NUMERO: 2142A-

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Sgroi Alice

MATERIA: Fisica 1 - Prof. Daghero

(A.A. 2015/2016) | 1 | 01.03.16

FISICA 1

Docente: D. Daghero (Ricevimento: mercoledì 9:30/11:30)

Libro di testo: Mazzoldi

Modalità d'esame: quiz: 15 domande (LAIB) in 30 min
Risposta esatta: 2 pti
Superato se voto ≥ 16/30, NON DA VOTO
problemi: 2 problemi
Superato se voto ≥ 16/30
orale: Da un voto a parte che fa media con il voto dei problemi

~ Concetti introduttivi

• Galileo Galilei e il metodo scientifico (~1600)

Si procede tramite 6 "step"

1. Schematizzazione: bisogna avere una cosa generale che mi permetta di prevedere il comportamento di tutti gli elementi singoli simili al riferimento. "NON descrivo la carrucola, ma il MODELLO di carrucola".
2. Misura: devo associare ad ogni grandezza fisica un numero e una unità.
   grandezza fisica = qualcosa che è MISURABILE
3. Correlazione: i risultati delle varie misure devono essere "legati" da tabelle o grafici (posizione nel tempo ad esempio)
4. Legge: è più precisa delle correlazioni, perché mi da delle proporzionalità (o legami lineari che siano) che valgono anche con delle caratteristiche diverse (curva esatta dell'es. di prima)
5. Predizione: cerco di capire cosa mi da la legge trovata ~~opposta~~ se cambio delle caratteristiche della situazione in analisi
6. Esperimento: verifico che la predizione si verifichi

↓

In pratica Galileo ha dato alla scienza un "potere" di predizione, e ciò che veniva previsto doveva poi essere testato e verificato tramite gli esperimenti. Galileo ha dato inizio al metodo **DEDUTTIVO**, mentre prima di lui si era soliti usare il metodo **INDUTTIVO**

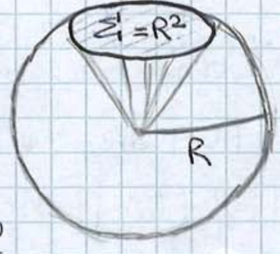
DEDUTTIVO ↓ Si fa derivare una certa conclusione da premesse più generiche, dentro cui quella conclusione è già implicita.

INDUTTIVO ↓ Al contrario del precedente, partendo da casi singoli (e particolari) cerca di stabilire una legge universale; si basa quindi sull'osservazione.

2 03.03.16

L'unità di misura è lo STERADIANTE, definito come l'ampiezza del cono (angolo solido) determinato da una superficie sferica pari al quadrato del raggio della stessa sfera.
↓
Quindi si definisce uno steradiante tramite il rapporto

$$\Omega = \frac{\Sigma}{R^2}$$



OSS Trattandosi anche in questo caso del rapporto tra due lunghezze al quadrato, anche lo steradiante è adimensionale.

↳ Grandezze derivate

Tutte le quantità possono essere espresse tramite **relazioni** delle grandezze fondamentali

Velocità : $\frac{\text{spazio}}{\text{tempo}} \rightarrow [v] = L \cdot T^{-1} \rightarrow m/s$

Accelerazione : $\frac{\text{velocità}}{\text{tempo}} \rightarrow [a] = \frac{L \cdot T^{-1}}{T} \rightarrow m/s^2$

Forza : massa x acceler. $\rightarrow [F] = M \cdot (L T^{-2}) \rightarrow Kg\, m/s^2 = N$

Momento : forza x spazio $\rightarrow [\tau] = [F] \cdot L \rightarrow N \cdot m$

~ Analisi dimensionale

TUTTE le leggi fisiche sono RELAZIONI TRA QUANTITÀ OMOGENEE: i due membri di ogni equazione DEVONO avere la stessa dimensione, altrimenti l'equazione è sicuramente SBAGLIATA!

$$A = B \Rightarrow [A] = [B]$$

Esempio 1:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Sappiamo che $[v] = L \cdot T^{-1}$

Per essere vera l'equazione devo verificare che anche $[\sqrt{2gh}] = L T^{-1}$

$$[\sqrt{2gh}] = \sqrt{[g][h]} = \sqrt{(L T^{-2}) \cdot (L)} = \sqrt{L^2 T^{-2}} = L T^{-1} = [v]$$ OK

MISURE & INCERTEZZE

1 03.03.16

Misurare una grandezza fisica significa associare ad essa un numero SEGUITO DA UN' UNITA' DI MISURA.

↓

Il problema è che OGNI misura è intrinsecamente affetta da un' incertezza

Siccome è impossibile effettuare una misura senza incertezza ammessa, si dovrebbe sempre scrivere

$$\text{grandezza generica} \leftarrow Q = q \pm \Delta q \; [Q]$$

numero (migliore stima della misura) — incertezza — ↳ unità di misura

Nomenclatura

Δq → incertezza assoluta: vale $[Q] = [\Delta q]$

$\frac{\Delta q}{q}$ → incertezza relativa: adimensionale → a volte sarà più utile di quella assoluta perché mi dice quanto è "BUONA" la misura fatta

$\frac{\Delta q}{q} \cdot 100$ → incertezza percentuale: adimensionale

↳ Il discorso è che non sempre l'incertezza è espressa in modo esplicito, ma dipende dal numero di CIFRE SIGNIFICATIVE: ← cioè quelle "AFFIDABILI"

$\ell = 2,91$ mm → 3 cifre signif.: incertezza sulla seconda cifra decimale

$\ell = 24,0$ cm → 3 cifre signif: incertezza sul millimetro

$\ell = 24$ cm → 2 cifre signif.: incertezza sul centimetro!

↓

Quindi possiamo dire che lo zero è cifra significativa se è dopo la virgola; è cifra significativa quando è in mezzo ad altri numeri, NON lo è se è davanti ad altri numeri:

0,012 → 2 cifre sign. 1,00 → 3 cifre sign.

1,2300 → 5 cifre sign. 1,05 → 3 cifre sign.

↳ occhio in particolare alle cifre significative durante i calcoli:

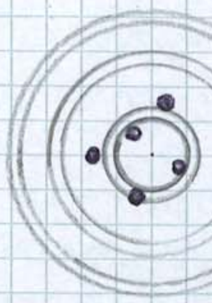
Moltiplicazione e divisione:

il numero di cifre significative del risultato NON è mai maggiore del numero di cifre significative del fattore con meno cifre significative

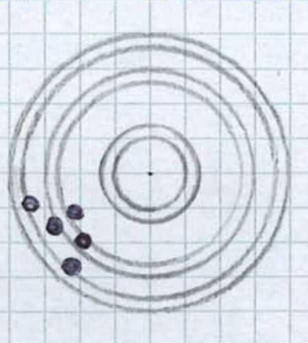
Es: $\underbrace{3,1416}_{5\,c.s.} \times \underbrace{2,34}_{3\,c.s.} \times \underbrace{0,58}_{2\,c.s.} = 4,3$ ↑ non poteva avere più di 2 cifre significative

~ Esempio di differenze tra precisione e accuratezza

2 03.03.16



Buona ACCURATEZZA
Poca PRECISIONE



Buona PRECISIONE
Poca ACCURATEZZA

~ Come valutare i risultati di una misura

Quando si esegue una misura, automaticamente essa sarà "colpita" da un'incertezza legata allo strumento utilizzato: si parla di SENSIBILITA' di uno strumento. → determina quel Δq di ogni SINGOLA misura... sarà diverso se vengono fatte n misure

↓

Esso è definito come la più piccola variazione nella misura che lo strumento in questione è in grado di percepire

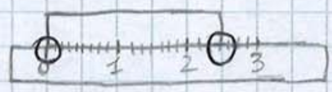
- è il gradino più piccolo nella scala delle misurazioni di quello strumento (mm per il metro)
- negli strumenti digitali è solitamente rappresentata dall'ultima cifra visibile a display.

↓

Il tutto è fortemente influenzato dal numero di misure (tentativi) che vengono fatte:

• Se faccio una SINGOLA misura diretta:

In questo caso l'incertezza dipende ~~dai~~ unicamente dalla sensibilità dello strumento → solitamente però essa viene presa come "doppia" in ogni singola misura, perché l'incertezza è in due "estremi":
- fissare lo zero
- leggere il valore

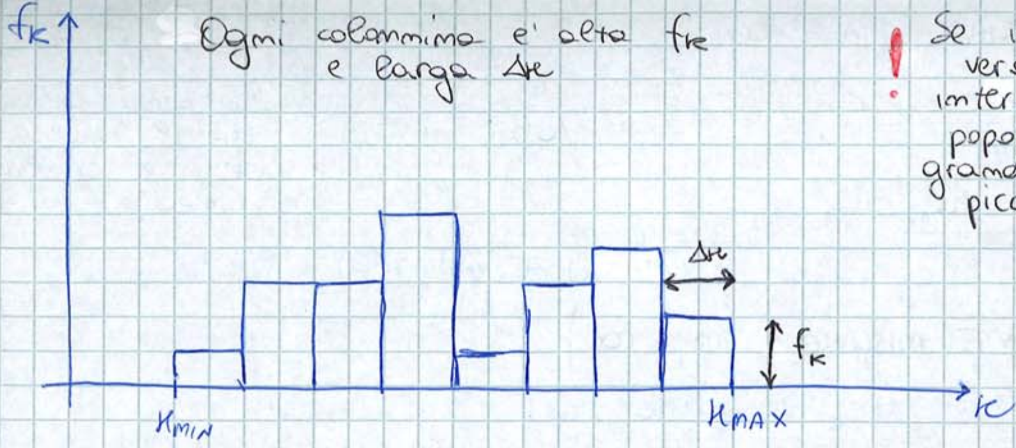


$$L = 2,5 \pm 0,2 \text{ cm}$$

$2 \times 0,1$ cm

Nel caso degli strumenti digitali diventa meno immediato, in quanto si dovrebbero tenere in conto le specifiche tecniche di ogni strumento.
La maggior parte di essi comunque, sono più precisi che accurati, per cui si va a segnalare come incertezza la precisione!

OSS Quando faccio più di una misura è giusto che mi vengano valori diversi (almeno un po') ogni volta → altrimenti significa che sto utilizzando uno strumento troppo poco sensibile per il tipo di misura a cui mi sto approcciando.



! Se il n° di misure e' veramente elevato, gli intervalli sono molto popolati anche se N e' grande o anche se Δx e' piccolo

Quindi potro' scrivere $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i = \frac{1}{n}\sum_k \Delta x_k \bar{x}_k = \frac{1}{n}\sum_k \Delta n_k x_k =$

$$= \sum_k \frac{\Delta n_k}{n} x_k = \sum_k f_k x_k =$$

riesplicito f_k e poi molt. e divido per Δx_k

$$= \sum_k \underbrace{\frac{1}{n}\frac{\Delta n_k}{\Delta x}}_{f_k} \Delta x\, x_k$$

→ densità di frequenza della variabile x

↳ Anche questo e' normalizzato a 1: $\sum_k \frac{1}{n}\frac{\Delta n_k}{\Delta x}\cdot\Delta x = 1$

Volendolo graficare verrebbe fuori un grafico, praticamente identico al precedente ma ingrandito (più alto) o rimpicciolito in base al valore di Δx → sull'asse y ho la densità di frequenza

↳ in generale $\frac{1}{n}\frac{\Delta n_k}{\Delta x}\cdot\Delta x$ e' l'area del k-esimo rettangolino su questo grafico

↳ Mi pongo in una condizione limite in cui il mio campione tende ad ~~…~~ infinito, in modo ~~…~~ da assomigliare il più possibile alla mia popolazione

↳ cioe' campione → popolazione
$n \to \infty$
cioe' sto dicendo $\Delta x \to dx$
e quindi $\Delta n_k \to dn$ → infinitesimo

Quindi se riparto da
$\bar{x} = \sum_k \frac{1}{n}\frac{\Delta n_k}{\Delta x}\Delta x\, x_k$ e applico la condizione limite:

↳ se a x aggiungo dx, al conteggio sto aggiungendo un dn. che significa anche $\frac{\Delta n_k}{\Delta x} \to \frac{dn(x)}{dx}$

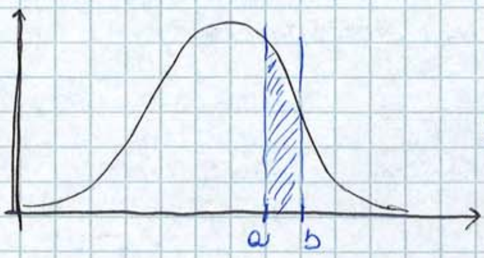
$$\bar{x} \to \frac{1}{n}\int_{x_{MIN}}^{x_{MAX}} \frac{dn}{dx}\, dx\, x$$

↳ la sommatoria diviene un integrale

~ Caratteristiche Gaussiana

- Simmetrica rispetto a μ
- Flessi a $(\mu+\sigma)$ e $(\mu-\sigma)$
- Si estende da $-\infty$ a $+\infty$ → in questi tende asintoticamente a zero
- normalizzato a 1 (l'area sottesa è $= 1$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$)
- ha un MAX in $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$

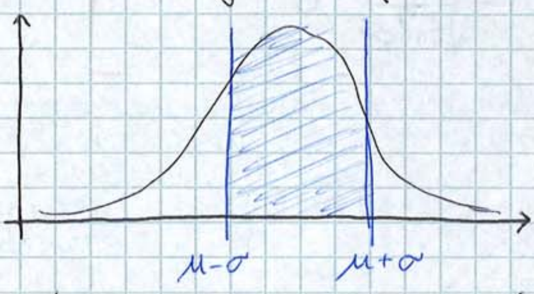
- Fissati due punti a e b, e faccio un'unica misura:



$$\int_a^b f(x)\,dx = P\left(x \in [a, b]\right)$$

probabilità che il valore x cada in quell'intervallo

Invece se integro tra $(\mu+\sigma)$ e $(\mu-\sigma)$ e faccio un'unica misura:



$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)\,dx = P\left(x \in [\mu-\sigma, \mu+\sigma]\right) = 0{,}68$$

In pratica ho il 68% di possibilità che cada lì

Se vado a integrare tra $3(\mu-\sigma)$ e $3(\mu+\sigma)$

$$\int_{3(\mu-\sigma)}^{3(\mu+\sigma)} f(x)\,dx = P\left(x \in [3(\mu-\sigma), 3(\mu+\sigma)]\right) = 0{,}997$$

ho praticamente la certezza che cada lì dentro (al max 3 volte lontano da σ)

↳ Quindi cosa succede se n cresce?

campione → popolazione
istogramma → gaussiana
$\bar{x} \to \mu$
$S \to \sigma$

fatto questo posso stimare

$$\star \left[\sigma_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Deviazione standard della media

è un valore teorico ed è la larghezza effettiva della gaussiana, che è però più piccola (leggermente) di σ. Se n cresce, S non decresce, ma tende a σ

! Tutto questo vale se ho trovato che la distribuzione è GAUSSIANA della popolazione

Questa può essere usata come INCERTEZZA del valor medio:

$$X = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}\,[X]$$

→ La mia incertezza diminuisce quante più prove faccio! Quindi se $n\uparrow$ anche $X\downarrow$ assieme all'incertezza

OCCHIO Se le grandezze sono indipendenti, in realtà le incertezze sono un po' più piccole.

Quindi dovrei utilizzare:

$$Z = X_1 \pm X_2 \rightarrow \Delta Z = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2} \quad \text{(somma/sottraz.)}$$

$$Z = \frac{X_1 \cdot X_2}{X_3} \rightarrow \frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_3}{x_3}\right)^2} \quad \text{(molt./divis.)}$$

! Se NON me le ricordo, data $Z = f(X_1, X_2 \dots X_m)$

VALE SEMPRE

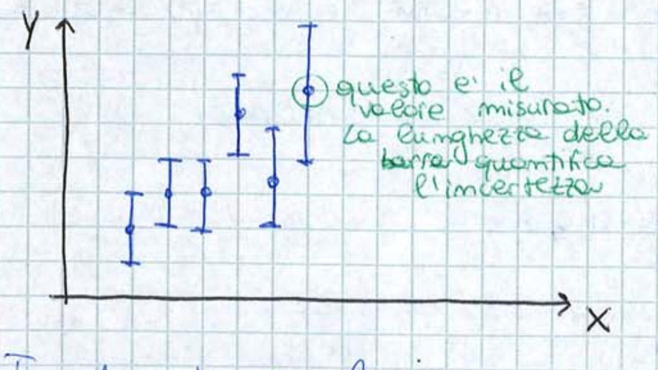
Vale sempre per le variabili indipend.

$$\Delta Z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^m}$$

↳ derivata variabile parziale

- Come rappresento l'incertezza sul grafico?

Rappresento intanto delle barrette verticali

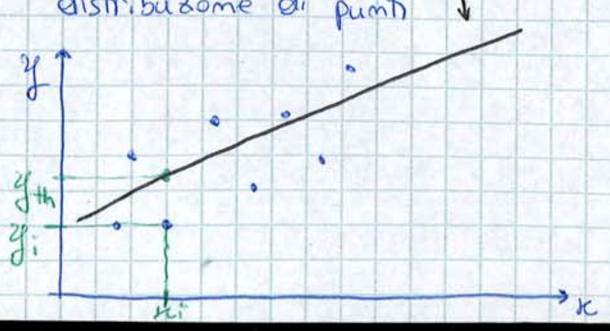


Ma come trovo la funzione che lega quanti più punti possibili?

↓

Metodo dei MINIMI QUADRATI:
(faremo solo andamento lineare e quadratico).

Io devo trovare la RETTA che minimizza in ogni caso la distanza dalla distribuzione di punti



Io scriverei

$\sum_i (y_i^2 - y_{th}^2)^2$ ma y_{th} non lo conosco.

Posso solo scrivere

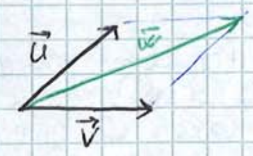
$y_{th} = A + Bx_i$ (andamento lineare)

~ VETTORI

A rigore, un vettore e' un segmento orientato che rappresenta le classe di vettori **equivalenti**
↳ se hanno stessa lunghezza e stessa direzione (giacciono su rette parallele)

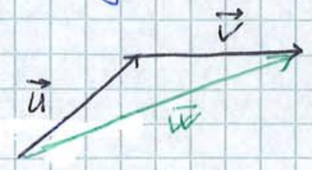
① Somma:

Regola del parallelogramma



$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

Regola del poligono



$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ ed e' uguale a $\vec{w}$ calcolato nell'altro **MODO**

~ Proprieta' valide

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativa)
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associativa)
3. $\vec{u} + 0 = \vec{u}$ (zero = elem. NEUTRO)
4. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = 0$ (esiste $\vec{v}$ elem. inverso) e' indicato col segno meno ($\vec{v} = -\vec{u}$)

② Moltiplicazione per uno scalare (λ)

Il risultato e' sempre un vettore con:
stessa direzione di $\vec{u}$
stesso verso se $\lambda > 0$, opposto se $\lambda < 0$
modulo diverso $\rightarrow \|\vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|$

$\vec{v} = \lambda \vec{u}$

~ Proprieta' valide

1. $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$
2. $(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$
3. $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$
4. $1\vec{v} = \vec{v}$

③ Prodotto scalare

Prodotto tra vettori che da come risultato uno scalare

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \mu$

dove $\mu = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$

Vale $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \theta = \pi/2$

! Valgono le proprieta' commutativa, associativa...

④ Prodotto vettoriale

In componenti si calcola con il determin. di $\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}$ e le componenti dei 2 vettori (in riga)

Prodotto tra vettori che da come risultato un altro vettore.

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$

dove $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\theta$

Vale $\vec{u} \times \vec{v} = 0 \iff \theta = 0$ (parallel.)

! Non vale la proprieta' commutativa

Avra' direzione ⊥ al piano di $\vec{u}$ e $\vec{v}$, il verso e' dato dalla regola della mano destra

↳ Ma se la curva non fosse così facile dovrei provare con un infinità di tempi t → devo trovare un modo per slegarmi dal tempo.

↓

Prendo le singole componenti:

$x(t) = R\sin(\omega t)$

$y(t) = R\cos(\omega t)$

Circonferenza di raggio R centrata nell'origine

le elevo al quadrato e le sommo → $\left[x^2 + y^2 = R^2 \right]$

~ Esempio 2:

Data la legge oraria $\vec{r}(t) = At\,\hat{\imath} + (y_0 - Bt^2)\,\hat{\jmath}$

con A, B, y_0 costanti.

↓

Per ricavare la legge oraria $\begin{cases} x(t) = At \\ y(t) = y_0 - Bt^2 \end{cases}$

Ricavo t da una e sostituisco nell'altra:

$t = \dfrac{x}{A}$ → $\left[y = y_0 - \dfrac{B}{A^2} x^2 \right]$ → parabola

~ Esempio 3:

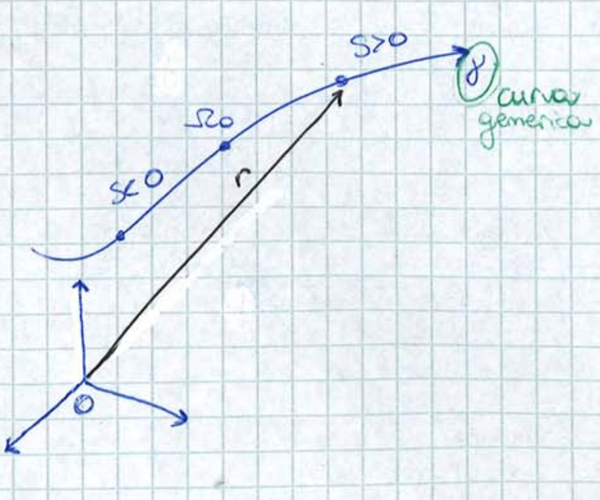
Data la legge oraria $\vec{r}(t) = R\sin(\omega t)\,\hat{\imath} + R\cos(\omega t)\,\hat{\jmath} + vt\,\hat{k}$

con v, ω costanti

↓

moto ELICOIDALE

~ Coordinate Intrinseche



Fisso sulla curva un'origine Ω_0 e identifico un verso di percorrenza.
Chiamo S la coordinata sulla curva (coord. curvilinea) che sarà $S>0$ a dx di Ω_0 e $S<0$ a sx di Ω_0

↓

Quindi $\vec{r} = \vec{r}(s)$ ma $s = s(t)$

eq. parametrica della traiettoria

Non ho informaz. sulla traiettoria

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 238

Quindi se $\Delta t \to 0$, $\Delta \vec{r} \to$ tangente, perciò il limite del rapporto incrementale altro non è che la derivata del vettore posizione nel tempo:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}} \longrightarrow \text{Velocità}$$

- Sempre tangente alla traiettoria
- Definibile in ogni singolo istante.

OSS Il vettore $d\vec{r}$ esplicitato dipende sempre dalla scelta delle coordinate

↳ Come la scrivo in coordinate intrinseche?

Parto sempre da $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Ma qui ricordo che $\vec{r} = \vec{r}[s(t)] \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$

Numeratore e denominatore si trovano a coincidere solo se $\Delta t \to 0$ per il discorso che $\Delta \vec{r}$ diventa tangente

Velocità scalare → è un num. (può essere sia positiva che negativa)

Quindi il modulo di dr è uguale a ds, ma $d\vec{r}$ è un vettore:

$$d\vec{r} = ds\,\hat{u}_T$$

versore tangente alla traiettoria, sempre nel verso delle s crescenti

Quindi $\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{ds\,\hat{u}_T}{ds} = \hat{u}_T$

Perciò $\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v_S \cdot \hat{u}_T} \longrightarrow$ velocità in coord. intrinseche

dove $\|\vec{v}\| = |v_S| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$

~ Coordinate Cartesiane

Parto al solito da $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$

Quindi $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ da cui, sostituendo $\vec{r}(t)$, con $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ costanti

$$\boxed{\vec{v} = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}\hat{\imath} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y}\hat{\jmath} + \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z}\hat{k}} \longrightarrow \text{velocità in coord. cartesiane}$$

È tutto molto comodo perché posso trattare le singole v_x, v_y e v_z e poi sommarle:

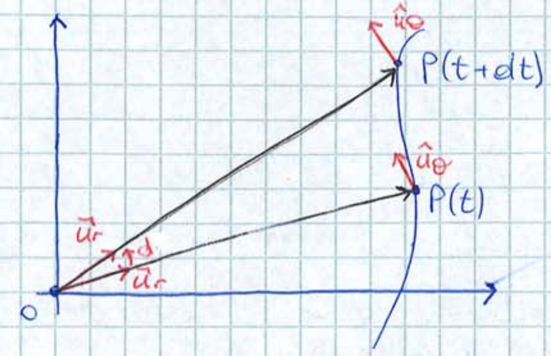
$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$$

Qui il modulo è come il modulo di un normale vettore

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Quindi possiamo scrivere $\vec{r} = \rho \hat{u}_r$ cioè $\|\vec{r}\| = \rho$

Per la velocità, al solito $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \hat{u}_r)$



Ma qui devo derivare anche il versore:

$$\frac{d}{dt}(\rho \hat{u}_r) = \underbrace{\frac{d\rho}{dt}\hat{u}_r}_{\text{velocità radiale}} + \rho \frac{d\hat{u}_r}{dt}$$

ci dice di quanto varia la lunghezza del vettore $\vec{r}$

Questo si può riscrivere notando che:

$$\|d\hat{u}_r\| = \|\hat{u}_r\| \cdot d\theta = 1 \cdot d\theta = d\theta$$

Il verso di $d\hat{u}_r$ è parallelo a $\hat{u}_\theta$ quindi

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta \quad \text{perciò} \quad \vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\hat{u}_r + \underbrace{\rho \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta}_{\text{velocità trasversa}}$$

ci dice di quanto cambia l'angolo θ

Scritta così la velocità, il suo modulo risulterà

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\rho \frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

4 La velocità media, ricordiamo essere

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{t_1 - t_0} \rightarrow \vec{v}_m (t_1 - t_0) = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 \quad (1)$$

Dalla definizione di velocità istantanea invece:

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt$ e integrando tra $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_0$ e tra t_1 e t_0:

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t)\,dt \xrightarrow[\text{(sost. la (1))}]{} \boxed{\vec{v}_m = \frac{1}{\underbrace{t_1 - t_0}_{\Delta t}} \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t)\,dt}$$

Legame tra vel. istantanea e velocità media!

La vel. media è la media temporale delle vel. istantanee

Per cui possiamo scrivere

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \cdot \hat{u}_N \quad (\perp \hat{u}_T)$$

$\rightarrow$ $d\hat{u}_T$ è NORMALE alla traiettoria e punta verso il centro della circonf. osculatrice individuata da $\hat{u}_T$.

che considerando R = raggio della circonferenza osculatrice, si può ancora riscrivere

$$R d\phi = ds \rightarrow d\phi = \frac{ds}{R} \rightarrow \frac{d\phi}{dt} \cdot \hat{u}_N = \frac{ds}{R\,dt} \cdot \hat{u}_N$$

OSS Anche $d\hat{u}_r$ può avere una circonferenza osculatrice, ma questo non importa tanto nei nostri calcoli.

se questo R è costante, la traiettoria è effettivamente una circonferenza

Sulla base di questo possiamo quindi riscrivere l'accelerazione

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + \frac{V}{R} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{V} \hat{u}_N = \frac{dV}{dt} \hat{u}_T + \frac{V^2}{R} \hat{u}_N.$$

Possiamo quindi definire la componente **tangenziale** e **normale** dell'accelerazione:

tangenziale: è data dal cambiamento di velocità. È zero se $\vec{v}$ = cost!

normale: è data dal cambiamento di direzione. C'è sempre se la traiettoria è curva

$$\begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} \\ a_N = \dfrac{V^2}{R} \end{cases} \rightarrow \boxed{\vec{a} = a_T \hat{u}_T + a_N \hat{u}_N}$$

$\hookrightarrow$ è in pratica quella centripeta!

~ Coordinate polari

Ricordando che in queste coordinate, $\vec{v} = \frac{d\rho}{dt} \hat{u}_r + \rho \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta$,

deriviamo per ricavare l'accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\rho}{dt} \hat{u}_r + \rho \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta \right] =$$

$$= \frac{d^2\rho}{dt^2} \hat{u}_r + \frac{d\rho}{dt} \frac{d\hat{u}_r}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta + \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{u}_\theta + \rho \frac{d\theta}{dt} \frac{d\hat{u}_\theta}{dt} =$$

Ma avevamo visto che

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta$$ e si può facilmente vedere anche che $$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta$$

Il modulo di questo vettore sarà semplicemente:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

OSS

Nelle coordinate cartesiane, il moto in 3D può essere semplicemente scomposto in 3 moti da 1D, completamente indipendenti tra loro. Diventa per questo fondamentale capire e conoscere bene lo studio del moto 1D. Da lì, si ricaveranno facilmente tutti gli altri!

e quindi integro

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v_x(t')\,dt'$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_x(t')\,dt'$$ da cui si ricava

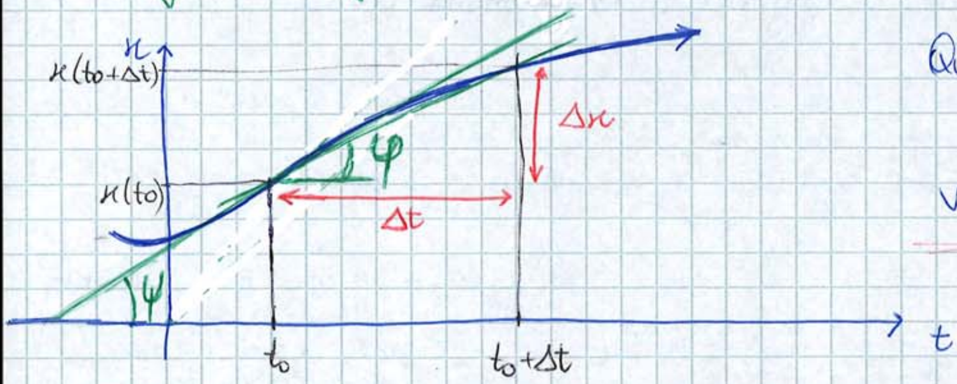
$$\boxed{x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t')\,dt'}$$ Legge ORARIA

OSS Posso riscrivere la legge ~~...~~ di prima della velocità media:

$$v_{m_x} = \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} v_i(t')\,dt'$$ → istantanea

→ Legame tra la velocità media e quella istantanea!

~ Significato grafico di v_m e v



Quindi $v_m = \dfrac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$

altro non è che

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \operatorname{tg}\varphi$$

↓ tangente della SECANTE

Invece la velocità istantanea, la definisco tramite l'angolo φ

$$v = \frac{dx}{dt} = \operatorname{tg}\varphi$$ → tangente alla CURVA

- Accelerazione

- Per l'accelerazione media, che in generale avevamo scritto

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$ qui diviene $$\boxed{\vec{a}_{m_x} = \frac{v_x(t_2) - v_x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 238

↳ Casi particolari di moto rettilineo:

(1) Moto uniformemente accelerato

$$a_x = \text{cost} = \frac{dv_x}{dt}$$

Quindi scrivo $dv_x = a_x \cdot dt$ e integro

$$\int_{v_x(t_0)}^{v_x(t)} dv_x = \int_{t_0}^{t} a_x \, dt' \quad \text{da cui} \quad v_x(t) - v_x(t_0) = a_x \int_{t_0}^{t} dt'$$

e quindi $\boxed{v_x(t) = v_x(t_0) + a_x(t-t_0)}$

Ma $v_x = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v_x(t)\,dt$ e integro $\int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v_x(t')\,dt'$

per cui $x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_x(t')\,dt' = \int_{t_0}^{t} \left[v_x(t_0) + a_x(t-t_0)\right] dt' =$

$$= v_x(t_0)(t-t_0) + a_x \int_{t_0}^{t} (t'-t_0)\,dt' = v_x(t_0)(t'-t_0) + \frac{1}{2}a_x(t-t_0)^2$$

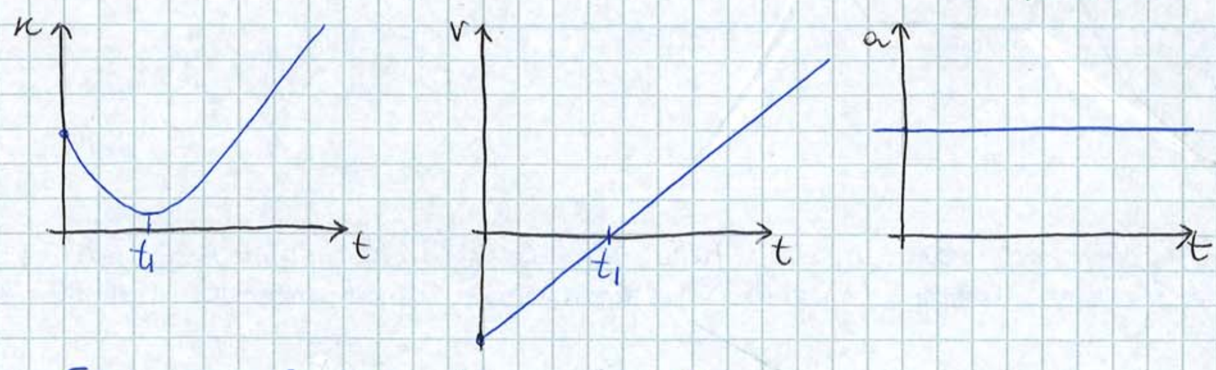
Perciò alla fine

$$\boxed{x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}a_x(t-t_0)^2}$$

Legge ORARIA

↳ la posizione ha una dipendenza quadratica dal tempo

Questo tipo di moto ha grafici



OSS Se e solo se $t_0 = 0$ allora

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ v_x(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Quindi →

3 Caso generale

Non conosco le caratteristiche del moto $(a(t))$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \rightarrow dv_x = a_x(t)\,dt \quad \text{e integrando}$$

$$\left[v_x(t) = v_{x0} + \int_{t_0}^{t} a_x(t')\,dt' \right]$$

Analogamente $v_x(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v_x(t)\,dt$

$$\left[x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x(t')\,dt' \right]$$

Legge ORARIA

4 Moto esponenzialmente smorzato

$\underline{a_x = -k v_x}$ ma al solito $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ quindi

$$\frac{dv_x}{dt} = -k v_x \rightarrow \frac{dv_x}{v_x} = -k\,dt$$ → eq. differenziale a variabili separabili

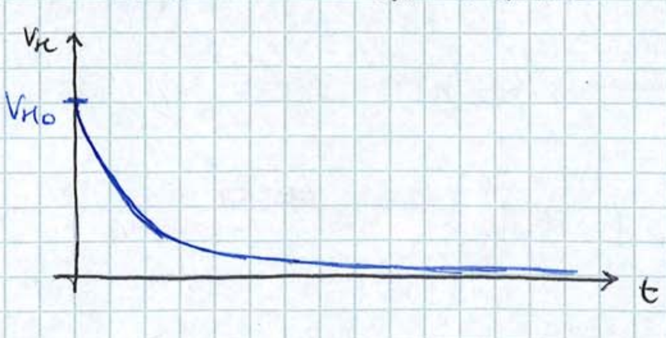
$$\int_{v_{x0}}^{v_x} \frac{dv_x'}{v_x'} = -k \int_{t_0}^{t} dt \longrightarrow \left[\ln v_x' \right]_{v_{x0}}^{v_x} = -k(t-t_0)$$

$$\ln\left(\frac{v_x}{v_{x0}}\right) = -k(t-t_0) \rightarrow \frac{v_x}{v_{x0}} = e^{-k(t-t_0)}$$

Allora

$$\left[v_x(t) = v_{x0}\, e^{-k(t-t_0)} \right]$$

Graficando avrò andamento tipo



E' appunto un esponenziale decrescente col tempo!

~ MOTO ARMONICO SEMPLICE

$$a_x = -\omega^2 x$$

↳ Seguono questo tipo di moto, ad esempio, un semplice sistema massa-molla, così come anche il pendolo semplice.

Voglio trovare la legge oraria $(x(t))$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

Eq. generale del moto armonico sempl.

↳ eq. diff. OMOGENEA

↳ Richiami di analisi

Posso trovare le soluzioni: $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$

se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, distinti $\rightarrow x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$

se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, coincidenti $\rightarrow x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$

il mio caso e' questo

se λ_1, λ_2 compl. coniugati $\rightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

allora $x(t) = Ae^{\alpha t}\cos(\beta t) + Be^{\alpha t}\sin(\beta t)$

Se trovo $A = a \sin\varphi$, $B = a\cos\varphi$ $\Rightarrow$ $\tan\varphi = A/B$, $a = \sqrt{A^2+B^2}$

Allora

$$x(t) = a\sin\varphi\cos(\omega t) + a\cos\varphi\sin(\omega t)$$

che per le leggi trigonometriche puo' essere riscritto

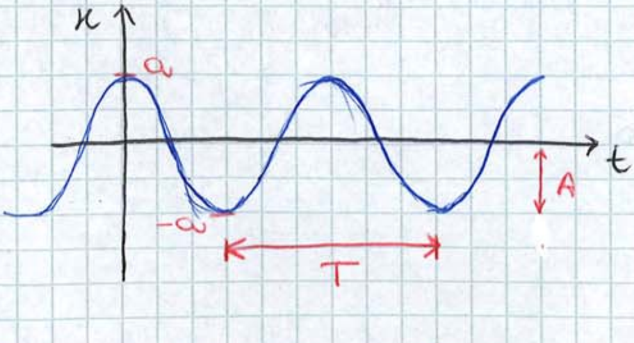
$$\boxed{x(t) = a \sin(\overbrace{\omega t + \varphi}^{fase})} \iff \boxed{x(t) = a\cos(\omega t + \varphi')}$$

a: ampiezza; φ: fase iniziale; ω: pulsazione

Legge ORARIA

$\varphi' \neq \varphi$ perche' ho messo coseno al posto di seno

Graficando verrà fuori qualcosa tipo



Si definisce il periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

la fase iniziale φ cambia a seconda se scelgo seno o coseno

• Devo determinare le condizioni al contorno:

Se $x(t_0=0)=0 \rightarrow x(t) = a\cos(\omega t + \varphi') = a\cos\varphi' = 0$

$$\vec{r}(t_0=0) \Rightarrow \begin{cases} x(t_0=0)=0 \\ y(t_0=0)=h \end{cases}$$

Quindi $\begin{cases} a_x = 0 & (v_x = \text{cost}) \rightarrow \text{moto uniforme } (x) \\ a_y = -g & (\vec{a} = -g\hat{j}) \rightarrow \text{moto uniform. accel. } (y) \end{cases}$

Perciò posso ricavare le leggi generali per questo tipo di moto:

$$\begin{cases} v(y) = v_{y_0} + a_y t \\ y(t) = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases}$$

che però, applicate al mio caso particolare: $\begin{cases} v_{y_0} = 0 \\ y_0 = h \\ a = -g \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y(t) = -gt \end{bmatrix}$$

↳ Mi manca la legge oraria lungo x, ma mi ricordo che

$$x(t) = \underbrace{x_0}_{\to 0} + v_{0x} t \rightarrow x(t) = \underbrace{v_{0x}}_{v_x = \text{cost} = v_0} t$$

Quindi le leggi orarie complete saranno

$$\begin{bmatrix} x(t) = v\ t \\ y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{bmatrix}$$

Legge ORARIA // Equazioni del moto

- Se voglio trovare la traiettoria, devo slegarla dal tempo:

$t = \frac{x(t)}{v_0}$ e sostituisco in $y(t)$:

$$y = h - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} \Rightarrow y = h - \frac{g}{2(v_{0x})^2} x^2$$

Traiettoria
↳ ed è l'equazione di una parabola

- Posso infine calcolare varie "condizioni particolari":

~ punto in cui tocca terra (gittata)

So che lì $y=0 \Rightarrow h = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} \Rightarrow x^2 = \frac{2hv_0^2}{g}$

quindi $x = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$

↳ Conclusione:

Si vede dal disegno che il moto circolare e' l'unico caso in cui $\hat{u}_T = \hat{u}_\theta$ per cui si possono confrontare le due scritture in due coord. diverse:

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}} \rightsquigarrow \text{non e' strano perche' sapevamo } S = R\theta$$

↳ L'accelerazione in coord. polari era:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_r + \left[\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\hat{u}_\theta$$

che pero' nel nostro caso si semplifica $(\rho = R = cost)$

$$\Rightarrow \vec{a} = \underbrace{-R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}_{\text{radiale} \equiv \text{accel. centripeta}}\hat{u}_r + \underbrace{R\frac{d^2\theta}{dt^2}}_{\text{accel. tang.} \equiv \text{trasversa}}\hat{u}_\theta$$

Quindi anche qui cerco la relazione con le coord. intrinseche.

Anche qui $\hat{u}_T = \hat{u}_\theta \Rightarrow \frac{dv}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}$

che altro non e' che

Ma $\hat{u}_r \neq \hat{u}_N$ pero' $\hat{u}_N = -\hat{u}_r$

per cui $\boxed{\frac{v^2}{R} = R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} \rightarrow$ neanche questo e' strano perche' $\theta = \frac{s}{R} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{1}{R} = \frac{v}{R}$

OSS Nel moto armonico

$\frac{d\theta}{dt} = \omega \rightarrow$ non pulsazione (vel. angolare)

E quindi $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha$ (acc angolare)

Posso quindi descrivere il moto circolare con θ e α:

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t}\omega(t')\,dt' & \text{posizione} \\ \omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t}\alpha(t')\,dt' & \text{velocita' angolare} \end{cases}$$

Ma ancora
$$\begin{cases} a_T = \|\vec{\alpha}\times\vec{r}\| = \|\vec{\alpha}\|\cdot\underbrace{\|\vec{r}\|\sin\theta}_{R} = \alpha R \\ a_N = \|\vec{\omega}\times\vec{v}\| = \|\vec{\omega}\|\cdot\|\vec{v}\|\underbrace{\sin(90^\circ)}_{1} = \omega v = \frac{(\omega R)^2}{R} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \end{cases}$$

↳ Quindi sì, valgono SEMPRE!

* [perche' $\frac{ds}{dt} = v_s = cost$ cioe' $\frac{d}{dt}(R\theta) = cost$ cioe' $\frac{d\theta}{dt} = cost$ cioe' $\omega = cost$]

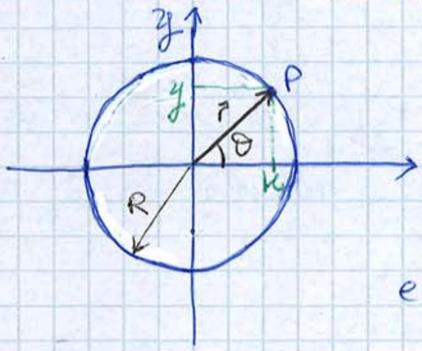
2.1 Moto circolare uniforme

Se $v = cost \not\Rightarrow a = 0$ ma solo $a_T = 0$

Perche' $[v = cost \Rightarrow \omega = cost]^* \Rightarrow \alpha = 0$

Quindi
$$\begin{cases} a_T = \alpha R = 0 \\ a_N = \omega^2 R \neq 0 \end{cases}$$
→ Quindi in questo caso acc. TOTALE $= a_N$

↳ La proiezione di un moto circolare uniforme su un solo asse, altro non e' che un moto armonico:



$$\begin{cases} x = \|\vec{r}\|\cos\theta = R\cos[\theta(t)] & (1) \\ y = \|\vec{r}\|\sin\theta = R\sin[\theta(t)] & (2) \end{cases}$$

Ma $\omega = cost \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = cost \Rightarrow d\theta = \omega\, dt$

e integrando $\int_{t_0}^{t} d\theta = \omega \int_{t_0}^{t} dt'$

Da cui $\theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t - t_0)$ che, per $t_0 = 0$ diviene

$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$. (3)

Quindi, sostituendo l'espressione di (3) in (2) e (1) si ottiene:
$$\begin{cases} x = R\cos(\omega t + \theta_0) \\ y = R\sin(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

che altro non sono che le equazioni di un moto armonico, con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = cost$ poiche' $\omega = cost$.

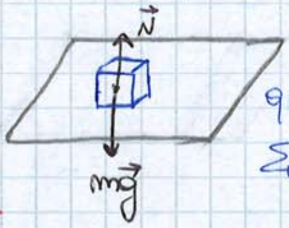
↓

Quindi il moto circolare puo' essere sempre visto come sovrapposizione di moti armonici lungo i singoli assi.

Questo postulato deriva da tutta una serie di accorgimenti: una volta si pensava che tutti i corpi fossero fermi (nel senso che l'unico stato NATURALE fosse quello di quiete). Poi si notò che un corpo, messo in moto da una forza, diminuisce presto la sua velocità e alla fine si ferma. Al contrario, però, se l'attrito diminuisce, lo spazio percorso dal corpo (prima di fermarsi) aumenta. Quindi nell'ipotesi di attrito totalmente assente, il corpo continuerebbe il suo moto (a velocità costante) indefinitamente

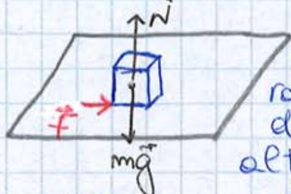
↓

NON c'è bisogno di una forza per mantenere il corpo in moto rettilineo uniforme



Il corpo è fermo, quindi per forza

$\sum_i \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{N} = m\vec{g}$



$\sum_i \vec{F} \neq 0$

Il corpo si sta muovendo e sta rallentando: ci deve essere qualche altra forza: l'attrito!

! La prima legge di Newton NON VALE per tutti i sistemi di riferimento, ma solo per quelli INERZIALI!

↓

Chiameremo SRI (Sist. di riferim. Inerziale) quello in cui

$$\sum_i \vec{F} = 0 \Rightarrow \text{corpo fermo o a velocità costante!}$$

↓

Fissato un sistema inerziale, si possono definire (infiniti altri) sistemi di riferimento inerziali tutti quelli che si muovono a velocità costante rispetto ad esso (che NON SONO cioè **accelerati**)

OSS
La superficie terrestre, a rigore, NON è SRI, ma la possiamo assumere tale per molte applicazioni.
In generale un sistema di riferimento che ruota rispetto al SRI NON è a sua volta inerziale

↳ Sulla base di queste cose si può dare una formulazione alternativa della 1ª legge di Newton:

"Se la forza netta su un corpo è zero, allora esiste un numero infinito di sistemi di riferimento inerziali, per i quali il corpo è in quiete o ha velocità costante (cioè ha accelerazione nulla)."

$$\sum_i \vec{F} = 0 \Rightarrow \exists\, \infty \text{ SRI} \,/\, \vec{a} = 0$$

II Legge di Newton

"Per un dato oggetto, l'accelerazione risultante è proporzionale all'intensità della forza netta applicata sull'oggetto: la proporzionalità costante dipende dal corpo: MASSA

$$\left[\sum_i \vec{F} = m\vec{a}\right]$$

allora dovrà necessariamente essere $m_A = m_B + m_C$

↳ L'unità di misura della massa è il kg, già definito.

→ Possiamo definire la 2ª legge di Newton in maniera più generale, tramite cioè la **quantità di moto**

Si definisce la quantità di moto (**MOMENTO LINEARE**) di un corpo:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

Le dimensioni sono $[p] = MLT^{-1}$ → u.m: kg m/s

Quindi possiamo scrivere

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \Sigma_i \vec{F}$$

ipotizziamo $m = cost$

↳ Quindi vale $\boxed{\Sigma_i \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$

! Nonostante l'assunzione ($m = cost$) che abbiamo fatto per derivare, questa scrittura della 2ª legge di Newton vale anche se la massa NON è costante

tipo i razzi: espellono carburante e diminuiscono la massa!

Da questa scrittura (generale) deriva $\Sigma_i \vec{F} = m\vec{a}$ quando $m = cost$.

~ IMPULSO

Da quanto appena detto, scriviamo

$$d\vec{p} = \Sigma_i \vec{F} \cdot dt \quad \rightarrow \quad d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt$$

(non ci portiamo dietro Σ_i per comodità di scrittura)

e integrando

$$\underbrace{\int_{p(t_1)}^{p(t_2)} d\vec{p}}_{(p_2 - p_1)} = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} F(t)\, dt}_{\text{IMPULSO} \rightarrow \vec{J}}$$

$(p_2 - p_1)$ variazione di $\vec{p}$ nell'intervallo considerato

↳ impulso della forza nell'intervallo considerato.

! Se NON so come è fatta $F(t)$, cioè come varia nel tempo, lascio l'integrale così, se no scrivo J.

Quindi $$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\, dt = \Delta p \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{J} = \Delta\vec{p}}$$ Teorema dell'impulso!

"Quando una forza netta agisce su un corpo, l'impulso di questa forza è uguale al cambiamento di momento lineare nel corpo".

↓

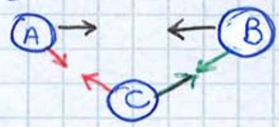
È la versione integrale della II legge di Newton!

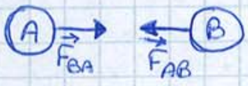
Quindi per definizione $(\Delta p_x = \langle F_x \rangle \Delta t)$ le due aree sono uguali!

III Legge di Newton

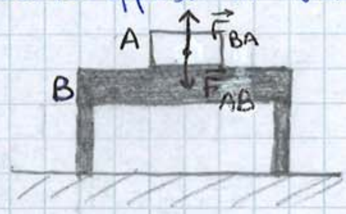
"Quando un corpo A esercita una forza $(\vec{F}_{AB})$ su un corpo B, il corpo B risponderà esercitando una forza $(\vec{F}_{BA})$ sul corpo A uguale e contraria".

$$\boxed{\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}}$$



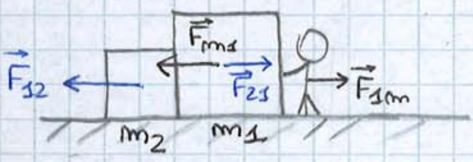


- Le forze sono sempre a coppie → OCCHIO: NON sono esercitate sullo stesso corpo
- Sono opposte in verso, ma hanno uguale modulo



Il corpo A esercita una forza (peso) sul tavolo (B) che risponde con una forza uguale e contraria (reazione vincolare). Ovviamente il tavolo a sua volta esercita una forza sulla terra, che risponderà con una uguale e contraria!

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$



Qui i corpi non sono più fermi, perché sotto la spinta dell'uomo le 2 casse si stanno spostando verso sinistra!
Trascurando ogni attrito, per la 3° legge di Newton si avrà:

$$\begin{cases} \vec{F}_{m1} = -\vec{F}_{1m} \\ \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \end{cases}$$

Ma per la II legge di Newton: $\sum_i \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{F}_{m1} + \vec{F}_{21} = m_1\vec{a}$$
$$\vec{F}_{12} = m_2\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{m1} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

↳ la forza esercitata dall'uomo è pari a quella che eserciterebbe per spostare un'unica cassa di massa $M = m_1 + m_2$

TIPI DI FORZE

Le forze fondamentali in natura sono 4:

① Forza gravitazionale: è quella che governa la gravitazione, l'interazione tra stelle, pianeti... Agisce anche a distanze infinite. Questa è responsabile del peso, ed è la più debole delle 4.

↳ Quindi la forza $\vec{F}_{TC}$ con cui la terra "attrae" un corpo sulla sua superficie, altro non è che il peso

$$\left[\vec{W} = \vec{g}\, m\right]$$

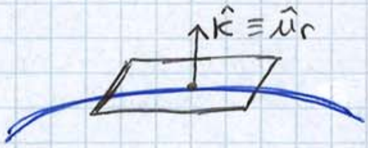
$\vec{g}$ è appunto un vettore di modulo costante, diretto come $(-\hat{u}_r)$

$$\|\vec{g}\| \cong 9,81\ m/s^2 \ \left(= N/kg\right)$$

↓

Quindi $\vec{g}$ è la $\dfrac{\text{Forza peso}}{\text{massa}}$, diventa accelerazione SOLO SE IL CORPO CADE.

Localmente, in un sist. di riferimento cartesiano, scriveremo $\vec{g}$ sempre diretto come $(-\hat{k})$



$$\vec{g} = -\gamma \frac{M_T}{R_E^2}\hat{k}$$

~ Forza elettrostatica

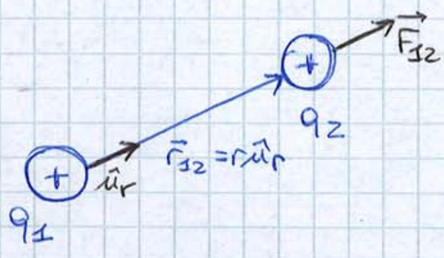
Date 2 particelle **cariche** con carica q_1 e q_2, distanti r, la forza elettrostatica (o di Coulomb) che le mette in interazione tra loro ha intensità:

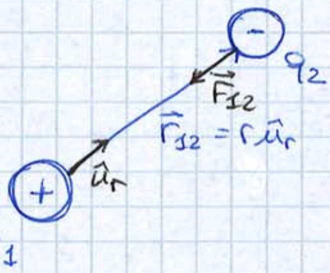
$$\left[F = k\frac{|q_1\cdot q_2|}{r^2}\right]$$

Con $k \equiv$ costante

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8,99\times10^{9}\ \frac{Nm^2}{C^2}$$

Coulomb





Questa forza è sempre diretta lungo la congiungente le 2 cariche ed è attrattiva o repulsiva a seconda del segno delle 2 cariche:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{u}_r = k\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}_{12}$$

↑

$\vec{r}_{12} = r\hat{u}_r$

$$\begin{cases} \text{Se } q_1\cdot q_2 > 0 \\ \vec{F}_{12} \parallel \hat{u}_r \end{cases}$$

Cariche uguali si respingono!

$$\begin{cases} \text{Se } q_1 q_2 < 0 \\ \vec{F}_{12} \parallel (-\hat{u}_r) \end{cases}$$

Cariche opposte si attraggono!

In pratica se io voglio allungare la molla, devo in ogni caso applicare una forza ad entrambi gli estremi della molla!

↓

Devo applicare $F = k(\underbrace{\ell - \ell_0}_{\text{allungamento}})$ ad entrambi gli estremi

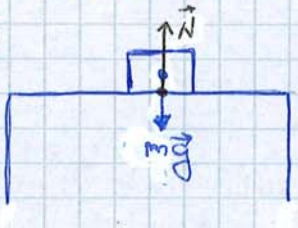
lungh. a riposo

perche' $\|\vec{F_1}\| = \|\vec{F_3}\|$

~ Forze vincolari

Il vincolo, per definizione, limita il movimento di un altro corpo tramite una forza di contatto

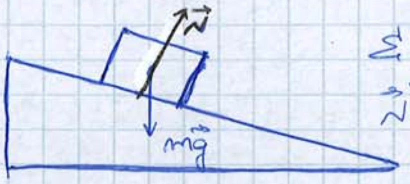
[1] $\vec{N}$



$\sum \vec{F} = 0$

↓

$N = mg$ → NON vale sempre!



$\sum \vec{F} = 0$

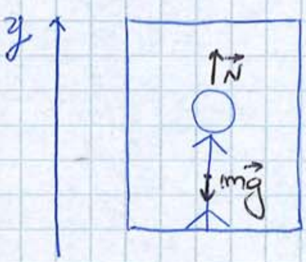
⇓

$\vec{N} \neq m\vec{g}$

! La forza NORMALE e' esercitata da ogni superficie sul corpo con cui e' a contatto! Se $N=0$, il corpo non e' più a contatto con la superficie!

~ Sensazione di peso apparente

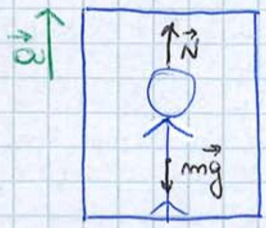
ASCENSORE



① fermo o a velocità costante $(\vec{a} = 0)$

$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{N} + m\vec{g} = 0$

$[N = mg]$



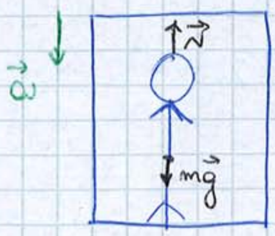
② Ascensore sale $(\vec{a} \neq 0)$

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$

$N - mg = ma \rightarrow [N = m(g+a)]$ $N > mg$: mi sento più pesante

o si ferma al piano

③ Ascensore scende $(\vec{a} \neq 0)$



$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$

$N - mg = -ma \rightarrow [N = m(g-a)]$ $N < mg$: mi sento più leggero

~~[illegible]~~ da cui $F_A - F_B = ma \Rightarrow \underline{F_A > F_B}$ → altrimenti non si muoverebbe

Attenzione però: finché la fune è da considerarsi IDEALE, allora $m \to 0$

quindi $\vec{F}_A + \vec{F}_B = 0$ → ancora una volta la $T = cost$!

↳ È in pratica la stessa cosa che succede nella carrucola:

$T_1 = T_2$ (in modulo).

C'è ovviamente un perno che tiene la carrucola ma finché è ideale non ci importa!

3 ATTRITO (statico e dinamico)

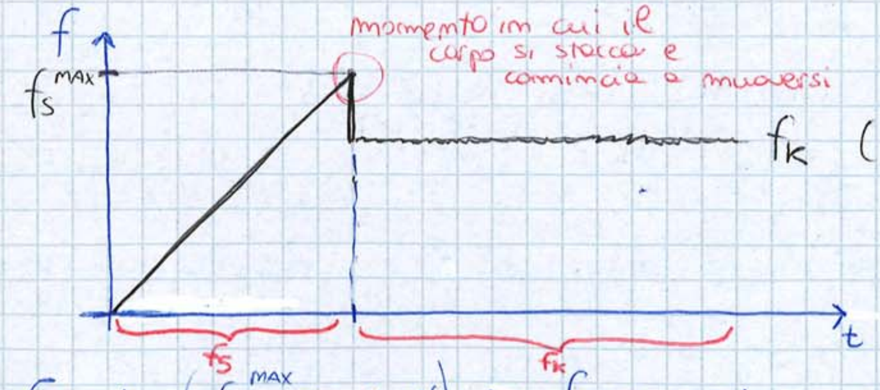
- Non ha un valore fisso: è uguale alla forza con cui io tiro (o spingo) finché il corpo non comincia a muoversi! ↳ quello sarà il valore MAX
- La forza di attrito MAX dipende dalla massa? No: dipende da N! (reazione vincolare) Se io schiaccio il corpo, cambia N, non la massa → la forza di attrito max cambia con N!

OSS È perpendicolare alla reazione vincolare N.

$$\left[f_s^{MAX} = \underbrace{\mu_s}_{\text{coeff di attrito statico}} N \right]$$ forza di attrito STATICO

Quindi l'attrito statico è sempre $f_s \leq f_s^{MAX}$

- L'attrito MAX statico è **maggiore dell'attrito dinamico** → devo fare più fatica a spingerlo la prima volta che non a continuare il moto dopo!
- Anche l'attrito dinamico dipende da N (e non dalla massa).
- L'attrito dinamico ha però un **valore FISSO** $\left[f_k = \underbrace{\mu_k}_{\text{coeff di attrito dinamico}} N \right]$ forza di attrito DINAMICO

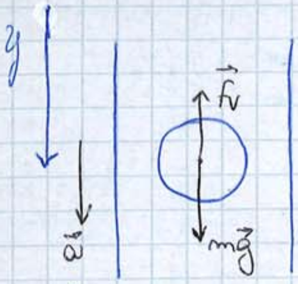


I coeff. sono dati: dipendono dal corpo e dalla superficie

Essendo $(f_s^{MAX} = \mu_s N) > f_k = \mu_k N \Rightarrow \left[\mu_k < \mu_s \right]$

Vale per entrambi $0 < \mu < 1$

② Corpo che **cade** in un fluido (lentamente)



$\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow m\vec{g} - \vec{f_v} = m\vec{a}$

perche' e' già opposto alla velocità quindi solo $f_v = bv$

$mg - bv = m \frac{dv}{dt}$

da cui $\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m} v = g} \rightarrow$ Eq. di ff. del 1 ordine

Soluzione omogenea:

$\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m} v = 0 \rightarrow v = A e^{-\frac{b}{m}t}$

Soluzione particolare:

$v = \text{cost} \rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \rightarrow v = \frac{mg}{b}$

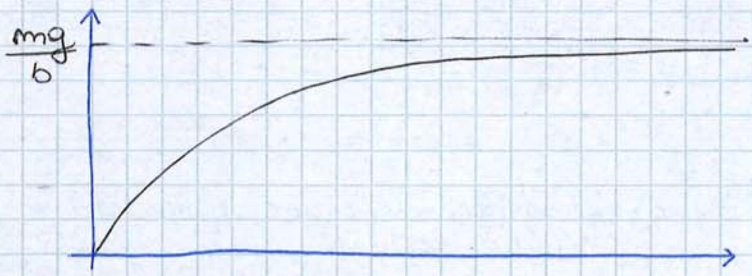
Soluzione totale

$$\boxed{v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)}$$

perche' a $t=0$, $v=0$:

$v(0) = A + \frac{mg}{b} = 0$

quindi $A = -\frac{mg}{b}$



Ha un andamento asintotico: raggiungo un valore (asintoto) che chiamo **velocità limite**

$$\boxed{V_{lim} = \frac{mg}{b}}$$

③ Caso generico: corpo NON sferico, velocità NON piccola

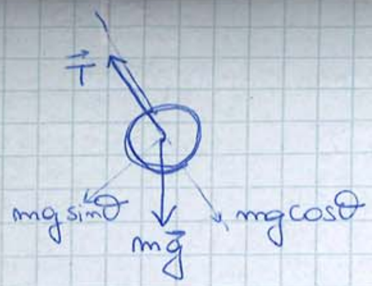
$f_v \neq -bv$ ma $\boxed{f_v = \frac{1}{2} D \rho A v^2}$

coeff ADIMENSIONALE

area trasversale dell'oggetto rispetto alla direzione del moto

Qui la velocità limite la ricavo semplicemente tramite la condizione:

$f_v = mg \rightarrow \frac{1}{2} D\rho A v^2 = mg \Rightarrow \boxed{V_{lim} = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}}}$



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} \hat{u}_N & T - mg\cos\theta = m a_N \quad \text{accelerazione centripeta} = \frac{v^2}{l} \\ \hat{u}_T & \underbrace{-mg\sin\theta = m a_T}_{} \quad \text{acc. tangenziale} = \frac{d^2s}{dt^2} \end{cases}$$

la legge del moto la contiene quella che ha l'acc. tangenziale, SEMPRE

Ora dalla $\hat{u}_T$:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + g\sin\theta = 0 \qquad \text{ma } \theta = s/\ell \qquad \frac{d^2s}{dt^2} + g\sin(s/\ell) = 0$$

Ma se io riesco a dire che s/ℓ e' piccolo, $\sin(s/\ell) \simeq s/\ell$ per cui

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{\ell}s = 0 \qquad \text{ma } g/\ell > 0 \text{ SEMPRE} \rightarrow \text{la chiamo } \omega^2:$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0 \qquad \text{con } \omega = \sqrt{g/\ell}$$

↳ NOTA che e' una classica equazione di moto armonico!

La soluzione sarà: $s(t) = S_{MAX}\sin(\omega t + \varphi)$

Pongo le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} a\ t=0,\ s=0 \Rightarrow s(0) = S_{MAX}\sin(\varphi) = 0 \rightarrow \varphi = 0 \\ a\ t=0,\ s = S_{MAX} \Rightarrow s(0) = S_{MAX}\sin(\varphi) = S_{MAX} \rightarrow \varphi = \pi/2 \end{cases}$$

potrei scrivere anche

$$(1)\quad s(t) = S_{MAX}\sin(\omega t + \pi/2) = S_{MAX}\cos(\omega t) \quad (2)$$

OSS (1) e (2) esprimono lo stesso identico moto solo con tempi di partenza fissati diversi

~ Coord. polari

Cambia ben poco:

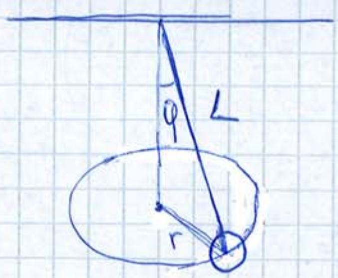
$$s(t) = S_{MAX}\cos(\omega t) \longrightarrow \theta(t) = \theta_{MAX}\cos(\omega t)$$

$$\text{dove } \theta_{MAX} = \frac{S_{MAX}}{\ell}$$

↳ Sarei potuta partire direttamente dalle coord. polari:

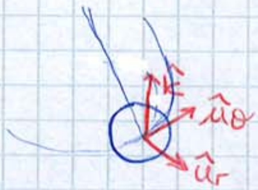
Quindi $\hat{u}_\theta = \hat{u}_T$; $\hat{u}_r = -\hat{u}_N$

PENDOLO CONICO

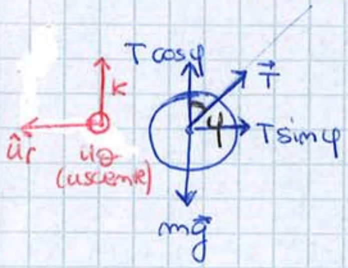


- filo inestensibile
- massa puntiforme
- $\varphi = \text{cost}$
- accelerazione SOLO centripeta

~ coord. cilindriche → il moto è sul piano, ma le forze no!



Procedo ancora una volta col DCL



$$\begin{cases} \hat{u}_r & -T\sin\varphi = m a_N \\ \hat{u}_\theta & 0 = m a_\theta \rightarrow a_\theta = 0 \\ \hat{k} & T\cos\varphi - mg = 0 \rightarrow T = \dfrac{mg}{\cos\varphi} \end{cases}$$

Sostituendo T in $\hat{u}_r$:

$$+\cancel{m}g\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = m\left[-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = +\cancel{m}\,r\,\omega^2$$

ω vel angolare

$$g\,\mathrm{tg}\,\varphi = r\,\omega^2 \qquad \text{oppure} \qquad g\,\frac{\cancel{\sin\varphi}}{\cos\varphi} = \ell\,\cancel{\sin\varphi}\,\omega^2$$

$$\hookrightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{g}{\ell\cos\varphi}}$$

Ma posso anche leggerla come

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{g}{\omega^2 \ell}}$$

Dati ℓ e φ, esiste una sola vel. angolare che permette al pendolo di fare quel determinato percorso.

OSS Tanto più ω è grande, tanto più φ tende a $\pi/2$ (non ci può comunque arrivare mai, perché se no il peso non sarebbe compensato ~~[illegible]~~ da nulla) quindi tanto più è piccolo $\cos\varphi$.

$$= -mg\hat{k}\cdot(z_B - z_A)\hat{k} = -mg(z_B - z_A)\underbrace{\hat{k}\cdot\hat{k}}_{1 \text{ perché sono versori}} = -mg(z_B - z_A) = mg(z_A - z_B)$$

Quindi $\boxed{W_{AB} = mg(z_A - z_B)}$

↳ Questo vale sempre (non ho imposto nulla su z_A e z_B) ma varrà semplicemente:

$$\begin{cases} W_{AB} > 0 & \text{se } z_A > z_B \text{ (corpo scende)} \rightarrow W_{AB} = mgh \\ W_{AB} < 0 & \text{se } z_A < z_B \text{ (corpo sale)} \rightarrow W_{AB} = -mgh \end{cases}$$

! Vedremo dopo che sono pochi i casi in cui il lavoro non dipende dalla traiettoria (questo è uno di quei pochi casi)

OSS Viene la stessa cosa facendo l'esempio su un corpo che scende da un piano inclinato senza attrito.

~ 1D: forza NON costante → dipende dal punto

Se guardo il singolo punto (infinitesimo) allora F è costante → poi li sommo:

$W_{AB} = \sum_i (\vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i)$ cioè faccio il limite e quindi

$$\boxed{W_{AB} = \int_A^B \underbrace{\vec{F}\cdot d\vec{r}}}$$

si chiama $d\vec{W}$: lavoro elementare associato allo spostamento dr.

Ma posso anche vedere che

$d\vec{r} = dx\,\hat{\imath}$ e quindi

$$W_{AB} = \int_A^B F\cdot dx\,\hat{\imath} = \int_A^B F\cdot\hat{\imath}\,dx = \int_A^B \underbrace{F_x\,dx}$$

è un integrale UNIDIMENSIONALE

② Lavoro della forza elastica

$$\begin{cases} \vec{F} = -kx\hat{\imath} \\ \Delta\vec{r} = (x_B - x_A)\hat{\imath} \text{ generico} \end{cases}$$

Quindi $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B F_x\,dx = \int_{x_A}^{x_B} -kx\,dx =$

$$= -\frac{1}{2}k\left[x^2\right]_{x_A}^{x_B} = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$$ quindi $\boxed{W_{AB} = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2)}$

OSS Anche questa, come la forza peso, dipende praticamente solo da dove è partito e dove è arrivato!

Qui $\begin{cases} W_{AB} < 0 & \text{se } x_A, x_B > 0 \text{ ma } x_B > x_A \\ W_{AB} > 0 & \text{se } x_A, x_B > 0 \text{ ma } x_A > x_B \end{cases}$

E integrando $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} F_x \, dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y \, dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z \, dz$

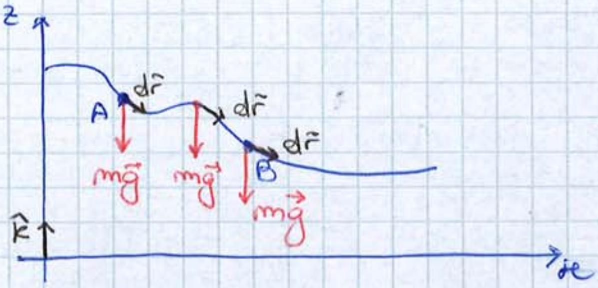
OSS

Se agiscono più forze dovrò tenere conto della risultante:

$\vec{R} = \sum_i \vec{F_i}$ per cui $W_{AB}^{TOT} = \int_A^B \vec{R} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$

cioè $W_{AB}^{TOT} = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_i W_{i_{AB}}$

↳ Si può quindi dimostrare come vi siano delle eccezioni, tipo il lavoro fatto dalla forza peso, in cui il lavoro stesso non dipende dalla traiettoria ma solo dai punti di inizio e fine:



Si assume attrito nullo, e forza peso $m\vec{g} = \text{cost.}$

In particolare, per il sist. di riferimento scelto, sarà

$m\vec{g} = -mg\hat{k}$

Quindi, da quanto detto, sarà:

$$W_{AB} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -mg \int_A^B \underbrace{\hat{k} \cdot d\vec{r}}_{dz} = -mg(z_B - z_A) = mg(z_A - z_B)$$

Posso poi chiamare la distanza $(z_A - z_B) = h \rightarrow W_{AB} = mgh$

C.V.D.

~ POTENZA

Per definizione, è $\left[P = \frac{\delta W}{dt} \right]$

Sviluppando $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt$ risulta

$$P = \frac{\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \cancel{dt}}{\cancel{dt}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$ velocità

Per cui si ha $\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$ Potenza istantanea

Se prendo lo mattoni tutti assieme o li prendo a uno a uno, il lavoro finale non cambia, è la potenza che cambia.

Fissato invece un intervallo di tempo Δt, si scrive

$\left[\langle P \rangle = \frac{W}{\Delta t} \right]$ Potenza media

che anche in questo caso possiamo sviluppare usando

$d\vec{r} = ds \cdot \hat{u}_T$ →

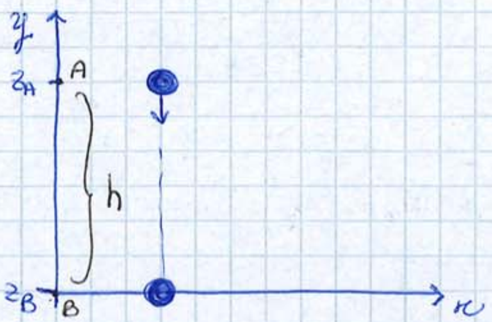
OSS

Se $\|\vec{v}\|$ aumenta $\rightarrow \Delta E_k > 0 \rightarrow W_{AB} > 0$

$\|\vec{v}\|$ diminuisce $\rightarrow \Delta E_k < 0 \rightarrow W_{AB} < 0$

↳ Questo teorema risulta molto utile nelle applicazioni pratiche:

Corpo in caduta libera:



$$W_{AB}^{TOT} = W_{AB}^{FORZA\ PESO} = mg(z_A - z_B)$$

ma abbiamo anche visto $W_{AB} = \Delta E_k$

Quindi $mg(z_A - z_B) = E_k^B - E_k^A$

Ma $V_A = 0 \rightarrow E_k^A = 0$ per cui è facile ricavare la velocità di caduta:

$$\rightarrow \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 \rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$$

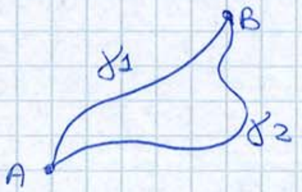
OSS

Sarebbe venuto lo stesso risultato per un corpo che scende, partendo da fermo, senza attrito, su un piano inclinato, perché abbiamo già visto che il lavoro non cambia, e anche ΔE_k sarà identica

01. 04. 16

~ FORZE CONSERVATIVE

Abbiamo visto che, in generale, il lavoro DIPENDE dal percorso scelto per unire due punti, cioè da come si arriva da un punto A ad un punto B:



$$W_{AB}^{\gamma_1} \neq W_{AB}^{\gamma_2}$$

Ma abbiamo anche visto che in qualche caso particolare si può solo tenere conto del punto di partenza e arrivo.

↓

In pratica dipende dal **TIPO DI FORZA** in gioco:

$\exists$ forze / W_{AB} NON dipende dal percorso!

Queste sono ad esempio le

- forza peso $\rightarrow W_{AB} = mg(z_A - z_B)$
- forza elastica $\rightarrow W_{AB} = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2)$

} Già accennato con gli esempi

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 238

OSS Questa proprietà delle forze conservative si può esprimere anche tramite la funzione ROTORE:

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \iff \operatorname{rot}\vec{F} = 0 \qquad (\nabla \times \vec{F} = 0)$$

↳ prodotto vettoriale dell'operatore NABLA ($\vec{\nabla}$) per $\vec{F}$

↓ Una forza conservativa è anche **IRROTAZIONALE**, cioè ha rotore nullo.

↳ Non vale sempre il viceversa!

Dove nabla è:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

Questo operatore se moltiplicato scalarmente ad un altro vettore me dà la **divergenza**, se vettorialmente me dà il **rotore**:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u}(x,y,z) = \frac{\partial u_x}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u_z}{dz}\hat{k}$$

Divergenza di $\vec{u}(x,y,z)$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{i} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Rotore di $\vec{F}(x,y,z)$

↓

$\operatorname{rot}\vec{F} = 0$ implica che le componenti sono uguali secondo:

$$\underbrace{\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}}_{\text{si annulla la componente lungo } \hat{i}} \; ; \quad \underbrace{\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}}_{\text{si annulla la componente lungo } \hat{j}} \; ; \quad \underbrace{\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}}_{\text{si annulla la componente lungo } \hat{k}} \qquad (2)$$

Invece, se questo operatore è applicato ad una funzione scalare $U(x,y,z)$ me dà il **gradiente**:

$$\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

Gradiente di $U(x,y,z)$

↳ Una forza costante (ad esempio il peso $\vec{W} = m\vec{g}$) è conservativa poiché la sua derivata è nulla. ~~è verif~~

Quindi si verifica la (2)

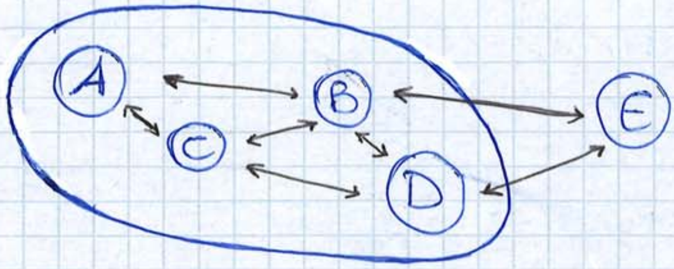
~~Hanno derivata nulla anche~~

Si può ragionare in generale come "le forze tali che $F_x(x)$, $F_y(y)$, $F_z(z)$ abbiano derivate nulle". ~~$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial F_x}{\partial z}$~~

Ad esempio la forza elastica $\rightarrow \vec{F} = F_x\hat{i} = -kx\hat{i} \rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial F_x}{\partial z} = 0$

~ ENERGIA POTENZIALE

Per ora andiamo a considerare un **SISTEMA**: insieme di corpi (pti materiali) che possono o meno interagire tra loro e/o con l'ambiente esterno



Ovviamente sono io che scelgo di definire il sistema nel modo più comodo, e quindi devo poi fare attenzione a quali corpi (e quindi forze) sono da considerare interne o esterne

↳ Definiamo **ISOLATO** un sistema sul quale NON agisce nessuna forza esterna → ci sono cioè solo interazioni tra i corpi interni al sistema.

↳ Per definizione, l' UNIVERSO è un sistema sempre ISOLATO!

- Consideriamo un sistema nel quale **almeno** una delle forze interne sia **conservativa**:

Varrà quindi $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ che dipende solo da A e B

Si definisce una grandezza **scalare** tale che:

$$\boxed{W_{AB} = E_p^A - E_p^B = -\Delta E_p}$$

E_p: energia potenziale

Caratteristiche:

NON ha senso parlare di E_p di un solo corpo

- E' legata alla configurazione del sistema: è cioè funzione delle posizioni relative dei corpi
- Se una forza fa lavoro positivo, causa una diminuzione di E_p:

$$\begin{cases} W_{AB} > 0 \iff E_p \text{ DECRESCE} \\ W_{AB} < 0 \iff E_p \text{ CRESCE} \end{cases}$$

- Ha le stesse dimensioni del lavoro e dell' en. cinetica:

$[E_p] = ML^2T^{-2}$ → u.m: Joule

↳ Dalla definizione segue:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = \int_A^B -dE_p \rightarrow \boxed{\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p}$$

Quindi scriviamo $f = \frac{G}{r} = \frac{G}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

E sviluppiamo le derivate:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{\cancel{2}} G (\cancel{2}x)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} = -\frac{Gx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} = -G\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{Gy}{r^3} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{Gz}{r^3}$$

Quindi $\nabla \vec{f} = -\frac{Gx}{r^3}\hat{i} - \frac{Gy}{r^3}\hat{j} - \frac{Gz}{r^3}\hat{k} = -\frac{G}{r^3}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$.

- Dalla definizione di E_p segue ancora che

1. Lungo un percorso chiuso NON si ha variazione di E_p:

$$W_{AB} = E_p^A - E_p^B = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

anche come definizione di forza conservativa.

2. Possiamo sempre calcolare la variazione di E_p, quindi un dato valore di E_p è definito tramite una costante (arbitraria) additiva:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_p^A - E_p^B \rightarrow E_p^B = E_p^A + \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Posso quindi sempre trovare uno stato (A) in cui $E_p = 0$, così da facilitare i calcoli.

↳ Vediamo per le "tipiche" forze conservative viste finora:

(1) Forza gravitazionale:

$$W_{AB} = mg(z_A - z_B) = \underbrace{mg z_A}_{E_p^A} - \underbrace{mg z_B}_{E_p^B} = E_p^A - E_p^B$$

Quindi vale $E_p(z) = mgz + c$ ← costante (arbitraria) additiva

Posso scegliere per esempio $E_p(z=0) = 0 \rightarrow c = 0$

(2) Forza elastica

$$W_{AB} = \frac{1}{2}k x_A^2 - \frac{1}{2}k x_B^2 = E_p^A - E_p^B$$

Quindi $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + c$

Anche qui potrò sempre scegliere $E_p(x=0) = 0 \rightarrow c = 0$

Quindi in A:

$$E_p^A = mgz_A + \cancel{c}$$

la velocità si inverte ed è NULLA! $\leftarrow E_k^A = 0$

$$\left.\begin{aligned} E_p^A &= mgz_A + \cancel{c} \\ E_k^A &= 0 \end{aligned}\right\} E_m^A = mg(L - L\cos\theta_0) = mgL(1-\cos\theta_0)$$

In un punto generico, con θ generico:

$$\left.\begin{aligned} E_p(\theta) &= mgL(1-\cos\theta) \\ E_k(\theta) &= \frac{1}{2} m v_\theta^2 \end{aligned}\right\} E_m$$

Ma si deve conservare (non ho forze esterne):

$$\cancel{m}gL(1-\cos\theta_0) = \cancel{m}gL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}\cancel{m}v_\theta^2$$

per cui

$$v_\theta = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

Se il θ generico è la verticale $\rightarrow \theta = 0 \rightarrow \cos\theta = 1$:

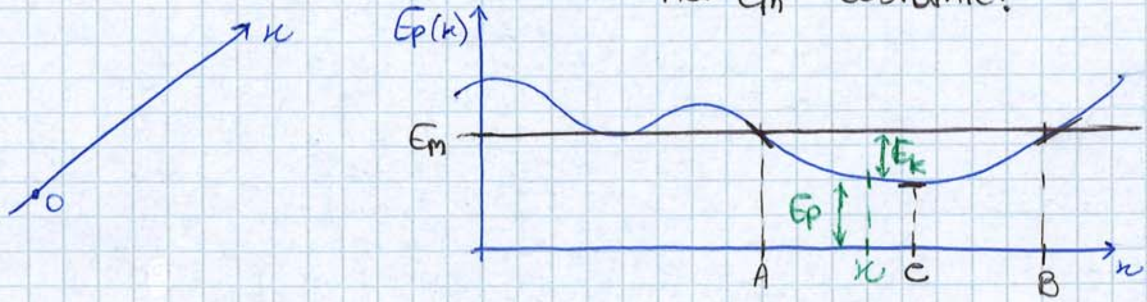
$$v_\theta = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}$$

C.V.D.

~ Diagrammi Energetici

In un moto (1D per semplicità) l'E_p del corpo in esame può fare qualsiasi variazione:

Ma E_m = costante!



In A e in B $\rightarrow E_m = E_p \rightarrow E_k = 0$: il corpo è fermo!

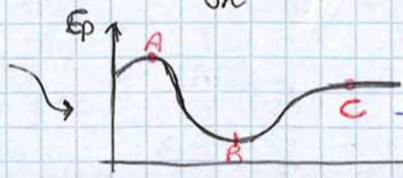
In x $\rightarrow E_m^x = E_p^x + E_k^x$

↳ A e B sono detti punti di inversione
C è invece punto di equilibrio ↳ Lo sono tutti i punti in cui $\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \Rightarrow F_x = 0$

↓

In particolare può essere un equilibrio STABILE o INSTABILE

MIN di E_p (B) — MAX di E_p (A)



C → Equilibrio INDIFFERENTE ($E_p \simeq cost$)

MOTI RELATIVI → $\nexists$ MOTO "ASSOLUTO"

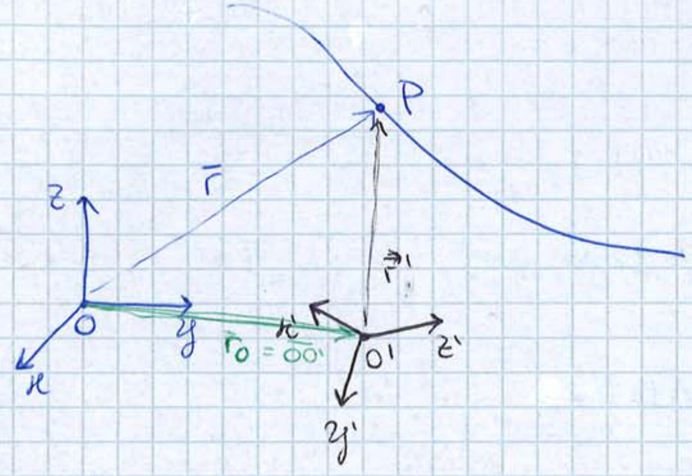
1 | 05.04.16

Tutte le leggi fisiche sono INVARIANTI: Relatività Galileiana
rimangono cioè valide anche se cambio (sposto) l'origine e/o l'orientazione degli assi (rimanendo comunque fisso).

Si dice che le leggi sono "invarianti a traslazioni e rotazioni nello spazio"; lo spazio è pertanto OMOGENEO e ISOTROPO.

Ma che succede quando 2 sistemi di riferimento sono in moto uno rispetto all'altro?

~ Teorema delle velocità relative



Banalmente, varrà

$\vec r = \vec r\,' + \vec r_0$ → distanza di O' da O

$\vec r$: distanza di P da O; $\vec r\,'$: distanza di P da O'

$$\begin{cases} \vec r = x\hat\imath + y\hat\jmath + z\hat k \\ \vec r\,' = x'\hat\imath' + y'\hat\jmath' + z'\hat k' \\ \bar r_0 = x_0\hat\imath + y_0\hat\jmath + z_0\hat k \end{cases}$$

Velocità di P

per O : $\vec v = \dfrac{d\bar r}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\hat\imath + \dfrac{dy}{dt}\hat\jmath + \dfrac{dz}{dt}\hat k$

per O' : $\vec v\,' = \dfrac{d\bar r'}{dt} = \dfrac{dx'}{dt}\hat\imath' + \dfrac{dy'}{dt}\hat\jmath' + \dfrac{dz'}{dt}\hat k'$

Ma come sono legate tra loro queste velocità?

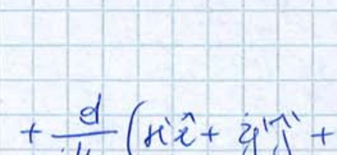
Vale $\bar r = \bar r_0 + \bar r'$ quindi

$$\vec v = \frac{d}{dt}(\bar r_0 + \bar r') = \underbrace{\frac{dx_0}{dt}\hat\imath + \frac{dy_0}{dt}\hat\jmath + \frac{dz_0}{dt}\hat k}_{\bar V_0} + \frac{d}{dt}\left(x'\hat\imath' + y'\hat\jmath' + z'\hat k'\right) =$$

$$= \vec V_0 + \underbrace{\left(\frac{dx'}{dt}\hat\imath' + \frac{dy'}{dt}\hat\jmath' + \frac{dz'}{dt}\hat k'\right)}_{\vec V'} + \underbrace{\left(x'\frac{d\hat\imath'}{dt} + y'\frac{d\hat\jmath'}{dt} + z'\frac{d\hat k'}{dt}\right)}_{(*)}$$

$\dfrac{d\hat\imath'}{dt} = \vec\omega \times \hat\imath'$ con $\|\bar\omega\| = \dfrac{d\theta}{dt}$

Questo perché il moto del SR centrato in O' può essere visto come composizione di una traslazione più una rotazione istant. attorno ad O, con vel. ang. ω



$\boxed{2}$ 05.04.16

① $$\frac{d\bar{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x'\hat{i}' + v_y'\hat{j}' + v_z'\hat{k}'\right) = \bar{a}' + v_x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + v_y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + v_z'\frac{d\hat{k}'}{dt} =$$

$$= \vec{a}' + v_x'(\bar{\omega}\times\hat{i}') + v_y'(\bar{\omega}\times\hat{j}') + v_z'(\bar{\omega}\times\hat{k}') =$$

$$= \bar{a}' + \bar{\omega}\times\left(v_x'\hat{i}' + v_y'\hat{j}' + v_z'\hat{k}'\right) = \bar{a}' + \bar{\omega}\times\bar{v}'$$

② $$\frac{d}{dt}(\bar{\omega}\times\bar{r}') = \frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}' + \bar{\omega}\times\frac{d\bar{r}'}{dt} = \bar{\alpha}\times\bar{r}' + \bar{\omega}\times\left[\bar{v}' + \bar{\omega}\times\bar{r}'\right] =$$

$$= \bar{\alpha}\times\bar{r}' + \bar{\omega}\times\bar{v}' + \bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{r}'$$

Tornando alla generale:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{a}' + \bar{\omega}\times\bar{v}' + \bar{\alpha}\times\bar{r}' + \bar{\omega}\times\bar{v}' + \bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{r}'$$

da cui

$$\boxed{\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{a}' + 2(\bar{\omega}\times\bar{v}') + \bar{\alpha}\times\bar{r}' + \bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{r}'}$$

OSS le accelerazioni viste da O e O' non coincidono: in generale $\bar{a} \neq \bar{a}'$

Nomenclatura

- accelerazione di **Coriolis**:

  $\left[2(\bar{\omega}\times\bar{v}')\right]$ che sarà nulla quando il pto P è fermo e non ruota rispetto a O'

- accelerazione di **trascinamento**:

  $\left[\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \underbrace{\bar{\alpha}\times\bar{r}'}_{\text{c'è solo se l'accelerez. del corpo rispetto a O' non è costante}} + \underbrace{\bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{r}'}_{\text{c'è ogni volta che ruota il sist. di riferim. O'}}\right] \rightarrow$ è, per la cronaca, l'accelerazione centripeta

Quindi posso riscrivere $\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_t + \bar{a}_{cor.}$

↳ Conseguenze sulla dinamica

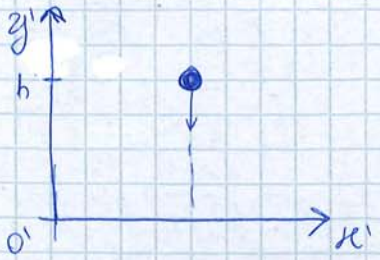
$\bar{a} \neq \bar{a}'$ Se per O $\Sigma_i\bar{F} = m\bar{a}$ allora O è SRI

ma se per O' $\Sigma_i\bar{F} \neq m\bar{a}'$ allora O' è SRNI

Posso fare 2 cose:

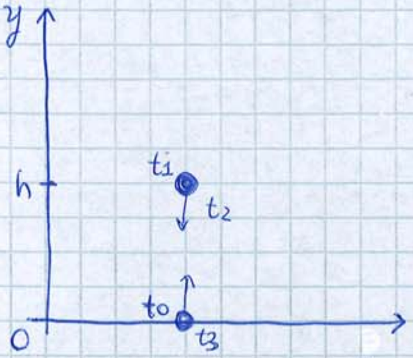
scrivo la seconda legge di Newton nel SRI

$$\Sigma_i\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_{tr.} + m\vec{a}_{cor}$$



$$\begin{cases} \vec{a}' = -g\hat{j} \\ y'(t) = -y'_0 + v'_{y_0} \cdot t + \frac{1}{2} a_y t^2 \\ y'(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Ma per O, col cavolo che quella pallina cade e basta, farà su (sale con l'ascensore) e poi giù (dalla mano)



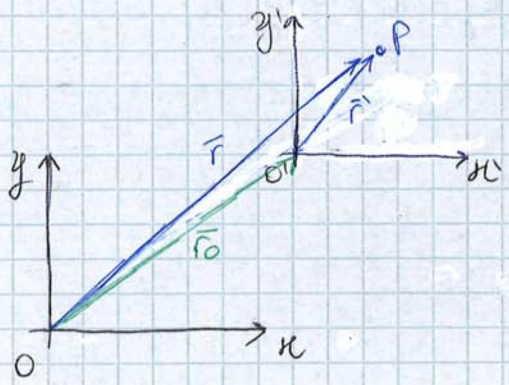
$$\bar{a} = -g\hat{j}$$

$$y(t) = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$y(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

! Se i SR sono entrambi inerziali, come in questo caso, cambia la descrizione del moto, ma NON cambiano le accelerazioni
↓
sarà uguale anche il TEMPO DI VOLO $\left(t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ in questo caso} \right)$

② SR in moto uniformemente accelerato (rettilineo)



Anche qui vale

$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{r}'$, con i versori costanti

Però $\bar{v}_0$ non è costante:

$$\bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}_0 \quad \text{e} \quad \bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_0$$

Ora, se O è SRI $\rightarrow \sum_i \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_0$ (1)

ma O' è SRNI $\Rightarrow \underbrace{\sum_i \vec{F} \neq m\vec{a}'}$

Dalla (1) si ricava che se O' "vuole usare" la legge di Newton, deve inserire il termine $(-m\vec{a}_0)$ allora varrà:

$$\sum_i \vec{F} \underbrace{- m\vec{a}}_{\text{forza apparente}} = m\vec{a}'$$

Analizziamo le velocità per i 2 osservatori: 14 07.04.16

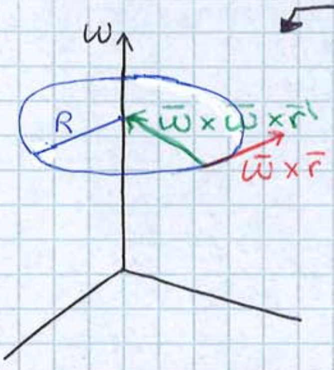
per O: $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}'}{dt} = \bar{v}' + \bar{\omega} \times \bar{r}'$ ← O ottiene sempre un termine in più ($\bar{\omega} \times \bar{r}'$) perché lui deriva sia versori che componenti

per O': $\bar{v}' = \frac{d\bar{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}'$

Per quanto riguarda le accelerazioni:

per O: $a = \frac{d}{dt}\left(\bar{v}' + \bar{\omega} \times \bar{r}'\right) = \bar{a}' + \bar{\omega} \times \bar{v}' + \underbrace{\cancel{\bar{\alpha}} \times \bar{r}'}_{=0} + \omega \times \left(\bar{v}' + \bar{\omega} \times \bar{r}'\right) =$

$= \bar{a}' + 2\bar{\omega} \times \bar{v}' + \underbrace{\bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r}'}_{\text{e' esattamente l'accelerazione centripeta}}$



$\bar{\omega} \times \bar{r}'$ = vel. tangenziale

$\|\bar{\omega} \times \bar{r}'\| = \omega r \sin\alpha = \omega R$

$\bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r}'$ = acc. centripeta

$\|\bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r}'\| = \|\bar{\omega}\| \cdot \|\bar{\omega} \times \bar{r}'\| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \omega^2 R$

~ Effetti sulla Terra - che RUOTA

Noi sappiamo che $\bar{a} = \bar{a}' + 2\bar{\omega} \times \bar{v}' + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r}'$. Ora il discorso e' che essendo la Terra stessa in rotazione, noi su di essa NON siamo inerziali. Per cui la nostra $\bar{g}$ e' $\bar{a}'$ NON $\bar{a}$. Inoltre, per effetto centrifugo, un filo a piombo NON sarà effettivamente verticale ma leggermente inclinato, perché in realtà punta verso il centro della terra:

$\bar{a}' \neq \bar{g}$ → $\boxed{\bar{a}' = g - 2\bar{\omega} \times \bar{v}' - \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r}'}$

↳ Un corpo che cade nell'emisfero NORD va verso SUD, e nell'emisfero SUD va verso NORD → in pratica sempre verso il centro della Terra!

↳ Un corpo che cade, per effetto Coriolis*, non cade mai ~~...~~ dritto, ma si sposta nella direzione di rotazione della Terra: SEMPRE verso EST. (Sia che si trova nell'emisfero NORD che in quello SUD)

OSS La forza di Coriolis sarà risentita maggiormente, tanto quanto più e' grande la velocità $\bar{v}'$

~ Curiosità: Applicazioni di queste forze sono gli uragani (hanno versi di rotazione opposta a seconda se siamo nell'emisfero NORD o sud) e il pendolo di FACAULT (lui non cambia il suo asse, e' la terra sotto che sta girando e sembra che lui faccia una traiettoria strana)

*sempre per effetto Coriolis, un corpo che si muove sulla superficie terrestre e' spinto verso la DESTRA nell'emisfero NORD, verso la sua SINISTRA in quello SUD

- Em potenziale media

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E_p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}k x^2(t)\,dt = \frac{k}{2T}\int_0^T x^2(t)\,dt =$$

$$= \frac{kA^2}{2T}\int_0^T \sin^2(\omega t+\varphi)\,dt = \frac{1}{2}kA^2 \underbrace{\left[\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t+\varphi)\,dt\right]}_{=\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{2}E_p^{MAX} = \frac{1}{2}E_m$$

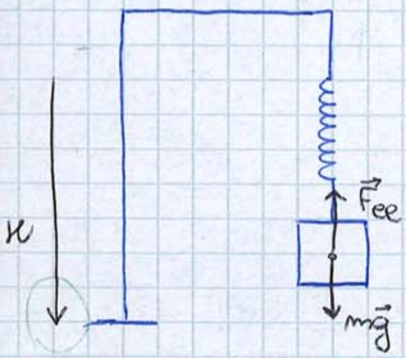
- Em cinetica media

$$\langle E_K \rangle = \frac{1}{2}m\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\left[\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t+\varphi)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{4}A^2\omega^2 m = \frac{1}{2}E_K^{MAX} = \frac{1}{2}E_m$$

↳ L'em. pot. e l'em. cinetica sono oscillanti, ma la loro media NON è NULLA, ma sempre positiva: corrisponde in particolare con la metà dell'em. meccanica totale.

~ Oscillatore armonico con FORZA COSTANTE



Va messo in modo che quando la molla è allungata sia POSITIVA

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{F}_{ee} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\hookrightarrow mg - kx = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\hookrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = g \qquad \left(\omega^2 = \frac{k}{m}\right)$$

E trovo al solito le varie soluzioni della eq. differenziale:

Integrale generale (omog. assoc.)

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Soluzione particolare

trovo x tale che $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ $\quad \omega^2 x = g \rightarrow \frac{k}{m}x = g \rightarrow x_P = \frac{mg}{k}$ (particolare) da cui

$$\mu_d mg - kx = m\frac{d^2x}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \mu_d g}$$

↳ A rigore però questa NON vale più per tutto il moto, ma solo per la prima parte, cioè da quando lascio la molla (dopo averla tirata) fino alla prima volta che inverte il moto!

Integrale generale

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Soluzione particolare

$$\frac{k}{m}x = \mu_d g \rightarrow x_p = \frac{mg}{k}\mu_d$$

Quindi la soluzione **generale** è sempre:

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + x_p}$$

↳ Per le condizioni al contorno

Se a $t=0 \rightarrow x = x_{MAX} = A\sin\varphi + x_p$

Ma a $t=0$, $v=0 \rightarrow A\cos\varphi = 0 \Rightarrow \underline{\cos\varphi = 0}$

Per cui analogamente a prima

$$x(t) = A\sin\omega t\cos\varphi + A\cos\omega t\sin\varphi + x_p$$

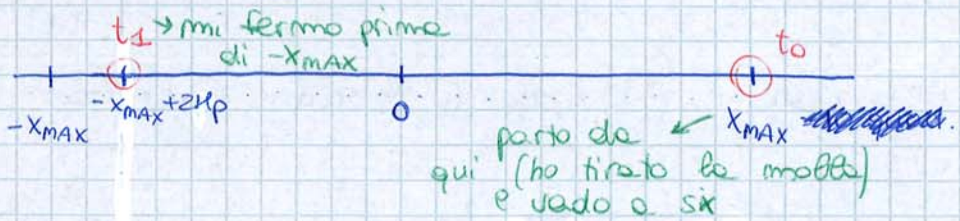
quindi $x(t) = x_p + \cos\omega t\,(x_{MAX} - x_p)$

$$v(t) = -\omega(x_{MAX} - x_p)\sin\omega t$$

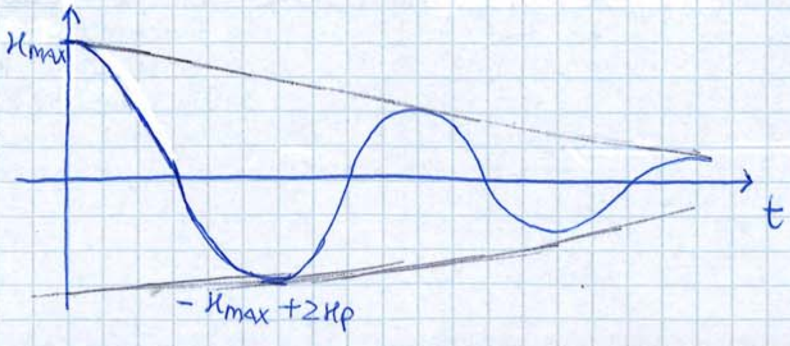
Per cui infine analizzando vari momenti del moto:

a $v(t) = 0 \rightarrow \sin(\omega t) = 0 \Rightarrow \omega t' = \pi$ per cui $t' = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$

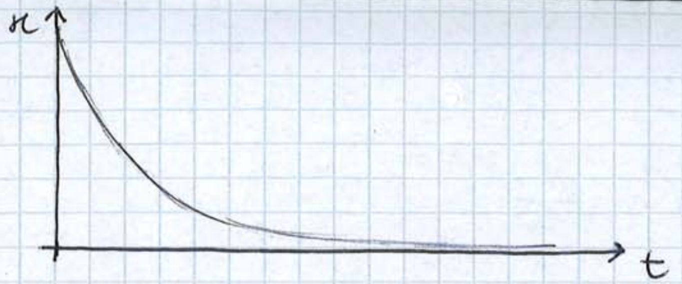
A $t' = \frac{\pi}{\omega} \rightarrow x(t') = (x_{MAX} - x_p)\cos\left(\cancel{\omega}\cdot\frac{\pi}{\cancel{\omega}}\right) + x_p = \underline{-x_{MAX} + 2x_p}$



Questo è il pto in cui si ferma! Ogni volta che oscilla perde $2x_p$ per colpa dell'attrito!



Unendo i massimi NON si ottengono delle rette costanti, ~~ma~~ bensì INCLINATE



Smorzamento FORTE ($b^2 > 4mk$)

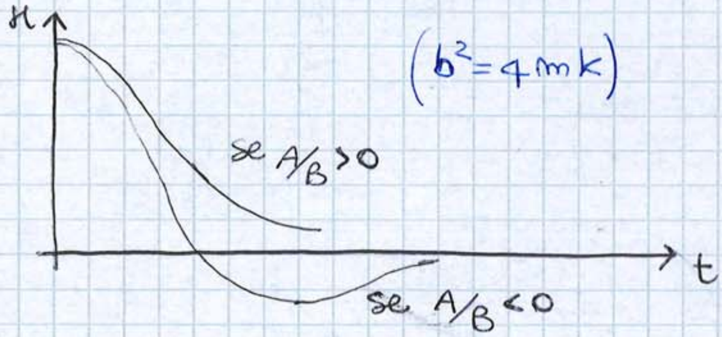
(2) Soluzioni reali e coincidenti ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$; $\lambda_1 = \lambda_2$)

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = 0 \rightarrow \boxed{b^2 = 4mk}$$ Smorzamento CRITICO

Quindi $x(t) = Ate^{-\gamma t} + Be^{-\gamma t} = \underbrace{e^{-\gamma t}}_{\text{espon. decrescente}} \underbrace{[At+B]}_{\text{retta decrescente}}$

All'infinito vincerà l'esponenziale:

ovvero: $t \to \infty$, $x(t) \to 0$



($b^2 = 4mk$)

Smorzamento CRITICO

E' questo quello che si mira ad ottenere nella progettaz. degli ammortizzatori, perché torna alla situazione di equilibrio più in fretta di tutti!

(3) Soluzioni complesse e coniugate ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$)

$$\gamma^2 - \omega_0^2 < 0 \rightarrow \boxed{b^2 < 4mk}$$ Smorzamento DEBOLE

La soluzione dell'eq. caratteristica è

$$\omega^2 = -(\gamma^2 - \omega_0^2) \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

$$\lambda_{12} = -\gamma \pm \sqrt{-\omega^2} = -\gamma \pm i\omega$$

Quindi $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t) + Be^{-\gamma t}\sin(\omega t) =$

$$\begin{cases} A = A_0 \sin\varphi \\ B = B_0 \cos\varphi \end{cases}$$

/* Questi valori (A_0, B_0 ...) esistono sempre */

$$= e^{-\gamma t} A_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

→

→ Quindi dopo il transiente, la sola soluzione che rimane sarà:

$\boxed{x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)}$ (dopo un certo tempo)

E in questa situazione avrò:

- $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$
- $F = F_0 \sin(\omega t)$ → NOTO che è sfasato rispetto allo spostamento di φ
- A e φ dipendono da ω (è l'unico parametro che posso cambiare per cambiare l'ampiezza o altre caratteristiche dell'oscillazione)

~ Casi particolari

① $\omega \ll \omega_0$

Con le fissate A e φ, si possono fare delle semplificazioni:

↳ $A \sim \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^4}} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2} \underset{\uparrow}{=} \frac{F_0}{k}$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$

cioè a parità di forza, l'ampiezza decresce con l'aumentare della rigidezza della molla

↳ $\varphi \sim 0$ cioè forza e spostamento NON sono sfasate (IN FASE)

② $\omega \gg \omega_0$

↳ $A \sim \frac{F_0}{m\omega^2}$ cioè stavolta decido io l'ampiezza [della molla] in base alla frequenza della forza che gli do (la forza che io impongo va più veloce e lei non ha il tempo di andare, che io l'ho già spinta di nuovo indietro). agendo ad esempio sull'altro estremo

Cioè a parità di forza, l'ampiezza decresce con l'aumentare della frequenza.

↳ $\varphi \sim \pi$ È molto sfasata la forza rispetto allo spostamento → la posso pensare come se sto andando a tirare l'altro estremo della molla (quella senza massa che di solito è fisso) (IN OPPOSIZIONE DI FASE)

allungamento $(x - x_0 - \ell)$ — ℓ: lungh. propria della molla

Sia $x_0 = a \sin(\omega t)$

L'eq. del moto sarà $-k(x - x_0 - \ell) - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$

Da cui ricavo la (solita) equazione differenziale

→

OSS Si nota dalla formula di A che, a parità di forza, se la massa diminuisce si arriverà ~~ad~~ risonanza ad una frequenza MAGGIORE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 238

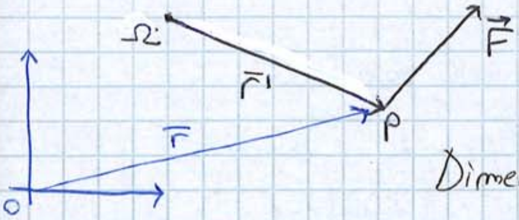
$$\vec{M}_{\Omega} = \vec{\Omega P} \times \vec{v} = \vec{\Omega\Omega'} \times \vec{v} + \vec{\Omega' P} \times \vec{v} = \underbrace{\vec{\Omega\Omega'} \times \vec{v} + \vec{M}_{\Omega'}}$$

il momento cambia se cambio il polo

↳ Si definisce il **momento di una forza**: [redacted]

$$\boxed{\vec{M}_{\Omega} = \vec{r}' \times \vec{F}}$$

! Ω e' il polo, non e' l'origine. L'origine sarà da qualche altra parte.



OSS Anche questo dipende dal polo:

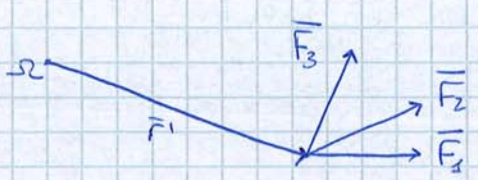
$$\vec{M}_{\Omega'} = \vec{M}_{\Omega} + \vec{\Omega\Omega'} \times \vec{F}$$

Dimensioni: $[M_{\Omega}] = [F][r'] = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$

um → N·m

Se ho più vettori:

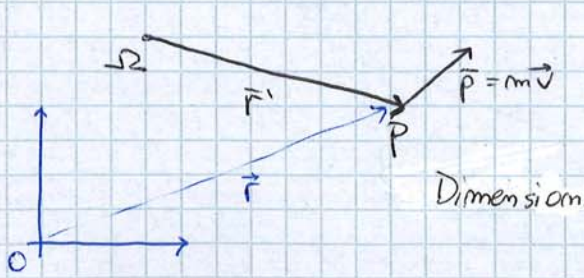
Vedi (*) pag. success.



Qui varrà:

$$\sum \vec{M}_{\Omega} = \sum_i \vec{r}' \times \vec{F}_i = \vec{r}' \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{r}' \times \vec{R}$$

↳ Si definisce il **momento della quantità di moto** → momento angolare



$$\boxed{\vec{L}_{\Omega} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

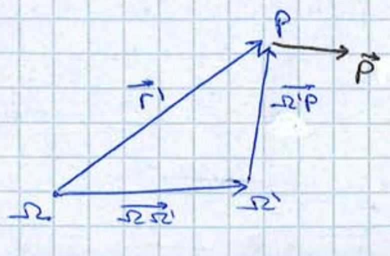
$\vec{p}$ = quantità di moto
$\vec{p} = m\vec{v}$

Dimensioni: $[L_{\Omega}] = [r][p] = LMLT^{-1} = ML^{+2}T^{-1}$

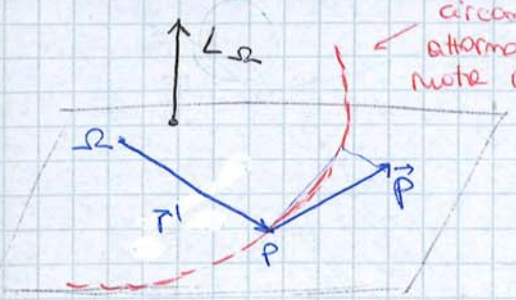
um → $Kg \cdot m^2/s$

! Anche questo cambia se vado a cambiare il polo perche' c'e' il fattore $\vec{\Omega\Omega'}$ di differenza:

$$\vec{L}_{\Omega} = \vec{\Omega\Omega'} \times \vec{p} + \vec{L}_{\Omega'}$$



↳ ma che significa che $\|L_\Omega\| = cost$?



$$\|\vec{L}_\Omega\| = cost = r' m v_\perp \quad \text{con } v_\perp = \omega r'$$

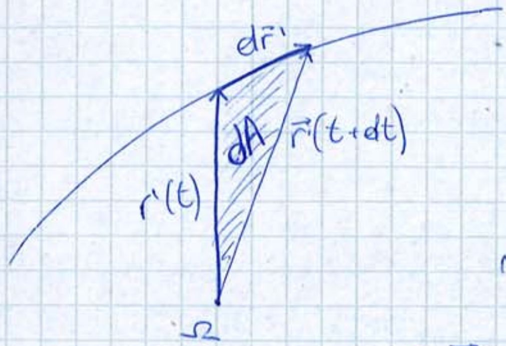
quindi $m\omega r'^2 = cost$

cioè $\omega r'^2 = cost$

↳ se $\|\vec{r}'\| = cost \rightarrow \omega = cost$ (moto circ. unif.)

↳ se $\|\vec{r}'\| \neq cost \rightarrow$ se $r' \uparrow$, $\omega \downarrow$ e viceversa.

↳ E' la stessa cosa che succede nelle **orbite dei pianeti**



Quell'area sarà data da:

$$dA = \frac{1}{2}\|\bar{r}' \times d\bar{r}'\| \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\|\bar{r}' \times \vec{v}\| dt$$

$$d\bar{r}' = \bar{v}' dt$$

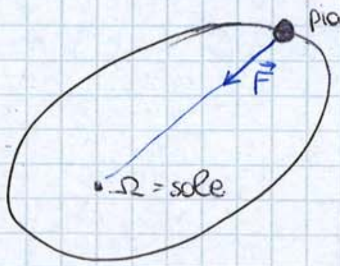
ma mi ricordo che $\|\vec{L}_\Omega\| = \|\bar{r}' \times m\vec{v}\| =$
$= m\|\bar{r}' \times \vec{v}\|$

Quindi $dA = \dfrac{\|\vec{L}_\Omega\|}{2m} \, dt$

la velocità areale è COSTANTE (2' conseguenza della $\vec{L}_\Omega = cost$)

vedremo che corrisponde alla **3' LEGGE di KEPLERO**, che quindi è una diretta conseguenza della conservazione del momento angolare

Quindi, generalizzando:



$\vec{F}$ è centrale $\rightarrow \vec{M}_\Omega = 0 \rightarrow L_\Omega = cost.$

Quindi l'orbita è **piana** (non esce dal piano)

e la velocità areale è costante $\dfrac{dA}{dt} = cost$

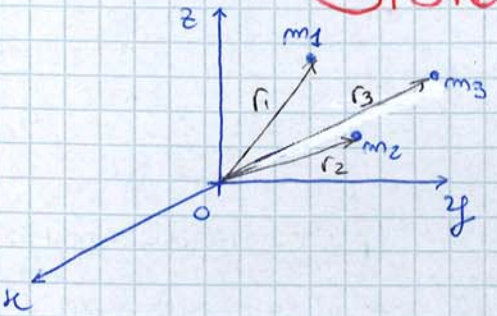
- In generale, vale anche se l'orbita è **aperta**.
- In particolare, quando l'orbita è **chiusa** (ellisse)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{T} = \frac{L_\Omega}{2m} \rightarrow \boxed{T = \frac{A}{L_\Omega} \cdot 2m}$$

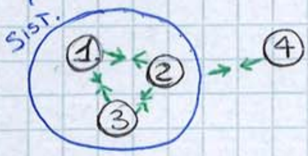
Periodo di rotazione dei pianeti

SISTEMI DI PUNTI

↳ corpi puntiformi



Fissati dei punti, bisogna definire quali appartengono al sistema in esame e quali invece no!



Quindi la risultante sarà data da una "parte" di forze interne e una parte di forze esterne (come già sappiamo)

$$\vec{R}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{\underset{su\ i}{ji}} + F_i^{est.}$$

ma per quelle interne varrà sempre che

$$\forall\ \vec{F}_{\underset{su\ j}{ij}} \quad \exists\ \vec{F}_{\underset{su\ i}{ji}} \quad \text{tale che} \quad \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0 \quad \text{cioè} \quad \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Per cui la $\vec{R}_{TOT} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \dots + \vec{R}_n = \sum_{j \neq 1} \vec{F}_{j1} + \vec{F}_1^{est} + \sum_{j \neq 2} \vec{F}_{j2} + \vec{F}_2^{est} + \dots$

$$\dots + \sum_{j \neq n} \vec{F}_{jn} + \vec{F}_n^{est}$$

Ma guardando bene:

$$\sum_{j \neq 1} \vec{F}_{j1} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} \dots$$

$$\sum_{j \neq 2} \vec{F}_{j2} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{42} \dots$$

avremmo tutti una coppia uguale e opposta quindi SI ANNULLANO TUTTE

Per cui varrà $\boxed{\vec{R}_{TOT} = \sum \vec{F}^{est}}$

↳ Sulla base di questo, posso definire delle grandezze generali, sommabili semplicemente per ogni singolo corpo, al fine di ottenere quella valida per il sistema in quanto UNICO:
(sovrapposizione degli effetti)

Varrà cioè
$$\begin{cases} \vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i \\ E_K = \sum_{i=1}^{N} E_{Ki} \\ \vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{\Omega i} \end{cases}$$

! In generale, per il sistema NON vale $\cancel{\vec{L}_\Omega = \vec{r} \times \vec{P}}$

→ fissato un unico Ω per tutti i corpi del sistema.

! NON posso assolutamente fare lo stesso discorso per la posizione, velocità ecc...

→