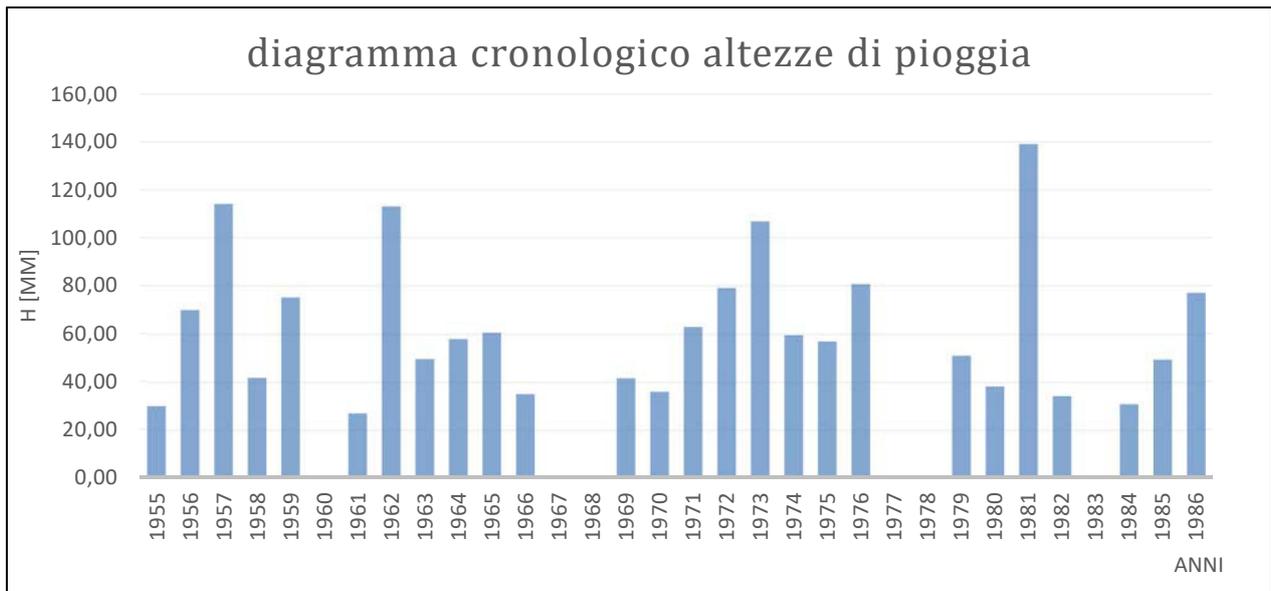


Grafico 2.1

2) **Diagramma a punti:**

Si costruisce ordinando in senso crescente le altezze di pioggia misurate e poi inserendo i dati in un diagramma a dispersione (v. grafico 2). Questo tipo di diagramma si può avere un'idea dell'ampiezza del campione osservato.

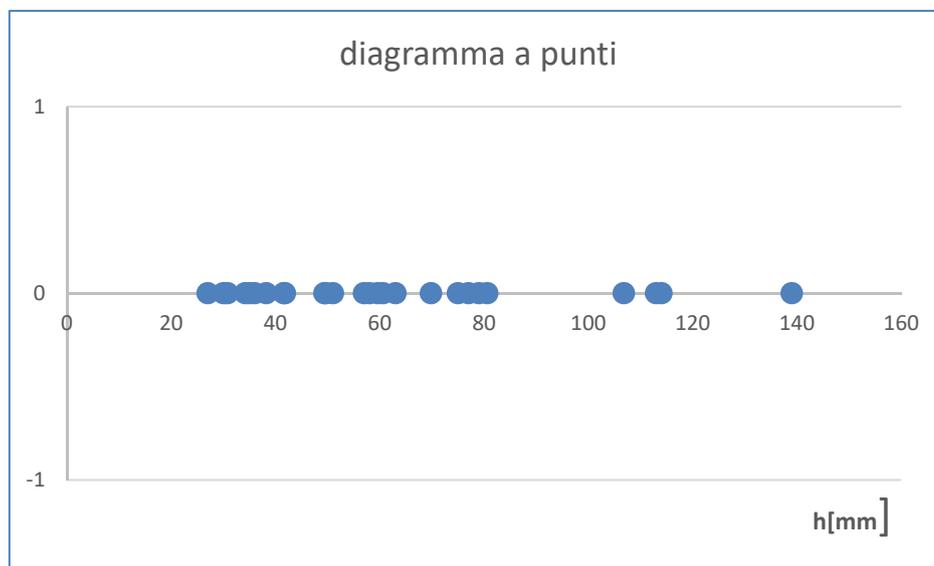


Grafico 2.2

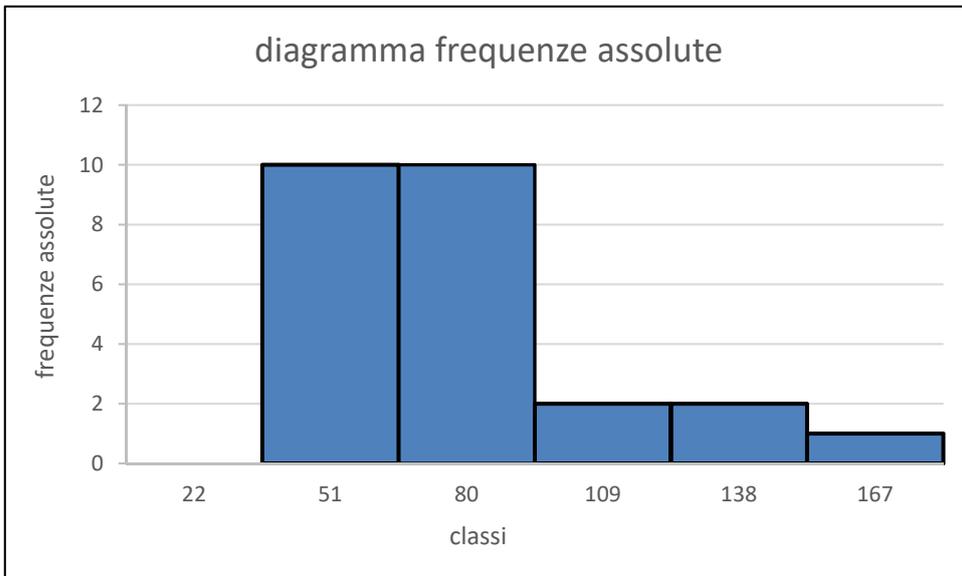


Grafico 2.3

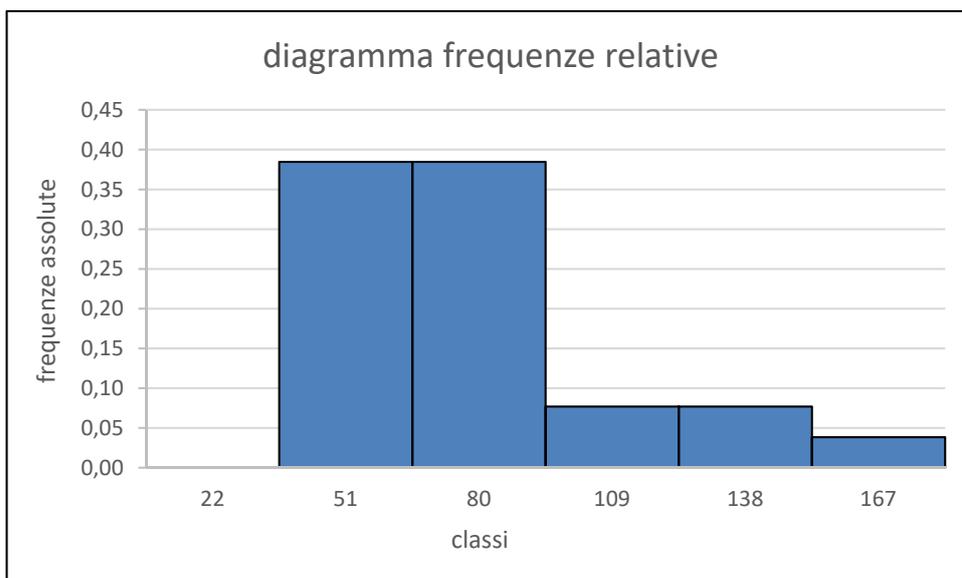


Grafico 2.4

8) Diagramma delle frequenze cumulate

Per costruire tale diagramma occorre:

- ordinare in senso crescente gli elementi del campione;
- associare a ciascun valore il numero d'ordine "i";
- determinare la frequenza di non superamento (frequenza cumulata) usando l'espressione : $F(i) = i/N$, con N = numero di elementi del campione (v.

Tabella 2.5)

Il grafico che otteniamo presenta sull'asse delle ascisse le portate Q e sull'asse delle ordinate le frequenze cumulate (v. *graphico 2.5)*

i	h[mm]	F(i)
1	27,00	0,04
2	30,00	0,08
3	30,80	0,12
4	34,20	0,15
5	35,00	0,19
6	36,00	0,23
7	38,20	0,27
8	41,60	0,31
9	41,80	0,35
10	49,40	0,38
11	49,60	0,42
12	51,00	0,46
13	57,00	0,50
14	58,00	0,54
15	59,60	0,58
16	60,60	0,62
17	63,00	0,65
18	69,80	0,69
19	75,00	0,73
20	77,00	0,77
21	79,00	0,81
22	80,60	0,85
23	106,80	0,88
24	113,00	0,92
25	114,00	0,96
26	139,00	1,00

Tabella 2.5

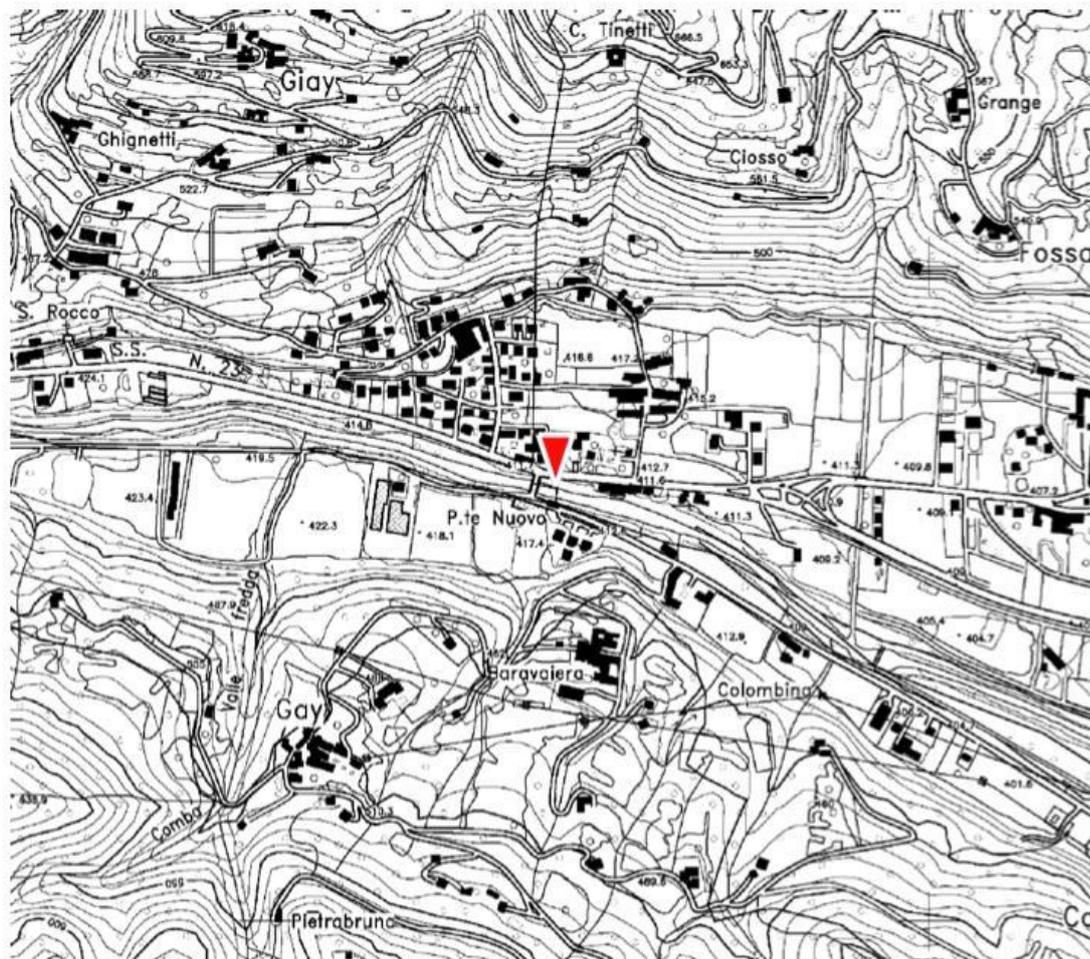
ESERCITAZIONE N° 2

DETERMINAZIONE DI MASSIMA DELL'ALTEZZA DEI RILEVATI ARGINALI IN UNA GENERICA SEZIONE DI UN CORSO D'ACQUA.

Nell'esercitazione precedente si è studiata una serie di dati di portate massime annue (colmi di piena) in una sezione generica del torrente Chisone nella località di San Martino (TO). In questa seconda parte dell'elaborato si andrà ad applicare l'inferenza statistica alla stessa serie di dati per trovare una distribuzione probabilistica che più si avvicina alle misure effettuate, col fine di trovare la portata di progetto da considerare, con assegnate probabilità di superamento, per la costruzione in sicurezza dei rilevati arginali da costruire nella sezione medesima. L'esercitazione è articolata in tre parti:

- A. Inferenza statistica finalizzata alla stima della piena di progetto;
- B. Prosecuzione inferenza statistica con altre distribuzioni (Log Normale, Gumbel);
- C. Conclusione della procedura di inferenza statistica con decisione sulla stima della portata di progetto.

Chisone a San Martino



1. Diagramma delle frequenze cumulate F(i)

Per costruire tale diagramma occorre:

- ordinare in senso crescente gli elementi del campione;
- associare a ciascun valore il numero d'ordine "i";
- stimare la frequenza di non superamento (frequenza cumulata) usando l'espressione

della *Weibull plotting position* : $F(i) = \frac{i}{N+1}$ con N = numero di elementi del campione (v. 2.1 qui sotto). Il grafico che otteniamo presenta sull'asse delle ascisse le portate Q e sull'asse delle ordinate le frequenze cumulate (v. grafico 2.1).

i	Q[m³/s]	F(i)
1	18,00	0,029
2	43,80	0,059
3	55,60	0,088
4	64,90	0,118
5	79,80	0,147
6	80,00	0,176
7	83,10	0,206
8	120,00	0,235
9	124,00	0,265
10	147,00	0,294
11	150,00	0,324
12	160,00	0,353
13	163,00	0,382
14	170,00	0,412
15	170,00	0,441
16	181,00	0,471
17	185,00	0,500
18	187,00	0,529
19	200,00	0,559
20	210,00	0,588
21	210,00	0,618
22	220,00	0,647
23	228,00	0,676
24	230,00	0,706
25	342,00	0,735
26	345,00	0,765
27	365,00	0,794
28	370,00	0,824
29	420,00	0,853
30	496,00	0,882
31	670,00	0,912
32	850,00	0,941
33	1493,00	0,971
N	33	

2. Funzione di probabilità cumulate della distribuzione Normale

Per descrivere la serie di dati osservati con la distribuzione normale occorre stimare i due parametri θ_1 e θ_2 della distribuzione. Utilizzando il metodo dei momenti ordinari : il primo parametro è rappresentato dalla media mentre il secondo è lo scarto quadratico medio (sqm) della serie di dati.

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = 267.61 \frac{m^3}{s} \\ \theta_2 = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - X)^2} = 282.96 \frac{m^3}{s} \end{array} \right.$$

La funzione densità di probabilità cumulata per distribuzione normale è la seguente :

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2} \right)^2}$$

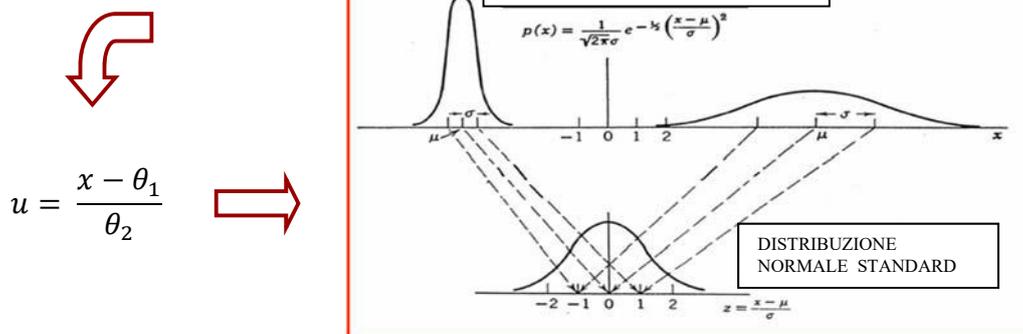
Mentre la funzione di probabilità cumulata (o funzione di ripartizione) è ottenuta dall'integrazione della densità di probabilità cumulata $f(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{\theta_2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2} \right)^2} dx$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE:

La probabilità cumulata Normale $F(x)$ non può essere risolta analiticamente in quanto l'integrale della $f(x)$ non ammette una soluzione in forma chiusa a causa della variabilità dei due parametri. Pertanto si ricorre alla **DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARDIZZATA** una particolare distribuzione normale che per ogni valore della variabile u restituisce la probabilità di non superamento $F(u)$ ad essa associata. Infatti tramite la relazione $u = \frac{x-\theta_1}{\theta_2}$ è possibile nota la x ricavare la u corrispondente e da questa mediante tavole statistiche (vedi tab. 2.3) ricavare la $F(u)$ che sarà uguale alla $F(x)$.

Al contrario della distribuzione normale che può essere rappresentata da infinite curve (per la variabilità di μ e σ) la distribuzione normale standardizzata è rappresentata da una sola curva perché ha una media nulla e una deviazione standard pari a uno.



Probabilità di Non superamento della variabile casuale Normale Standardizzata u per valori positivi

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

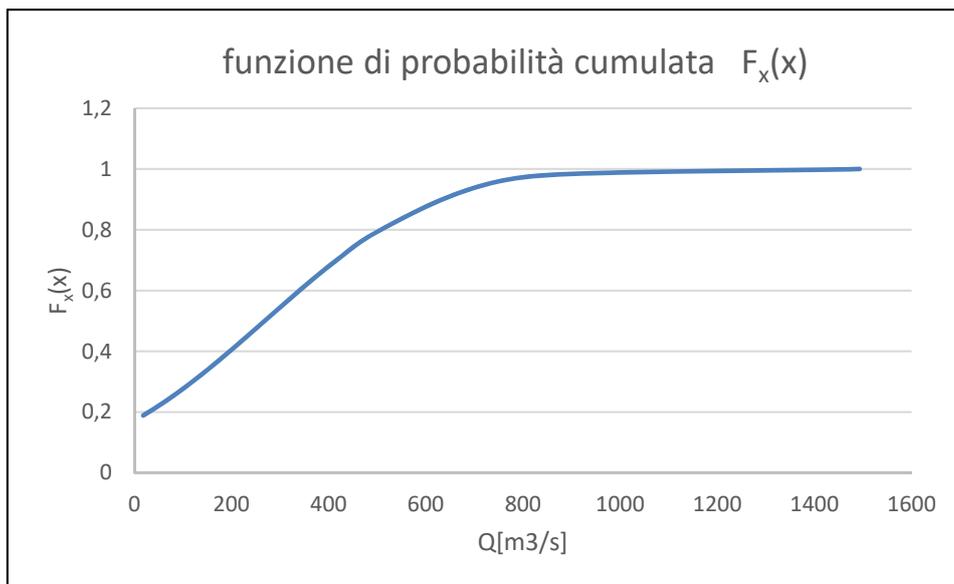
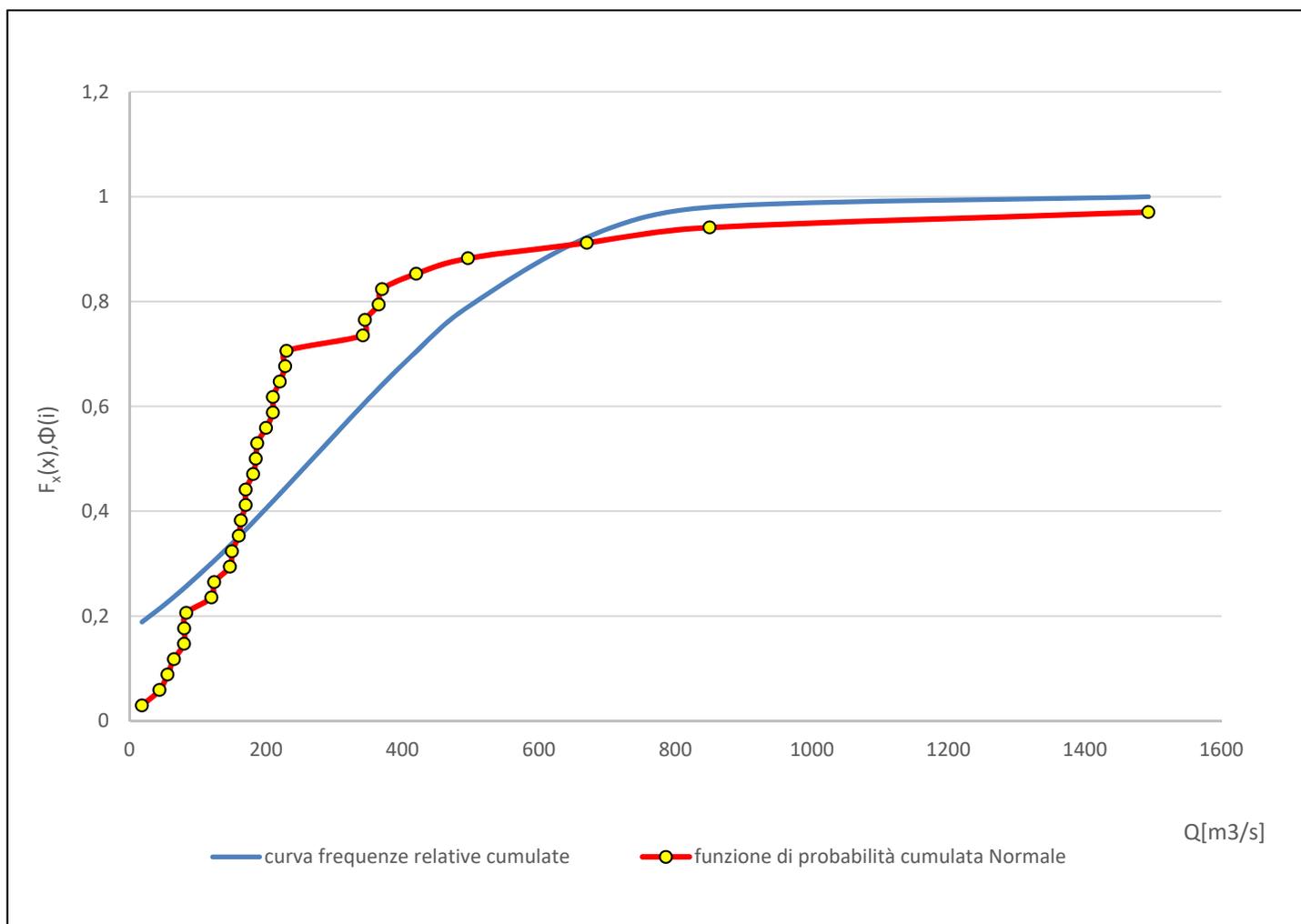


Grafico 2.2

Di seguito è riportata la sovrapposizione grafica delle due curve prima determinate :



Grafico

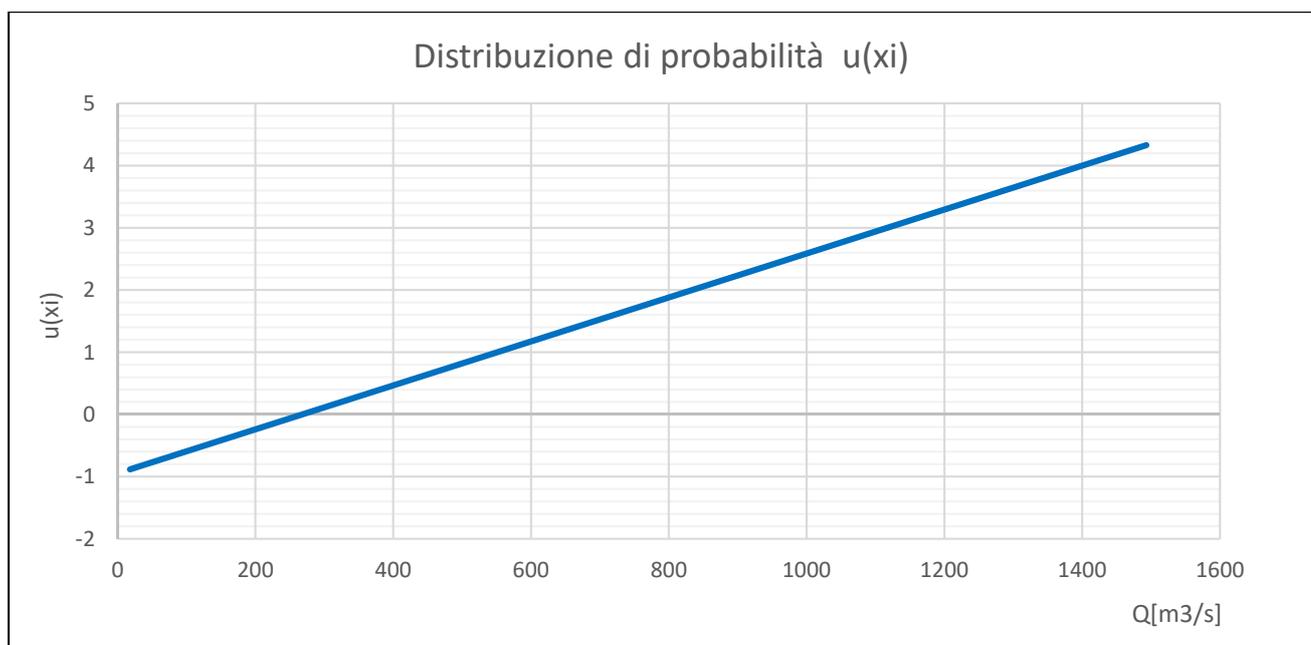
4. Verifica grafica dell'adattamento della funzione di probabilità al campione

Per verificare se la distribuzione Normale (Gaussiana) si adatti bene al campione osservato, rappresentato dalla curva delle frequenze cumulate, ci si avvale di una verifica grafica usando la carta probabilistica normale (v. grafico 2.4), un grafico in coordinate (u,x) che essendo in scala distorta permette di rappresentare la distribuzione come una funzione lineare rendendo più semplice la verifica di adattamento al campione osservato

Per la costruzione della carta probabilistica occorre esprimere le due funzioni da confrontare $F(x)$ e $F(i)$ in termini di variabile standardizzata normale u .

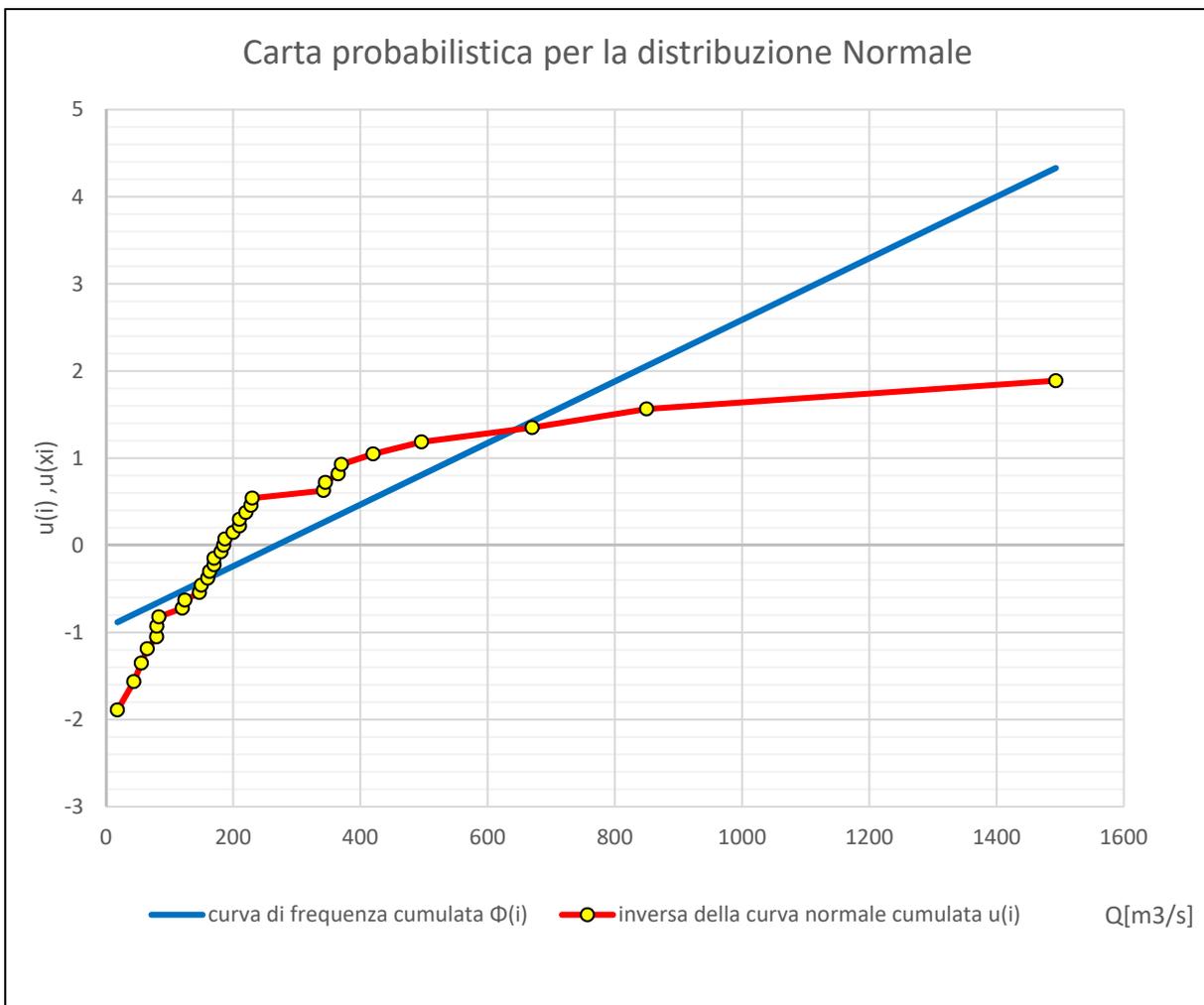
- Ricaviamo la distribuzione di Probabilità Normale $u(x_i)$

Noti i parametri θ_1 e θ_2 della distribuzione Normale, dalla relazione $u = \frac{x-\theta_1}{\theta_2}$ è possibile ricavare per ogni dato osservato x_i la variabile standardizzata $u(x_i)$ corrispondente. In questo modo riportando in ascisse i valori di x_i e in ordinate le $u(x_i)$ è possibile tracciare *nella carta probabilistica la distribuzione Normale che per via della scala distorta sarà rappresentata da una retta.*



i	Q[m3/s]	u(xi)	F(i)	u(i)
17	185	-0,29196	0,5	0
18	187	-0,28489	0,529412	0,073791
19	200	-0,23894	0,558824	0,147987
20	210	-0,2036	0,588235	0,223008
21	210	-0,2036	0,617647	0,299307
22	220	-0,16826	0,647059	0,377392
23	228	-0,13999	0,676471	0,457852
24	230	-0,13292	0,705882	0,541395
25	342	0,26289	0,735294	0,628904
26	345	0,273492	0,764706	0,721522
27	365	0,344173	0,794118	0,820792
28	370	0,361844	0,823529	0,928899
29	420	0,538546	0,852941	1,049131
30	496	0,807133	0,882353	1,186831
31	670	1,422057	0,911765	1,351702
32	850	2,058186	0,941176	1,564726
33	1493	4,330578	0,970588	1,88951

Riportando le due funzioni nella carta probabilistica otteniamo il seguente risultato:



5. Definizione della condizione di progetto e stima del relativo quantile x_T

Fino ad ora si è parlato di probabilità di non superamento $F(x)$ definita come la probabilità di ottenere un valore inferiore a quello di progetto:

$$P(x < \check{x}) = F(x)$$

Ai fini della sicurezza interessa molto di più conoscere la probabilità di Insuccesso, ovvero la probabilità di ottenere un valore che superi il valore di progetto stimato.

$$P(x > \check{x}) = 1 - F(x)$$

Per ottenere una maggiore sicurezza occorre legare questo concetto al tempo. Infatti se volessimo conoscere la probabilità di collasso di un'opera idraulica (esempio un argine) per assegnato tempo di ritorno T , in L anni consecutivi (decisi dal progettista in base all'importanza dell'opera) si parlerà di **Rischio residuale**, probabilità di avere almeno un superamento in L anni successivi. Poiché rappresenta una probabilità di insuccesso assumerà valori molto piccoli tra l'1 e il 5 %

$$R_L = 1 - (F(x))^L$$

Ad esempio per poter realizzare i lavori di manutenzione di un'opera di presa a fiume è stato realizzato una protezione dell'opera di presa stessa capace di contenere portate fino a 150 m³/s. Il tempo di ritorno della portata di 150 m³/s è pari a 5 anni. I lavori di manutenzione durano 18 mesi. Ci chiediamo quale è la probabilità che l'evento con tempo di ritorno 5 anni si manifesti in quei 18 mesi (corrispond. a 1,5 anni). La risposta è data dal rischio residuale:

$$F(x) = 1 - P = 1 - \frac{1}{T} = 0.8 \quad ; \quad R_L = 1 - 0.8^{1.5} = 0.28 = 28\%$$

Se invece volessimo sapere il numero di anni necessari ad avere mediamente un insuccesso (superamento di un certo valore di Q) allora si parlerà di **Tempo di ritorno**, definito come il reciproco della probabilità di insuccesso:

$$T = \frac{1}{P(x > \check{x})} = \frac{1}{1 - F(x)}$$

Ad esempio se $T = 100$ anni si ha una probabilità di non superamento del 99%, ossia nel 99% dei casi in cui si considera l'evento di piena non si ha il superamento di quel valore.

PARTE 2B

Prosecuzione inferenza statistica con altre distribuzioni (Log Normale, Gumbel)

Avendo osservato graficamente la non idoneità della distribuzione Normale a rappresentare il campione osservato, si continua ad applicare l’inferenza statistica alle distribuzioni Lognormale e Gumbel con riferimento alla serie storica dei colmi di piena osservati alla stazione San Martino sul fiume Chisone (tab. 2.6).

Sono state effettuate le seguenti operazioni:

1. Stima dei parametri della distribuzione Log-normale e di Gumbel con il metodo dei momenti ordinari e degli L- Momenti e la verifica grafica dell’adattamento della curva al campione usando la relativa carta probabilistica.
2. Stima delle portate di progetto x_T con entrambe le distribuzioni (Log-Normale e Gumbel), usando entrambi i metodi di stima dei parametri , per valori di periodo di ritorno T pari a 50, 100, 200.

Anno	Portata [m ³ /s]	Anno	Portata [m ³ /s]
1955	55,60	2003	120,00
1956	163,00	2004	80,00
1957	345,00	2005	170,00
1958	79,80	2006	185,00
1959	342,00	2007	160,00
1960	200,00	2008	670,00
1961	124,00	2009	228,00
1962	496,00	2010	365,00
1963	147,00		
1964	83,10		
1965	64,90		
1966	210,00		
1967	18,00		
1968	187,00		
1969	181,00		
1970	43,80		
1977	1493,00		
1993	230,00		
1994	370,00		
1997	150,00		
1998	170,00		

Tab 2.6

In carta probabilistica la funzione di probabilità cumulata Log-Normale è rappresentata dalla retta di equazione:

$$u(y) = \frac{y - \theta_1}{\theta_2} \quad , \quad \text{con } y = \ln(x_i)$$

Essa è ottenuta diagrammando in ascisse i valori delle y pari al logaritmo delle x_i (Portate Q_i), e in ordinate la *variabile normale ridotta* $u(y)$ determinata dalla relazione precedente. (v.tab 2.7). Per verificare l'adattamento della distribuzione al campione, occorre inserire nella carta probabilistica anche il campione di dati che sarà ancora una volta rappresentato dalla curva di frequenza cumulata $u(i)$ ricavata dalla propabilità cumulata $F(i)$.

In exel tramite la funzione inversa : *INV.NORM.ST* (F_i).

Log-normale(momenti)			
F(i)	y=ln(x)	u(i)	u(y)
0,029	2,890	-1,890	-2,666
0,059	3,780	-1,565	-1,649
0,088	4,018	-1,352	-1,376
0,118	4,173	-1,187	-1,199
0,147	4,380	-1,049	-0,963
0,176	4,382	-0,929	-0,960
0,206	4,420	-0,821	-0,916
0,235	4,787	-0,722	-0,496
0,265	4,820	-0,629	-0,459
0,294	4,990	-0,541	-0,264
0,324	5,011	-0,458	-0,241
0,353	5,075	-0,377	-0,167
0,382	5,094	-0,299	-0,146
0,412	5,136	-0,223	-0,098
0,441	5,136	-0,148	-0,098
0,471	5,198	-0,074	-0,026
0,500	5,220	0,000	-0,001
0,529	5,231	0,074	0,011
0,559	5,298	0,148	0,088
0,588	5,347	0,223	0,144
0,618	5,347	0,299	0,144

Log-normale(momenti)			
F(i)	y=ln(x)	u(i)	u(y)
0,647	5,394	0,377	0,197
0,676	5,429	0,458	0,238
0,706	5,438	0,541	0,248
0,735	5,835	0,629	0,702
0,765	5,844	0,722	0,712
0,794	5,900	0,821	0,777
0,824	5,914	0,929	0,792
0,853	6,040	1,049	0,937
0,882	6,207	1,187	1,127
0,912	6,507	1,352	1,472
0,941	6,745	1,565	1,744
0,971	7,309	1,890	2,388

Tab. 2.7

$$b_3 = \frac{\sum_{i=1}^N (i-1)(i-2)(i-3)xi}{N(N-1)(N-2)(N-3)} = 139.53$$

2° FASE

Noti i valori dei PWM (chiamati anche **b_r**) si calcolano gli L-Momenti con le seguenti relazioni:

$$L_1 = b_0 = 267.61$$

$$L_2 = 2b_1 - b_0 = 124.02$$

$$L_3 = 6b_2 - 6b_1 + b_0 = 57.876$$

$$L_4 = 20b_3 - 30b_2 + 12b_1 - b_0 = 47.05$$

Osservazione : gli L-momenti godono della proprietà di dipendere solo dalla serie di dati del campione e non dalla distribuzione considerata. Infatti è conveniente eseguire sempre una verifica di calcolo che consiste nel controllare che gli L –momenti calcolati per ciascuna delle distribuzioni teoriche (Log-Normale, Gumbel e GEV) usate in questa esercitazione siano uguali per ogni distribuzione. Varieranno sono le formule per il calcolo dei parametri, che dipendono essenzialmente dal tipo di distribuzione.

Per la Log-Normale I parametri si calcolano come:

$$\begin{cases} \vartheta_1 = \ln(L_1) - \frac{\vartheta_2^2}{2} = 5.207 \\ \vartheta_2 = \sqrt{2}\Phi^{-1}\left(\frac{\frac{L_2}{L_1} + 1}{2}\right) = 0.874 \end{cases}$$

Il simbolo $\Phi(\cdot)$ rappresenta la funzione di probabilità cumulata della distribuzione Normale standard, e " $\Phi^{-1}(\cdot)$ " la relativa funzione quantile [INV.NORM.ST(probabilità)].

Stimati i parametri θ_1 e θ_2 della distribuzione Log normale si procede alla verifica usando la carta probabilistica (v. grafico 2.6).

N.B Rispetto alla costruzione fatta con il metodo dei momenti ordinari gli unici valori che cambieranno sono quelli della variabile normale standard, che ovviamente dipenderanno dai parametri θ_1 e θ_2 della distribuzione (v.tab 2.8).

▪ **DISTRIBUZIONE DI GUMBEL**

La distribuzione di Gumbel è una distribuzione asintotica dei massimi di tipo esponenziale (anche detta EV1). Essa è descritta dalle seguenti funzioni:

Funzione di probabilità cumulata F(x)

$$F(x) = e^{-e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}}$$

Funzione di densità di probabilità (pdf)

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}} e^{-e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}}$$

Per la stima dei parametri θ_1 e θ_2 della distribuzione si applicheranno il metodo dei momenti ordinari e degli L-momenti:

- **Metodo dei momenti ordinari**

Utilizzando questo metodo i parametri θ_1 e θ_2 sono stati calcolati attraverso le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \vartheta_1 = \mu(x) - 0.5772 \sigma(x_i) \left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right) = & 140.268 \\ \vartheta_2 = \sigma(x_i) \left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right) = & 220.624 \end{cases}$$

N.B $\mu(x)$ è la media del campione e $\sigma(x)$ è la deviazione standard del campione di dati.

Stimati i parametri con questo primo metodo si procede alla verifica della distribuzione usando la carta probabilistica (v. grafico 2.4). Come ogni carta probabilistica anche per la Gumbel bisogna effettuare una trasformazione di variabile da $x(i)$ a $y(i)$, affinché ϑ_1 diventi un parametro di posizione, e ϑ_2 un parametro di scala.

- La curva di probabilità sarà rappresentata ancora una volta da una retta, nella variabile ridotta, di equazione :

$$y(x_i) = \frac{x-\vartheta_1}{\vartheta_2}$$

- Mentre la curva rappresentativa del campione di dati sarà descritta dalla relazione:

$$y(i) = -\ln(\ln\left(\frac{1}{F}\right)).$$

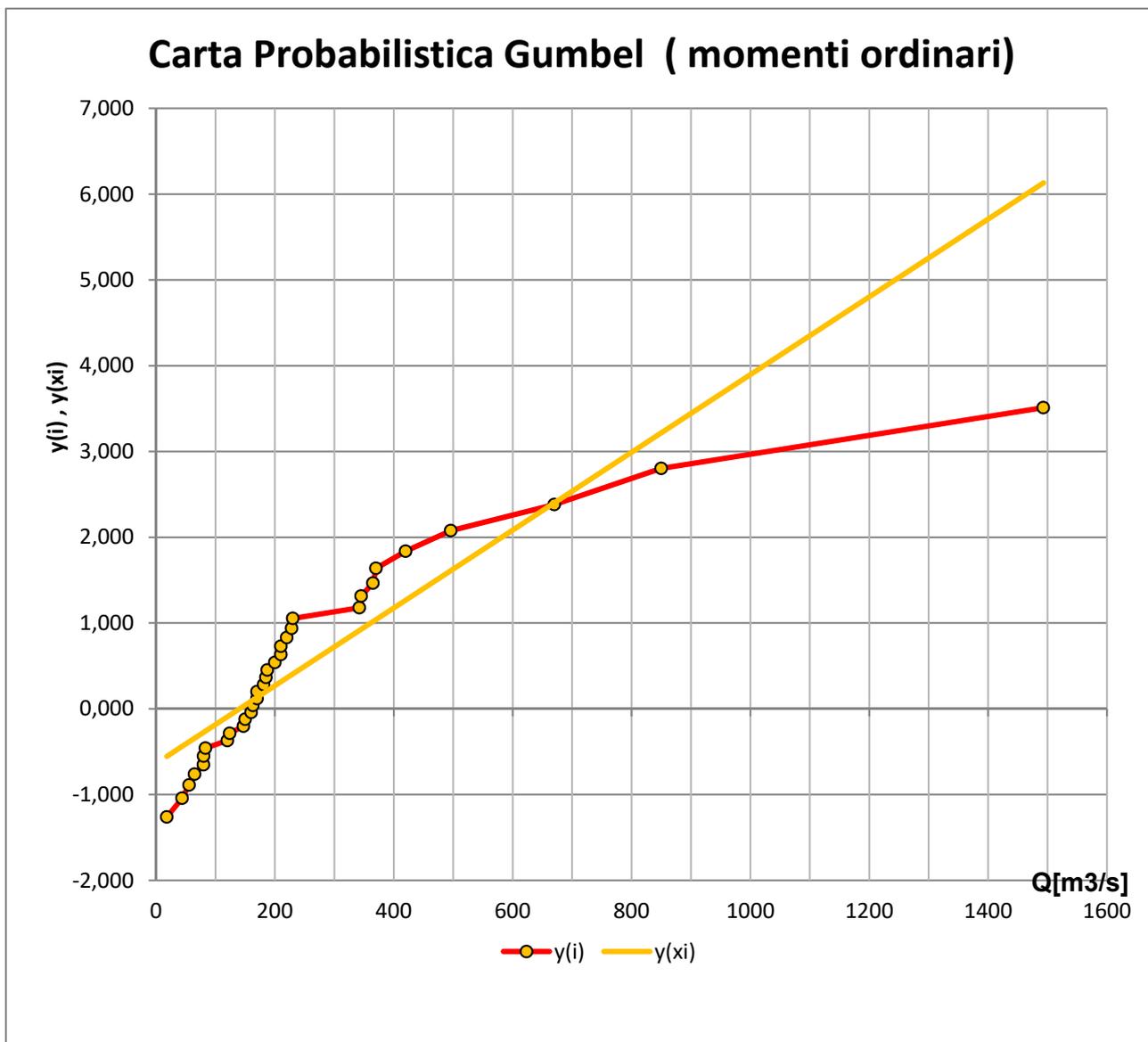


Grafico 2.7

- La curva rappresentativa del campione descritta dalla relazione precedente:

$$y(i) = -\ln \left[\ln \left(\frac{1}{F(i)} \right) \right].$$

N.B Si ricorda che la $F(i)$ è la funzione di frequenza cumulata del campione di dati, ricavata con la Weibull plotting position

Di seguito vengono riportati I valori (v. tab 2.10) delle due curve ricavate per ogni valore della serie di dati e la loro rappresentazione in carta probabilistica (v.grafico2.8).

Gumbel(L -momenti)			
Q (m3/s)	F(i)	y(i)	y(xi)
18,00	0,0294	-1,2603	-0,8179
43,80	0,0588	-1,0414	-0,6737
55,60	0,0882	-0,8870	-0,6077
64,90	0,1176	-0,7608	-0,5558
79,80	0,1471	-0,6507	-0,4725
80,00	0,1765	-0,5508	-0,4714
83,10	0,2059	-0,4577	-0,4540
120,00	0,2353	-0,3694	-0,2478
124,00	0,2647	-0,2845	-0,2255
147,00	0,2941	-0,2019	-0,0969
150,00	0,3235	-0,1209	-0,0801
160,00	0,3529	-0,0406	-0,0242
163,00	0,3824	0,0394	-0,0075
170,00	0,4118	0,1196	0,0316
170,00	0,4412	0,2005	0,0316
181,00	0,4706	0,2827	0,0931
185,00	0,5000	0,3665	0,1155
187,00	0,5294	0,4526	0,1267
200,00	0,5588	0,5414	0,1993
210,00	0,5882	0,6337	0,2552
210,00	0,6176	0,7301	0,2552
220,00	0,6471	0,8317	0,3111
228,00	0,6765	0,9394	0,3558
230,00	0,7059	1,0547	0,3670
342,00	0,7353	1,1793	0,9930
345,00	0,7647	1,3158	1,0097
365,00	0,7941	1,4674	1,1215
370,00	0,8235	1,6391	1,1494
420,00	0,8529	1,8384	1,4289
496,00	0,8824	2,0781	1,8537
670,00	0,9118	2,3819	2,8262
850,00	0,9412	2,8031	3,8322
1493,00	0,9706	3,5115	7,4259

Gumbel(L -momenti)			
Q (m3/s)	F(i)	y(i)	y(xi)
228,00	0,6765	0,9394	0,3558
230,00	0,7059	1,0547	0,3670
342,00	0,7353	1,1793	0,9930
345,00	0,7647	1,3158	1,0097
365,00	0,7941	1,4674	1,1215
370,00	0,8235	1,6391	1,1494
420,00	0,8529	1,8384	1,4289
496,00	0,8824	2,0781	1,8537
670,00	0,9118	2,3819	2,8262
850,00	0,9412	2,8031	3,8322
1493,00	0,9706	3,5115	7,4259

Tab.2.10

Ricaviamo la probabilità di non superamento $F(x) = 1 - \frac{1}{T} = \frac{T-1}{T}$

Successivamente per entrambe le distribuzioni e per entrambi i metodi di stima dei parametri si ricavano i valori di Portata di progetto x_T (v.tab 2.11 e grafico 2.9) mediante l'uso delle seguenti relazioni:

Gumbel : $Xt(F) = \vartheta_1 - \vartheta_2 \ln(\ln(\frac{T}{T-1}))$

Log-Normale: $Xt(F) = \text{INV. LOGNORM}(\frac{T-1}{T}; \vartheta_1; \vartheta_2)$

		Momenti(log-normale)	L-momenti(log-normale)	Momenti(Gumbel)	L-momenti(Gumbel)
T	F(x)=(T-1)/T	Q prog. (m3/s)	Q prog. (m3/s)	Q prog. (m3/s)	Q prog. (m3/s)
50	0,98	1114,523	1099,457	1001,131	862,482
100	0,99	1414,388	1395,241	1155,173	987,408
200	0,995	1759,027	1735,183	1308,653	1111,877

Tab 2.11

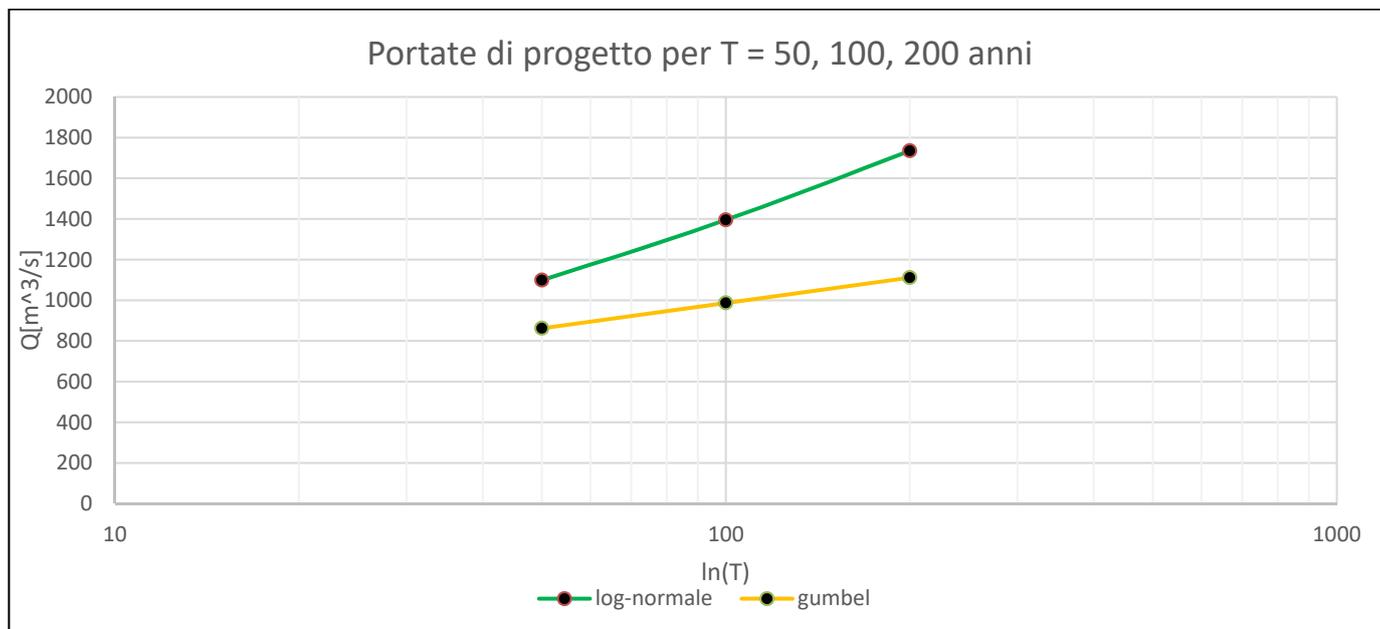


Grafico 2.9

Si riportano di seguito le funzioni della distribuzione GEV:

Funzione di probabilità cumulata

$$F(x) = e^{-e^{-y}}$$

Funzione di densità di probabilità

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2} e^{-(1-\theta_3)y - e^{-y}}$$

Dove la variabile y è data dalla seguente espressione:

$$y = \frac{1}{\theta_3} * \log \left\{ 1 - \theta_3 * \left(\frac{x - \theta_1}{\theta_2} \right) \right\}$$

La stima dei parametri avviene con il metodo degli L- momenti I cui coefficienti (L) sono gli stessi di quelli ricavati nella distribuzione Log-Normale e di Gumbel, e di seguito riportati:

$$L_1 = b_0 = 267.61$$

$$L_2 = 2b_1 - b_0 = 124.02$$

$$L_3 = 6b_2 - 6b_1 + b_0 = 57.876$$

$$L_4 = 20b_3 - 30b_2 + 12b_1 - b_0 = 47.05$$

Per la distribuzione GEV è richiesto il calcolo di altri due parametri:

$$t_3 = \frac{L_3}{L_2} = \mathbf{0.467} \quad c = \frac{2}{3+t_3} - \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \mathbf{-0.054}$$

Le relazioni che permettono di stimare i tre parametri ($\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$) della distribuzione sono:

$$\begin{cases} \vartheta_1 = L_1 - \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} (1 - \Gamma(1 + \vartheta_3)) = \mathbf{139.542} \\ \vartheta_2 = \frac{L_2 \vartheta_3}{(1 - 2^{-\vartheta_3}) \Gamma(1 + \vartheta_3)} = \mathbf{101.120} \\ \vartheta_3 = \mathbf{7.859c + 2.9554c^2 = -0.416} \end{cases}$$

Stimati i parametri della distribuzione si passa a Verificare graficamente l'adattamento al campione della funzione di probabilitistica GEV, usando la carta probabilitistica (ln T ; Q) (vedi grafico 2.10) insieme alle frequenze cumulate F(i) del campione.

Occorre determinare il tempo di ritorno T per ogni valore xi della distribuzione GEV.

Partendo dalla definizione di probabilità di superamento $P(x > x_T)$ della grandezza di progetto stimata. Dalle relazioni seguenti ricaviamo il tempo di ritorno in funzione della funzione di probabilità cumulata F(x_i)

$$F(x) = e^{-e^{-y}} \quad \text{con} \quad y = \frac{1}{\theta_3} * \log \left\{ 1 - \theta_3 * \left(\frac{x - \theta_1}{\theta_2} \right) \right\}$$

$$F(x) = 1 - P$$

$$P = 1 / T$$

ricaviamo
$$T = \frac{1}{1 - F(x)}$$

F(xi) GEV	T	LN(T)	F(i)	T
0,005037	1,005063	0,00505	0,0294	1,030303
0,035744	1,037069	0,036398	0,0588	1,0625
0,062769	1,066973	0,064826	0,0882	1,096774
0,089361	1,09813	0,093609	0,1176	1,133333
0,139467	1,16207	0,150203	0,1471	1,172414
0,140188	1,163044	0,151041	0,1765	1,214286
0,151488	1,178534	0,164271	0,2059	1,259259
0,294288	1,417008	0,348548	0,2353	1,307692
0,309702	1,44865	0,370632	0,2647	1,36
0,39458	1,651745	0,501832	0,2941	1,416667
0,405067	1,680863	0,519307	0,3235	1,478261
0,438914	1,782257	0,577881	0,3529	1,545455
0,448724	1,813973	0,595519	0,3824	1,619048
0,470984	1,890301	0,636736	0,4118	1,7
0,470984	1,890301	0,636736	0,4412	1,789474

2. Confronto tra le distribuzioni Lognormale, Gumbel e GEV

Note le funzioni probabilità cumulate F(x) ricavate nei punti precedenti:

- Distribuzione Lognormale
$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{x \cdot \theta_2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x) - \theta_1}{\theta_2} \right)^2} dx$$
- Distribuzione di Gumbel (EV1)
$$F(x) = e^{-e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}}$$
- Distribuzione GEV
$$F(x) = e^{-e^{-y}}$$
- Frequenza cumulata
$$F(i) = i / n+1$$

Dalla relazione seguente si ricava il tempo di ritorno per ogni osservazione xi di ciascuna distribuzione e della frequenza cumulata:

$$T = \frac{1}{1-F(xi)}$$

Infine si calcola il logaritmo del tempo di ritorno T (vedi tab 2.14) e poi si rappresenta il tutto (v. grafico 2.11) nella carta probabilistica (lnT,Q).

		frequenza cumulata		Log - Normale		Gumbel		GEV	
i	Q(m³/s)	F(i)	T	F(xi)	T	F(xi)	T	F(xi)	T
1	18,00	0,029412	1,030303	0,004009	1,004025	0,103757	1,115769	0,005037	1,005063
2	43,80	0,058824	1,062500	0,051146	1,053903	0,140653	1,163674	0,035744	1,037069
3	55,6	0,088235	1,096774	0,086773	1,095017	0,159410	1,189641	0,062769	1,066973
4	64,90	0,117647	1,133333	0,118219	1,134068	0,174948	1,212044	0,089361	1,098130
5	79,8	0,147059	1,172414	0,171701	1,207293	0,201095	1,251714	0,139467	1,162070
6	80,00	0,176471	1,214286	0,172431	1,208359	0,201456	1,252279	0,140188	1,163044
7	83,10	0,205882	1,259259	0,183767	1,225140	0,207077	1,261157	0,151488	1,178534
8	120,00	0,235294	1,307692	0,315372	1,460647	0,277700	1,384467	0,294288	1,417008
9	124,00	0,264706	1,360000	0,328824	1,489922	0,285679	1,399930	0,309702	1,448650
10	147,00	0,294118	1,416667	0,401881	1,671908	0,332288	1,497651	0,394580	1,651745
11	150	0,323529	1,478261	0,410847	1,697352	0,338431	1,511558	0,405067	1,680863
12	160,00	0,352941	1,545455	0,439781	1,785018	0,358961	1,559967	0,438914	1,782257
13	163,00	0,382353	1,619048	0,448177	1,812175	0,365128	1,575121	0,448724	1,813973
14	170,00	0,411765	1,700000	0,467260	1,877090	0,379519	1,611652	0,470984	1,890301

3. Verifica quantitativa mediante Test statistici

Quest'ultima parte dell'esercitazione consiste nel sottoporre le distribuzioni teoriche (Gumbel, LogNormale, GEV) che hanno superato le verifiche grafiche su carta probabilistica, a test statistici o di adattamento che permettono di valutare se una data legge di probabilità $F(x)$ si adatti bene ad un insieme di n osservazioni. Ricordiamo che un test statistico è un procedimento che consente di decidere, sulla base delle n osservazioni a disposizione, se accettare l'ipotesi H_0 oppure rigettarla di fronte all'ipotesi alternativa H_1 .

Nel nostro caso l'ipotesi H_0 è che $F(x)$ sia la distribuzione di probabilità da cui è stato estratto il campione di dati a disposizione.

L'applicazione di un test si basa su un protocollo:

- 1) Scelta dell'indicatore (statistica test)
- 2) Ricostruzione della probabilità dell'indicatore
- 3) Scelta dell'Intervallo di accettazione di H_0
- 4) Accettazione di H_0 se l'indicatore del campione ricade nell'intervallo di accettazione altrimenti rigetto di H_0 .

Per eseguire un test occorre definire:

- **Livello di significatività del test α** : la probabilità di rigettare un'ipotesi vera (corrisponde a commettere un errore del primo tipo nell'applicazione del test). Il suo complemento $1-\alpha$ è la probabilità di accettare l'ipotesi quando è vera.

N.B In base ad α si costruisce l'intervallo di accettazione: un valore grande $\alpha = 10\%$ comporta un intervallo piccolo e quindi un'alta probabilità di rigettare l'ipotesi mentre un alfa piccolo $\alpha = 1\%$ comporta un intervallo ampio e quindi una bassa probabilità di rigetto.

- **Livello di rischio β** : è la probabilità di accettare un'ipotesi falsa, (corrisponde a commettere un errore del secondo tipo nell'applicazione del test).
- **Potenza del test $1-\beta$** è il complemento a uno del livello di rischio ed indica la probabilità di rigettare l'ipotesi quando questa è falsa!

- **P-value o livello di significatività osservato α_{oss}** : è la probabilità di ottenere un valore della statistica test uguale o maggiore di quello ricavato dal campione.

Ottenere un P-value $> \alpha$ implica che il test è superato !

In questa esercitazione adottando un livello di significatività intermedio $\alpha = 5\%$ (0.05) verranno usati i seguenti test: Test del massimo Valore, Test del Chi quadro, Test di Anderson Darling.

$$x_{max} \rightarrow F(x_{max}) = e^{-e^{-\left(\frac{x_{max}-\theta_1}{\theta_2}\right)}} = 0.9994$$

$$F(x_N)^N = (0.9994)^{33} = 0.98$$

Scegliendo un livello di significatività $\alpha = 0.05$: $F(x_{L,sup}) = 1 - \alpha = 0.95$

Infine si è proceduto ad effettuare il confronto:

$$F_x(x_N)^N = 0.98 > 0.95 = F_x(x_{L,sup}) \rightarrow \text{Test Non superato}$$

$$P - value = [1 - F_x(x_N)^N] = 1 - 0.98 = 0.02 < \alpha = 0.05$$

▪ **Distribuzione Gev**

Analogamente alla Gumbel la distribuzione F(x) della GEV ammette una soluzione analitica, dunque non è stato necessario ricorrere alla variabile standardizzata u.

GEV:
$$F(x) = e^{-e^{-y}} \quad \text{con} \quad y = \frac{1}{\theta_3} * \log \left\{ 1 - \theta_3 * \left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2} \right) \right\}$$

$$x_{max} \rightarrow F(x_{max}) = e^{-e^{-y_{max}}} = 0.9892$$

$$F(x_N)^N = (0.9892)^{33} = 0.6995$$

Scegliendo un livello di significatività $\alpha = 0.05$: $F(x_{L,sup}) = 1 - \alpha = 0.95$

Infine si è proceduto ad effettuare il confronto:

$$F_x(x_N)^N = 0.70 < 0.95 = F_x(x_{L,sup}) \rightarrow \text{Test superato}$$

$$P - value = [1 - F_x(x_N)^N] = 1 - 0.70 = 0.30 > \alpha = 0.05$$

Si riassumono i risultati del test a una coda sulle distribuzioni log- Normale, Gumbel, e GEV nella seguente tabella:

$\alpha =$	0,05	$X_N [m^3/s] =$	1493
	Log-normale	Gumbel	GEV
$F(x_N)$	0,9919	0,9994	0,9892
$F(x_N)^N$	0,7643	0,9805	0,6995
$1-\alpha$	0,95	0,95	0,95
P-value	0.24	0.02	0.30
verifica ?	SI	NO	SI

Tab 2.15

Dove

α = livello di significatività 5% = 0,05

$1-\alpha$ = probabilità di non superamento = 0,95

N = numero di osservazioni

k = numero di classi $k = 2 \cdot N^{0,4}$

s = numero di parametri (θ_1, θ_2)

Gradi di libertà = k-s-1

p_i = intervallo di probabilità, è la probabilità di cadere nella classe i-esima $p_i = \frac{1}{k}$

$N \cdot p_i$ = numero teorico di osservazioni che ricade nell'intervallo i di probabilità cumulata

n_i = numero di osservazioni che effettivamente ricadono nell'intervallo

Per il calcolo degli estremi dell'intervallo è possibile ricorrere al calcolatore EXCEL o a tabelle valide per la distribuzione Chi quadro (di seguito riportate).

EXCEL : $\chi^2_{inf} = INV.CHI.QUAD (1 - \alpha ; k - s - 1) ; \chi^2_{sup.} = INV.CHI.QUAD (1 - \alpha ; k - 1)$

Tabelle : $\chi^2_{inf} = INV.CHI.QUAD (\alpha ; k - s - 1) ; \chi^2_{sup.} = INV.CHI.QUAD (\alpha ; k - 1)$

Valori critici della Distribuzione Chi-Quadrato

g.d.l k-s-1	α								
	0.20	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005	0.0001
1	1.6424	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794	10.8274	12.1153	15.1343
2	3.2189	4.6052	5.9915	7.3778	9.2104	10.5965	13.8150	15.2014	18.4247
3	4.6416	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8381	16.2660	17.7311	21.1040
4	5.9886	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8602	18.4662	19.9977	23.5064
5	7.2893	9.2363	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496	20.5147	22.1057	25.7507
6	8.5581	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5475	22.4575	24.1016	27.8527
7	9.8032	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777	24.3213	26.0179	29.8814
8	11.0301	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9549	26.1239	27.8674	31.8268
9	12.2421	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893	27.8767	29.6669	33.7247
10	13.4420	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1881	29.5879	31.4195	35.5572
11	14.6314	17.2750	19.6752	21.9200	24.7250	26.7569	31.2635	33.1382	37.3647
12	15.8120	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2997	32.9092	34.8211	39.1306
13	16.9848	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8193	34.5274	36.4768	40.8735
14	18.1508	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3194	36.1239	38.1085	42.5752
15	19.3107	22.3071	24.9958	27.4884	30.5780	32.8015	37.6978	39.7173	44.2596
16	20.4651	23.5418	26.2962	28.8453	31.9999	34.2671	39.2518	41.3077	45.9255
17	21.6146	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7184	40.7911	42.8808	47.5591
18	22.7595	25.9894	28.8693	31.5264	34.8052	37.1564	42.3119	44.4337	49.1853
19	23.9004	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5821	43.8194	45.9738	50.7873
20	25.0375	28.4120	31.4104	34.1696	37.5663	39.9969	45.3142	47.4977	52.3832
21	26.1711	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4009	46.7963	49.0096	53.9599
22	27.3015	30.8133	33.9245	36.7807	40.2894	42.7957	48.2676	50.5105	55.5244
23	28.4288	32.0069	35.1725	38.0756	41.6383	44.1814	49.7276	51.9995	57.0668
24	29.5533	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	45.5584	51.1790	53.4776	58.6071
25	30.6752	34.3816	37.6525	40.6465	44.3140	46.9280	52.6187	54.9475	60.1360
26	31.7946	35.5632	38.8851	41.9231	45.6416	48.2898	54.0511	56.4068	61.6666
27	32.9117	36.7412	40.1133	43.1945	46.9628	49.6450	55.4751	57.8556	63.1660
28	34.0266	37.9159	41.3372	44.4608	48.2782	50.9936	56.8918	59.2990	64.6561
29	35.1394	39.0875	42.5569	45.7223	49.5878	52.3355	58.3006	60.7342	66.1524
30	36.2502	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	53.6719	59.7022	62.1600	67.6230
35	41.7780	46.0588	49.8018	53.2033	57.3420	60.2746	66.6192	69.1975	74.9253
40	47.2685	51.8050	55.7585	59.3417	63.6908	66.7660	73.4029	76.0963	82.0551
45	52.7288	57.5053	61.6562	65.4101	69.9569	73.1660	80.0776	82.8734	89.0704
50	58.1638	63.1671	67.5048	71.4202	76.1538	79.4898	86.6603	89.5597	95.9713
55	63.5772	68.7962	73.3115	77.3804	82.2920	85.7491	93.1671	96.1607	102.7735
60	68.9721	74.3970	79.0820	83.2977	88.3794	91.9518	99.6078	102.6971	109.4967
70	79.7147	85.5270	90.5313	95.0231	100.4251	104.2148	112.3167	115.5766	122.7443
80	90.4053	96.5782	101.8795	106.6285	112.3288	116.3209	124.8389	128.2636	135.7728
90	101.0537	107.5650	113.1452	118.1359	124.1162	128.2987	137.2082	140.7804	148.6198
100	111.6667	118.4980	124.3421	129.5613	135.8069	140.1697	149.4488	153.1638	161.3297
150	164.3492	172.5812	179.5806	185.8004	193.2075	198.3599	209.2652	213.6135	223.1209
200	216.6088	226.0210	233.9942	241.0578	249.4452	255.2638	267.5388	272.4220	283.0448