NUMERO: 2138A- ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Faraci Alessio

MATERIA: Idrologia. Esercitazioni - Prof. Claps

IDROLOGIA

Alessio Faraci
237719

POLITECNICO
DI TORINO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 154

Indice

ESERCITAZIONE 1

1.1 Analisi esplorativa di una serie di dati

Si consideri la serie storica di massimi annui di portata (colmi di piena) del torrente Chisone riportata in **Tabella 1.1** misurata a San Martino (TO).

Anno	**Q** [m^3/s]
1955	55,60
1956	163,00
1957	345,00
1958	79,80
1959	342,00
1960	200,00
1961	124,00
1962	496,00
1963	147,00
1964	83,10
1965	64,90
1966	210,00
1967	18,00
1968	187,00
1969	181,00
1970	43,80
1977	1493,00
1993	230,00
1994	370,00
1997	150,00
1998	170,00
1999	420,00
2000	850,00
2001	220,00
2002	210,00
2003	120,00
2004	80,00
2005	170,00
2006	185,00
2007	160,00
2008	670,00
2009	228,00
2010	365,00

- Tabella 1.1 -

Per tracciare i diagrammi delle frequenze assolute e relative occorre:
(a) ordinare in senso crescente gli elementi x del campione Q
(b) individuare il numero N di dati disponibili
(c) dividere in k classi di uguale ampiezza l'intervallo $[x_{\min},\ x_{\max}]$

i	**Q** [m³/s]
1	18,00
2	43,80
3	55,60
4	64,90
5	79,80
6	80,00
7	83,10
8	120,00
9	124,00
10	147,00
11	150,00
12	160,00
13	163,00
14	170,00
15	170,00
16	181,00
17	185,00
18	187,00
19	200,00
20	210,00
21	210,00
22	220,00
23	228,00
24	230,00
25	342,00
26	345,00
27	365,00
28	370,00
29	420,00
30	496,00
31	670,00
32	850,00
33	1493,00

Numero totale dati campionari:
$N = 33$

Relazione di Sturges:
$$k = \text{int}\left(1 + 3{,}3 \cdot Log_{10}(N)\right) = \text{int}\left(1 + 3{,}3 \cdot Log_{10}(33)\right) = \text{int}(6{,}01) = 6$$

Incremento per calcolare i limiti di classe:
$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{1493 - 18}{6} = 245{,}83$$

Si arrotonda ad un numero intero il Δx, quindi prendiamo intervalli da 250 m³/s.

Classe	**Limiti di classe**			**Freq. Assoluta**	**Freq. relativa**
1	0	-	250	24	0,73
2	250	-	500	6	0,18
3	500	-	750	1	0,03
4	750	-	1000	1	0,03
5	1000	-	1250	0	0,00
6	1250	-	1500	1	0,03

Verifica	**Verifica**
33	1

Frequenza assoluta:
$$F_{a,k} = numero\ x_i \in \left[x_{k,\min}, x_{k,\max}\right]$$

Verifica :
$$\sum F_{a,k} = N$$

Frequenza relativa:
$$F_{r,k} = \frac{F_{a,k}}{N}$$

Verifica :
$$\sum F_{r,k} = 1$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 154

Si calcolano adesso i valori centrali dei momenti campionari:

(a) Media campionaria:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 267,61\ m^3 / s$$

(b) Varianza campionaria:

$$s^2 = \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = 77641,07$$

(c) Varianza campionaria indistorta:

$$s^2 = \sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = 80067,35$$

(d) Scarto quadratico medio:

$$s = sqm = \sigma = \sqrt{s^2} = 282,96$$

(e) Coefficiente di asimmetria (*skewness*):

$$Ca = \gamma = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^3}{s^3} = 2,73$$

(f) Coefficiente di asimmetria indistorto:

$$Ca = \gamma = \frac{N}{(N-1)(N-2)}\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^3}{s^3} = 3,00$$

(g) Coefficiente di appiattimento (*kurtosi*):

$$\kappa_s = \frac{1}{N}\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^4}{s^4} = 11,42$$

Per costruire il diagramma delle frequenze cumulate bisogna:

(a) ordinare in senso crescente gli elementi del campione e associare a ciascun valore il n° d'ordine i

(b) rappresentare la curva relativa alla frequenza di non superamento (frequenza cumulata campionaria) usando l'espressione:

$$\phi(x_i) = \frac{i}{N}$$

Si consideri adesso la serie storica di massimi annui di precipitazione di durata 24h misurata a Pragelato (TO) in **Tabella 1.2**.

Anno	**h** [mm]
1955	30,00
1956	69,80
1957	114,00
1958	41,80
1959	75,00
1961	27,00
1962	113,00
1963	49,60
1964	58,00
1965	60,60
1966	35,00
1969	41,60
1970	36,00
1971	63,00
1972	79,00
1973	106,80
1974	59,60
1975	57,00
1976	80,60
1979	51,00
1980	38,20
1981	139,00
1982	34,20
1984	30,80
1985	49,40
1986	77,00

- Tabella 1.2 -

Per tracciare i diagrammi delle frequenze assolute e relative occorre:

(a) ordinare in senso crescente gli elementi x del campione h

(b) individuare il numero N di dati disponibili

(c) dividere in k classi di uguale ampiezza l'intervallo $[x_{\min},\ x_{\max}]$

i	**h** [mm]
1	27,00
2	30,00
3	30,80
4	34,20
5	35,00
6	36,00
7	38,20
8	41,60
9	41,80
10	49,40
11	49,60
12	51,00
13	57,00
14	58,00
15	59,60
16	60,60
17	63,00
18	69,80
19	75,00
20	77,00
21	79,00
22	80,60
23	106,80
24	113,00
25	114,00
26	139,00

Numero totale dati campionari:

$N = 26$

Relazione di Sturges:

$k = \mathrm{int}\left(1 + 3{,}3 \cdot Log_{10}(N)\right) = \mathrm{int}\left(1 + 3{,}3 \cdot Log_{10}(26)\right) = \mathrm{int}(5{,}66) = 5$

Incremento per calcolare i limiti di classe:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{139 - 27}{5} = 22{,}40$$

Si arrotonda ad un numero intero il Δx, quindi prendiamo intervalli da 25 mm.

Classe	**Limiti di classe**			**Freq. Assoluta**	**Freq. relativa**
1	25	-	50	11	0,42
2	50	-	75	7	0,27
3	75	-	100	4	0,15
4	100	-	125	3	0,12
5	125	-	150	1	0,04

Verifica	**Verifica**
26	1

Frequenza assoluta:

$F_{a,k} = numero\ x_i \in \left[x_{k,\min}, x_{k,\max}\right]$

Verifica :

$\sum F_{a,k} = N$

Frequenza relativa:

$$F_{r,k} = \frac{F_{a,k}}{N}$$

Verifica :

$\sum F_{r,k} = 1$

Si calcolano adesso i valori centrali dei momenti campionari:

(a) Media campionaria:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 62{,}19\ mm$$

(b) Varianza campionaria:

$$s^2 = \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = 830{,}92$$

(c) Varianza campionaria indistorta:

$$s^2 = \sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = 864{,}16$$

(d) Scarto quadratico medio:

$$s = sqm = \sigma = \sqrt{s^2} = 29{,}40$$

(e) Coefficiente di asimmetria (*skewness*):

$$Ca = \gamma = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^3}{s^3} = 0{,}95$$

(f) Coefficiente di asimmetria indistorto:

$$Ca = \gamma = \frac{N}{(N-1)(N-2)}\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^3}{s^3} = 1{,}06$$

(g) Coefficiente di appiattimento (*kurtosi*):

$$\kappa_s = \frac{1}{N}\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^4}{s^4} = 3{,}03$$

Per costruire il diagramma delle frequenze cumulate bisogna:

(a) ordinare in senso crescente gli elementi del campione e associare a ciascun valore il n° d'ordine i

(b) rappresentare la curva relativa alla frequenza di non superamento (frequenza cumulata campionaria) usando l'espressione:

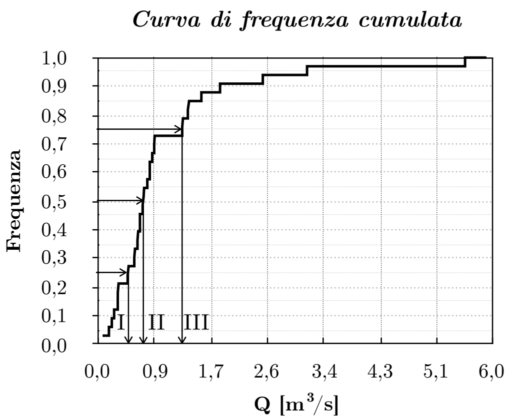
$$\phi(x_i) = \frac{i}{N}$$

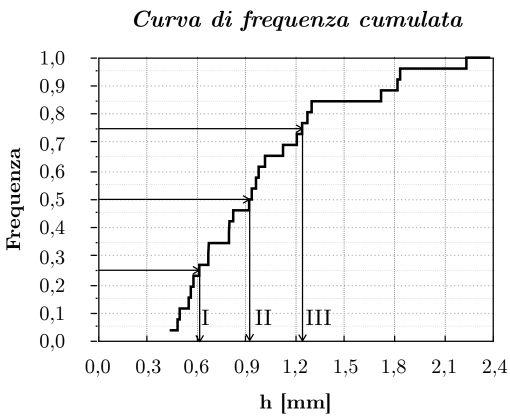
- Serie 1 adimensionalizzata -

i	$\phi(x_i)$	**Q** [m³/s]	**Serie adim.**
1	0,03	18,00	0,07
2	0,06	43,80	0,16
3	0,09	55,60	0,21
4	0,12	64,90	0,24
5	0,15	79,80	0,30
6	0,18	80,00	0,30
7	0,21	83,10	0,31
8	0,24	120,00	0,45
9	0,27	124,00	0,46
10	0,30	147,00	0,55
11	0,33	150,00	0,56
12	0,36	160,00	0,60
13	0,39	163,00	0,61
14	0,42	170,00	0,64
15	0,45	170,00	0,64
16	0,48	181,00	0,68
17	0,52	185,00	0,69
18	0,55	187,00	0,70
19	0,58	200,00	0,75
20	0,61	210,00	0,78
21	0,64	210,00	0,78
22	0,67	220,00	0,82
23	0,70	228,00	0,85
24	0,73	230,00	0,86
25	0,76	342,00	1,28
26	0,79	345,00	1,29
27	0,82	365,00	1,36
28	0,85	370,00	1,38
29	0,88	420,00	1,57
30	0,91	496,00	1,85
31	0,94	670,00	2,50
32	0,97	850,00	3,18
33	1,00	1493,00	5,58

- Serie 2 adimensionalizzata -

i	$\phi(x_i)$	**h** [mm]	**Serie adim.**
1	0,04	27,00	0,43
2	0,08	30,00	0,48
3	0,12	30,80	0,50
4	0,15	34,20	0,55
5	0,19	35,00	0,56
6	0,23	36,00	0,58
7	0,27	38,20	0,61
8	0,31	41,60	0,67
9	0,35	41,80	0,67
10	0,38	49,40	0,79
11	0,42	49,60	0,80
12	0,46	51,00	0,82
13	0,50	57,00	0,92
14	0,54	58,00	0,93
15	0,58	59,60	0,96
16	0,62	60,60	0,97
17	0,65	63,00	1,01
18	0,69	69,80	1,12
19	0,73	75,00	1,21
20	0,77	77,00	1,24
21	0,81	79,00	1,27
22	0,85	80,60	1,30
23	0,88	106,80	1,72
24	0,92	113,00	1,82
25	0,96	114,00	1,83
26	1,00	139,00	2,24





© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 154

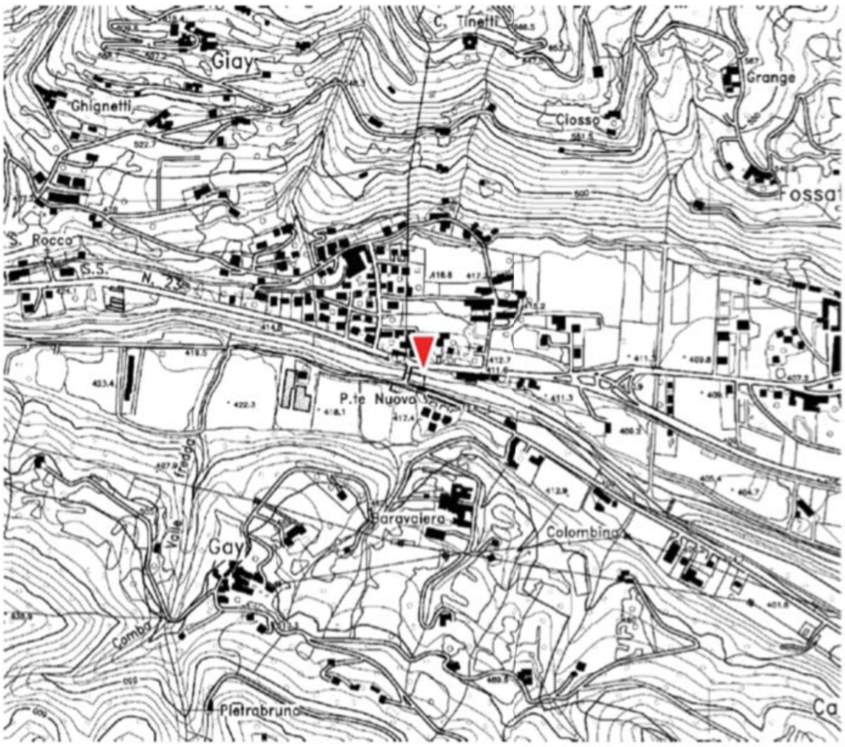
ESERCITAZIONE 2

2.1 Determinazione di massima dell'altezza dei rilevati ariginali in una generica sezione di un corso d'acqua

‣ procedura di inferenza statistica per la stima della piena di progetto

Il problema da affrontare è la determinazione dell'altezza dei rilevati arginali atta a proteggere dalle piene la zona posta poco a monte di un attraversamento stradale sul fiume Chisone (TO) In corrispondenza del ponte, situato in località San Martino, esiste una stazione di misura delle portate delle piene fluviali per assegnate probabilità di superamento (**Figura 2.1**). Per stimare la massima piena di progetto attraverso la procedura di inferenza statistica, si utilizzino diversi tipi di distribuzioni per rappresentare la serie storica dei massimi annui dei colmi di piena osservati alla stazione San Martino del fiume Chisone riportata in **Tabella 1.1**.

Chisone a San Martino



- Figura 2.1 -

• *Funzione di densità di probabilità*

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)^2}$$

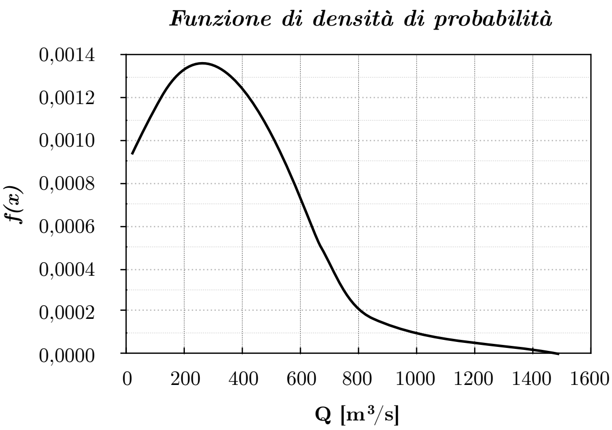
• *Funzione di ripartizione* (*funzione cumulativa di probabilità*)

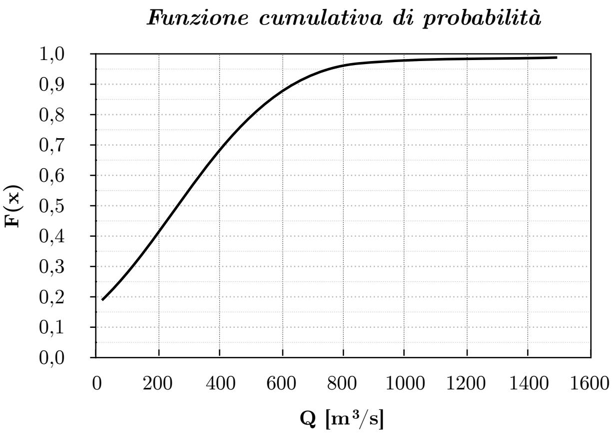
$$F(x) = \frac{1}{\theta_2 \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)^2} dx$$

Scelta la legge probabilistica di tipo Normale da adattare alle osservazioni, occorre determinare i valori dei suoi parametri caratteristici col metodo dei momenti: media $\mu(x)$ e scarto quadratico medio $\sigma(x)$. Per costruire la curva di probabilità cumulata calcoliamo:

$$\mu(x) = \hat{\theta}_1 = \bar{x} = 267,61 \qquad \sigma(x) = \hat{\theta}_2 = sqm = 282,96$$

Q [m^3/s]	$\boldsymbol{f(x)}$	$\mathbf{F(x)}$
18,00	0,000955	0,188850
43,80	0,001031	0,214483
55,60	0,001065	0,226850
64,90	0,001091	0,236874
79,80	0,001131	0,253429
80,00	0,001132	0,253656
83,10	0,001140	0,257177
120,00	0,001231	0,300951
124,00	0,001240	0,305891
147,00	0,001287	0,334963
150,00	0,001293	0,338834
160,00	0,001312	0,351859
163,00	0,001317	0,355801
170,00	0,001328	0,365060
170,00	0,001328	0,365060
181,00	0,001345	0,379768
185,00	0,001351	0,385160
187,00	0,001354	0,387865
200,00	0,001370	0,405574
210,00	0,001381	0,419332
210,00	0,001381	0,419332
220,00	0,001390	0,433188
228,00	0,001396	0,444334
230,00	0,001397	0,447127
342,00	0,001362	0,603682
345,00	0,001358	0,607763
365,00	0,001329	0,634642
370,00	0,001321	0,641266
420,00	0,001220	0,704900
496,00	0,001018	0,790205
670,00	0,000513	0,922495
850,00	0,000170	0,980214
1493,00	1,193504E-07	0,999993





Verifica preliminare

Per la distribuzione Normale si verifica adesso graficamente, l'adattamento della funzione di probabilità al campione utilizzando la carta probabilistica normale. L'idoneità di un dato di legge probabilistica normale (o di altre leggi probabilistiche) a rappresentare le osservazioni disponibili, si può valutare disegnando la spezzata della frequenza cumulata relativa sulle carte probabilistiche, nelle quali tutte le curve di probabilità risultano essere rappresentate da rette. Per costruire questi diagrammi si riportano sulle ascisse i valori della variabile x e sull'altro le probabilità di non superamento e le frequenze cumulate. La probabilità di non superamento di questa legge, ridotta in forma canonica, assume la forma:

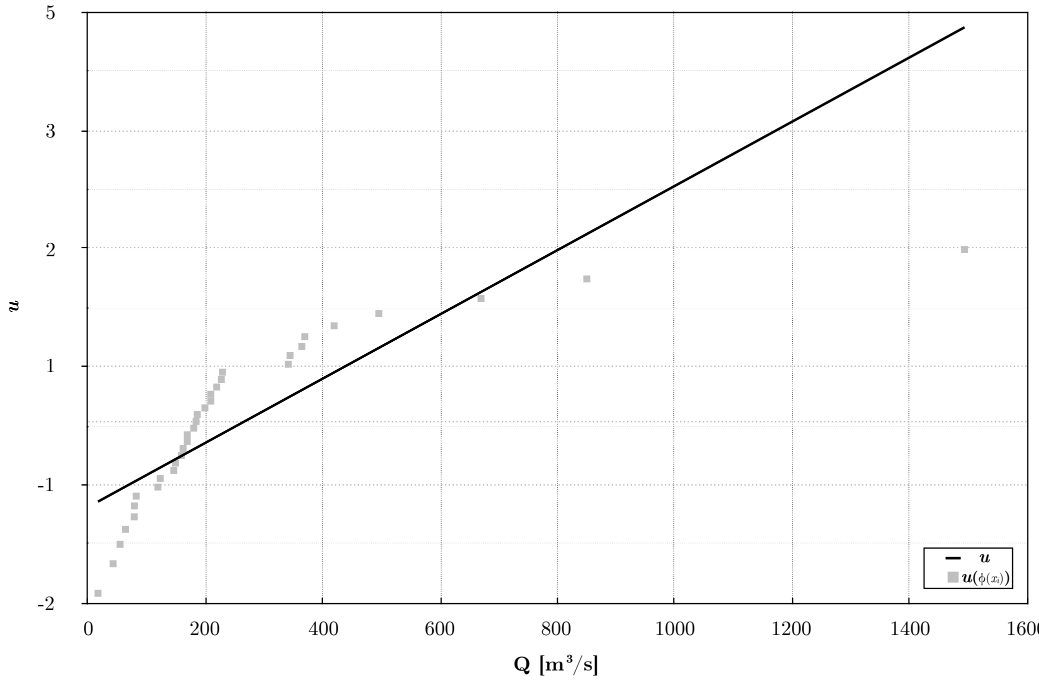
$$P(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{\left[-\frac{u^2}{2}\right]} du$$

con u variabile ridotta legata alla variabile originaria x dalla relazione lineare :

$$u = \frac{x - \theta_1}{\theta_2} \qquad con \;\; \theta_1 = \overline{x} = 267,61; \;\; \theta_2 = 282,96$$

Poiché la frequenza cumulata corrispondente ad un certo valore di x si può considerare come un'approssimazione della sua probabilità, le N osservazioni di un campione si possono rappresentare in carta probabilistica con punti $u(\phi(x_i))$ che hanno come ascisse i valori della x, e come ordinate quelli della frequenza cumulata letti sulla scala delle probabilità. Se i punti rappresentanti le osservazioni si dispongono più o meno lungo una retta, allora la distribuzione a cui la carta si riferisce (in questo caso la distribuzione Normale) è adatta a rappresentare le osservazioni, in caso contrario si prende in considerazione un altro tipo di legge probabilità.

Carta probabilistica Normale



Definizione della condizione di progetto e stima del relativo quantile

L'orizzonte progettuale del rilevato arginale è fissato a N=10 anni. Si calcoli adesso il periodo di ritorno T (numero di prove in anni da attendere mediamente prima di un insuccesso) che deriva dall'assegnare un valore di rischio residuale R_N=5% (probabilità che un'opera progettata con periodo di ritorno T collassi in N anni):

$$R_N = \left[1-\left(1-\Pr(s)\right)^N\right]$$

$$1-F(x) = \Pr(s) = \frac{1}{T} \qquad \textit{con } 1-F(x) = \Pr(s) = \textit{probabilità di superamento o di insuccesso}$$

$$0,05 = \left[1-\left(1-\frac{1}{T}\right)^{10}\right] \Rightarrow 0,95 = \left(1-\frac{1}{T}\right)^{10} \Rightarrow \sqrt[10]{0,95} = 1-\frac{1}{T} \Rightarrow 0,00512 = \frac{1}{T} \Rightarrow T \approx 195 \textit{ anni}$$

Ipotizzando valida la legge di distribuzione Normale, si ricava la portata di progetto:

$$1-F(x) = \Pr(s) = \frac{1}{T} \Rightarrow F(x) = 1-\frac{1}{T} = 1-\frac{1}{195} = 0,99487$$

$$Q_T \approx 994 \; m^3/s$$

F(x)	Q_T [m³/s]
0,99487	993,96

Si calcoli, invece, adesso, il valore di rischio residuale R_N associato ad un periodo di ritorno fissato pari a T=200 anni:

$$1-F(x) = \Pr(s) = \frac{1}{T} = \frac{1}{200} = 0,005$$

$$R_N = \left[1-\left(1-\Pr(s)\right)^N\right] = \left[1-\left(1-0,005\right)^{10}\right] = 4,9\ \%$$

Ipotizzando valida la legge di distribuzione Normale, si ricava la portata di progetto:

$$1-F(x) = \Pr(s) = \frac{1}{T} \Rightarrow F(x) = 1-\frac{1}{T} = 1-\frac{1}{200} = 0,995$$

$$Q_T \approx 996 \; m^3/s$$

F(x)	Q_T [m³/s]
0,995	996,47

Stima dei parametri:

$$\hat{\theta}_1 = \ln(\overline{x}) - \frac{1}{2}\hat{\theta}_2^{\,2} = 5,214$$

$$\hat{\theta}_2 = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma_X^2}{\overline{x}^2}\right)} = 0,866$$

indichiamo con u variabile ridotta legata alla variabile originaria y dalla relazione lineare:

$$u = \frac{y - \hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2}$$

i	**Q** [m³/s]	**Y=ln(*Q*)**	$\boldsymbol{\phi(x_i)}$	**F**(x)	$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{u}(\phi(x_i))$
1	18,00	2,890	0,03	0,0037	-2,6826	-1,8895
2	43,80	3,780	0,06	0,0489	-1,6561	-1,5647
3	55,60	4,018	0,09	0,0837	-1,3807	-1,3517
4	64,90	4,173	0,12	0,1146	-1,2022	-1,1868
5	79,80	4,380	0,15	0,1676	-0,9636	-1,0491
6	80,00	4,382	0,18	0,1683	-0,9607	-0,9289
7	83,10	4,420	0,21	0,1796	-0,9168	-0,8208
8	120,00	4,787	0,24	0,3111	-0,4927	-0,7215
9	124,00	4,820	0,26	0,3246	-0,4548	-0,6289
10	147,00	4,990	0,29	0,3980	-0,2584	-0,5414
11	150,00	5,011	0,32	0,4071	-0,2351	-0,4579
12	160,00	5,075	0,35	0,4362	-0,1606	-0,3774
13	163,00	5,094	0,38	0,4447	-0,1392	-0,2993
14	170,00	5,136	0,41	0,4639	-0,0906	-0,2230
15	170,00	5,136	0,44	0,4639	-0,0906	-0,1480
16	181,00	5,198	0,47	0,4927	-0,0182	-0,0738
17	185,00	5,220	0,50	0,5028	0,0070	0,0000
18	187,00	5,231	0,53	0,5077	0,0194	0,0738
19	200,00	5,298	0,56	0,5386	0,0970	0,1480
20	210,00	5,347	0,59	0,5609	0,1533	0,2230
21	210,00	5,347	0,62	0,5609	0,1533	0,2993
22	220,00	5,394	0,65	0,5820	0,2070	0,3774
23	228,00	5,429	0,68	0,5980	0,2482	0,4579
24	230,00	5,438	0,71	0,6019	0,2583	0,5414
25	342,00	5,835	0,74	0,7631	0,7163	0,6289
26	345,00	5,844	0,76	0,7662	0,7264	0,7215
27	365,00	5,900	0,79	0,7856	0,7914	0,8208
28	370,00	5,914	0,82	0,7902	0,8071	0,9289
29	420,00	6,040	0,85	0,8298	0,9534	1,0491
30	496,00	6,207	0,88	0,8740	1,1454	1,1868
31	670,00	6,507	0,91	0,9322	1,4925	1,3517
32	850,00	6,745	0,94	0,9614	1,7672	1,5647
33	1493,00	7,309	0,97	0,9922	2,4175	1,8895

$\overline{x}$	267,61
s^2	80067,35
s	282,96
γ	3,00
κ_s	11,42

$\overline{y}$	5,221
s^2	0,764
s	0,874
γ	-0,150
κ_s	3,523

$\hat{\theta}_1$	5,214
$\hat{\theta}_2$	0,866

Si stimano adesso le portate di progetto Q_T per valori di periodo di ritorno T pari a:

(a) T=50

Ipotizzando valida la legge di distribuzione Lognormale si ricava:

$$1 - F(x) = \Pr(s) = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad F(x) = 1 - \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{50} = 0{,}98$$
$$Q_T = X_T = \exp\left[\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 \cdot \phi^{-1}\left(F(x)\right)\right] \approx 1090\ m^3/s$$

con $\phi^{-1}(\bullet)$ funzione quantile della funzione di probabilità cumulata della distribuzione normale standard

(b) T=100

Ipotizzando valida la legge di distribuzione Lognormale si ricava:

$$1 - F(x) = \Pr(s) = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad F(x) = 1 - \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{100} = 0{,}99$$
$$Q_T = X_T = \exp\left[\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 \cdot \phi^{-1}\left(F(x)\right)\right] \approx 1380\ m^3/s$$

(c) T=200

Ipotizzando valida la legge di distribuzione Lognormale si ricava:

$$1 - F(x) = \Pr(s) = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad F(x) = 1 - \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{200} = 0{,}995$$
$$Q_T = X_T = \exp\left[\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 \cdot \phi^{-1}\left(F(x)\right)\right] \approx 1712\ m^3/s$$

T	$\mathbf{F}(x)$	Q_T [m^3/s]
50	0,98	1089,49
100	0,99	1379,69
200	0,995	1712,55

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 154

i	**Q** [m³/s]	**Y**=**ln**(Q)	$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x_i})$	$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{u}(\phi(x_i))$
1	18,00	2,890	0,03	-2,6513	-1,8895
2	43,80	3,780	0,06	-1,6338	-1,5647
3	55,60	4,018	0,09	-1,3609	-1,3517
4	64,90	4,173	0,12	-1,1839	-1,1868
5	79,80	4,380	0,15	-0,9475	-1,0491
6	80,00	4,382	0,18	-0,9446	-0,9289
7	83,10	4,420	0,21	-0,9011	-0,8208
8	120,00	4,787	0,24	-0,4807	-0,7215
9	124,00	4,820	0,26	-0,4432	-0,6289
10	147,00	4,990	0,29	-0,2485	-0,5414
11	150,00	5,011	0,32	-0,2254	-0,4579
12	160,00	5,075	0,35	-0,1515	-0,3774
13	163,00	5,094	0,38	-0,1303	-0,2993
14	170,00	5,136	0,41	-0,0822	-0,2230
15	170,00	5,136	0,44	-0,0822	-0,1480
16	181,00	5,198	0,47	-0,0104	-0,0738
17	185,00	5,220	0,50	0,0146	0,0000
18	187,00	5,231	0,53	0,0269	0,0738
19	200,00	5,298	0,56	0,1038	0,1480
20	210,00	5,347	0,59	0,1596	0,2230
21	210,00	5,347	0,62	0,1596	0,2993
22	220,00	5,394	0,65	0,2128	0,3774
23	228,00	5,429	0,68	0,2537	0,4579
24	230,00	5,438	0,71	0,2637	0,5414
25	342,00	5,835	0,74	0,7176	0,6289
26	345,00	5,844	0,76	0,7276	0,7215
27	365,00	5,900	0,79	0,7921	0,8208
28	370,00	5,914	0,82	0,8077	0,9289
29	420,00	6,040	0,85	0,9527	1,0491
30	496,00	6,207	0,88	1,1430	1,1868
31	670,00	6,507	0,91	1,4870	1,3517
32	850,00	6,745	0,94	1,7593	1,5647
33	1493,00	7,309	0,97	2,4038	1,8895

$\overline{x}$	267,61
s^2	80067,35
s	282,96
γ	3,00
κ_s	11,42

$\overline{x}$	5,221
s^2	0,764
s	0,874
γ	-0,150
κ_s	3,523

b_0	267,612
b_1	195,816
b_2	160,860
b_3	139,534

l_1	267,612
l_2	124,020
l_3	57,876
l_4	47,053

$\hat{\theta}_1$	5,208
$\hat{\theta}_2$	0,874
τ	0,463

2.1.3 Distribuzione di Gumbel (EV1)

• *Funzione di densità di probabilità*

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}} e^{-e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}}$$

• *Funzione di ripartizione* (*funzione cumulativa di probabilità*)

$$F(x) = e^{-e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}}$$

Scelta la legge probabilistica di tipo Lognormale da adattare alle osservazioni, occorre determinare i valori dei suoi parametri caratteristici. Sulla base delle osservazioni che costituiscono il campione dato, si calcola la stima $\hat{\theta}$ di un generico parametro θ. La bontà di $\hat{\theta}$ come stimatore di θ dipende da quanto la stima si avvicina al valore del parametro.

Metodo dei momenti

Stima dei parametri:

$$\hat{\theta}_1 = \bar{x} - 0{,}5772 \cdot \sigma \cdot \frac{\sqrt{6}}{\pi} = 140{,}268$$

$$\hat{\theta}_2 = \sigma \cdot \frac{\sqrt{6}}{\pi} = 220{,}624$$

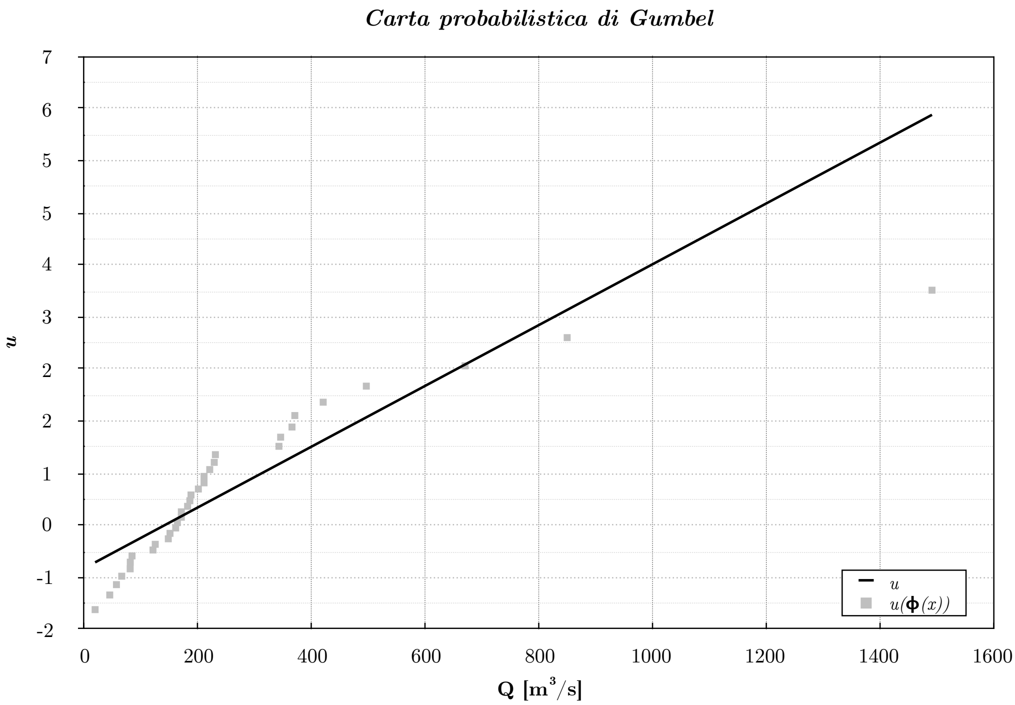
indichiamo con u variabile ridotta legata alla variabile originaria x dalla relazione lineare:

$$u = \frac{x - \hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2}$$

sostituendo otteniamo la rappresentazione $u\left(\phi(x_i)\right)$ dei punti del campione in carta probabilistica:

$$x(F) = \theta_1 - \theta_2\left(\ln\left[-\ln(F)\right]\right) \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\theta_1 - \theta_2\left(\ln\left[-\ln(F)\right]\right) - \theta_1}{\theta_2} \quad \Rightarrow \quad u\left(\phi(x_i)\right) = -\ln\left[-\ln(F)\right]$$

Le N osservazioni del campione vengono ora riportate sulla carta probabilistica di Gumbel:



Ipotizzando valida la legge di distribuzione di Gumbel si stimano adesso le portate di progetto Q_T per valori di periodo di ritorno T pari a:

(a) T=50

$$1 - F(x) = \Pr(s) = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad F(x) = 1 - \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{50} = 0{,}98$$

$$Q_T = X_T = \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 \ln\left[-\ln(F)\right] \approx 1001\ m^3 / s$$

(b) T=100

$$1 - F(x) = \Pr(s) = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad F(x) = 1 - \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{100} = 0{,}99$$

$$Q_T = X_T = \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 \ln\left[-\ln(F)\right] \approx 1155\ m^3 / s$$

(c) T=200

$$1 - F(x) = \Pr(s) = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad F(x) = 1 - \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{200} = 0{,}995$$

$$Q_T = X_T = \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 \ln\left[-\ln(F)\right] \approx 1308\ m^3 / s$$

T	$\mathbf{F}(x)$	Q_T [m³/s]
50	0,98	1001,13
100	0,99	1155,17
200	0,995	1308,65

i	**Q** [m³/s]	$\phi(x_i)$	u	$u(\phi(x_i))$
1	18,00	0,03	-0,8179	-1,2603
2	43,80	0,06	-0,6737	-1,0414
3	55,60	0,09	-0,6077	-0,8870
4	64,90	0,12	-0,5558	-0,7608
5	79,80	0,15	-0,4725	-0,6507
6	80,00	0,18	-0,4714	-0,5508
7	83,10	0,21	-0,4540	-0,4577
8	120,00	0,24	-0,2478	-0,3694
9	124,00	0,26	-0,2255	-0,2845
10	147,00	0,29	-0,0969	-0,2019
11	150,00	0,32	-0,0801	-0,1209
12	160,00	0,35	-0,0242	-0,0406
13	163,00	0,38	-0,0075	0,0394
14	170,00	0,41	0,0316	0,1196
15	170,00	0,44	0,0316	0,2005
16	181,00	0,47	0,0931	0,2827
17	185,00	0,50	0,1155	0,3665
18	187,00	0,53	0,1267	0,4526
19	200,00	0,56	0,1993	0,5414
20	210,00	0,59	0,2552	0,6337
21	210,00	0,62	0,2552	0,7301
22	220,00	0,65	0,3111	0,8317
23	228,00	0,68	0,3558	0,9394
24	230,00	0,71	0,3670	1,0547
25	342,00	0,74	0,9930	1,1793
26	345,00	0,76	1,0097	1,3158
27	365,00	0,79	1,1215	1,4674
28	370,00	0,82	1,1494	1,6391
29	420,00	0,85	1,4289	1,8384
30	496,00	0,88	1,8537	2,0781
31	670,00	0,91	2,8262	2,3819
32	850,00	0,94	3,8322	2,8031
33	1493,00	0,97	7,4259	3,5115

$\overline{x}$	267,61
s^2	80067,35
s	282,96
γ	3,00
κ_s	11,42

$\overline{y}$	5,221
s^2	0,764
s	0,874
γ	-0,150
κ_s	3,523

b_0	267,612
b_1	195,816
b_2	160,860
b_3	139,534

l_1	267,612
l_2	124,020
l_3	57,876
l_4	47,053

$\hat{\theta}_1$	164,338
$\hat{\theta}_2$	178,922

2.1.3 Distribuzione GEV

• *Funzione di densità di probabilità*

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2} e^{-(1-\theta_3)y - e^{-y}}$$

• *Funzione di ripartizione (funzione cumulativa di probabilità)*

$$F(x) = e^{-e^{-y}}$$

$$con \;\; y = \begin{cases} -\theta_3^{-1} \ln\left[1 - \theta_3(x-\theta_1)/\theta_2\right], & \theta_3 \neq 0 \\ (x-\theta_1)/\theta_2, & \theta_3 = 0 \end{cases}$$

Per $\theta_3 = 0$ *la GEV corrisponde ad una distribuzione di Gumbel.*

Scelta la legge probabilistica di tipo GEV da adattare alle osservazioni, occorre determinare i valori dei suoi parametri caratteristici. Sulla base delle osservazioni che costituiscono il campione dato, si calcola la stima $\hat{\theta}$ di un generico parametro θ. La bontà di $\hat{\theta}$ come stimatore di θ dipende da quanto la stima si avvicina al valore del parametro.

Metodo degli L-Momenti

Gli L-momenti, seppur definiti per una distribuzione di probabilità, nella pratica devono essere stimati a partire da campioni finiti. La loro stima è basata su un campione di lunghezza N ordinato in senso crescente (nel caso in esame *Q*). Si definisce stimatore indistorto del momento pesato di probabilità β_r :

$$b_r = \frac{1}{N} \sum_{i=r+1}^{N} \frac{(i-1)(i-2)...(i-r)}{(N-1)(N-2)...(N-r)} \cdot x_{i:N}$$

con $x_{i:N}$ *i – esimo elemento del campione ordinato in senso crescente*

$$b_0 = \overline{x} = 267{,}61$$

$$b_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=2}^{N} \frac{(i-1)}{(N-1)} \cdot x_i = 195{,}816$$

$$b_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=3}^{N} \frac{(i-1)(i-2)}{(N-1)(N-2)} \cdot x_i = 160{,}860$$

$$b_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=4}^{N} \frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \cdot x_i = 139{,}534$$

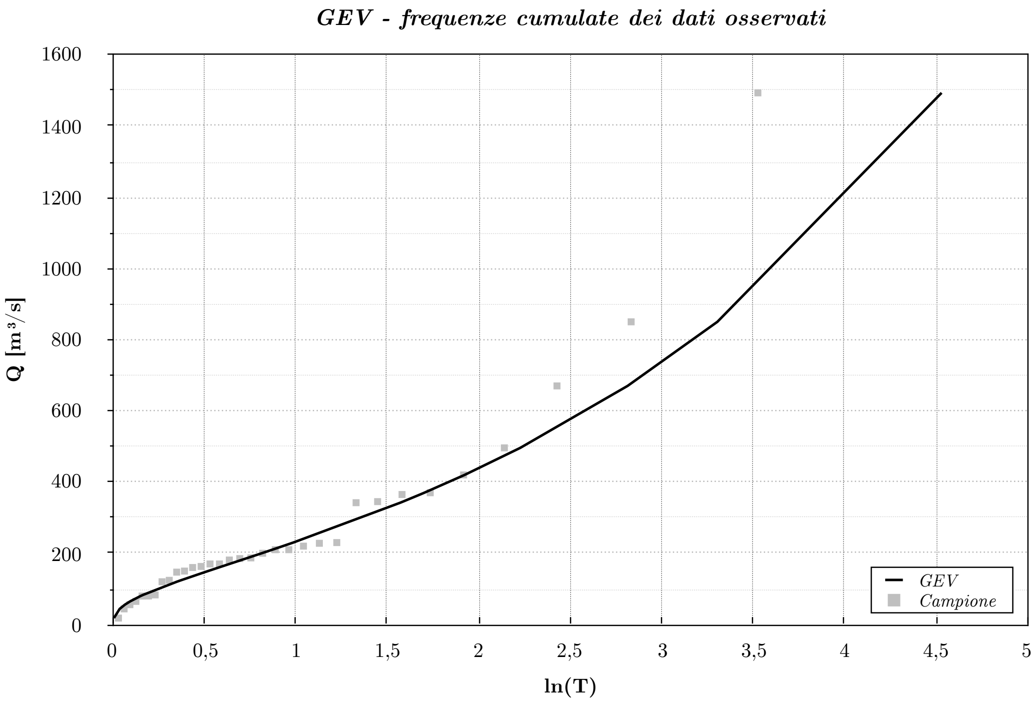
Gli L-momenti campionari sono definiti come:

$$l_1 = b_0 = 267{,}61$$

$$l_2 = 2b_1 - b_0 = 124{,}020$$

$$l_3 = 6b_2 - 6b_1 + b_0 = 57{,}876$$

$$l_4 = 20b_3 - 30b_2 + 12b_1 - b_0 = 47{,}053$$



Ipotizzando valida la legge di distribuzione GEV si stimano adesso le portate di progetto Q_T per valori di periodo di ritorno T pari a:

(a) T=50

$$1 - F(x) = \Pr(s) = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad F(x) = 1 - \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{50} = 0,98$$

$$Q_T = X_T = \hat{\theta}_1 + \frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_3}\left\{1 - \left[-\ln\left(F(x)\right)\right]^{\hat{\theta}_3}\right\} \approx 1128\ m^3/s$$

(b) T=100

$$1 - F(x) = \Pr(s) = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad F(x) = 1 - \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{100} = 0,99$$

$$Q_T = X_T = \hat{\theta}_1 + \frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_3}\left\{1 - \left[-\ln\left(F(x)\right)\right]^{\hat{\theta}_3}\right\} \approx 1543\ m^3/s$$

(c) T=200

$$1 - F(x) = \Pr(s) = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad F(x) = 1 - \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{200} = 0,995$$

$$Q_T = X_T = \hat{\theta}_1 + \frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_3}\left\{1 - \left[-\ln\left(F(x)\right)\right]^{\hat{\theta}_3}\right\} \approx 2096\ m^3/s$$

T	$\mathbf{F}(x)$	Q_T [m³/s]
50	0,98	1128,27
100	0,99	1543,26
200	0,995	2095,72

Si comparino adesso le tre distribuzioni con i relativi periodi di ritorno:

· *Funzione di ripartizione* :

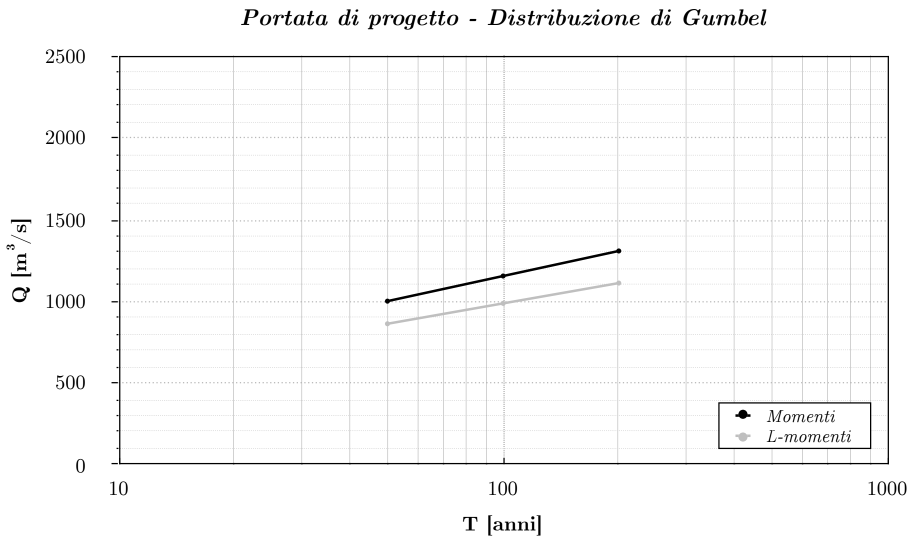
▹ *Lognormale* $$F(x) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\theta_1}{\theta_2}\right)^2} dx$$

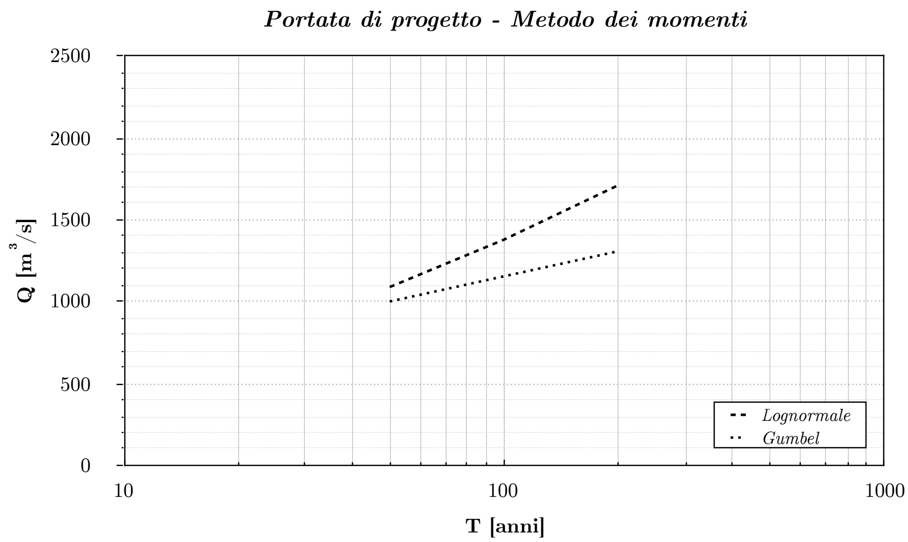
▹ *Gumbel* $$F(x) = e^{-e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}}$$

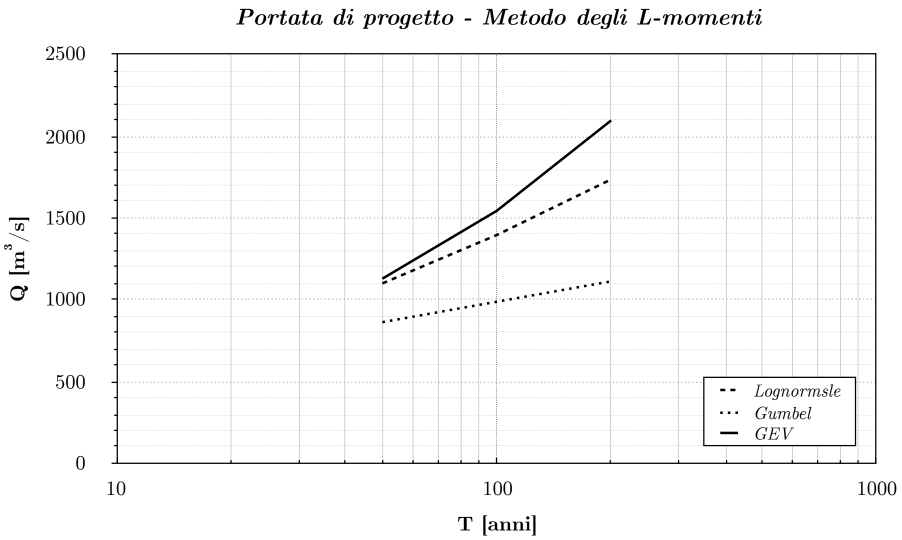
▹ *GEV* $$F(x) = e^{-e^{-y}} \qquad y = -\theta_3^{-1}\ln\left[1-\theta_3(x-\theta_1)/\theta_2\right], \qquad per\ \theta_3 \neq 0$$

· *Periodo di ritorno* : $$T = \frac{1}{1-F(x)}$$

i	**Q**	$\phi(x_i)$	$F(x)_{Log}$	$F(x)_{Gum}$	$F(x)_{GEV}$	$\ln(T)_{Log}$	$\ln(T)_{Gum}$	$\ln(T)_{GEV}$	$\ln(T)_{dati}$
1	18,0	0,03	0,004	0,104	0,005	0,004	0,110	0,005	0,030
2	43,8	0,06	0,050	0,141	0,036	0,051	0,152	0,036	0,061
3	55,6	0,09	0,084	0,159	0,063	0,088	0,174	0,065	0,092
4	64,9	0,12	0,115	0,175	0,089	0,122	0,192	0,094	0,125
5	79,8	0,15	0,168	0,201	0,139	0,184	0,225	0,150	0,159
6	80,0	0,18	0,169	0,201	0,140	0,185	0,225	0,151	0,194
7	83,1	0,21	0,180	0,207	0,151	0,198	0,232	0,164	0,231
8	120,0	0,24	0,310	0,278	0,294	0,371	0,325	0,349	0,268
9	124,0	0,26	0,323	0,286	0,310	0,391	0,336	0,371	0,307
10	147,0	0,29	0,396	0,332	0,395	0,504	0,404	0,502	0,348
11	150,0	0,32	0,405	0,338	0,405	0,519	0,413	0,519	0,391
12	160,0	0,35	0,434	0,359	0,439	0,569	0,445	0,578	0,435
13	163,0	0,38	0,442	0,365	0,449	0,584	0,454	0,596	0,482
14	170,0	0,41	0,461	0,380	0,471	0,618	0,477	0,637	0,531
15	170,0	0,44	0,461	0,380	0,471	0,618	0,477	0,637	0,582
16	181,0	0,47	0,490	0,402	0,504	0,673	0,514	0,702	0,636
17	185,0	0,50	0,500	0,410	0,516	0,692	0,528	0,725	0,693
18	187,0	0,53	0,505	0,414	0,521	0,702	0,535	0,737	0,754
19	200,0	0,56	0,535	0,441	0,556	0,766	0,581	0,813	0,818
20	210,0	0,59	0,557	0,461	0,581	0,815	0,618	0,871	0,887
21	210,0	0,62	0,557	0,461	0,581	0,815	0,618	0,871	0,961
22	220,0	0,65	0,578	0,481	0,605	0,863	0,655	0,928	1,041
23	228,0	0,68	0,594	0,496	0,622	0,902	0,686	0,974	1,128
24	230,0	0,71	0,598	0,500	0,627	0,911	0,693	0,985	1,224
25	342,0	0,74	0,759	0,690	0,792	1,422	1,172	1,571	1,329
26	345,0	0,76	0,762	0,695	0,795	1,435	1,186	1,585	1,447
27	365,0	0,79	0,781	0,722	0,813	1,520	1,280	1,679	1,580
28	370,0	0,82	0,786	0,728	0,818	1,541	1,304	1,702	1,735
29	420,0	0,85	0,826	0,787	0,854	1,747	1,546	1,923	1,917
30	496,0	0,88	0,870	0,855	0,892	2,042	1,931	2,227	2,140
31	670,0	0,91	0,929	0,942	0,940	2,651	2,856	2,814	2,428
32	850,0	0,94	0,959	0,979	0,963	3,204	3,843	3,305	2,833
33	1493,0	0,97	0,992	0,999	0,989	4,772	7,426	4,531	3,526


Portata di progetto - Distribuzione di Gumbel
2500
2000
1500
1000
500
0
Q [m^3/s]
10
100
1000
T [anni]
Momenti
L-momenti


Portata di progetto - Metodo dei momenti
2500
2000
1500
1000
500
0
Q [m^3/s]
10
100
1000
T [anni]
Lognormale
Gumbel


Portata di progetto - Metodo degli L-momenti
2500
2000
1500
1000
500
0
Q [m^3/s]
10
100
1000
T [anni]
Lognormsle
Gumbel
GEV

▹ *Distribuzione Lognormale*

Per il test si utilizza la procedura speditiva proposta per distribuzioni qualsiasi. Si suppone che il valore X_n corrisponda al valore X_{lim}. La condizione limite richiesta dal test è che:

$$F_{X_n}(X_{\lim}) = 1-\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \left[F_X(X_{\lim})\right]^N = 1-\alpha$$

Dato il valore X_n osservato del massimo, il test corrisponde a verificare se:

$$\left[F_X(X_n)\right]^N < 1-\alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad F_X(X_n) < (1-\alpha)^{\frac{1}{N}}$$

se così è il test è superato.

Il valore del *P-value* è:

$$p(X_n) = 1-\left[F_X(X_n)\right]^N$$

Quindi:

$$X_n = \max\left\{x_1, x_2, ..., x_N\right\} = 1493\ m^3/s$$

la distribuzione Lognormale ha una funzione cumulativa :

$$F(x) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\theta_1}{\theta_2}\right)^2} dx$$

▹ *utilizzando la stima dei parametri* $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ *col metodo dei Momenti si ricava per* $X_n = 1493\ m^3/s$

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = 5{,}214 \\ \hat{\theta}_2 = 0{,}866 \end{cases}$$

$$F_X(X_n) = 0{,}9922$$

bisgona verficare che :

$$F_X(X_n) < (1-\alpha)^{\frac{1}{N}}$$

$$0{,}9922 < (1-0{,}05)^{\frac{1}{33}}$$

$$0{,}9922 < 0{,}9984 \quad \Rightarrow \quad \textit{test superato}$$

$$p(X_n) = 1-\left[F_X(X_n)\right]^N = 0{,}228 > \alpha \quad \Rightarrow \quad \textit{test superato}$$

▹ *utilizzando la stima dei parametri* $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ *col metodo degli* $L-$*momenti si ricava per* $X_n = 1493\ m^3/s$

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = 5{,}208 \\ \hat{\theta}_2 = 0{,}874 \end{cases}$$

$$F_X(X_n) = 0{,}9919$$

bisgona verficare che :

$$F_X(X_n) < (1-\alpha)^{\frac{1}{N}}$$

$$0{,}9919 < (1-0{,}05)^{\frac{1}{33}}$$

$$0{,}9919 < 0{,}9984 \quad \Rightarrow \quad \textit{test superato}$$

$$p(X_n) = 1-\left[F_X(X_n)\right]^N = 0{,}236 > \alpha \quad \Rightarrow \quad \textit{test superato}$$

Quindi:

$$X_n = \max\left\{x_1, x_2, ..., x_N\right\} = 1493 \ m^3 / s$$

▷ *utilizzando la stima dei parametri* $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ *col metodo dei Momenti si ricava* :

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = 140,268 \\ \hat{\theta}_2 = 220,624 \\ \theta_1^* = \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 \cdot \ln(N) = 140,268 + 220,624 \cdot \ln(33) = 911,682 \end{cases}$$

bisgona verficare che :

$$X_n < X_{\sup}$$

$$X_{\sup} = \theta_1^* - \hat{\theta}_2 \cdot \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\right] = 1566,98 \ m^3 / s$$

$$1493 < 1566 \quad \Rightarrow \quad test\ superato$$

Invece utilizzando la procedura speditiva per distribuzioni qualsiasi :

$$\left[F_X(X_n)\right]^N < 1-\alpha \quad \Rightarrow \quad \left[e^{-e^{-\frac{1}{\hat{\theta}_2}(X_n - \hat{\theta}_1)}}\right]^N < 1-\alpha \quad \Rightarrow \quad 0,9308 < 0,95 \quad \Rightarrow \quad test\ superato$$

$$p(X_n) = 1 - \left[F_X(X_n)\right]^N = 0,0692 > \alpha \quad \Rightarrow \quad test\ superato$$

▷ *utilizzando la stima dei parametri* $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ *col metodo degli* $L-$*momenti si ricava* :

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = 164,338 \\ \hat{\theta}_2 = 178,922 \\ \theta_1^* = \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 \cdot \ln(N) = 164,338 + 178,922 \cdot \ln(33) = 789,941 \end{cases}$$

bisgona verficare che :

$$X_n < X_{\sup}$$

$$X_{\sup} = \theta_1^* - \hat{\theta}_2 \cdot \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\right] = 1321,376 \ m^3 / s$$

$$1493 > 1321 \quad \Rightarrow \quad test\ non\ superato$$

Invece utilizzando la procedura speditiva per distribuzioni qualsiasi :

$$\left[F_X(X_n)\right]^N < 1-\alpha \quad \Rightarrow \quad \left[e^{-e^{-\frac{1}{\hat{\theta}_2}(X_n - \hat{\theta}_1)}}\right]^N < 1-\alpha \quad \Rightarrow \quad 0,9805 < 0,95 \quad \Rightarrow \quad test\ non\ superato$$

$$p(X_n) = 1 - \left[F_X(X_n)\right]^N = 0,0195 < \alpha \quad \Rightarrow \quad test\ non\ superato$$

▹ *Distribuzione GEV*

Per il test si utilizza la procedura speditiva proposta per distribuzioni qualsiasi. Si suppone che il valore X_n corrisponda al valore X_{lim}. La condizione limite richiesta dal test è che:

$$F_{X_n}(X_{\lim}) = 1-\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \left[F_X(X_{\lim})\right]^N = 1-\alpha$$

Dato il valore X_n osservato del massimo, il test corrisponde a verificare se:

$$\left[F_X(X_n)\right]^N < 1-\alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad F_X(X_n) < (1-\alpha)^{\frac{1}{N}}$$

se così è il test è superato.

Il valore del *P-value* è:

$$p(X_n) = 1 - \left[F_X(X_n)\right]^N$$

Quindi:

$$X_n = \max\{x_1, x_2, ..., x_N\} = 1493\ m^3/s$$

la distribuzione GEV ha una funzione cumulativa :

$$F(x) = e^{-e^{-y}} \qquad con\ \ y = -\theta_3^{-1}\ln\left[1-\theta_3(x-\theta_1)/\theta_2\right]$$

▹ *utilizzando la stima dei parametri* $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ *col metodo degli L – momenti si ricava per* $X_n = 1493\ m^3/s$

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = 139{,}542 \\ \hat{\theta}_2 = 101{,}120 \\ \hat{\theta}_3 = -0{,}416 \end{cases}$$

$$F_X(X_n) = 0{,}9892$$

bisgona verficare che :

$$F_X(X_n) < (1-\alpha)^{\frac{1}{N}}$$

$$0{,}9892 < (1-0{,}05)^{\frac{1}{33}}$$

$$0{,}9892 < 0{,}9984 \quad \Rightarrow \quad test\ superato$$

$$p(X_n) = 1-\left[F_X(X_n)\right]^N = 0{,}3 > \alpha \quad \Rightarrow \quad test\ superato$$

L-Momenti		
X_n	1493,0	
α	0,05	
$\hat{\theta}_1$	139,542	
$\hat{\theta}_2$	101,120	
$\hat{\theta}_3$	-0,416	
y	4,526	
$F(X_n)$	0,9892	
$(1-\alpha)^{\frac{1}{N}}$	0,9984	***Test superato***
$p(X_n)$	0,3	

▹ *Distribuzione Lognormale*

▹ *utilizzando la stima dei parametri* $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ *col metodo dei Momenti* $(s = 2)$:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = 5{,}214 \\ \hat{\theta}_2 = 0{,}866 \end{cases}$$

si procede con l'applicazione del test del χ^2 di Pearson.

Il numero di classi k è :

$$k = \text{int}\left[2 \cdot N^{0,4}\right] = \text{int}\left[2 \cdot 33^{0,4}\right] \approx 8$$

La probabilità che una qualsiasi osservazione ricada nell'intervallo $i-esimo$ $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ è :

$$p_i = \frac{1}{k} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

La cumulata empirica è data dalla relazione :

$$\phi(x_i) = \frac{i}{k}$$

Mentre i quantili per una probabilità $\phi(x_i)$ sono dati dalla relazione :

$$X_{(quantili)} = e^{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 \Phi^{-1}(F)}$$

k	8
α	0,05
$1-\alpha$	0,95
p_i	0,125
Np_i	4,125
s	2
k-s-1	5
k-1	7
$\chi^2_{1-\alpha}(k-s-1)$	11,07
$\chi^2_{1-\alpha}(k-1)$	14,07

i	p_i	$\phi(x_i)$	$X_{quantili}$	*intervalli di classe*		n_i	$N \cdot p_i$	χ^2_i
1	0,125	0,125	67,88	18,00	67,88	4	4,125	0,004
2	0,125	0,250	102,51	67,88	102,51	3	4,125	0,307
3	0,125	0,375	139,53	102,51	139,53	2	4,125	1,095
4	0,125	0,500	183,88	139,53	183,88	7	4,125	2,004
5	0,125	0,625	242,34	183,88	242,34	8	4,125	3,640
6	0,125	0,750	329,84	242,34	329,84	0	4,125	4,125
7	0,125	0,875	498,12	329,84	498,12	6	4,125	0,852
8	0,125	1	1493,00	498,12	1493,00	3	4,125	0,307
							χ^2	12,333

Per $\alpha = 0{,}05$ assegnata si ottengono i valori limiti di χ^2 :

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-s-1) = 11{,}07$$
$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = 14{,}07$$

Si calcola infine il valore della statistica test:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - N \cdot p_i)^2}{N \cdot p_i} = 12{,}33$$

Risulta dunque che :

$$11{,}07 < 12{,}33 < 14{,}07$$

ovvero che :

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-s-1) < \chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(k-1) \qquad \Rightarrow \qquad \textit{Il test non è in grado di fornire una risposta univoca}$$

▹ *Distribuzione di Gumbel*

▹ *utilizzando la stima dei parametri* $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ *col metodo dei Momenti* $(s = 2)$:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = 140,268 \\ \hat{\theta}_2 = 220,624 \end{cases}$$

si procede con l'applicazione del test del χ^2 di Pearson.

Il numero di classi k è :

$$k = \text{int}\left[2 \cdot N^{0,4}\right] = \text{int}\left[2 \cdot 33^{0,4}\right] \approx 8$$

La probabilità che una qualsiasi osservazione ricada nell'intervallo $i - esimo$ $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ è :

$$p_i = \frac{1}{k} = \frac{1}{8} = 0,125$$

La cumulata empirica è data dalla relazione :

$$\phi(x_i) = \frac{i}{k}$$

Mentre i quantili per una probabilità $\phi(x_i)$ sono dati dalla relazione :

$$X_{(quantili)} = \hat{\theta}_1 - \frac{1}{\hat{\theta}_2} \ln\left(-\ln\left(\phi(x_i)\right)\right)$$

Quindi i limiti della classe $i - esima$ saranno allora :

$$x_{i,\inf} = \hat{\theta}_1 - \frac{1}{\hat{\theta}_2} \ln\left(-\ln\left(\frac{i-1}{k}\right)\right); \qquad x_{i,\sup} = \hat{\theta}_1 - \frac{1}{\hat{\theta}_2} \ln\left(-\ln\left(\frac{i}{k}\right)\right)$$

In questo caso la statistica χ^2 assume la forma :

$$\chi^2 = \frac{k}{n} \sum_{i=1}^{k} \left(n_i - \frac{N}{k}\right)^2$$

k	8
α	0,05
$1-\alpha$	0,95
p_i	0,125
Np_i	4,125
s	2
k-s-1	5
k-1	7
$\chi^2_{1-\alpha}(k-s-1)$	11,07
$\chi^2_{1-\alpha}(k-1)$	14,07

i	p_i	$\phi(x_i)$	$X_{quantili}$	*intervalli di classe*		n_i	χ^2_i
1	0,125	0,125	140,26	18,00	140,26	9	23,766
2	0,125	0,250	140,27	140,26	140,27	0	17,016
3	0,125	0,375	140,27	140,27	140,27	0	17,016
4	0,125	0,500	140,27	140,27	140,27	0	17,016
5	0,125	0,625	140,27	140,27	140,27	0	17,016
6	0,125	0,750	140,27	140,27	140,27	0	17,016
7	0,125	0,875	140,28	140,27	140,28	0	17,016
8	0,125	1	1493,00	140,28	1493,00	24	395,016

χ^2	126,273

▷ *Distribuzione GEV*

▷ *utilizzando la stima dei parametri* $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ *col metodo degli* $L-$*Momenti* $(s = 3)$:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = 139,542 \\ \hat{\theta}_2 = 101,12 \\ \hat{\theta}_3 = -0,416 \end{cases}$$

si procede con l'applicazione del test del χ^2 di Pearson.

Il numero di classi k è :

$$k = \text{int}\left[2 \cdot N^{0,4}\right] = \text{int}\left[2 \cdot 33^{0,4}\right] \approx 8$$

La probabilità che una qualsiasi osservazione ricada nell'intervallo $i-esimo$ $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ è :

$$p_i = \frac{1}{k} = \frac{1}{8} = 0,125$$

La cumulata empirica è data dalla relazione :

$$\phi(x_i) = \frac{i}{k}$$

Mentre i quantili per una probabilità $\phi(x_i)$ sono dati dalla relazione :

$$X_{(quantili)} = \hat{\theta}_1 + \frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_3}\left\{1 - \left[-\ln\left(\phi(x_i)\right)\right]^{\hat{\theta}_3}\right\}$$

k	8
α	0,05
$1-\alpha$	0,95
p_i	0,125
Np_i	4,125
s	3
k-s-1	4
k-1	7
$\chi^2_{1-\alpha}(k-s-1)$	9,49
$\chi^2_{1-\alpha}(k-1)$	14,07

i	p_i	$\Phi(x_i)$	$X_{quantili}$	*intervalli di classe*		n_i	$N \cdot p_i$	χ^2_i
1	0,125	0,125	75,72	18,00	75,72	4	4,125	0,004
2	0,125	0,250	108,66	75,72	108,66	3	4,125	0,307
3	0,125	0,375	141,51	108,66	141,51	2	4,125	1,095
4	0,125	0,500	179,58	141,51	179,58	6	4,125	0,852
5	0,125	0,625	229,23	179,58	229,23	8	4,125	3,640
6	0,125	0,750	304,61	229,23	304,61	1	4,125	2,367
7	0,125	0,875	458,10	304,61	458,10	5	4,125	0,186
8	0,125	1	1493,00	458,10	1493,00	4	4,125	0,004
							χ^2	8,455

Per $\alpha = 0,05$ assegnata si ottengono i valori limiti di χ^2 :

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-s-1) = 9,49$$

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = 14,07$$

Si calcola infine il valore della statistica test:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - N \cdot p_i)^2}{N \cdot p_i} = 8,45$$

Risulta dunque che :

$$8,45 < 9,49$$

ovvero che :

$$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(k-s-1) \qquad \Rightarrow \qquad \textit{Il test è superato}$$

▹ *Distribuzione Lognormale*

$A^2 = 0,43$

Dalla tabella si ricava per la distribuzione Lognormale:

$\xi_P = 0,169 \quad \beta_P = 0,229 \quad \eta_P = 1,141$

Poichè $1,2\ \xi_P = 0,2 < A^2$

$$\omega = 0,0403 + 0,116 \cdot \left(\frac{A^2 - \xi_P}{\beta_P} \right)^{\frac{\eta_P}{0,851}} = 0,181$$

per $\alpha = 0,05$:

$\omega_{oss} = 0,181 < \omega_{\lim} = 0,461 \quad \Rightarrow \quad$ *test superato*

▹ *Distribuzione di Gumbel*

A^2=1,51

Dalla tabella si ricava per la distribuzione di Gumbel:

$\xi_P = 0,167 \quad \beta_P = 0,229 \quad \eta_P = 1,147$

Poichè $1,2\ \xi_P = 0,2 < A^2$

$$\omega = 0,0403 + 0,116 \cdot \left(\frac{A^2 - \xi_P}{\beta_P} \right)^{\frac{\eta_P}{0,851}} = 1,299$$

per $\alpha = 0,05$:

$\omega_{oss} = 1,299 < \omega_{\lim} = 0,461 \quad \Rightarrow \quad$ *test non superato*

▹ *Distribuzione GEV*

A^2=0,36

$\xi_P = 0,144 \quad \beta_P = 0,183 \quad \eta_P = 1,198$

Poichè $1,2\ \xi_P = 0,17 < A^2$

$$\omega = 0,0403 + 0,116 \cdot \left(\frac{A^2 - \xi_P}{\beta_P} \right)^{\frac{\eta_P}{0,851}} = 0,187$$

per $\alpha = 0,05$:

$\omega_{oss} = 0,187 < \omega_{\lim} = 0,461 \quad \Rightarrow \quad$ *test superato*

Si riportano adesso nelle tabelle sottostanti tutti i risultati ottenuti dai test:

	Test del Massimo Valore				
	Lognormale		***Gumbel***		**GEV**
	Momenti	L-momenti	Momenti	L-momenti	L-momenti
$\hat{\theta}_1$	5,214	5,208	140,268	164,338	139,542
$\hat{\theta}_2$	0,866	0,874	220,624	178,922	101,120
$\hat{\theta}_3$	-	-	-	-	-0,416
θ^*	-	-	911,682	789,941	-
X_n	1493	1493	1493	1493	1493
α	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
$1-\alpha$	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95
$\left[F_X(X_n)\right]^N$	0,772	0,764	0,931	0,981	0,699
P-value	0,228	0,236	0,069	0,019	0,301
Esito	**OK**	**OK**	**OK**	**NO**	**OK**

	Test di Pearson				
	Lognormale		***Gumbel***		**GEV**
	Momenti	L-momenti	Momenti	L-momenti	L-momenti
$\hat{\theta}_1$	5,214	5,208	140,268	164,338	139,542
$\hat{\theta}_2$	0,866	0,874	220,624	178,922	101,120
$\hat{\theta}_3$	-	-	-	-	-0,416
α	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
$1-\alpha$	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95
k	8	8	8	8	8
p_i	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
$N \cdot p_i$	4,125	4,125	4,125	4,125	4,125
$\chi^2_{1-\alpha}(k-s-1)$	11,07	11,07	11,07	11,07	9,49
$\chi^2_{1-\alpha}(k-1)$	14,07	14,07	14,07	14,07	14,07
χ^2	12,33	12,33	126,27	104,94	8,46
Esito	**N.u.**	**N.u.**	**NO**	**NO**	**OK**

	Test di Anderson-Darling		
	Lognormale	***Gumbel***	**GEV**
α	0,05	0,05	0,05
A^2	0,430	1,510	0,360
ω_{oss}	0,181	1,299	0,187
$\omega_{\lim}$	0,461	0,461	0,461
Esito	**OK**	**NO**	**OK**

	Lognormale		***Gumbel***		**GEV**
Test	Momenti	L-momenti	Momenti	L-momenti	L-momenti
Max Valore	OK	OK	OK	NO	OK
Pearson	n.u.	n.u.	NO	NO	OK
Anderson-Darling	OK		NO		OK

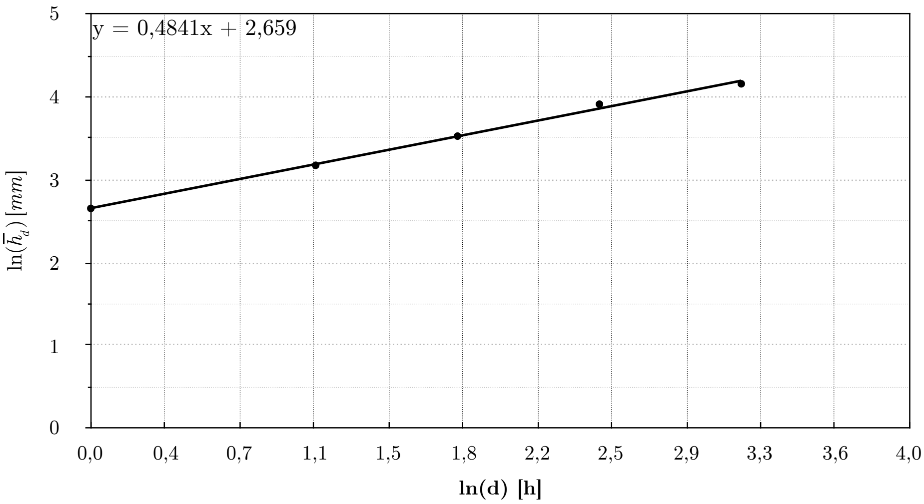
ESERCITAZIONE 3

3.1 Costruzione di pluviogrammi di progetto
▸ stima delle curve di possibilità pluviometrica (IDF)

Si consideri la serie delle altezze di pioggia massima annuale $h(d)$ in [mm] misurate a Pragelato per le durate d=1, 3, 6, 12, 24 ore nel periodo di osservazione che va dal 1955 al 2009.

Anno	**1h**	**3h**	**6h**	**12h**	**24h**
1955	7,8	12,0	18,0	27,0	30,0
1956	11,2	24,2	34,6	57,6	69,8
1957	17,0	31,0	46,8	63,4	114,0
1958	10,0	22,0	30,0	41,6	41,8
1959	15,2	20,0	32,0	59,0	75,0
1960	-	-	-	-	-
1961	11,0	11,0	16,2	20,0	27,0
1962	13,4	32,4	50,4	88,0	113,0
1963	13,2	14,6	23,0	41,8	49,6
1964	22,8	23,0	30,0	46,0	58,0
1965	9,6	18,0	34,0	51,2	60,6
1966	10,8	14,6	17,0	30,0	35,0
...	-	-	-	-	-
1969	13,0	25,0	34,4	41,6	41,6
1970	11,6	20,6	21,8	29,4	36,0
1971	10,0	17,0	27,0	43,0	63,0
1972	9,6	23,0	35,0	67,0	79,0
1973	17,0	39,0	61,8	92,0	106,8
1974	11,2	22,4	39,8	59,0	59,6
1975	30,0	32,0	32,0	47,0	57,0
1976	12,2	15,6	28,4	49,4	80,6
...	-	-	-	-	-
1979	12,6	24,0	40,0	44,6	51,0
1980	12,4	19,4	19,4	25,4	38,2
1981	11,2	28,8	56,4	86,0	139,0
1982	8,0	13,8	24,4	32,0	34,2
1983	-	-	-	-	-
1984	18,0	23,6	24,0	26,8	30,8
1985	16,0	29,0	41,0	49,0	49,4
1986	9,0	15,0	25,2	43,6	77,0
...	-	-	-	-	-
2003	33,0	43,0	43,8	43,8	45,9
2004	9,4	15,2	24,1	38,3	57,3
2005	13,5	32,8	50,8	71,0	78,9
2006	17,4	24,6	37,1	59,7	93,9
2007	9,8	18,2	23,2	37,3	47,9
2008	15,3	35,7	52,7	91,9	124,1
2009	27,7	50,3	50,3	50,3	50,3

Grafico a dispersione delle osservazioni e retta interpolare



Dunque dall'equazione della linea di tendenza calcolata nel grafico si ricavano:

$$y = 0,4841 \cdot x + 2,659 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(\bar{h}_d) = \hat{\gamma}\ln(d) + \hat{\beta}$$

$$\hat{\gamma} = n \quad \Rightarrow \quad \hat{\gamma} = 0,4841 \quad \Rightarrow \quad n = 0,4841$$

$$\hat{\beta} = \ln(a) \quad \Rightarrow \quad \hat{\beta} = 2,659 \quad \Rightarrow \quad \ln(a) = \hat{\beta} \quad \Rightarrow \quad a = e^{\hat{\beta}} = e^{2,659} = 14,282$$

Quindi la relazione altezza-durata delle medie delle precipitazioni massime annue è:

$$\bar{h}_d = 14,282 \cdot d^{0,484}$$

Si calcolano adesso, per ogni durata, i valori centrali dei momenti campionari:

(a) Media campionaria:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

(b) Varianza campionaria indistorta:

$$s^2 = \sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

(c) Scarto quadratico medio:

$$s = sqm = \sigma = \sqrt{s^2}$$

(d) Coefficiente di variazione:

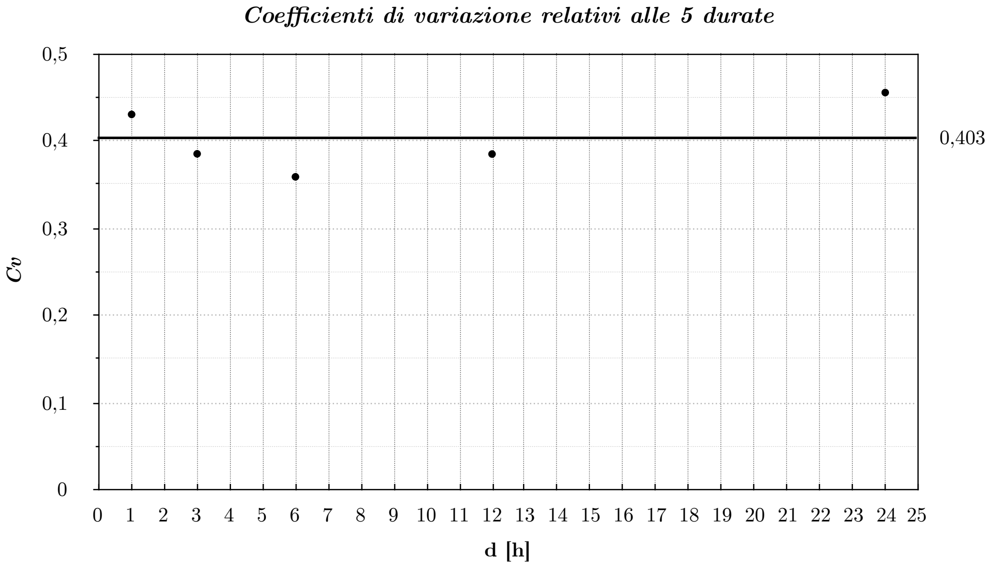
$$CV = \frac{sqm}{\bar{x}}$$

Si rappresenta adesso graficamente i coefficienti di variazione relativi alle 5 durate:

d	**1h**	**3h**	**6h**	**12h**	**24h**
CV	0,430	0,385	0,359	0,385	0,455

CV_{medio}	0,403

con $CV_{medio} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} CV_i$



3.1.2 Modello probabilistico GEV con parametri stimati con gli L-Momenti

Stimatore indistorto del momento pesato di probabilità β_r :

$$b_r = \frac{1}{N}\sum_{i=r+1}^{N} \frac{(i-1)(i-2)...(i-r)}{(N-1)(N-2)...(N-r)} \cdot x_{i:N}$$

con $x_{i:N}$ *i – esimo elemento del campione ordinato in senso crescente*

$$b_0 = \overline{x}$$

$$b_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=2}^{N} \frac{(i-1)}{(N-1)} \cdot x_i$$

$$b_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=3}^{N} \frac{(i-1)(i-2)}{(N-1)(N-2)} \cdot x_i$$

$$b_3 = \frac{1}{N}\sum_{i=4}^{N} \frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \cdot x_i$$

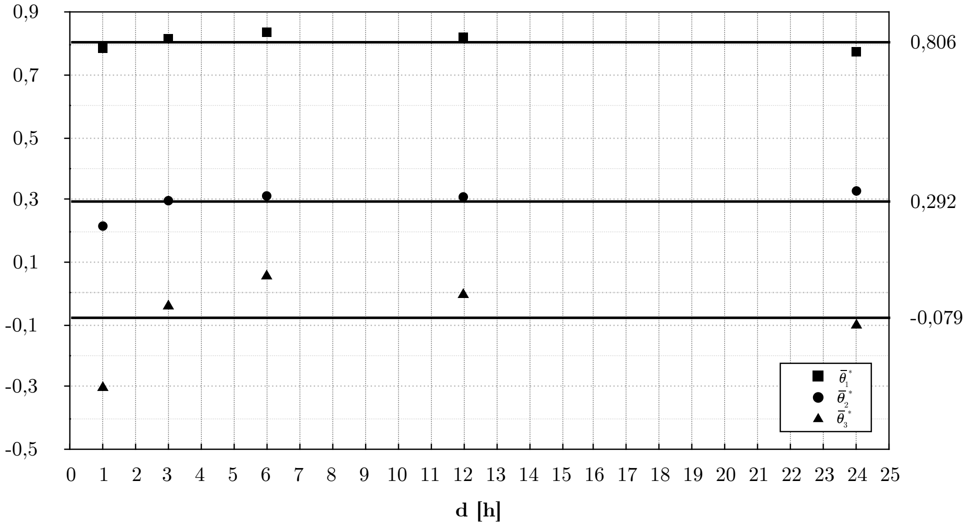
Si rappresenta adesso graficamente i parametri adimensionalizzati in funzione della durata di riferimento:

$$\hat{\theta}_1^* = \frac{\hat{\theta}_1}{\overline{x}}$$
$$\hat{\theta}_2^* = \frac{\hat{\theta}_2}{\overline{x}}$$
$$\hat{\theta}_3^* = \hat{\theta}_3$$

$$con: \ \overline{\theta}^*_{i,medio} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} \hat{\theta}_i^*$$

d	**1h**	**3h**	**6h**	**12h**	**24h**	$\overline{\theta}^*_{medio}$
$\hat{\theta}_1^*$	0,785	0,816	0,836	0,820	0,774	0,806
$\hat{\theta}_2^*$	0,215	0,297	0,312	0,309	0,328	0,292
$\hat{\theta}_3^*$	-0,303	-0,042	0,055	-0,005	-0,103	-0,079

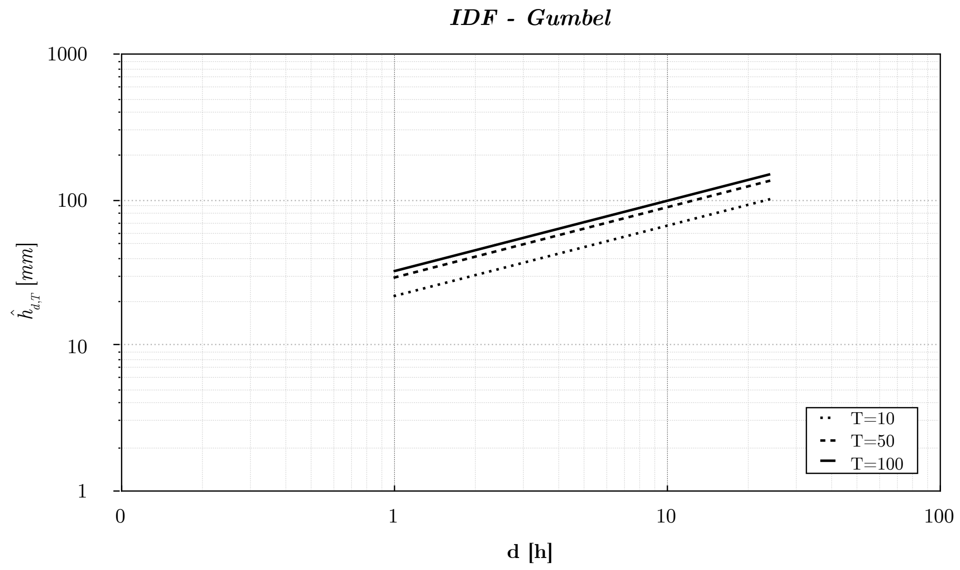
Parametri adimensionalizzati relativi alle 5 durate



Quindi si assumono come valori unici per tutti i parametri i valori medi sulle 5 durate:

$$CV_{medio} = 0,403$$
$$\overline{\theta}_1^* = 0,806$$
$$\overline{\theta}_2^* = 0,292$$
$$\overline{\theta}_3^* = -0,079$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 154

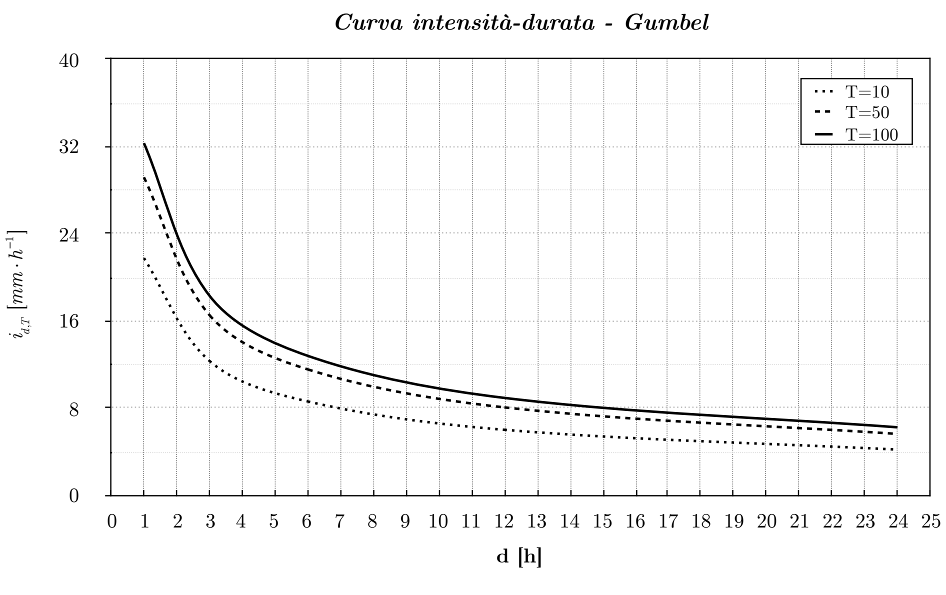


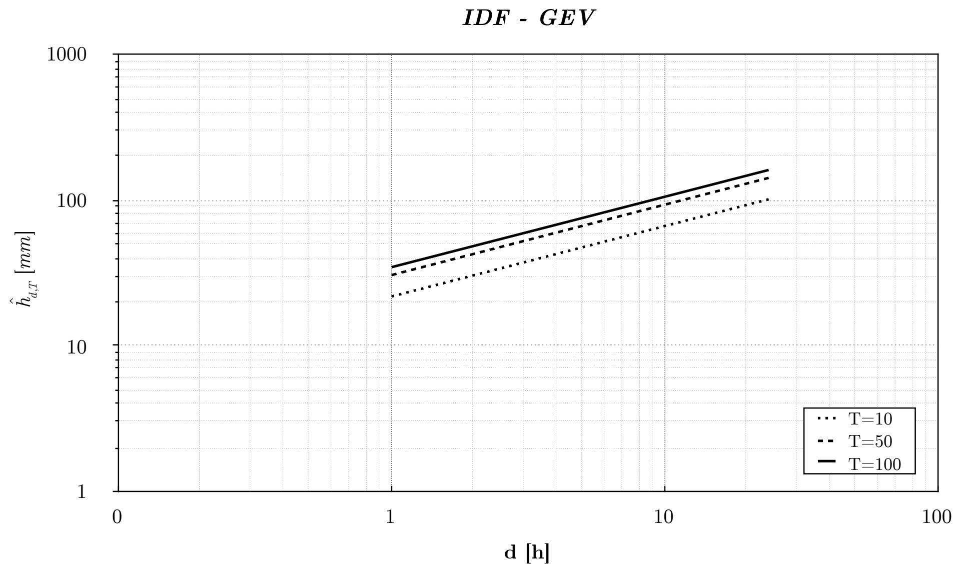
Essendo che l'intensità di pioggia è:

$$i_{d,T} = \frac{\hat{h}_{d,T}}{d} \qquad [mm \cdot h^{-1}]$$

Si può diagrammare l'intensità in funzione delle diverse durate ottenendo:

	d	1	3	6	12	24
	10	21,8	12,4	8,6	6,0	4,2
T	50	29,2	16,6	11,6	8,1	5,7
	100	32,3	18,3	12,8	9,0	6,3



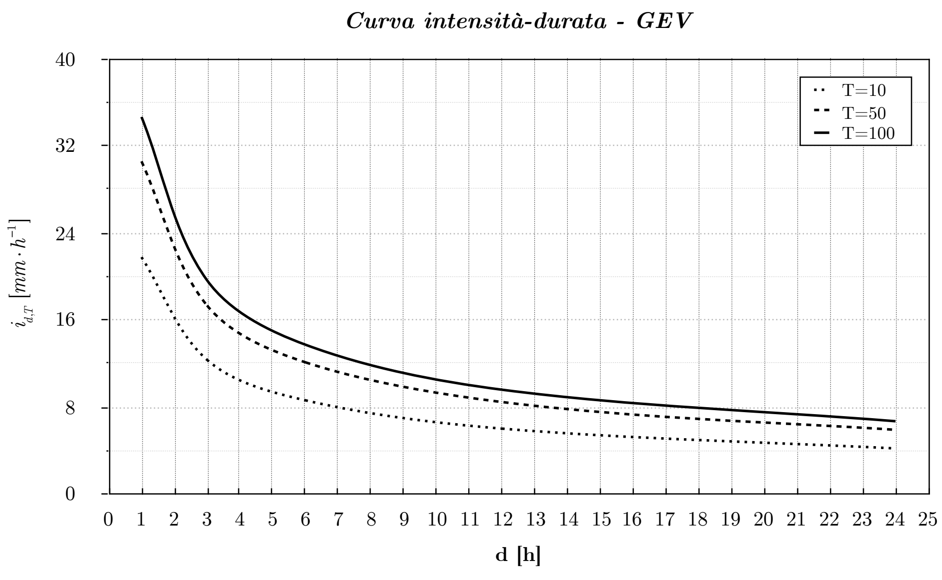


Essendo che l'intensità di pioggia è:

$$i_{d,T} = \frac{\hat{h}_{d,T}}{d} \qquad [mm \cdot h^{-1}]$$

Si può diagrammare l'intensità in funzione delle diverse durate ottenendo:

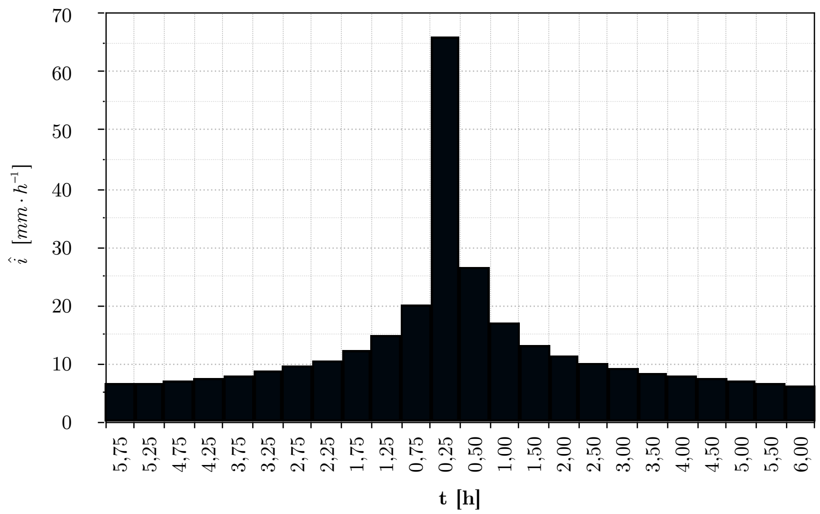
	d	1	3	6	12	24
	10	21,8	12,4	8,6	6,0	4,2
T	50	30,6	17,3	12,1	8,5	5,9
	100	34,6	19,7	13,7	9,6	6,7



j	t_j	$\overline{h}_d$	$\overline{i}_{t_j}$	$\hat{h}_{t_j,100}$	$\hat{i}_{t_j}$
1	0,25	7,3	12,83	16,5	66,1
2	0,50	10,2	12,83	23,1	26,4
3	0,75	12,4	12,83	28,1	20,1
4	1,00	14,3	12,83	32,3	16,8
5	1,25	15,9	12,83	36,0	14,8
6	1,50	17,4	12,83	39,3	13,3
7	1,75	18,7	12,83	42,4	12,2
8	2,00	20,0	12,83	45,2	11,3
9	2,25	21,1	12,83	47,9	10,6
10	2,50	22,3	12,83	50,4	10,0
11	2,75	23,3	12,83	52,8	9,5
12	3,00	24,3	12,83	55,0	9,1
13	3,25	25,3	12,83	57,2	8,7
14	3,50	26,2	12,83	59,3	8,4
15	3,75	27,1	12,83	61,3	8,1
16	4,00	27,9	12,83	63,3	7,8
17	4,25	28,8	12,83	65,1	7,5
18	4,50	29,6	12,83	67,0	7,3
19	4,75	30,4	12,83	68,7	7,1
20	5,00	31,1	12,83	70,5	6,9
21	5,25	31,9	12,83	72,2	6,7
22	5,50	32,6	12,83	73,8	6,6
23	5,75	33,3	12,83	75,4	6,4
24	6,00	34,0	12,83	77,0	6,3

j	t_j	$\hat{i}_{t_j}$
23	5,75	6,4
21	5,25	6,7
19	4,75	7,1
17	4,25	7,5
15	3,75	8,1
13	3,25	8,7
11	2,75	9,5
9	2,25	10,6
7	1,75	12,2
5	1,25	14,8
3	0,75	20,1
1	0,25	66,1
2	0,50	26,4
4	1,00	16,8
6	1,50	13,3
8	2,00	11,3
10	2,50	10,0
12	3,00	9,1
14	3,50	8,4
16	4,00	7,8
18	4,50	7,3
20	5,00	6,9
22	5,50	6,6
24	6,00	6,3

Ietogramma Chicago di progetto a blocchi alternati



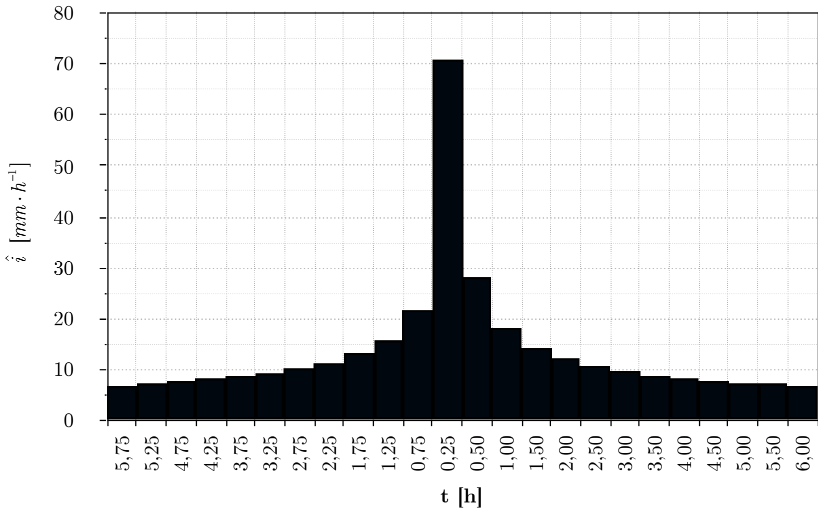
Si ordinano adesso le intensità in senso decrescente e si confrontano con la curva d'intensità media:

$$i_{6,100} = \frac{h_{d,T}}{d} = \frac{h_{6,100}}{6} = \frac{77}{6} = 12,83\ mm \cdot h^{-1}$$

j	t_j	$\overline{h}_d$	$\overline{i}_{t_j}$	$\hat{h}_{t_j,100}$	$\hat{i}_{t_j}$
1	0,25	7,3	13,75	17,7	70,8
2	0,50	10,2	13,75	24,8	28,2
3	0,75	12,4	13,75	30,1	21,5
4	1,00	14,3	13,75	34,6	18,0
5	1,25	15,9	13,75	38,6	15,8
6	1,50	17,4	13,75	42,2	14,2
7	1,75	18,7	13,75	45,4	13,1
8	2,00	20,0	13,75	48,5	12,1
9	2,25	21,1	13,75	51,3	11,4
10	2,50	22,3	13,75	54,0	10,7
11	2,75	23,3	13,75	56,5	10,2
12	3,00	24,3	13,75	59,0	9,7
13	3,25	25,3	13,75	61,3	9,3
14	3,50	26,2	13,75	63,5	9,0
15	3,75	27,1	13,75	65,7	8,6
16	4,00	27,9	13,75	67,8	8,3
17	4,25	28,8	13,75	69,8	8,1
18	4,50	29,6	13,75	71,8	7,8
19	4,75	30,4	13,75	73,7	7,6
20	5,00	31,1	13,75	75,5	7,4
21	5,25	31,9	13,75	77,3	7,2
22	5,50	32,6	13,75	79,1	7,0
23	5,75	33,3	13,75	80,8	6,9
24	6,00	34,0	13,75	82,5	6,7

j	t_j	$\hat{i}_{t_j}$
23	5,75	6,9
21	5,25	7,2
19	4,75	7,6
17	4,25	8,1
15	3,75	8,6
13	3,25	9,3
11	2,75	10,2
9	2,25	11,4
7	1,75	13,1
5	1,25	15,8
3	0,75	21,5
1	0,25	70,8
2	0,50	28,2
4	1,00	18,0
6	1,50	14,2
8	2,00	12,1
10	2,50	10,7
12	3,00	9,7
14	3,50	9,0
16	4,00	8,3
18	4,50	7,8
20	5,00	7,4
22	5,50	7,0
24	6,00	6,7

Ietogramma Chicago di progetto a blocchi alternati



Si ordinano adesso le intensità in senso decrescente e si confrontano con la curva d'intensità media:

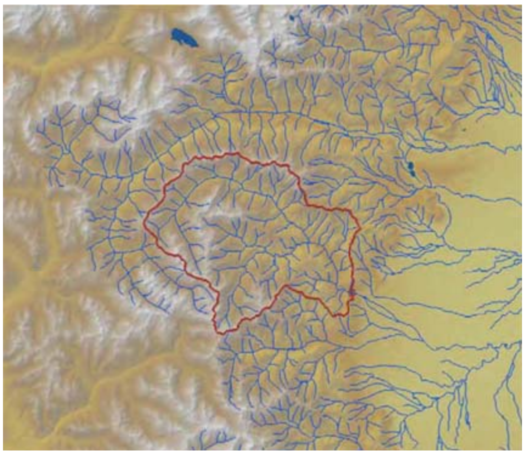
$$i_{6,100} = \frac{h_{d,T}}{d} = \frac{h_{6,100}}{6} = \frac{82,5}{6} = 13,75\ mm \cdot h^{-1}$$

ESERCITAZIONE 4

4.1 Stima dei valori di piena di progetto mediante l'idrogramma di piena

4.1.1 Stima dell'idrogramma di piena lordo con il metodo cinematico

Di seguito sono riportate le caratteristiche morfometriche del bacino del Chisone a San Martino desunte dall'Atlante dei bacini imbriferi piemontesi:



est (UTM32N WGS84)	364406	nord (UTM32N WGS84)	4971647
est DEM (UTM32N WGS84)	363869	nord DEM (UTM32N WGS84)	4971770
area bacino	580.53	quota media	1739
quota massima	3234	quota minima	415
curva ipsografica 2,5%	2742	curva ipsografica 5%	2647
curva ipsografica 10%	2520	curva ipsografica 25%	2224
curva ipsografica 50%	1773	curva ipsografica 75%	1276
curva ipsografica 90%	878	curva ipsografica 95%	711
curva ipsografica 97,5%	603	distanza interquartile curva ipsografica	948
angolo di esposizione medio	140	lunghezza vettore orientamento	17.7
pendenza bacino	24.294	pendenza bacino quadrato equivalente	11.281
est baricentro (UTM32N WGS84)	348550	nord baricentro (UTM32N WGS84)	4980550
fattore di forma	0.175	rapporto di allungamento	0.473
media funzione di ampiezza	29077	varianza funzione di ampiezza	1.65×10^{8}
skewness funzione di ampiezza	0.007	kurtosis funzione di ampiezza	2.457
rapporto aree medie di due ordini adiacenti	4.672	rapporto di biforcazione	4.151
rapporto lunghezze medie di due ordini adiacenti	2.11	rapporto pendenze medie di due ordini adiacenti	2.019
densità di drenaggio	0.572	diametro topologico	62
lunghezza LDP	57.524	lunghezza asta principale	56.276
lunghezza totale reticolo idrografico	332	lunghezza media versanti	754
pendenza media LDP	6	media dell'afflusso totale annuo	1048
deviazione standard dell'afflusso totale annuo	150	media coeff. pluviale orario CPP	17.438
dev. standard coeff. pluviale orario CPP	3.371	media esponente CPP	0.506

Si rappresenta ora la *curva ipsometrica*, ovvero la curva ipsografica normalizzata. Nella normalizzazione si riportano le variabili da un certo grado di evoluzione generico a un grado di evoluzione tra 0 e 1:

sulle ascisse si ha:

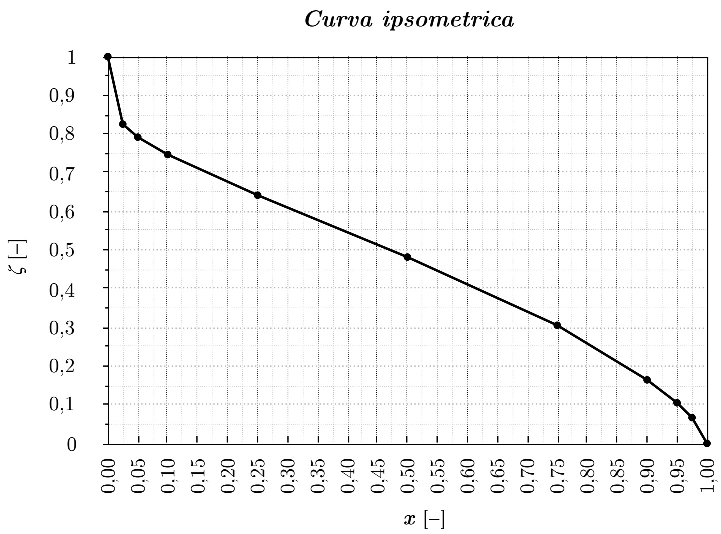
$$x(z) = \frac{a_s(z)}{A_{bacino}} \quad [-]$$

sulle ordinate si ha la quota relativa:

$$\zeta = \frac{z_i - z_{\min}}{\Delta z} \quad [-]$$

$$dove: \quad \Delta z = z_{\max} - z_{\min} = 3234 - 415 = 2819\ m$$

x	z	ζ
0	3234	1,00
0,025	2742	0,83
0,05	2647	0,79
0,1	2520	0,75
0,25	2224	0,64
0,5	1773	0,48
0,75	1276	0,31
0,9	878	0,16
0,95	711	0,11
0,975	603	0,07
1	415	0,00



Si ricercano adesso sulla curva ipsometrica i valori delle k aree (k=6) a_j sovrastanti i valori ottenuti dividendo il rilievo del bacino ($z_{\max}$ - $z_{\min}$) in k dislivelli uguali.
Per suddividere il rilievo del bacino in k = 6 intervalli si calcola l'incremento ∂z :

$$\partial z = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{k} = \frac{\Delta z}{k} = \frac{2819}{6} = 469,83\ m$$

Si ottengono così:

	Intervalli			
j	z		ζ	
1	415	884,83	0,00	0,17
2	884,83	1354,67	0,17	0,33
3	1354,67	1824,50	0,33	0,50
4	1824,50	2294,33	0,50	0,67
5	2294,33	2764,17	0,67	0,83
6	2764,17	3234	0,83	1,00

Si stima adesso, attraverso la formula di Giandotti, il *tempo di corrivazione* t_c, ovvero il tempo che occorre alla generica goccia di pioggia caduta nel punto idraulicamente più lontano a raggiungere la sezione di chiusura del bacino in esame (tempo di percorrenza dell'asta principale):

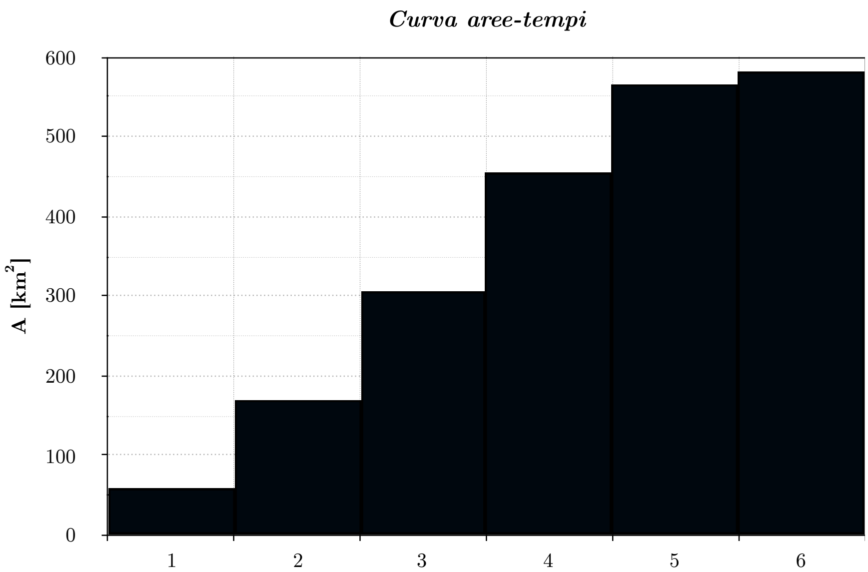
$$t_c \propto \frac{L}{v_{media}}$$

$$t_c = \frac{4 \cdot \sqrt{A_{bacino}} + 1,5 \cdot L}{0,8 \cdot \sqrt{z_{med} - z_{\min}}} = 6,28 \approx 6\ h$$

Secondo l'ipotesi isocorrive=isoipse (isocorrive=luogo dei punti del bacino che originano un percorso idrico che impiega lo stesso tempo - isoipse=curve di livello), si costruisce adesso la *curva aree tempi*, usando come base dei tempi la stima del tempo di corrivazione t_c :

$$A_i = A_{bacino} - a_j$$

t	***A***
1	59,50
2	168,13
3	306,82
4	456,10
5	566,67
6	580,53



Utilizzando la curva IDF (già determinata per la stazione di Pragelato - ***Esercitazione* 3**), scegliendo un fattore di scala K_{100} sulla funzione di Gumbel, si costruisce lo ietogramma di progetto con il metodo degli alternating blocks Chicago discretizzato) per una durata di pioggia t_p pari al tempo di corrivazione t_c.

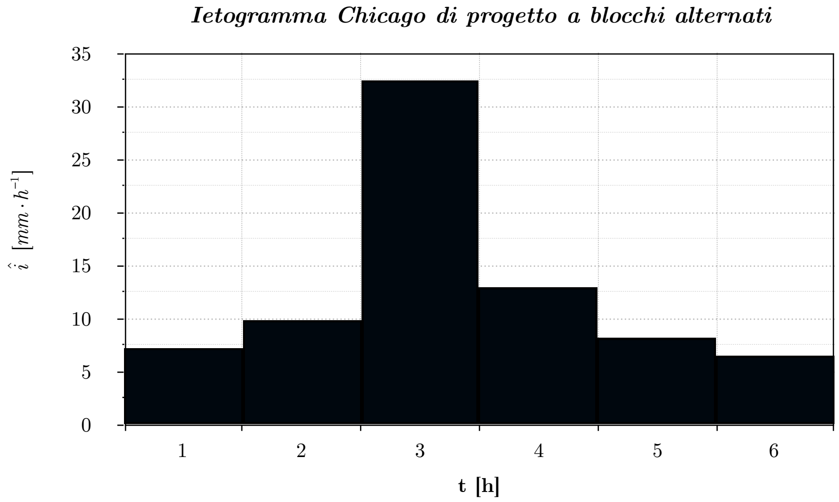
▷ *Distribuzione di Gumbel*

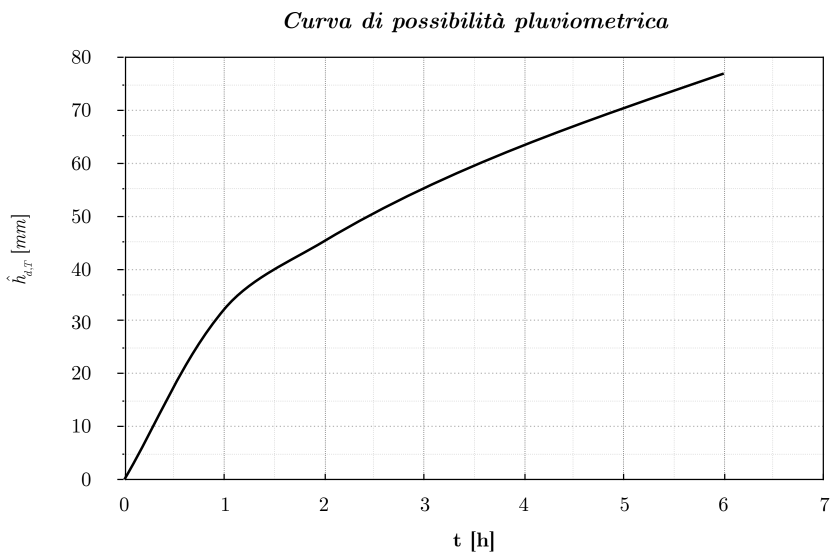
Si utilizza la legge di Gumbel nella forma di dipendenza da media e coefficiente di variazione:

$$\hat{h}_{d,T} = \overline{h}_d \left\{ 1 - CV_{medio} \left[0,45 + \frac{\sqrt{6}}{\pi} \ln \left[\ln \left(\frac{T}{T-1} \right) \right] \right] \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{h}_{d,T} = \overline{h}_d \cdot K_T$$

Riorganizzando le i col metodo dei blocchi alternati di Chicago (picco al centro) si ha:

j	t_j	$\hat{i}_{t_j}$
1	1	7,22
2	2	9,81
3	3	32,34
4	4	12,89
5	5	8,22
6	6	6,50





Si associano le intensità i_j con U_j:

j	$\hat{i}_j$
1	7,22
2	9,81
3	32,34
4	12,89
5	8,22
6	6,50

j	U_j
1	0,102
2	0,187
3	0,239
4	0,257
5	0,190
6	0,024

E si dispongono come rappresentato nella tabella sottostante; si calcolano poi le portate specifiche q_k:

k	$\hat{i}_j$	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	q_k
1	i_1	i_1U_1	-	-	-	-	-	$q_1=\sum i\cdot U$
2	i_2	i_2U_1	i_1U_2	-	-	-	-	$q_2=\sum i\cdot U$
3	i_3	i_3U_1	i_2U_2	i_1U_3	-	-	-	$q_3=\sum i\cdot U$
4	i_4	i_4U_1	i_3U_2	i_2U_3	i_1U_4	-	-	$q_4=\sum i\cdot U$
5	i_5	i_5U_1	i_4U_2	i_3U_3	i_2U_4	i_1U_5	-	$q_5=\sum i\cdot U$
6	i_6	i_6U_1	i_5U_2	i_4U_3	i_3U_4	i_2U_5	i_1U_6	$q_6=\sum i\cdot U$
7		-	i_6U_2	i_5U_3	i_4U_4	i_3U_5	i_2U_6	$q_7=\sum i\cdot U$
8		-	-	i_6U_3	i_5U_4	i_4U_5	i_3U_6	$q_8=\sum i\cdot U$
9		-	-	-	i_6U_4	i_5U_5	i_4U_6	$q_9=\sum i\cdot U$
10		-	-	-	-	i_6U_5	i_5U_6	$q_{10}=\sum i\cdot U$
11		-	-	-	-	-	i_6U_6	$q_{11}=\sum i\cdot U$
12		-	-	-	-	-	-	$q_{12}=\sum i\cdot U$

			U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	q_k
k		$\hat{i}_j$	0,102	0,187	0,239	0,257	0,190	0,024	[mm/h]
1	i_1	7,22	0,73965	-	-	-	-	-	0,74
2	i_2	9,81	1,00535	1,35034	-	-	-	-	2,36
3	i_3	32,34	3,31421	1,83542	1,72410	-	-	-	6,87
4	i_4	12,89	1,32142	6,05060	2,34345	1,85571	-	-	11,57
5	i_5	8,22	0,84294	2,41245	7,72535	2,52233	1,37446	-	14,88
6	i_6	6,50	0,66655	1,53891	3,08020	8,31506	1,86820	0,17229	15,64
7			-	1,21688	1,96486	3,31532	6,15868	0,23417	12,89
8			-	-	1,55371	2,11485	2,45555	0,77197	6,90
9			-	-	-	1,67231	1,56640	0,30780	3,55
10			-	-	-	-	1,23862	0,19634	1,43
11			-	-	-	-	-	0,15526	0,16
12			-	-	-	-	-	-	0,00

4.2 Stima dell'idrogramma di piena dalle piogge nette

Si utilizzano il metodo cinematico con ipotesi isocorrive=isoipse e i due metodi di assorbimento semplificati per pervenire alla stima indiretta della Q_{100} nella sezione del Chisone a S. Martino.

4.2.1 Pluviogramma lordo areale

Per costruire la curva IDF media si ricavano il coefficiente pluviale orario media a (CPP) e l'esponente n dalla tabella (utilizzata in precedenza) dell'atlante dei bacini imbriferi piemontesi:

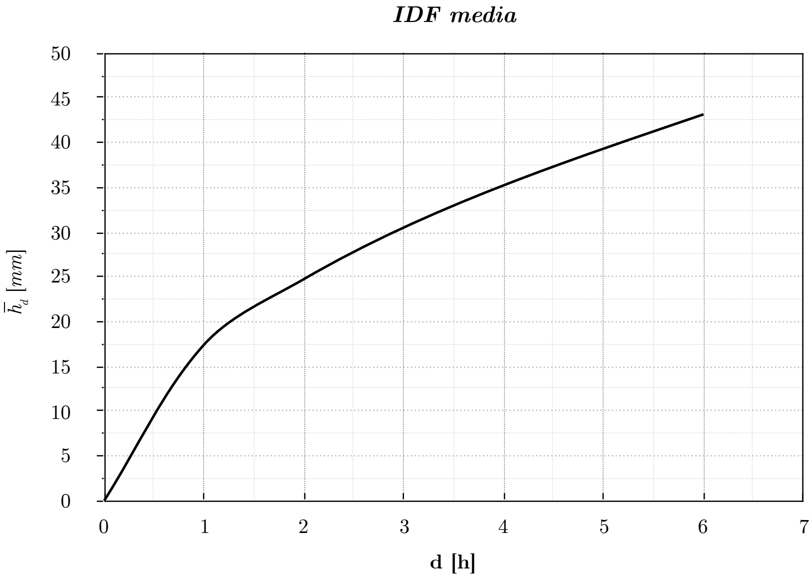
$$\begin{cases} a = 17,438 \\ n = 0,506 \end{cases}$$

$$\hat{h}_d = \overline{h}_d \cdot K(T)$$

$$per \quad K(T) = 1 \quad si\ ha:$$

$$\hat{h}_d = \overline{h}_d = a \cdot d^n$$

t	$\overline{h}_d$
1	17,44
2	24,76
3	30,40
4	35,17
5	39,37
6	43,18



Nota la IDF si costruisce il corrispondente pluviogramma lordo con il metodo di Chicago discretizzato, considerando un tempo di pioggia t_p=6 h ed intervalli Δt=1h. Si dispongono poi le intensità parziali di pioggia in ordine temporale usando 3 forme:

(1) picco iniziale (ietogramma decrescente)
(2) picco finale (ietogramma crescente)
(3) picco centrale (ietogramma quasi-simmetrico)

Intensità di pioggia:

$$i_j = \frac{\overline{h}_j - \overline{h}_{j-1}}{\Delta t} \qquad con \quad \Delta t = 1\,h$$

4.2.2 Pluviogramma netto

Si effettua adesso la stessa valutazione indiretta di Q_T in un sottobacino di quello per il quale in esame, applicando due metodi di assorbimento semplificati: Ψ *e* $SCS - CN$.

(a) Metodo Ψ

Si procede con la taratura di Ψ sul bacino chiuso a San Martino. Si ricerca quel valore del coefficiente d'afflusso tale per cui si ottiene un idrogramma che ha portata al colmo uguale alla media campionaria dei massimi delle osservazioni disponibili per il Chisone a San Martino (**Tabella 1.1**). Col metodo percentuale, l'altezza di pioggia netta è valutata come percentuale dell'altezza totale di pioggia caduta nello stesso tempo (coefficiente d'afflusso). La stima di Ψ si può ottenere da un bilancio di volumi:

$$\Psi = \frac{Volume\ di\ deflusso\ superficiale}{Volume\ di\ precipitazione} \qquad [-]$$

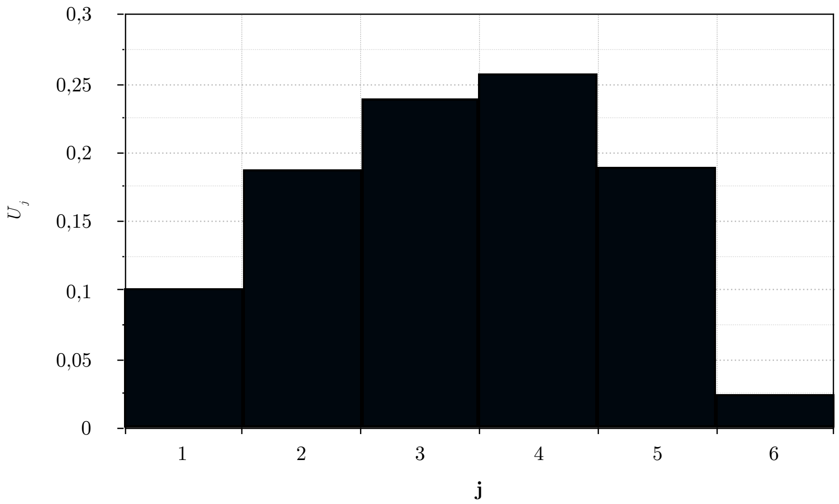
In precedenza (dalla **Tabella 1.1**) si era ricavata la media campionaria dei massimi delle osservazioni disponibili:

$$\bar{Q} = 267{,}61\ m^3/s$$

Dunque, partendo dai 3 ietogrammi lordi medi ricavati in precedenza (aventi K(T)=1), si ricavano le portate al colmo dagli idrogrammi ottenuti attraverso il metodo della corrivazione. Per applicare il metodo si riportano i risultati ottenuti dell'idrogramma unitario.

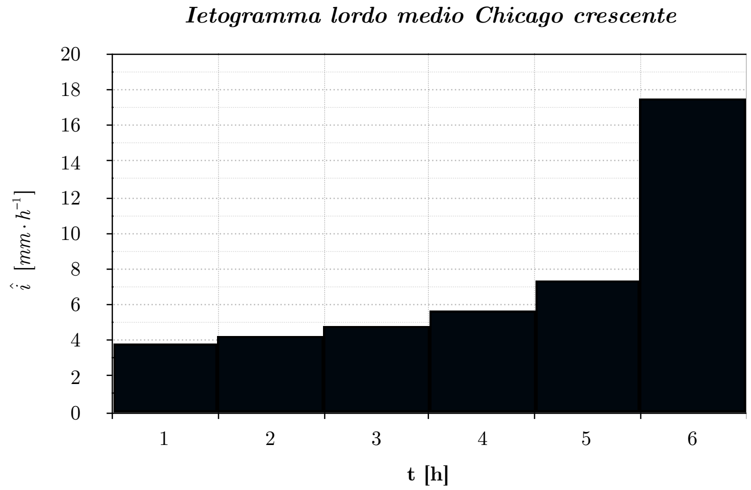
j	ζ	x	a_j	A_j	U_j
1	0	1	580,53	59,50	0,102
2	0,17	0,898	521,03	108,63	0,187
3	0,33	0,710	412,40	138,69	0,239
4	0,50	0,471	273,71	149,28	0,257
5	0,67	0,214	124,43	110,57	0,190
6	0,83	0,024	13,86	13,86	0,024

Idrogramma unitario



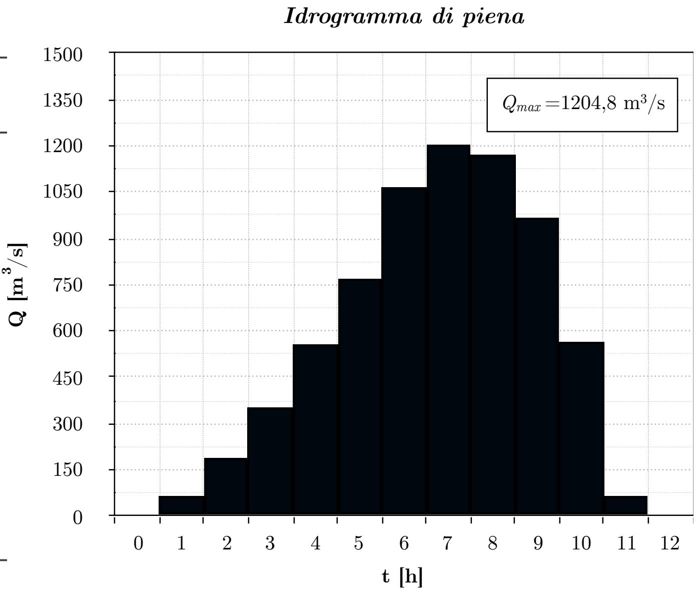
(2) Ietogramma crescente (picco finale)

t	$\bar{h}_d$	i
1	17,44	3,80
2	24,76	4,20
3	30,40	4,76
4	35,17	5,64
5	39,37	7,33
6	43,18	17,44



k		$\hat{i}_j$	U_1 0,102	U_2 0,187	U_3 0,239	U_4 0,257	U_5 0,190	U_6 0,024	q_k [mm/h]
1	i_1	3,80	0,38998	-	-	-	-	-	0,39
2	i_2	4,20	0,43084	0,71197	-	-	-	-	1,14
3	i_3	4,76	0,48828	0,78657	0,90904	-	-	-	2,18
4	i_4	5,64	0,57800	0,89144	1,00428	0,97843	-	-	3,45
5	i_5	7,33	0,75085	1,05523	1,13818	1,08094	0,72469	-	4,75
6	i_6	17,44	1,78728	1,37079	1,34731	1,22506	0,80062	0,09084	6,62
7			-	3,26295	1,75021	1,45016	0,90736	0,10036	7,47
8			-	-	4,16611	1,88381	1,07408	0,11374	7,24
9			-	-	-	4,48412	1,39528	0,13463	6,01
10			-	-	-	-	3,32124	0,17489	3,50
11			-	-	-	-	-	0,41631	0,42
12			-	-	-	-	-	-	0,00

A_{bacino} [km²]	q_k [mm/h]	Q_k [m³/s]	t [h]
580,53	0	0	0
580,53	0,390	62,9	1
580,53	1,143	184,3	2
580,53	2,184	352,2	3
580,53	3,452	556,7	4
580,53	4,750	766,0	5
580,53	6,622	1067,8	6
580,53	7,471	1204,8	7
580,53	7,238	1167,1	8
580,53	6,014	969,8	9
580,53	3,496	563,78	10
580,53	0,416	67,13	11
580,53	0	0	12



Sapendo che la media campionaria dei massimi delle osservazioni disponibili è:

$$\bar{Q} = 267,61\ m^3 / s$$

la stima di Ψ si può ottenere dal bilancio di volumi:

$$\Psi = \frac{Volume\ di\ deflusso\ superficiale}{Volume\ di\ precipitazione}$$

ovvero:

$$\Psi = \frac{\bar{Q}}{Q_{i,\max}}$$

Si ottiene dunque:

Idrogramma	Q_{max} [m³/s]	Ψ [–]
crescente	1269,9	0,21
decrescente	1204,8	0,22
quasi-simmetrico	1401,4	0,19

Si confrontano le 3 tarature di Ψ appena ottenute col valore di Ψ ricavato con la formula razionale:

$$Q_T = \Psi \cdot i_{d,T} \cdot \frac{A}{3,6}$$

si ipotizza che si abbia portata al colmo uguale alla media campionaria dei massimi delle osservazioni e si considera una intensità di pioggia media:

$$\bar{Q} = \Psi \cdot \bar{i}_{d,T} \cdot \frac{A}{3,6}$$

$$con: \quad \bar{i}_{d,T} = a \cdot d^{n-1} = 17,438 \cdot 6^{0,506-1} = 7,196\ mm \cdot h^{-1}$$

Dunque:

$$\bar{Q} = \Psi \cdot \bar{i}_{d,T} \cdot \frac{A_{bacino}}{3,6} \qquad \Rightarrow \qquad \Psi = \frac{3,6 \cdot \bar{Q}}{\bar{i}_{d,T} \cdot A_{bacino}} = \frac{3,6 \cdot 267,61\ m^3 / s}{7,196\ mm \cdot h^{-1} \cdot 580,53\ km^2} = 0,23$$

Si nota come il coefficiente di afflusso Ψ , tarato tramite metodi indiretti, risulta sempre minore rispetto a quello ottenuto, mediante la formula razionale, considerando la portata al colmo pari alla media campionaria dei massimi delle osservazioni disponibili.