



**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 2141A-**

**ANNO: 2017**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Arrigo Grisolia Pustorino**

**MATERIA: Plasticita e Frattura - Prof. Carpinteri**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

## LEZIONE 01/03/2016 (Carpinteri)

### *Introduzione del corso:*

In questo corso quando si parlerà di collasso strutturale non si farà riferimento ad un collasso locale della struttura, bensì ad un collasso globale: ovvero un meccanismo che riguarda la crisi di tutta la struttura e non solo di un punto di essa. Il programma è diviso in cinque parti:

1. Teoria della plasticità, dove si studia il collasso plastico;
2. Elasticità piana, ovvero stati piani in tensioni o deformazioni;
3. Meccanica della frattura elastica lineare, ovvero come avviene la propagazione della frattura in campo fragile; quando diciamo che un corpo si comporta elasticamente pur avendo una frattura che si propaga in esso, vuol dire fragilità. Il caso contrario, quando la frattura avanza facendosi strada in un materiale già plasticizzato, questa viene definita frattura duttile.
4. Meccanica della frattura non lineare, ovvero il materiale in parte non ha un comportamento elastico-lineare. Si avrà interazione tra due collassi.
5. Applicazioni avanzate.

### Collassi globali:

- Collasso plastico
- Frattura fragile, si sviluppa solo per strutture sufficientemente grandi.
- Risonanza, quando una struttura vibra. Applicando una forzante dinamica (non costante nel tempo) con stessa frequenza propria della struttura, allora la struttura entra in risonanza. Quindi ad un certo punto la struttura inizia ad oscillare con moto che aumenta la sua ampiezza sempre di più superando il limite elastico e i limiti di resistenza della struttura. Si tratta di un fenomeno molto pericoloso per le strutture.
- Instabilità dell'equilibrio elastico o "buckling". Una trave può essere compressa ma essere in equilibrio; bisogna vedere se questo equilibrio può diventare pericoloso: perché può essere stabile o instabile. Si studia il problema del carico di punta, ed è un collasso che riguarda le strutture snelle.

Parlando di interazioni: quella che ci interessa di più è quella tra instabilità dell'equilibrio elastico e plasticità. Un'altra interazione importante è tra collasso plastico e frattura fragile, questa si chiama frattura duttile. Un'altra interazione si ha tra buckling e risonanza, che viene chiamato instabilità in regime dinamico. Una struttura compressa ha una frequenza di risonanza diversa da quella usuale, infatti la frequenza di risonanza diminuisce. Una struttura che sta vibrando si instabilizza più facilmente, ovvero per carichi più bassi.

in laboratorio si costruisce un provino di forma cilindrica a clessidra, per evitare che la rottura avvenga nelle zone terminali di ammorsamento alla macchina di prova. Sia  $A_0$  l'area della sezione trasversale iniziale del provino nella zona mediana, ed  $l_0$  la distanza iniziale tra due sensori incollati in due punti della zona mediana. Tale distanza venga misurata da un dispositivo elettrico che collega due punti. Si definisca **tensione nominale**  $\sigma$ , come il rapporto tra la forza  $F$  trasmessa dalla macchina di prova e l'area iniziale  $A_0$ :

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

Si trascurano così le concentrazioni laterali elastiche ed, eventualmente, plastiche. Si definisca poi la **dilatazione convenzionale**  $\varepsilon$ , come il rapporto tra la variazione di distanza tra i due sensori  $\Delta l$  e la distanza iniziale  $l_0$ :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Tale dilatazione è quella media, relativamente al tratto sotto controllo. È molto probabile che, durante la prova, e specialmente in regime lineare, la dilatazione non sia uniforme e quindi non sia puntualmente considerata con quella media.

Si riportino ora sul piano  $\sigma - \varepsilon$  tutte le coppie di punti registrati durante il processo di caricamento. Tra i punti O ed L il diagramma è lineare ed elastico. Da L in poi la risposta non è più lineare ed il materiale inizia a snervarsi. Scaricando il provino, si evidenziano delle deformazioni permanenti  $\varepsilon_{pl}$ . In questo modo parte dell'energia di deformazione è restituita (triangolo ABA'), cioè quella relativa alla deformazione  $\varepsilon_{el}$ , mentre il resto è dissipato plasticamente (OLAA'). Caricando nuovamente il provino, si ripercorre il tratto AA', parallelo al tratto OL. Giunti in A, il provino si snerva di nuovo ad una tensione  $\sigma > \sigma_1$ . Il materiale vergine, quindi, si snerva a livelli di tensione più bassi di quanto non faccia il materiale già precedentemente snervato. Tale fenomeno è detto **incrudimento** del materiale (**hardening**).

Continuando ad aumentare la forza applicata  $F$ , si riprende a percorrere il tratto non lineare AU. In questa fase l'incremento di tensione per incremento unitario di dilatazione (ciò che si chiama solitamente rigidità tangenziale) continua a diminuire, sinché non si annulla nel punto U. Giunti nel punto U, se il processo di caricamento è pilotato dalla forza esterna  $F$ , il provino si rompe, poiché  $F$  non può aumentare ulteriormente.

D'altra parte, se il processo di caricamento è pilotato dalla variazione di distanza  $\Delta l$  (cioè, elettronicamente si impone a tale grandezza una rampa del tempo), è possibile indagare sul comportamento del materiale al di là del punto di resistenza ultima U. Oltre il punto U, infatti, la rigidità tangenziale diventa negativa e, ad incrementi positivi di spostamento  $\Delta l$ , corrispondono incrementi negativi della forza  $F$ . Ciò è dovuto al fenomeno della **strizione** per cui l'area  $A$  della sezione effettiva diventa notevolmente minore di  $A_0$ , in una banda localizzata compresa tra i due

Dunque, essendo  $l_I < l_{II}$ , la parte centrale è quella più sollecitata, ed è quella che si plasticizza prima, per una forza:

$$F_1 = \sigma_P A \left( 1 + \frac{l_I}{l_{II}} \right),$$

$$\delta_1 = \frac{\sigma_P l_I}{E},$$

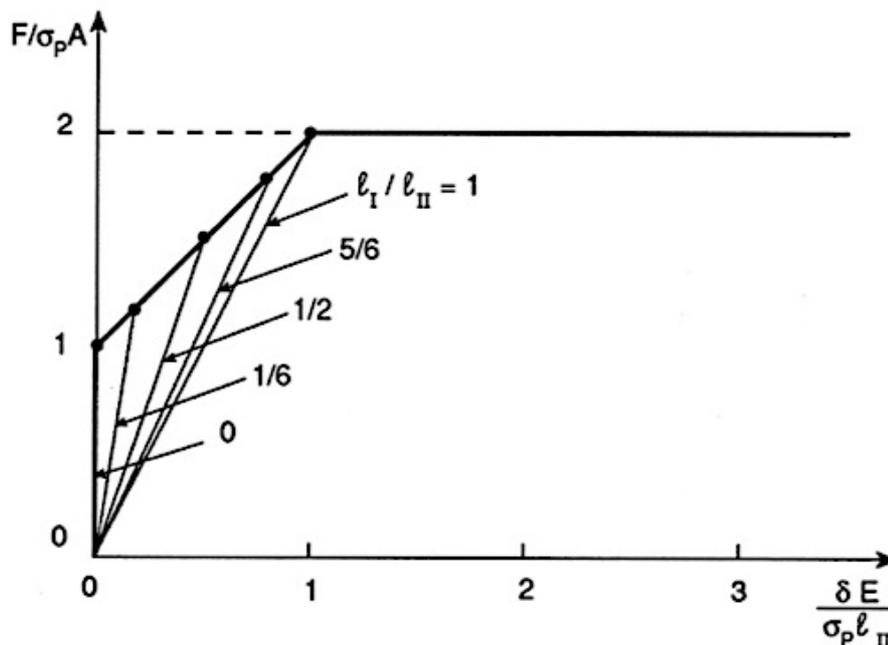
La plasticizzazione finale, ovvero il valore di F per cui si plasticizzano le bielle laterali vale:

$$F_2 = 2 \sigma_P A,$$

$$\delta_2 = \frac{\sigma_P l_{II}}{E},$$

Per  $\delta > \delta_2$  la reazione delle bielle non può aumentare e resta stazionaria al valore di plasticizzazione  $F_2$ .

Riportiamo in figura, in forma adimensionale, le curve forza-spostamento per diversi valori del rapporto  $\frac{l_I}{l_{II}}$ . Per  $l_I \rightarrow \infty$ , la forza è sostenuta in fase elastica interamente dalla biella centrale, che quindi si plasticizza per  $F = \sigma_P A$ . Quando  $l_I = l_{II}$ , peraltro, la fase incrudente non è presente perché le bielle si plasticizzano tutte e tre contemporaneamente (**evoluzione plastica**). Si osservi come la retta a cui appartiene il tratto incrudente non dipenda dal rapporto  $\frac{l_I}{l_{II}}$ . Ciò è dovuto al fatto che, una volta plasticizzata la biella centrale, la sua lunghezza  $l_I$  non entra più nell'analisi. Si formano cerniere plastiche finché non si raggiunge la labilità.



**N.B.**--> Per  $\varepsilon_{max}$  che tende ad infinito e per  $d$  che tende a zero, la curvatura tende ad infinito, dando così luogo ad una rotazione localizzata.

Curvatura infinita vuol dire raggio di curvatura nullo, ovvero si crea una cuspidale nella linea elastica della trave; questa cuspidale è dovuta alla plasticizzazione localizzata. In pratica siamo arrivati al dunque, ovvero ad un certo punto aumentando il momento, si supera il limite plastico ( $M_p$ ) e la sezione considerata si comporta come una cerniera, ovvero mi da una cuspidale dal punto di vista cinematico, mentre dal punto di vista statico reagisce sempre con  $M_p$  (costante e noto). Quindi quando si forma la cerniera plastica ci saranno anche due momenti che contrasteranno la rotazione della cerniera.

Si va adesso a determinare la legge momento-curvatura relativa all'evoluzione plastica della sezione rettangolare. Ad ogni passo di tale evoluzione il momento applicato è valutabile in base alla distribuzione nota delle forze:

$$M_x = 2 \int_0^d \left( \sigma_p \frac{y}{d} \right) y b dy + 2 \int_d^{h/2} \sigma_p y b dy.$$

Sostituendo la semi-estensione  $d$  della zona elastica con l'espressione  $d = \varepsilon / \chi_x$  Ottengo:

$$(18.11) \quad M_x = 2 \sigma_p b \left[ \frac{\chi_x}{\varepsilon_p} \int_0^{\varepsilon_p / \chi_x} y^2 dy + \int_{\varepsilon_p / \chi_x}^{h/2} y dy \right],$$

da cui, risolvendo gli integrali, si ottiene:

$$(18.12) \quad M_x = \sigma_p b \frac{h^2}{4} \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{\left( \varepsilon_p / \frac{h}{2} \right)^2}{\chi_x^2} \right].$$

La funzione è fortemente non lineare ed ha un'asintoto a livello 3/2 e non è un caso, poiché 3/2 è il rapporto che lega i due momenti caratteristici. Quindi mettendo in relazione  $M_x$  con  $M_e$  ottengo:

$$\frac{M_x}{M_e} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_e}{\chi_x} \right)^2$$

dove con  $\chi_e$  si è indicata la curvatura all'atto della prima plasticizzazione.

Quindi questo diagramma rappresenta una legge lineare per  $\chi_x < \chi_e$ , ovvero  $M_x < M_e$ , e la legge iperbolica per  $\chi_x > \chi_e$ , ovvero  $M_x > M_e$ . Tale legge incrudente viene sostituita nella pratica dalla legge elastica-perfettamente plastica tratteggiata in figura.

$$(18.14) \quad M_x = 2\sigma_P \left[ \frac{\chi_x}{\epsilon_P} \int_0^{\epsilon_P/\chi_x} y^2 b(y) dy + \int_{\epsilon_P/\chi_x}^{h/2} yb(y) dy \right].$$

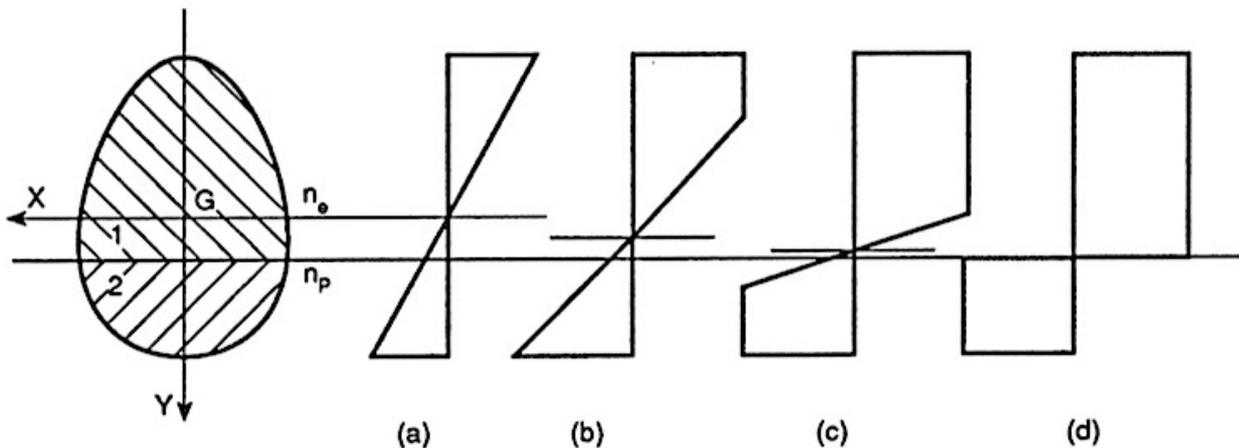
Il momento plastico vale dunque:

$$(18.15) \quad M_P = \lim_{\chi_x \rightarrow \infty} M_x = 2\sigma_P \int_0^{h/2} yb(y) dy,$$

ove l'integrale rappresenta il momento statico  $S_x^{A/2}$  di mezza sezione rispetto all'asse  $X$ . Il rapporto:

$$(18.16) \quad \frac{M_P}{M_e} = \frac{2S_x^{A/2}}{I_x / \frac{h}{2}},$$

Un caso dove cambiano le cose si ha nella sezione a semplice asse di simmetria; salta fuori il concetto di asse neutro plastico:



all'inizio il diagramma a farfalla passa per l'asse neutro elastico, poi si ha una migrazione dell'asse neutro, al quale non eravamo abituati perché finora avevamo considerato sezioni a doppia simmetria; quando non c'è simmetria come in questo caso, abbiamo una migrazione dell'asse plastico indicato dal diagramma (d) dove vi sono due pianerottoli plastici di estensione diversa (l'estensione diversa si ha perché si devono eguagliare le aree e, come si nota dal grafico, la sezione ha area più "panciuta" in basso). L'asse neutro plastico si definisce come retta orizzontale che divide in due aree uguali la sezione mentre l'asse neutro elastico uguaglia i valori assoluti dei momenti statici. Anche in questo caso con la migrazione dell'asse neutro elastico si arriva al concetto di momento plastico ultimo che è un momento in cui il

Il diagramma di fig. 18.7.d può decomporsi come è mostrato in fig. 18.8, la parte (a) rappresentando la forza risultante  $N$  :

$$(18.21.a) \quad N = \sigma_P b (h - 2h'),$$

e la parte (b) rappresentando il momento  $M = Ne$  :

$$(18.21.b) \quad M = \sigma_P b h' (h - h').$$

In base alle sollecitazioni plastiche:

$$(18.22.a) \quad N_P = \sigma_P b h,$$

$$(18.22.b) \quad M_P = \sigma_P b \frac{h^2}{4},$$

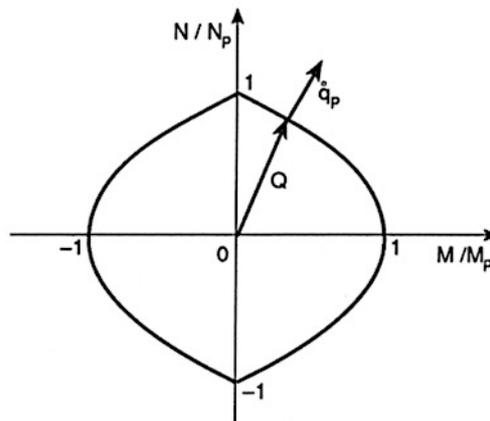
si possono definire i seguenti rapporti adimensionali:

$$\frac{N}{N_P} = 1 - 2 \left( \frac{h'}{h} \right),$$

$$\frac{M}{M_P} = 4 \left( \frac{h'}{h} \right) \left( 1 - \frac{h'}{h} \right),$$

$$\frac{M}{M_P} = 1 - \left( \frac{N}{N_P} \right)^2.$$

Il limite di plasticizzazione nel piano M-N è fornito dalla curva chiusa in figura sottostante, che è detta **curva di interazione**. Le coppie M-N interne al dominio rappresentano stati elasto-plastici, mentre le coppie che si trovano sulla frontiera rappresentano condizioni ultime di completa plasticizzazione (flusso plastico della sezione).



## LEZIONE 02/03/2016 (Accornero)

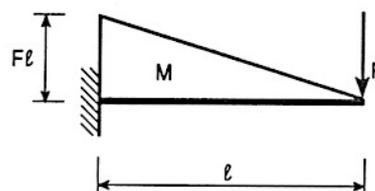
Nella pratica dell'ingegneria civile i collassi da fronteggiare sono:

- Collasso plastico
- Collasso di natura fragile
- Collasso per instabilità

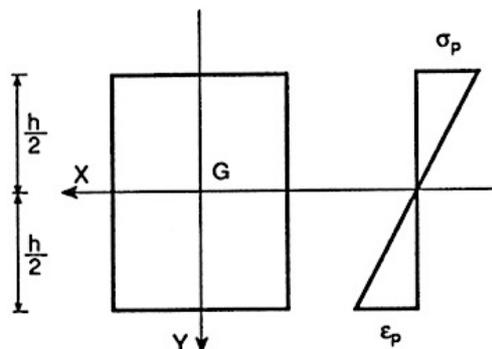
**Analisi limite:** tramite l'ausilio dei teoremi, statico e cinematico, arriva direttamente all'obiettivo di trovare il carico plastico senza passaggi intermedi. Non si incrementa il carico, ma si applicano direttamente i teoremi.

**Analisi incrementale:** arriva a definire il carico di collasso plastico tramite l'avanzamento progressivo del carico. Quindi per trovare il valore del carico plastico devo fare successivi incrementi di carico (procedo step by step).

Cominciamo con l'analisi incrementale. Il primo schema è la semplice trave incastrata e caricata in punta da una forza  $F$ . Questo schema mi restituisce un momento che tende le fibre superiori all'incastro che vale  $F\ell$ .



Una sezione soggetta a momento flettente sopporta due stadi di sollecitazione: un primo stadio è quello elastico, dove la sezione si deforma e nascono delle deformazioni che avranno andamento a farfalla elastico. In questo modo però non sfruttato a pieno la tensione perché le uniche fibre sollecitate al massimo sono le fibre superiori e inferiori della sezione.

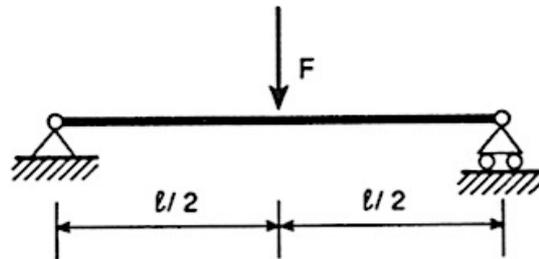


Per sfruttare al massimo la sezione la teoria della plasticità ci dice che il diagramma ultimo della sezione è bi-rettangolare:

Si progetta in termini plastici perché ciò mi consente un incremento di carico sulla struttura rispetto alla progettazione in termini elastici. La plasticità si basa sulla plasticizzazione della sezione. Il valore del momento per raggiungere il diagramma a farfalla è diverso dal valore del momento per raggiungere il diagramma bi-rettangolare: vi è una differenza geometrica.

Inoltre, sempre da considerazioni geometriche, andando a effettuare il rapporto tra  $M_p$  ed  $M_e$  si ottiene un valore pari a 1,5, ovvero  $M_p$  è 1,5 volte più grande di  $M_e$ . In una struttura isostatica si ha la possibilità di una sola formazione di cerniera plastica, dopo di che si arriva al collasso. In strutture iperstatiche si possono formare più cerniere plastiche → l'incremento di carichi sarà maggiore di 1,5.

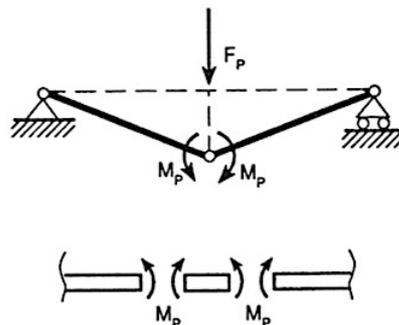
II° caso:



È una struttura isostatica e permette la formazione di una sola cerniera plastica. Voglio incrementare  $F$  per arrivare a un valore massimo di tensioni sezionale ( $M_p$  dipende solo dalla sezione e non dallo schema statico). Pongo:

$$\frac{Fl}{4} = M_p \rightarrow F_p = 4 \frac{M_p}{l}$$

Trovato  $F_p$  devo posizionare la cerniera plastica: vado a metterla dove si forma  $M_p$  e metto coppie uguali e contrarie:



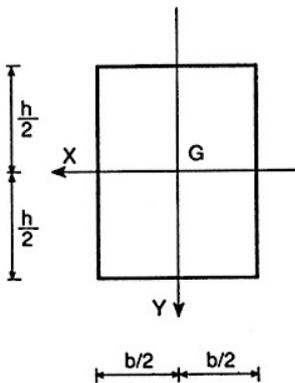
Le coppie  $M_p$  si oppongono al verso del collasso e tendono le fibre inferiori.

Per una struttura  $n$  volte iperstatica posso inserire  $n+1$  cerniere. Vediamo ora un caso di struttura iperstatica.

Caso III°:

### LEZIONE 03/03/2016 (Accornero)

Continuando a parlare di analisi incrementale, la prima cosa da fare nell'analisi è il calcolo di  $M_p$ . Gli esempi più semplici li facciamo con la sezione rettangolare  $b \times h$ ; di questa le caratteristiche che ci interessano solo le tensioni ultime del materiale ( $\sigma_p$ ). Se fossi in campo elastico per ricavare il momento ultimo userei la formula di Navier:



$$\sigma = \frac{M h}{I} \rightarrow M_e = \frac{I}{h/2} \sigma_p = W_{el} \sigma_p$$

con  $W_{el}$  modulo di resistenza travi, che è fornito dai produttori di travi.

Esempio:

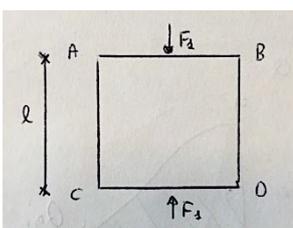
HE 220 AA (AA spessori ali) →



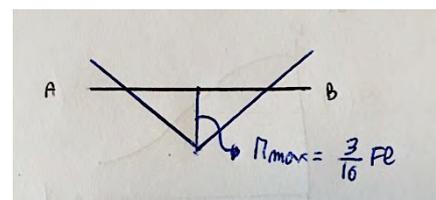
La sezione HE è iscrivibile in un quadrato. Mentre una sezione di tipo IPE ha base metà dell'altezza.

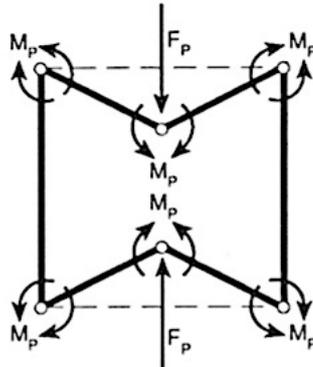
Nei profilari, essendo la progettazione basata sui limiti plastici, è presente sia un modulo di resistenza elastico, sia un modulo di resistenza plastico (rispettivamente  $W_{el}$  e  $W_{pl}$ ); si avrà:  $W_{pl} > W_{el}$ . Questo perché  $W_{pl}$  dipende dal diagramma delle tensioni (bi-rettangolare), mentre  $W_{el}$  dipende dalla distribuzione di tensione a farfalla.

Riprendiamo con l'analisi incrementale col caso di una maglia chiusa caricata da 2 forze  $F_1$ :



Calcolo  $M_p$ . Dato il diagramma del Momento ho un massimo dove è Applicata la forza:



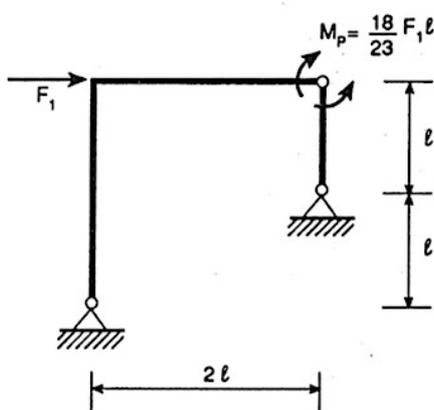


Ho raggiunto la labilità quindi mi fermo. Quindi il valore della forza trovata col secondo passaggio è la forza ultima che la struttura può sopportare. Facendo un confronto con l'analisi elastica:

$$\frac{F_P}{F_e} = \frac{F_2}{\frac{2}{3}F_1} = \frac{3}{2} \frac{8 M_p/\ell}{\frac{16}{3} M_p/\ell} = \frac{9}{4}.$$

Notiamo che con un analisi plastica si ottiene un fattore di sicurezza pari a 9/4, ovvero un valore maggiore di due. Questo vuol dire che se avessimo fatto un analisi elastica avremmo speso più del doppio rispetto al materiale necessario in caso di analisi plastica.

Consideriamo ora il caso di portale zoppo:



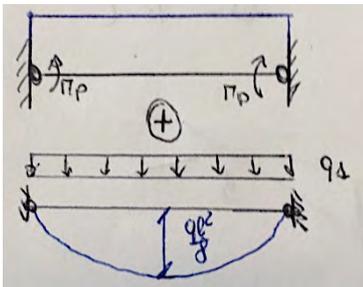
dal diagramma del momento trovo un momento massimo pari a 18/23 Fl. Quindi:

$$M_p = \frac{18}{23} F_1 l \rightarrow F_{p1} = \frac{23 M_p}{18 l}$$

Quindi dove c'era il momento massimo vado ad inserire cerniera e coppia  $M_p$ .

La struttura ora è diventata isostatica, perciò l'analisi non è terminata e si procede con altri step finchè non si raggiunge la labilità. Nel secondo step si calcola il momento della struttura con la sovrapposizione degli effetti; la nuova struttura sarà:

La struttura al primo step è diventata isostatica. Faccio crescere ancora q. Si trova il momento massimo del nuovo schema col principio di sovrapposizione degli effetti:



Dunque il momento massimo si avrà in mezzeria e vale:

$$M_{max} = \frac{q_2 l^2}{8} - M_p = M_p \rightarrow q_2 = 16 \frac{M_p}{l^2}$$

In mezzeria (dove il momento è massimo) si formerà un'altra cerniera plastica. La struttura è diventata labile e quindi  $q_2$  sarà il carico ultimo plastico dell'analisi incrementale ( $q_2 = q_p$ ). Il fattore di sicurezza vale:

$$\frac{q_p}{q_e} = \frac{q_2}{\frac{2}{3} q_1} = \frac{3}{2} \frac{16 \frac{M_p}{l^2}}{12 \frac{M_p}{l^2}} = 2.$$

Eseguendo l'analisi plastica si possono calcolare tensioni e deformazioni, sollecitazioni e spostamenti. Posso calcolare lo spostamento in mezzeria per  $q = q_1$ , che è dato dai contributi del carico esterno  $q_1$  e dai momenti plastici  $M_p$ :

$$\delta_1 = \frac{5}{384} \frac{q_1 l^4}{EI} - \frac{M_p l^2}{8 EI}, \quad \text{Da cui ottengo:} \quad \delta_1 = \frac{M_p l^2}{32 EI}.$$

Quando allo step 2 raggiungo il carico limite plastico  $q_2$  la struttura si dice che è in **equilibrio instabile**. Per una struttura ad equilibrio instabile è sempre possibile calcolare lo spostamento (cioè non infinito: infatti per una struttura labile lo spostamento sarà infinito, ovvero ci sarà un collasso) con la sovrapposizione degli effetti. Quello che si fa è calcolare lo spostamento un infinitesimo prima della formazione della terza cerniera plastica (in mezzeria). Lo schema sarà quindi quello dello step 1, con il carico che sto avendo per la formazione della terza cerniera plastica. Dunque lo spostamento in mezzeria per  $q = q_2$  sarà:

$$\delta_2 = \frac{5}{384} \frac{q_2 l^4}{EI} - \frac{M_p l^2}{8 EI}, \quad \text{Da cui:} \quad \delta_2 = \frac{M_p l^2}{12 EI}.$$

Il taglio si annulla per  $z = \frac{l}{2} - \frac{M_P}{q_l}$ , da cui ottengo:  $M_{\max} = \frac{1}{8}q\ell^2 \left(1 - \frac{2M_P}{q\ell^2}\right)^2$ .

Ponendo  $M_{\max} = M_P$ , si ricava un'equazione algebrica di secondo grado nell'incognita  $q_2$ :

$$(18.50) \quad \left(1 - \frac{2M_P}{q_2\ell^2}\right)^2 = 4 \frac{2M_P}{q_2\ell^2},$$

che risolta fornisce le due radici:

$$(18.51) \quad \frac{2M_P}{q_2\ell^2} = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Mentre la prima radice è da scartarsi, poiché implicherebbe  $q_2 < q_1$ , la seconda fornisce il carico di collasso:

$$(18.52) \quad q_2 = q_P = \frac{M_P}{\ell^2} \frac{2}{3 - 2\sqrt{2}},$$

ovvero:

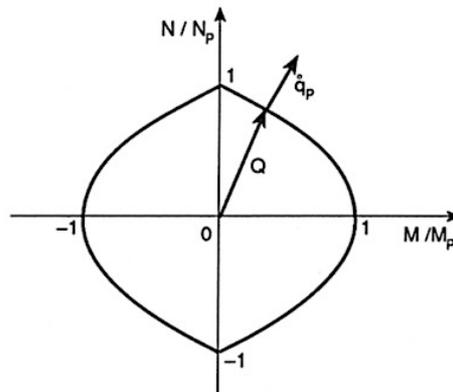
$$(18.53) \quad q_2 = q_P \simeq 11.6568 \frac{M_P}{\ell^2}.$$

Il fattore di sicurezza vale pertanto:

$$(18.54) \quad \frac{q_P}{q_c} = \frac{q_2}{\frac{2}{3}q_1} = \frac{3}{8(3 - 2\sqrt{2})} \simeq 2.19.$$

## LEZIONE 08/03/2016 (Carpinteri)

Dettaglio del diagramma di interazione:



La curva rappresenta il limite plastico; questo vuol dire che considerato un punto di coordinate  $(M,N)$  sulla curva, le coordinate mi daranno la completa massimizzazione della sezione. La coppia di coordinate  $(M,N)$  rappresenta uno sforzo normale eccentrico. Le due curve sono parabole ad asse verticale simmetriche rispetto all'asse  $N$ . La freccia  $Q$  rappresenta un raggio vettore che descrive le caratteristiche statiche, mentre  $\dot{q}_p$  le caratteristiche deformative.

**N.B 1:** Il punto su  $\dot{q}_p$  serve ad indicare che è un versore che indica la deformazione incrementale plastica. Descrive quindi solo la direzione che è quella del flusso plastico indefinito. È indefinito perché il vettore ha un modulo piccolo, infinitesimo (anche se ne indica solo la direzione del flusso plastico).

Se ci sono due caratteristiche in ambito elastico, la  $N$  da la dilatazione assiale  $\varepsilon_z$ , mentre la  $r$  da la curvatura  $\chi$ ; queste due caratteristiche agiscono insieme nella proporzione in cui stanno i cateti dell'angolo rettangolo che si può costruire col vettore  $\dot{q}_p$ .

**N.B. 2:** la curva del limite plastico deve essere sempre convessa, al più rettilinea, ma mai concava, altrimenti i teoremi energetici non verrebbero soddisfatti.

### Teoremi analisi limite plastica

Danno la possibilità di far saltare l'evoluzione delle cerniere plastiche, che nel caso di strutture con molti gradi di iperstaticità può risultare laboriosa. Con i teoremi si arriva direttamente alla soluzione finale.

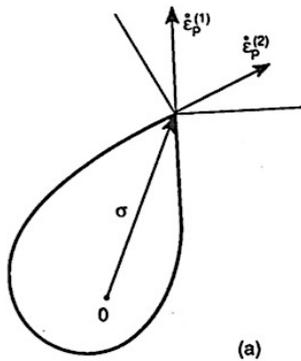
### Legge di normalità della deformazione incrementale

Consideriamo la plasticizzazione di un punto materiale e consideriamo la curva limite nelle 3 direzioni:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \text{ con } \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \text{ tensioni principali}$$

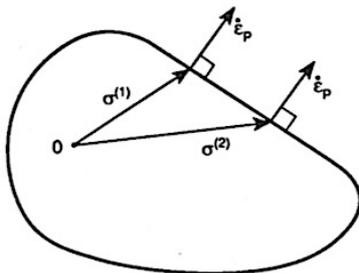
**Punti particolari:**

- Cuspidi:  $\dot{\epsilon}_p$  risulta indefinito perché manca la normalità; allora si considerano le normali alle due tangenti della cuspid, e si dice che la  $\dot{\epsilon}_p$  è compresa dal cono formato dalle due normali:



$\dot{\epsilon}_p$  è indeterminata

- Tratti rettilinei: tutte le  $\sigma$  che toccano la curva limite nel tratto rettilineo hanno la stessa  $\dot{\epsilon}_p$



Per un  $\dot{\epsilon}_p$  abbiamo infinite  $\sigma$

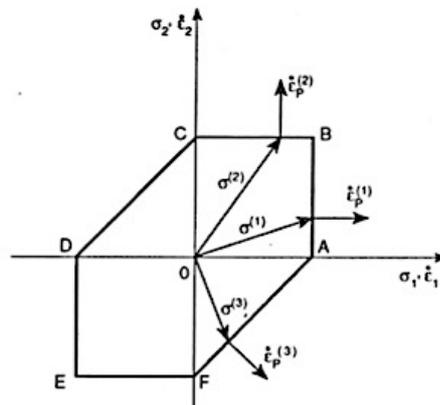
Se andiamo a considerare l'origine, ovvero  $\sigma_0 = 0$ , il flusso plastico diventa:

$$\{\sigma\}^T \{\dot{\epsilon}_p\} = \dot{\phi} (\{\dot{\epsilon}_p\}) > 0,$$

dove  $\dot{\phi}$  rappresenta il lavoro volumetrico.

OSS (softening): parlare di  $\{\dot{\sigma}\}$  significa parlare di punti molto vicini al limite plastico. In un materiale softening la  $\epsilon$  si incrementa e la  $\sigma$  diminuisce, dunque il postulato di Drucker viene violato.

Consideriamo l'esagono di Tresca:



Si ipotizza il vettore incrementale plastico ( $\dot{\epsilon}_p$ ) e per ricercare la  $\sigma$  di collasso plastico si definisce la normale a  $\dot{\epsilon}_p$  e la si pone tangente alla curva. Per disegnare la curva si ipotizzano infinite  $\dot{\epsilon}_p$  e di volta in volta si determina la tangente per ricavare  $\sigma$ . Nel teorema la  $\sigma$ , ricavata con quel  $\dot{\epsilon}_p$  viene messa in relazione con le altre  $\sigma'$ , che sono sempre delle tensione limite, però riferite ad un altro meccanismo.

$$\{\sigma\}^T \{\dot{\epsilon}_p\} \geq \{\sigma'\}^T \{\dot{\epsilon}_p\}$$

Questo significa che il lavoro “vero” plastico è maggiore o uguale a tutti gli altri valori immaginari relativi a quel meccanismo  $\{\dot{\epsilon}_p\}$ . Questo teorema non è altro che un’osservazione alle assunzioni fatte prima sulla convessità e sulla normalità. La disequazione considerata all’intero volume sarà:

$$\int_V \Phi (\{\dot{\epsilon}_p\}) dV \geq \int_V \{\sigma'\}^T \{\dot{\epsilon}_p\} dV.$$

il primo termine rappresenta il lavoro plastico vero, il secondo termine è il lavoro plastico astratto.

### **Teorema statico (o del limite superiore)**

“Il moltiplicatore dei carichi  $\lambda^-$  corrispondente a un qualsivoglia campo tensionale staticamente ammissibile è minore o uguale al moltiplicatore di collasso  $\lambda_p$ ”.

Si tratta di un confronto tra lavoro virtuale interno e lavoro esterno. Il lavoro virtuale interno è sempre un campo tensionale che lavora per uno deformativo. Il lavoro virtuale esterno tratta forze esterne applicate che possono essere superficiali o volumetriche.

Tensioni = forze che si scambiano le particelle interne al corpo.

Forse esterne = forze che derivano dall’esterno e sono applicate sul corpo.

L’oggetto della tesi è quello di comporre i vari sistemi di forze (interni ed esterni) staticamente ammissibili, cioè forze che rispettano le condizioni di equilibrio e di congruenza (nel contorno). Inoltre si ipotizza di conoscere il meccanismo di collasso plastico “vero”.

Quello che si fa quindi è comporre un sistema di tensioni staticamente ammissibile generico  $\{\sigma^-\}$  e l’altro quello dello stato limite  $\{\sigma\}$ .

$\{\sigma^-\}^T$  deve stare al massimo sul bordo della curva limite plastica. È uno stato tensionale tra gli infiniti possibili, quindi un vettore nel dominio del corpo.

$\{\sigma\}^T$  è lo stesso un vettore delle tensioni corrispondente al meccanismo di collasso  $\{\dot{\epsilon}_p\}$ .

Applicando il PLV si ottiene:

$$\int_V \{\sigma^-\}^T \{\dot{\epsilon}_p\} dV = \sum_i \lambda^- P_i \dot{\eta}_i ,$$

$$\int_V \{\sigma\}^T \{\dot{\epsilon}_p\} dV = \sum_i \lambda_p P_i \dot{\eta}_i ,$$

Applicando i due teoremi ad un problema si trova che:  $\lambda^- \leq \lambda_p \leq \lambda^+$

Quello che si fa nel calcolo automatico è far diminuire questo intervallo. Per sistemi a molti gradi di libertà si adottano questi due teoremi per arrivare ad una soluzione più speditiva rispetto all'analisi incrementale.

### Teorema misto

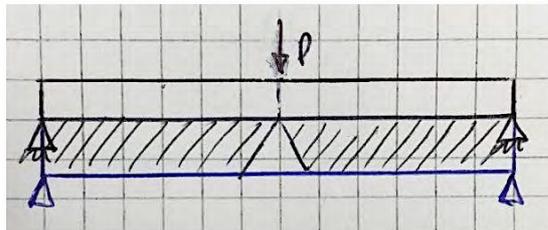
Se si ha che  $\lambda$  corrisponde contemporaneamente ad un sistema di spostamenti e deformazioni cinematicamente ammissibili ed ad un sistema di forze staticamente ammissibile, allora:

$$\lambda = \lambda_p$$

### Teorema dell'aggiunta di materiale (corollario)

“Un incremento dimensionale di un solido perfettamente plastico non può produrre un decremento del carico di collasso”.

Ci sono però degli esempi dove aggiungendo materiale il carico di rottura sperimentale aumenta mentre quello reale diminuisce:



La trave si plasticizza sotto il carico P. Considerando la stessa trave e aggiungiamo del materiale sotto. Il teorema ci dice che il carico di rottura plastico, con l'aggiunta di materiale è maggiore. In questo caso ciò non è vero perché si forma una cuspide nel materiale aggiunto, con elevate tensioni.

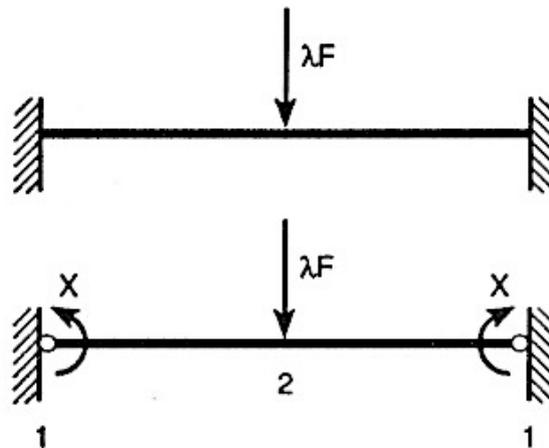
### Sistemi di travi con carichi proporzionali

Si ha un moltiplicatore  $\lambda$  che viene applicato ad un sistema di forze dato (il moltiplicatore va da 0 a  $\lambda_p$ )

Oltre al metodo proporzionale per applicare i carichi c'è un altro metodo: quello dei carichi ripetuti. I carichi proporzionali possono essere:

- Puntuali
- Distribuiti

Esempio applicativo: trave doppiamente incastrata.



Le sezioni critiche sono quelle si estremità e quelle sotto il carico: quindi  $m=2$ . Il grado di iperstaticità è 1 ( $n=1$ ).

Indicando con  $X$  il momento di incastro si ha:

$$M_1 = -X \quad ; \quad M_2 = -X + \frac{1}{4} \lambda F l$$

Quindi le disequazioni saranno due, quante sono le sezioni critiche:

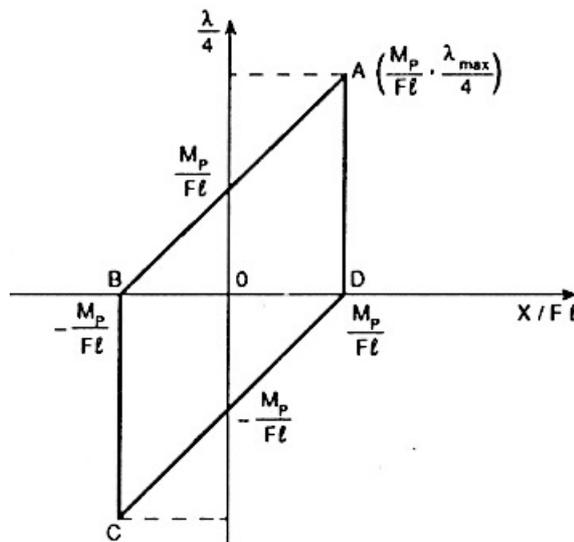
$$-M_p \leq -X \leq M_p,$$

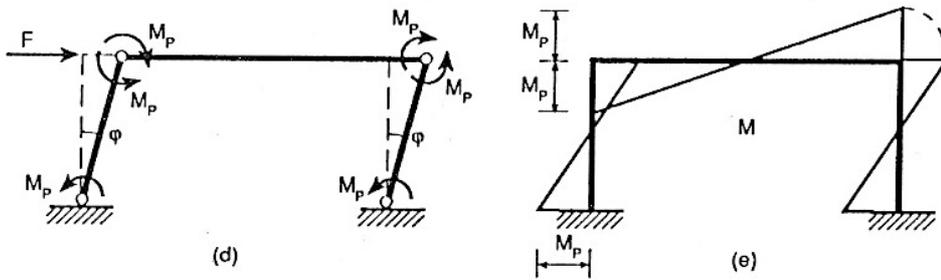
$$-M_p \leq \left(-X + \frac{1}{4} \lambda F l\right) \leq M_p.$$

Le due incognite sono  $X$  e  $\lambda$ , con  $\lambda$  funzione obiettivo che deve essere massimizzata, mentre  $X$  è l'unica incognita iperstatica. Dalle disequazioni si ottiene:

$$X \geq -M_p \quad ; \quad X \leq M_p \quad ; \quad X \leq M_p + \frac{1}{4} \lambda F l \quad ; \quad X \geq -M_p + \frac{1}{4} \lambda F l$$

le quali, sul piano  $X-\lambda$  (adimensionalizzato) rappresentano un parallelogramma:





Secondo meccanismo

OSS:

In base ai rapporti geometrici scelti, sia il primo meccanismo che il secondo non sono meccanismi di collassi veri. Questo perché i sistemi di forza non sono staticamente ammissibili; lo si vede facendo l'equilibrio al traverso.

Il traverso del primo schema non è equilibrato alla traslazione orizzontale; stessa cosa accade nel secondo schema con la forza verticale.

Immaginando che gli schemi siano quelli di collasso vero, applichiamo il principio di lavori virtuali per ricavare i carichi di collasso:

Per lo schema uno:  $F l \varphi - 4 M_P l = 0$

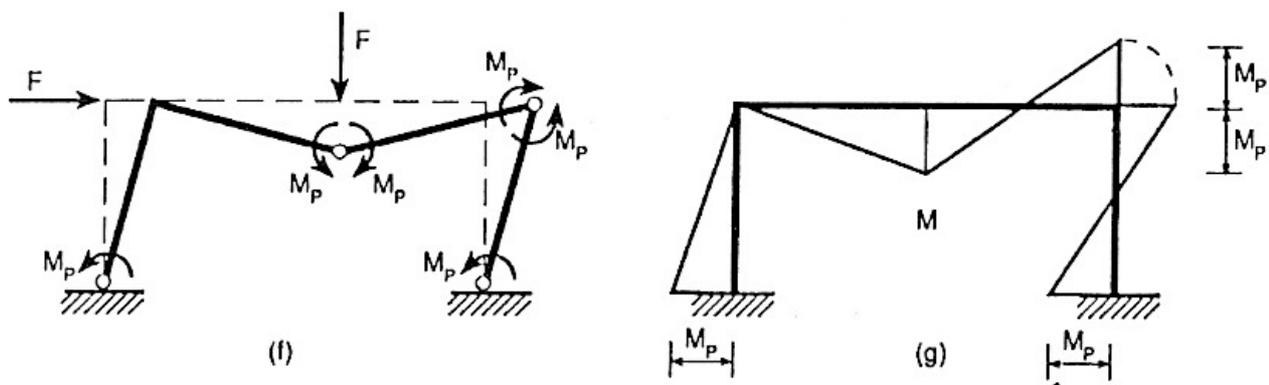
I momenti plastici per definizione compiono lavoro negativo. I momenti plastici sui ritti non compiono lavoro. Il lavoro è uguale a zero perché il teorema del principio dei lavori virtuali ci dice che la somma dei lavori virtuali è nullo solo se la struttura è in equilibrio. La struttura al momento del collasso è in equilibrio.

Dalla relazione si ricava:

$$F = 4 \frac{M_P}{l} \quad \text{che però NON è la forza di collasso vera.}$$

Considerando lo schema due viene fuori lo stesso risultato.

Questi due schemi risolverono il problema da un punto di vista cinematico ma non statico. Perciò il carico di collasso vero non sarà quello trovato per gli schemi singoli ma sarà minore. Dunque si vanno a sommare i due schemi:



Lavorano tutte le cerniere e applicando il PLV si ottiene:

$$2 F l \varphi - 6 M_P l \varphi = 0 \quad \rightarrow \quad F_P = 3 \frac{M_P}{l}$$

Si dimostra che questo è il meccanismo vero perché il diagramma di momento è staticamente ammissibile (in equilibrio). Lo si può vedere anche facendo l'equilibrio orizzontale e verticale del traverso, che è verificato.

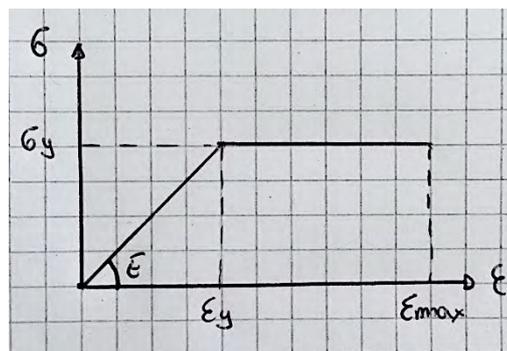
## LEZIONE 09/03/2016 (Accornero)

### Analisi limite di lastre piane inflesse

Parliamo di due tipi di lastre piane inflesse: circolari e rettangolari. Si fa differenza per via del punto di plasticizzazione. Nelle lastre piane circolari la cerniera plastica diventa una sfera, cioè la cerniera è tridimensionale; la plasticizzazione arriva per tutte le direzioni all'intorno di quella sfera. Nelle lastre piane rettangolari il discorso è simile; la cerniera plastica che si sviluppa è un'estrusione della cerniera plastica dei sistemi di travi: è una cerniera cilindrica (il pallino si estrude lungo la terza dimensione e diventa un cilindro); la plasticizzazione nelle lastre rettangolari avviene per cerniere cilindriche che contengono al loro interno la linea di rottura (linee lungo le quali avviene il collasso globale della struttura)

### Lastre circolari

Consideriamo il caso di inflessione, ovvero una lastra circolare inflessa appoggiata sul contorno. La legge costitutiva del materiale è elastica-perfettamente plastica:



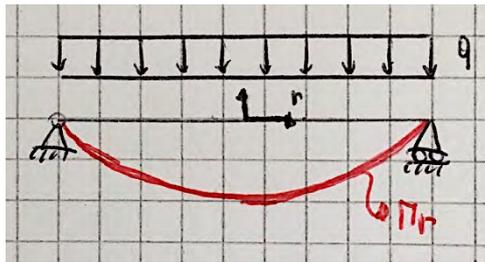
La prima parte del comportamento del materiale è lineare, ovvero vi è proporzionalità tra  $\sigma$  ed  $\epsilon$ ; elastica perché essendo un rapporto lineare (cioè una retta) quello tra  $\sigma$  ed  $\epsilon$ , si può trovare una relazione univoca per tutti i punti della retta; questa è l'inclinazione che è il modulo E di Young.

Si ha comportamento elastico fino a  $\sigma_y$ , da questo punto in poi si può crescere solo sull'asse delle x. Ciò vuol dire che raggiunto un certo carico, che riproduce all'interno della sezione della struttura una certa  $\sigma$ , per incrementi di carico pari a 0 si ha un rammollimento del sistema strutturale. Quindi il sistema inizia a cedere finché non si raggiunge l'allungamento massimo, ovvero  $\epsilon_{max}$ , che determina la fine della legge elastica-perfettamente plastica. Questa  $\epsilon_{max}$  la raggiungo per cedimento senza incremento di carico rispetto all'ultimo incremento di carico che ha determinato la tensione di snervamento  $\sigma_y$ . Dopo la  $\epsilon_{max}$  si ha la rottura (spacco) del materiale.

Ritornando alle piastre: le equazioni indefinite di equilibrio si possono scrivere in forma esplicita come segue:

In questo dominio di resistenza (Tresca) il punto dove sia  $M_r$ , che  $M_\theta$  valgono  $M_p$ , è il punto B, che rappresenta il centro della lastra; cioè deve essere il vertice dell'esagono di Tresca.

Supponiamo, analizzando la piastra, di trovare un andamento progressivo del momento flettente lungo la direzione radiale; diciamo radiale e non differenziale perché: facendo una sezione della piastra circolare lungo la direzione radiale, sicuramente passerò per  $r=0$  e passerò da  $r=R$  da destra e sinistra; cioè sezionando la lastra circolare si ottiene:



Il metodo risolutivo semplificato per le lastre era quello del tedesco Grachoff. Si andava a considerare una lastra come un graticcio di travi, ovvero una serie di travi (lungo x ed y); quindi si divide la lastra in strisce e si calcola l'abbassamento delle strisce. Imponendo l'uguaglianza degli abbassamenti si risolve la lastra. Questo concetto serve per poter capire perché le lastre possono essere viste come strisce.

Quindi tornando al momento della striscia della lastra circolare, si vede come il momento lungo la direzione radiale varia da uno 0 ad un massimo. Si parla di momento radiale perché la coordinata dell'elemento monodimensionale x è la coordinata r. Ciò vuol dire che il regime statico per la direzione radiale può essere rappresentato dal segmento di retta BC dell'esagono di Tresca; cioè  $M_r$  va a raggiungere al massimo la caratteristica statica  $M_p$  e al minimo la caratteristica statica 0. Cioè la plasticizzazione lungo una linea radiale è rappresentato dai punti appartenenti al lato BC.

Lungo BC  $M_p = M_\theta$ , perciò l'equazione diventa:  $\frac{d^2}{dr^2}(rM_r) - qr = 0$

Integro ed ottengo:  $M_r = q \frac{r^2}{6} + C_1 + \frac{C_2}{r}$

Al solito  $C_1$  e  $C_2$  li ricavo con le condizioni al contorno:  $M_r(0) = M_p$  ;  $M_r(R) = 0$

Da cui ricavo che  $C_1 = M_p$  e  $C_2 = 0$ .

Ottingo il carico di collasso :  $q = -6 \frac{M_p}{R^2}$ .

A questo punto ho raggiunto la labilità e mi fermo col calcolo: perché ruotando la striscia per  $360^\circ$  noto che tutti i sottosistemi statici della lastra circolare con l'inserimento della cerniera plastica sono diventati labili. Dunque la struttura collassa. Si parla di cerniera sferica perché è possibile far ruotare di  $360^\circ$  tutte queste travi, quindi la cerniera monodimensionale ruota anch'essa attorno al proprio asse e diventa una sfera.

Uguagliando  $M_{EL}$  ad  $M_p$  trovo che:

$$q_{el} = 4,9 \frac{M_p}{R^2}$$

Il guadagno è:

$$\frac{q_p}{q_{el}} = \frac{6^{\frac{3}{2}}}{4,9} = 1,8$$

Il più e meno c'è perché si deve fare attenzione al momento, se tende le fibre superiori o quelle inferiori.

J, che è il numero di sezioni che si plasticizzano, è uguale ad h+1, perché non mi basta raggiungere l'isostaticità, ma devo raggiungere la labilità.

Componendo le due equazioni si trova l'equazione risolutiva per il teorema statico; ovvero:

$$M_{\Sigma P, j}^0 + m_{1, j} x_1 + m_{2, j} x_2 + \dots + m_{h, j} x_h = \mp M_{pj}$$

e si trova  $\lambda^-$ .

### Lastre rettangolari

Si differenziano dalle lastre circolari per il tipo di plasticizzazione: nelle lastre rettangolari avviene per linee di rottura. Bisogna immaginare delle grosse crepe che attraversano la lastra rettangolare: queste crepe sono cerniere cilindriche, ovvero in quei punti la lastra si spacca e si abbassa. Gli elementi che si spezzano ruotano attorno alla linea di rottura: si parla di cerniera plastica perché si arriva ad una rotazione che porta al collasso. Si parla di cerniera cilindrica perché il pallino si estrude lungo la linea di rottura.

Si parte dalle equazioni indefinite di equilibrio:

$$\frac{\partial M_x}{\partial X} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial Y} = T_x$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial X} + \frac{\partial M_y}{\partial Y} = T_y$$

Da cui segue: 
$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial XY} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial Y^2} = -P$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial X} + \frac{\partial T_y}{\partial Y} = -P$$

P rappresenta il carico distribuito

Dalle ipotesi cinematiche di Kirchhoff: abbiamo tre tipi di spostamento

$$\dot{U} = -\frac{\partial \dot{W}}{\partial X} Z$$

$$\dot{V} = -\frac{\partial \dot{W}}{\partial Y} Z$$

$$\dot{W} = \dot{W}(X, Y)$$

dove il punto rappresenta l'aumento di spostamento nel tempo, cioè la velocità di spostamento. Parlando di lastre e cinematiche non si parla di abbassamento, ma di velocità di abbassamento (movimento → cinematica → collasso). Dalle ipotesi cinematiche si ottengono le espressioni delle deformazioni:

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial \dot{U}}{\partial X} = -Z \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial X^2} = Z \dot{\chi}_x$$

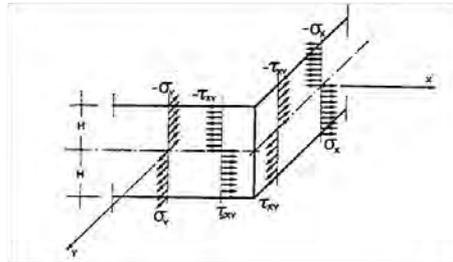
$$\dot{\epsilon}_y = \frac{\partial \dot{V}}{\partial Y} = -Z \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial Y^2} = Z \dot{\chi}_y$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{U}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{V}}{\partial X} = -2Z \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial XY} = 2Z \dot{\chi}_{xy}$$

Considerando la figura, e facendo i vari calcoli si può passare ai valori tensionali poiché vi è un rapporto diretto:

$$M_y = \sigma_y H^2$$

$$M_{xy} = \tau_{xy} H^2$$



$$m_x = \frac{\sigma_x}{\sigma_P}$$

$$m_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_P}$$

$$m_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_P}$$

All'interno di D si considerano i due criteri di resistenza di Tresca e Von Mises. Il criterio di Von Mises è più completo, nonostante sia meno restrittivo rispetto a quello di Tresca. Il dominio di resistenza di Von Mises è più grande rispetto a quello di Tresca.

- Von Mises:

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_P^2$$

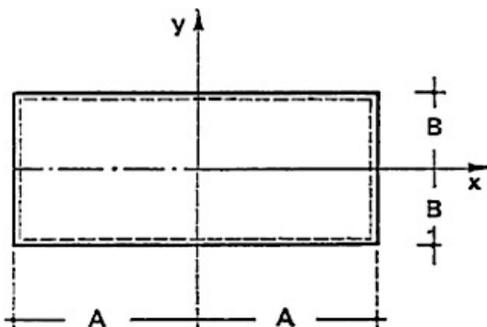
$$m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3m_{xy}^2 = 1$$

- Tresca:

$$\max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \} = \sigma_P$$

$$\max \{ |m_1|, |m_2|, |m_1 - m_2| \} = 1$$

Esempio applicativo: lastra rettangolare con 4 lati appoggiati



Si fanno delle posizioni:

$$x = \frac{X}{A} ; y = \frac{Y}{A} ; \beta = \frac{B}{A} ; p = \frac{PA^2}{M_P}$$

e le condizioni al contorno:

$$m_x = 0 ; m_y = 0 ; x = \pm 1 ; y = \pm \beta$$

Applicazione del teorema cinematico:

- Definizione di un meccanismo di collasso cinematicamente ammissibile;
- Determinazione della potenza dissipata sull'unità di superficie;
- Applicazione PLV e determinazione del limite superiore del carico di collasso.

Integrando D su tutta la superficie si ottiene tutto il lavoro interno. Sostituendo D si ha:

$$L_i = \frac{2M_P A}{\sqrt{3}} h \int_{-1-\beta}^1 \int_{-\beta}^{\beta} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial xy} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx dy$$

Per il lavoro esterno si integra P per l'abbassamento e si ha:

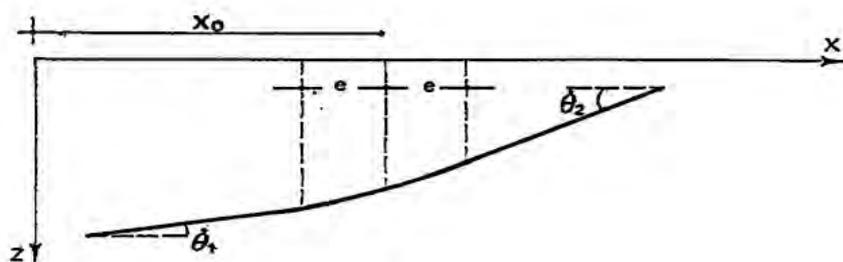
$$L_e = \int_{-A-B}^A \int_{-B}^B P \dot{w} dX dY \quad \rightarrow \quad L_e = M_P A h \int_{-1-\beta}^1 \int_{-\beta}^{\beta} p \dot{w} dx dy$$

A questo punto devo combinare il lavoro esterno e quello interno (PLV):

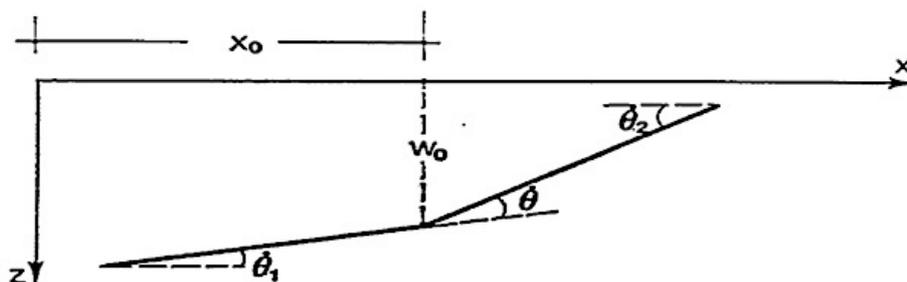
$$P^+ = \frac{2 \int_{-1-\beta}^1 \int_{-\beta}^{\beta} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial xy} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx dy}{\int_{-1-\beta}^1 \int_{-\beta}^{\beta} \dot{w} dx dy}$$

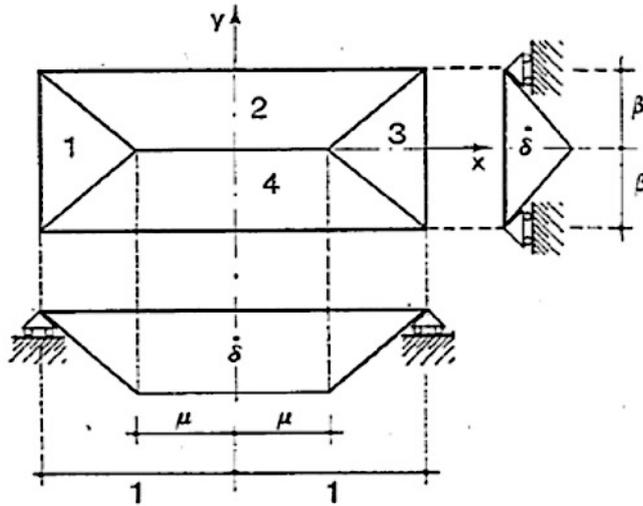
Risolvere questo integrale è molto complicato, perciò si fa una semplificazione andando ad introdurre il concetto di cerniera cilindrica: che è la linea di rottura attorno ruotano i pezzi della lastra. La lastra portata al limite plastico in certe sezioni al limite plastico, vede la formazione di linee di rottura e la rotazione attorno a queste dei pezzi della lastra.

Si rappresenta una deformata portata al limite della lastra:



Si rappresenta la schematizzazione, dove nei punti dove vi è  $\theta$  c'è la linea di rottura. Nei punti 1,2,3 bisogna immaginare il pallino della cerniera:





Impostiamo le velocità di rotazione, cioè gli angoli di rotazione per le varie zone della lastra:

1.  $\dot{\theta}_x = \frac{\dot{\delta}}{1-\mu}$  ;  $\dot{\theta}_y = 0$
2.  $\dot{\theta}_x = 0$  ;  $\dot{\theta}_y = -\frac{\dot{\delta}}{\beta}$                        $\dot{\delta} = \text{velocità di abbassamento}$
3.  $\dot{\theta}_x = -\frac{\dot{\delta}}{1-\mu}$  ;  $\dot{\theta}_y = 0$                        $2\mu = \text{lunghezza cerniera centrale}$
4.  $\dot{\theta}_x = 0$  ;  $\dot{\theta}_y = \frac{\dot{\delta}}{\beta}$

Quindi posso scrivere la rotazione relativa nella cerniera centrale lunga  $2\mu$ :

$$\dot{\theta}_{2-4} = 2 \frac{\dot{\delta}}{\beta}$$

mentre la rotazione relativa delle quattro cerniere obliqua di lunghezza  $l_b$  sarà:

$$\dot{\theta}_{1-2} = \sqrt{(\dot{\theta}_x^1 - \dot{\theta}_x^2)^2 + (\dot{\theta}_y^1 - \dot{\theta}_y^2)^2} = \sqrt{\left(\frac{\dot{\delta}}{1-\mu}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\delta}}{\beta}\right)^2} = \dot{\delta} \frac{\sqrt{(1-\mu)^2 + \beta^2}}{(1-\mu)\beta}$$

con  $l_b = \sqrt{(1-\mu)^2 + \beta^2}$

Quindi:

$$\dot{L}_i = \frac{2M_P A}{\sqrt{3}} h \left( 2\dot{\theta}_{2-4}\mu + 4\dot{\theta}_{1-2}l_b \right)$$

Si esprime il volume generato dal meccanismo di collasso:

$$\dot{V} = \frac{4}{3} \beta (1-\mu) \dot{\delta} + 2\beta\mu\dot{\delta} = \frac{2}{3} \beta (2+\mu) \dot{\delta}$$

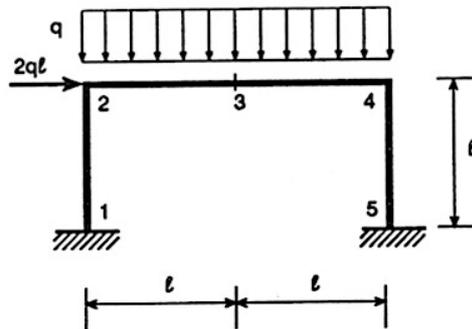
## LEZIONE 15/03/2016 (Carpinteri)

### Sistemi di travi caricate proporzionalmente da forze distribuite

Si hanno maggiori difficoltà rispetto al caso di forze concentrate poiché non si possono individuare sin dall'inizio un numero finito di sezioni critiche. Dunque si procede per tentativi andando ad applicare alternatamente i teoremi cinematico e statico e si arriverà alla soluzione dopo un certo numero di iterazioni.

Quando le posizioni incognite sono poche si possono mettere come incognite le posizioni delle cerniere e si va a minimizzare il carico di collasso.

Si considera un portale:

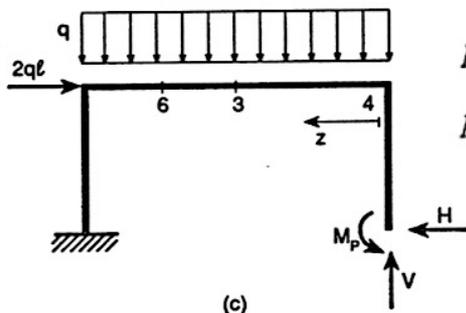


Le sezioni critiche sono 1,2,3,4 e 5. Si va ad applicare il PLV (perché all'atto del collasso si ha equilibrio) e si ottiene:

$$2ql \left( \frac{l}{2} \varphi \right) + 2ql(l\varphi) - 6M_P\varphi = 0 \rightarrow q = 2 \frac{M_P}{l^2}$$

Il  $q$  trovato non è il carico di collasso effettivo. Per verificare ciò si riconsidera la struttura e la si rende isostatica: le reazioni vincolari relative alla sezione 5 si ottengono imponendo che, anche nelle sezioni 3 e 4, il momento flettente sia pari al suo valore plastico  $M_P$ :

Si va a calcolare:



$$M_4 = -M_P + Hl = M_P,$$

$$M_3 = M_P - Hl + Vl - \frac{1}{2}q\ell^2 = M_P,$$

Da cui si ottiene:  $H = 2 \frac{M_P}{l}$  ;  $V = 3 \frac{M_P}{l}$

A questo punto bisogna vedere se il momento flettente del travaso superi o meno il momento plastico (anche in un solo segmento): poiché lo supera, allora il sistema di forze non è staticamente ammissibile.

$$M_4 = -M_P + H\ell = M_P,$$

$$M_6 = M_P - H\ell + V\frac{3}{2}\ell - \frac{1}{2}q\left(\frac{3}{2}\ell\right)^2 = M_P, \quad \text{Da cui si ha: } H = 2\frac{M_P}{\ell} \quad ; \quad V = \frac{41}{15}\frac{M_P}{\ell}$$

Dunque si trovano momento e taglio che presentano le seguenti espressioni:

$$M(z) = M_P + \left(\frac{41}{15}\frac{M_P}{\ell}\right)z - 2\frac{M_P}{\ell}\ell - \frac{1}{2}\left(\frac{28}{15}\frac{M_P}{\ell^2}\right)z^2, \quad \text{il punto di stazionarietà, ovvero dove}$$

$$T(z) = \frac{dM}{dz} = \frac{41}{15}\frac{M_P}{\ell} - \frac{28}{15}\frac{M_P}{\ell^2}z. \quad \text{si annulla il taglio si ha per } z = \frac{41}{28}\ell$$

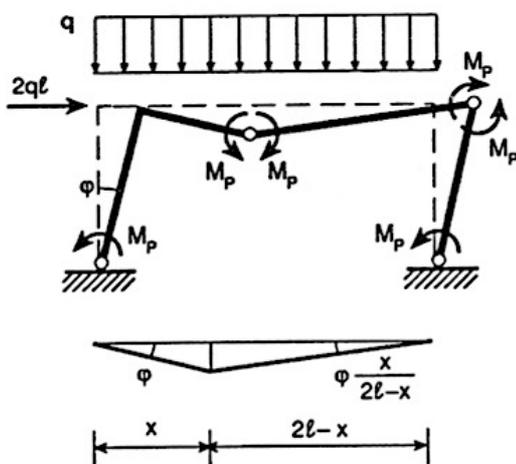
Il momento massimo dunque vale: 
$$M_{\max} = M\left(\frac{41}{28}\ell\right) = \frac{841}{840}M_P.$$

In questo caso il momento flettente massimo supera di poco  $M_P$ ; ma anche in questo caso il sistema risulta staticamente inammissibile; per renderlo ammissibile vado a dividere il carico per  $841/840$ , e si ottiene il seguente intervallo:

$$\frac{840}{841} \times \frac{28}{15} \frac{M_P}{\ell^2} < q_P < \frac{28}{15} \frac{M_P}{\ell^2}.$$

Tale intervallo è estremamente ristretto ed ai fini ingegneristici fornisce il carico di collasso effettivo con sufficiente approssimazione (circa l'un per mille). Per migliorare ulteriormente l'approssimazione basterebbe considerare un terzo meccanismo con la cerniera in  $z = \frac{41}{28}\ell$ , ma ciò non è necessario poiché è possibile identificare l'effettivo meccanismo di collasso, minimizzando il carico  $q$ , al variare della posizione della cerniera plastica sul traverso (teorema cinematico).

Per evitare tutte queste iterazioni si potrebbe considerare la cerniera plastica posta in una posizione a distanza  $x$  dal nodo-incastro di sinistra:



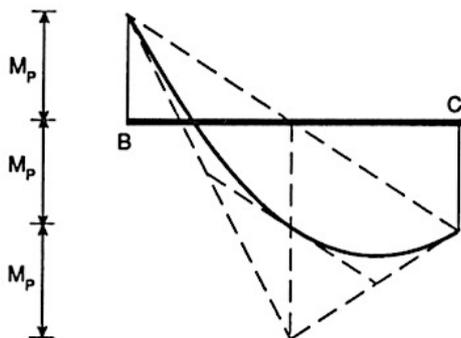
Il tratto di sinistra ruota in senso orario dell'angolo  $\varphi$ , mentre il tratto destro ruota in senso antiorario dell'angolo:

$$\vartheta = \varphi \frac{x}{2\ell - x}.$$

Applico il PLV:

$$qx\left(\frac{x}{2}\varphi\right) + \frac{1}{2}q(2\ell - x)^2\varphi\frac{x}{2\ell - x} + 2q\ell(\ell\varphi) - 4M_P\varphi - 2M_P\varphi\frac{x}{2\ell - x} = 0,$$

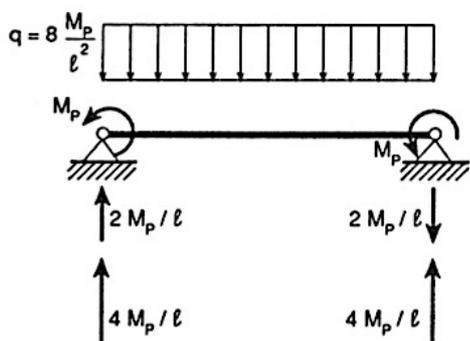
L'aver imposto alle estremità del traverso i due momenti plastici  $M_p$ , fa sì che, nella parte destra del traverso, il momento flettente ecceda il valore  $M_p$ : perciò si ha una situazione staticamente non ammissibile.



Per determinare il valore massimo del momento si isola il traverso e si individua la sezione in cui il taglio si annulla:

$$T(z) = 2 \frac{M_P}{\ell} + \frac{1}{2} q \ell - qz = 0,$$

$$\text{per } z = \frac{\ell}{2} + 2 \frac{M_P}{q \ell} = \frac{3}{4} \ell.$$



Perciò il momento massimo vale:

$$M_{\max} = \left( 6 \frac{M_P}{\ell} \right) \left( \frac{3}{4} \ell \right) - M_P - \frac{1}{2} \left( 8 \frac{M_P}{\ell^2} \right) \left( \frac{3}{4} \ell \right)^2 = \frac{5}{4} M_P.$$

Dividendo il carico per  $5/4$  ci si riduce ad un sistema staticamente ammissibile per cui valgono le seguenti disequazioni:

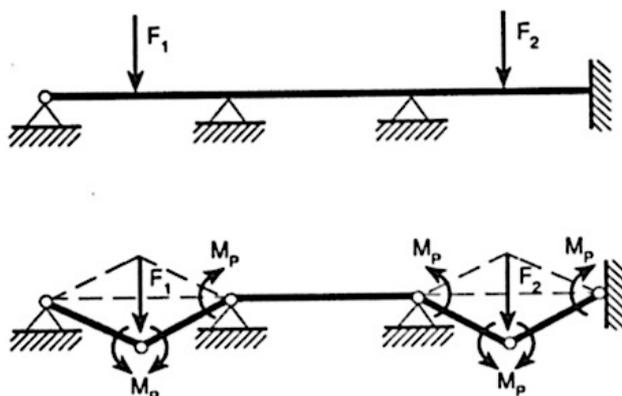
$$6.4 \frac{M_P}{\ell^2} < q_P < 8 \frac{M_P}{\ell^2}.$$

Essendo l'intervallo troppo ampio si fanno altre iterazioni e si sposta la cerniera a  $3/4$  dal nodo sinistro del traverso. A questo punto la cerniera è nel punto giusto e non bisogna proseguire con le iterazioni. Quindi ho trovato una situazione cinematicamente e staticamente ammissibile.

### Carichi non proporzionali

Nel caso di sistemi iperstatici di travi, caricate non proporzionalmente da due o più forze concentrate, l'applicazione del teorema cinematico permette di definire il limite di collasso nello spazio di tali forze.

Si consideri una trave continua:

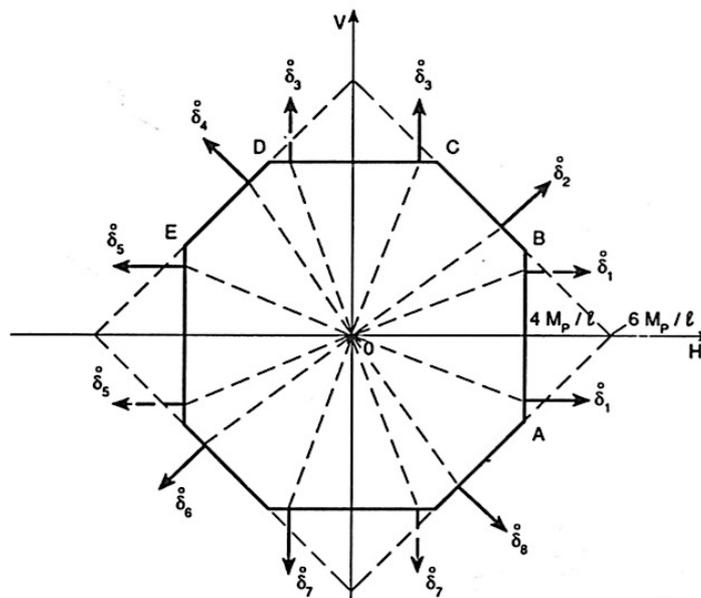


Vengono rappresentati tutti gli schemi di collasso del portale. I meccanismi elementari sono 4 (2 sono semplici (1) e (3) e 2 sono combinati).

Si applica il PLV a ciascuno dei diversi meccanismi e si ha:

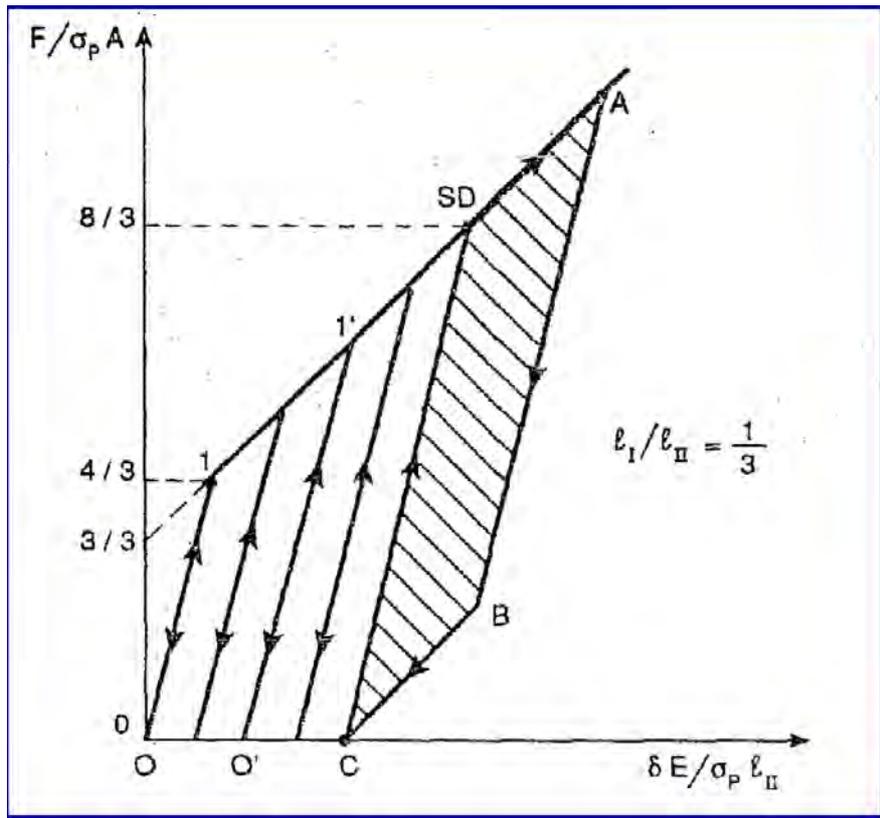
$$\begin{aligned}
 & - 4 M_p \varphi \pm H \ell \varphi = 0, \\
 & - 6 M_p \varphi \pm (V \ell \varphi + H \ell \varphi) = 0, \\
 & - 4 M_p \varphi \pm V \ell \varphi = 0, \\
 & - 6 M_p \varphi \mp (V \ell \varphi - H \ell \varphi) = 0.
 \end{aligned}$$

Per  $V/H < 1/2$  si ha l'attivazione della prima coppia di meccanismi;  
 Per  $V/H$  compreso tra  $1/2$  e 2 si ha l'attivazione della seconda coppia;  
 per  $V/H > 2$  si ha l'attivazione della terza coppia;  
 Per  $V/H$  compreso tra -2 e  $-1/2$  si ha l'attivazione della quarta coppia.  
 Si ottiene un ottagono come frontiera:



Se si avesse un portale di lunghezza generica  $l$  e altezza generica  $h$  si avrebbero dei meccanismi diversi (con rapporti diversi da 2). La doppia simmetria rimane, però si perde la polar simmetria e gli ottagoni diventano oblunghi in direzione verticale o orizzontale a seconda se prevale  $l$  o  $h$ . Ad esempio per  $h/l = 1/2$  lo spostamento verticale prevale su quello orizzontale.

Riportando  $F$  in funzione dello spostamento (*delta*) in un grafico adimensionale si ottiene:



si percorre quindi un tratto di grafico (0-1) con comportamento elastico. Aumentando  $F$ , sino a superare il valore plastico della biella centrale, la biella centrale inizia a plasticizzarsi, mentre quelle laterali rimangono in campo elastico. Questo significa che le bielle laterali richiamano quella centrale plasticizzata e il sistema ritorna parzialmente alla posizione iniziale.

Nel grafico succede che, superato il valore 1 non si procede più con la stessa pendenza del tratto 0-1, perché il sistema è parzialmente plasticizzato e quindi è cambiato il modulo elastico.

Supponiamo di portare il valore della forza a metà tra il valore della forza 1 e il valore  $F_{sd}$ .

Il valore di  $F_{sd}$  è il valore della forza di richiamo che fa plasticizzare la biella centrale in compressione. Superando il valore 1, la biella centrale si è plasticizzata a trazione. Arrivati al punto 1' (aumentando la forza di trazione), si suppone di togliere la forza esterna applicata; il sistema ritorna indietro secondo l'inclinazione 0'-1' conservando le sue proprietà elastiche.

Il segmento 0'-1' è chiamato SHAKE-DOWN ed è il fenomeno di adattamento plastico. La plasticizzazione parziale non prevede il collasso, la struttura iperstatica infatti si è adattata. Lo SHAKE-DOWN comporta un residuo di deformazione plastica nel sistema che è uguale, nel grafico a 0-0'.

La pendenza del tratto 0-1 è dettata dalla legge di Hooke.

$$\varepsilon_I(\max) = \frac{\ell_{II}}{\ell_I} \varepsilon_{II}(\max), \quad (18.151)$$

$$\varepsilon_I(\max) = \frac{\ell_{II}}{\ell_I} \frac{X_{II}(\max)}{EA/2}, \quad (18.152)$$

la deformazione della biella centrale è in funzione quindi della reazione della biella laterale.

Imponendo la condizione della plasticizzazione inversa, ossia la plasticizzazione della biella centrale quando la forza applicata è nulla e si vuole ottenere la tensione  $-\sigma_P$ :

$$\varepsilon_I(\min) = \varepsilon_I(\max) - \frac{2\sigma_P}{E}. \quad (18.153)$$

(2° plasticizzazione)

Imponendo anche la condizione della plasticizzazione diretta, ossia in trazione:

$$\varepsilon_I(\min) = \frac{\ell_{II}}{\ell_I} \varepsilon_{II}(\min), \quad (18.154)$$

(1° plasticizzazione)

entrambe le plasticizzazioni sono in funzione della rigidezza della biella centrale.

Per le proprietà transitive si ottiene:

$$\frac{\ell_{II}}{\ell_I} \frac{X_{II}(\min)}{EA/2} = \frac{\ell_{II}}{\ell_I} \frac{X_{II}(\max)}{EA/2} - \frac{2\sigma_P}{E}. \quad (18.155)$$

**Dalla (18.156) si ottiene quindi:**

$$X_{II}(\max) = \sigma_P \frac{A}{2} + \sigma_P A \frac{\ell_I}{\ell_{II}}. \quad (18.160)$$

**Poiché al carico massimo la biella centrale è plasticizzata, si ha:**

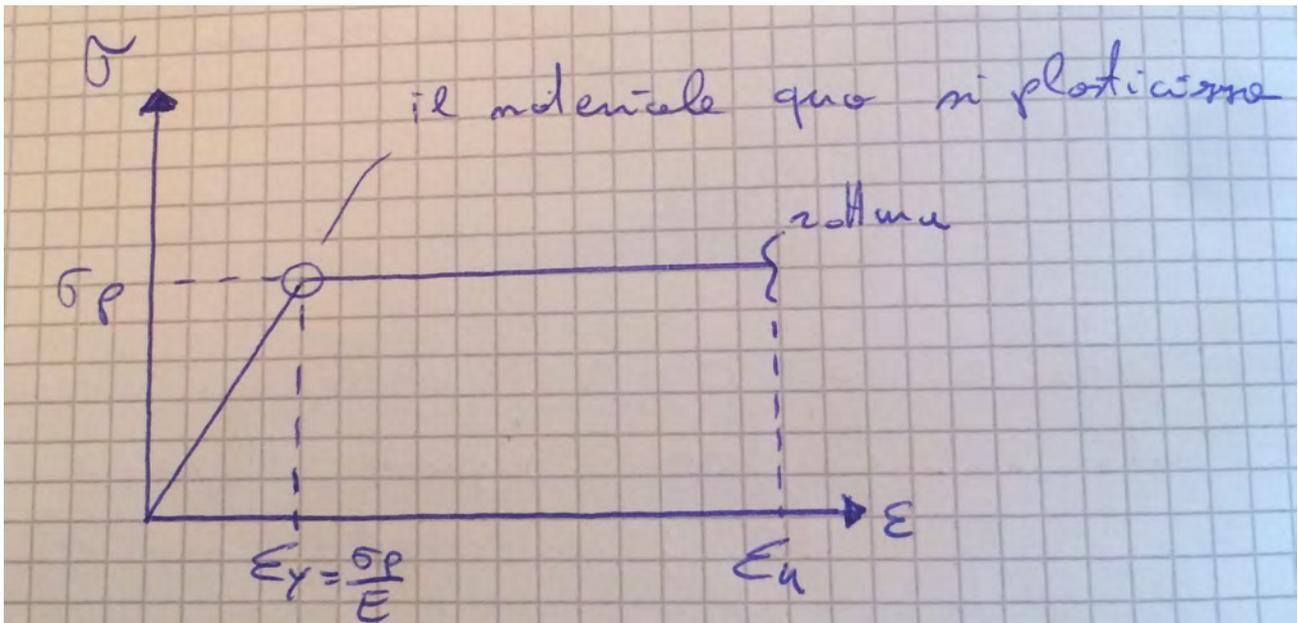
$$X_I(\max) = \sigma_P A. \quad (18.161)$$

**L'inserimento delle (18.160) e (18.161) nella (18.150.a), fornisce infine la forza di plasticizzazione inversa:**

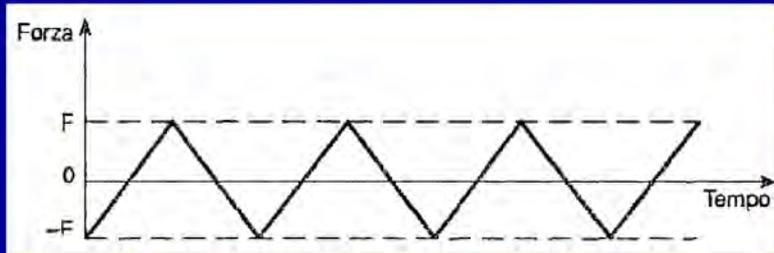
$$F_{SD} = \sigma_P A + 2 \left( \sigma_P \frac{A}{2} + \sigma_P A \frac{\ell_I}{\ell_{II}} \right) \quad (18.162)$$

**Ovvero:**

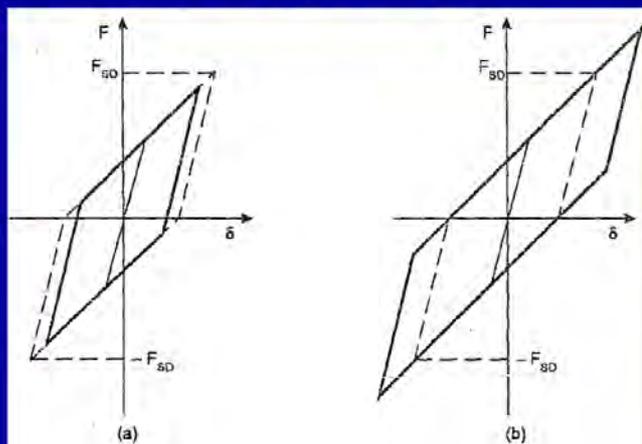
$$F_{SD} = 2\sigma_P A \left( 1 + \frac{\ell_I}{\ell_{II}} \right) \quad (18.163)$$



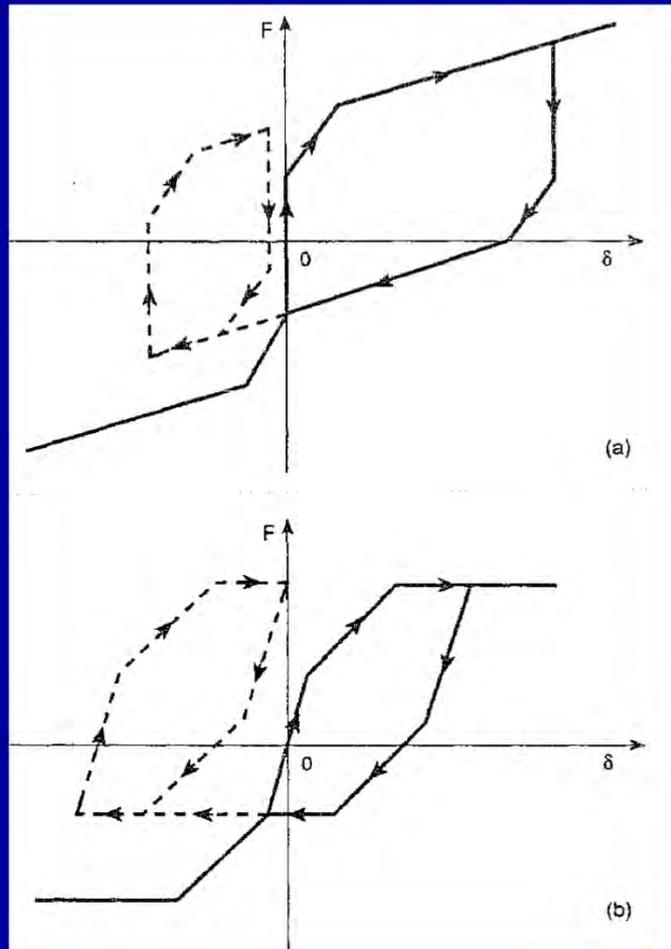
**Nel caso in cui il carico ciclico, anziché pulsante (fig. 18.36), sia alterno e simmetrico (fig. 18.38),**



**è possibile dimostrare come il ciclo di isteresi assuma l'aspetto rappresentato nelle figg. 18.39.a, b, rispettivamente per  $F < F_{SD}$ ,  $F > F_{SD}$ .**



**Va rilevato infine che, nei casi in cui vi siano più tratti incrudenti (fig. 18.42.a), ovvero nei casi in cui si raggiunga il collasso plastico del sistema (fig. 18.42.b), la plasticizzazione alternata si sviluppa attraverso cicli poligonali, polarsimmetrici rispetto a specifici punti del piano  $F - \delta$ .**



Per risolvere il problema si considera l'equazione di congruenza o compatibilità:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y},$$

Ed andando a sostituire le espressioni delle equazioni costitutive si può andare ad esprimere tale equazione in termini tensionali e si ha:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Derivando le equazioni indefinite di equilibrio rispetto ad x e ad y, e sommando le equazioni risultanti si ottiene:

$$-\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial \mathcal{F}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{F}_y}{\partial y} = 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

moltiplicando i termini di questa equazione per  $(1 + \nu)$  si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu \sigma_x) = \\ & = -(1 + \nu) \left[ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial \mathcal{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}_y}{\partial y} \right]. \end{aligned}$$

Raccogliendo i termini si ottiene:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}_y}{\partial y} \right].$$

Se le forze di volume sono nulle si ottiene il seguente sistema di tre equazioni differenziali nelle tre funzioni incognite  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0, \\ \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) &= 0. \end{aligned}$$

Le caratteristiche elastiche E,  $\nu$  del materiale non appaiono nelle equazioni risolventi. Si deduce quindi che il campo tensionale piano non dipende in alcun modo dal materiale, ma solo dalle condizioni al contorno. La stessa cosa naturalmente non si può dire del campo deformativo, e quindi degli spostamenti elastici da esso indotti.

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2},$$

$$\nu' = \frac{\nu}{1 - \nu},$$

Considerando le cosiddette caratteristiche elastiche irrigidite: si ottiene:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E'}(\sigma_x - \nu'\sigma_y),$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E'}(\sigma_y - \nu'\sigma_x),$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu')}{E'}\tau_{xy},$$

L'equazione di compatibilità si può esprimere come:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1 - \nu} \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}_y}{\partial y} \right].$$

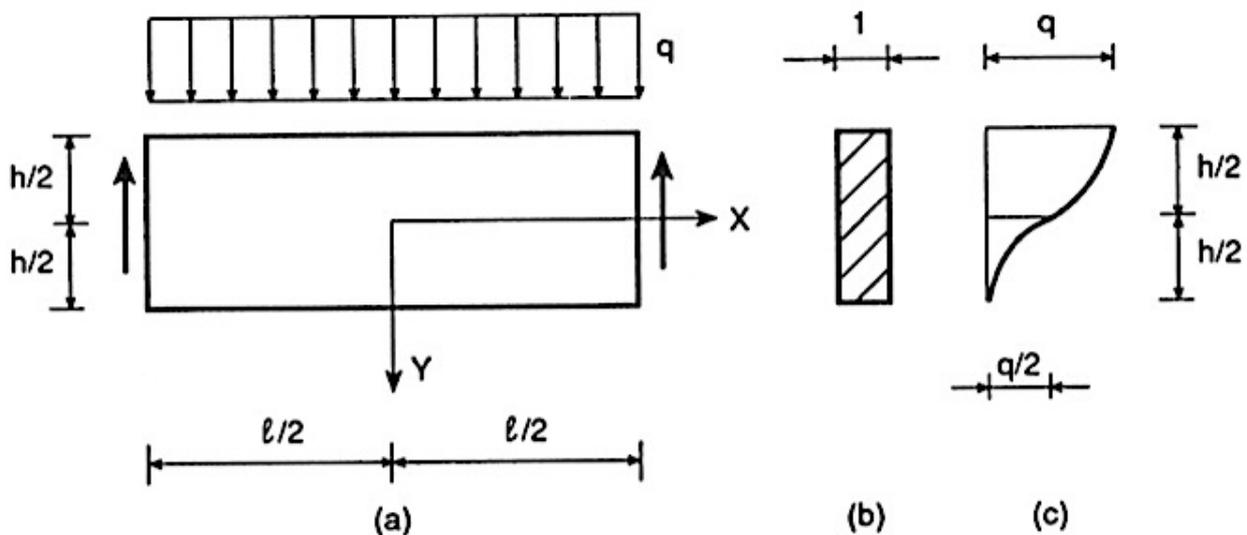
Se le forze di volume sono nulle si riottengono le equazioni risolventi del problema piano nelle tensioni, più una quarta equazione:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

che implica la costanza della tensione assiale lungo lo spessore.

### Trave-parete

È un caso interessante ed applicativo. Si consideri una trave-parete con sezione rettangolare a base unitaria con rapporto tra lunghezza ed altezza pari circa 1 a 4. La si può pensare come una trave soggetta a una forza distribuita uniforme esterna applicata alla faccia superiore. Come reazioni vincolari ci sono due forze di taglio estreme e simmetriche che danno l'equilibrio rispetto al carico applicato. Questa è la situazione geometrica e statica.



Osservando che il momento di inerzia della sezione rettangolare di base unitaria è  $I = h^3/12$ , si ottiene  $a = -q/2I$ , e pertanto si perviene alle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{q}{2I} \left( x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right), \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2I} \left( \frac{1}{3} y^3 - \frac{h^2}{4} y + \frac{h^3}{12} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{q}{2I} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) x.\end{aligned}$$

Questa soluzione ha però un difetto, perché non va a soddisfare una delle equazioni integrali, ovvero quella che descrive il momento flettente (che deve essere nullo). Le equazioni appena trovate però non danno momento nullo, allora Tymoshenko fa questa posizione, ovvero aggiunge un termine di momento flettente:

$$\sigma_x = yd \text{ e } \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

così da determinare la costante  $d$  tramite la terza condizione al contorno integrale, per  $x = \pm \frac{l}{2}$ :

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sigma_x y \, dy = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[ -6 \frac{q}{h^3} \left( \frac{\ell^2}{4} y - \frac{2}{3} y^3 \right) + yd \right] y \, dy = 0.$$

Da questa si ricava  $d$  :

$$d = \frac{3}{2} \frac{q}{h} \left( \frac{\ell^2}{h^2} - \frac{2}{5} \right),$$

Dunque si ottiene l'espressione definitiva:

$$\sigma_x = \frac{q}{2I} \left( \frac{\ell^2}{4} - x^2 \right) y + \frac{q}{2I} \left( \frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{10} h^2 y \right).$$

In questa espressione: il primo termine rappresenta la tensione data dalla usuale teoria della flessione, mentre il secondo termine ne rappresenta la correzione. Tale termine non dipende dall'ascissa  $x$  ed è trascurabile soltanto nei casi in cui la luce della trave sia grande se confrontata con l'altezza della stessa. L'espressione appena scritta rappresenta una soluzione esatta solo se alle estremità gli sforzi normali sono distribuiti con la seguente legge:

$$\sigma_x \left( x = \pm \frac{\ell}{2} \right) = 6 \frac{q}{h^3} \left( \frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{10} h^2 y \right).$$

Questi sforzi presentano risultante e momento risultante entrambi nulli. Perciò, tramite il principio di De Saint Venant è possibile dedurre che il loro effetto, a distanze dalle estremità superiori all'altezza  $h$  della trave, si attenua sensibilmente sino a scomparire.

L'equazione  $\gamma_{xy}$  (scorrimento angolare) allora diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{q}{2EI} \left\{ \left[ \left( \frac{\ell^2}{4} x - \frac{x^3}{3} \right) + \left( 2y^2 - \frac{h^2}{10} \right) x \right] + \right. \\ & \left. vx \left[ y^2 - \frac{h^2}{4} \right] \right\} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{q}{2EI} \left\{ -v \left[ (-2x) \frac{y^2}{2} \right] \right\} + \frac{\partial g}{\partial x} \\ &= -\frac{q}{EI} (1 + \nu) \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) x \end{aligned}$$

Raccogliendo i termini si ottiene:

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{q}{2EI} \left\{ x \left[ \frac{\ell^2}{4} + h^2 \left( \frac{2}{5} + \frac{\nu}{4} \right) \right] - \frac{x^3}{3} \right\} = -\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Poiché il primo membro è funzione solo di x, mentre il secondo termine è funzione solo di y, entrambi devono rappresentare una costante  $C_1$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{q}{2EI} \left\{ \frac{x^3}{3} - x \left[ \frac{\ell^2}{4} + h^2 \left( \frac{2}{5} + \frac{\nu}{4} \right) \right] \right\} + C_1.$$

Integrando quest'ultima equazione si ottiene la funzione g:

$$g(x) = \frac{q}{2EI} \left\{ \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} \left[ \frac{\ell^2}{4} + h^2 \left( \frac{2}{5} + \frac{\nu}{4} \right) \right] \right\} + C_1 x + C_2.$$

Le costanti  $C_1$  e  $C_2$  si possono dedurre dalla freccia in mezzzeria e dalle condizioni alle estremità:

$$\begin{aligned} v(0, 0) &= \delta, \\ v \left( \pm \frac{\ell}{2}, 0 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Applicando queste condizioni alla funzione g e allo spostamento v, si ottiene:

$$C_1 = 0 \quad e \quad C_2 = \delta$$

e quindi l'asse geometrico della trave si inflette secondo la seguente curva:

$$v(x, 0) = \frac{q}{2EI} \left\{ \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} \left[ \frac{\ell^2}{4} + h^2 \left( \frac{2}{5} + \frac{\nu}{4} \right) \right] \right\} + \delta.$$

Uguagliando questa freccia v a zero agli estremi si ottiene  $\delta$ :

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI} \left[ 1 + \frac{48}{25} \frac{h^2}{\ell^2} \left( 1 + \frac{5}{8} \nu \right) \right].$$

L'equazione indefinita di equilibrio alla traslazione in direzione radiale sarà:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta + \sigma_r dr d\theta - \\ & - \left( 2\sigma_\theta \frac{d\theta}{2} \right) dr + \left( \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr + \\ & + F_r r dr d\theta = 0 \end{aligned}$$

In modo semplificato:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + F_r = 0$$

L'equazione indefinita di equilibrio alla traslazione in direzione circonferenziale sarà:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr + \left( \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \right) r d\theta + \tau_{r\theta} dr d\theta + \\ & + \left( 2\tau_{r\theta} \frac{d\theta}{2} \right) dr + F_\theta r dr d\theta = 0 \end{aligned}$$

In modo semplificato:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + F_\theta = 0$$

In forma matriciale le equazioni possono esprimersi :

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) & -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi le equazioni indefinite di equilibrio sono:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + F_\theta = 0 \end{cases}$$

## LEZIONE 23/03/2016 (Accornero)

### Funzioni analitiche

Le funzioni analitiche stanno alla base del 'metodo di Westengard', che è un modello matematico per arrivare al concetto delle tensioni all'apice di una frattura. Supponiamo di avere una trave gravemente danneggiata, cioè una frattura interrompe la continuità. Essa è soggetta a flessione semplice e in termini elastici si ha un diagramma delle tensioni a farfalla in una zona integra. Spostandoti sull'asse della trave si ha una complicazione nelle zone in cui si hanno le fratture. Questo perché le tensioni che agiscono sulla cricca sono altissime ed infinite, altrimenti non si spiegherebbe il fenomeno della propagazione delle cricche. L'elemento nascerà integro, con qualche difetto; la formazione del crack e la sua propagazione avviene qualora le tensioni che agiscono superino in termini energetici un valore proprio del materiale che si chiama TENACITÀ. Quando la frattura si genera l'apice della stessa frattura è il suo vertice; questa è una zona importante perché nel suo intorno le tensioni non viaggiano certo secondo il modello elastico o il modello plastico, viaggiano secondo un modello alla Westengard.

### Definizione

Si definisce la funzione analitica  $Z(z)$ , la funzione complessa sommatrice di due potenziali, entrambi in funzione di  $z$  (base dei potenziali complessi).

$$Z(z) = U(z) + iV(z) \quad (19.89)$$

Si nota che uno dei potenziali è parte immaginaria di  $Z$ ,  $z$  a sua volta ha una parte reale e una parte immaginaria:

$$z = x + iy \quad (19.90)$$

$Z$  è analitica se:

- la sua derivata è unica (in punto) nel piano complesso;
- le derivate non dipendono dal verso dell'incremento.

### Dimostrazione $Z$ analitica

La derivata di  $Z$  può essere vista come:

Se  $Z$  è analitica i potenziali  $U$  e  $V$  sono funzioni armoniche. Dimostrazione:

$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \quad (19.98a)$		$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (19.99)$	
$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \quad (19.98b)$			
$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad (19.100a)$		$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (19.101)$	
$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (19.100b)$			

Esempio di funzioni analitiche

**Examples:**

1)	$Z(z) = z = x + iy$		$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 1$ $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0$
	<b>Z is always analytical.</b>		
2)	$Z(z) = \bar{z} = x - iy,$		$\frac{\partial U}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -1$
	<b>Z is not analytical.</b>		

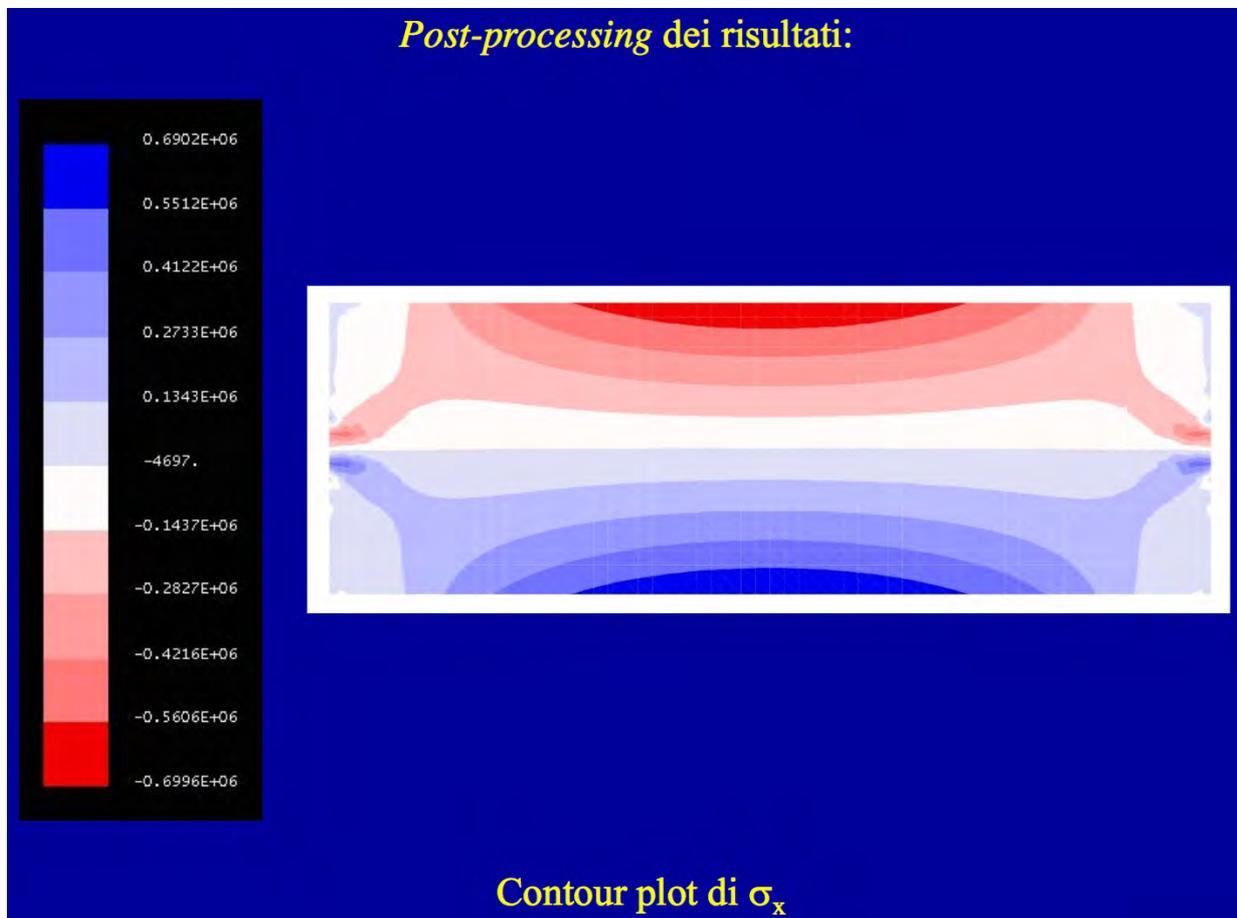
## TRAVE PARETE

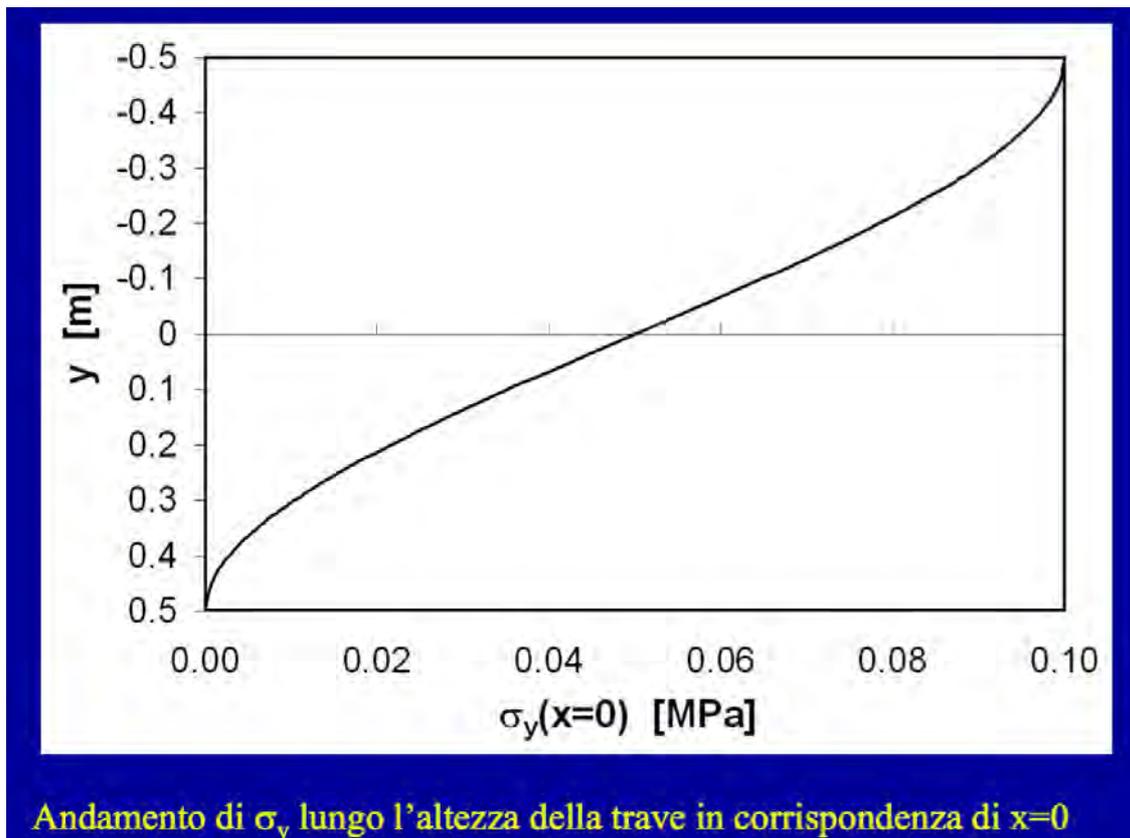
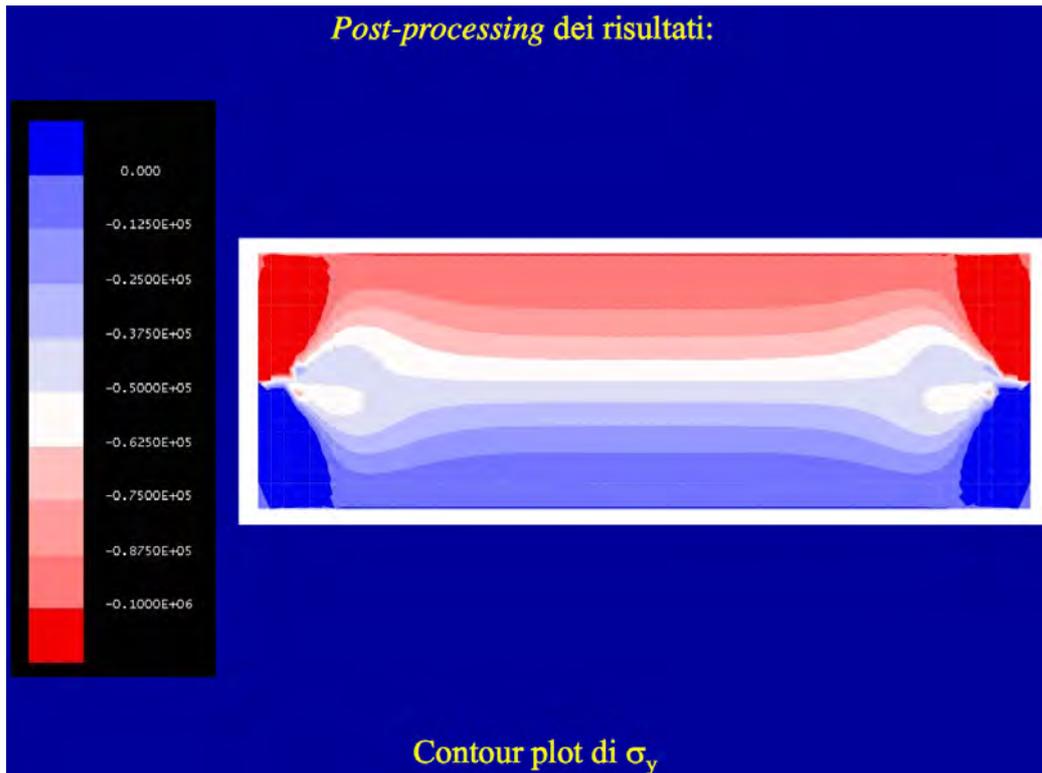
Non si usa la teoria delle travi di De Saint-Venant perché il rapporto tra la lunghezza della trave e l'altezza è inferiore a 4.

Caricando una trave a compressione, con due pistoni, e applicando la tecnica della fotoelasticità, sulla trave si formano delle isostatiche in cui le tensioni lungo queste linee sono uguali. Prima di avere una distribuzione plastica delle tensioni alla De Saint-Venant, bisogna attraversare delle zone di disomogeneità in cui i flussi del carico hanno delle variazioni e non vale la teoria di De Saint-Venant. Dalla foto ottenute con la fotoelasticità, si vede che queste zone sono eguali alla dimensione della base. Per cui in zone quanto la dimensione della base non vale la teoria di De Saint-Venant e da qui discende il concetto che per valere la teoria, il rapporto deve essere maggiore di 4.

La trave nell'esercizio ha rapporto 3.

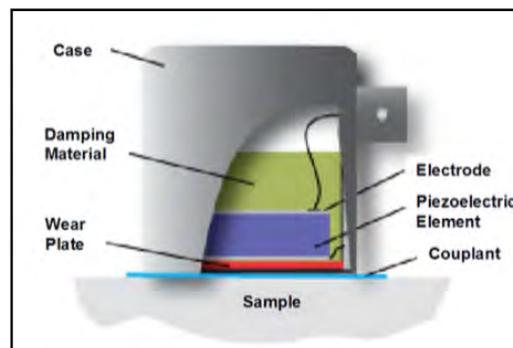
Per la trave parete ci si aspettano le tensioni alla De Saint-Venant  $\sigma_x$ , cioè ci dice quanto vale la tensione lungo l'asse x; queste saranno in compressione e tenderanno a zero nella mezzera della trave e poi passano in trazione e tendono ad aumentare.





lunedì 4 aprile 2016

Questi sensori contengono all'interno degli elementi ceramici piezoelettrici incollati su una superficie metallica e protetti da uno smorzatore. Sono presenti i collegamenti elettrici e il collegamento di trasmissione del segnale ricevuto per poterlo poi elaborare e memorizzare nel computer.



A seconda della struttura in esame ovviamente i sensori assumono diverse forme. Il componente piezoelettrico come dimensione può variare da una moneta da 5 cent ad una di 2€. I più piccoli sono i sensori ad ampio spettro, cioè leggono segnali che spaziano da  $f$  basse come 50KHz fino a  $f$  alte come 800KHz. Ovviamente tutto è relativo al campo in cui ci troviamo e al tipo di struttura in esame.

I sensori più grandi invece hanno spettro ridotto, sono sensori piezoelettrici risonanti su frequenze che vanno dai 160 ai 180 KHz, sono i più comuni.

L'uso di un sensore piuttosto che un altro dipende dall'analisi che si deve effettuare.

Ad es. per **localizzare** un segnale conviene utilizzare dei sensori risonanti in quanto pur avendo bassa emissione riesco a captare un segnale migliore grazie proprio alla risonanza. Invece i sensori a larga banda, non essendo risonanti, devono essere amplificati. Questi vanno bene per eseguire studi approfonditi sulla distribuzione dei segnali, ad es. per il monitoraggio di una variazione di frequenze.

All'inizio del danneggiamento le  $f$  sono alte, poi man mano che il danneggiamento avanza si abbassano.

La frequenza è quindi un altro parametro per valutare il danneggiamento:

Frequenze alte --> piccole sorgenti di frattura e piccola ampiezza di segnale;

Frequenze basse --> grandi fratture e grandi ampiezze di segnale.

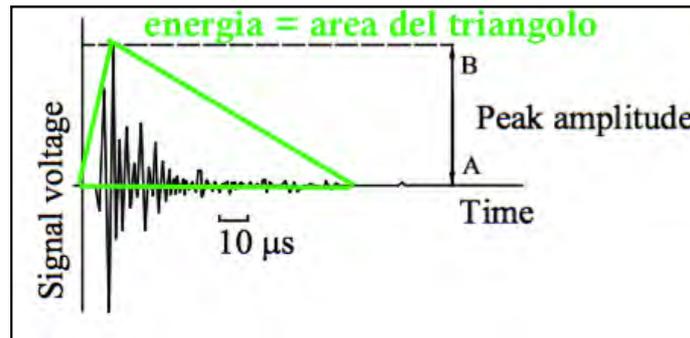
Tra l'emissione acustica e l'analisi dei segnali sismici c'è una perfetta analogia. L'unica variazione è che le frequenze dei sisma sono molto basse. Le leggi sono le stesse.

Possiamo vedere l'analogia con i sismografi e questi sensori: riesco a localizzare l'epicentro di un sisma attraverso i sismografi disposti in varie porzioni della superficie terrestre, come nella trave o in un muro riesco a localizzare e monitorare il danno attraverso l'emissione acustica. I modelli matematici applicati sono analoghi.

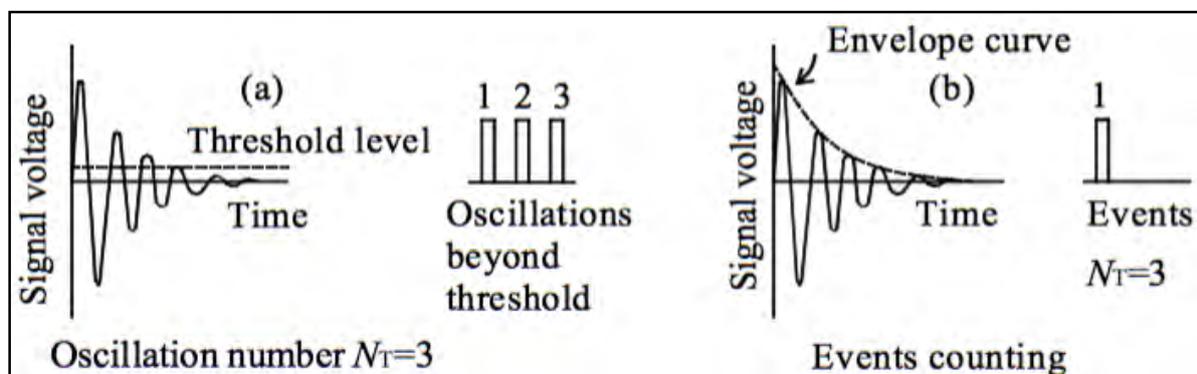
Queste onde ultrasoniche sono onde meccaniche prodotte dalla vibrazione della superficie: dall'epicentro, cioè la sorgente, fino ai sensori, con modalità di distribuzione e trasporto molto complessa.

lunedì 4 aprile 2016

Del segnale ci interessano principalmente queste informazioni: momento in cui arriva al sensore-trasduttore (ad uno dei 6), la frequenza, la durata totale, l'energia del segnale. Quest'ultima è calcolabile dall'involuppo del segnale stesso: la determino dall'area del triangolo che rappresenta questo involuppo, base x altezza/2. Eseguire l'involuppo in questo modo è un'approssimazione per eccesso.

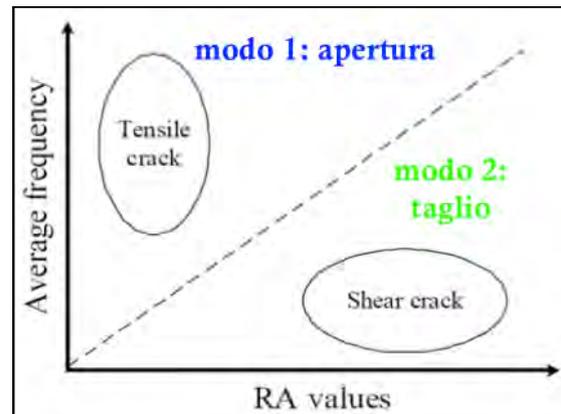


I modi per analizzare i segnali di emissione acustica sono principalmente due: il conteggio delle oscillazioni (*Oscillation Counting*) e il conteggio degli eventi (*Events Counting*). Entrambi ci dicono quanta energia viene emessa dal materiale in esame. Riesco a capire così di quanto avanza la frattura nella struttura che sto monitorando; l'emissione acustica è direttamente collegata alla meccanica della frattura, ecco perché è importante. La distinzione tra i due metodi è che parlo di **eventi** quando i segnali che rappresentano un evento provengono tutti dalla stessa sorgente, cioè quelli eventi sono stati tali da far localizzare la sorgente del suono ovvero la frattura. Parlo invece di **oscillazioni** quando non riesco a localizzare la sorgente ma ho solo il danneggiamento singolo. Un evento può essere composto da più segnali: N segnali che hanno localizzato una determinata sorgente di emissione acustica. Ogni segnale ha le sue oscillazioni.



lunedì 4 aprile 2016

Mettendo in relazione il calcolo delle frequenza dei segnali e l'angolo RA ottengo un'analisi a lungo termine nella quale è possibile vedere la relazione tra "tensile crack" (o distacco, apertura), cioè modo 1 e "shear crack" (o scorrimento, taglio), cioè modo 2.  
Si nota che alla basse frequenze le fratture sono soprattutto dovute al taglio.



Passiamo alla funzione di **localizzazione**.

Nel caso di un terremoto necessita di un certo numero di sismografi.

Nello spazio avrei bisogno di 3 coordinate (x,y,z) --> allora 3 sensori?

Per **ipotesi** considero distribuzione lineare e omogenea dei segnali nel mezzo (vedremo che questa è un ipotesi semplificativa), e velocità nel mezzo **c** nota, ad esempio da precedente analisi agli ultrasuoni (se no è una velocità stimata non precisa).

Nel cls  $c \approx 3000$  m/s, nell'acciaio  $c \approx 7000$  m/s. Maggiore è la compattezza del materiale maggiore è la velocità.

Le coordinate in cui ho applicato il sensore sono  $x_A, y_A, z_A$ , mentre **c** è la velocità di propagazione del suono nel mezzo.

$$T_A = \left[ (x_0 - x_A)^2 + (y_0 - y_A)^2 + (z_0 - z_A)^2 \right]^{1/2} / c$$

Con questo rapporto trovo il tempo  $T_A$  cioè il momento in cui il segnale, originato dalla sorgente (frattura), colpisce il sensore di coordinate note.

Sono incognite le coordinate della sorgente  $x_0, y_0, z_0$ . Posso calcolare invece la differenza dei tempi di arrivo del segnale nei diversi trasduttori:  $\Delta t_A$ .

$$\Delta t_A = T_A - T_R = \left[ (x_0 - x_A)^2 + (y_0 - y_A)^2 + (z_0 - z_A)^2 \right]^{1/2} / c - T_R$$

dove  $T_R$  è il tempo di arrivo del segnale al trasduttore di riferimento, di coordinate note.

$$T_R = \left[ (x_0 - x_R)^2 + (y_0 - y_R)^2 + (z_0 - z_R)^2 \right]^{1/2} / c$$

lunedì 4 aprile 2016

Per capire come si sviluppa il danno nei materiali, la nuova tecnica è quella **frattale**. Questa tecnica è applicabile soprattutto per elementi soggetti a compressione.

**Ipotesi fondamentale:** energia dissipata ( $W$ ) proporzionale al numero di emissioni acustiche ( $N$ ) che a sua volta è proporzionale al volume con potenza  $D/3$ . Questa è una relazione dimensionale, di scala.

$$W \propto N \propto V^{D/3}$$

dove **D** è l'**esponente frattale del danneggiamento**, compreso tra 2 e 3. Con  $D=3$  significa che il danneggiamento si sta sviluppando in tutto il volume dell'elemento considerato. Nella realtà non troverò mai 3 esatto ma un numero compreso tra 2 e 3, il danneggiamento è da considerarsi sviluppato nel volume. Infatti trovare esattamente il numero 3 vorrebbe dire teoricamente che tutto il volume si è danneggiato, il che è impossibile: c'è sempre qualche "scheggia" che rimane "sana".

Devo riuscire a valutare il numero di emissioni acustiche registrate durante il completo danneggiamento del provino soggetto a compressione. Notare che in genere arrivo alla tensione di picco e mi fermo, non proseguo nel ramo softening.

Con la seguente relazione posso determinare il valore  $N$  dell'intera struttura che sto monitorando, mediante valori di riferimento del provino:  $N_{MAX,r}$  e  $V_r$  sono noti. Quindi riesco a determinare quanta emissione acustica devo avere prima che la struttura collassi.

$$N_{max} = N_{max,r} \left( \frac{V}{V_r} \right)^{D/3}$$

Otengo in pratica il livello di danneggiamento della struttura.

Grande vantaggio del metodo è che si ragiona in termini di energia e non di pressione.

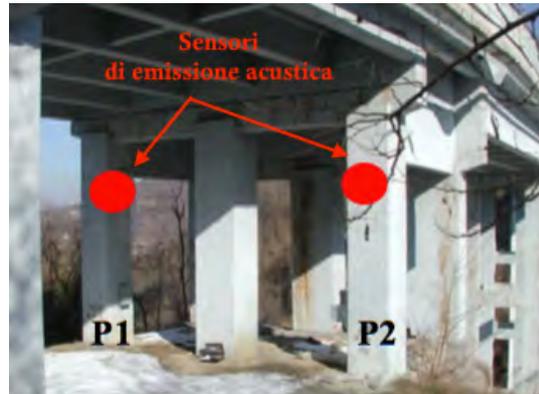
L'energia è emessa in realtà non dissipata, c'è qualche differenza.

Ragionando in termini di pressione, per sapere la tensione max che porta al collasso la struttura dovrei andare appunto a distruggere la struttura. Utilizzando l'energia posso evitare tutto ciò.

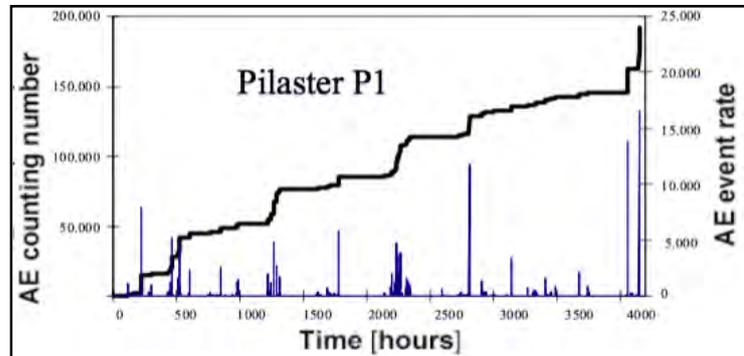
Questo è un primo metodo per valutare l'energia che verrà emessa da una struttura di grandi dimensioni una volta nota l'energia che porta al collasso la struttura di piccole dimensioni, cioè il provino.

lunedì 4 aprile 2016

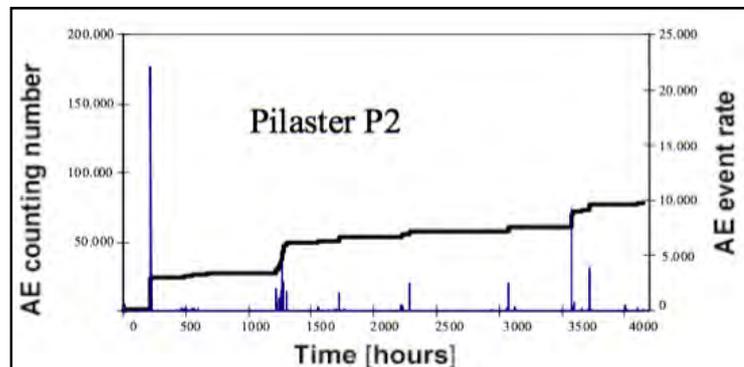
Vediamo ora un esempio di applicazione: monitoraggio pilastri di un ponte di un autostrada italiana. Di questi ponti si sapeva che c'era il danneggiamento ma non si conosceva come si stavano danneggiando.



Nel grafico è riportato il conteggio di emissione acustica per ora. Notare che i segnali più elevati riportati sono a distanza di diverse ore, si è dedotto dunque che la causa non è il traffico che invece portava ai segnali più ravvicinati ma anche molto meno rilevanti.



Il pilastro 1 (P1) si danneggia molto più rapidamente rispetto al pilastro 2 (P2), che presenta un picco iniziale poi si abbassa. Questo lo si può vedere bene dalla legge di potenza in funzione temporale.



Per il P1 trovo  $\beta t = 1,155 > 1$  --> danno che si evolve più velocemente;  
Per il P2 trovo  $\beta t = 0,802 < 1$  --> danno che tende a smorzarsi nel tempo.

giovedì 7 aprile 2016

Torniamo al criterio visto:  $W \propto N \propto V^{D/3}$

dice che l'energia emessa (**W**) è proporzionale al numero di segnali di emissione acustica (**N**) a sua volta proporzionale al volume del materiale (V) elevato alla D/3, dove **D** è un esponente frattale. Con D=3 ho la proporzionalità diretta con il volume, il che in pratica non avviene mai. L'energia viene infatti dissipata in un volume che non è l'intero volume del solido in esame, ma è una parte di esso. Questa quantità ha un esponente non intero, frattale.

Attraverso questa legge si può definire quanto può valere in totale l'energia emessa in un provino più grande (pilastro o trave) avendo nota la quantità d'energia misurata su un provino più piccolo, da laboratorio, di volume Vr cioè di riferimento.

$$N_{\max} = N_{\max r} \left( \frac{V}{V_r} \right)^{D/3},$$

**$N_{\max}$** : structure critical number of AE events;  
 **$N_{\max r}$** : specimen critical number of AE events;  
**V**: structure volume;  
 **$V_r$** : specimen volume.

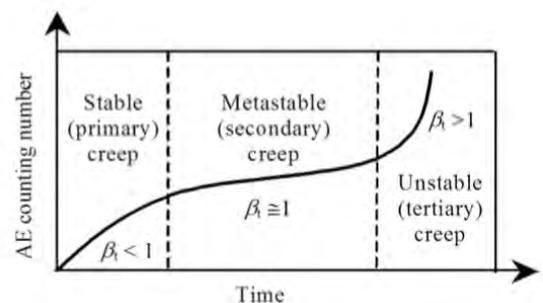
In laboratorio schiaccio il provino e rilevo il numero di emissioni acustiche registrate fino alla tensione di picco del provino. Anche il volume dell'elemento in esame è noto, l'incognita è il numero N di emissioni acustiche ad esso associato. Per determinare N applico il rapporto in funzione dell'esponente D. Il problema nella pratica è dato molte volte dal calcolo del volume reale V.

Un altro parametro importante è la velocità con la quale si evolve il danno, ad essa è associato l'esponente  $\beta_t$  nel tempo, non necessariamente intero.

A seconda di quanto vale il fattore  $\beta_t$  (può essere < 1, =1, >1) riesco a dire con quale rapidità la struttura in esame arriva al collasso. Faccio sempre riferimento ai fenomeni critici, che voglio prevedere.

$$W \propto N \propto t^{\beta_t}, \text{ with } 0 \leq \beta_t \leq 3, \quad (3)$$

**W**: dissipated energy;  
**N**: cumulative AE events number obtained during monitoring;  
**t**: monitoring time;  
 **$\beta_t$** : time-scaling exponent for the released energy.



giovedì 7 aprile 2016

Si vede che il primo pilastro si danneggia di più, ha un numero di emissioni acustiche maggiori nel tempo. Mentre il secondo pilastro, nella stessa scala del tempo, presenta emissioni acustiche meno dense.

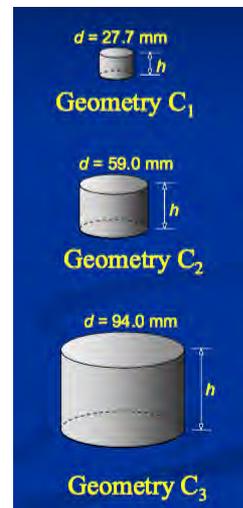
**Come determino l'esponente D?** Partiamo dal provino campione. Ad esempio nel caso dei pilastri si sono estratte delle carote di cls, aventi:

- 3 diverse sezioni: diametro d diverso, circa uno il doppio dell'altro;
- per ogni sezione 3 snellezze: 0,5 (altezza metà del diametro); 1; 2.

Per ognuno di questi provini sono stati realizzati 3 campioni quindi in tutto 27 campioni per pilastro, per un totale di 54.

Si svolgono poi in laboratorio dei test di compressione a deformazione controllata, ipotizzando una certa velocità (4E-4 mm/s).

A velocità maggiori riuscirei a captare poche emissioni acustiche in quanto si generano molto rapidamente rispetto alla nostra capacità di acquisire segnali. Al contrario, con un processo di carico lento, riesco a catturare una quantità di segnali sufficiente. Notare che l'energia emessa non riusciamo a quantificarla con precisione numericamente ma abbiamo una proporzione. Ovviamente tutto è relativo alla precisione che voglio ottenere e al tempo che voglio impiegare.



Ricordare che l'energia emessa è proporzionale, non uguale, all'emissione acustica.

Io riesco a calcolare l'energia di emissione acustica attraverso l'involuppo dell'area come abbiamo visto nella precedente lezione, ma manca la carica di Coulomb. Otterrei quindi l'energia a meno di C.

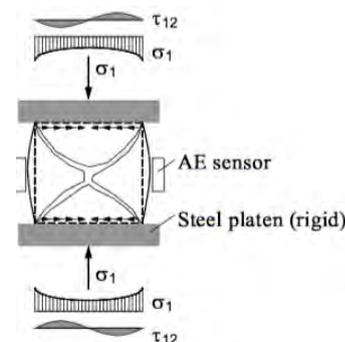
Dall'esperienza si vede che quando il provino ha snellezza 1 la rottura avviene a "clessidra"; con snellezze maggiori la rottura è più verticale.

La rottura per compressione non è facile da studiare perché ci sono diverse varianti: ad esempio, ponendo dei dischetti di teflon nelle teste del provino, l'attrito tra i piatti di acciaio e le teste del provino viene a mancare, il che porta ad un comportamento diverso!

Nel caso di assenza di teflon si creano delle tensioni di taglio tra i piatti e le teste del provino allora la deformazione durante la rottura è a botte:

il provino si gonfia in mezzo e rimane invece indeformato sui bordi.

Con il teflon queste azioni tangenziali non ci sono e la rottura è più omogenea.



I risultati ottenuti sono schematizzati nella tabella seguente:

Specimen number	Diameter d [mm]	Slenderness $\lambda = h/d$	Pilaster P1			Pilaster P2		
			Peak stress $\sigma_u$ [MPa]	$N_{max}$ at $\sigma_u$	$\beta$	Peak stress $\sigma_u$ [MPa]	$N_{max}$ at $\sigma_u$	$\beta$
1	27.7	0.5	91.9	1186	1.40	84.7	1180	1.38
2	27.7	1.0	62.8	1191	1.41	46.7	1181	1.46
3	27.7	2.0	48.1	1188	1.48	45.8	1186	1.67
4	59.0	0.5	68.1	8936	2.12	57.5	8924	2.39
5	59.0	1.0	53.1	8934	1.49	41.7	8930	2.52
6	59.0	2.0	47.8	8903	2.30	38.2	8889	2.41
7	94.0	0.5	61.3	28502	2.90	45.2	28484	2.84
8	94.0	1.0	47.8	28721	2.09	38.2	28715	2.21
9	94.0	2.0	44.1	28965	2.80	38.1	28956	2.92

giovedì 7 aprile 2016

Monitorando la struttura posso sfruttare la seconda relazione che mi indica che il numero di emisione acustica è proporzionale al tempo elevato alla  $\beta_t$ .

$t_{max}$ = durata in vita della struttura che sto monitorando, è l'incognita!.

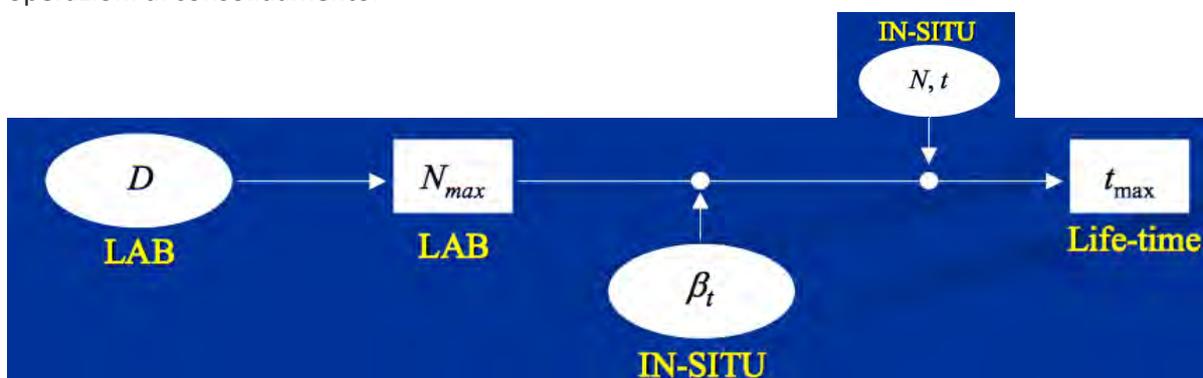
$N_{max}$ = numero di emisione acustica che porta al collasso la struttura, questo è noto dalla prima relazione.

Anche  $\beta_t$  lo conosco perché è misurato durante il monitoraggio come già visto.

$N$  e  $t$  sono rispettivamente il numero di emisione acustica e il tempo corrente che ho impiegato per il monitoraggio, noti!.

Riepilogando: dal laboratorio trovo  $D$  ed  $N_{max}$ ; in situ trovo  $\beta_t$ ,  $N$  e  $t$ , quindi alla fine arrivo alla mia incognita  $t_{max}$ , cioè il tempo limite della struttura.

Importante conoscerlo perché prendo i relativi provvedimenti di conseguenza, ad esempio operazioni di consolidamento.



**Vediamo la magnitudo.**

Quella di un sisma si misura attraverso i sismografi: si guarda l'ampiezza  $A$  massima delle oscillazioni provocate dal sisma, si esegue il log in base 10 ( scala Richter) e quel parametro fornisce la magnitudo.

$$m = \text{Log}_{10} A_{max} + f(r)$$

Attenzione alla scala logaritmica di Richter: quando si scatta da una magnitudo ad un'altra di 1, l'intensità dell'energia scatta non di 1 ma di 10 volte. In quanto appunto la magnitudo è il logaritmo dell'ampiezza dei segnali, e siccome l'energia dissipata è proporzionale all'ampiezza dei segnali, ogni volta che scatto di 1 ottengo un sisma che è 10 volte più potente.

Nel caso dell'emissione acustica il calcolo della magnitudo è analogo: prendo l'ampiezza massima del segnale di emissione acustica, ne faccio il log in base 10 e trovo la magnitudo. È presente un **parametro correttivo  $f(r)$**  che tiene conto della differenza tra magnitudo locale magnitudo globale, inserendo la distanza  $r$  tra la sorgente e il sensore. La  $m$ . locale è l'intensità del sisma che io sento in un certo luogo ma che è avvenuto più lontano; mentre quella globale è proprio il valore registrato nel luogo in cui è avvenuto il sisma.

giovedì 7 aprile 2016

Ricapitolando: abbiamo la Legge di Richter, la legge che ci fornisce la distribuzione delle fratture sulla superficie dell'elemento, e questa legge di tipo probabilistico. Sono 3 leggi importanti. Trovo quindi che il numero di fratture di dimensione  $\geq L$  nel corpo è uguale al prodotto tra il numero totale di fratture e la probabilità di trovarle.

$$N^*(\geq L) = N_{tot} L^{-\gamma}$$

$\gamma$ : exponent measuring the degree of disorder, i.e. the scatter in the defect size distribution;  
 $N_{tot}$ : constant representing the total number of defects in the body.

Uguagliando le due leggi:

$$N(\geq L) = cL^{-2b}$$

$$N^*(\geq L) = N_{tot} L^{-\gamma}$$

trovo:

$$2b = \gamma$$

Dalla legge di probabilità della distribuzione delle fratture si dimostra che al max gamma può valere 2! Allora posso dedurne il limite del valore b, cioè 1! Valore per il quale, nel corpo, ho la max distribuzione dei difetti che portano al collasso.

Infatti nella realtà succede proprio questo: durante il monitoraggio, considerando tutti i segnali di emissione acustica, quando sto per giungere al collasso della struttura, il valore b di Richter tende a 1.

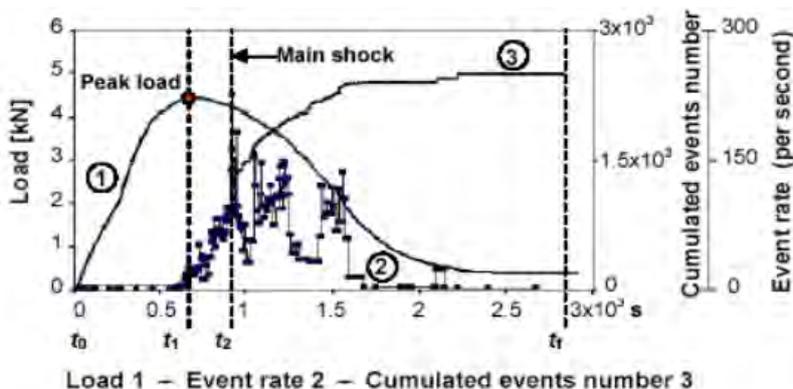
Riepilogando, a questo punto posso:

- valutare la dimensione frattale del danneggiamento;
- valutare la durata in vita della struttura compressa;
- prevedere l'evoluzione del danneggiamento attraverso l'esponente  $\beta_t$ ;
- prevedere il momento del collasso (cioè per  $b \rightarrow 1$ ) attraverso la legge limite;

Un altro concetto importante riguarda l'esponente  $\gamma$ : consiste nell'esponente frattale del danneggiamento, quindi è uguale al D di prima.

Con queste leggi appena viste quindi si dimostra anche che, con  $b=1$ ,  $\gamma=D=2$  il che vuol dire che le fratture si stanno generando lungo una superficie. Questa superficie è quella principale di frattura che porterà al collasso l'elemento strutturale.

giovedì 7 aprile 2016



Si rappresenta il diagramma carico-spostamento mediante il quale si calcola l'energia rapportata all'area del ligament (area della sezione integra).

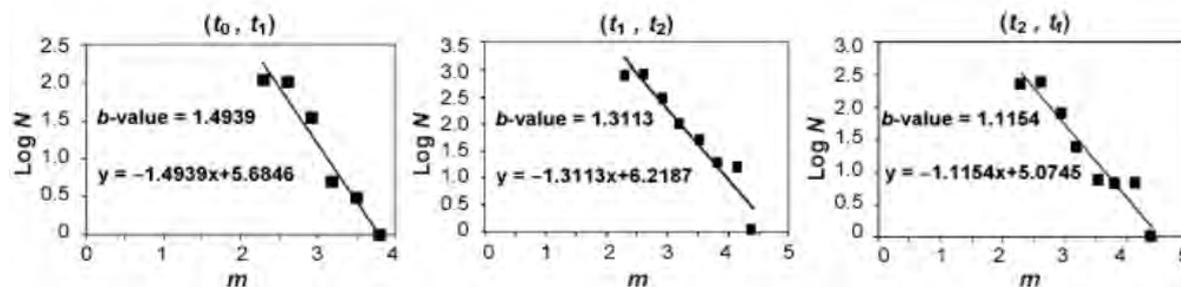
Durante questo test si sono localizzate le emissioni acustiche e misurato il b-value.

Un primo diagramma ottenuto è quello carico-tempo. Questi test si effettuano a deformazione controllata oppure con l'apertura della bocca della fessura controllata (CMOD). Ho poi il numero di emissione acustica cumulativo e il rate.

Si divide la prova in **3 step**:

- 1) dal tempo 0 al  $t_1$  in cui raggiungo la tensione di picco;
- 2)  $t_1-t_2$  in cui ho il max del rate dell'emissione acustica, che non è vicino alla tensione di picco!
- 3)  $t_2-t_f$ : dal max dell'emissione acustica fino alla fine.

Per ciascuna fase calcolo il relativo b-value: è un calcolo più corretto perché fase per fase vedo che succede alla struttura. Nella prima fase  $b=1,5$ , quindi tutti i segnali di emissione acustica si sono organizzati nel volume nei pressi della zona fratturata (non il volume di tutta la trave!!); nella seconda fase  $b=1,3$  minore rispetto alla fase precedente; infine nella terza fase, dal max del rate di emissione acustica fino alla fine del test, trovo  $b=1$  cioè fratture organizzate lungo una superficie quindi arrivo al collasso completo della trave.



La cosa interessante è che, se sto monitorando una trave e non vedo le fratture (non è detto siano visibili) con questo sistema posso prevedere eventi catastrofici.

Il procedimento analogo si segue nei provini soggetti a compressione: i diagrammi sono esattamente li stessi. Passo da un **b-value** pari a 1,64 nella prima fase ad un valore di 1,19 nella terza e ultima fase.

giovedì 7 aprile 2016

Vediamo il procedimento:

Si esegue un intaglio circolare, inserisco il martinetto piatto (strumento molto costoso) dotato di cuscinetti di acciaio con due valvole, una di ingresso e una di uscita. Nella valvola di ingresso si pompa dell'olio, la valvola di uscita funge da "troppo pieno".

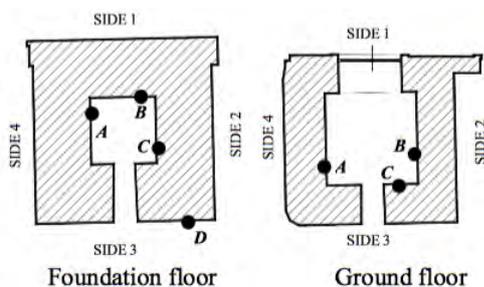
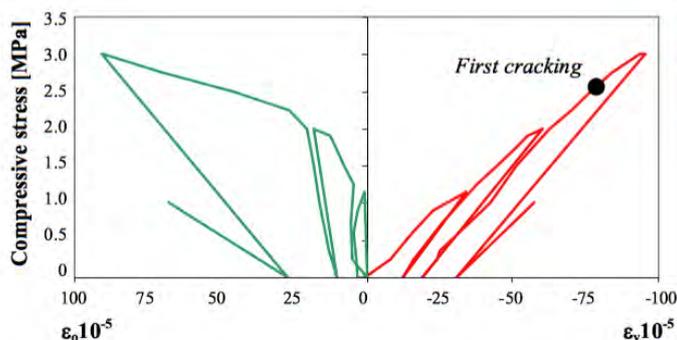
Comincio quindi a pompare olio e riesco a determinare, attraverso alcuni parametri noti, la **pressione  $f_m$**  sulla muratura prima che effettuassi i tagli. Mediante i piatti, uno posto superiormente e uno inferiormente, riesco anche a det. il modulo elastico della muratura.

Si effettuano questi test su diversi piani delle torri.

$$f_m = k_a k_m p$$

$K_a$ : factor accounting for the geometry of the cut,  
 $K_m$ : factor accounting for the physical characteristic of the jack,  
 $p$ : flat-jack pressure.

$$E_t = \frac{\delta\sigma_m}{\delta\varepsilon_m}$$



Points	Foundation Floor		Ground Floor	
	$\sigma_z$	E	$\sigma_z$	E
A	2.455	-	0.871	-
B	0.297	-	0.746	-
C	1.059	-	-	-
D	0.502	-	-	5000

Plan scheme of the single and double flat-jack test sites

Results of single and double flat-jack tests. Average compressive stresses and Young's Moduli are in MPa

5/04/2016

Ripasso

La scorsa lezione si è ripreso il problema elastico e lo si è studiato agli stati deformativi piani. In generale nel problema elastico ci sono vari molteplici tipi di equazioni, di equilibrio, cinematiche e costitutive.

Nel problema piano è possibile ridurre tutto ciò ad un sistema limitato di equazioni 3, e poi infine ad 1 sola (si è visto che da 5 equazioni si è passati a 3, due di equilibrio e una di congruenza).

Nell'equazione di congruenza al suo interno è presente l'operatore Laplaciano, che è dato dalla somma delle derivate seconde in x e in y.

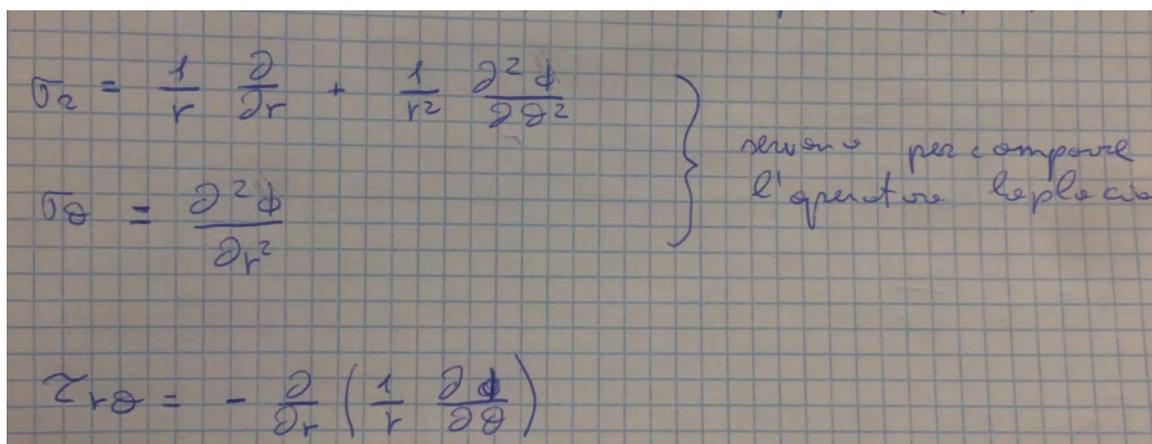
Dall'assunzione di Airy, e cioè esprimendo le 2 tensioni del piano tramite le derivate seconde della funzione incognita  $\phi$ , si è arrivati ad una sola incognita. Facendo in questo modo, si va a soddisfare in automatico le equazioni di equilibrio, che inserite nell'equazione di congruenza si va dare un'espressione della tensione nella unica incognita.

L'equazione di Airy, contiene 2 volte il Laplaciano:

$$\nabla^4 \phi (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

essa risulta biarmonica.

Ciò che serve è riscrivere la funzione di Airy in coordinate polari:



La  $\tau$  non mi serve per comporre l'operatore Laplaciano, la somma delle  $\sigma$  è la traccia del tensore per cui è un invariante. Si sostituisce al  $\nabla^2$  questo invariante e si ottiene il Laplaciano in coordinate polari.

L'unica cosa che può dar fastidio in questa trattazione è che  $\phi$  non ha un significato fisico ben preciso.

Tramite l'equazione di Airy si va a risolvere in maniera chiusa (esatta), alcuni problemi elastici significativi.

Vediamo 3 casi, dove il 3° caso ha la particolarità di avere una singolarità tensionale, il 2° definisco il concetto di concentrazione tramite una lastra tesa (tensione mono-assiale e quindi forze isotrope) mentre il 1° definisco un caso di un foro polar simmetrico sia da un punto di vista geometrico sia da un punto di vista delle forze.

### 1 CASO: TUBO CILINDRICO DI GROSSO SPESSORE

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}\right) =$$

$$= \frac{d^4\Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\Phi}{dr^3} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} = 0$$

l'ultimo termine è la derivata di 1/r per dφ/dr.

L'integrale generale di questa equazione differenziale è composto da 4 costanti arbitrarie:

$$\Phi = A \log r + Br^2 \log r + Cr^2 + D$$

per verificare se l'integrale è corretto basta sostituire questo φ nell'equazione precedente e verifica che dia 0.

Essendo il caso polar simmetrico, il campo tensionale diventa:

$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}$   
 $\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$

$\rightarrow$  non c'è  $\sigma_{\theta\theta}$  perché il caso è simmetrico a polare

$\sigma_r = \frac{1}{r} \left( A \cdot \frac{1}{r} + B(2r) \log r + Br^2 \frac{1}{r} + 2Cr \right) =$   
 $= \frac{A}{r^2} + 2B \log r + B + 2C =$   
 $= \frac{A}{r^2} + B(2 \log r + 1) + 2C$

$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{A}{r} + 2rB \log r + Br + 2Cr \right) =$   
 $= -\frac{A}{r^2} + 2B \log r + 2Br \cdot \frac{1}{r} + B + 2C =$   
 $= \frac{A}{r^2} + B(2 \log r + 3) + 2C$

Perciò:

Da cui si ricava:

$$\left\{ \begin{aligned} Z_C &= -pe - \frac{A}{Re^2} \\ \frac{A}{Ri^2} - pe - \frac{A}{Re^2} &= -pi \end{aligned} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$A = \left( \frac{1}{Ri^2} - \frac{1}{Re^2} \right) = \frac{pe - pi}{\left( \frac{1}{Ri^2} - \frac{1}{Re^2} \right)}$$

$$A = \frac{Re^2 Ri^2 (pe - pi)}{\frac{Re^2 - Ri^2}{Ri^2 Re^2}} = \frac{Re^2 Ri^2 (pe - pi)}{Re^2 - Ri^2}$$

$$Z_C = -pe - \frac{1}{Re^2} \left( \frac{Re^2 Ri^2 (pe - pi)}{Re^2 - Ri^2} \right) =$$

$$= -pe - \left( \frac{Ri^2 (pe - pi)}{Re^2 - Ri^2} \right) =$$

$$= -pe - \frac{Ri^2 pe}{Re^2 - Ri^2} + \frac{Ri^2 pi}{Re^2 - Ri^2} =$$

$$= -pe \left( 1 + \frac{Ri^2}{(Re^2 - Ri^2)} \right) + \frac{Ri^2 pi}{Re^2 - Ri^2} =$$

$$= -pe \left( \frac{Re^2 - Ri^2 + Ri^2}{(Re^2 - Ri^2)} \right) + \frac{Ri^2 pi}{Re^2 - Ri^2} =$$

$$= \frac{-pe Re^2}{(Re^2 - Ri^2)} + \frac{pi Ri^2}{(Re^2 - Ri^2)} =$$

$$= \frac{pi Ri^2 - pe Re^2}{(Re^2 - Ri^2)}$$

Abbiamo trovato così le due costanti di integrazione da inserire nelle equazioni precedenti

$$\sigma_z = \frac{p_i R_i^2}{(R_e^2 - R_i^2)} \left( 1 - \frac{R_e^2}{R_i^2} \right)$$

sempre > 0 perché  $R_i < R_e$

essendo  $R_i < R_e$  allora il rapporto  $R_e^2/R_i^2$  sarà sempre maggiore di zero e quindi il termine a destra sarà negativo.

Considerando invece, il caso limite  $r=R_e$  si ha  $\sigma_r=0$ ; pertanto la tensione vari da un valore negativo ad un valore nullo sul bordo esterno.

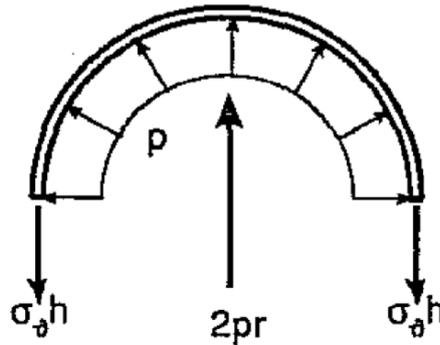
Stesso discorso vale per  $\sigma_\theta$ , con l'eccezione che non si annulla mai, ma sarà maggiore per  $r=R_i$ .

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(\max) &= \frac{p_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left( 1 + \frac{R_e^2}{R_i^2} \right) = \\ &= \frac{p_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} + \frac{p_i R_i^2 R_e^2}{(R_e^2 - R_i^2) R_i^2} = \\ &= \frac{p_i (R_i^2 + R_e^2)}{(R_e^2 - R_i^2)} \end{aligned}$$

Vediamo ora graficamente l'andamento delle tensioni in un piano; quello che ci interessa sono i valori tra  $R_e$  e  $R_i$ .

Quando  $R_e$  va all'infinito, rappresenta il caso di un foro con una pressione interna, in una lastra infinita.

Quando  $R_e$  tende a  $R_i$ , significa che i due raggi sono molto simili a meno dello spessore del tubo e quindi siamo nel caso di tubo cilindrico di piccolo spessore.



## 2 CASO: FORO CIRCOLARE IN UNA PIASTRA INFINITA TESA

Una parte della soluzione si ottiene tramite il teorema precedente.

la lastra è rappresentata finita ma in realtà è infinita. Il foro è di raggio  $R$ , mentre il raggio  $R'$  è un raggio virtuale, pensato molto più grande  $R$  (all'infinito).

**IPOTESI:**  $R' \gg R$

La lastra è soggetta ad un carico mono-assiale lungo l'asse delle  $x$  generico; i parametri che descrivono il problema sono 2, la  $r$  che descrive la geometria e la  $\sigma$  che descrive la tensione. Le tensioni sul cerchio all'infinito si possono ricavare dal cerchio di Mohr (unico perché siamo nel caso piano).

**1) The first part is constant and produces the following stress field:**

$$\sigma_r = -\frac{\sigma}{2} \frac{R^2 R'^2}{R'^2 - R^2} \frac{1}{r^2} + \frac{\sigma}{2} \frac{R'^2}{R'^2 - R^2} \quad (19.62a)$$

$$\sigma_\theta = +\frac{\sigma}{2} \frac{R^2 R'^2}{R'^2 - R^2} \frac{1}{r^2} + \frac{\sigma}{2} \frac{R'^2}{R'^2 - R^2} \quad (19.62b)$$

**In the limit case of  $R' \rightarrow \infty$  we have:**

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (19.63a)$$

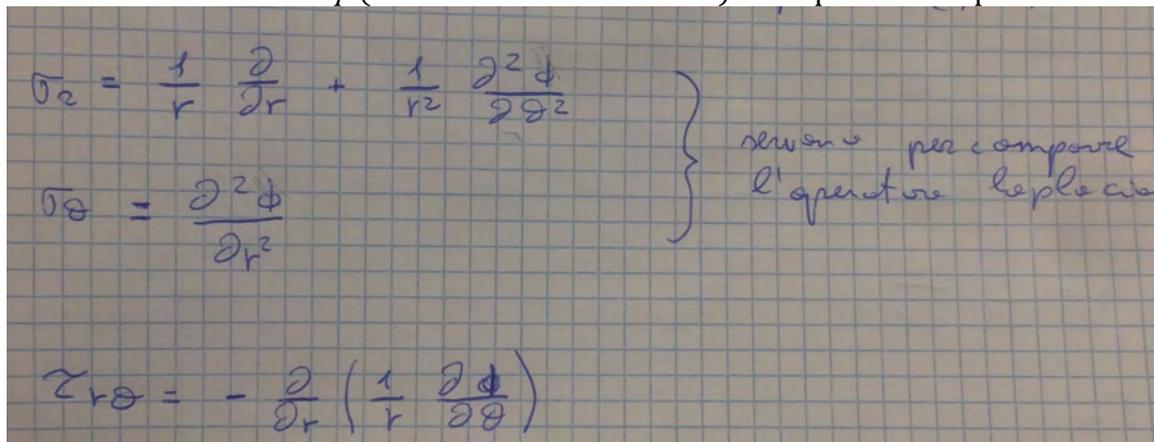
$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2} \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (19.63b)$$

Ottenute dall'equazione del tubo cilindrico sostituendo  $p_i = 0$  e  $p_e = -\sigma/2$ .  
Si è risolto in questo modo un terzo del problema.

Per risolvere il restante problema, si pone la funzione di Airy in funzione non solo di  $r$  ma anche di  $\theta$ :

$$\Phi = f(r) \cos 2\theta$$

la  $\phi$  però resta incognita, perché la  $f$  non la conosciamo. L'incognita perciò passa da  $\phi$  alla  $f$ .  
Si inserisce la funzione  $\phi$  (funzione sia di  $r$  che di  $\theta$ ) nell'operatore Laplaciano totale:



La derivata seconda non da fastidio perché va ad operare 2 volte sul coseno.  
In definitiva l'operatore Laplaciano equivalente sarà:

Per la  $\tau$  si fa lo stesso ragionamento e si ottiene:

$$\tau_{r\vartheta} = \left( 2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\vartheta$$

A questo punto, avendo ottenuto dalla funzione di Airy le tensioni, applico le condizioni al contorno. Esse saranno sul contorno del foro ( $r=R$ ), cioè il foro non essendo caricato, le tensioni qua dovranno essere nulle.

$$\sigma_r(R) = 0$$

$$\tau_{r\vartheta}(R) = 0$$

Sul contorno esterno ( $r=R'$ ), ci saranno altre due condizioni al contorno sulle tensioni. In particolare esse dovranno essere pari alle tensioni trovate prima.

$$\sigma_r(R') = \frac{\sigma}{2} \cos 2\vartheta$$

$$\tau_{r\vartheta}(R') = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\vartheta$$

Le 4 costanti qua, a differenza del caso precedente rimangono tutte, e si determinano tramite queste condizioni al contorno:

$$2A + \frac{6C}{R'^4} + \frac{4D}{R'^2} = -\frac{\sigma}{2}$$

$$2A + 6BR'^2 - \frac{6C}{R'^4} - \frac{2D}{R'^2} = -\frac{\sigma}{2}$$

$$2A + \frac{6C}{R^4} + \frac{4D}{R^2} = 0$$

$$2A + 6BR^2 - \frac{6C}{R^4} - \frac{2D}{R^2} = 0$$

Risolvendo il sistema e imponendo che  $R'$  tende all'infinito si trovano le 4 costanti:

$$A = -\frac{\sigma}{4}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{\sigma}{4}R^4, \quad D = \frac{\sigma}{2}R^2$$

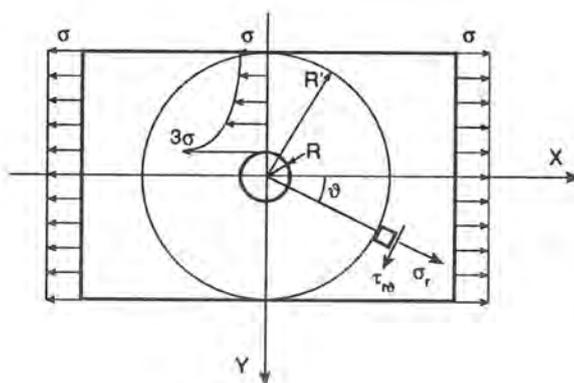
Introducendo le costanti all'interno delle tensioni, si ottiene tutto in funzione del raggio  $R$  del foro ( $r$  e  $\theta$  rappresentano le coordinate).

<p>• for <math>r \rightarrow \infty</math> we have:</p>	$\sigma_r(r = R') = \frac{1}{2}\sigma(1 + \cos 2\vartheta)$ $\tau_{r\vartheta}(r = R') = -\frac{1}{2}\sigma \sin 2\vartheta$
<p>• for <math>r = R</math> we have:</p>	$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ $\sigma_\theta = \sigma(1 - 2 \cos(2\theta))$

Nella seconda espressione, per  $\theta=0$  e  $\theta=\pi$  allora  $\sigma_\theta = -\sigma$ , mentre per  $\theta=\pi/2$  e  $\theta=3\pi/2$  allora  $\sigma_\theta = 3\sigma$ .

Questo è quello che avviene nei punti notevoli, poi ci saranno valori minimi e valori nulli.

Un'altra cosa che si potrebbe fare e mantenere fisso per esempio  $\theta=\pi/2$  e allora viene  $2\cos(\pi)$  e si trova l'andamento delle tensioni.



Sulla sezione della lastra perpendicolare all'asse X e passante per l'origine degli assi si ha:

$$\sigma_\vartheta = \frac{\sigma}{2} \left( 2 + \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right)$$

$$\tau_{r\vartheta} = 0$$

è evidente il carattere locale della concentrazione delle tensioni attorno al foro.

All'aumentare di r, la tensione  $\sigma_\theta$  tende rapidamente al valore  $\sigma$ .

Alla distanza di:

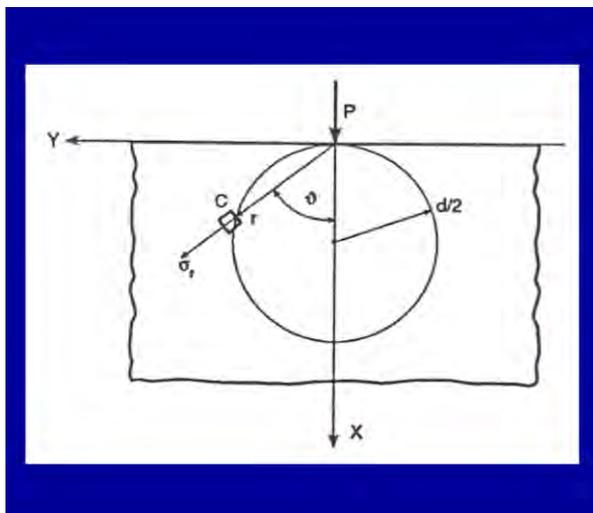
$d = 2R$	$\rightarrow$	$\sigma_\vartheta = 1.22\sigma$
$d = 4R$	$\rightarrow$	$\sigma_\vartheta = 1.04\sigma$

avvicinandosi quindi al foro la tensione tangenziale aumenta.

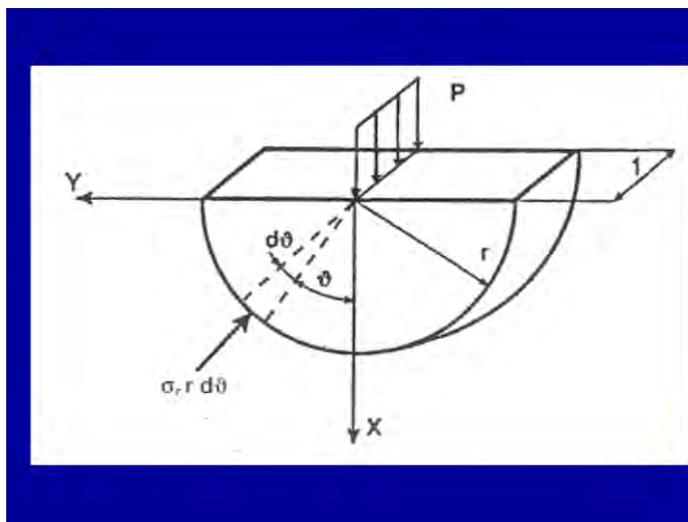
Se lo stato di tensione esterno, fosse mono-assiale di compressione si invertono solo i segni dei risultati. Esempio

(1:30:00)

3 CASO: FORZA CONCENTRATA AGENTE IN UN SEMIPIANO ELASTICO



Lo sforzo radiale ( $\sigma_r$ ) sarà paragonabile ad  $1/r$ ; inoltre la  $\sigma_\theta$  e la  $\tau$  saranno nulle. Quando ci si avvicina al punto di applicazione della forza (origine),  $r$  tende a zero, essendo al denominatore e la  $\sigma_r$  tende all'infinito (1° caso di singolarità tensionale). La distribuzione della forza lungo lo spessore della lastra è uniforme e  $P$  indica il carico per unità di spessore:



Queste 2 immagini permettono di vedere in 3 dimensioni il problema piano; lo spessore è considerato unitario.

Per la soluzione anche in questo caso si passerà attraverso la funzione di Airy, che non dipenderà solo da  $r$ , ma anche da  $\theta$ .

$$\Phi = -\frac{P}{\pi} r \vartheta \sin \vartheta$$

$$2 \int_0^{\pi/2} \sigma_r r \cos \vartheta \, d\vartheta = -\frac{4P}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \vartheta \, d\vartheta = -P$$

il 2 rappresenta il fatto che sono due le parti simmetriche.

L'integrale di  $\cos^2 \theta$  è notevole e vale  $\pi/4$ . La verifica nel punto di applicazione della forza è soddisfatta.

OSS.

Prendendo una delle infinite circonferenze (nello spazio) con diametro  $d$  e con centro sull'asse  $X$  e tangente all'asse  $Y$  (bordo semipiano elastico), nella  $\sigma_r$  al posto di  $\cos(\cdot)/r$  si può scrivere:

$$r = d \cos \vartheta$$

si può scrivere dunque:

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi d}$$

(19.79)

Questa formula si  $\sigma_r$  ottenuta significa che in tutti punti di questa circonferenza la tensione si mantiene costante, ad eccezione del punto di applicazione della forza.

Quando  $d$  è molto grande,  $\sigma_r$  è molto piccola, quando  $d$  è grande viceversa.

Per circonferenze molto grandi si hanno quindi tensioni su esse piccole.

Il problema in parte è risolto perché si è calcolato il campo tensionale.

Ci sono 3 cose che danno fastidio in questo problema:

- le tensioni vanno all'infinito; questo non è coerente in un modello elastico perché la resistenza dei materiali si considera finita.
- Spostamenti; si dimostra che nel punto di applicazione della forza non si riesce ad avere l'abbassamento e diverge, quindi il problema sotto questo punto di vista non è risolto;
- Energia nell'intorno della forza.

Questi sono dovuti al fatto che il problema non ha scala.

$$\gamma_{r\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0$$

Sostituendo l'equazione di u e v all'interno di  $\gamma$  si ha:

$$f(\vartheta) = -\frac{(1-\nu)P}{\pi E} \vartheta \sin \vartheta + A \sin \vartheta + B \cos \vartheta$$

$$g(r) = Cr$$

dove A, B, C sono costanti di integrazione.

Sostituendo queste due funzioni (f e g) nell'equazioni u e v, si ottiene il campo degli spostamenti:

$$u = -\frac{2P}{\pi E} \cos \vartheta \log r - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \vartheta \sin \vartheta + A \sin \vartheta + B \cos \vartheta$$

$$v = \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \vartheta + \frac{2P}{\pi E} \log r \sin \vartheta - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \vartheta \cos \vartheta + \\ + \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \sin \vartheta + A \cos \vartheta - B \sin \vartheta + Cr$$

Possiamo semplificarle notando che per  $\theta=0$  (sulla verticale della forza), per simmetria  $v=0$ ; da questo si ricava che devono essere nulle A e C.

Questa condizione di simmetria semplifica notevolmente l'equazione di u:

$$u(\vartheta = 0) = -\frac{2P}{\pi E} \log r + B$$

B si può ricavare imponendo che un punto sull'asse X a distanza d dall'origine, non si sposti verticalmente e si ricava:

$$B = \frac{2P}{\pi E} \log d$$

sostituendo la costante trovata nell'espressione di u si trova:

$$u(\vartheta = 0) = \frac{2P}{\pi E} \log \frac{d}{r}$$

Si può osservare che per  $r=0$  il  $\log(0)$  vale  $-\infty$ ; viene fuori quindi che lo spostamento diverge a  $+\infty$  (punto di singolarità).

Con i materiali reali questo non può accadere.

## LEZIONE 12/04/2016 (Carpinteri)

### Introduzione alla meccanica della frattura

Il fenomeno della frattura può avvenire in vari modi:

- Frattura duttile: piegando qualcosa, questa rimane nella posizione in cui è, cioè rimane deformata (esempio della lattina, che si può schiacciare e rimane deformata, ovvero si hanno delle deformazioni permanenti plastiche);
- Frattura fragile: si ha nel vetro e in altri materiali, dove non può avvenire una deformazione perché si arriva subito a rottura.

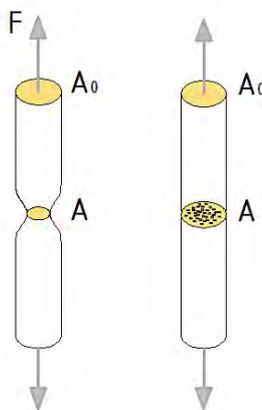
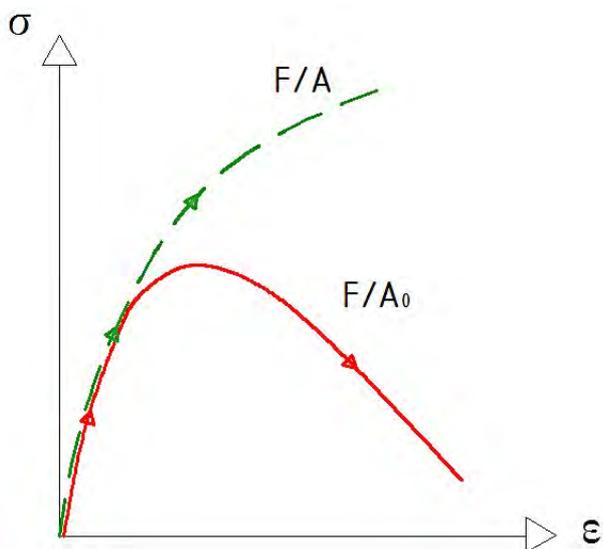
Questi concetti appena espressi, di materiali duttili e fragili, dipendono comunque dal fattore scala; ovvero non è vero che il vetro sia in maniera assoluta fragile, così come non è vero che gli acciai e certi metalli siano materiali duttili: il tutto dipende dalla scala.

In generale si vedrà che alle grandi scale i materiali sono fragili, mentre alle piccole scale i materiali sono duttili. Quindi negli ultimi anni ci si è resi conto che il concetto di **resistenza**, intesa come forza per unità di superficie che provoca rottura, deve essere messo in discussione, in particolar modo quando si ha a che fare con strutture particolarmente grandi o particolarmente piccole. Bisogna mettere a confronto la resistenza del materiale con un'altra caratteristica, ovvero la **tenacità** del materiale, che rappresenta la resistenza alla propagazione della fessura.

Le due caratteristiche, resistenza e tenacità, non sono collegate tra loro: infatti un materiale può avere alta resistenza e bassa tenacità, o il contrario. Inoltre queste due caratteristiche non sono comparabili tra loro, poiché hanno dimensioni fisiche diverse: infatti per bilanciare le due grandezze abbiamo bisogno di una lunghezza, come succede per il numero di Reynolds.

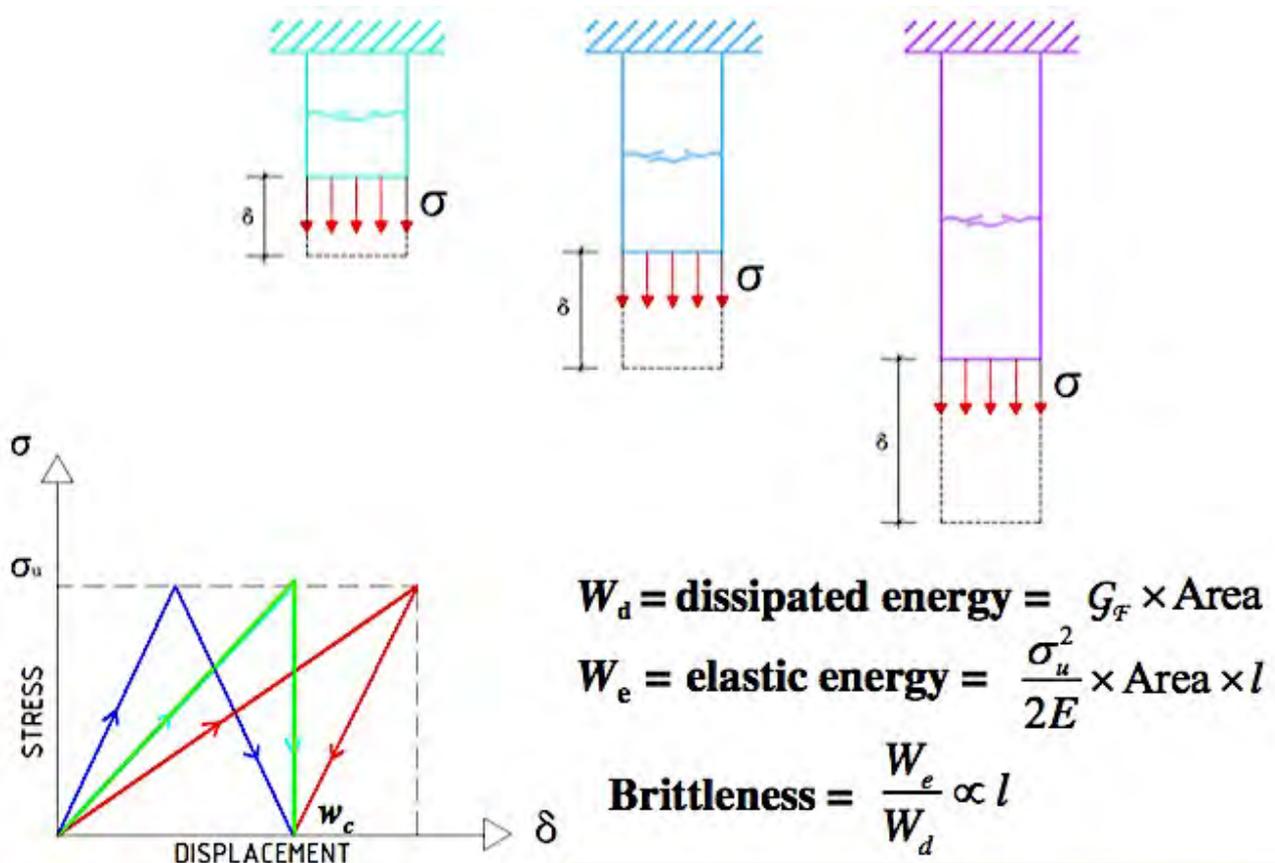
Il concetto base, quando si parla di frattura, fa riferimento al **softening**, che è la fase finale di rottura successiva alla fase di plasticità. Il softening può essere vistoso come nei cls, o può essere poco rilevante, rispetto alla fase plastica, negli acciai.

Si riporta una curva sforzi-deformazione:



Il primo provino fa riferimento a un materiale duttile, il secondo a un materiale fragile.

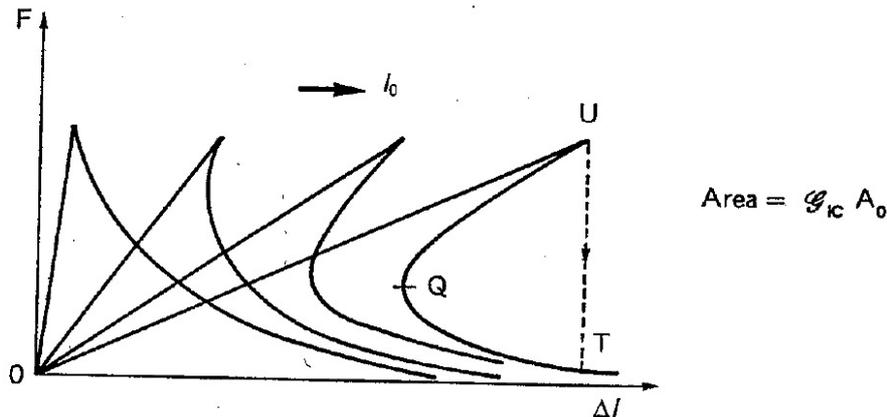
Un altro concetto importante è quello dello **snap-back**, che è un'instabilità molto forte che va oltre il softening. Per vedere il concetto in sintesi si considerano 3 barre in trazione; si crea una frattura all'interno del provino. Per un softening lineare l'area della frattura sarà pari a:  $\frac{1}{2} \sigma_u w_c$ , dove  $w_c$  è la larghezza della fessura per cui cessa l'interazione e i due pezzi del materiale si sono completamente staccati.



Per tutti e tre gli schemi vi sono delle invarianti: una di queste è la resistenza  $\sigma_u$  (resistenza costante poiché il materiale non cambia), quindi si ha un andamento crescente e si nota che la barra più lunga è anche quella più cedevole; si nota che nei tre tratti ascendenti cambia l'inclinazione, poiché il primo è più rigido, il secondo è intermedio e il terzo è il più deformabile. Un'altra invariante è l'energia dissipata, poiché l'area è la stessa, e quindi  $W_d = G_f \times \text{Area}$ . I tre provini, avendo stessa resistenza e stessa sezione (o area) devono avere anche stessa larghezza: infatti anche la larghezza della fessura  $w_c$  è uguale per tutti e tre i provini. Se arriviamo a rottura completa, la parte decrescente, ovvero la parte softening, tocca l'asse delle ascisse in  $w_c$ . Sono state così definiti i tre parametri invarianti.

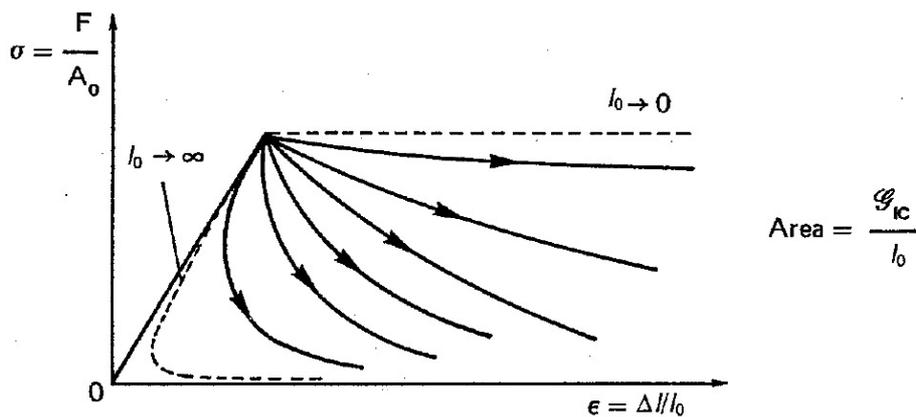
Se l'area deve essere la stessa, allora si deve creare il fenomeno dello snap-back, ovvero il ramo softening ha pendenza positiva (questo ramo è altamente instabile, poiché non si riesce a governare il fenomeno e la **rottura sarà sempre di tipo fragile**).

Detto ciò si possono trarre delle conclusioni andando a generalizzare:



L'area è la stessa per le 3 curve. All'aumentare della lunghezza aumenta la fragilità del provino.

Si può vedere lo stesso diagramma espresso in maniera diversa, andando a normalizzare gli assi, ovvero si divide  $F$  per  $A_0$  e  $\Delta l$  per  $l_0$ :



Non si hanno più pendenze, poiché la prima pendenza è il modulo elastico del materiale; arrivati al picco si ha lo sfregiamento delle curve. L'area sottesa da una curva questa volta sarà  $G_{IC}/l_0$ . Si vede che questa area dipende da  $l_0$  e si ha che se:

- $l_0$  è molto grande (barra lunga), l'area diventa piccola ed è quella sottesa dalla curva col rientro più accentuato (tratteggiata) e si ha lo snap-back.
- $l_0$  tendendo a 0, l'area diventa molto grande e si tende alla plasticità.

Quindi sono stati visti i due casi limite.

Analiticamente si ha:

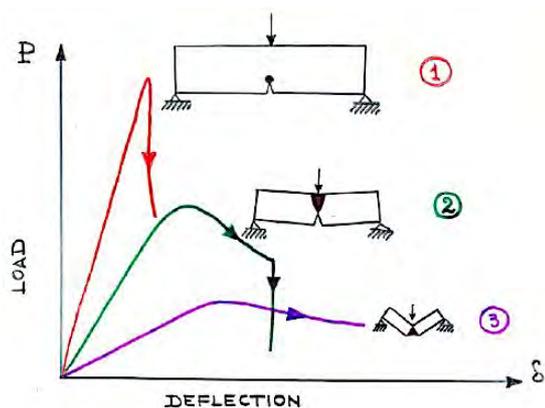
$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\epsilon_{el} l_0 + w}{l_0} \quad \text{il primo termine è l'allungamento elastico; il secondo termine è la localizzazione.}$$

Esprimendo:  $\epsilon_{el} = \sigma/E$  si ha: 
$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{l_0} w(\sigma)$$

Nella prima foto è rappresentata una nave liberty: scafi completamente saldati, quindi il comportamento strutturale era quello di un corpo unico molto grande. Molti scafi di queste navi si ruppero in due pezzi, poiché l'acciaio su grande scala ha un comportamento fragile.

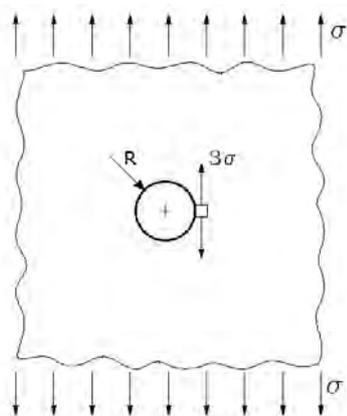
La seconda foto rappresenta un filamento di vetro: su scala microscopica i filamenti vetrosi (così come quelli di carbonio) sono molto resistenti. Quindi su piccola scala il vetro è molto resistente; inoltre anche la resilienza è molto elevata.

Anche in laboratorio con travetti di cls si ha questa tendenza netta ad avere un comportamento fragile alle grandi scale e duttile alle piccole scale. Si riportano 3 travetti:



Il primo si rompe in maniera fragile, con una caduta verticale del carico. Il secondo si rompe in maniera, prima duttile (anche con un pò di softening) e poi in maniera fragile. Il terzo è così piccolo che si rompe solo in maniera duttile, come si fosse completamente plastico o quasi. Nello stesso momento il comportamento della fessura cambia da fragile a duttile.

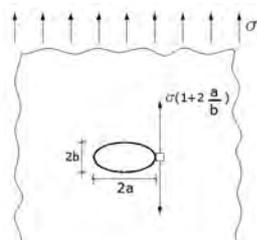
Il concetto di **concentrazione delle tensioni** nasce nel 1898 Kirsh diede la soluzione elastica al problema del foro circolare.



Applicando una tensione all'infinito monoassiale, sul bordo del foro si ha un fattore di amplificazione pari a 3, quindi non si può applicare all'infinito una tensione che sia uguale a  $\sigma_u$  (come se il foro non ci fosse), ma si può applicare una  $\sigma$  al massimo pari a  $1/3$  della resistenza del materiale:

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_u}{3}$$

Qualche anno dopo fu fatto un passo avanti con Inglis (1913): egli considerò il foro ellittico con asse maggiore ortogonale al carico. Inglis trovò che il fattore di amplificazione di un foro ellittico non dipende dalla grandezza del foro, ma dipende dalla forma: quindi è il rapporto tra gli assi che dà il fattore di amplificazione, che vale:



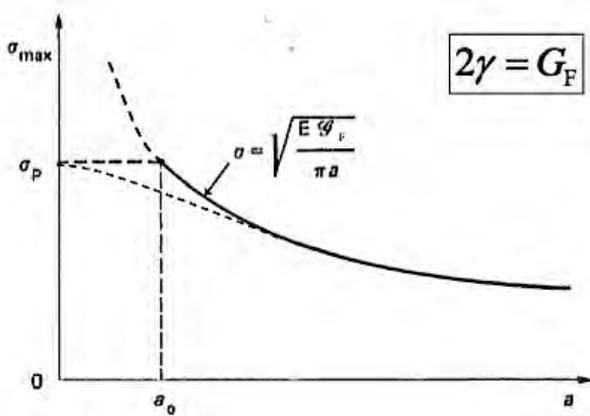
$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_u}{\left(1 + 2 \frac{a}{b}\right)}$$

con  $a$  = semiasse maggiore e  $b$  = semiasse minore

Dunque si arriva alla soluzione, che in termini di tensione è:

$$\sigma \geq \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi a}} \quad \text{o} \quad a \geq \frac{2\gamma E}{\pi \sigma^2}$$

Facendo riferimento ad un grafico:



Anche in questo caso viene fuori un'iperbole (di Griffith). La  $\sigma$  critica è funzione di  $a$  (se fosse funzione di  $\sqrt{a}$  sarebbe un'iperbole equilatera). Ci sono due asintoti: l'asintoto orizzontale si ha quando  $a$  diventa molto grande e servono  $\sigma$  sempre più piccole per creare propagazione. L'altro asintoto è difficile da essere compreso, infatti viene trascurato; esso si ha quando  $a$  tende a zero (ovvero la fessura è molto piccola), la resistenza

energetica a frattura diventerebbe infinita. In genere un materiale ha dei *micro-crack* diffusi che creano una resistenza non infinita al materiale. In definitiva, in analogia con Eulero, facciamo un cut-off della funzione a livello della resistenza del materiale che viene chiamato  $\sigma_p$ . In altri termini dei due termini dell'iperbole: quello di destra di mantiene, mentre l'asintoto verticale scompare e al suo posto compare un pianerottolo verticale. Il concetto fondamentale è che è stata definita una lunghezza  $a_0$  per cui le fessure maggiori di tale valore sono "pericolose"; mentre quando la fessura è minore di  $a_0$  il materiale non ne risente.

Con tutto questo ragionamento si va a definire:

Sotto  $a_0$  si ha collasso plastico per resistenza del materiale (le fratture non si possono attivare). Quindi  $a_0$  definisce una lunghezza equivalente di microfessura e diventa funzione dei parametri del materiale.

Se la resistenza del materiale fosse più elevata, ciò vorrebbe dire che il cut-off verrebbe fatto sempre più in alto (a parità di  $G_F$ ) e ciò vuol dire che  $a_0$  diventa sempre più piccolo: ovvero un materiale con alta resistenza ha anche una forte sensibilità alla presenza di fessure. Un altro modo di avere un calo di  $a_0$  è quello di pensare  $\sigma_p$  costante e far variare la tenacità (o energia di frattura) facendola diminuire: succede che la curva si abbassa e  $a_0$  diminuisce anche in questo caso.

Quindi per avere  $a_0 \rightarrow$  la sensibilità alla frattura aumenta con materiali molto resistenti e materiali poco tenaci (ad esempio il vetro).

Un materiale poco resistente presenta, solitamente, molti difetti. Ad esempio per ridurre i difetti del cls si riempiono i pori di silice e altri materiali.

Molti anni dopo Irwin (1957), utilizzando le soluzioni matematiche di alcuni studiosi, trovò un campo tensionale che di fronte alla fessura ha andamento con singolarità pari ad  $r^{-1/2}$ , invece che  $1/r$ . Questa è una singolarità più debole.

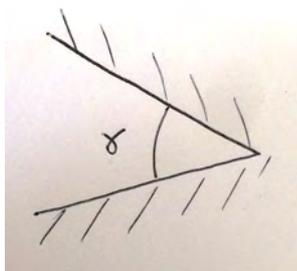
## METODO DI WESTERGAARD

**Frattura elastica** lineare: il materiale in cui avviene il fenomeno della frattura è elastico, si accentuano in questo modo i fenomeni della fragilità e non della duttilità.

Westergard riprende la teoria di Muskhelishvili, che era scritta soltanto in cirillo. La prima ipotesi del trattato proviene proprio da Muskhelishvili.

La teoria di Westergard permette di introdurre il concetto di intensificazioni delle tensioni tramite i potenziali complessi. Un'altra trattazione di questo concetto è stata fatta dal William più recentemente, ottenendo gli stessi risultati però con gli sviluppi in serie di Taylor; in questo modo invece di vedere la frattura come una discontinuità (singolarità nella frattura), William generalizza il tema, e l'angolo  $\gamma$  diventa diverso da zero, questo problema viene detto problema dell'angolo rientrante.

La singolarità più severa si ha quando l'angolo è acuto:



mentre diventa nulla quando l'angolo diventa piatto.

Viene considerato Griffith come il padre della frattura, mentre Irwin come il padre della meccanica della frattura moderna.

### Teoria di Westergard- Metodo dei potenziali complessi

Una funzione si dice analitica quando la derivata rispetto a zeta, è unica in qualunque direzione la si derivi; allora devono valere le condizioni di Cauchy-Reyman. In questo modo le funzioni analitiche si possono trattare come le funzioni reali di variabile reale. La maggior parte delle funzioni trigonometriche possono essere considerate delle funzioni analitiche.

L'equazione di Airy  $\nabla^4\phi=0$ , funzione biarmonica, si può esprimere come combinazione lineare di funzioni armoniche (U) :

$$\Phi = U_1 + xU_2 + yU_3$$

Infatti:

$$\nabla^4 U_1 = \nabla^2 (\nabla^2 U_1) = \nabla^2 (0) = 0$$

D'altra parte si ha:

Nella prima equazione la derivata di z rispetto a x è uguale all'unità, mentre nella seconda la derivata di z rispetto ad y è uguale ad i.

Questa regola, la si può applicare derivando prima la parte reale e poi la parte immaginaria:

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} \bar{Z} = \operatorname{Re} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial x} = \operatorname{Re} \bar{Z}$$

Si è applicata la proprietà di inversione degli operatori.

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} \bar{Z} = \operatorname{Re} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial y} = -\operatorname{Im} \bar{Z}$$

Anche qui si inverte, ed essendo  $\frac{\partial \bar{Z}}{\partial y}$  uguale alla parte immaginaria di Z segnato, siccome immaginario per immaginario da -1, in definitiva si ha  $-\operatorname{Im} Z$  segnato cioè e come dire:

$$i \bar{Z} = i \left( \operatorname{Re} \bar{Z} + i \operatorname{Im} \bar{Z} \right) =$$

$$= \underbrace{i \operatorname{Re} \bar{Z}}_{\text{parte immaginaria}} - \underbrace{\operatorname{Im} \bar{Z}}_{\text{parte reale}}$$

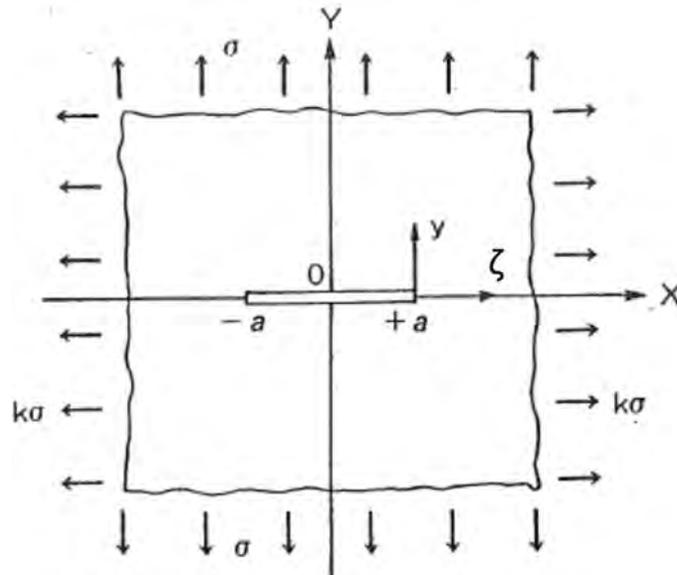
si scambiano in pratica il ruolo.

Analizziamo ora la parte immaginaria

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} \bar{Z} = \operatorname{Im} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial x} = \operatorname{Im} \bar{Z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} \bar{Z} = \operatorname{Im} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial y} = \operatorname{Re} \bar{Z}$$

Riassumendo si hanno le seguenti proprietà:



La tensione collineare non è  $\sigma$  come nella teoria di Griffith, ma  $k\sigma$  (**problema simmetrico**).

Westergard fa 3 ipotesi, ciascuna ha un significato fisico ben preciso:

1. Presa direttamente dalla teoria di Muskelis, ipotesi di simmetria;
2. Relativa alle condizioni al contorno sulla fessura;
3. Relativa alle condizioni al contorno al contorno all'infinito ( $K'$ ).

### 1° ipotesi

La funzione di Airy può essere scritta nella forma:

$$\Phi_I = \text{Re } \bar{Z}_I + y \text{Im } \bar{Z}_I + \frac{1}{2} B (y^2 - x^2)$$

B è una costante reale

Tutti i termini rappresentano delle funzioni armoniche, questo perché sia la parte reale che una parte immaginaria di una funzione armonica sono anch'esse funzioni armoniche.

Quando una funzione è analitica anche le sue derivate e i suoi integrali saranno funzioni analitiche.

Per avere il campo tensionale basta derivare la funzione di Airy.

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} = \text{Re } \bar{Z}_I + y \text{Im } Z_I - Bx$$

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} = -\cancel{\text{Im } \bar{Z}_I} + \cancel{\text{Im } \bar{Z}_I} + y \text{Re } Z_I + By$$

Nella prima equazione sono state applicate le proprietà precedenti la 1 e la 4 mentre nella seconda equazione la 2 e la 3.

Questa funzione soddisfa le condizioni sulla fessura, perché studiando il comportamento di un punto sull'asse delle x, esso oltre ad essere sull'asse  $y=0$  si trova tra  $-a$  e  $+a$ , e quindi solo lì si devono annullare le tensioni. La funzione  $(z+a)(z-a)$  sarebbe  $(x+a)(x-a)$  e all'interno dell'intervallo  $+a$  e  $-a$  ha segno negativo, mentre all'esterno dell'intervallo sarà positivo. A noi serve quello all'interno, perciò la radice di un numero negativo sarà un numero complesso, in questo caso immaginario puro perché non c'è la parte reale. In definitiva, se siamo sulla fessura, il radicando è negativo e quindi sotto si ha un numero immaginario e sopra resta una funzione reale.

Pensando che  $B$  è reale, e facendo un passo indietro nelle  $\sigma$  e  $\tau_{xy}$  si avrà:

$$\sigma_x = \underbrace{\text{Re } z_1}_{=0} - \underbrace{y \text{Im } z_1'}_{=0} + B$$

perché  
non ha  
una immaginaria  
pura

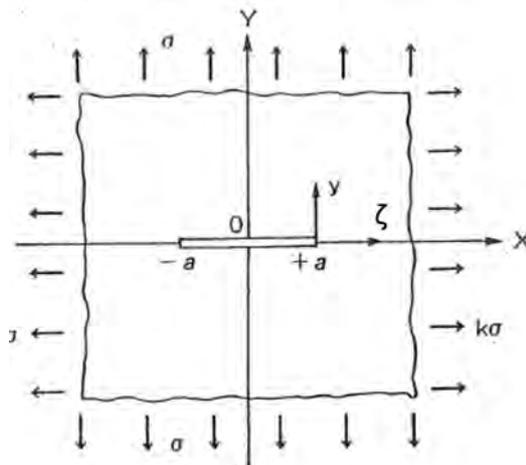
$$\sigma_y = \underbrace{\text{Re } z_1'}_{=0} + y \underbrace{\text{Im } z_1}_{=0} - B$$

Ritornando alla funzione di  $Z_1$ , si avrà per la  $\sigma_y$ ,  $-B$  e  $+B$  e quindi all'interno dell'intervallo le tensioni varranno  $\sigma_y=0$  mentre per la  $\sigma_x=2B$ .

La  $\tau_{xy}$  si annulla facilmente perché nell'equazione è presente  $y$  che però è uguale a zero.

In definitiva all'interno dell'intervallo il radicando è negativo, perciò la 2° ipotesi ci permette di verificare le condizioni al contorno sulla fessura.

Si trasla ora il sistema di riferimento effettuando il cambio di variabile  $z = \zeta + a$ , in questo modo gli assi locali diventano  $\zeta$  e  $y$



Sostituendo  $z$  nella  $Z_1$  si ottiene :

$$Z_1 = \frac{g(\zeta + a)/(\zeta + 2a)^{1/2}}{\zeta^{1/2}} + B$$

**Osservazione**

Il potenziale complesso  $Z_I$  si può dunque esprimere come:

$$Z_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \cos \frac{\vartheta}{2} - i \sin \frac{\vartheta}{2} \right) + B$$

$$Z'_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{1}{2} \right) \zeta^{-3/2} = -\frac{K_I}{2\sqrt{2\pi} r^{3/2}} \left( \cos \frac{3}{2} \vartheta - i \sin \frac{3}{2} \vartheta \right)$$

La seconda espressione è  $Z_I$  derivato.

Per ricavare il campo tensionale valido nell'introno dell'estremità della fessura:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z'_I + B = \\ &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} - 2r \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi} r^{3/2}} \sin \frac{3}{2} \vartheta + 2B = \\ &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3}{2} \vartheta \right) + 2B \end{aligned}$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3}{2} \vartheta \right)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z'_I = \\ &= -2r \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \left( -\frac{K_I}{2\sqrt{2\pi} r^{3/2}} \cos \frac{3}{2} \vartheta \right) = \\ &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3}{2} \vartheta \end{aligned}$$

In questo modo sono state ottenute funzioni singolari in  $r$  con potenza  $-1/2$  e trigonometrica in  $\theta$ .

In conclusione le 3 funzioni del campo tensionale sono tutte singolari in  $r$  e nello stesso modo, e l'una incognita che si ha è  $K_I$  che si risolve imponendo le condizioni all'infinito. Da questo si deduce che il campo tensionale a meno delle condizioni all'infinito ha sempre lo stesso profilo. Da notare le dimensioni anomale di  $K_I$ , ossia una  $[F][L]^{-3/2}$  in cui può essere vista come una tensione generalizzata. È da ricercarsi in questo in questa dimensione anomala gli effetti di scala sia nella meccanica della frattura sia nella resistenza dei materiali in generale.

### 3° ipotesi

Questa ipotesi ci va a definire la funzione  $g$ .

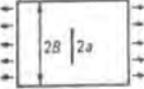
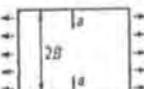
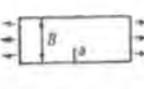
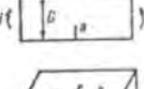
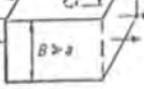
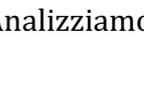
Si pone:

$$g(z) = \sigma z$$

e quindi:

### Crack geometry

$$K_I = F\sigma\sqrt{\pi a}$$

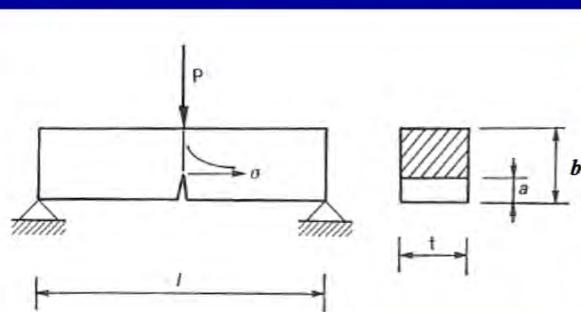
	Central crack in a plate of infinite width	1.0
	Central crack in a plate of width 2B	$\frac{1.0 - 0.5x + 0.37x^2 - 0.044x^3}{(1.0 - x)^2}$
	Plate of width 2B with double edge cracks	$\frac{1.122 - 0.561x - 0.205x^2 + 0.471x^3 - 0.19x^4}{(1.0 - x)^2}$
	Plate of width B with one edge crack	$\left( \frac{0.752 + 2.02x + 0.37(1.0 - \sin \frac{1}{2}\pi x)^3}{\cos \frac{1}{2}\pi x} \right) \left( \frac{2}{\pi} \tan \frac{1}{2}\pi x \right)^{\frac{1}{2}}$
	Deflected plate ( $\sigma=6M/B^2$ ) of width B, with one edge crack	$\left( \frac{0.923 + 0.199(1.0 - \sin \frac{1}{2}\pi x)^4}{\cos \frac{1}{2}\pi x} \right) \left( \frac{2}{\pi} \tan \frac{1}{2}\pi x \right)^{\frac{1}{2}}$
	Semi-elliptical edge crack with depth a and front length 2c	$\frac{1.122}{\phi}$ ove $\phi = \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{a^2}{c^2} \right) \sin^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}} d\theta$
	Semi-circular edge crack, $a=c$	$1.03 \times \frac{2}{\pi}$

Analizziamo il caso di una trave caricata su 3 punti (MODO 1):

### THREE POINT BENDING TEST (ASTM E 399-74)

$$K_I = \frac{P\ell}{tb^{3/2}} f(a/b)$$

$$f(a/b) = 2.9 \left( \frac{a}{b} \right)^{1/2} - 4.6 \left( \frac{a}{b} \right)^{3/2} + 21.8 \left( \frac{a}{b} \right)^{5/2} - 37.6 \left( \frac{a}{b} \right)^{7/2} + 38.7 \left( \frac{a}{b} \right)^{9/2}$$

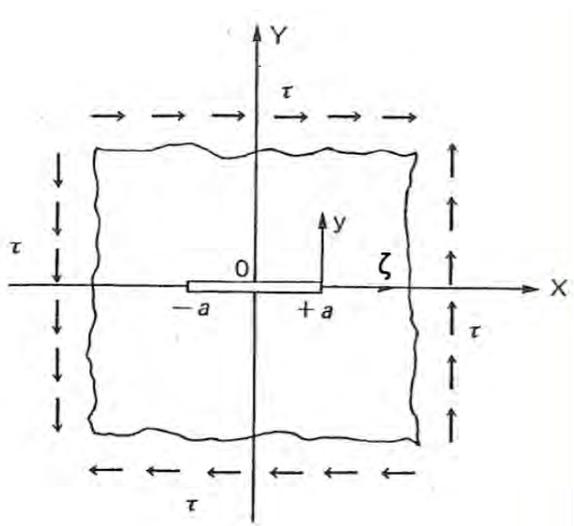


Si può vedere che risolvendo in maniera rigorosa il problema con le condizioni al contorno, si ottiene una funzione di forma  $f(a/b)$  che tiene conto di tutte le dimensioni; questa rientra nella relazione di  $K_I$ .

La funzione di forma è adimensionale ed è calcolata con i metodi agli elementi finiti, è in funzione di  $a/b$ , che rappresenta la grandezza relativa della fessura.

Le funzioni di forma sono tutte tabulate, nei manuali.

Per ogni geometria piana semplice, si può trovare un  $K_I$  che è in funzione della geometria e delle condizioni al contorno.



Mettendo uno stato di taglio all'infinito, la  $\phi$  è più semplice di quella iniziale.

$$\Phi_{II} = -y \operatorname{Re} \bar{Z}_{II}$$

Da questa relazione, tramite un doppia derivazione si ottengono le tensioni:

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Im} Z_{II} + y \operatorname{Re} Z'_{II}$$

$$\sigma_y = -y \operatorname{Re} Z'_{II}$$

$$\tau_{xy} = \operatorname{Re} Z_{II} - y \operatorname{Im} Z'_{II}$$

Le condizioni al contorno sulla fessura risultano sempre le stesse:

$$\sigma_y(x,0) = \tau_{xy}(x,0) = 0, \quad \text{for } -a < x < a.$$

e risultano soddisfatte da un potenziale della forma:

$$Z_{II} = \frac{f(z)}{[(z+a)(z-a)]^{1/2}}, \quad z \in \mathbb{C} \quad \longleftrightarrow \quad f(z) = \text{real function}$$

Tutto il discorso di modo 2, che significa taglio sulla fessura, si ripropone uguale al modo 1, anche le ipotesi sono uguali.

Facendo in questo modo si ottiene l'intensificatore delle tensioni di modo 2:

$$\underbrace{\{\sigma\}}_{5 \times 1} = (2\pi r)^{-1/2} \underbrace{[f(\vartheta, \varphi)]}_{5 \times 3} \underbrace{\{K\}}_{3 \times 1}$$

The diagram illustrates the components of the stress field equation. It features a blue background with a white box containing the equation  $\{\sigma\} = (2\pi r)^{-1/2} [f(\vartheta, \varphi)] \{K\}$ . Below the equation, four yellow arrows point to specific parts: the first arrow points to the stress vector  $\{\sigma\}$  (labeled 'stress field near the crack front'), the second to the singularity term  $(2\pi r)^{-1/2}$  (labeled 'radial singularity (linear elasticity)'), the third to the angular profile term  $[f(\vartheta, \varphi)]$  (labeled 'angular profile'), and the fourth to the S.I.F. vector  $\{K\}$  (labeled 'S.I.F. vector').

Quando si ha un crack tridimensionale , lungo il fronte del crack ci saranno 5 tensioni con la stessa singolarità.

Mentre la fessura in se è una porzione di superficie, la fessura fiorante è una linea non rettilinea, il fronte d'altra parte può essere una curva.

Sul fronte della curva, supponiamo regolare si ha una terna viaggiante, e si hanno 5 tensioni singolari e 1 no lunga la tangente.

Il valore critico del fattore di intensificazioni degli sforzi, nel modo 1 sarà  $K_{IC}$ , che sarà la tenacità alla frattura.

Irwin scrisse il criterio di resistenza in termini di  $K_{IC}$ :

$$\sigma \geq \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi a}}$$

perciò si può anche scrivere :

$$\sigma p = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi a_o}}$$

oppure:

$$a_o = \frac{1}{\pi} \frac{K_{IC}^2}{\sigma p^2}$$

cioè si avrà rottura per snervamento se la lunghezza del danneggiamento è inferiore ad  $a_o$ , si avrà invece una rottura per propagazione instabile del danneggiamento con una lunghezza critica al di sopra di  $a_o$ .

Se si progetto a rottura plastica non siamo a favore di sicurezza perché ci potrebbero essere dei difetti e la rottura potrebbe avvenire per collasso fragile.

Tutto questo è normato da una società americana internazionale ASTM.

- Determination of fracture toughness ( $K_{IC}$ ) of metallic materials (ASTM standard E399-05)
- Determination of fracture energy ( $G_F$ ) of mortar and concrete (RILEM Recommendation)

#### References

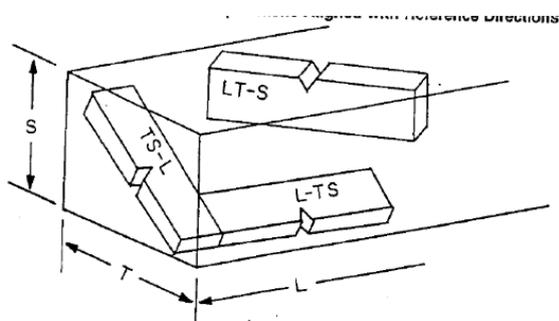
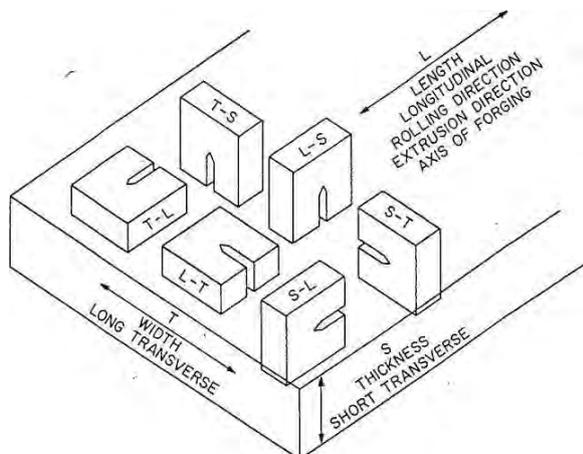
1. "Standard Method of Test for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials", ASTM Designation E-399-05, ASTM ANNUAL STANDARDS, AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS, 2005.
2. RILEM Technical Committee TC-50 on Fracture Mechanics of Concrete: "Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams", DRAFT RECOMMENDATION, MATERIALS AND STRUCTURES, Vol. 18, 1985.
3. A. Carpinteri, "Meccanica dei Materiali e della Frattura", Chap.3 (in Italian), Pitagora Ed., Bologna, 1992.

Quando il materiale è duttile (Acciai) si fa riferimento alla normativa americana, se i materiali sono fragili quasi-fragili si fa riferimento al capitolo 3 del Carpinteri (libro verde).

#### **Differenza tra materiali duttuli e fragili o quasi-fragili**

Nei materiali duttuli si fa riferimento al calcolo della tenacità alla frattura  $K_{IC}$ , quando si fa riferimento ai test dei materiali fragili si fa riferimento al calcolo dell'energia di frattura a cui poi si risale al  $K_{IC}$ .

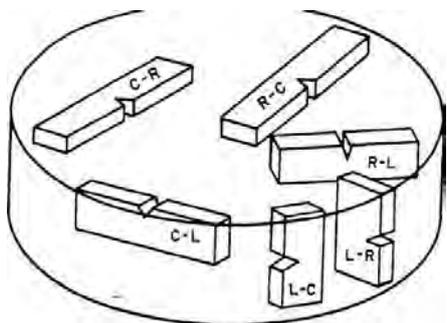
-s terza direzione ortogonale



### SEZIONE CIRCOLARE

Si designano i provini rettangolari con le lettere:

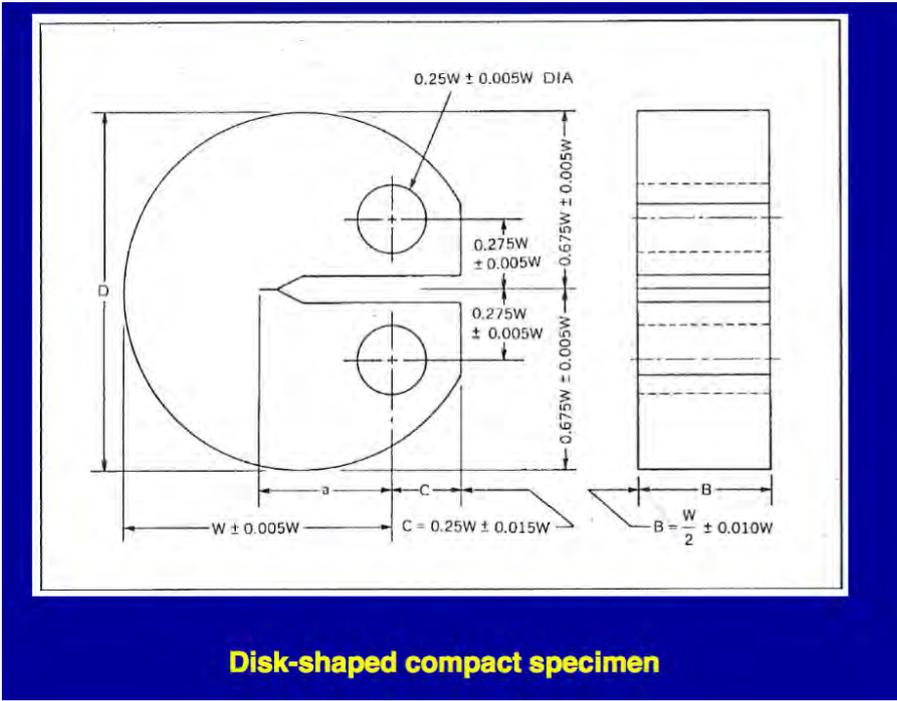
- L direzione deformazione principale;
- R direzione radiale;
- C direzione tangenziale o circonferenziale;



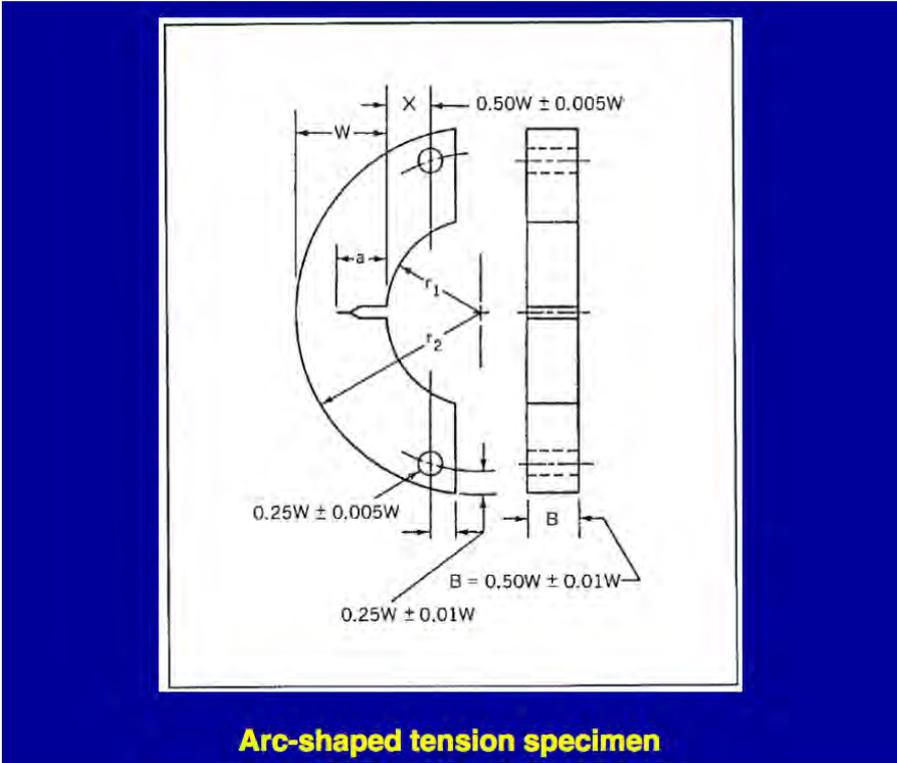
### METODO DI ESECUZIONE PROVA

Normalmente abbiamo il provino soggetto a trazione o compressione e si vanta l'apertura delle bocche della fessura.

Si pongono delle pinze all'interno della fessura e si va a vedere l'allontanamento delle due pinze (crack-mouth opening displacement CMOD).



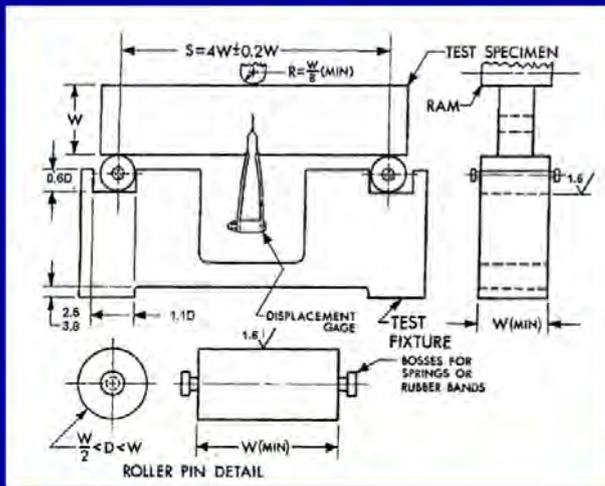
**Disk-shaped compact specimen**



**Arc-shaped tension specimen**

## Classico test dell'acciaio

**Fixtures are designed to minimize friction by allowing the support rollers to rotate and translate slightly as the specimen is loaded, achieving rolling contact.**



### DIMENSIONI SPECIFICHE

Tutte le dimensioni della trave sono in funzioni della sua altezza, che non è mai impostato a casa ma in funzione circa del valore atteso di quanto si va a calcolare.

**In order for a result to be considered valid according to this test method:**

$$(W - a) > 25 \left( \frac{K_Q}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

$W$  = specimen width;

$a$  = crack length;

$K_Q$  = provisional value of  $K_{IC}$  determined from the test;

$\sigma_{ys}$  = 0.2% offset yield strength of the material.

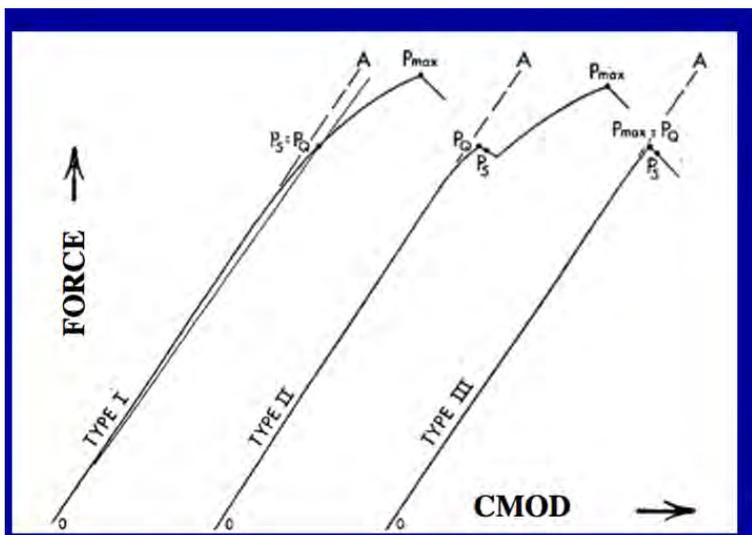
IL  $K_Q$  è un valore atteso del  $K_{IC}$  e ci serve per poter dire in fase preliminare di quanto deve essere l'altezza del provino.

$\sigma_{ys}$  si trova nei cataloghi degli acciai.

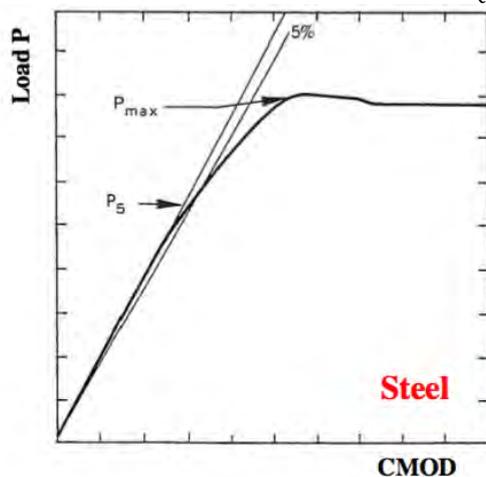
Si nota che quando il crack è all'interno dell'elemento  $a$  è pari alla semi-lunghezza della fessura, mentre se il crack è sul bordo (superficiale) dell'elemento allora  $a$  è pari alla lunghezza intera del crack.

Per i metalli si deve passare una fase di pre-processo. Il pezzo rettangolare che si poggia su due cerniere con al centro la fessura, prima che si faccia scendere il pistone per la prova, si fa un ciclo di fatica, in modo tale da provarli un  $\Delta K_I$  dove la differenza tra il minimo e il max deve essere inferiore al 90 % di  $K_{I_{max}}$  (impostato inferiore al 60% del valore atteso  $K_{IC}$ ).

Si imposta quindi un pre-ciclo e dopo di che si può partire con il test.



Inizia la prova e si ha una curva dove nella parte iniziale di questa si ha una certa pendenza e una certa tangente successivamente oltre il tratto iniziale si potrà tracciare la secante (retta che parte dall'origine, che ha una determinata pendenza e che taglia la curva all'interno). Quando l'inclinazione della curva è del 5% in più rispetto alla tangente, si potrà tracciare una secante che individua un punto in cui sarà associata una forza  $P_Q$  che sarà quella che da il  $K_I$ .

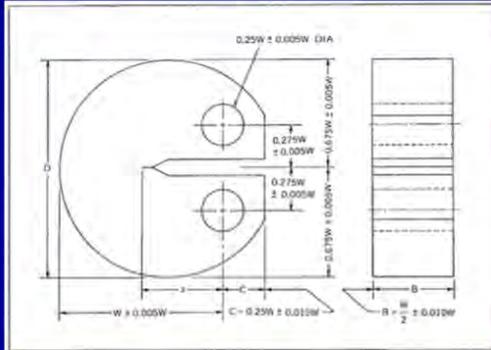


In altri termini quando la curva presente un'inclinazione maggiore del 5% del valore iniziale allora si ha  $P_Q$ .

#### FUNZIONI DI FORMA

Quando si trova la forza  $P_Q$ , per ricavare  $K_{Ic}$ , la si deve mettere all'interno di un'espressione alla Westergard. Le funzioni di forma sono valori correttivi dell'espressione alla Westergard del fattore intensificazioni degli sforzi, e serve per applicazioni ai casi reali.

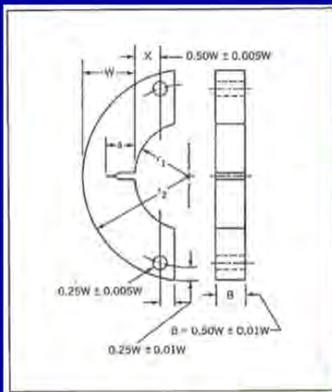
### Disk-shaped compact specimens



$$K_Q = \frac{P_Q}{B\sqrt{W}} \cdot f\left(\frac{a}{W}\right)$$

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{\left(2 + \frac{a}{W}\right) \left[0.76 + 4.8\frac{a}{W} - 11.58\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 11.43\left(\frac{a}{W}\right)^3 - 4.08\left(\frac{a}{W}\right)^4\right]}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2}}$$

### Arc-shaped tension specimens



$$K_Q = \frac{P}{B\sqrt{W}} \left(3\frac{X}{W} + 1.9 + 1.1\frac{a}{W}\right) \left[1 + 0.25\left(1 - \frac{a}{W}\right)^2 \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\right] \cdot f\left(\frac{a}{W}\right)$$

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{\sqrt{\frac{a}{W}}}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2}} \left[3.74 - 6.30\frac{a}{W} + 6.32\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 2.43\left(\frac{a}{W}\right)^3\right]$$

Se si inclina del 5% la retta si incrocia la curva molto presto, si avrà un  $P_Q$  molto basso e quindi la resistenza alla frattura è molto bassa (l'acciaio si legge infatti che è stata rifiutato). Il  $P_{max}$  al 5% risulta infatti pari a circa alla metà del  $P_Q$ , mentre per l'alluminio risulta uguale.

Se si esegue una prova su un materiale, non bisogna accettare quel materiale se  $P_{max}$  si discosta di molto rispetto a  $P_Q$ , perché significa che la frattura fragile precede di molto la frattura plastica.

#### IMPOSTAZIONE MODERNA DELLA PROGETTAZIONE

Quando si progetta non si può scegliere se stare sotto al collasso plastico (comportamento duttile) o sotto il collasso fragile (propagazione della frattura), si deve stare **sempre** sotto il collasso duttile e lontani da quello fragile.

#### MATERIALI QUASI-FRAGILI

Non si calcola  $K_I$  ma  $G_f$ , ossia l'energia di frattura.

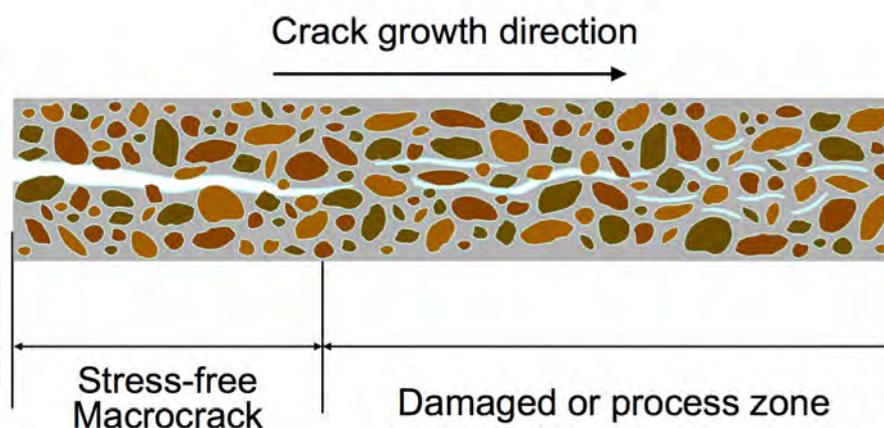
Dicasi energia di frattura, l'energia assorbita dal provino durante la propagazione della frattura sino al completo collasso (è un'area).

#### *Differenze tra materiali metallici e materiali fragili*

I materiali metallici o duttili hanno in genere una zona plastica piccola non comparabile con la dimensione dell'elemento strutturale, mentre quelli fragili hanno una zona plastica che è comparabile rispetto alla dimensione dell'elemento strutturale.

Nella zona plastica dei metalli le trazioni in genere sono costanti, nella zona di processo dei materiali fragili le trazioni non sono costanti.

La zona di processo o coesiva, è quella che si ha immediatamente all'apice della fessura reale. Si vedrà che nel Cls, si farà una differenza tra l'apice (tip) della fessura reale e il tip di quella fittizia. La frattura fittizia è quell'estensione virtuale di fessura al di sopra dell'apice, in cui se  $K_I > K_{IC}$  la fessura da virtuale diventa reale, cioè tutta l'estensione virtuale verrà coperta dalla fessura reale.



A sinistra c'è la fessura reale mentre la zona di processo o fessura virtuale è nella parte di destra; la fessura non si è ancora propagata ma ci sono un sacco di piccoli difetti virtuali che quando il  $K_I$  supererà il  $K_{IC}$  diventeranno fessura.

$$W = W_0 + W_1 + W_2$$

$$W = W_0 + 2F_1\delta_0$$

- **The fracture energy is determined as follows:**

$$\mathcal{G}_F = (W_0 + \underbrace{mg\delta_0}_{2F_1\delta_0}) / A_{lig} \quad (\text{J/m}^2, \text{N/m})$$

**where:**

$$m = m_1 + 2m_2 \text{ (kg);}$$

$m_1$  = mass of the beam within the supports;

$m_2$  = mass of the experimental apparatus acting on the beam;

$g$  = gravity acceleration = 9.81 m/s<sup>2</sup>;

$\delta_0$  = mid-span deflection at beam failure (m);

$A_{lig}$  = area of the ligament (m<sup>2</sup>)

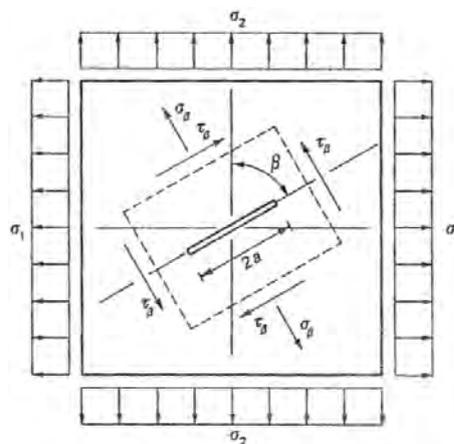
$A_{lig}$  è l'area della parte intera della trave

Con  $G_f$  si entra dentro la formula di Irwin, o dentro quella di Griffith, si trova altra roba e si possono fare le verifiche a propagazione della fessura (collasso fragile).

giovedì 21 aprile 2016

**Condizione di sforzo biassiale:**

Il fattore di int. degli sforzi di modo 1 e modo 2 si può vedere applicato ad una lastra sollecitata su entrambi gli assi con due tensioni diverse: sigma1 e sigma2. La lastra è soggetta a fessura inclinata rispetto alla verticale di un generico angolo beta.



$$K_I = \sigma_\beta \sqrt{\pi a}$$

$$K_{II} = \tau_\beta \sqrt{\pi a}$$

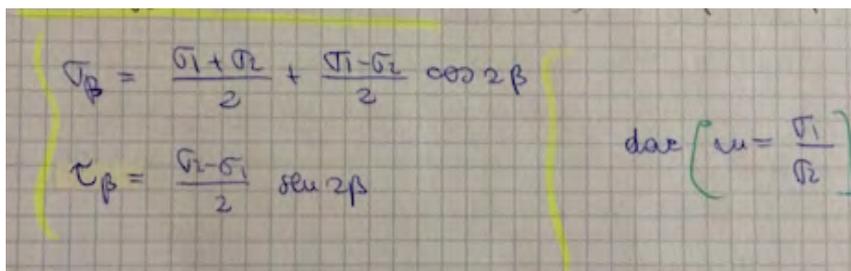
Considero separatamente K1 e K2.

Rispetto agli assi del crack, inclinati dell'angolo beta, ottengo sigma\_beta e tau\_beta.

Ovviamente il K1 (opening) dipende da sigma mentre il K2 (taglio) dipende dalla tau!

$$m = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

Impostando la **posizione m** (rapporto tra le tensioni biassiali), riesco a scrivere i fattori K1 e K2 in funzione della sola tensione verticale sigma2 e del rapporto m. Notare che si è passati dalle tensioni sigma\_beta, tau\_beta alle tensioni sigma1 e sigma2 tramite le equazioni del cerchio di mohr tramite le seguenti relazioni:



Trovo così K1 e K2!

$$K_I = \sigma_2 \sqrt{\pi a} [m + (1-m) \sin^2 \beta]$$

$$K_{II} = \sigma_2 \sqrt{\pi a} [(1-m) \sin \beta \cos \beta]$$

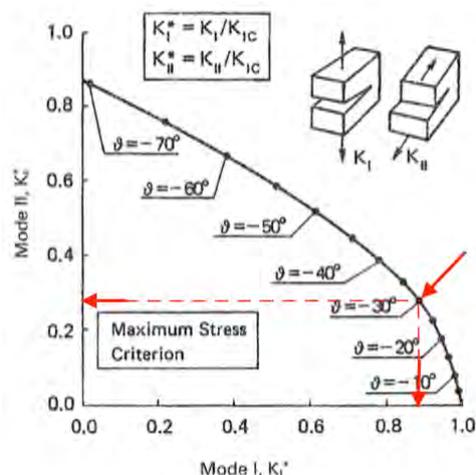
Attenzione a non confondere l'angolo di inclinazione del crack (beta) (che vedo, e non cambia!) con l'angolo di diramazione (theta) (che devo invece calcolare). Posso applicare il criterio di H&S a qualsiasi crack, anche nel caso in cui ci fosse solo modo 1 ad esempio. Se sono in **modo 1** l'angolo di diramazione theta è nullo poiché la propagazione della fessura è collineare al suo asse! L'angolo beta è l'inclinazione della fessura rispetto alla verticale.

A seconda di come è sollecitato l'elemento devo vedere come dirama la fessura e se dirama! --> La propagazione avviene quando la combinazione di K1 e K2 supera K1c e K2c.

giovedì 21 aprile 2016

**Abbiamo visto come propaga. Adesso dobbiamo vedere se effettivamente propaga.** Allora mi riferisco alla teoria di Westergaard: faccio la comparazione dei fattori di intensificazione degli sforzi  $K_1$  e  $K_2$  con i rispettivi valori critici  $K_{1c}$  e  $K_{2c}$ , cioè le tenacità. Se il valore critico viene superato (o raggiunto) allora si ha propagazione della fessura.

Nuovo diagramma dove si riportano i  $K^*$  = adimensionalizzazione del fattore di intens. degli sforzi rispetto al valore critico  $K_{1c}$ . --> è il modo 1 che fa da fattore comune; il diagramma serve per vedere se avviene o meno la propagazione. Da prima ho det. l'angolo di inclinazione della diramazione  $\theta$ , entro nel diagramma nel punto corrispondente al  $\theta$  e controllo se i rapporti sono verificati.



esempio. Dal diagramma di prima ho trovato angolo di diramazione  $\theta=30^\circ$ . Adesso nel nuovo diagramma devo andare a vedere se effettivamente questa propagazione è reale o no. Infatti finché  $K_1 < K_{1c}$  la propagazione è solo virtuale! Ricavo dal diagramma che, perché la propagazione sia reale,  $K_1$  deve essere almeno dell' 80% di  $K_{1c}$ , e  $K_2$  almeno del 22-23% del  $K_{1c}$ . La verifica deve essere soddisfatta in contemporanea! Ovviamente i fattori  $K_1$  e  $K_2$  sono già noti da prima, se no non avrei potuto ottenere la relazione tra  $\theta$  e  $\beta$  che mi forniva poi il diagramma. Ovviamente la formula del  $K_{1c}$  è nota dalla teoria di Westergaard.

$$\sigma_\theta \sqrt{2\pi r} = K_{1c}$$

Notare che potrei partire direttamente dal secondo diagramma per vedere innanzitutto se la propagazione avviene realmente o no. Se vedo che la propagazione non avviene allora è inutile passare al primo diagramma per trovare l'angolo di diramazione!

Criterio di Herdogan&Sih molto utile per capire l'interazione tra i modi di frattura.

26 Aprile 2016  
Prof. Carpinteri

## METODO DI WILLIAMS DEGLI SVILUPPI IN SERIE

Argomento conclusivo meccanica della frattura lineare.

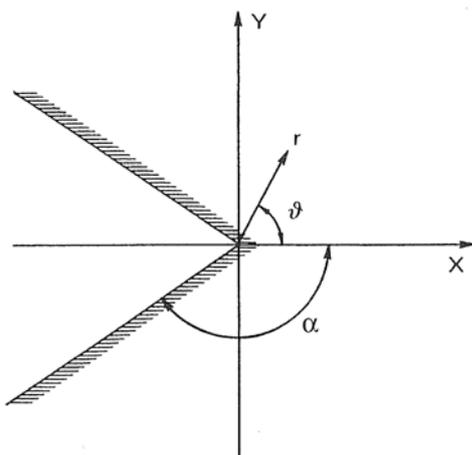
### Introduzione

Si usano per la trattazione, funzioni reali sviluppate in serie; è un argomento ancora più generale di quello di Westergard e tratta i casi degli angoli rientrati.

Gli angoli rientrati sono settori del piano elastico limitato da un angolo che può essere diverso da zero; qualora esso tendesse a zero, la frattura tende ad infinito.

La tenacità alla frattura,  $K_{IC}$  e l'energia di frattura  $G_{IC}$  sono collegati da una relazione quadratica. Questa relazione si ripropone senza considerare i valori critici, e sarà una generalizzazione del concetto di Westergard.

L'approccio globale è dunque è quello energetico, mentre quello locale sarà quello tensionale.



A parte  $r$  e  $\theta$  che sono coordinate polari, l'angolo  $\alpha$  rappresenta la metà dell'angolo solido dell'angolo dove c'è la parte elastica. In definitiva l'angolo rientrante ha un'ampiezza che denominiamo  $2\alpha$ ; all'infinito non si andranno a definire i carichi (potranno essere di modo 1, modo 2 o misto), ma si andrà a imporre le condizioni al contorno nelle facce dell'intagli di questo angolo rientrante.

Le tensioni lì dovranno essere nulle e si afferma dunque che non ci sono carichi esterni applicate sui bordi.

Si devono pensare a delle forze iniziali di modo 1 e si crea una singolarità tensionale ( $-1/2$ ); essa andrà a diminuire sino a zero quando l'angolo diventa piatto (assenza di singolarità).

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum (d_{n+1}) r^{(d_{n+1})-1} f_n(\vartheta) \right] + \frac{1}{r^2} \left[ \sum r^{(d_{n+1})} f_n''(\vartheta) \right] = \\ &= \sum (d_{n+1}) r^{(d_{n+1})-2} f_n(\vartheta) + \sum r^{(d_{n+1})-2} f_n''(\vartheta) = \\ &= \sum r^{(d_n-1)} \left[ (d_{n+1}) f_n(\vartheta) + f_n''(\vartheta) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\vartheta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \sum r^{d_n-1} \left[ d_n (d_{n+1}) f_n(\vartheta) \right] \\ \frac{\partial \phi}{\partial r} &= \sum (d_{n+1}) \cdot r^{\overbrace{(d_{n+1})-1}^{d_n}} \cdot f_n(\vartheta) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} &= \sum (d_{n+1}) \cdot d_n \cdot f_n(\vartheta) \cdot r^{(d_n-1)} \end{aligned}$$

Si ottiene infine:

$$\sigma_r = \sum_n r^{\lambda_n-1} \left[ f_n''(\vartheta) + (\lambda_n + 1) f_n(\vartheta) \right]$$

$$\sigma_\vartheta = \sum_n r^{\lambda_n-1} \left[ \lambda_n (\lambda_n + 1) f_n(\vartheta) \right]$$

$$\tau_{r\vartheta} = - \sum_n r^{\lambda_n-1} \lambda_n f_n'(\vartheta)$$

Si nota subito che derivando due volte si scala di due unità la potenza, e si ottiene r elevato alla stessa potenza in tutte e 3 le equazioni.

Per quanto riguarda la parte angolare, nella prima espressione si trova f'', nella seconda f e nella terza f' e non è un caso.

parlare di modo 1, cioè solo apertura. Il seno invece rappresenta la soluzione antisimmetrica e quindi si parla di modo 2, cioè taglio.

Il prossimo passo riguarda le condizioni al contorno sui bordi del settore elastico; esse si esprimono come l'annullamento delle tensioni circonferenziali e tangenziali.  $\alpha$  può variare da 0 a  $\pi$ , quindi si ricavano 4 condizioni al contorno del tipo:

$$\sigma_{\vartheta}(\pm\alpha) = 0$$

$$\tau_{r\vartheta}(\pm\alpha) = 0$$

Considerando:

$$\sigma_{\vartheta} = \sum_n r^{\lambda_n - 1} [\lambda_n (\lambda_n + 1) f_n(\vartheta)]$$

$$\tau_{r\vartheta} = - \sum_n r^{\lambda_n - 1} \lambda_n f_n'(\vartheta)$$

Si ottiene:

$$f_n(\pm\alpha) = 0$$

$$f_n'(\pm\alpha) = 0$$

Sostanzialmente non avevamo la  $f$  ma l'abbiamo trovata risolvendo l'equazione differenziale.

Ora si introducono queste condizioni nell'equazione precedente con  $f_n(\theta)$  e  $f_n'(\theta)$  e si ottiene:

$$A_n \cos(\lambda_n + 1)\alpha + B_n \cos(\lambda_n - 1)\alpha \pm C_n \sin(\lambda_n + 1)\alpha \pm$$

$$D_n \sin(\lambda_n - 1)\alpha = 0$$

$$\pm A_n (\lambda_n + 1) \sin(\lambda_n + 1)\alpha \pm B_n (\lambda_n - 1) \sin(\lambda_n - 1)\alpha +$$

$$C_n (\lambda_n + 1) \cos(\lambda_n + 1)\alpha + D_n (\lambda_n - 1) \cos(\lambda_n - 1)\alpha = 0$$

Queste sono 4 equazioni algebriche lineari omogenee, nelle 4 incognite A,B,C,D, quindi lo si potrebbe risolvere.

$-\lambda_n \sin 2\alpha = \sin 2\lambda_n \alpha$	<b>(Mode I)</b>
$+\lambda_n \sin 2\alpha = \sin 2\lambda_n \alpha$	<b>(Mode II)</b>

Dividendo tutto per  $2\lambda\alpha$  si ottengono dell'espressioni ancora più semplici:

$$\frac{\sin 2\lambda_n \alpha}{2\lambda_n \alpha} = \mp \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$$

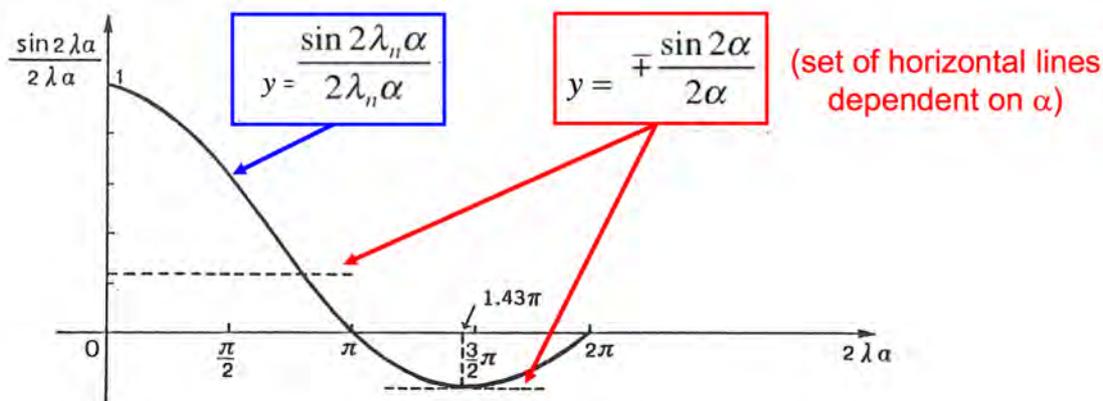
con  $0 \leq 2\alpha \leq 2\pi$ .

Il segno - fa riferimento al modo I, mentre il segno + fa riferimento al modo II.

La parte al secondo membro rappresenta una costante una volta fissato  $\alpha$ , mentre il primo membro è una funzione di  $\lambda_n$  del tipo  $\sin(x)/x$ .

Questa espressione può essere risolta anche graficamente assegnato  $\alpha$  e ricavando  $\lambda_n$ .

Per risolvere graficamente questa funzione si può tracciare la funzione  $\sin x/x$  dove però l'argomento del seno è  $2\lambda\alpha$ .



Andando verso sinistra la funzione è simmetrica, solo che le intersezioni con le rette orizzontali tendono ad abbassarsi.

Il dominio della funzione va da 0 a  $2\pi$ . Per trovare una soluzione grafica bisogna intersecare la curva con una funzione costante (si eguaglia appunto la curva con la funzione costante).

La funzione  $\sin x/x$  per  $x$  che tende a zero fa 1 e questo è proprio l'intersezione della funzione con l'asse delle ordinate.

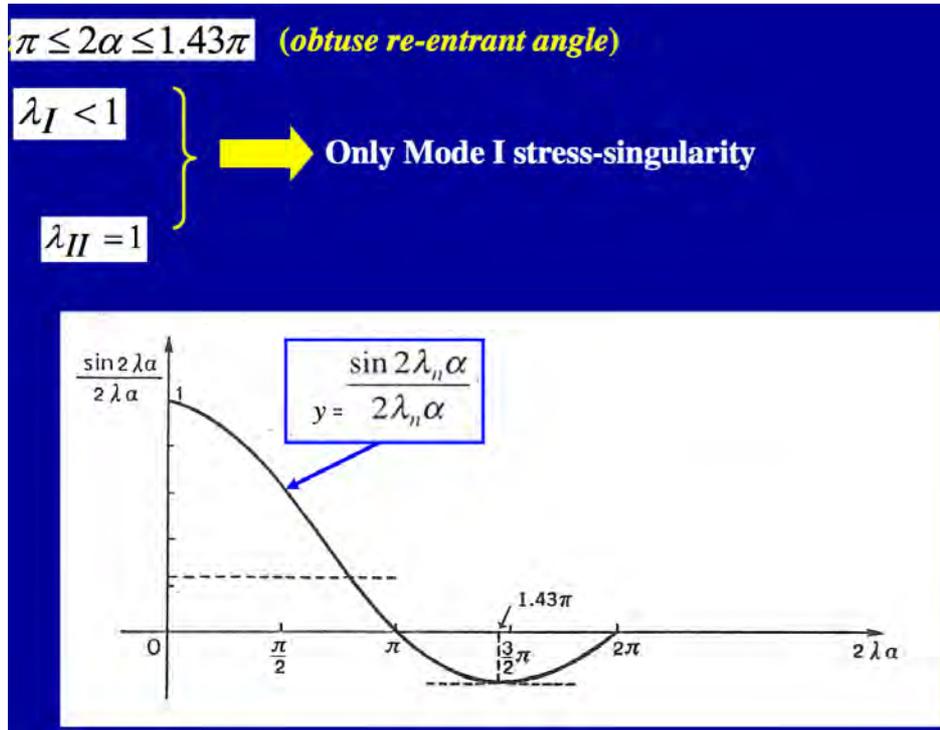
La funzione costante dista dall'asse  $x$  proprio  $\sin 2\alpha/2\alpha$ .

Si può immaginare di dividere il dominio della funzione in 4 intervalli, il primo tratto va dal punto (0,1) fino al punto di intersezione con la retta orizzontale che è la simmetrica rispetto alla tangente del punto di minimo ( la prima retta

intersecare questa curva con una retta orizzontale che rappresenta il metodo II, in questo caso il  $2\alpha$  è superiore a  $\pi$ .

L'angolo nel 3° segmento sarà quindi ottuso, mentre nel 4° segmento sarà acuto, più interessanti ai fini tecnologici.

3° segmento



(1:17)

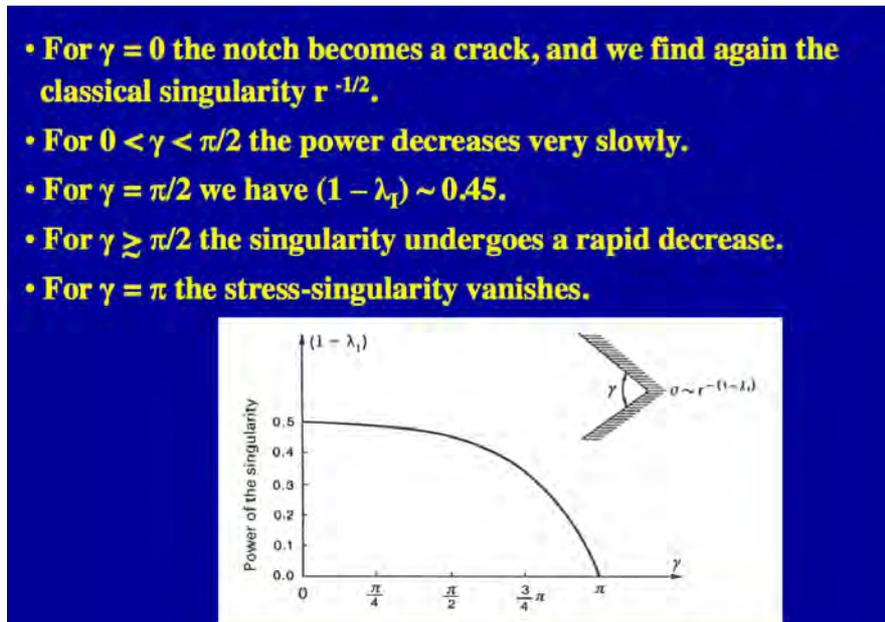
Si ha una singolarità di modo I che è debole.

Nel modo II, mandando una retta orizzontale (contenuta tra il minimo della funzione e l'asse delle ascisse) nella seconda semi-onda, si ha un'intersezione dello stesso punto e quindi  $\lambda_{II}=1$ . Per il modo I la retta, sotto l'asse delle ascisse, va ribaltata e quindi l'intersezione cadrà nella prima semi-onda. Ora si deve fare il rapporto tra un segmento più piccolo, che è l'ascissa dell'intersezione del modo I e l'ascissa dell'intersezione del modo II, ciò che viene fuori è un numero minore di 1 ( $\lambda < 1$ ), questa sarà la singolarità.

Perciò la prima singolarità che si trova è questa in modo I con angoli ottusi, che però è debole.

In definitiva la sostanza è quella di intersecare le due semi-onde con delle rette orizzontali che passano sopra o sotto a seconda del modo.

Vediamo ora la variazione della singolarità al variare di  $\gamma$  che non è altro che il complementare di  $2\alpha$  rispetto a  $360^\circ$ ; viene chiamato *ampiezza dell'angolo rientrante*.



Per  $\gamma = \pi/2$  si ha una singolarità di 0,45 molto vicina a quella della meccanica della frattura e quindi è molto pericolosa. Se l'angolo diventasse più grande di  $90^\circ$  e va verso i  $180^\circ$  la singolarità si sposta in maniera veloce da  $\frac{1}{2}$  e crolla in maniera rapida a 0.

1:42:00

## RELAZIONE FONDAMENTALE DI IRWIN

### Relazione tra energia di frattura $G_{IC}$ e il valore critico $K_{IC}$ del fattore di intensificazione degli sforzi.

$G_I$  = variazione di energia potenziale totale

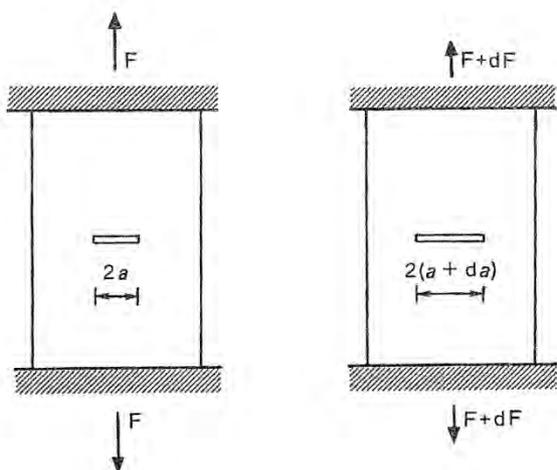
Irwin dimostrò la relazione senza considerare i valori critici, inoltre riprese il discorso energetico di Griffith e lo generalizzò a qualsiasi geometria e a qualsiasi processo di carico.

Nella trattazione di Griffith infatti si era fatta l'ipotesi di carico imposto attraverso gli spostamenti (spostamento controllato).

Con la teoria di Irwin il processo può avvenire sia a carico controllato sia a spostamento controllato.

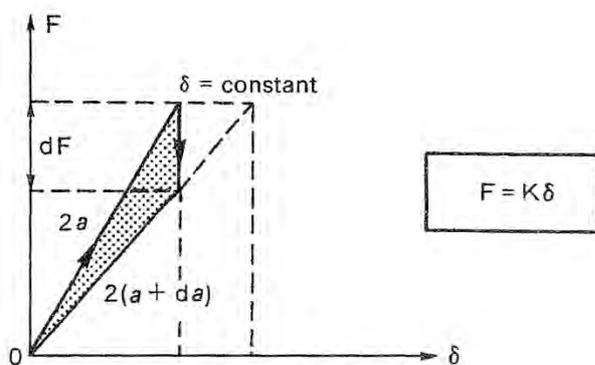
potenziale è negativa e quindi l'energia viene rilasciata.

Consideriamo ora il caso opposto, in cui al posto di porre il carico controllato, si pone lo spostamento controllato.



Ci sarà quindi la forza  $F$  fin dall'inizio applicata, poi si allunga in maniera artificiale o naturale la fessura, ci dovrà essere quindi un decremento della forza ( $dF$ ) perché si sta riducendo la sua rigidità.

In maniera grafica si ha prima il caricamento  $F \delta$  poi tenendo  $\delta$  costante si ha una caduta del carico.



Il triangolo che ora si considera ha base  $dF$  e altezza  $\delta$ .

In questo caso  $dL$  è:

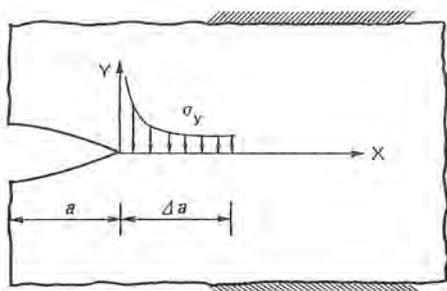
$$dL = \frac{1}{2} \delta dF \times 2 = \delta^2 dK = \delta^2 d\left(\frac{1}{C}\right) = -\delta^2 \frac{1}{C^2} dC = -F^2 dC$$

dove  $dK$  è la variazione di rigidità che sarà negativa perché è il differenziale della cedevolezza.

Si arriva alla stessa espressione di prima.

Il  $dW = dL$  perché i carichi non si spostano.

$$dW = dL = -F^2 dC$$



(parabola ad asse orizzontale)

Per dimostrare il teorema si va dalla fessura più dilatata a quella meno dilatata, si considera il processo opposto.

Alla richiusura si applica il teorema di Clapeyron:

$$\Delta W = 2 \int_0^{\Delta a} \frac{1}{2} \sigma_y v \, dr$$

$$\sigma_y = \sigma_y(\vartheta = 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(\Delta a - r)}}$$

$$v = v(\vartheta = \pi) = 2 \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{K_I}{E} r^{1/2}$$

L' espressioni delle tensioni si assomigliano a quelle ricavate da Westergard, soltanto che si è traslato il sistema di riferimento.

Si ha  $\Delta a - r$  perché il sistema di riferimento è quello figura 1 . I due schemi hanno sistemi di riferimento diversi.

Ponendo ora  $\Delta W = G_I \Delta a$  :

$$G_I \Delta a = \frac{2}{\pi} \frac{K_I^2}{E} \int_0^{\Delta a} \left( \frac{r}{\Delta a - r} \right)^{1/2} dr = \frac{K_I^2}{E} \Delta a$$

$G_I = \frac{K_I^2}{E}$	<b>plane stress conditions</b>
$G_I = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu^2)$	<b>plane strain conditions</b>

Si può inoltre verificare che tutto torni dimensionalmente

$$[G_I] = \frac{[F^2][L^3]}{[F][L^2]} = [F][L^{-1}] = \frac{\text{energy}}{\text{area}}$$

giovedì 28 aprile 2016

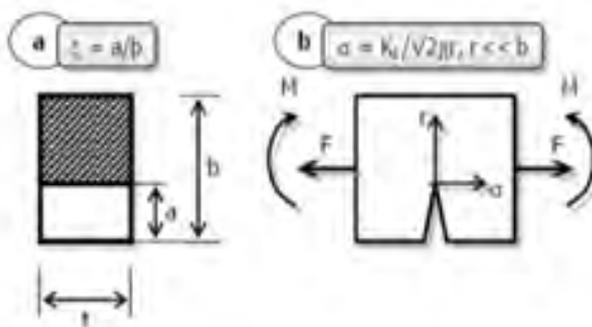
## Plasticità e frattura - Accornero, es. 12

### Meccanismi di apertura e richiusura delle fessure in regime di pressoflessione. (sforzo normale eccentrico di compressione).

Nella meccanica della frattura elastica lineare il problema si governa con i fattori di intensificazione degli sforzi --> è un problema di sovrapposizione degli effetti. Sappiamo che per ogni tipo di regime flessionale esiste un fattore di intensificazione degli sforzi. Quindi essendo questo un regime composito (compressione + flessione retta) ci sarà una sovrapposizione degli effetti tra il fatt. di int. degli sforzi per la flessione retta e quello per la compressione.

Con certe particolari condizioni vedremo che avviene la richiusura della fessura e, come conseguenza, aumenta l'inerzia e quindi la rigidezza. Siamo comunque sempre nell'ambito della meccanica della frattura elastica lineare.

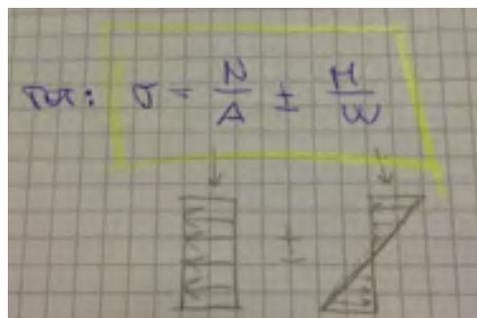
Consideriamo il classico concio di trave con danneggiamento iniziale, sollecitato con forza assiale e flessione retta. La grandezza in gioco è l'altezza relativa della fessura (relativa all'altezza della trave) cioè il rapporto  $a/b = csi$  --> **profondità relativa della fessura.**



Si noti all'apice della fessura il classico diagramma cartesiano che riporta l'intensificazione classica degli sforzi: mi aspetto un asintoto a  $\infty$  in prossimità di  $r=0$  cioè all'apice della fessura. La tensione sigma è governata dal fattore di int. degli sforzi  $K_1$  funzione del particolare stato di sollecitazione, ciascuno dei quali si porta dietro il relativo  $K_1$ . C'è poi la funzione di forma: sono tabellate come polinomi che hanno all'interno la csi. Stiamo sempre parlando di modo I infatti al pedice appare sempre il numero 1.

Poiché siamo in pressoflessione applico la formula di DSV, cioè la sovrapposizione degli effetti con Navier. Tengo conto della tensione dovuta allo sforzo assiale e alla tensione dovuta alla flessione retta.

La medesima sovrapposizione la posso applicare ai fattori di int. degli sforzi  $K_1$  della sollecitazione assiale e della flessione retta.



giovedì 28 aprile 2016

Riepilogando: per ottenere questo grafico ho applicato, al mio regime di pressoflessione, una sovrapposizione degli effetti tra i relativi fattori di intensificazione degli sforzi. Ho inserito la condizione critica e trovato la forza  $F_c$  che nel concio considerato fa propagare la fessura.

Però voglio analizzare tutti i casi: sia di profondità della fessura sia delle situazioni di pressoflessione, cioè per tutti i valori di eccentricità.

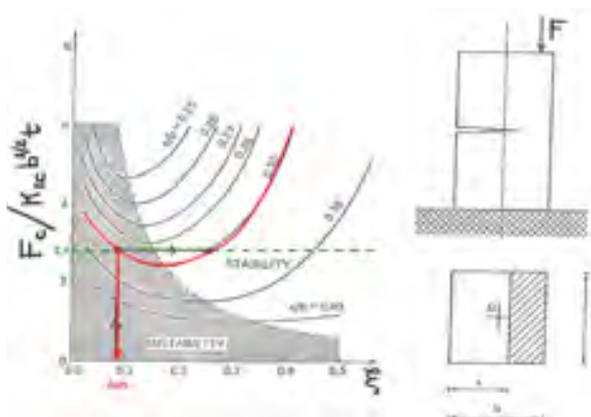
Nel diagramma infatti sono riportate le curve al variare dell'eccentricità, in relazione a quanto mi sposto dal baricentro della sezione. Sto quindi spazzando tutti i casi possibili della pressoflessione.

Nota geometria e materiale del mio elemento conosco il  $K_{1c}$ ; lo sollecito. Applico quindi una  $F$ , e se eccentrica, anche una  $M$ . Entro quindi nell'espressione indicata sull'asse y.

Ottingo ad esempio 2,4 --> sto spazzando una retta che taglia il grafico ad ascissa 2,4.

Questo è un numero, in quanto l'espressione in questione è adimensionale.

Il prossimo dato da inserire nel grafico è l'eccentricità  $e$  che adimensionalizzo rispetto all'altezza della sezione  $b$ . Trovo una curva, ad es. quella 0,30 cioè eccentricità pari al 30% dell'altezza della trave.



Significa che lo stato tensionale applicato al concio fa sì che si ingeneri un danneggiamento pari a circa 0,09; cioè il 9% dell'altezza della trave si è fessurato.

Questo è un diagramma molto potente perché mi dice se l'elemento in questione, anche integro, sollecitato a pressoflessione, si danneggia o meno, usando come input dei dati banali che conosco. Interseco il ramo discendente della curva di eccentricità e leggo sull'asse delle  $x$  quanto vale il danneggiamento che sto ingenerando. (o di quanto propaga l'eventuale fessura già presente).

Con eventuale danneggiamento iniziale, ne avrei tenuto conto implicitamente nella sovrapposizione degli effetti funzione delle funzioni di forma. In queste è contenuta l'espressione adimensionalizzata del danneggiamento.

Siamo rimasti sulla parte discendente del grafico in quanto, inizialmente, avevo supposto di non avere danneggiamento. Supponiamo ora un danneggiamento iniziale del 20% della sezione, 0,2 nell'asse delle  $x$ . Dall'asse delle  $y$  entro con il valore di prima 2,4.

Ovviamente in questo caso non mi fermerò al ramo discendente della curva  $e/b$  ma andrò a cercare quel punto che sta al di là dell'iniziale danneggiamento di 0,2.

Quindi vedo che il danneggiamento passa da 0,2 a 0,25 con questo regime presso-flessionale.

Diagramma molto utile nella pratica: noto il materiale e la geometria vedo quanto si danneggia l'elemento o di quanto propaga se già fessurato.