NUMERO: 2166A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Porcu Simone

MATERIA: Fisica I - Appunti + esercizi tratti da Longhi - Prof. Bufalino

La FISICA riesce a spiegare tutto quello che ci circonda e tutti i fenomeni naturali

Obiettivo: · studiare i componenti della materia
· come la materia interagisce

E' una SCIENZA fondamentale: alla base di tutte le altre scienze

Meccanica → moto dei corpi e le sue cause

Termodinamica → fenomeni connessi con lo scambio di calore

Elettromagnetismo → faremo Elettrostatica

La fisica classica si pone l'obiettivo di prevedere il futuro

LAPLACE la definisce che conoscendo vari dati, la fisica è DETERMINISTICA perché si possono prevedere i comportamenti

La rivoluzione del XX secolo
- Relatività di Einstein (è un estensione del caso Galileiano)
- Nell' infinitamente piccolo (fisica quantistica)

$h = 6,626 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$ costante di Plank

$E_{kin} = h\nu$

$E_{e^-} = h\nu - w$

$m_p = 1,673 \cdot 10^{-27}\ Kg$

$q_p = 1,602 \cdot 10^{-19}\ C$

$m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}\ Kg$ $\quad q_n \neq \emptyset$

$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}\ Kg$ $\quad m_e = \frac{1}{1836} m_p$

$q_{e^-} = -q_p$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 282

ERRORE STATISTICO $\mathcal{E}_{stat}$ → dovuto alle piccole variazioni della grandezza da misurare.

ERRORE SISTEMATICO $\mathcal{E}_{sys}$ → Dovuto alla precisione dello strumento utilizzato; si nota misurando con un altro strumento

$$\Delta x = |\mathcal{E}_{stat}| + |\mathcal{E}_{sys}|$$ ERRORE ASSOLUTO

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

valore medio

$$\bar{x} \pm \Delta x$$

ERRORE RELATIVO ⟶ $\mathcal{E}_r = \left|\frac{\Delta x}{\bar{x}}\right|$

1. $\mathcal{E}_{stat} = \frac{x_{MAX} - x_{MIN}}{2}$ → numero piccolo di misure

2. $\mathcal{E}_{stat} = MAX\,|x_{MAX} - x_i|$ → misura con un elevato "safety level"

3. $\mathcal{E}_{stat} = \sigma \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$

varianza

numero elevato di misure

Errori in misure indirette [...]

① $f_1(x,y,t) = axe^{-t} + \frac{b}{y}$

valore medio

$\bar{x} = 2$ $\quad a = 5$

$\bar{y} = 10$ $\quad b = 20$

$\bar{t} = 2$

$$\frac{\partial f_1(x,y,t)}{\partial x} = \underset{\boxed{5}}{a} e^{-\boxed{t}} = 0{,}67 \qquad (t = \boxed{2})$$

$$\frac{\partial f_1(x,y,\cancel{t})}{\partial y} = -\frac{\overset{\boxed{20}}{b}}{\underset{\boxed{100}}{y^2}} = -0{,}2$$

$$\frac{\partial f_1(x,y,t)}{\partial t} = -\underset{\boxed{5}}{a}\,\underset{\boxed{2}}{x}\,e^{-\overset{\boxed{2}}{t}} = -1{,}3$$

$$\Delta f(x,y,t) = |0{,}67|\Delta x - |0{,}2|\Delta y + |1{,}3|\Delta t$$

② $f_2 = \log_e y + e^{xz}$ $\quad (x,y,z)$

$\bar{x} = 1$ $\qquad \Delta f(x,y,z) =$

$\bar{y} = 10$

$\bar{z} = 0$

Sostituiamo i valori $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ nelle derivate parziali

$$0 = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = ze^{xz}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{1}{y}$$

$$1 = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = xe^{xz}$$

$$= |ze^{xz}|\Delta x + \left|\frac{1}{y}\right|\Delta y + |xe^{xz}|\Delta z$$

$=$

① Filo metallico sotto tensione

$V = 5{,}2 \pm 0{,}9\ V$ ed è percorso da corrente $I = 0{,}84 \pm 0{,}01\ A$

$V = IR$ Legge di Ohm $\qquad \Delta R = ?$

$$\varepsilon_{r(V)}\% : \frac{0{,}9}{5{,}2} \cdot 100 = 17{,}307\,\%$$

$$\varepsilon_{r(I)}\% : \frac{0{,}01}{0{,}84} \cdot 100 = 1{,}1904\,\%$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{5{,}2}{0{,}84} = 6{,}19\ \Omega$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta I}{I} = 18{,}4\% \rightarrow \frac{18{,}4}{100} \cdot 6{,}19 = 1{,}14\ \Omega$$

② Lastra metallica molto sottile di lunghezza $L = 3{,}70 \pm 0{,}01$ cm e larghezza $W = 2{,}30 \pm 0{,}01$ cm

Trovare Area + incertezza sulla misura

Area $= b \cdot h = 8{,}51\ cm^2$

Incertezza sulla misura $\rightarrow 100\left(\frac{0{,}01}{2{,}30} + \frac{0{,}01}{3{,}70}\right) = 0{,}70\%$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{y(x-\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

$$\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{[y]}{[x]} \qquad v = \frac{dx}{dt} \qquad \frac{[x]}{[t]} = [v] = m/s$$

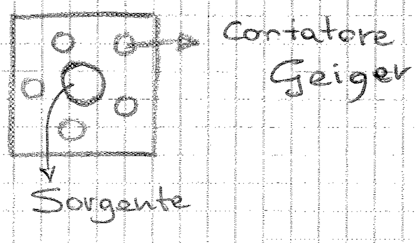
$$\int f(x) \cdot dy$$

Trovare la velocità V di una massa m con velocità iniziale V_0 e scorre con una accelerazione a lungo una guida a forma di elica di raggio r

1. $V = V_0 + e^{-at}$
2. $V = V_0 \left(1 + e^{-at}\right)$
3. $V = (ra)^{1/2}$
4. $V = V_0 \sin\left(\frac{V_0 t}{r}\right)$

MISURA Esperienza n°1
Sorgente radioattiva

^{60}Co, ^{133}Cs, ^{152}Eu



$[X_k, X_{k+1}]$

$$\sum_{\Delta X_m} X_m = f_k \underbrace{\frac{\sum_{\Delta X_m} X_m}{f_k}} = f_k \overline{X}_k$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{N} \sum_{\Delta X} X_m\right) \cdot \overline{X}_m}$$

$\overline{X}_m \cong X_m$ Limite inferiore dell' intervallo

Si verifica per ΔX tendente a 0 e N tendente a ∞

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M} f_k \overline{X}_k =$$

$$\cong \underbrace{\sum_{k=0}^{M} \frac{f_k}{N}}_{1} \overline{X}_k$$

$1 \Rightarrow \overline{X} = \overline{X}_k$

1^ Proprieta' della distribuzione di frequenza

Dall' analisi (II) $\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

LEMMA

Vale $\int_{X_{min}}^{X_{max}} \frac{dN}{dx} dx = 1$ [CROSS-CHECK dopo la creazione dell' istogramma]

$X_{max} = +\infty$
$X_{min} = -\infty$

Cambio variabile:

$z = \frac{x-a}{b}$ $\quad x = zb + a$

$dz = \frac{dx}{b}$

Sostituiamo la variabile x con z

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{\frac{-(x-a)^2}{b^2}} dx \rightarrow 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-z^2} b\, dz = \rightarrow$$

$$\rightarrow = Ab \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = Ab\sqrt{\pi} \Rightarrow A = \frac{1}{b\sqrt{\pi}}$$

2^ proprieta' $\Rightarrow$ valore medio di X distribuito secondo una gaussia[na]

$$\overline{X} = \int_{X_{min}}^{X_{max}} \frac{1}{N} \underbrace{\frac{dN}{dx}}_{\text{sostituiamo la gaussiana}} x\, dx \xrightarrow{\text{cambio variabile}} \overline{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{\frac{-(x-a)^2}{b^2}} x\, dx \rightarrow$$

[N e' gia' incluso in A, quindi sostituendo si ha gia' la normalizzazione, tradotto: $A = N \cdot K$]

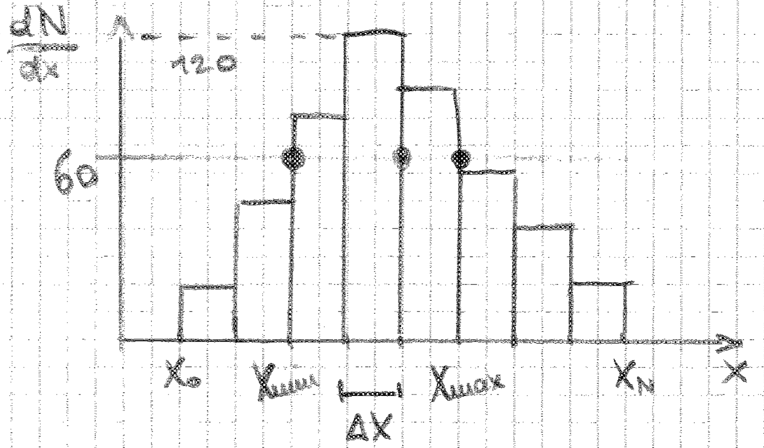
$$\rightarrow \overline{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-z^2} (bz + a)\, b\, dz =$$

$$= Ab\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} bz\, dz + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} a\, dz\right] \rightarrow \overline{X} = abA\sqrt{\pi} + \frac{Ab^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} d[z^2]$$

$$\overline{x} = abA\sqrt{\pi} + \underbrace{\frac{Ab^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz^2}_{\emptyset}$$

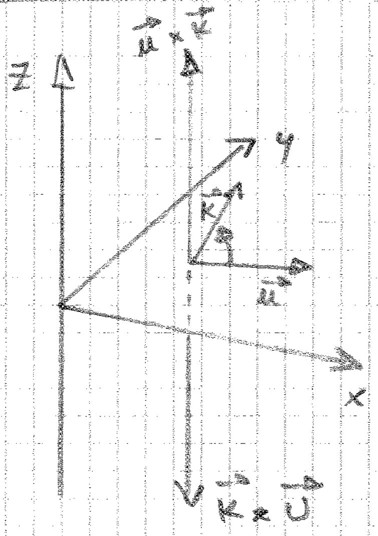
$$\overline{x} = a\cancel{b} \frac{1}{\cancel{b}\cancel{\sqrt{\pi}}} \cdot \cancel{\sqrt{\pi}} \rightarrow \overline{x} = a$$

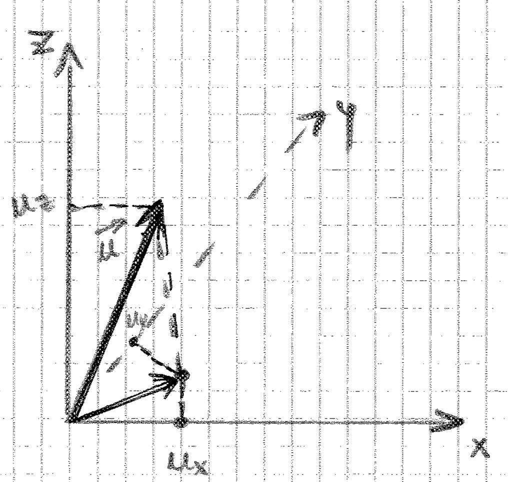
Full Width Half Maximum (FWHM)



$$X_{\pm} = \bar{X} \pm \sqrt{2\ln 2}\,\sigma$$

$$X_+ - X_- = 2\sqrt{2\ln 2}\,\sigma \rightarrow \text{FWHM}$$





$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{i}\,\hat{k} = 0$$

$$\hat{i}\times\hat{j} \quad \hat{j}\times\hat{k} \quad \hat{i}\times\hat{k} = \vec{1}$$

$$\hat{i}\times\hat{j} \quad \hat{j}\times\hat{j} \quad \hat{k}\wedge\hat{k} = \vec{0}$$

luca.dallasta@polito.it

Esercizi:

I = # protoni in 1 s

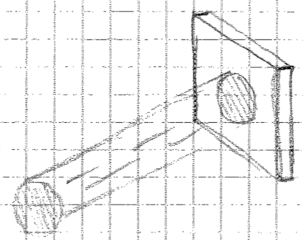
$I = I_0 e^{-\sigma \rho x}$

I_0 = # protoni generati in 1 s

σ = sezione d'urto (superficie)

ρ = # atomi per unità volume

x = spessore del bersaglio



$$e^{x} = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2}}_{[1]} \qquad [x] = [1]$$

$$[I] = [I_0][e^{-\sigma \rho x}]$$

$$[I] = [I_0] = \frac{[1]}{[T]} = [T]^{-1}$$

[fare sempre il controllo dimensionale]

$$[\sigma \rho x] = [\sigma][\rho][x]$$

$$= [L]^2 \cdot \frac{[1]}{[L]^3} \cdot [L] = [1]$$

② $f(x, y, z)$ $\qquad \Delta f(x, y, z)$?

ⓐ $f(x, y, z) = x^2 + \log y + 3z$

ⓑ $f(x, y, z) = a \log(x) + \frac{b}{y} + \cos(z)$

ⓐ $$\Delta f(x,y,z) = \left| \frac{df(x,y,z)}{dx} \right| \Delta x + \left| \frac{df(x,y,z)}{dy} \right| \Delta y + \left| \frac{df(x,y,z)}{dz} \right| \Delta z$$

$$= \boxed{2x\, \Delta x + \frac{1}{y} \Delta y + 3 \Delta z}$$

ⓑ $$\Delta f(x,y,z) = \boxed{\frac{a}{x} \Delta x + \frac{b}{y^2} \Delta y + \sin z\, \Delta z}$$

$$M_s(G, R, M_T) = M_s(G, R)$$

$$= \frac{v^2 R}{G} = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 \cdot \frac{R}{G}$$

$$T = 365\ d \qquad \Delta T = 0{,}25\ d$$

$$= (365 \cdot 24 \cdot 3600)\ s$$

$$M_s = \frac{4\pi^2 R^3}{G\,T^2} = 1{,}99132 \cdot 10^{30}\ Kg$$

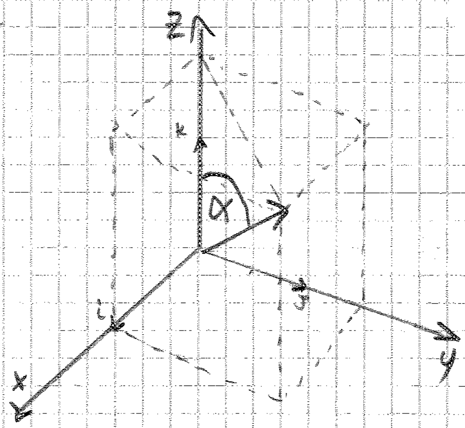
$$\Delta M_s = 4\pi^2 \left[\frac{3R^2}{GT^2}\Delta R + \frac{R^3}{G^2T^2}\Delta G + \frac{2R^3}{GT^3}\Delta T\right]$$

$$\Delta M_s = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}\left[\frac{3\Delta R}{R} + \frac{\Delta G}{G} + \frac{2\Delta T}{T}\right]$$

$$\frac{\Delta M_s}{M_s} = \left[\frac{3\Delta R}{R} + \frac{\Delta G}{G} + \frac{\Delta T}{T}\right] \simeq 0{,}0014 \quad \text{[errore relativo]}$$

vi è un errore sistematico, dovuto allo strumento di misura, in particolare alla approssimazione e alla LEGGE FISICA USATA.

(5) $V_x = 2m$, $V_y = 3m$, $V_z = 5m$



$$\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$$

$$|\vec{V}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

$$= \boxed{6{,}16\ m}$$

$$V_z = V\cos\alpha$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{V_z}{V}\right)$$

CINEMATICA

Permette di avere una descrizione geometrica del moto del corpo

Facendo uso di 3 fattori:

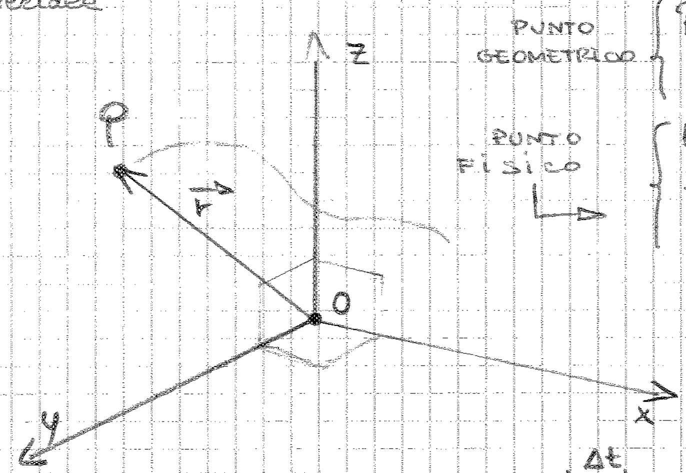
Posizione dell'oggetto di cui vogliamo studiare il moto

Velocita'

Accelerazione

DINAMICA ⇒ cinematica + cause del moto

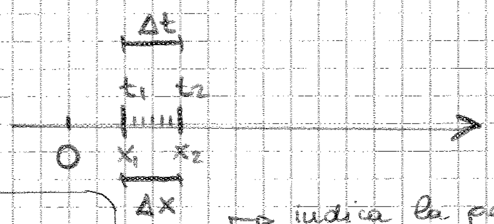
Punto materiale = particella



PUNTO GEOMETRICO $\begin{cases} P = (x, y, z) \\ \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \end{cases}$

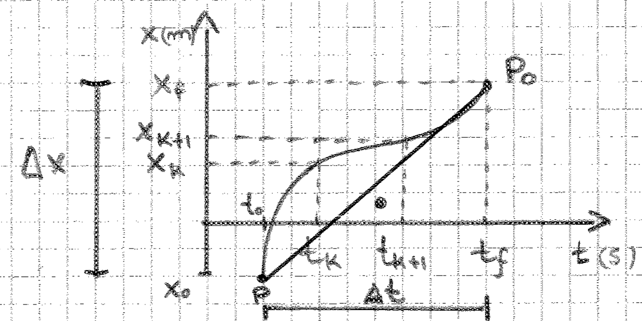
PUNTO FISICO ⟶ $\begin{cases} \text{ha coordinate in funzione del tempo!} \\ \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \end{cases}$

Moto rettilineo



$t_2 > t_1$

Diagramma Orario



↳ indica la pendenza di PP_0

Velocita' Media $V_m = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

$$\Delta x \begin{bmatrix} \Delta x_1 \to \Delta t_1 \\ \Delta x_2 \to \Delta t_2 \\ \vdots \\ \Delta x_m \to \Delta t_m \end{bmatrix} \Delta t$$

Diverso Δx e Δt in m intervalli infinitesimi

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \text{velocita' istantanea} \to V = \frac{dx}{dt}$$

Conosciamo la dipendenza da x di $a(x)$ e $V(x)$

$x \downarrow x(t)$ Dipendenza temporale delle coordinate

$$a(x) = \frac{dv[x(t)]}{dt} = \frac{dv}{dx}\underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\right)}_{v} \longrightarrow a\,dx = v\,dv \quad (*)$$

supponiamo all'istante iniziale $t_0 \Rightarrow x_0$

(*) Integro :

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

Moto rettilineo uniforme $\rightarrow a = \text{costante}$

$$a\int_{x_0}^{x} dx = a(x - x_0) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

Sappiamo che

(1) $\quad x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$

(2) $\quad v(t) = v_0 + a(t - t_0)$

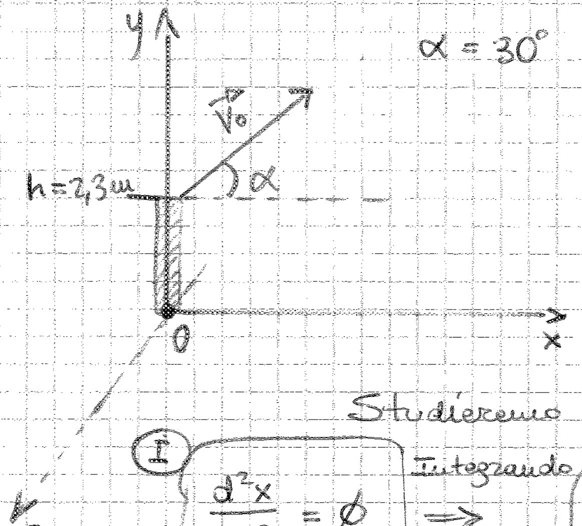
Sostituiamo (2) in (1)

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]\,dt \Rightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$\Rightarrow t_0 = 0 \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Lancio della palla di un giocatore a un suo compagno a $d = 15\,m$

Il giocatore ha i piedi sull'origine degli assi cartesiani



$\alpha = 30°$

Durante il lancio $g = 9{,}8\ m/sec^2$

$\vec{a} = -g\hat{j}$

modulo velocità iniziale: $V_0 = 8\ m/s$

Studieremo il moto del pallone:

(I)
$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \xrightarrow{\text{Integrando}} \frac{dx}{dt} = C_1 \Longrightarrow x(t) = C_1 t + C_4$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \xrightarrow{\text{Integrando}} \frac{dy}{dt} = -gt + C_2 \qquad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_2 t + C_5$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \xrightarrow{\text{Integrando}} \frac{dz}{dt} = C_3 \qquad z(t) = C_3 t + C_6$$

(II) (III)

Applichiamo le condizioni iniziali per trovare le 6 costanti

(II) con $t = 0$

$$\frac{dx(t=0)}{dt} = C_1 = V_0 \cos\alpha$$

$$\frac{dy(t=0)}{dt} = C_2 = V_0 \sin\alpha$$

$$\frac{dz(t=0)}{dt} = C_3 = 0$$

Consideriamo

(III)
$$x(t=0) = C_4 = 0$$
$$y(t=0) = C_5 = h = 2{,}3\,m$$
$$z(t=0) = C_6 = 0$$

$x(t) = V_0 \cos\alpha\, t$

$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\alpha\, t + h$

$z(t) = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 282

2^ proprieta'

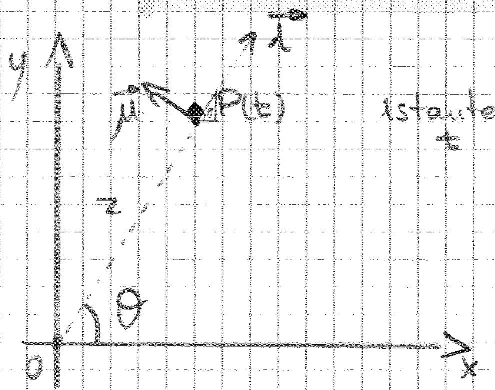
Il modulo della velocita' di un punto materiale e' uguale

$$\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

$$\frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \left|\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| = |\vec{v}|$$

$\Delta t \to 0$ — al limite $\Delta t \to 0$

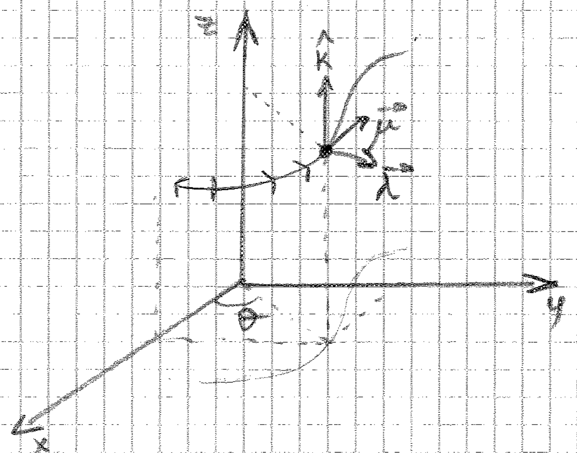
COORDINATE CILINDRICHE



- r (scalare)
- θ (teta)
- versore $\vec{\lambda}$ (lambda)
- versore $\vec{\mu}$ (mu)

dipendono dal tempo

θ e' positivo se l'angolo θ che si forma e' in senso antiorario



$\vec{r}(t) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} =$

scrivendo in coordinate cilindriche:

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$\vec{r}(t) = r\vec{\lambda} + z\vec{k}$ dove $|\lambda|(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j})$

Accelerazione in coordinate cilindriche

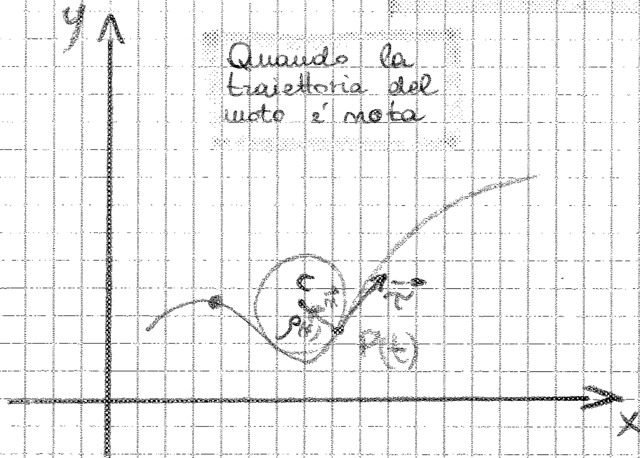
$$(*)\quad \ddot{\vec{r}} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \ddot{r}\vec{\lambda} + \dot{r}\dot{\vec{\lambda}} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{\mu} + r\ddot{\theta}\vec{\mu} + r\dot{\theta}\dot{\vec{\mu}} + \ddot{z}\hat{k}$$

sostituiamo in (*) $\dot{\vec{\lambda}}$ e $\dot{\vec{\mu}}$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{\lambda} + \cancel{r\dot{\theta}\vec{\mu}} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{\mu} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{\mu} + r\ddot{\theta}\vec{\mu} - r\dot{\theta}^2\vec{\lambda} + \ddot{z}\hat{k}$$

$$= \vec{\lambda}\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + \vec{\mu}\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) + \ddot{z}\hat{k}$$

COORDINATE INTRINSECHE PLANARI



tutte le coordinate dipendono dal tempo

$s(t)$ (è il Δx)

$\rho(t) \to$ CERCHIO OSCULATORE (raggio)

tangente alla traiettoria nel punto P

$\vec{\tau}(t)$ (tau)

$\vec{n}(t)$ è positivo in base alla concavità della circonferenza di ρ

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t)\,\vec{\tau}(t)$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{s}(t)\,\vec{\tau}(t) + \dot{s}(t)\,\dot{\vec{\tau}}(t)$$

Dimostriamo che la derivata di un versore è $\perp$ al versore

$$\vec{n}\cdot\vec{n} = 1$$

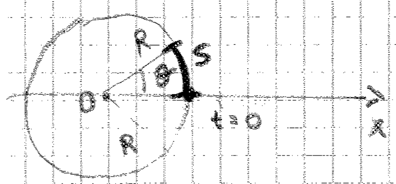
$$\emptyset = \frac{d(\vec{n}\cdot\vec{n})}{dt} = \frac{d\vec{n}}{dt}\vec{n} + \vec{n}\frac{d\vec{n}}{dt} \to 2\vec{n}\frac{d\vec{n}}{dt} \Rightarrow \vec{n}\perp\frac{d\vec{n}}{dt}$$

[derivate]

[abbiamo dimostrato che la derivata di $\vec{\tau}$ ha la stessa direzione di $\vec{n}$]

COORDINATE CILINDRICHE

Automobile in moto su una pista circolare
La pista ha un raggio $R = 2$ Km.
Il tachimetro segna una velocità costante V_0
dopo l'istante iniziale $t = 0$ s
Utilizzando un sistema di riferimento in coordinate cilindriche determinare dopo un tempo $t_1 = 1$ min



$r(t) = R$

$\Longrightarrow \quad \dot r(t) = \ddot r(t) = 0$

Da considerazioni geometriche

$\underbrace{s}_{} = R\theta$

arco di circonferenza che sottende l'angolo θ

$V_0 = \dot s = R\dot\theta$ ⓝ [tilde]

$\dot\theta = \dfrac{V_0}{R}$ $\qquad \dot\theta = \dfrac{d\theta}{dt}$

$d\theta = \dot\theta dt$ ⊛

Integro ⊛:

$\int d\theta = \int \dot\theta\, dt \rightarrow$

$\rightarrow \int d\theta = \int \dfrac{V_0}{R} dt \rightarrow$

$\rightarrow \dot\theta = \dfrac{V_0}{R} t + C_1$ ①

Consideriamo l'eq ① e le condizioni iniziali

$V_0 = cost \qquad \dot\theta = cost \Longrightarrow \ddot\theta = 0$

$t = 0 \qquad \theta = 0$

$\int d\theta = \theta \qquad \theta(0) = C_1 = 0$

$a(t) = (\ddot r - r\dot\theta^2)\vec\lambda + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\vec\mu$

$\ddot r = 0 \rightarrow r(t) = R \leftarrow \dot r = 0$; $\ddot\theta = 0$ $(V_0 = cost)$

$\vec a = -r\dot\theta^2\vec\lambda$

Considerando ⓝ

$|\vec a| = R\dfrac{V_0^2}{R^2} = \dfrac{V_0^2}{R}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 282

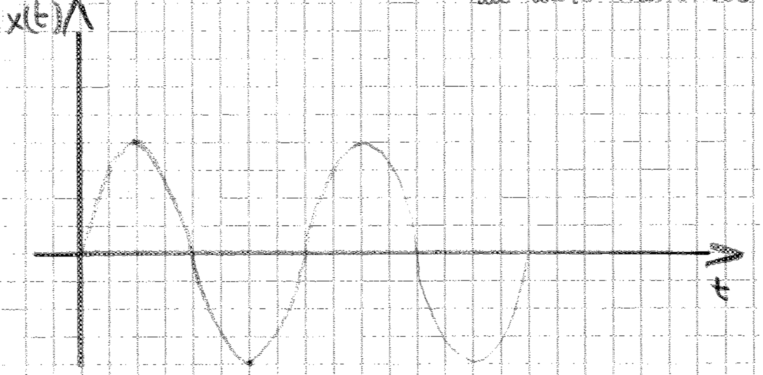
Moto Armonico semplice

$\Rightarrow$ Moto vario $\Rightarrow$ $|v|$ non è costante nel tempo

Legge oraria di un moto armonico

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

Diagramma orario di un moto armonico



- A ampiezza del moto
- $(\omega t + \phi)$ fase del moto
- ϕ fase iniziale (fi)
- ω pulsazione (omega)

sin funzione periodica

$\Rightarrow$ moto è periodico

- Periodo T di un moto armonico è il tempo impiegato dal punto materiale a passare nella stessa posizione con la stessa velocità

Ricaviamo il periodo T

$$t' - t = T$$
$$x(t') = x(t)$$

Fase del moto in t' differisce dalla fase in t' di 2π

$$\omega t' + \cancel{\phi} = \omega t + \cancel{\phi} + 2\pi \Rightarrow \omega(t' - t) = 2\pi$$

ma sappiamo che $T = (t' - t)$, quindi: $\omega T = 2\pi$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$f = \nu = \frac{1}{T} \rightarrow [\nu] = [s]^{-1}$$

Calcoliamo velocità e accelerazione

$$V(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{dV(t)}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$

l'accelerazione è sfasata rispetto alla posizione

MAX posizione = MIN accelerazione (e viceversa)

$w = 2m$

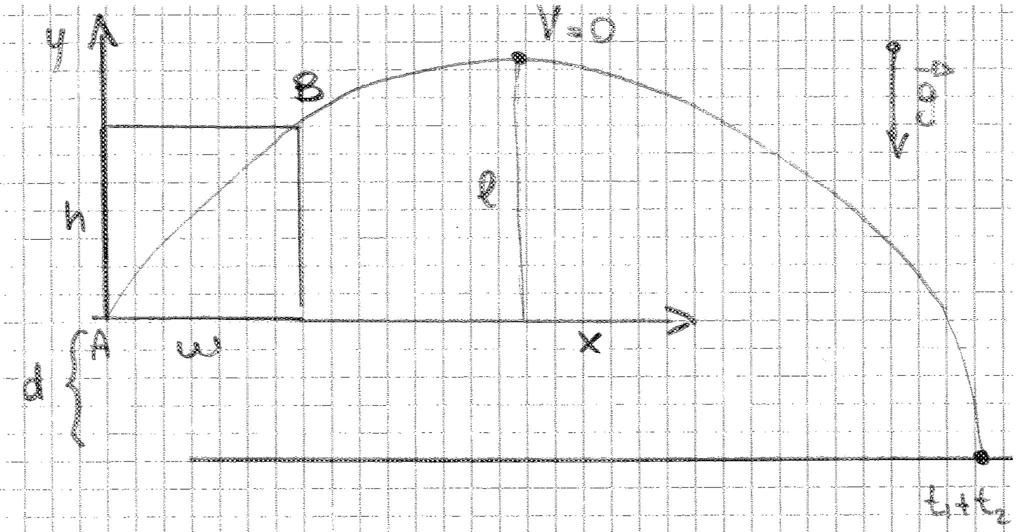
$h = 2m$

$t_1 = 0,4\ s$

ⓐ V_{Bx}, V_{By}

ⓑ t^*, ℓ

ⓒ $t_2 = 2s$



$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0 \longrightarrow \frac{dx(t)}{dt} = C_1 \longrightarrow x(t) = C_1 t + C_4$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -g \longrightarrow \frac{dy(t)}{dt} = -gt + C_2 \longrightarrow y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_2 t + C_5$$

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = 0 \qquad \frac{dz(t)}{dt} = C_3 \longrightarrow z(t) = C_3 t + C_6 = 0$$

$A(0,0,0)$

$B(w,h,0)$

$x(0) = C_4 = 0 \qquad x(t_1) = C_1 t_1 = w \rightarrow C_1 = \frac{w}{t_1} = 5\ m/s$

$y(0) = C_5 = 0 \qquad y(t_1) = -\frac{1}{2}g t_1^2 + C_2 t_1 = h \xrightarrow{[\dots]} C_2 = 0,96\ m/s$

$z(0) = C_6 = 0 \qquad z(t_1) = C_3 t_1 = 0$

$$\vec{V}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{\jmath} + \cancel{\frac{dz(t)}{dt}}\hat{k} =$$

$$= C_1\hat{\imath} + \underbrace{(-gt + C_2)}_{3,04\ m/s}\hat{\jmath}$$

$$V_y(t) = -gt + C_2 = 0 \implies t^* = \frac{C_2}{g} = 0,71\ s$$

$$x(t^*) = C_1 t^* = 5 \cdot 0,71 = 3,55\ m$$

$$y(t_1+t_2) = -d \longrightarrow +\frac{1}{2}g(t_1+t_2)^2 - C_2(t_2-t_1) = +d$$

$$d = 11,52\ m$$

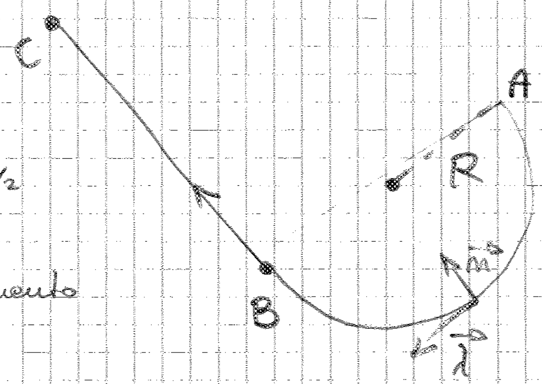
ES. 4

$R = 20\,m$

$BC = 1\,km = \ell$

$V(t) = b t^{3/2}$

$b = 1$? $\quad [b] = [L][T]^{-5/2}$



Usiamo un sistema di riferimento intrinseco, ci conviene!

$$BC: \vec{a} = a_\tau \vec{\tau} = \frac{dV(t)}{dt}\vec{\tau}$$

$$= \frac{3}{2} b t^{1/2} \vec{\tau}$$

accelerazione monotona crescente

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_m \vec{m} = \left(\frac{3}{2} b t^{1/2}\right)\vec{\tau} + \frac{b^2 t^3}{R}\vec{m}$$

$$s(t) = \frac{2}{5} b t^{5/2} + \underbrace{C}_{=0}$$

(perché considero l'istante iniziale)

$$S(t_B) = \pi R$$

$$S(t_C) = \pi R + \ell$$

Quindi:

nel punto B) $\pi R = \frac{2}{5} b t_B^{5/2} \Rightarrow t_B = \left(\frac{5\pi R}{2b}\right)^{2/5}$

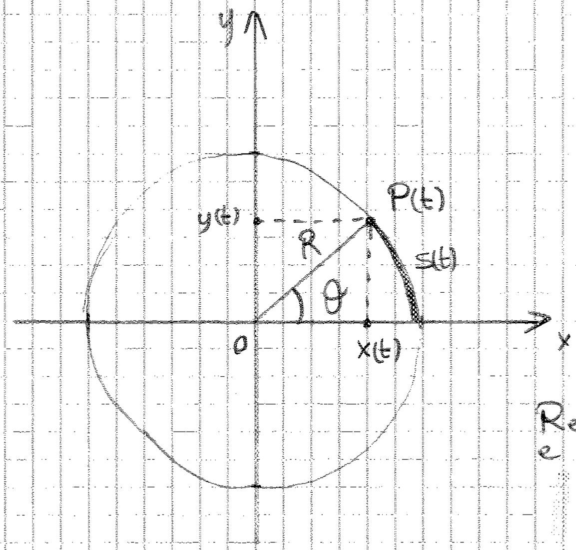
nel punto C) $\pi R + \ell = \frac{2}{5} b t_C^{5/2} \Rightarrow t_C = \left(\frac{5(\pi R + \ell)}{2b}\right)^{2/5}$

$$a_B = \sqrt{\frac{9}{4} b^2 t_B + \frac{b^4 t_B^6}{R^2}}$$

$$a_C = \frac{3}{2} b t_C^{1/2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 282

MOTO CIRCOLARE



Coordinate POLARI

Sono delle coordinate cilindriche senza dipendenza dalla coordinata z.

$r(t) = R = \text{costante}$ (I)

$s(t) = \theta(t)\, R$ (II)

Relazione tra coordinate cartesiane e coordinate polari

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= R\cos\theta(t) \\ y(t) &= R\sin\theta(t) \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

Velocita' angolare del punto materiale

$$\omega = \frac{d\,\theta(t)}{dt} \rightarrow \text{Dalla (II)}: \rightarrow \theta(t) = \frac{s(t)}{R} \rightarrow \omega = \frac{d\,s(t)}{dt}\cdot\frac{1}{R}$$

$$\boxed{\omega = \frac{v}{R}}$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

- $|v|$ e $|\omega|$ sono costanti nel tempo
- NO accelerazione tangenziale
- Ricordiamo l' accelerazione in coordinate cilindriche (ma polari)

$$(*)\ \ddot{r}(t) = \left(\cancel{\ddot{r}(t)} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{\lambda}(t) + \left(\cancel{2\dot{r}\dot{\theta}} + \cancel{r\ddot{\theta}}\right)\vec{\mu}(t)$$

Per la (I): $r(t) = \text{cost} \rightarrow \dot{r}(t) = \ddot{r}(t) = 0$

$v = \text{cost} \quad \dot{\theta}(t) = \text{cost} \Rightarrow \ddot{\theta}(t) = 0$

Quindi (*) diventa:

$$|\ddot{r}(t)| = |\vec{a}| = r\dot{\theta}^2 = r\omega^2$$

$$\omega = \frac{v}{R} \Longrightarrow \boxed{|\vec{a}| = \frac{r v^2}{r^2} = \frac{v^2}{r}}$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$ (a) (IV)

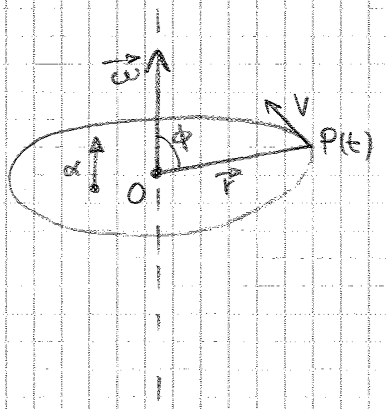
$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ $\quad d\omega = \alpha\, dt$ $\quad \rightarrow$ Integrando $\rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha\, dt = \alpha(t-t$

$\omega(t) - \omega_0 = \alpha t$ $\quad t_0 = 0 \rightarrow$ (a) (IV)

siccome $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$, integrando la (IV) trovo $\theta(t)$

$\theta(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 + C$

$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$



$\vec V = \vec\omega \times \vec r$

(derivate parziali)

$|\vec V| = |\vec\omega||\vec r| \sin\phi$

ϕ angolo tra $\vec\omega$ e $\vec r$

$\vec a = \frac{d\vec V}{dt} = \frac{d(\vec\omega \times \vec r)}{dt} = \left[\frac{d\vec\omega}{dt}\vec r + \frac{d\vec r}{dt}\vec\omega\right]$

$= \underbrace{\vec\alpha \times \vec r}_{\text{accelerazione tangenziale}} + \underbrace{\vec V \times \vec\omega}_{\text{accelerazione centripeta}}$

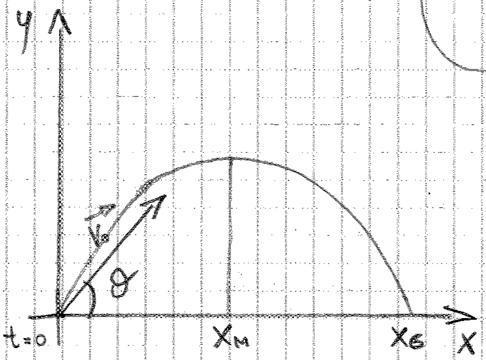
MOTO PARABOLICO

$\vec a = -g\hat j$

$\vec V = \vec V_x \hat i + \vec V_y \hat j =$

$= V_0 \cos\theta\, \hat i + V_0 \sin\theta\, \hat j$

$\vec V_0$ velocita' all'istante t_0 in $(0,0)$



$\vec V(t) = \vec V_0 + \int_0^t a(t)\, dt = \vec V_0 - g t \hat j$

$\vec V(t) = \underbrace{V_0 \cos\theta}_{y_x(t)}\, \hat i + \underbrace{(V_0 \sin\theta - gt)}_{x_y(t)}\, \hat j$

Integrando la legge oraria lungo i due assi x, y:

$x(t) = V_0 \cos\theta\, t$

$y(t) = V_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$

DINAMICA

La dinamica studia il moto dei corpi in relazione alle cause

Servono:

- Le cause del moto
- I parametri che intervengono
- Le eq. del moto

FORZA

→ Per descriverla usiamo il METODO STATICO: usiamo un dinamometro

E' una grandezza fisica VETTORIALE

Esistono 4 forze fondamentali.

PRINCIPI DI NEWTON:

IN REALTA': la somma vettoriale e' nulla

1° (Principio di Inerzia): se un corpo non e' soggetto a forze e non subisce cambiamenti di velocità se era in quiete rimane in quiete e se si muoveva continuerà di moto rettilineo uniforme.

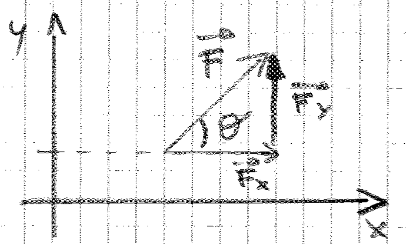
Non e' sempre valido

2° Principio: se un corpo di massa m si muove con una accelerazione $\vec{a}$ in un sistema di riferimento inerziale sarà soggetto a una forza:

$$\vec{F}_T = m \cdot \vec{a}$$

"massa inerziale"

$$\vec{F}_T = F_T^x \hat{i} + F_T^y \hat{j} + F_T^z \hat{k} = m\vec{a}_x\hat{i} + m\vec{a}_y\hat{j} + m\vec{a}_z\hat{k}$$



E' una grandezza derivata:

$$[F] = [M][L][T]^{-2} = \text{Newton}$$

3° Principio di azione e reazione: se un corpo esercita una forza su un secondo corpo, quest'ultimo esercita sul primo una forza con la stessa intensità e opposta (si usa un sistema di riferimento INERZIALE)

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \vec{a}_2 = -\left(m_1/m_2\right)\vec{a}_1$$

FORZA VISCOSA

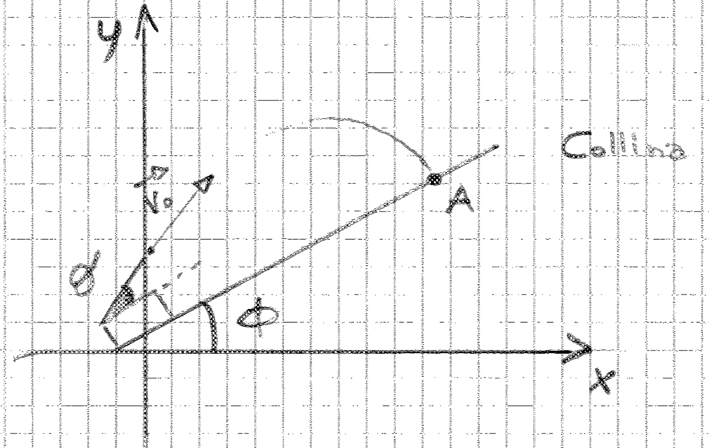
$$\vec{F}_v = -\beta \cdot \vec{v}$$

con $\beta = \boxed{\gamma}\,\eta \rightarrow$ [dip. dal fluido e temperatura]

$\gamma \rightarrow$ [dip. dalla forma del corpo]

FORZA DI LORENTZ

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$



$\phi = 20°$

$\theta = 25°$

$|\vec{V_0}| = 100\ m/s$

Trovare d tra la pistola e il punto sulla collina (A) in cui la pallina tocca terra.

Considériamo $\alpha = \phi + \theta = 45°$

Velocità

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = V_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(0) = V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

Istante iniziale $t = 0$:

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ y(t=0) = 0 \end{cases}$$

Accelerazione

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \end{cases} \quad (I)$$

Integriamo: (I)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = C_1 \\ \dot{y}(t) = -gt + C_2 \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} \dot{x}(0) = V_0 \cos\alpha = C_1 \\ \dot{y}(0) = V_0 \sin\alpha = \end{cases} \quad (II)$$

Integriamo: (II)

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_4 \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + C_2 t + C_5 \end{cases} \quad (III)$$

Integriamo: (III)

$$\begin{cases} x(0) = C_4 \\ y(0) = C_5 \end{cases}$$

3 eq. differenziali

2° Principio in forma differenziale

Dalla cinematica possiamo conoscere $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

consideriamo in questo caso $m = cost$ poiché si ha un punto materiale

Moto in un piano (x, z)

$$\vec{F} = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + m\frac{d^2z(t)}{dt^2}$$

conoscendo la legge oraria del moto

$$\vec{F} = \frac{m\,d^2x(t)}{dt^2}\hat{i} + \frac{m\,d^2z(t)}{dt^2}\hat{k}$$

$$F_x\hat{i} + F\hat{k}$$

Quantità di moto o Impulso di un punto materiale

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

2 PROPRIETA':

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = I_{(\Sigma F_i)}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} F\,dt + \int_{t_1}^{t_2} F\,dt \ldots = \int_{t_0}^{t_2} F\,dt$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\vec{F} = m \cdot a = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (*)$$

$$\vec{F}\,dt = d\vec{p} \quad (1)$$

Si può definire l' IMPULSO DELLA FORZA $(\vec{J})$

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F}\,dt$$

istante iniziale $t_0 = 0 \rightarrow p_0$

$t \rightarrow p$

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F}\,dt = \int_{p_0}^{p} d\vec{p} = p - p_0 = \Delta P = \vec{J}$$

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \Delta p = 0 \Rightarrow p = costante \Rightarrow$$ Conservazione della quantità di moto del punto materiale

Dimensione e unità di misura dell' impulso

$$[P] = [M][L][T]^{-1} = N_s$$

Teorema dell' IMPULSO

L' impulso di una forza applicata a un punto materiale provoca la variazione della quantità di moto

$$J = m(V - V_0) = m\Delta V$$

(oppure) $I_1 = \cancel{I}\,I_1 - I_0$

Supponiamo il caso più realistico in cui abbiamo attriti

attrito cinetico $\rightarrow \mu_d$

attrito statico $\rightarrow \mu_s$

Chiamiamo l'attrito statico F_s

Il corpo (non) si muove se

$$mg \sin\theta \leq F_s \quad (\sim)$$

$$\cancel{mg} \sin\theta \leq \mu_s \cancel{mg} \cos\theta \leftarrow\leftarrow F_s = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta$$

$$\mu_s \geq tg\,\theta \rightarrow [\text{quantità adimensionale}]$$

$\hookrightarrow$ ci dice se il corpo si muove o meno!

$$\left.\begin{array}{l} F_d = -\mu_d N \\ F_s = \mu_s N \end{array}\right]$$

[abbiamo definito l'attrito dinamico in funzione dell'attrito statico]

$$\vec{F} = m\ddot{x} = mg\sin\theta = F_s - F_d$$

$$ma = mg\sin\theta - \mu_d mg\cos\theta$$

$$a = \underbrace{g\,(\sin\theta}_{\text{contributo della forza peso}} \underbrace{-\mu_d\cos\theta)}_{\text{contributo opposto}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 282

Dal moto circolare sappiamo che

$$\alpha = \frac{a_T}{R} \quad \text{accelerazione angolare}$$

$$a_T = \alpha R = L \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \quad \text{(IV)}$$

fune del pendolo

$$a_N = \frac{V^2}{L}$$

moto circolare $a_N = \omega^2 R = \frac{V^2}{R}$

Consideriamo (IV):

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{a_T}{L} \Rightarrow$$

Per la (V):

$$a_T = -g \sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{-g\sin\theta}{L}$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Moto armonico semplice caratterizzato dall'equazione

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

per analogia con il moto armonico

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Eq. diff. di $\theta(t)$

$\theta(t) \Rightarrow s(t) = L\,\theta(t)$

$\theta_0 \Rightarrow t_0$ istante iniziale

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

Ricaviamo $s(t)$

$$s(t) = L\,\theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

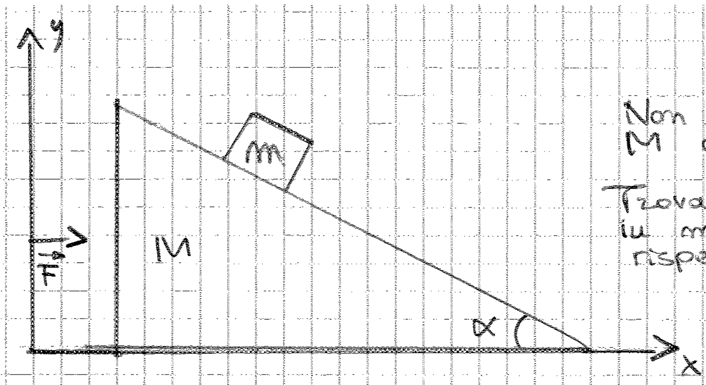
ricordando che $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$$V(t) = \frac{d\,s(t)}{dt} = \frac{d(\theta_0 L \sin(\omega t + \phi))}{dt} = \omega\theta_0 L \cos(\omega t + \phi)$$

Tensione generata dalla fune (Ricordiamo: $ma_N + mg\cos\theta = T_F$)

$$T_F = m\left(g\cos\theta(t) + \frac{V^2(t)}{L}\right)$$

T_F e' MAX nella posizione verticale



$\alpha = 30°$ $m = 10$ Kg $M = 100$ Kg

Non vi è frizione (attrito) (dinamica) tra m e M o tra M e il piano

Trovare il modulo della forza $\vec{F}$ in modo da tenere m ferma rispetto a M

Dobbiamo imporre una condizione di equilibrio lungo l'asse delle x

$\cancel{M\ddot{x} = N_x + F_s \dots \Longleftrightarrow F_s = -N_x = -mg\cot\alpha}$

Forze che agiscono su M

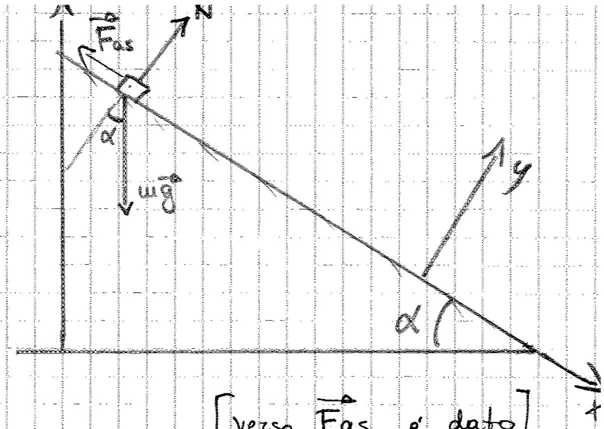
$$\begin{cases} M\ddot{x} = F - N\sin\alpha \\ M\ddot{y} = -Mg - N\cos\alpha \end{cases} \quad (*)$$

Forze che agiscono su m piccolo

$$\begin{cases} m\ddot{x} = N\sin\alpha \\ m\ddot{y} = -mg + N\cos\alpha \end{cases} \quad (**)$$

4 equazioni di $(*)$ e $(**)$ 5 incognite $\underbrace{\ddot{x}, \ddot{y}}_{m}$, $\underbrace{\ddot{x}, \ddot{y}}_{M}$, F

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 282



2

α

μ_s, μ_d

$V(0) = 0$

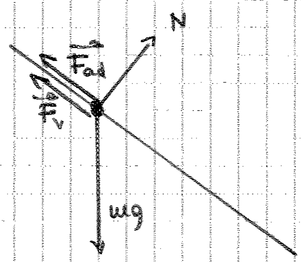
β = attrito viscoso (cost)

V_{max} supposto piano inclinato ∞

$V(t^*)$

$t^* = 10s$

[verso $\vec{F}_{as}$ è dato da tutte le altre forze che agiscono sul punto]



$0 = m\ddot{x} = m\vec{g}\sin\alpha - \vec{F}_{as}$

$\vec{F}_{as} = m\vec{g}\sin\alpha$

$0 = m\ddot{y} = \vec{N} - m\vec{g}\cos\alpha$

$\vec{N} = m\vec{g}\cos\alpha$

$|F_{as}| < |F_{as}| = \mu_s N$

$\cancel{mg}\sin\alpha < \mu_s \cancel{mg}\cos\alpha$

$tg\alpha < \mu_s$

$\left.\begin{array}{l}\alpha = 30° \\ \mu_s = 0{,}4\end{array}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} > 0.4$ [non è vero quindi si muove!]

$F_{ad} = \mu_d N \rightarrow F_{ad} = \mu_d mg\cos\alpha$

$m\ddot{x} = \boxed{mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha} - \beta\dot{x}$ $\rightarrow \gamma$

~~mg sin~~ $\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}_{max} = V_{max} = \frac{mg}{\beta}(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)$

$m\ddot{x} = \gamma - \beta\dot{x} = \beta\left(\dot{x} - \frac{\gamma}{\beta}\right)$

$z = \dot{x} - \frac{\gamma}{\beta} \rightarrow \dot{z} = \ddot{x}$

$m\dot{z} = -\beta z \rightarrow \frac{m\,dz}{dt} = -\beta z$

$\rightarrow \int_{z_0}^{z(t)} dz/z = -\frac{\beta}{m}\int_0^t dt$

$\hookrightarrow \log\frac{z(t)}{z_0} = -\frac{\beta}{m}t$

Punto fisico di massa m che si muove con velocità $\vec{v}$

$\vec{p} = m\vec{v}$ → quantità di moto

$\vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(t)\,dt$ → Impulso della forza

$\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ $\quad \vec{F_T} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$

$\vec{J_1}, \vec{J_2}, \vec{J_3}$

La proprietà additiva si associa sia alle forze che ai tempi

N.B.: devono essere 2 tempi consecutivi!

(t_0, t_1) e (t_1, t_2)

$\vec{F_1}$ $\quad \vec{F_2}$

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F_1}(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F_2}(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_2} \vec{F_T}\,dt$$

[Conviene sommare le forze e fare un solo integrale anziché sommarne di più!]

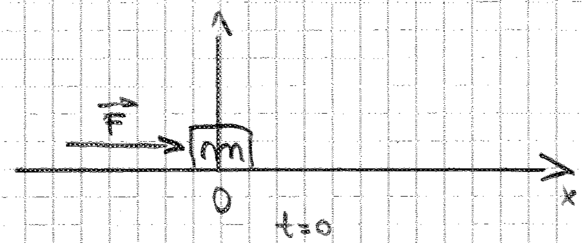
Applicazione teorema dell'impulso

$m = 0{,}2$ kg si muove lungo l'asse delle x e su di esso agisce $\vec{F} \parallel x$

$\vec{F}(t) = \gamma t$ con $\gamma = 0{,}03$ N/s

A $t=0$ la nostra m si trova nell'origine

Trovare la velocità di m e l'ascissa dopo $t = 10$ s



$$J = \int_{t_0}^{10} \vec{F}(t)\,dt = \int_0^{10} \gamma t\,dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\gamma t^2\right]_0^{10}$$

$$m\,v(t=10s) - m v_0 = \frac{1}{2}\gamma t^2$$

$$v(t=10s) = v_0 + \frac{1}{2m}\gamma t^2 = 8{,}5\ m/s$$

Integriamo

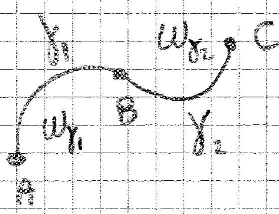
$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{6m}\gamma t^3$$

$$x(t=10s) = 35\,m$$

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots \rightarrow \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$$

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \rightarrow \vec{\mathcal{W}}_T$$

[Propr. additiva del lavoro rispetto alle forze]



$$\mathcal{W}_{\gamma_1+\gamma_2}\Big|_A^C$$

[Propr. additiva del lavoro rispetto al cammino]

$d\mathcal{W}$ variazione di lavoro di una forza in un tempo dt

$$P = \frac{d\mathcal{W}}{dt} = F \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \boxed{F \cdot \vec{V} = P}$$

$$\mathcal{W} = \int_{t_0}^{t_1} P(t)\,dt \qquad [P] = \frac{[\mathcal{W}]}{[T]} = J/s = 1\ \text{Watt}$$

$m = 100$ Kg

Da $t=0$ a $t_1 = 10s$ → forza motrice con $P = 10^3$ W cost

A $t=0$

↳ m ha $V_0 = 5$ m/s

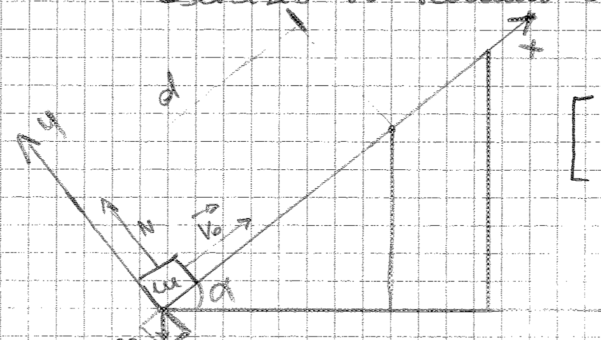
Quanto è V a $t = 10s$?

$$P = F \cdot v \rightarrow \frac{P}{V} = F \rightarrow \frac{P}{V} = m\frac{dv}{dt}$$

$$v\,dv = \frac{P}{m}dt \rightarrow \int_{V_0}^{V} v\,dv = \int_0^{t_1}\frac{P}{m}dt \rightarrow \left[\frac{1}{2}v^2\right]_5^x = \frac{P}{m}\int_0^{t_1}dt$$

$$\frac{1}{2}V^2(x) - \frac{1}{2}V^2(t=5) = \frac{P}{m}t$$

Esercizio su teorema delle forze vive



[da un esame di anni prec.]

$m = 1\,Kg$

$\alpha = 30°$

$\mu_d = 0{,}4$

$\mu_s = 0{,}5$

$|\vec{V_0}| = 3\,m/s$

Trovare:

a) h_{max} raggiunta dalla massa e stabilire se la massa torna indietro oppure no

b) Il tempo t in cui la massa raggiunge h_{max}

Massa inizialmente a riposo viene colpita e acquista una velocità $\vec{V_0}$

Per trovare h_{max} applichiamo il Teorema del lavoro (Forze vive)

Forze agenti lungo x

$+mg\cos\alpha = N$ ← non si ha moto lungo y

· Forza Peso $-mg\sin\alpha$

· Attrito $F_d = -\mu_d N = -\mu_d mg\cos\alpha$

Le forze lungo y NON producono lavoro

$$W_{0,d} = \int_0^d \vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{r} = \int_0^d (-mg\sin\alpha - m\mu_d g\cos\alpha)\,dx = -mg(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)\,d$$

$$W_{0,d} = E_c(d) - E_c(0)$$

$E_c(d)$ → zero poiché in d, m si ferma

$$-mg(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)\,d = -\frac{1}{2}mV_0^2$$

$$d = \frac{V_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)} \rightarrow h_{max} = d\sin\alpha = 0{,}26\,m$$

La massa m si ferma a h_{max}?

Se $F_s \leq \mu_s N = \mu_s mg\cos\alpha$

$$tg\alpha \leq \mu_s$$

$$tg(30°) = 0{,}577 > 0{,}5 = \mu_s$$

→ [Il corpo RISCENDE!]

b) Troviamo il tempo t considerando l'impulso della forza.

$$J = mv(f) - m\cancel{v}(\cancel{t}) = \int_0^t \vec{F}_{TOT}\,dt$$

Lungo l'asse delle x

$$0 - \cancel{m}V_0 = (\mu_d \cancel{m}g\cos\alpha + \cancel{m}g\sin\alpha)\,t$$

$$t = \frac{V_0}{\mu_d g\cos\alpha + g\sin\alpha} = 0{,}35\,sec$$

Lavoro di una forza elastica

moto della molla lungo l'asse delle x

$$\vec{F_e} = -K x \hat{i} \quad \Rightarrow \quad W_e = \int_A^B \vec{F_e} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -Kx\hat{i} \cdot dx\hat{i} =$$

$$\int_A^B -K\cancel{x}\, dx = -\frac{1}{2} K x_B^2 + \frac{1}{2} K x_A^2$$

$x_A > x$

Molla con estremità fissa in $r_0\,(x,y,z)$
All'altra estremità è connessa una massa puntiforme m in posizione $\vec{r}\,(x,y,z)$

Se la lunghezza a riposo della molla è l_0

$$\vec{F_e} = -K\left[(|\vec{r}-\vec{r_0}|) - l_0\right] \frac{\vec{r}-\vec{r_0}}{|\vec{r}-\vec{r_0}|}$$

Estremità fissa della molla

$$\vec{r_0}\,(x,y,z) \equiv (0,0,0)$$

direzione del moto è lungo x

$$\vec{F_e} = -K(x-l_0)\hat{i}$$

$$U_e = \frac{1}{2} K (x-l_0)^2$$

FORZE CONSERVATIVE

- FORZA ELASTICA
- FORZA PESO
- FORZA di LORENTZ
- FORZA GRAVITAZIONALE
- FORZA DI COULOMB

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 282

FORZA DI LORENTZ

Problemi gettonati allo scritto con LORENTZ

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

- in massa con carica q che si muove con una certa velocità $\vec{v}$
- B campo magnetico in cui la carica si muove con $B(x,y,z)$ che non dipende da t

$$W^L_{A,B} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}_L \cdot d\vec{r} = q \cdot \int_{A,\gamma}^{B} (\vec{v} \times \vec{B}) \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt$$

[moltiplico e divido per dt]

$$\Rightarrow \boxed{W_{A,B} = q \int_{A,\gamma}^{B} \underbrace{(\vec{v} \times \vec{B})}_{} \vec{v}\, dt = 0}$$

→ vettore $\perp$ al piano che contiene $\vec{v}$ e $\vec{B}$

FORZA GRAVITAZIONALE

m_0 massa fissa in posizione
$\vec{r}_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$
che esercita forza gravitazionale su una massa puntiforme m in m
$\vec{r} \equiv (x,y,z)$

$$\vec{F}_G = -\gamma \frac{m \cdot m_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2} \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

[no dimostrazione all'orale ma è bene saperlo]

$$\vec{F}_G = \frac{-\gamma\, m \cdot m_0 \left[(x-x_0)\hat{i} + (y-y_0)\hat{j} + (z-z_0)\hat{k} \right]}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

$$\boxed{\exists \quad U_G(x,y,z) = -\gamma \frac{m \cdot m_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}}$$

FORZA DI COULOMB

m_0 in $\vec{r}_0$ con carica q_0
m in $\vec{r}$ con carica q

$$\Rightarrow \vec{F}_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q q_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2} \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

Si trova

$$\boxed{U_E(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q q_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}}$$

MOTI RELATIVI

Sistema mobile:

$r'(t) = x'(t)\hat{i}' + y'(t)\hat{j}' + z'(t)\hat{k}'$

Sistema fisso:

$r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 282

FORZE CENTRALI

gravitaz.
$$\vec{F}_G = -\gamma \frac{m \cdot m_0}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

di Coulomb
$$\vec{F}_C = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

elastica
$$\vec{F}_e = -k \cdot (r - \ell_0) \frac{\vec{r}}{r}$$

LAVORO DELLE FORZE CENTRALI

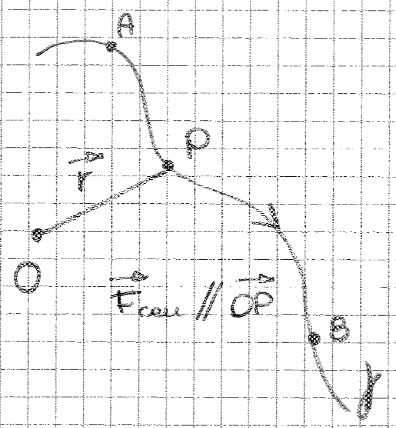
[scompare dipendenza da γ]

(è 1 perché //)

$$W_{A,B} = \int_A^B \vec{F}_{cen}(r)\, d\vec{r} = \int_A^B F_{cen} \frac{\vec{r}}{r} (d\vec{r}) = \int_A^B F_{cen} \frac{\vec{r}}{r} \left(dr \frac{\vec{r}}{r} + dr_\tau \vec{\tau} + dr_n \vec{n} \right)$$

(0 perché ⊥)

$$\vec{F}_{cen}(\vec{r}) = F_{cen}(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$



$$W_{A,B} = \int_A^B \vec{F}_{cen}(r)\, d\vec{r} \quad (*)$$

∃ una funzione $f(r)$ tale che

$$\frac{df(r)}{dr} = F_{cen}(r) \quad (\mathrm{I})$$

Sostituiamo (I) in (*)

$$W_{A,B} = \int_A^B \frac{df(r)}{\cancel{dr}} \cancel{dr} = f(B) - f(A)$$

$$U(B) - U(A)$$

∃ una funzione $U(x,y,z)$ non dipendente dal tempo

$$U(x,y,z) = f(r) + \text{cost}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\tau}_0 - \overbrace{\vec{r}_0 \times (m\vec{v})}^{=0}$$

$$\vec{\tau}_0 = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$$

$$F \parallel (r - r_0) \Rightarrow \vec{\tau}_0 = 0$$

$$\frac{dL_0}{dt} = 0$$

$\vec{L}_0$ = costante in direzione modulo e verso per FORZE CENTRALI

MOMENTO ANGOLARE DI UN PUNTO FISICO DI MASSA

massa m di un punto fisico che è posizionato nello spazio $\vec{r}(x,y,z)$ e che si muove con velocità $\vec{v}$

Se consideriamo un punto fisso O scelto a piacere [in $\vec{r}_0$] si può definire

$$\boxed{\vec{L}_0 = (\vec{r}-\vec{r}_0) \times m\vec{v}}$$

MOMENTO DI UNA FORZA

Un punto fisico di massa m su cui agisce $\vec{F}(x,y,z)$
Scelto arbitrariamente un polo O

$$\boxed{\vec{\tau}_0 = (\vec{r}-\vec{r}_0) \times \vec{F}}$$

Gode della proprietà additiva:
se avete N forze $\vec{F}_1, \dots \vec{F}_N$ agenti su m

$$\vec{\tau}_0 = (\vec{r}-\vec{r}_0) \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N)$$

$$= (\vec{r}-\vec{r}_0) \times \vec{F}_1 \dots (\vec{r}-\vec{r}_0) \times \vec{F}_N$$

$$\boxed{\vec{\tau}_0 = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \dots \vec{\tau}_N}$$

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

⇒ Utilizziamo la proprietà additiva della II Legge di Newton
Un punto fisico su cui agiscono più forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_N$ e la somma $\vec{F}_T$

Calcoliamo la variazione di $\vec{L}_0$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d[(\vec{r}-\vec{r}_0) \times m\vec{v}]}{dt} \Rightarrow (\dot{\vec{r}}-\dot{\vec{r}}_0) \times m\vec{v} + (\vec{r}-\vec{r}_0) \times m\dot{\vec{v}}$$

$$\Rightarrow [\dot{\vec{r}} \times m\vec{v} = 0] \Rightarrow -\dot{\vec{r}}_0 \times m\vec{v} + \underbrace{(\vec{r}-\vec{r}_0) \times \vec{F}_T}_{\vec{\tau}_0}$$

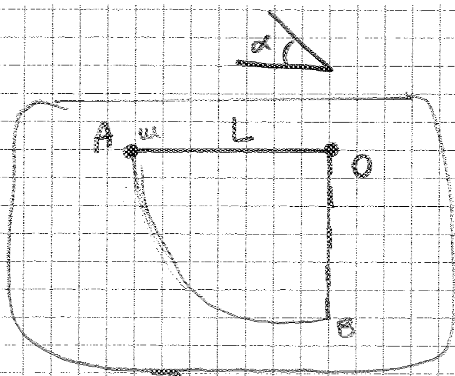
$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\tau}_0 - \dot{\vec{r}}_0 \times m\vec{v}$$

Quindi la derivata temporale del momento angolare è uguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo STESSO polo fisso in un sistema di riferimento inerziale

α, l, μ_s, μ_d

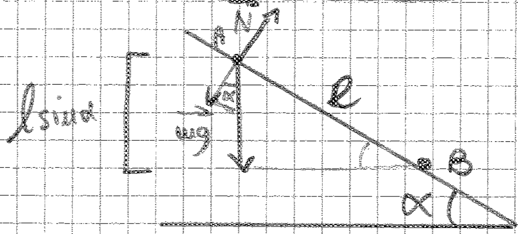
$W = ?$

$V_B = ?$

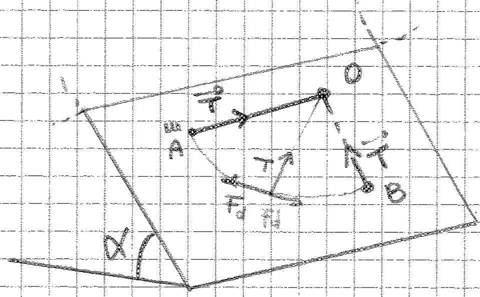


$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$= \int \vec{F}\,\vec{v}\,dt$$



$$W_g = mg\,l\sin\alpha$$



$$W_d = \int_A^B F_d \cdot ds = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu_d mg \cos\alpha\, l\, d\theta$$

$$W_d = -\mu_d\, mg \cos\alpha \frac{l\pi}{2}$$ → $\frac{1}{4}$ di circonferenza

$$\boxed{\Delta E_{TOT} = W_d}$$

$$\Delta E_k = W_d + W_g$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} V_B^2 = -\mu_d \cancel{m} g\, l (\cos\alpha) \cdot \frac{\pi}{2} + \cancel{m} g\, l \sin\alpha$$

$$V_B^2 = 2gl\left(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha \frac{\pi}{2}\right)$$

$$L_o = \vec{r} \times m\vec{v}$$
$$= r\vec{\lambda} \times m(V_\mu \vec{r} + V_\lambda \vec{\lambda}) = r m V_\mu \vec{z}$$

$$\left.\begin{array}{l} L^i_{o,z} = r_o\, m\, V_o \cos\alpha \\ L^f_{o,z} = r_M\, m\, V_{f,\mu} \end{array}\right) \rightarrow r_o V_o \cos\alpha = r_M V_{f,\mu}$$

moto di trascinamento traslatorio

$$\boxed{V = V_{O'} + V'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Teorema delle velocità relative

VELOCITA' DI TRASCINAMENTO

$$\vec{V}_t = V - V' = V_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{V}'}{dt} + \boxed{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'} + \boxed{\frac{d\vec{r}'}{dt} \times \vec{\omega}}$$

$$\frac{dV'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{V}'$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}_{O'}}{dt} + \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{V}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{V}' + \vec{\omega} \times (\omega \times \vec{r}')$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{V}'$$

accelerazione di trascinamento

accelerazione complementare (di Coriolis)

[ω in genere é costante (quando c'è!)]

GRAVITAZIONE

3 Leggi di Keplero

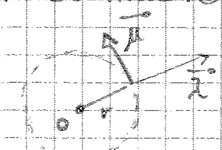
1^ Legge → orbita dei pianeti

Orbite ellittiche e uno dei 2 fuochi dell'ellisse è occupato dal sole
⇒ Legge qualitativa

2^ Legge → consideriamo una massa m sotto l'effetto di una forza centrale

$$\vec{F}_{cent}(r) = F_{cent} \frac{\vec{r}}{r}$$

m si muove con V



In coordinate cilindriche

$$\vec{F}_{cent}(r) = F_{cen} \vec{\lambda}$$

Validità 2^ legge di Newton

$$F_c(\vec{r}) \vec{\lambda} = m \ddot{\vec{r}} \quad (*)$$

All'istante $t = t_0$ (*) diventa

$$F_c(\vec{r}(t_0)) \vec{\lambda} = m \Big\{ \left[\ddot{r}(t_0) - r(t_0) \dot{\theta}^2(t_0) \right] \vec{\lambda} + \underbrace{\left[2\dot{r}(t_0) \dot{\theta}(t_0) + r(t_0) \ddot{\theta}(t_0) \right]}_{\text{nulla}} \vec{\mu} + \underbrace{\left[\ddot{z}(t_0) k \right]}_{\text{è nulla}} \Big\}$$

ricaviamo che

1) Moto ellittico planare nel piano che contiene $\vec{r}, \vec{V}$

2) Componente lungo $\vec{\mu}$ deve essere nulla

$$2\dot{r}(t_0) \dot{\theta}(t_0) + r(t_0) \ddot{\theta}(t_0) = 0$$

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad \text{[velocità AREALE]}$$

$$\frac{d^2A}{dt^2} = r\dot{r} \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2} r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} =$$

$$= \frac{1}{2} r \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \right) = 0$$

Quindi la velocità areale è costante poiché accelerazione NULLA!

3^ Legge → T: periodo di rivoluzione del pianeta

r: semiasse maggiore dell'orbita ellittica

$$T^2 = K r^3$$

K = costante dimensionale che varia a seconda del corpo celeste che si considera

LEGGE DI GRAVITAZIONE

Pianeta di massa m per mantenere orbita circolare [supponiamo orbite circolari]

$$F = m \cdot a = m \omega^2 r$$

sappiamo che $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$F = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r$$

$$T^2 = K r^3$$

$$\Rightarrow F = \frac{4\pi^2}{T^2} r = \frac{m 4\pi^2}{K r^3} r$$

$$F = \frac{m 4\pi^2}{K r^2}$$

Consideriamo il sistema Terra-Sole (T) (S)

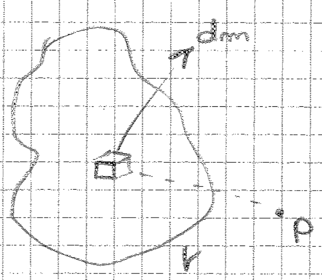
$$F_{ST} = \frac{4\pi^2}{K_T} \cdot \frac{m_T}{r^2}$$

$$F_{TS} = \frac{4\pi^2}{K_S} \cdot \frac{m_S}{r^2}$$

$$F_{ST} = F_{TS}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 282

Corpo di forma qualunque



Campo gravitazionale generato da dm in P:

$$d\vec{G} = -\gamma \frac{dm}{r^2}\,\hat{u}$$

$$\Rightarrow \vec{G}_c^{TOT} = \int_c -\gamma \frac{dm}{r^2}\,\hat{u}$$

Nell' assunzione di densità ρ del corpo costante

$$\vec{G}_c^{TOT} = \int -\gamma \frac{\rho}{r^2}\, dV \cdot \hat{\mu} \qquad dm = \rho\, dV$$

Campo gravitazionale

Si può definire una ENERGIA POTENZIALE

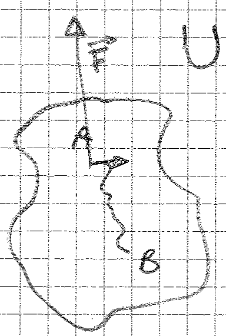
$$U^G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

POTENZIALE GRAVITAZIONALE

$$V_1 = \frac{U^G}{m_2} = -\gamma \frac{m_1}{r}$$

$\exists$ SUPERFICI EQUIPOTENZIALI in cui

[gettonata all' orale]



$$U^G = cost$$

$$W_{A,B} = U(A) - U(B) = 0$$

$$W_{A,B} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}\, d\vec{s} =$$

ELETTROSTATICO

$$V_{q_1}^E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}$$

(4) A'', B'' tali che $QA'' = QB'' = 1 \Rightarrow S'' = 4\pi$ — dS'' contiene A'' e B''

Da considerazioni geometriche

$$\frac{dS'}{\overline{QA}^2} = \frac{dS''}{\overline{QA''}^2} \Rightarrow dS' = \frac{dS''}{\overline{QA''}^2} \cdot \overline{QA}^2 \quad (*)$$

$dS' \sim AB'$

$dS'' \sim A''B''$

$dS \sim AB$

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\overline{QA}^2} \cdot \frac{\overrightarrow{QA}}{|\overrightarrow{QA}|}$$

$$dS' = \cos\alpha \, dS$$

$$AB' = \cos\alpha \, AB$$

Flusso su dS:

$$d\phi(x,y,z) = E(x,y,z) \cdot \vec{n} \, dS$$

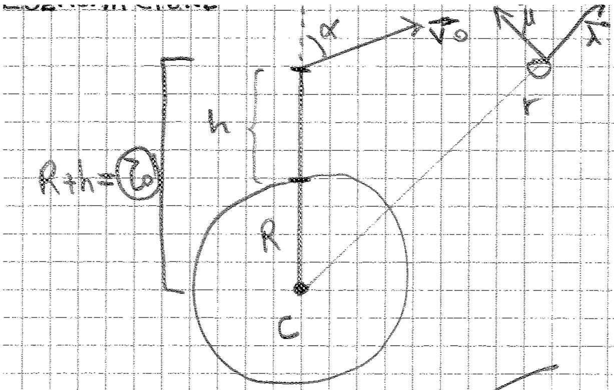
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\overline{QA}^2} \underbrace{\frac{\overrightarrow{QA}}{|\overrightarrow{QA}|} \cdot \hat{n}}_{= \cos\alpha} dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\overline{QA}^2} \cos\alpha \, dS$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\overline{QA}^2} dS' \quad (*)$$

$$d\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\cancel{\overline{QA}^2}} \frac{\cancel{\overline{QA}^2} \cdot dS''}{\overline{QA''}^2} \quad \overline{QA''}^2 = 1$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} dS''$$



DATI

R, h, γ, M, V_0

- 1^ domanda da porsi in questi casi:
Si possono sfruttare leggi di conservazione?
Sì:
  - si conserva l'energia mecc. totale
  - Il momento angolare totale lungo rispetto il polo C si costante

$E_m = cost$

$\vec{L}_c = cost$

$$E_m(r) = E_c + U_G = \frac{1}{m}\left(V_\mu^2(r) + V_\lambda^2(r)\right) - \frac{\gamma m M}{r}$$

$$E_m^I = \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{\gamma m M}{R+h}$$

$$E_m^F = \frac{1}{2} m V_\mu^2(r) - \frac{\gamma m M}{r}$$

Dalla II legge di Newton proiettata lungo la direzione radiale

$$m a_m = -\gamma \frac{m M}{r^2} = -\frac{m V_\mu^2(r)}{r}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m} M}{r^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m} V_\mu^2(r)}{\cancel{r}} \Longrightarrow \gamma \frac{M}{r} = V_\mu^2(r)$$

$$E_m^I = E_m^F \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{\gamma m M}{R+h} = \frac{1}{2} m V_\mu^2(r) - \frac{\gamma m M}{r} \\ V_\mu^2(r) = \gamma \frac{M}{r} \end{cases}$$

[trovo r]

$$\begin{cases} r = \frac{\gamma M}{V_\mu^2} \\ V_\mu^2 = \frac{2\gamma M}{R+h} - V_0^2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}V_0^2 = -\frac{1}{2}\cancel{m}g\ell\cos\vartheta + \cancel{m}g\ell(1-\cos\vartheta)$$

$$= \frac{1}{2}g\ell(2-3\cos\vartheta)$$

$$\Rightarrow \quad 2-3\cos\vartheta = \frac{V_0^2}{g\ell} \quad \Rightarrow \quad \cos\vartheta = \frac{2}{3} - \frac{V_0^2}{3g\ell}$$

- Superficie di forma qualunque
- Carica Q che genera un campo elettrico
- Q esterna alla superficie $\Phi_S^{EST} = 0$

[Teorema di Gauss] $\left[\Phi_S = Q/\varepsilon_0 \right]$

Quindi generalizzando il Teorema di Gauss: TG

Date delle cariche interne ad S Q_k^I

$$\Phi_S = \frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k^I}{\varepsilon_0}$$

Forza Gravitazionale

Date n masse M_k^I interne alla superficie S

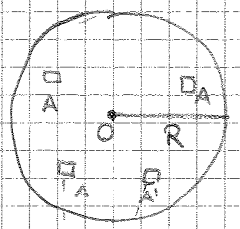
$$\Phi_S^G = -4\pi\gamma \sum_{k=1}^{n} M_k^I$$

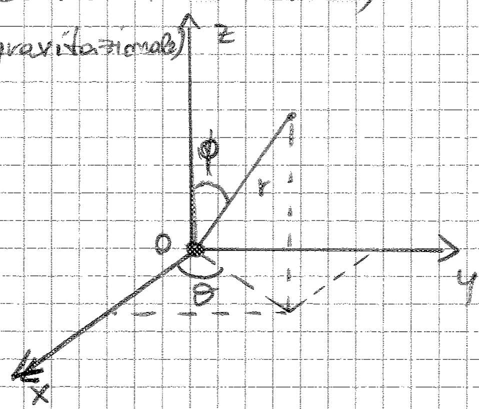
[TG considerando il campo gravitazionale]

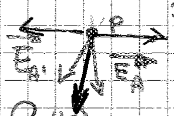
Applicazione Teorema di Gauss (SIMMETRIA SFERICA)

consideriamo la gravitazione (campo gravitazionale)

$\rho(r, \theta, \varphi)$







$P(r, \theta, \varphi)$

$\rho(r)$ e non dipende da θ e φ

P a distanza $r > R$

Le componenti trasversali si annullano ($\leftrightarrow$)

rimane la componente radiale! ($\downarrow$)

Quindi $\rightarrow \vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r)\frac{\vec{r}}{r}$

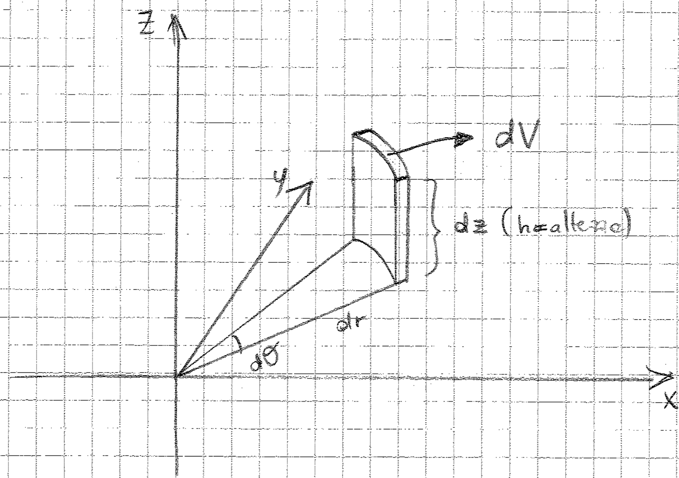
Il flusso sarà

$$\Phi = \int_S \underbrace{E(r) \cdot \boxed{\frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}}}_{\vec{E}(r)\, \cdot\, \hat{n} ds} ds$$

①

SUPERFICIE DI GAUSS $\rightarrow$ (sfera di raggio r e centro O)

SIMMETRIA CILINDRICA



Cilindro carico di lunghezza infinita lungo l'asse delle z

Consideriamo coordinate cilindriche.

Densità di carica uniforme

$\lambda(r, \theta, z)$

Consideriamo $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$ in dV è contenuta una carica infinitesima

$$dq = \lambda(r, \theta, z) \cdot r\,dr\,d\theta\,dz$$

Considerato che $\lambda(r,\theta,z) = \lambda(r)$

Considerato un punto P esterno al cilindro tale che $P(r_0, \theta_0, z_0) \rightarrow$ coincidono con le coordinate dell'origine del sistema di coordinate cilindriche

anche qui le trasverse si annullano!

$dq \rightarrow (r, \theta, z)$

$\downarrow$

$dq' \rightarrow (r, \theta, -z) \Rightarrow$ componenti del campo $\perp$ all'asse z

$\downarrow$

$dq'' \rightarrow \underbrace{(r, 2\pi - \theta, z)}$

[simmetria rispetto a un piano che contiene $(r, 2\pi - \theta, z)$ e asse z]

$\Rightarrow$ il campo elettrico avrà sempre la direzione del versore $\hat{\lambda}$

Superficie Gaussiana

$\Rightarrow$ cilindro di altezza dz e raggio r_0

$$d\phi(r_0, \theta, z) = \underbrace{\vec{E}(r_0)\hat{\lambda}}_{\vec{E}} \cdot \underbrace{\hat{\lambda}\,ds}_{\hat{n}\cdot ds}$$

$$d\phi(r_0, \theta, z) = E(r_0)\,r_0\,d\theta\,dz \quad \text{SUPERFICIE LATERALE}$$

$\phi_{BASE} = 0 \rightarrow \hat{n}$ alla sup. $\perp \hat{\lambda}$

$$\phi_{TOT} = \int_{SL} d\phi = \int E(r_0)\,d\theta\,dz\,r_0$$

$$= E(r_0)\,r_0\,dz \boxed{\int_0^{2\pi} d\theta} \rightarrow 2\pi$$

$$\phi_{TOT} = 2\pi E(r_0)\,r_0\,dz$$

Teorema di Gauss

$$\phi_T = \frac{Q_I}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_I = dz \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{R} \rho(r)\,r\,dr\,d\theta \quad \text{dV}$$

[_ _ _]

$\boxed{r_0 < R}$ posizione interna al cilindro che genera il campo

Stesse considerazioni di simmetria del caso $r_0 > R$

$$Q^I = 2\pi\, dz \left[\int_0^{r_0} \rho(r)\, r\, dr\right]$$ [unica cosa che cambia!]

Esempio

1) Filo cilindrico con altezza $h = 2m$ e raggio $R = 1cm$ che contiene una carica distribuita uniformemente

$Q = 2 \cdot 10^{-5}\ C$

Calcolare il campo E a una distanza $r_0 = 2cm$ dall'asse del filo

$\boxed{r_0 > R}$ $$E(r_0) = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r_0} \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{Q}{h}$$

$$\Rightarrow E(r_0) = \frac{Q}{2\pi h \varepsilon_0 r_0} = 9 \cdot 10^6\ N/C$$

2° caso

Calcolare il campo E a $r_0 = 0,5\ cm$

$\boxed{r_0 < R}$

$$\underset{\text{densità di carica}}{\rho} = \frac{Q}{\pi r_0^2 \cdot h}$$

$$E(r_0) = \frac{\left[\int_0^{r_0} \rho(r) \cdot r\, dr\right]}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_0} = \frac{\left[\int_0^{r_0} \frac{Q}{\pi r^2 h}\, r\, dr\right]}{\varepsilon_0 \cdot r_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho(r_0)}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_0} \int_0^{r_0} \underbrace{r\, dr}_{\frac{1}{2} r_0^2} = \frac{\rho(r_0)\, r_0}{2\varepsilon_0}$$

3° caso Guscio cilindrico uniformemente carico con altezza $h = 2m$, raggio interno $R_1 = 1cm$ (vuoto) e raggio esterno $R_2 = 2cm$

$Q = 2 \cdot 10^{-5}\ C$ Calcolare Campo E a $r_0 = 0,5\ cm$ dall'asse del guscio cilindrico

$\boxed{r_0 < R_1}$ $$E(r_0) = \frac{\left[\int_0^{r_0} \rho(r)\, r\, dr\right]}{\varepsilon_0 \cdot r_0} = 0$$

$\rho(r)$ all'interno superficie gaussiana di raggio r_0 è ~~≠~~ uguale 0

VELOCITÀ E ACCELERAZIONE DEL CM

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \boxed{\frac{\vec{P}_T}{M_T}}$$

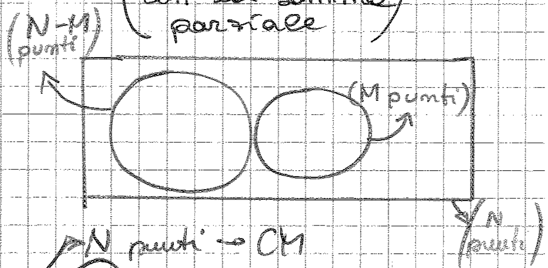
$$a_{CM} = \frac{d^2 r_{CM}}{dt^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \boxed{\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}$$

$$\boxed{M_T \vec{V}_{CM} = \vec{P}_T} = P_{CM}$$

[propr. additiva *ORALE*]

Proprietà additiva
Posizione del CM

(si dimostra con la somma parziale)



Sistema di N punti materiali
Dividiamo N in due sottoinsiemi
1 con M punti (M < N)
1 con N - M punti
Determiniamo il centro di massa per
N punti → CM
M punti → CM_1
N - M punti → CM_2

[intersezione nulla]

N punti $\quad \vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$

M punti $\quad \vec{r}_{CM_1} = \frac{\sum_{i=1}^{M} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{M} m_i}$ $\qquad$ N-M punti $\quad \vec{r}_{CM_2} = \frac{\sum_{i=M+1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=M+1}^{N} m_i}$

Consideriamo

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \sum_{i=1}^{M} m_i \\ M_2 &= \sum_{i=M+1}^{N} m_i \end{aligned}\right\} \vec{r}_{CM_{12}} = \frac{M_1 r_{CM_1} + M r_{CM_2}}{M_1 + M_2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = r_{CM}$$

Teorema delle forze Interne

Forza totale sul sistema

$$\vec{F}_T = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^T = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_T = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(E)}$$

Dimostriamo che

$$\sum_{i=1}^{N} F_i^{(I)} = 0$$

Ricordando che: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

$i \neq j$ $\quad \sum_i \sum_j \left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}\right) = \sum_{\text{coppie}(i,j)\, j \neq i} \vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij} = 0$

$$\frac{dP_{cm}}{dt} = M_T\, a_{cm} = \sum_{i=1}^{N} F_i^{(E)} = \vec{F}_T$$

$\Downarrow$

TEOREMA DEL MOTO DEL CENTRO DI MASSA / **1^ EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI**

$$\sum_{i=1}^{N} F_i^{(E)} = R^{(E)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{cm} = 0$$

(risultante) (per la 1^ eq. cardinale)

$\Rightarrow \vec{V}_{cm} = \text{cost}$

$\Rightarrow \vec{P}_{cm} = M \vec{V}_{cm} = \text{cost}$

$M \to \sum_{i=1}^{N} m_i$

Sistema $\Rightarrow$ $m_1, \vec{V}_1$; $m_2, \vec{V}_2$

$$\vec{P}_{TOT} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2$$

$$\dot{\vec{P}}_{TOT} = m_1 \frac{d\vec{V}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{V}_2}{dt} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2$$

Se il sistema è Isolato:

$\Rightarrow$ • Non agiscono Forze esterne $\vec{F}^{(E)}$

$\Rightarrow$ • $\vec{R}^{(E)} = 0$