



**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 2135A-**

**ANNO: 2017**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Uffreduzzi Francesco**

**MATERIA: Fondamenti di Meccanica del Volo - Prof. Gili**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

## LEZIONE 1    29-02-2016

### ATMOSFERA REALE IN QUIETE

Analizziamo la composizione dell'aria secca:

- AZOTO → 28,016 Kg/Mol, 78,09% in volume  
75,5% in peso
- OSSIGENO → 32,00 Kg/Mol, 20,95% in volume  
23,1% in peso
- ARGON → 39,944 Kg/Mol, 0,93% in volume  
1,28% in peso
- ALTRI ELEMENTI → Anidride carbonica, Neon, Elio, Kriptone, Sodio, Xenone, Ozono, Radon

Calcoliamo, in prima approssimazione, la massa molare dell'aria secca:

$$M \approx 28,016 \cdot 0,7809 + 32,00 \cdot 0,2095 + 39,944 \cdot 9,3 \cdot 10^{-3} = 28,95 \text{ Kg/Mol}$$

$$\Rightarrow \boxed{M \approx 29 \text{ Kg/Mol}}$$

L'aria umida è più leggera dell'aria secca, poiché l'acqua aggiunge peso meno degli altri elementi presenti.

Considerando l'aria come gas perfetto:

- LEGGE DI AVOGADRO → Nelle medesime condizioni, volumi uguali di gas diversi contengono lo stesso numero di molecole
- LEGGE DI BOYLE - MARIOTTE (isoterma) ⇒ Volume molare  $V_0$ :  $V_0 = 22,415 \frac{\text{m}^3}{\text{Mole}}$
- EQUAZIONE DI STATO DEI GAS PERFETTI ( $P_0 = 1 \text{ atm}, T_0 = 273,15 \text{ }^\circ\text{K}$ )
- VOLTA, GAY-LUSSAC (dilatazione termica)

$$R = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{10330 \cdot 22,415}{273,15} = 847,8 \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{Mole} \cdot \text{K}} \Rightarrow \boxed{R = \frac{Rg}{M} = \frac{287 \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{K}}}$$

Concentriamoci sulle unità di misura:

$$pV = \frac{R}{M} T \quad \text{con} \quad n = \frac{1}{V} \quad n \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{M}} \right], \quad V \left[ \frac{\text{M}}{\text{m}^3} \right]$$

$$M = \text{peso mole} \left[ \frac{\text{M}}{\text{Mole}} \right]$$

Allora:

$$\frac{p}{\rho} = g \frac{R}{M} T = RT, \quad \text{con} \quad R = \frac{Rg}{M} \left[ \frac{\text{M} \cdot \text{m}}{\text{Mole} \cdot \text{K}} \cdot \frac{\text{Mole} \cdot \text{m}}{\text{M}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$\text{Considerando una mole:} \quad \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \text{K}} \right]$$

$$pV = RT, \quad \text{con} \quad V \equiv \text{volume mole}$$

$$\left[ \frac{\text{M}}{\text{m}^2} \frac{\text{m}^3}{\text{Mole}} \right] = \left[ \frac{\text{M} \cdot \text{m}}{\text{Mole}} \right] = \left[ \frac{\text{J}}{\text{Mole} \cdot \text{K}} \right], \quad R \left[ \frac{\text{M} \cdot \text{m}}{\text{Mole} \cdot \text{K}} \right]$$

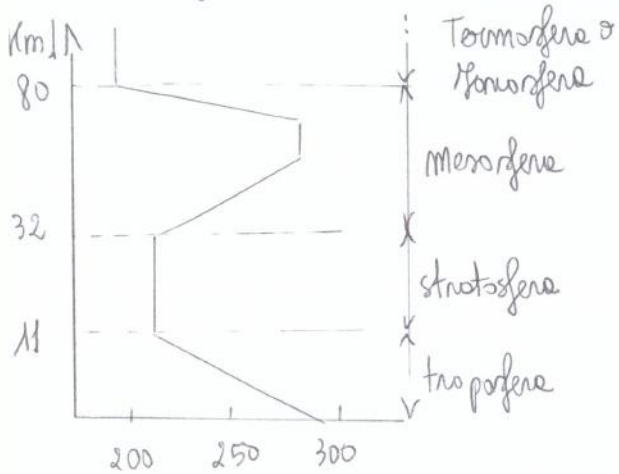
$$\left[ \frac{\text{J}}{\text{Mole} \cdot \text{K}} \right]$$

Perciò:

$$R = \frac{p_0 V_0}{T_0} = 847,8 \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{Mole} \cdot \text{K}} \quad \text{nel sistema tecnico}$$

$$R = \frac{101325 \cdot 22,415}{273,15} = 8317 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{Mole} \cdot \text{K}} \quad \text{nel sistema internazionale}$$

Detta la tropopausa, le temperature si mantengono pressoché costanti, almeno fino alla mesopausa, a 32 km di altezza



esprimiamo ora le leggi di variazione di pressione, temperatura e densità

### Legge di variazione di $p$

aria, fluido pesante  $\Rightarrow$  Stevino:  $dp = -\gamma dz$

gas perfetto  $\Rightarrow p = \gamma \frac{R}{M} T$

gradiente temperatura troposfera:  $\frac{dT}{dz} = -h$

allora:

$$dp = -\gamma dz$$

$$p = \gamma \frac{R}{M} T$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M}{R} \frac{dz}{T}, \text{ con } T = T_0 - hz \quad m = \frac{M}{hR} = \frac{29}{0.0065 \cdot 848} = 5.2561$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M}{R} \frac{dz}{T_0 - hz} = -\frac{M}{Rh} \frac{d(hz)}{T_0 - hz} = \frac{M}{Rh} \frac{d(T_0 - hz)}{T_0 - hz}$$

allora:

$$\frac{dp}{p} = m \frac{d(T_0 - hz)}{T_0 - hz} \Rightarrow \int_0^z \frac{dp}{p} = m \int_0^z \frac{d(T_0 - hz)}{T_0 - hz} \Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = m \ln \frac{(T_0 - hz)}{T_0}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{T_0 - hz}{T_0} \right)^m$$

ricordando che per una generica politropica  $p \nu^m = p_0 \nu_0^m$

## Come evolve nella stratosfera?

- Stevino:  $dp = -\gamma dz$
- gas perfetti:  $p = \gamma \frac{R}{M} T$

poiché la temperatura è costante  $\rightarrow$  Legge di Boyle-Mariotte (isoterma)

Allora:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p^*}{\gamma^*} = \text{cost} \Rightarrow \gamma = \frac{\gamma^*}{p^*} \cdot p \Rightarrow \text{sostituendo nella legge di Stevino:}$$

$$dp = -\frac{\gamma^*}{p^*} p dz$$

### OSSERVAZIONE

$$\frac{p^*}{\gamma^*} = \frac{R}{M} T^* = H^* = 6338 \text{ m}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma^*}{p^*} dz$$

### altezza omogenea della stratosfera

Se dalla tropopausa in su l'atmosfera fosse a densità costante, la stratosfera potrebbe essere rappresentata da una colonna di fluido alta 6338 m

Analogamente:

$$\frac{p_0}{\gamma_0} = \frac{R}{M} T_0 = H = 8426 \text{ m} \quad \text{altezza omogenea dell'atmosfera}$$

Integriamo ora la relazione determinata sopra:

$$\int_{p^*}^p \frac{dp}{p} = -\frac{1}{H^*} \int_{z^*}^z dz \Rightarrow \ln \frac{p}{p^*} = -\frac{z-z^*}{H^*}$$

Allora:

$$\frac{p}{p^*} = e^{-\frac{z-z^*}{H^*}}$$

legge di Halley, legge variazione pressione

legge variazione densità

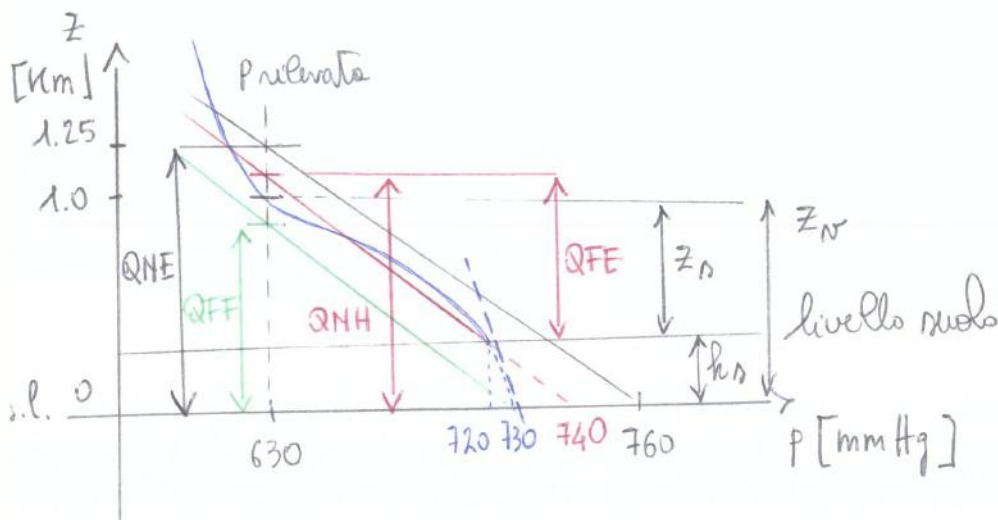
$$\rightarrow \frac{p}{\gamma} = \frac{p^*}{\gamma^*} \rightarrow \frac{\gamma}{\gamma^*} = \frac{p}{p^*} = e^{-\frac{z-z^*}{H^*}}$$

$$\text{con } \frac{\gamma}{\gamma^*} = \frac{p}{p^*} = \delta^*$$

## Come è fatto un altimetro?

L'altimetro è un barometro, ovvero un misuratore di pressione atmosferica. È costituito da una cassa e tenuta (collegata alla presa statica del tubo di Pitot) al cui interno si trova una capsula sferica su cui è stato fatto il vuoto. La capsula è mantenuta in forma da un dispositivo elastico. La deformazione della capsula dovuta alla variazione della pressione statica nella cassa, viene trasmessa alle lancette del quadrante dell'altimetro. Ad esempio, una riduzione di pressione si accompagna ad una espansione della capsula con rotazione delle lancette verso quote crescenti. Tranne una manopola presente sul pannello dello strumento, è possibile variare la pressione di riferimento  $P_{SL}$  e conseguentemente cambiare il riferimento altimetrico a quota 0.

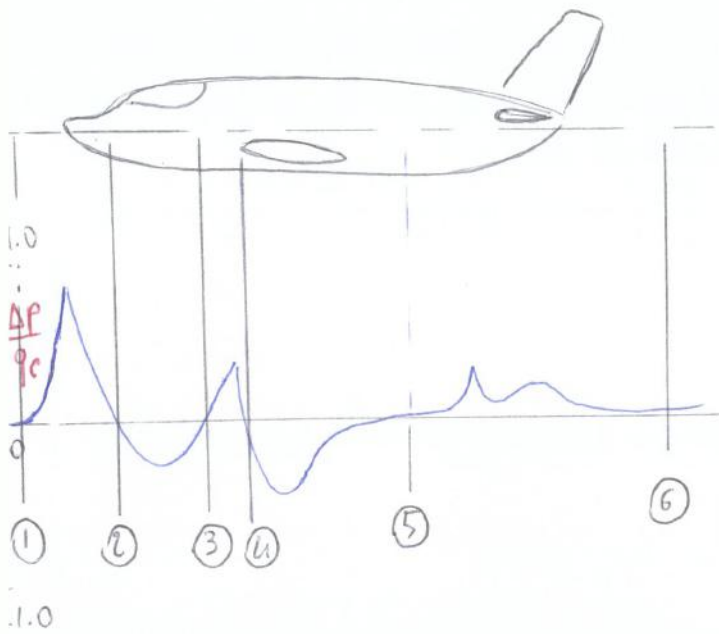
Vediamo quali sono i principali REGOLAGGI ALTIMETRICI



QNE: quota barometrica (1250 m). Gli altimetri sono regolati sulla pressione standard  $p_0 = 760 \text{ mm Hg}$ . È utile nella navigazione perché assegnando a ciascun aeromobile una diversa QNE si garantisce la separazione e si evita il rischio di collisione.

QFE: Come pressione di riferimento viene impostata quella vera al suolo (720 mmHg). In questo modo l'altimetro segnerà 0 quando l'aeromobile toccherà il suolo.

QNH: Come pressione di riferimento si usa la pressione al suolo trovata al 740) ← livello medio del mare. L'altimetro segnerà l'elevazione dell'aeroplano sul livello del mare quando l'aeromobile sarà nella pista.



Come è possibile osservare, per una determinata condizione di volo esistono soltanto alcuni punti particolari del velivolo in cui è possibile misurare dei tubi di Pitot che forniscono una pressione statica caratterizzata da un errore basso.

Al variare delle condizioni di volo i punti ottimali di posizionamento si spostano, per cui la pressione statica misurata sarà sempre affetta da errori

Quindi:

$$V_t = TAS = \sqrt{\frac{2q}{\rho_a}}, \quad q = p_t - p_a$$

Moltiplichiamo ambo e dividiamo per  $\rho_0$ :

$$V_t = \sqrt{\frac{2q\rho_0}{\rho_a\rho_0}} = \underbrace{\sqrt{\frac{2q}{\rho_0}}}_{\frac{EAS}{V_e}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_a}}}_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} = V_e \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \quad \text{con } \delta = \frac{\rho_a}{\rho_0} \text{ densità relativa}$$

Ricapitolando:

$$V_t = \sqrt{\frac{2q}{\rho_a}} = V_e \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta}} = TAS$$

$$V_e = EAS = \sqrt{\frac{2q}{\rho_0}}$$

Studieremo ora come accade nel caso di flusso COMPRESSIBILE



## NUMERO DI MACH

Il numero di Mach è definito come:

$$M = \frac{V_t}{c}, \text{ con } c = \text{vel. del suono} = \sqrt{\kappa R T_{av}} = c_0 \sqrt{\frac{T_{av}}{T_0}}$$

$$c_0 = 340.5 \text{ m/s}$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\rho} \frac{R}{M} T = R T, \quad R = 287 \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \text{K}} \right]$$

Osserviamo che:

$$c = \frac{c_0 \sqrt{T_{av}}}{\sqrt{T_0}} \rightarrow M = \frac{V_t}{c_0} \sqrt{\frac{T_0}{T_{av}}} = \frac{\sqrt{T_0}}{c_0} \cdot \frac{V_t}{\sqrt{T_{av}}} = b \frac{V_t}{\sqrt{T_{av}}} = 0.05 \frac{V_t}{\sqrt{T_{av}}}$$

$$b = \frac{\sqrt{T_0}}{c_0} = \frac{\sqrt{288}}{340.5} = 0.05$$

Ricapitoliamo quali sono le differenti misure di velocità portabile:

$$Z_{ISA} = 0 \text{ mV} \Rightarrow T_{av} = T_0 = 288 \text{ K}$$

$$p_{av} = p_0 = 760 \text{ mmHg}$$

Le velocità misurate dagli anemometri di bordo è affetta da errori di:

- posizione (pres. statica non corretta)
- strumentali (velocità nel tubo di Pitot non completamente omogenea, difficoltà nel rilevare la  $p_{av}$ )

$$V_i = \text{IAS (Indicated Air Speed)}$$

correggendo tali errori si parla della CAS (Calibrated Air Speed) =  $V_c$

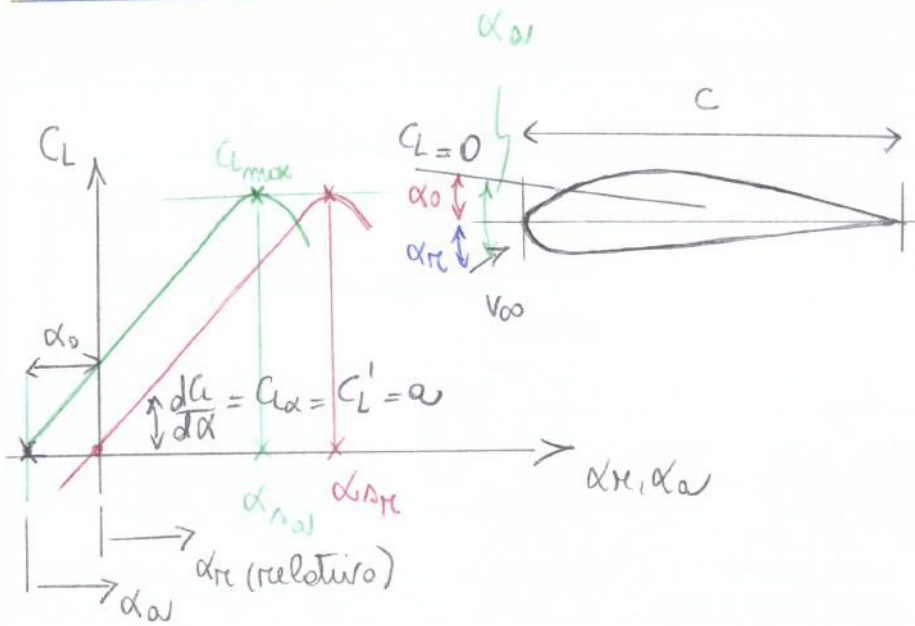
Altre:

### - FLUSSO COMPRESSIBILE

$$V_t = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_{av}} \left[ \left( \frac{q_c}{p_{av}} + 1 \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]} = \text{TAS (True Air Speed)}$$

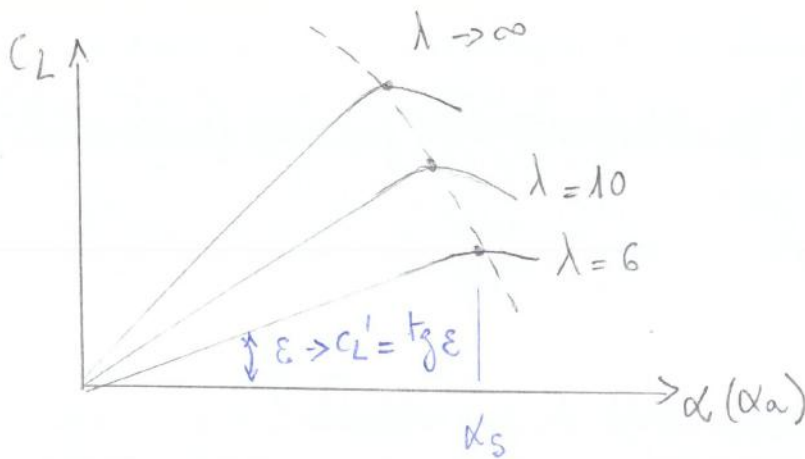
$$V_c = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ \left( \frac{q_c}{p_0} + 1 \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]} = \text{CAS (Calibrated Air Speed)}$$

## Curva $C_L(\alpha)$



- profilo simmetrico
- profilo non simmetrico

## Effetto dell'allungamento alare



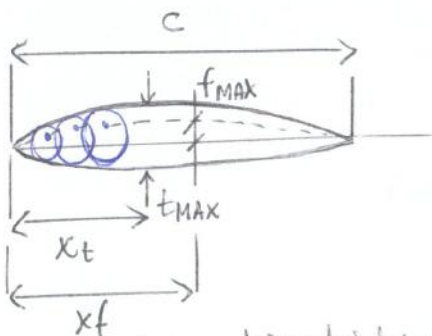
$\lambda = \frac{b}{c} = A$  ← apertura alare

$tg \epsilon = \frac{dC_L}{d\alpha} = 2\pi = C'_L \infty$   
 ↓  
 max valore teorico per alare con  $\lambda = \infty$

## LEZIONE 4 7-03-2016

### Profili alari

Ricordiamo che → **PROFILO COMPLETO** = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_



linea media: unione dei centri dei cerchi nevrotori delle linee di dorso e ventre del

• Si dimostra che vale la seguente formula semiempirica:

$$C'_L = \frac{C'_L \infty}{1 + \frac{C'_L \infty}{\pi \lambda}}$$

dove  $C'_L \infty \approx 5.7$  pendenza del coeff. di portanza del profilo alare ( $\lambda \rightarrow \infty$ )

## ESERCITAZIONE 1 - QUOTE E VELOCITÀ

- ① Determinare la quota barometrica QNE segnata dall'altimetro di bordo di un aeromobile che vola ad una quota standard Z<sub>ISA</sub> con una temperatura esterna T<sub>e</sub>:

$$\begin{cases} Z_{ISA} = 4500 \text{ m} \\ T_e = 197.4 \text{ K} \end{cases}$$

Ricondiamo che:

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{T_0 - R Z_{ISA}}{T_0} \right)^{5.256-1} = \left( \frac{288 - 6,5 \cdot 10^{-3} \cdot 4500}{288} \right)^{5.256-1} = \left( \frac{258,75}{288} \right)^{4,256} = 0,6339$$

Dall'eq. di stato dei gas perfetti:

$$\begin{cases} p_e = p_e R T_e \\ p_0 = p_0 R T_0 \end{cases} \rightarrow \frac{p_e}{p_0} = \frac{p_e}{p_0} \frac{T_e}{T_0} = 0,4345$$

0.6339

Allora:

$$\frac{p_e}{p_0} = \left( \frac{T_0 - R Z_{QNE}}{T_0} \right)^{5,256} \Rightarrow T = T_0 \left( \frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{1}{5,256}} = 245,76 \text{ K}$$

Quindi:

$$Z_{QNE} = \frac{T_0 - T}{R} = \frac{288 - 245,46}{6,5 \cdot 10^{-3}} = 6448 \text{ m}$$

- ② Determinare la quota ISA di volo di un aeromobile del cui altimetro e del cui termometro delle temperature esterne si sono rilevati i seguenti dati:

$$\begin{cases} Z_{QNE} = \text{quota barometrica} = 6500 \text{ m} \\ T_e = -12^\circ \text{C} = 261 \text{ K} \end{cases}$$

$$\frac{p_e}{p_0} = \left( \frac{T_0 - R Z_{QNE}}{T_0} \right)^{5,256} = \left( \frac{288 - 6,5 \cdot 10^{-3} \cdot 6500}{288} \right)^{5,256} = 0,4344$$

$$\frac{p_e}{p_0} = \frac{p_e}{p_0} \frac{T_e}{T_0} \rightarrow \frac{p_e}{p_0} = \frac{p_e}{p_0} \frac{T_0}{T_e} = 0,4793$$

Riconducendo che:

$$\frac{1}{2} \rho_0 V_{EAS}^2 = \frac{1}{2} \rho V_{TAS}^2 \rightarrow V_{EAS} = V_{TAS} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} = 77.17 \cdot \sqrt{0.7810} = 68.20 \text{ m/s}$$

$\parallel$   
 $V_{CAS}$

Calcoliamo la pressione dinamica indicata (effetto di errore):

$$q = \frac{1}{2} \rho_0 V_{EAS}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1.225 \cdot (68.20)^2 = 2848.89 \text{ Pa}$$

$$q_i = q \cdot 0.995 = 2706.44 \text{ Pa}$$

Allora:

$$q_i = \frac{1}{2} \rho_0 V_{IAS}^2 \rightarrow V_{IAS} = \sqrt{\frac{2q_i}{\rho_0}} = 66.47 \text{ m/s}$$

Osserviamo che se portate di velocità indicate, all'aumentare delle quote aumenta la velocità vera  $V_{TAS}$  perché la densità diminuisce.

CASO INCOMPRESSIBILE  
NO ERRORI STRUM/POSIZIONE }  $\Rightarrow V_{IAS} = V_{CAS} = V_{EAS}$   
 $V_{TAS} = V_{EAS} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \Rightarrow \text{se } \rho \downarrow (z \uparrow) \Rightarrow V_{TAS} \uparrow$

④ Un velivolo sta operando in aria standard alle velocità  $V_i$  e alle quote barometriche QNE.  
 Determinare le  $V_{EAS}$ , la  $V_{TAS}$  e il Mach di volo, considerando nulli gli errori strumentali e di posizione e supponendo che le temp. esterne alle quote di volo sia quella dell'atmosfera standard internazionale

$$\left\{ \begin{aligned} \bullet V_{IAS} &= 375 \text{ KTS} = \frac{1852}{3600} \cdot 375 = 0.5144 \cdot 375 = 192.9 \text{ m/s} \\ \bullet Z_{QNE} &= 30000 \text{ ft} = 30000 \cdot 0.3048 \text{ m} = 9144 \text{ m} \end{aligned} \right. \quad 101325 \text{ Pa}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{T_0 - h Z_{QNE}}{T_0} \right)^{5.2561} = \left( \frac{228.56}{288} \right)^{5.2561} = 0.2967 \Rightarrow p = 0.2967 p_0 = 30063 \text{ Pa}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{228.56}{288} \right)^{4.2561} = 0.3739 \Rightarrow \rho = 0.3739 \rho_0 = 0.458 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

## esercizio internet

Su un velivolo è montato un altimetro calibrato in atmosfere standard ( $p_0 = 101325 \text{ Pa}$ ,  $T_0 = 288 \text{ K}$ )

Un certo giorno la pressione al livello del mare (livello vero) è  $95000 \text{ Pa}$  (bassa pressione) e la temperatura misurata è  $25^\circ\text{C}$  ( $298 \text{ K}$ )

Immaginando che  $\frac{dT}{dz} = -\beta = -0.0065 \text{ K/m}$ , se si vola dopo il decollo l'altimetro segna  $5000 \text{ m}$ , qual è la vera quota al di sopra del livello del mare alla quale ci troviamo?

$$5000 \text{ m} \rightarrow \frac{p_2}{p_0} = \left( \frac{T_0 - \beta z}{T_0} \right)^{5.2561} \rightarrow p_2 = 101325 \text{ Pa} \cdot \left( \frac{288 - 0.0065 \cdot 5000}{288} \right)^{5.2561}$$

Allora:  $p_2 \approx 54019 \text{ Pa}$  pressione vera alla quota da determinare

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{5.2561} \rightarrow T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1/5.2561} = 298 \cdot \left( \frac{54019}{95000} \right)^{1/5.2561} = 267.8 \text{ K}$$

temperatura vera alla quota da determinare

$$\Rightarrow T_2 = T_1 - \beta z \rightarrow \frac{T_1 - T_2}{\beta} = z = 4646 \text{ m}$$

# Profili NACA

## NACA 2412

$\left\{ \begin{array}{l} - 2 \text{ archi di parabola} \\ - 1 \text{ arco di cerchio} \end{array} \right. \rightarrow$  arco di cerchio  
 $\rightarrow$  segmento  
 linea d'asse

- 12  $\rightarrow \frac{t_{max}}{c} = 12\%$
- 2  $\rightarrow \frac{f_{max}}{c} = 0.02$
- 4  $\rightarrow \frac{x f_{max}}{c} = 0.4$
- 2 persone max al 30% circa della corda

## NACA 23015

parabola cubica +  $\left\{ \begin{array}{l} - parabola cubica \\ - retta \end{array} \right.$   
 $\dots$

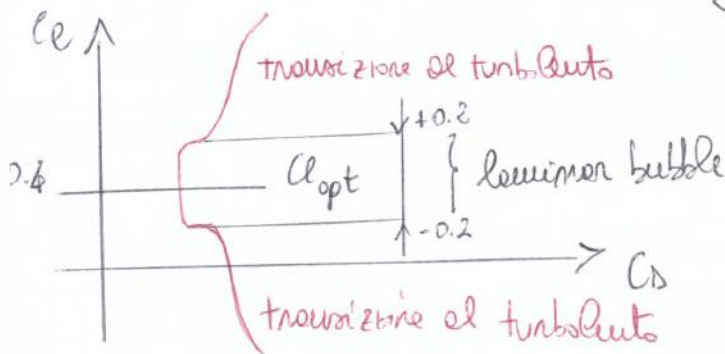
- 15  $\rightarrow \frac{t_{max}}{c} = 15\%$
- 30  $\rightarrow 30 = 200 \frac{x f_{max}}{c}$   
 $x f_{max} = 0.15c$
- 2  $\rightarrow f_{max} = 0.02c$

## NACA 65<sub>g</sub>-413

$\rightarrow$  profili laminari

- 6  $\rightarrow$  famiglia (tipo di linea d'asse)
- 13  $\rightarrow \frac{t_{max}}{c} = 13\%$
- 5  $\rightarrow 5 = 10 \frac{x P_{min}}{c} \Rightarrow x t_{max} \cong 0.5c$   $\rightarrow$  pressione minima
- 4  $\rightarrow 4 = 10 C_{e, opt}$  (design lift coefficient)
- 2  $\rightarrow 2 = 10 \Delta C_{e, lam}$  intervallo al di sopra e al di sotto del  $C_{e, opt}$  in cui il flusso si mantiene laminare

il flusso sarà mantenuto laminare almeno fino al 50% della corda



$C_{e, opt}$  = valore ottimale di  $C_e$   
 e cui corrisponde il valore minimo di  $C_d$

Ricorrendo ai termini:

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi \lambda} (i + k\pi \lambda) = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{e\pi \lambda}, \text{ con } e = \frac{1}{i + k\pi \lambda}$$

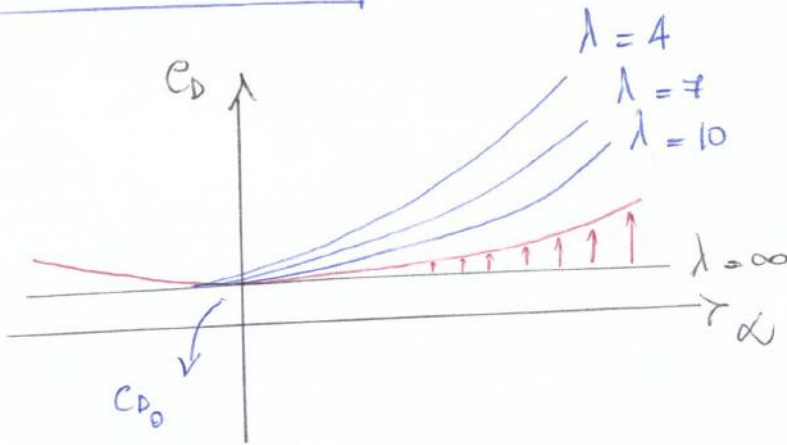
Allora, per ali non ellittiche:

fattore di Oswald  
 $L\gamma = 0.75 \div 0.95$

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{e\pi \lambda}$$

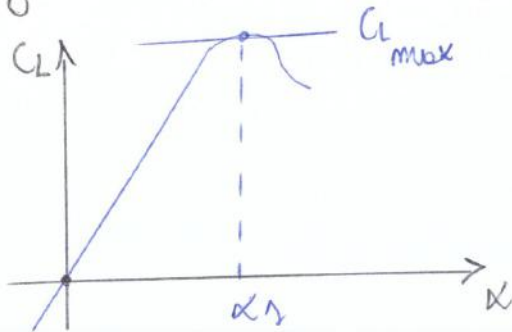
POLARE TEORICA DI PRANDTL

effetto dell'allungamento  
sulle curve  $C_D - \alpha$

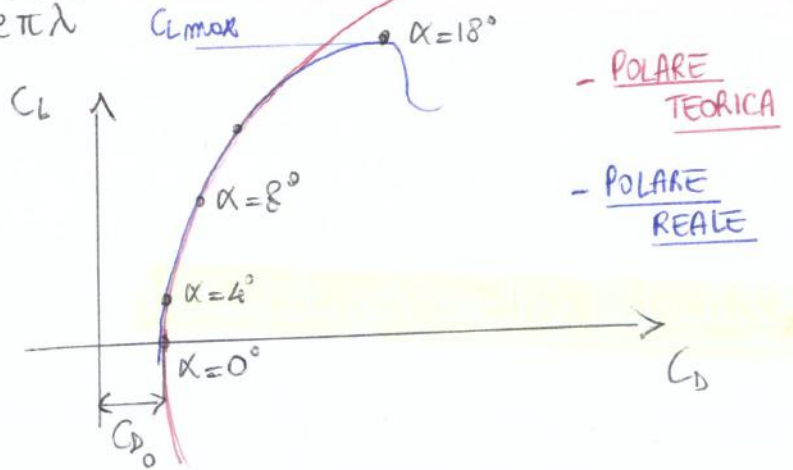


Polare teorica e reale del velivolo

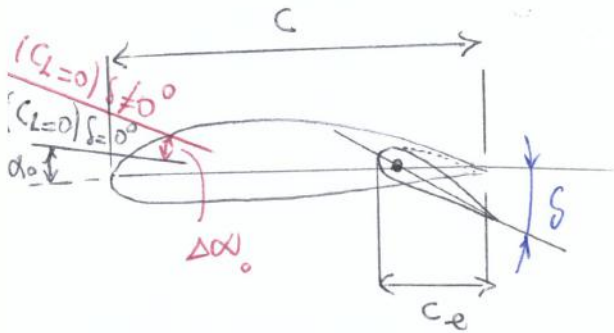
Abbiamo visto che  $C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{e\pi \lambda}$   
 Il  $C_L$  ha l'allungamento  
 già studiato in precedenza:



è detta polare teorica di Prandtl.



Rappresentando su un grafico in cui in ascissa è riportato il  $C_D$  e in ordinata il  $C_L$  la relazione sopra, si ottiene una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse  $x$  che interseca esso nel punto  $(C_{D_0}, 0)$  → POLARE TEORICA  
 La polare teorica e reale coincidono per incidenza che possiamo fissare a  $8^\circ - 12^\circ$ .  
 Oltre tali valori le due curve si discostano e occorre rifarsi alle curve reali.

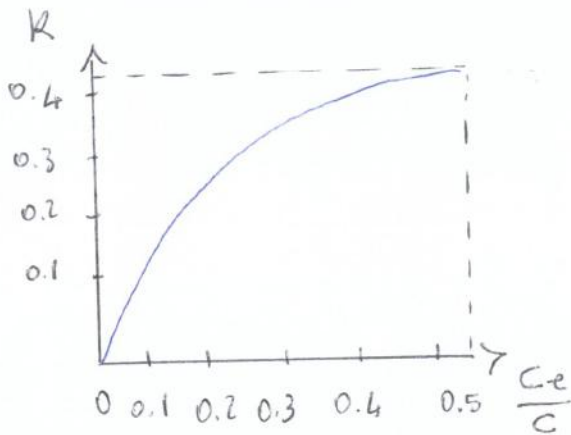


$$\Delta \alpha_0 = K \sin \delta \approx K \delta$$

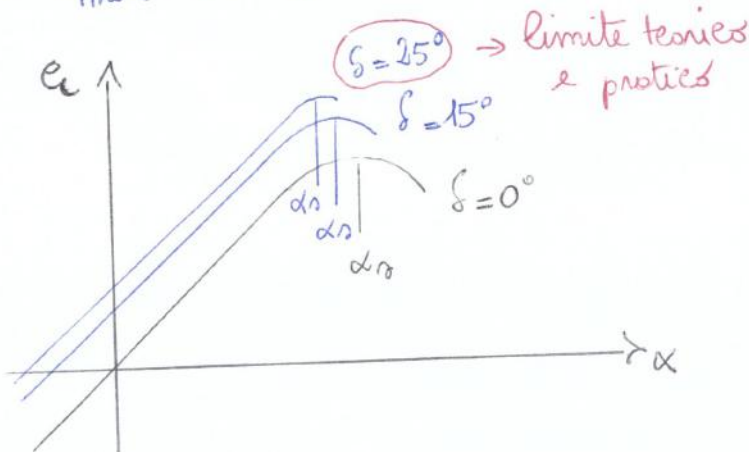
La variazione dell'incidenza di portanza nulla è proporzionale alla deflessione dell'ellettore / equilibratore secondo una costante K

La costante K può essere determinata mediante la relazione semiempirica:

$$K = 0.40 \left( 1 + e^{-8 \frac{c_e}{c}} \right)$$



L'ellettore cambia le curvature del profilo, aumentando in valore assoluto l'angolo di zero lift. Si considera  $\delta$  positivo quando la superficie di controllo è deflessa verso il basso. In tal caso si ottengono valori maggiori di  $C_{Lmax}$  ma i fenomeni di stallo sopraggiungono prima.



All'aumentare di  $\delta$  diminuisce l'effetto della superficie mobile e le curve si avvicinano meno distaccate

### Polare del velivolo - Efficienza aerodinamica

Definiamo efficienza aerodinamica il rapporto

$$E = \frac{C_L}{C_D}$$

Allora:

$$E = \frac{C_L}{C_{D_0} + \frac{C_L^2}{e\pi\lambda}}$$



Allora:

$$C_{D_0} = \frac{C_L^2}{e\pi\lambda} \Rightarrow (C_L)_{E_{max}} = \sqrt{e\pi\lambda C_{D_0}}$$

Riconducendo che:

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi\lambda e} \Rightarrow (C_D)_{E_{max}} = C_{D_0} + \frac{e\pi\lambda C_{D_0}}{e\pi\lambda} = 2C_{D_0}$$

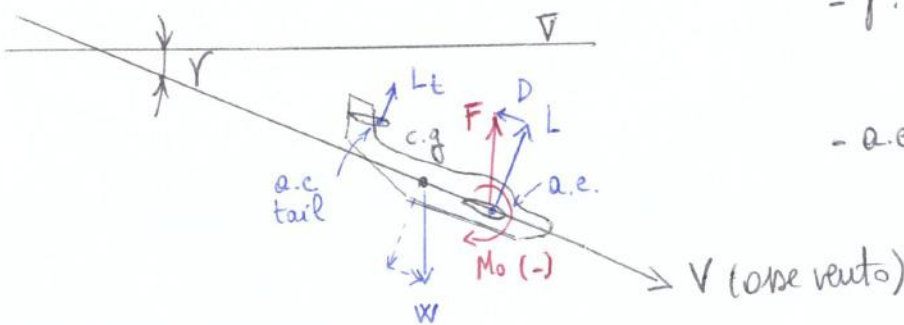
Perciò:

$$\Rightarrow (C_D)_{E_{max}} = 2C_{D_0}$$

$$E_{max} = \frac{(C_L)_{max}}{(C_D)_{E_{max}}} = \frac{\sqrt{e\pi\lambda C_{D_0}}}{2C_{D_0}} = \sqrt{\frac{e\pi\lambda}{4C_{D_0}}} \Rightarrow E_{max} = \sqrt{\frac{e\pi\lambda}{4C_{D_0}}}$$

## VOLO LIBRATO IN ARIA CALMA

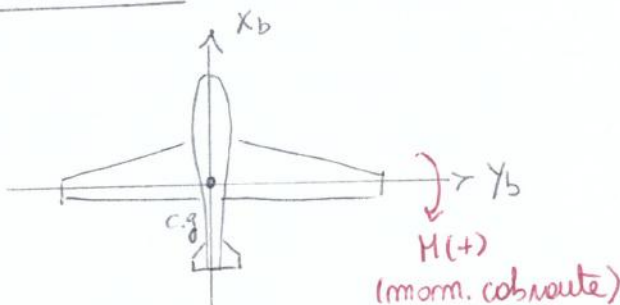
### PIANO DI SIMMETRIA DEL VELIVOLO



angolo formato tra l'orizzonte e la tangente alla traiettoria (velocità)

- $\alpha$ : angolo di discesa (angolo di rampa)
- a.e.: aerodinamic center dell'ala, posizionato nel quarto anteriore delle corde
- $M_0$ : momento focale dell'ala, negativo se picchiante

### VISTA IN PIANTA:



- $x_b, y_b$ , assi corpo (body axis)
- $y_b$  è l'asse body che base vento se le forze sono contenute nel piano di simmetria del velivolo. Fornisce il verso positivo dei momenti

esem pio

BOEING 747

$\lambda = 7$

$C_{D_0} = 0.016$

$e = 0.85$

$\gamma_{min} = 3.33^\circ$

$$L \rightarrow E_{max} = \frac{C_L E_{max}}{C_{D E_{max}}} = \sqrt{\frac{e \pi \lambda}{4 C_{D_0}}} = \frac{0.55}{0.032} = 17.18 \rightarrow$$

planando, il Boeing percorre 17.18 m in orizzontale per ogni metro sceso

$$\tan \gamma_{min} = \frac{1}{E_{max}} \Rightarrow \gamma_{min} = \tan^{-1} \left( \frac{1}{E_{max}} \right) = 3.33^\circ$$

ALIANTE

$\lambda = 30$

$C_{D_0} = 0.012$

$e = 0.92$

$\gamma_{min} = 1.35^\circ$

$$L \rightarrow \left. \begin{matrix} C_L E_{max} = 1.02 \\ C_{D E_{max}} = 0.024 \end{matrix} \right\} \Rightarrow E_{max} = 42.5 \rightarrow$$

planando, l'Aliante percorre 42.5 m in orizzontale per ogni metro sceso

$$\gamma_{min} = \tan^{-1} \left( \frac{1}{E_{max}} \right) = 1.35^\circ$$

Calcolo delle massima permanenza in volo

Dalle eq. di equilibrio precedenti:

$$L = W \cos \gamma = \frac{1}{2} \rho_0 S V^2 C_L S = \frac{1}{2} \rho_0 V^2 C_L S$$

$\begin{matrix} \text{O} \\ \text{e} \\ \text{I} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{se flusso incomprimibile, } V_c = V_e = V_t \sqrt{\delta} \\ \text{sicuramente esatto, perché in ogni caso } V_e = V_t \sqrt{\delta} \\ \text{se non si hanno errori di misura e} \\ \text{flusso incomprimibile, } V_i = V_c = V_e = V_t \sqrt{\delta} \end{matrix}$

Allora:

$$V = \sqrt{\frac{W/S \cos \gamma}{\frac{1}{2} \rho_0 C_L}} \cdot \sqrt{\frac{1}{S}}$$

Definiamo:  $\begin{cases} u = V \cos \gamma \rightarrow \text{comp. orizzontale di } V \\ w = V \sin \gamma \rightarrow \text{comp. verticale di } V \end{cases}$

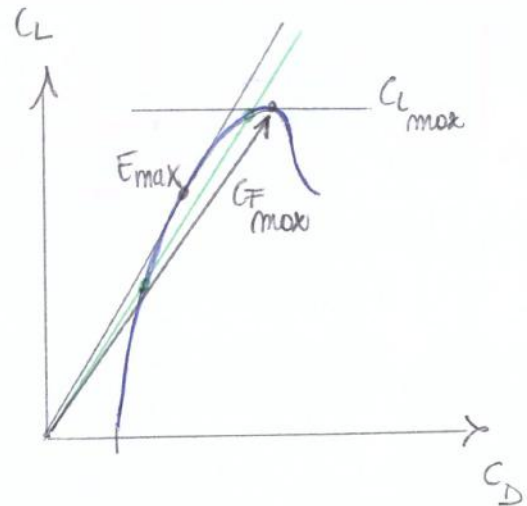
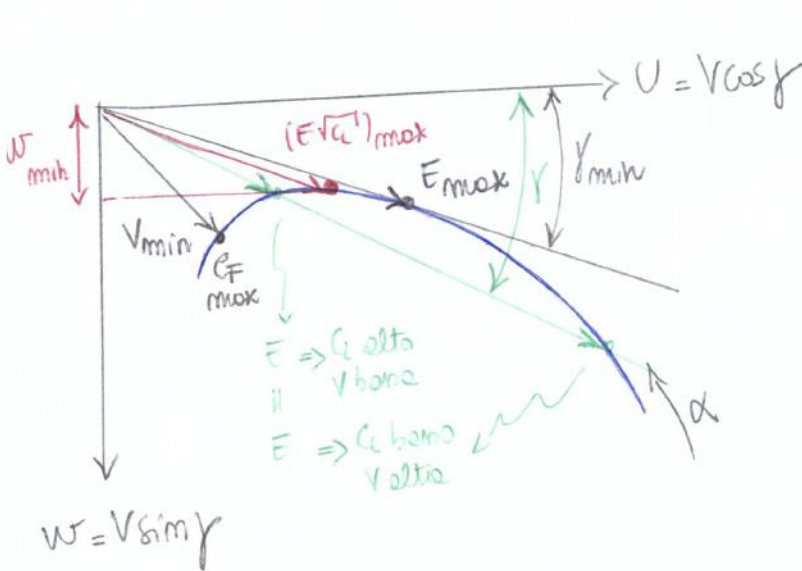
# ODOGRAFA DEL MOTO (polare delle velocità)

Dalle eq. di equilibrio precedenti:

$$\begin{cases} L = W \cos \gamma = \frac{1}{2} \rho_0 \delta V^2 S C_L \\ D = W \sin \gamma = \frac{1}{2} \rho_0 \delta V^2 S C_D \end{cases}$$

Elevando al quadrato e sommando:

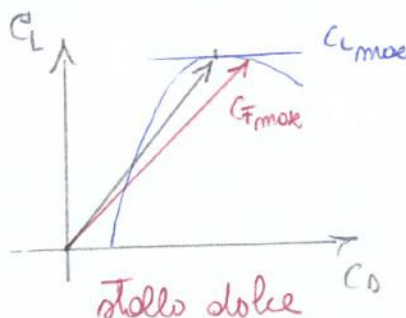
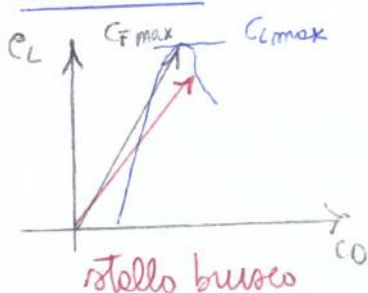
$$W = \frac{1}{2} \rho_0 \delta V^2 S \underbrace{\sqrt{C_L^2 + C_D^2}}_{C_F \text{ coeff. di forza}} = \frac{1}{2} \rho_0 \delta V^2 S C_F \Rightarrow V = \sqrt{\frac{W/S}{\frac{1}{2} \rho_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{C_F}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$



Dalle polare aerodinamiche leggiamo punto per punto il  $C_L$  e il  $C_D$ .  
 Da ciò è possibile ricavare il  $C_F = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}$  che, sostituito nella formula trovata sopra ci permette di ricavare il vettore  $V$  che ha come componenti:  
 $U = V \cos \gamma$ ,  $w = V \sin \gamma$

## ↳ CORRISPONDENZA BIUNIVUCA TRA POLARE AERODINAMICA E ODOGRAFA DEL MOTO

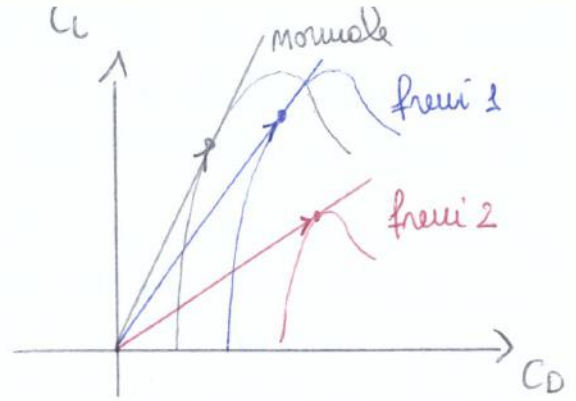
### Osservazione



Il punto sulla polare a cui corrisponde il  $C_F = C_{Fmax}$  può coincidere con il punto in cui  $C_L = C_{Lmax}$  o può essere appena più a destra di esso, nel caso di esempio di stello dolce. Non potrà sicuramente trovarsi a sinistra del punto in cui  $C_L = C_{Lmax}$ .

Diminuiamo.

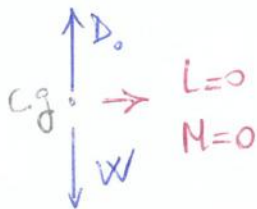
FREMI 1: collocati sulla fusoliera  
 Aumentano il coeff. di resistenza senza cambiare la potenza in modo sostanziale, poiché questo dipende dall'ala



FREMI 2: Collocati sulle ali  
 Aumentano il coeff. di resistenza ma fanno decedere anche il Cl, poiché a valle del freno il flusso è ristretto

Prima di vedere come cambia l'odografo del moto con l'utilizzo di freni aerodinamici, focaliamo alcune considerazioni sull'odografo "normale" della polare, consideriamo il punto che corrisponde a  $Cl=0 \Rightarrow Cd=C_{D0}$ . Tale configurazione corrisponde al volo in picchiata

Allora:

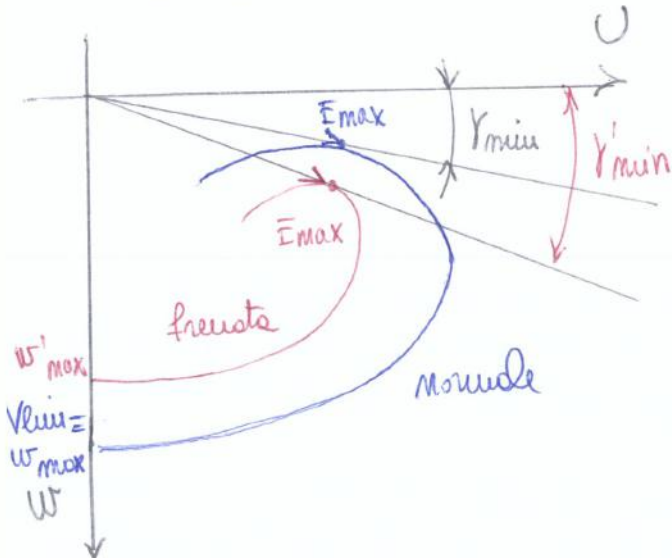


$$W = D = \frac{1}{2} \rho_0 S V^2 C_{D0}$$

$$L \rightarrow V_{lim} = \sqrt{\frac{W/S}{\frac{1}{2} \rho_0 C_{D0}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S^p}} = W_{max}$$

velocità oltre la quale la struttura dove si romperebbe a torsione e corrisponde all'intersezione dell'odografo con l'asse W

Come si modifica l'odografo frenato?



$$\rightarrow \bullet E_{max} = \frac{(Cl)_{Emax}}{(Cd)_{Emax}} = \frac{\sqrt{e \rho l}}{\sqrt{4 C_{D0}}} = \frac{1}{(\gamma)_{min}}$$

Se  $C_{D0} \uparrow, E_{max} \downarrow \Rightarrow (\gamma)_{min} \uparrow$

$$\rightarrow \bullet V_{lim} = \sqrt{\frac{W/S}{\frac{1}{2} \rho_0 C_{D0}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S^p}}$$

Se  $C_{D0} \uparrow \Rightarrow V_{lim} = W_{max} \downarrow$

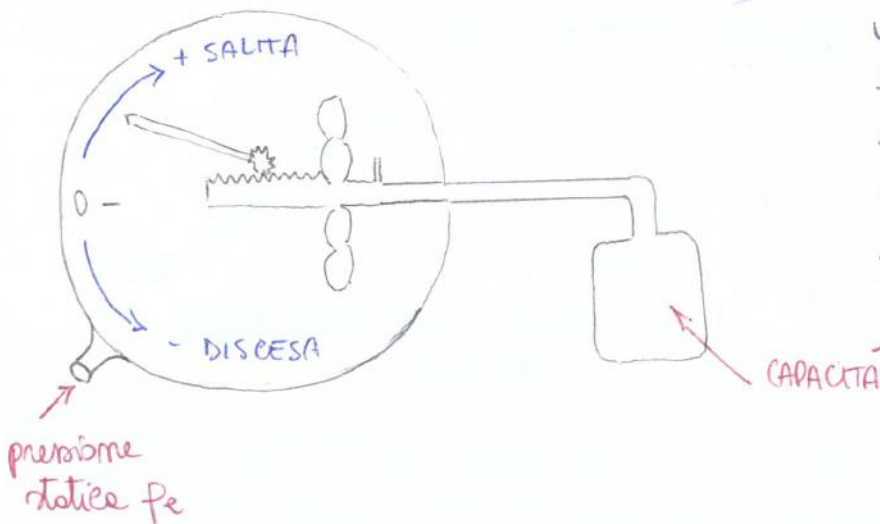
$$\rightarrow \bullet V = \sqrt{\frac{W/S}{\frac{1}{2} \rho_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S^p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{C_F}}$$

Il modulo della velocità non varia molto perché per effetto dei freni perode nominali il  $C_F$  cambia poco

Osservazioni:

- Il punto di massimo dell'odografo "normale", a cui corrisponde  $(E\sqrt{c_L})_{max}$  e quindi  $w = w_{min}$  diventa il punto in cui sarà massima la velocità di salita
- Il punto in cui  $E = E_{max}$  si sposta del vettore  $v$  e rimane sempre il punto di  $E_{max}$ , poiché l'efficienza dipende esclusivamente da questioni aerodinamiche. Tale nuovo punto però, non coincide con quello in cui  $w = w_{max}$ , né con quello in cui è massimo l'angolo di rampa, che si ottiene tracciando la retta tangente per l'origine e tangente alla curva.
- Il  $V_{max}$  si avrà dunque per un  $C_L$  un po' maggiore di quello a cui corrisponde al punto di  $(E\sqrt{c_L})_{max}$ , più prossimo al  $C_{Lmax}$ .

Lo strumento utilizzato per misurare la velocità di salita o di discesa di un velivolo è il variometro:



Il variometro misura la velocità ascensionale/discensionale mediante una rilevazione di pressione statica. Quando il velivolo è livellato, sia nella capacità che nell'intermo della corsa si ha la stessa pressione

Se il velivolo si incrementa la sua quota, la pressione statica nelle corse diminuisce e quella della capacità si adatta ad essa con un certo ritardo, per effetto del tubo capillare che la collega con la corsa. Ciò comporta una deformazione della capsula reversibile per effetto della differenza di pressione generata, e la rotazione di un indicatore collegato ad essa mediante un opportuno meccanismo.

Prendiamo ora in esame il caso con vento in prora.  
 In questo caso, l'asse  $w$  è traslato a destra delle quantità  $\mu$ .  
 Tracciando la tangente all'odografo base si può osservare che il punto a cui corrisponde il  $\gamma = \gamma_{min}$  si trova a un  $C_L$  minore rispetto al punto a cui  $E = E_{max}$ . Aumentando allora le velocità e diminuendo l'incidenza è possibile raggiungere tale punto in cui è minimo l'angolo di discesa, che sarà comunque maggiore del caso senza vento.

Per cui:

$$\gamma_{min} < \gamma_{min}$$

$-\mu$

$$\gamma_{min} > \gamma_{min}$$

$\mu$

Consideriamo ora l'effetto del peso e aggiungiamo le curve verdi che, come visto, si ottengono considerando che:

1) Il  $\gamma_{min}$  non cambia poiché dipende esclusivamente da  $E_{max}$ , che non è influenzato da  $W \rightarrow$  le odografe saranno tangenti alle stesse rette passanti per l'origine che individuano il  $\gamma_{min}$

2) Il modulo della velocità varia, poiché  $V = \sqrt{\frac{W/L}{\frac{1}{2}\rho_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \cdot \frac{1}{\sqrt{C_F}}$

$$\Rightarrow \frac{V'}{V} = \sqrt{\frac{W'}{W}} \quad e \quad V' = \sqrt{\frac{W'}{W}} V$$

$\hookrightarrow$  le odografe non sono traslate, ma si deformano poiché il modulo della velocità si modifica proporzionalmente alle lunghezze del vettore uscente dall'origine

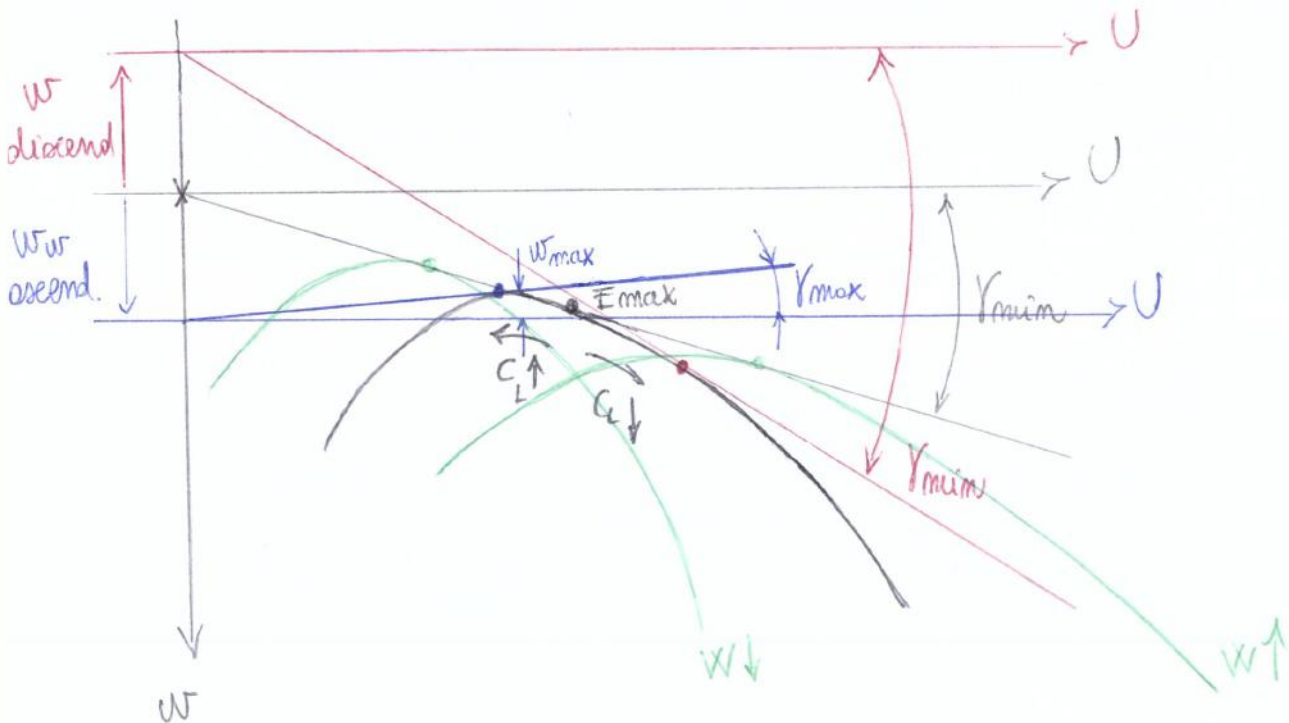
Come succede sommando l'effetto del vento?

- Se consideriamo vento in prora e peso inferiore, tracciando la tangente alla curva verde di sinistra si osserva una diminuzione del  $\gamma_{min}$
- Se consideriamo vento in poppa e peso maggiore, tracciando la tangente alla curva verde di destra si osserva un aumento del  $\gamma_{min}$  all'aumentare del peso.

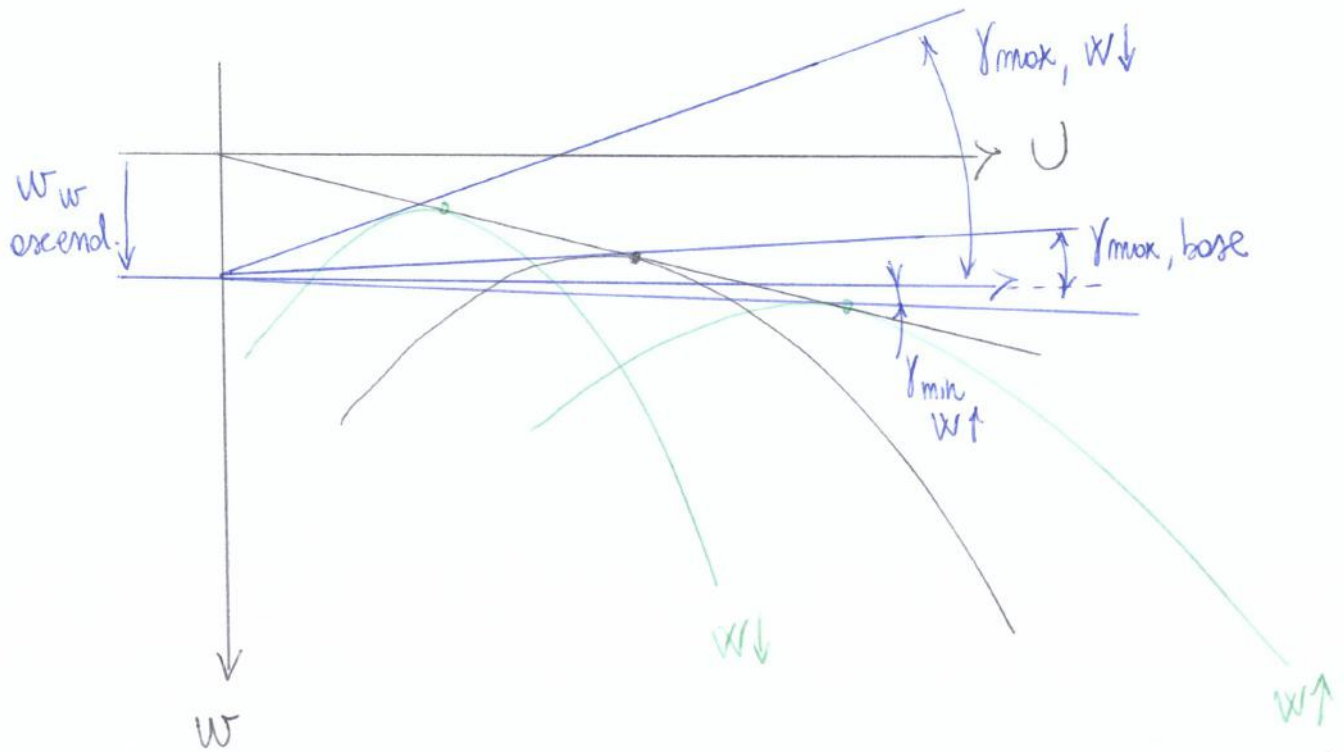


Componente verticale, ascendente-discendente

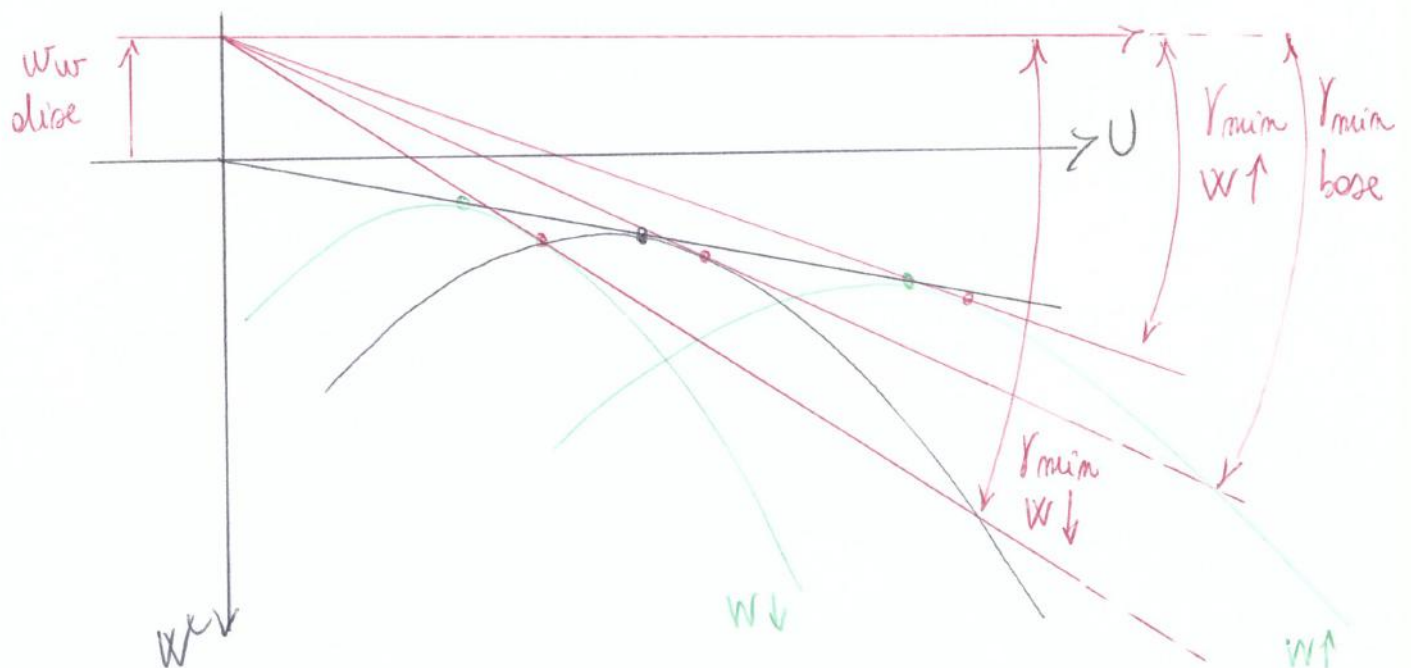
In questo caso possiamo avere una componente ascendente  $w_w$  e una componente discendente



Consideriamo il caso di vento ascendente. In questo caso, tracciando la tangente all'odogrofo dalle nuove origine degli assi, si ottiene il punto a cui corrisponde il massimo angolo di salita. Spostandoci dal punto ad efficienza massima sul  $C_L$  superiore possiamo giungere al punto tale per cui  $\xi = \xi_{max}$



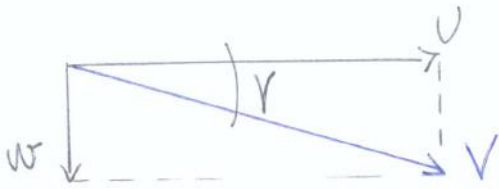
Se diminuisce il peso, il  $\gamma_{min}$  diminuisce fino a diventare un angolo di salita che aumenta al diminuire di  $W$



Se il peso aumenta, il  $\gamma_{min}$  diminuisce.

In generale, a seconda del vento presente, il pilota modificherà l'assetto aumentando o diminuendo l'incidenza, per raggiungere le condizioni di salita o di discesa ottimali





$$W = V \sin \gamma \approx V \tan \gamma \approx V \gamma = \frac{V}{E}$$

$$W = \frac{V}{E}$$

$$\Rightarrow W_{\min} \Rightarrow \left(\frac{V}{E}\right)_{\min} \Leftrightarrow \left(\frac{E}{V}\right)_{\max}$$

Perché dalle eq. di equilibrio:

$$L \approx W = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2W/S}{\rho C_L}}$$

Allora:

$$\left(\frac{V}{E}\right)_{\min} \Rightarrow (E \sqrt{C_L})_{\max} \text{ perché } W_{\min} = \left(\frac{V}{E}\right)_{\min} = \sqrt{\frac{2W/S}{\rho}} \cdot \frac{1}{(E \sqrt{C_L})_{\max}}$$

Perché:

$$E \sqrt{C_L} = \frac{C_L^{3/2}}{C_D} \Rightarrow y' = \frac{C_D}{C_L^{3/2}} = \frac{C_{D0}}{C_L^{3/2}} + \frac{C_L^{1/2}}{e\pi\lambda}$$

$$\frac{dy'}{dC_L} = -\frac{3}{2} \frac{C_{D0}}{C_L^{5/2}} + \frac{1}{2} \frac{C_L^{-1/2}}{e\pi\lambda} = -\frac{3}{2} \frac{C_{D0}}{C_L^2 \sqrt{C_L}} + \frac{1}{2 e\pi\lambda \sqrt{C_L}} = 0$$

$$\frac{3}{2} \frac{C_{D0}}{C_L^2} = \frac{1}{2e\pi\lambda} \Rightarrow \begin{cases} C_L (E \sqrt{C_L})_{\max} = \sqrt{3e\pi\lambda C_{D0}} = \sqrt{3} C_L E_{\max} \\ C_D (E \sqrt{C_L})_{\max} = C_{D0} + \frac{3e\pi\lambda C_{D0}}{e\pi\lambda} = 4C_{D0} = 2C_D E_{\max} \end{cases}$$

Quindi:

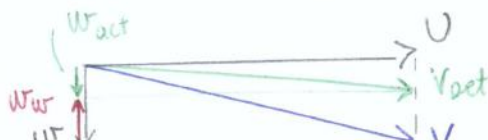
$$C_L (E \sqrt{C_L})_{\max} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} = 1.46$$

$$C_D (E \sqrt{C_L})_{\max} = 4C_{D0}$$

$$E (E \sqrt{C_L})_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{K C_{D0}}} = 31.25$$

$$\Rightarrow W_{\min}^{\text{No WIND}} = \sqrt{\frac{2W/S}{\rho}} \cdot \frac{1}{(E \sqrt{C_L})_{\max}} = 0.513 \text{ m/s} = \frac{V}{E}$$

Considerando l'effetto del vento:



$$W_{\text{act}} = W - W_w = 0.193 \text{ m/s}$$

$$\begin{cases} C_L = E C_D \\ C_D = C_{D_0} + K C_L^2 \end{cases} \Rightarrow E = \frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D_0} + K C_L^2} \rightarrow K E C_L^2 - C_L + C_{D_0} E = 0$$

$$\Rightarrow C_{L1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 K E C_{D_0}}}{2 K E} = \frac{1,926}{\sqrt{0,489}} \quad C_{L \min} \rightarrow V_{\max}$$

Dell'equilibrio delle forze:

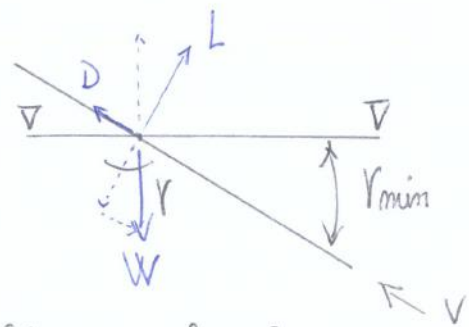
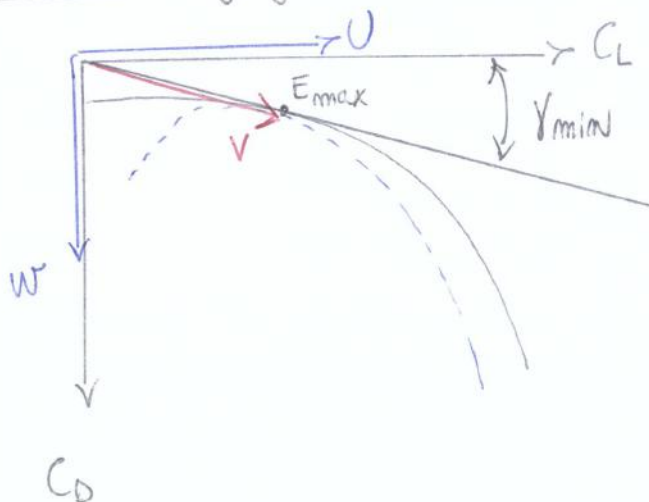
$$V = \sqrt{\frac{2 W/S}{\rho C_{L \min}}} = 23,69 \text{ m/s} \Rightarrow w_{\max} = V \tan \gamma \approx V \gamma = \frac{V}{E}$$

$$w_{\max} = 0,789 \text{ m/s}$$

③ Determinare l'intensità  $w_w$  delle corrente ascendente nelle quale si trova il valore su diante al  $C_L$  di  $E_{\max}$ , conoscendo le sue velocità relative  $w$  e le seguenti caratteristiche:

- $C_{D_0} = 0.011$
  - $e = 0.95$
  - $\lambda = 18$
- $$\rightarrow K = \frac{1}{e \pi \lambda} = 0.0186 \Rightarrow C_D = 0.011 + 0.0186 C_L^2$$
- $W/S = 150 \text{ N/m}^2$
  - $z_{ISA} = 2000 \text{ m} \rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T_0 - h z_{ISA}}{T_0}\right)^{4,2561} \rightarrow \rho = 1,0063 \text{ kg/m}^3$
  - $w_{act} = 0.7 \text{ m/s}$

Polare e olografo:



$$\begin{cases} L = W = \frac{\rho}{2} V^2 S C_L \\ D = W \gamma \end{cases}$$

$$V = \sqrt{\frac{2 W/S}{\rho C_L}}$$

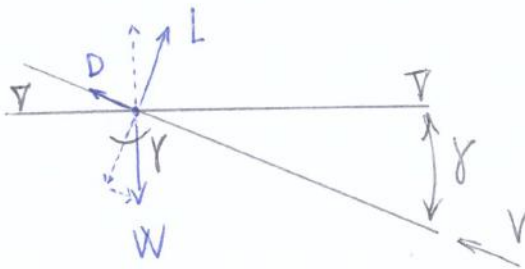
$$\rho_1 = \rho_0 \left( \frac{T_0 - h z_1 \text{ISA}}{T_0} \right)^{m-1} = 1,006 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_2 = \rho_0 \left( \frac{T_0 - h z_2 \text{ISA}}{T_0} \right)^{m-1} = 0,9089 \text{ kg/m}^3$$

Poiché stessa incidenza  $\rightarrow$   $\begin{cases} C_{L1} = C_{L2} = C_L \\ C_{D1} = C_{D2} = C_D \\ E_1 = E_2 = E \end{cases}$

Stesso alare  $\rightarrow S_1 = S_2 = S$

Equilibrio delle forze:



$$\begin{cases} L \approx W = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \rightarrow V = \sqrt{\frac{2W/S}{\rho C_L}} \\ D \approx W \gamma \end{cases}$$



$$W = V \tan \gamma \approx V \gamma = \frac{V}{E}$$

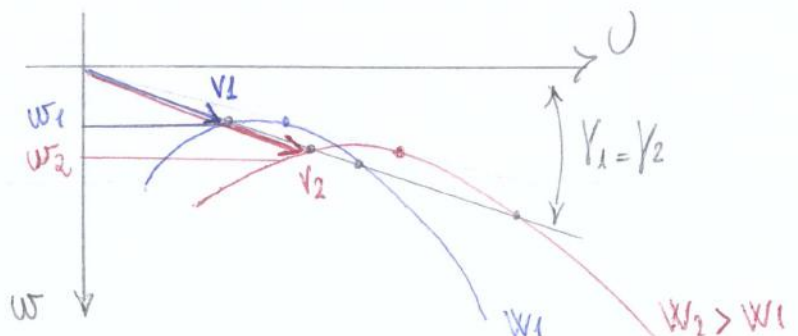
Alzare:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{V_1}{E} = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{2W_1/S}{\rho_1 C_L}} \\ w_2 &= \frac{1}{E} \sqrt{\frac{2W_2/S}{\rho_2 C_L}} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

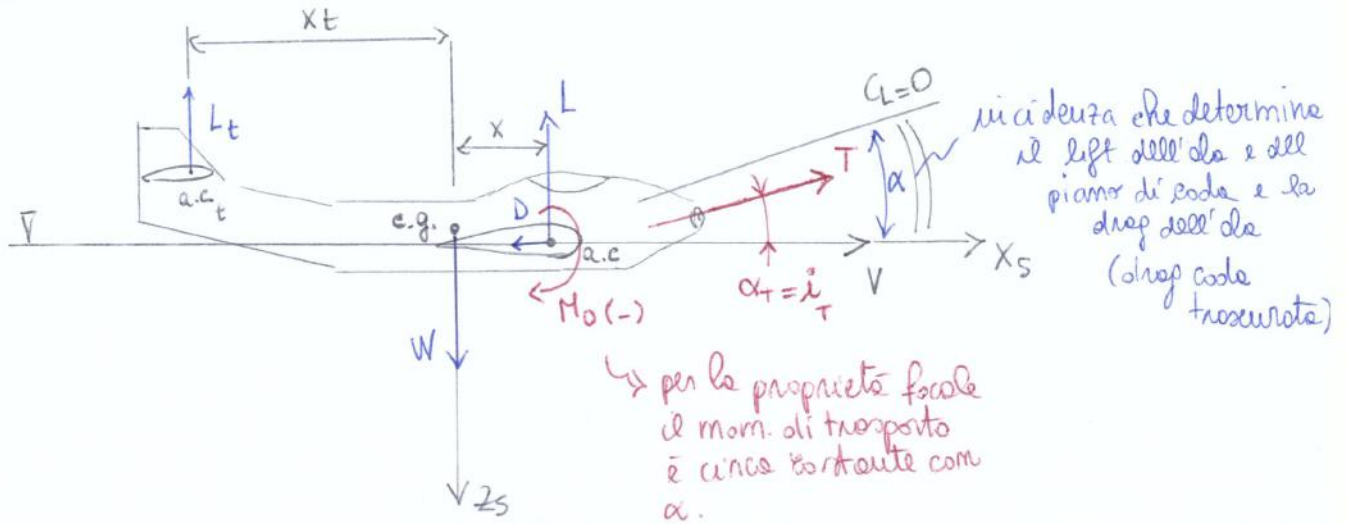
$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{2W_1/S}{\rho_1 C_L}} \cdot \frac{\sqrt{\rho_2 C_L}}{\sqrt{2W_2/S}} \cdot E = \sqrt{\frac{W_1}{W_2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

$$w_2 = w_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{W_2}{W_1}} = 0,857 \text{ m/s} > w_1$$

Se l'efficienza è la stessa e cambia esclusivamente il carico alare, per cui  $W_2 > W_1 \Rightarrow V_2 > V_1$  e dunque  $w_2 > w_1$



## VOLO RETTILINEO UNIFORME ORIZZONTALE



La spinta (Thrust) è inclinata di un angolo  $\alpha_T = i_T$  rispetto all'asse  $X_S$ .  
 Nella condizione iniziale, gli assi vento sono paralleli alla direzione del vettore velocità, che è orizzontale, formando una terna ortogonale. Se "congeliamo" tali assi sul velivolo facendoli diventare body, essi prendono il nome di assi di stabilità. In tale caso, il pitch angle, l'angolo tra un asse body e l'orizzonte è nullo.

L'angolo di inclinazione delle Thrust è detto angolo di coattamento e dipende da come è montato il propulsore rispetto al velivolo.  
 È indicato comunemente con le lettere  $\alpha_T$  (incidence - angle of attack), ma sarebbe più giusto indicarlo con le lettere  $i_T$  (coattamento - incidence). Noi utilizzeremo entrambe le notazioni.

Equazioni di equilibrio con riferimento assi vento:

$$1) L + T \sin \alpha_T + L_t = W \Rightarrow \alpha_T \text{ piccolo e trascurando } L_t \Rightarrow L = W$$

$\nearrow$  globale

$$2) T \cos i_T = D \Rightarrow i_T \text{ piccolo, } T = D$$

$$3) L \cdot x - L_t x_t - M_0 = 0 \quad (T \sin \alpha_T \cdot b, T \cos \alpha_T \cdot b' \text{ trascurati})$$

Studiamo ora come varia la resistenza al variare della velocità di volo

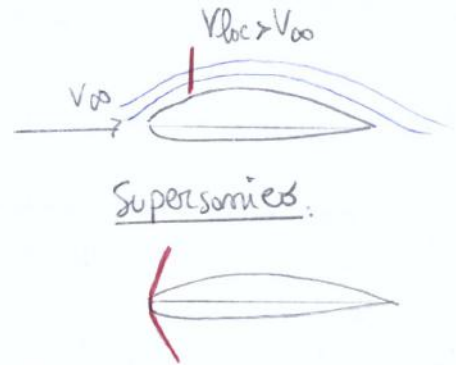
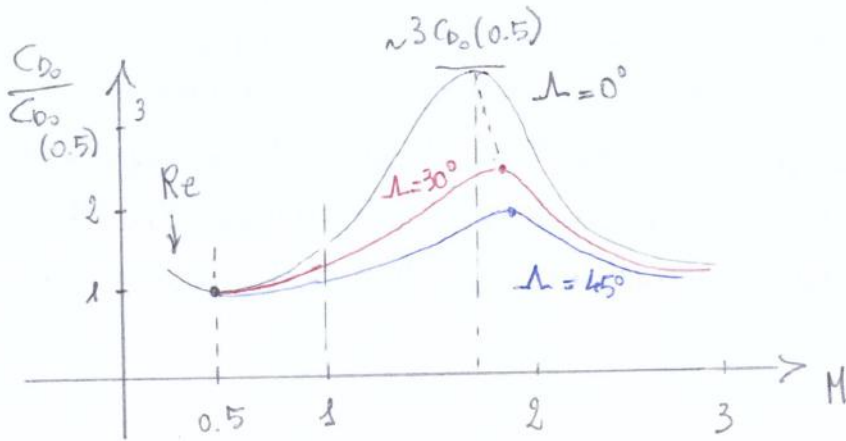
$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi \Gamma}$$

dalla relazione  $L = W \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \rho V^2 S C_L = W$$

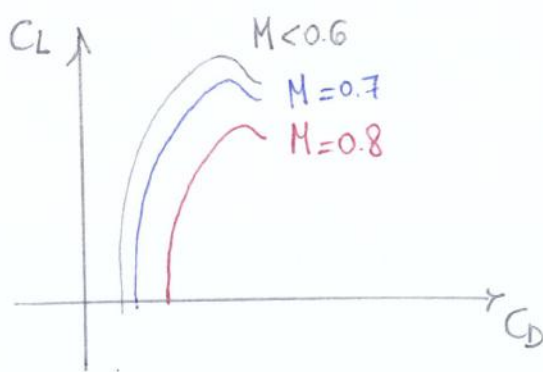
$$C_L = \frac{W/S}{\frac{1}{2} \rho V^2}$$

Un aumento tipico è quello riportato in figura, in cui  $c_{D0}$  è riferito al  $c_{D0}$  a  $Mach=0.5$ .



È possibile osservare che gli effetti del Mach critico si hanno ben prima di  $Mach=1$  poiché la velocità locale, maggiore della  $V_\infty$ , raggiunge localmente la velocità del suono, generando onde d'urto localizzate.

Entrando in regime supersonico l'onda d'urto si porta poi a monte. All'aumentare dell'angolo di freccia, il fenomeno di aumento del  $c_{D0}$  viene smorzato e il massimo delle curve si colloca a valori di Mach maggiori. Tutto ciò comporta una modifica delle polare del velivolo all'aumentare del Mach:



All'aumentare del Mach si osserva un incremento di resistenza e una diminuzione del  $C_{L,max}$ . Le distanze, a parità di  $\Delta Mach$ , tra le curve, aumentano all'aumentare di esso.

Lo riferiamo a  $M > 0.5$  poiché al di sotto di esso potrebbero verificarsi incrementi di resistenza per effetto del Reynolds.

Questo comporta che, per effetto del  $c_{D0}$  e del  $C_L$ , l'aumento della curva che mostra le variazioni della resistenza del velivolo al variare della velocità di volo aumenta più marcatamente dopo  $V=V_{cr}$

Osserviamo che, poiché  $\frac{F}{D} = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \Rightarrow \boxed{D_{min} = \frac{W}{E_{max}}}$

Al variare della quota il Mach critico non varia, allora:

$$M_{CR} = \frac{V_{CR}}{C}$$

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \sqrt{\gamma R T_0} \\ C &= \sqrt{\gamma R T} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$C = C_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

al variare della quota, varia la velocità del suono  
 $\Rightarrow z \uparrow, T \downarrow$

$$\boxed{C \downarrow}$$

Dunque si ha che:

Se  $z \uparrow, C \downarrow \Rightarrow V_{CR} \downarrow$  perché  $M_{CR} = \text{cost}$

$$\boxed{V_{CR}' < V_{CR}}$$

$\Rightarrow$  alle quote maggiori, il discountamento dell'andamento di resistenza che non tiene conto del Mach critico si ha a velocità inferiori

## SPINTE DISPONIBILI

L'andamento della resistenza è sempre quello delle spinte necessarie a volare in orizzontale a quella determinata velocità.

Qual è la spinta disponibile?

Essa dipende dal tipo di propulsore montato sul velivolo.

Concentriamoci sul propulsore a getto:

$T_d \equiv$  spinta disponibile  $= f(V, z, m)$   $\rightarrow$  m° di giri turboreattore

Andiamo ora a definire tre funzioni che dividono gli effetti dei vari parametri nell'andamento della spinta disponibile.

Essi sono relazioni semi-empiriche in grado di fornirci indicazioni generali sull'andamento di tale grandezza.

$$T_d = T_{S_0} \varphi_1(m) \chi_1(V, z) \psi_1(z)$$

$\rightarrow$  spinta statica a  $z_{SA} = 0 \text{ cm}$   
 massima per  $m = m_0$  con  
 $m_0 = m^\circ$  giri di progetto ( $\approx m_{max}$ )  
 ( $m_{velocità} = 1$ )

$$k_c = k_{S_0} \varphi_2(m) \chi_2(V) \psi_2(z)$$

$\rightarrow$  consumo specifico  $\left[ \frac{\text{kg comb}}{\text{kg} \cdot \text{h}} \right]$   
 M di comb. consumati nell'unità di tempo per unità di spinta

- Dipendenza da V

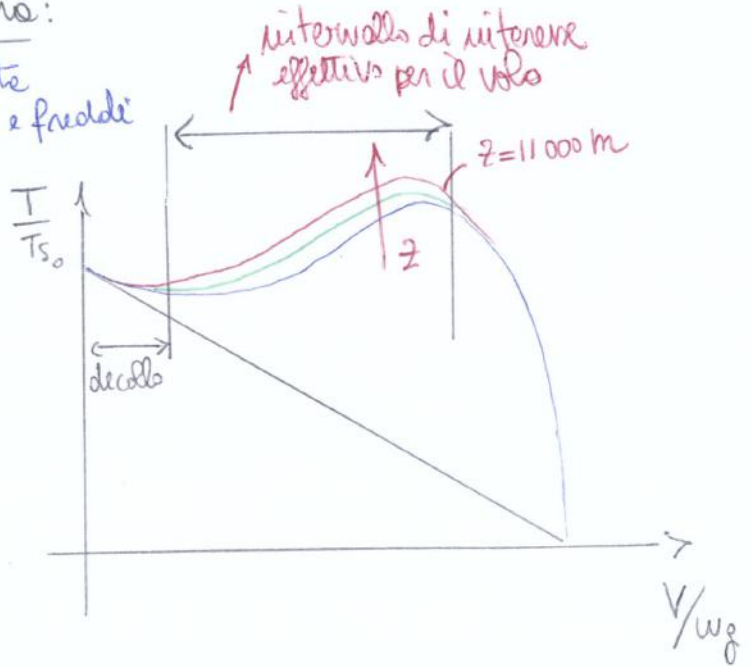
$T = \frac{G}{g} (w_g - V)$  con  $G = \text{portata in peso}$   
 ↳  $\rightarrow$  min, portata in riserva  
 ↳ velocità di effluvio

Le spinte statiche a quota zero sono:

$T_{s_0} = \frac{G_0}{g} (w_g)$  ↳ deve pesare la portata dei gas caldi e freddi

Per cui:

$\chi_1 = \frac{T}{T_{s_0}} = \frac{G}{G_0} \left( 1 - \frac{V}{w_g} \right)$



Permanebbi a questa relazione avremmo un andamento di  $T/T_{s_0}$  in funzione di  $V/w_g$  lineare.

Ma non si è tenuto conto però dell'effetto benefico delle velocità nella presa d'aria.

Per fare ciò modifichiamo la relazione aggiungendo due termini:

$\left( 1 - \frac{V}{w_g} \right) + \frac{\frac{1}{2} \rho V^2}{\rho} \left[ 1 - \left( \frac{V}{w_g} \right)^4 \right]$  ↳ termine che considera il tappamento della presa, oltre una certa velocità non funziona più bene

Allora:

↳ effetto benefico compressione dinamica nella presa d'aria

$\chi_1(V, z) = 1 - \frac{V}{w_g} + \frac{\frac{1}{2} \rho V^2}{\rho} \left[ 1 - \left( \frac{V}{w_g} \right)^4 \right] \Rightarrow \chi_1(V, z) = 1 - \frac{V}{w_g} + \frac{1}{2} \frac{\rho V^2}{\rho} \left[ 1 - \left( \frac{V}{w_g} \right)^4 \right]$   
 $c = \sqrt{kRT} = \sqrt{k \frac{p}{\rho}}$  ↳  $c^2$

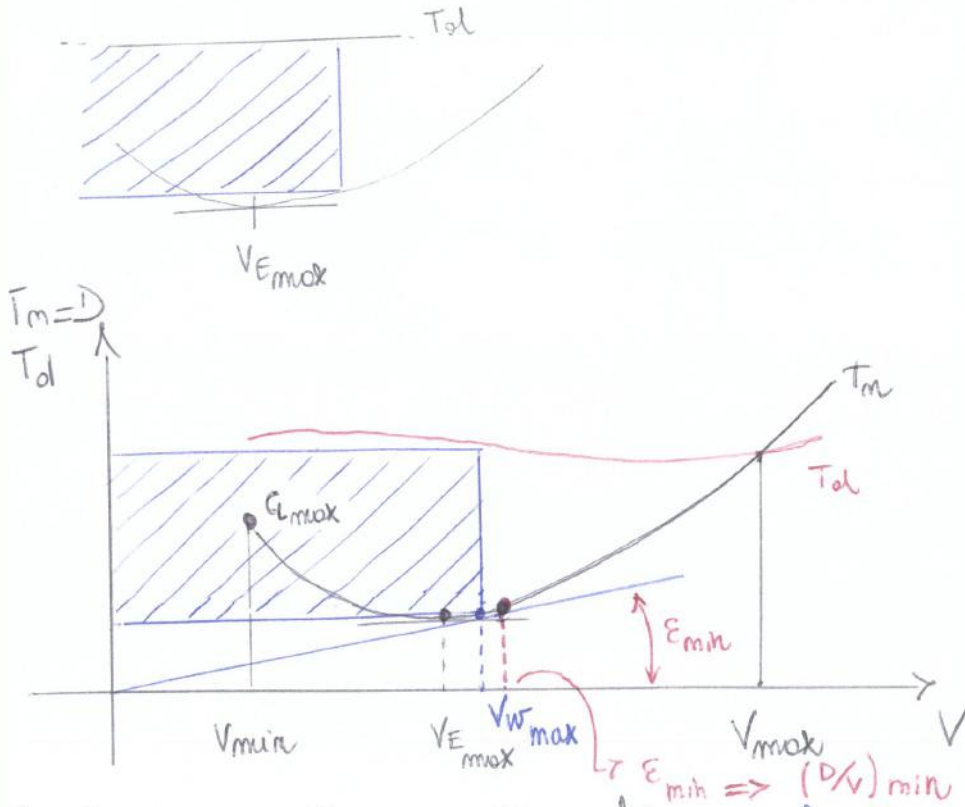
Supponiamo che la quota sia la stessa  $\Rightarrow$  con  $\varphi = 0.7$  è possibile volare orizzontalmente alla  $V_{min}$  e a un'altra velocità che corrisponde alla  $V_{max}$  per  $\varphi = 0.7$ . Per tutte le velocità comprese tra questi due valori si ha un surplus di spinta disponibile.

Definita la velocità alla quale voglio volare è possibile determinare la manetta che permette di ottenere la curva  $\tau$  fuori dal valore voluto.

In tutte le condizioni in cui si ha un surplus di spinta disponibile, è possibile volare in salita.



L'altezza massima del rettangolo, supponendo  $T_d$  costante al variare della velocità, si ha per  $T_m = T_m^{min}$ , ma tale punto non massimizza l'area. Essa sarà massima per un valore di velocità maggiore e cui non corrisponde la massima differenza  $T_d - T_m$ .



Ragioniamo sulla seguente questione: perché è necessaria l'ipotesi di  $\gamma$  contenuto?

Osserviamo il grafico sopra diseguito:

Sappiamo che  $T_d = T_s \varphi_i(\alpha) X_1(V, z) \varphi_i(z)$   $\Rightarrow$  eseguite una determinate quota, un m° di giri e una velocità, la spinta disponibile non dipende dal fatto che stiamo volando, scendendo o volando in orizzontale.

Che cosa succede, a parità di velocità, alla spinta necessaria, se non ricorriamo in condizione di volo orizzontale ma in salita?

In questo caso, dall'equilibrio verticale,  $L = W \cos \gamma$

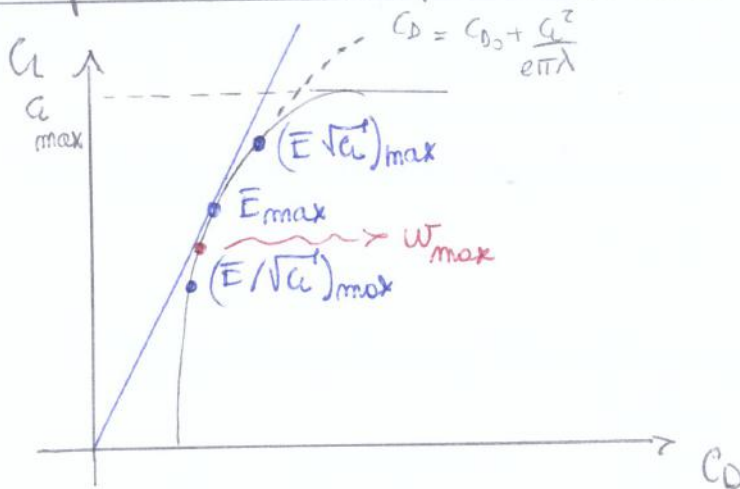
$\Rightarrow C_L = \frac{W/S}{\frac{1}{2} \rho_0 V^2} \cos \gamma \Rightarrow$  la portanza non deve equilibrare più tutto il peso, ma solo una parte, per cui il  $C_L$  sarà inferiore, a pari velocità, rispetto al volo orizzontale.

$$\frac{3}{2} \frac{\sqrt{C_L}}{e\pi\lambda} = \frac{C_{D_0}}{2C_L^{3/2}} \Rightarrow C_L^2 = \frac{1}{3} C_{D_0} e\pi\lambda$$

$$\Rightarrow C_L (E/\sqrt{C_L})_{\max} = \sqrt{\frac{e\pi\lambda C_{D_0}}{3}}$$

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{e\pi\lambda} \Rightarrow C_D (E/\sqrt{C_L})_{\max} = \frac{4}{3} C_{D_0}$$

Ricapitoliamo ora i punti caratteristici della polare:

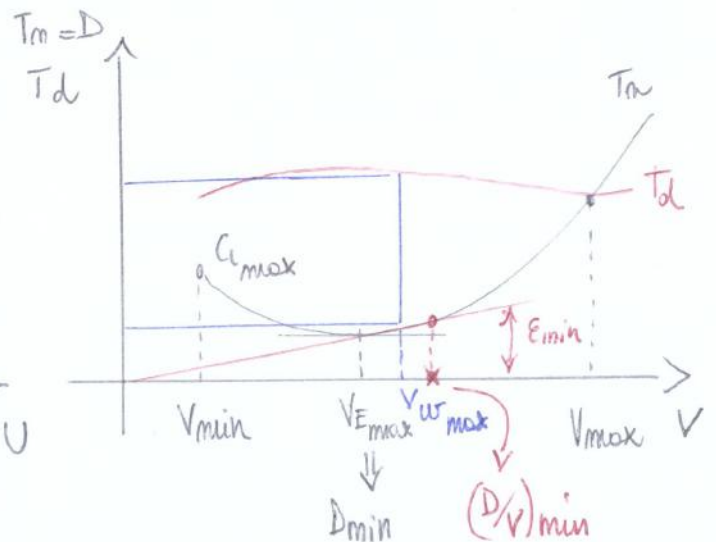
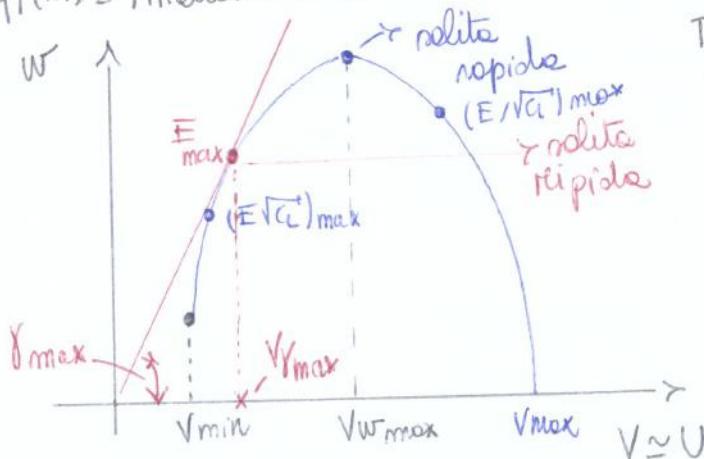


- Il punto in cui  $(E/\sqrt{C_L})_{\max}$  si ha è  $C_L$  un po' inferiore.
- Il punto in cui si ha  $W_{\max}$  si trova in genere tra il punto di  $E_{\max}$  e quello in cui  $(E/\sqrt{C_L})_{\max}$

Aumento velocità di salita  $w$  in funzione della velocità di volo  $V \approx U$  ( $U = V \cos \gamma$ ):

Supponiamo di partire dalle curve di  $T_m$  e  $T_d$  delle pagine precedenti fissata una determinata quota, dato un peso specifico e considerando  $\varphi_1(m) = m \cos \alpha = 1$ .

$$\varphi_1(m) = m \cos \alpha = 1$$



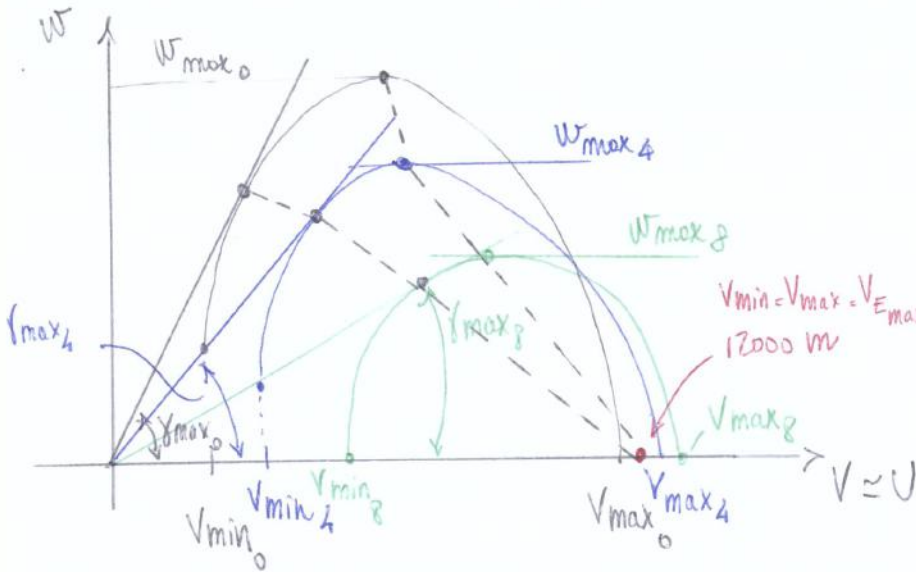
$$w = \frac{(T_d - D)V}{W} = \frac{(T_m - T_m)V}{W}$$

alle  $V_{E_{max}}$  & un valore prossimo ad esso.

↳ QUOTA DI TANGENZA TEORICA

È detta teorica perché in realtà le velocità di salite si annulla in un tempo infinito

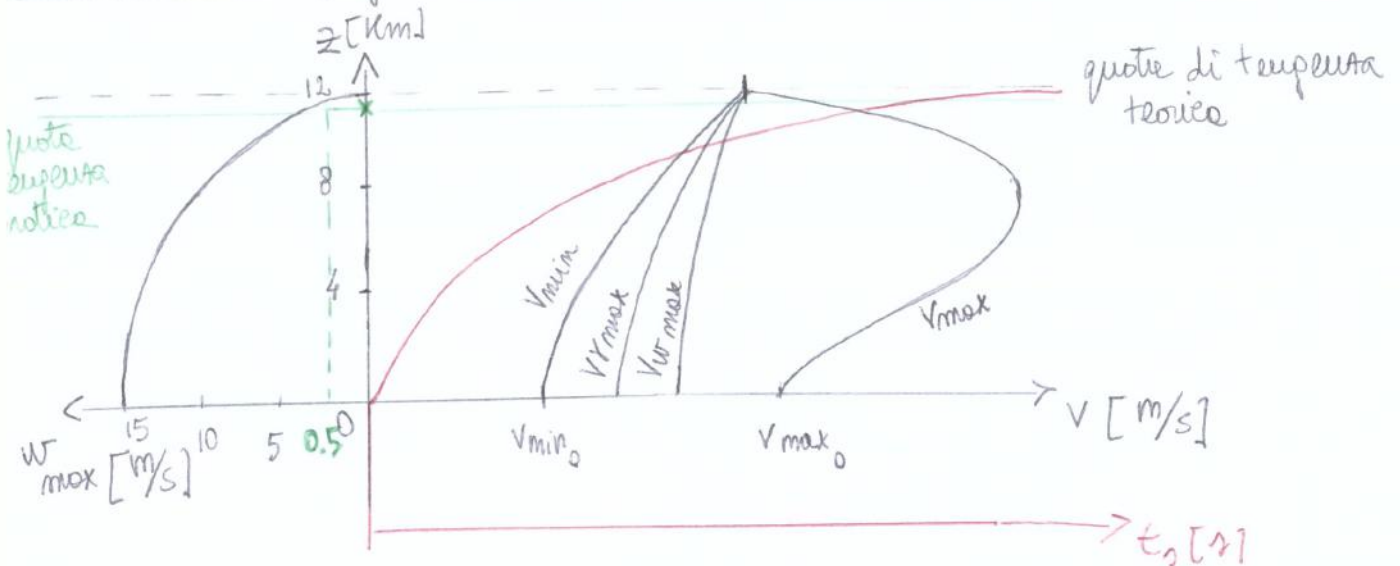
Ripontiamo ora, in base al grafico appena disegnato, come varia l'andamento delle velocità di salite al variare delle quote:



$$W = \frac{(T_d - T_m)V}{W}$$

- z = 0 m
- z = 4000 m
- z = 8000 m
- z = 12000 m

Continuiamo un grafico riassuntivo:



- Fino a una certa quota le  $V_{min}$  sono caratterizzate anche dal  $C_{L_{max}}$ . Dopo di esse, il  $C_{L_{max}}$  non ci sarebbe abbastanza spinto, per cui le  $V_{min}$  si hanno a un  $C_L$  un po' inferiore.
- Come quote di tangenza pratica si prende quella per cui si ha una  $W$  di salite non > 0,5 m/s.

## OSSERVAZIONE

La quota massima tecnicamente raggiungibile da un velivolo non coincide con la quota di tangenza tecnica.

Trascurando le dissipazioni per via della resistenza, per la conservazione dell'energia si ha che:

$$\Delta h = \frac{1}{2} \frac{V^2}{g}$$

incremento ulteriore di quota a partire dalla  $Z_{Tg}$ .

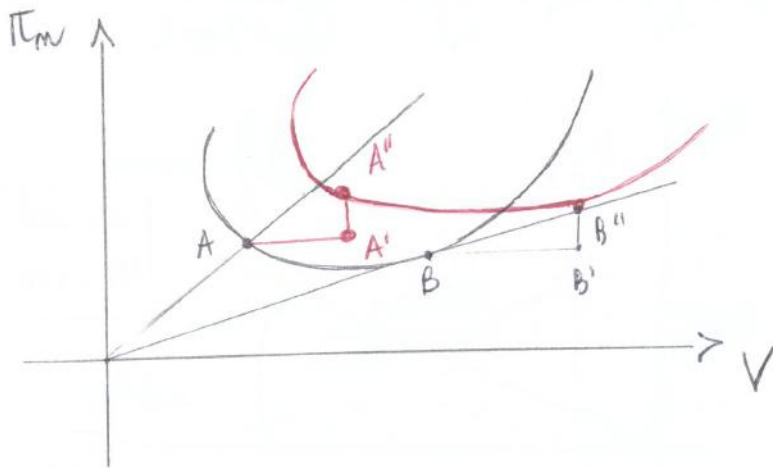
$$\Rightarrow \boxed{\pi_{m \min} \leftrightarrow (E \sqrt{C_L})_{\max}}$$

$$2) \text{ tog } \varepsilon = \frac{\pi_m}{V} = \frac{\frac{1}{2} \rho V^3 S C_D}{V} = \frac{1}{2} \rho \frac{W/S}{\frac{1}{2} \rho C_L} C_D S = \frac{W C_D}{C_L} = \frac{W}{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{tog } \varepsilon_{\min} \leftrightarrow E_{\max}}$$

### Dipendenza di $\pi_m$ dalla quota $z$

Consideriamo il grafico ottenuto e vediamo come cambia al variare di  $z$ :



Ragioniamo a partire di  $C_L$  :  $C_L = \frac{W/S}{\frac{1}{2} \rho_0 (V_i)^2}$   $\rightarrow \boxed{V_e = V_c}$  se:

- errori di posizione e di strumento = 0
- trascuriamo effetti legati alla compressibilità dell'aria

Se  $C_L = \text{cost} \Rightarrow V_i = \text{cost}$

$$\Rightarrow \boxed{V = V_e \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} = V_i \cdot \frac{1}{\sqrt{S}}}$$

presso un punto A sulla curva base, l'ascissa di esso si sposta di una quantità proporzionale a  $\frac{1}{\sqrt{S}}$   $\rightarrow A'$

Se  $C_L = \text{cost} \Rightarrow C_D = \text{cost} \Rightarrow D = \frac{1}{2} \rho_0 V_i^2 S C_D = \text{cost}$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_m = D \cdot V = D \cdot V_i \cdot \frac{1}{\sqrt{S}}}$$

il punto A' si sposta verso l'alto di una quantità proporzionale a  $\frac{1}{\sqrt{S}}$   $\rightarrow A''$

Il passo geometrico assoluto varia al variare di  $r$  considerato. A seconda di  $r$  facciamo sempre un giro, ma esso può essere più lungo o più corto, per cui il passo cambia.

$\alpha =$  incidenza aerodinamica del profilo posto alla distanza  $r$  dall'asse di rotazione

$\beta =$  angolo geometrico relativo  
 angolo tra il disco d'elica e la direzione  $C_1=0$   
 È l'angolo che definisce il collettamento del profilo

$$\tan \beta = \frac{p}{2\pi r}$$

$\epsilon =$  angolo aerodinamico relativo

angolo della risultante del vettore velocità di cui è animato il profilo rispetto al disco d'elica

$$\tan \epsilon = \frac{V}{\omega r}$$

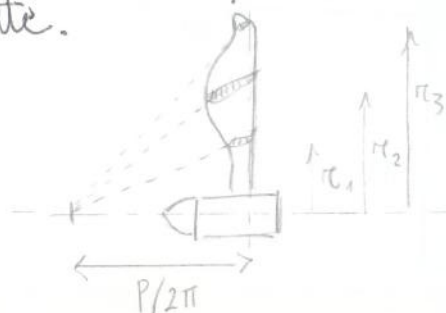
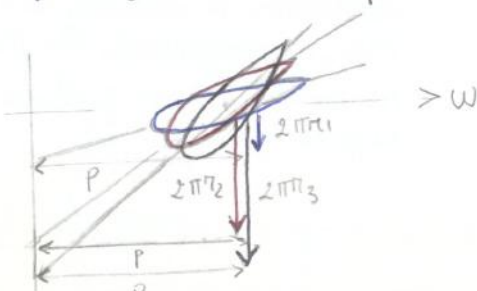
$h = \tan \epsilon \cdot 2\pi r =$  avanzamento per giro

il fatto che  $p \neq h$  garantisce la possibilità di avere un'incidenza  $\alpha \neq 0$

### elica a passo uniforme

Quando il collettamento delle varie sezioni lungo il raggio è tale per cui i prolungamenti finiscono tutti nello stesso punto, cioè ho lo stesso passo geometrico lungo il raggio.

Ogni sezione ha una propria direzione  $C_1=0$  che, nel giro, determina lo stesso passo geometrico uguale per tutte.



Allora:

$$dT = dL \cos \epsilon - dD \sin \epsilon$$

$$dC = \kappa (dL \sin \epsilon + dD \cos \epsilon)$$

Imponiamo che:

$$\left. \begin{aligned} dS &= c d\pi \\ dL &= \frac{1}{2} \rho_0 S W^2 C_L c d\pi \\ dD &= \frac{1}{2} \rho_0 S W^2 C_D c d\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} dT &= \frac{1}{2} \rho_0 S W^2 (C_L \cos \epsilon - C_D \sin \epsilon) c d\pi \\ dC &= \frac{1}{2} \rho_0 S W^2 (C_L \sin \epsilon + C_D \cos \epsilon) c \pi d\pi \end{aligned} \right.$$

*geometria e aerodinamica pale*

Introduciamo:

$$\left. \begin{aligned} z &= m^{\circ} \text{ pale} \\ W &= \frac{w \pi}{\cos \epsilon} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} T &= z \int_0^{\pi_e} dT = \frac{1}{2} \rho z W^2 \pi_e^4 \int_0^1 \frac{C_L \cos \epsilon - C_D \sin \epsilon}{\cos^2 \epsilon} \frac{c}{\pi_e} \frac{\pi^2}{\pi_e^2} d\left(\frac{\pi}{\pi_e}\right) \\ C &= z \int_0^{\pi_e} dC = \frac{1}{2} \rho z W^2 \pi_e^5 \int_0^1 \frac{C_L \sin \epsilon + C_D \cos \epsilon}{\cos^2 \epsilon} \frac{c}{\pi_e} \frac{\pi^3}{\pi_e^3} d\left(\frac{\pi}{\pi_e}\right) \end{aligned} \right.$$

*geometria e aerodinamica pale*

Indichiamo con:

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} z \int_0^1 \frac{C_L \cos \epsilon - C_D \sin \epsilon}{\cos^2 \epsilon} \frac{c}{\pi_e} \frac{\pi^2}{\pi_e^2} d\left(\frac{\pi}{\pi_e}\right)$$

$$\kappa = \frac{1}{2} z \int_0^1 \frac{C_L \sin \epsilon + C_D \cos \epsilon}{\cos^2 \epsilon} \frac{c}{\pi_e} \frac{\pi^3}{\pi_e^3} d\left(\frac{\pi}{\pi_e}\right)$$

Allora:

$$T = \tilde{T} \rho W^2 \pi_e^4$$


---


$$C = \kappa \rho W^2 \pi_e^5$$

FORMULE DI RENARD  
DI  
PRIMA SPECIE

*Note la geometria e l'aerodinamica della pale, gli integrali sono noti*

Definiamo:  $\rightarrow$  vel. di volo

$$t_f \epsilon_e = \frac{V}{w \pi_e} = Y$$

rapporto di funzionamento

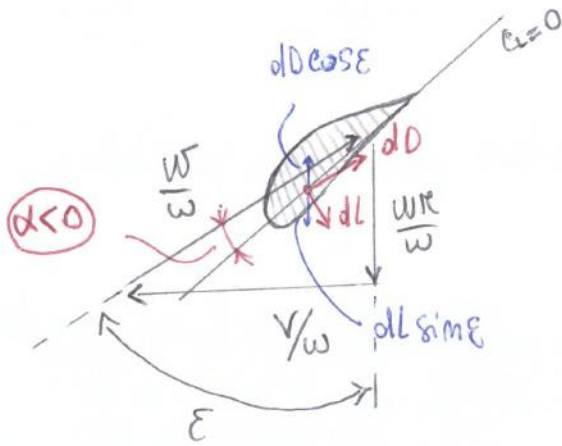
$\hookrightarrow$  vel. tangenziale (vel. estremità di pale nel disco d'elica)

Affinchè si annulli le coppie o coppia su  $\alpha$  ovvero negativo per cui

$$dL \sin \epsilon = dD \cos \epsilon$$

$\Rightarrow \alpha$  negativo (piccolo) :  $dL \sin \epsilon = dD \cos \epsilon \Rightarrow K=0 (\gamma_2)$

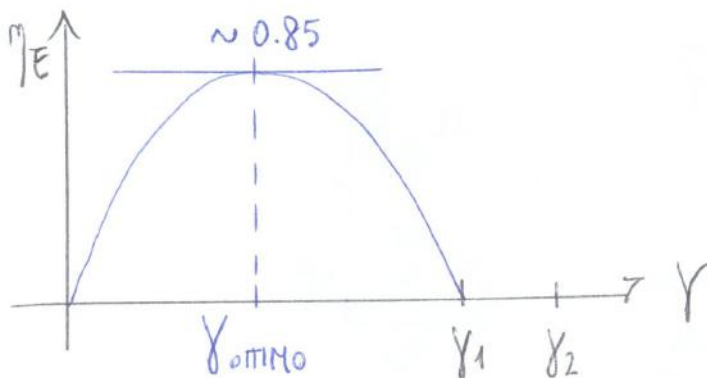
Quando  $\alpha < 0 \Rightarrow dL < 0$  e il contributo di coppia si annulla nella sezione. Se ciò è mediamente vero per tutta la pala, ecco che le coppie si annulla (globale).



Se si procede a rapporti di funzionamento oltre  $\gamma_2 \rightarrow \alpha$  molto negativo  $\Rightarrow$  l'elica funziona come un mulinello

Operando la curva del rendimento :

$$\eta_E = \frac{\tilde{C}_T}{K} Y$$



Avuto detto vale per un'elica a passo fisso.

In questo caso, si prende come valore di riferimento quello della sezione al 75% di  $r_e$  (sezione di pala che offre il contributo più utile alla trazione)



Tendenzialmente l'elica presenta una legge di avvolgimento che tende a mantenere un'incidenza ottimale dei profili lungo il raggio. (non uniforme)

Quello che si fa per cercare di migliorare le prestazioni delle pale al variare di  $\gamma = \frac{V}{\omega r}$ , è dotarle di un ulteriore grado di libertà.

È un motore ottimo e un vettore contenuto nel disco d'elica, perpendicolare all'asse di rotazione.

In questo modo è possibile variare il passo (collettamento) di ogni sezione in maniera uniforme (vedi figure pagine precedenti).

Quindi, che la pale sia a passo uniforme o non uniforme, viene dotata di passo variabile, in modo che, variando il rapporto di funzionamento, riusciamo ad avvicinarci a una distribuzione di incidenza lungo il raggio prossima a quella ottimale.

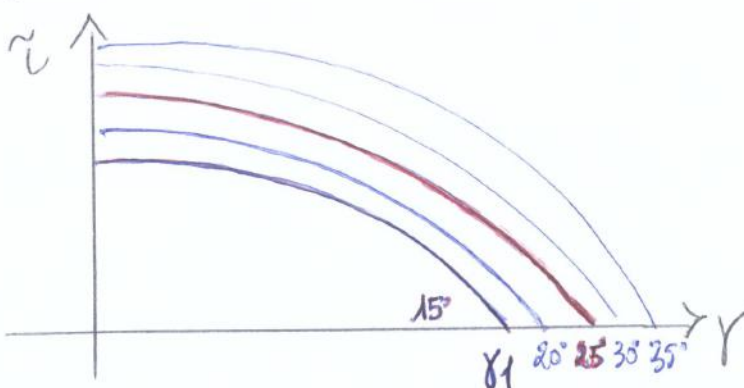
La distribuzione di incidenza ottimale si può avere per un'unica posizione del passo, definendo la legge dei collettamenti delle varie sezioni per cui l'incidenza, lungo il raggio è ottimale.

Questa è la situazione ideale che va bene per un solo  $\gamma$

⇒ variamo il passo: il passo non uniforme continuo si essere non uniforme, non ha più una distribuzione di incidenza ottimale lungo il raggio, ma cerco di avvicinarci ad essa

Se il  $\tau$  per un certo collettamento  $\beta$  misurato al 75% di  $r_c$  è quello rappresentato in rosso in figura, aumentando il passo si hanno le curve (o diminuendo)

che:



Supponiamo che tale pale sia ottimizzata per un  $\beta = 25^\circ$ , ovvero per tale  $\beta$  presenti rendimento massimo per un certo  $\gamma = \gamma_{opt}$ .

Ricordando che:

$$\gamma^2 = \frac{V^2}{\omega^2 r_e^2} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \rho V^2 \pi \left( \frac{\sigma \rho \omega^2 r_e^2 \pi r_e^2}{\frac{1}{2} \rho V^2 \pi} \right) = \frac{1}{2} \rho V^2 \pi \cdot \frac{2\sigma}{\pi} \frac{\omega^2 r_e^2 \pi r_e^2}{V^2}$$

$$T = \frac{1}{2} \rho V^2 \pi \cdot \left( \frac{2\sigma}{\pi} \cdot \frac{1}{\gamma^2} \right) r_e^2$$

↳  $C_T$

Quindi:

$$T = \frac{1}{2} \rho V^2 C_T \pi r_e^2 = \frac{1}{2} \rho V^2 C_T \cdot S$$

dove  $S = \pi r_e^2 =$  superficie disco d'elica  
 $C_T = \frac{2\sigma}{\pi \gamma^2}$

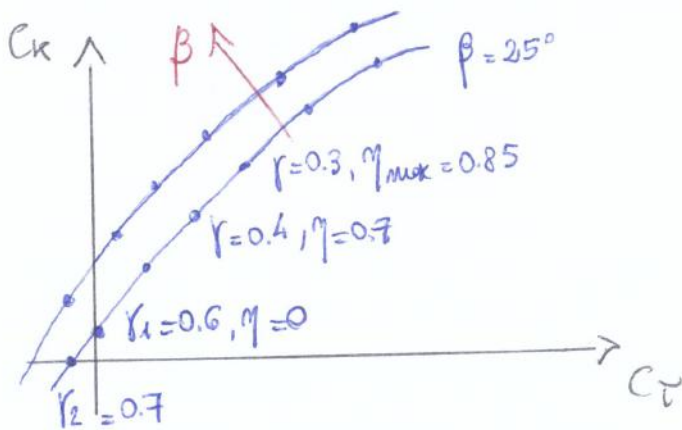
Analogamente:

$$C = \frac{1}{2} \rho V^2 C_K \pi r_e^3 = \frac{1}{2} \rho V^2 C_K \pi r_e \cdot S$$

con  $C_K = \frac{2K}{\pi \gamma^2}$

È possibile fare una rappresentazione polare di  $C_K - C_T$

↳ POLARE DELL'ELICA



Avremo una curva che interseca l'asse delle potenze e delle sollecitazioni poiché si ha una situazione in cui  $C_T = 0$  ma  $C_K \neq 0$  e una per cui  $C_K = 0$  e  $C_T \neq 0$

- $\frac{\text{var. en. cinetica}}{t} = \frac{\Delta \mathcal{E}}{t} = \frac{1}{2} A (V + \mu_0) \rho [(V + \mu_\infty)^2 - V^2]$
- $\frac{\text{lavoro compiuto dall'elica}}{t} = \frac{\Delta \mathcal{L}}{t} = T (V + \mu_0) > \pi_\mu = T \cdot V$

Per il teorema dell'energia cinetica:

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta \mathcal{L} \Rightarrow T (V + \mu_0) = \frac{1}{2} A (V + \mu_0) \rho (V^2 + 2V\mu_\infty + \mu_\infty^2 - V^2)$$

$$\underbrace{A (V + \mu_0) \rho}_{T} \mu_\infty (V + \mu_0) = \frac{1}{2} A (V + \mu_0) \rho (2V\mu_\infty + \mu_\infty^2)$$

$$\cancel{V} \mu_\infty + \mu_0 \mu_\infty = \cancel{V} \mu_\infty + \frac{1}{2} \mu_\infty^2 \Rightarrow \boxed{\mu_0 = \frac{\mu_\infty}{2}}$$

Perché:

$$T = A (V + \mu_0) \rho \mu_\infty = 2 A (V + \mu_0) \rho \mu_0 = 2 A \rho V \mu_0 + 2 A \rho \mu_0^2$$

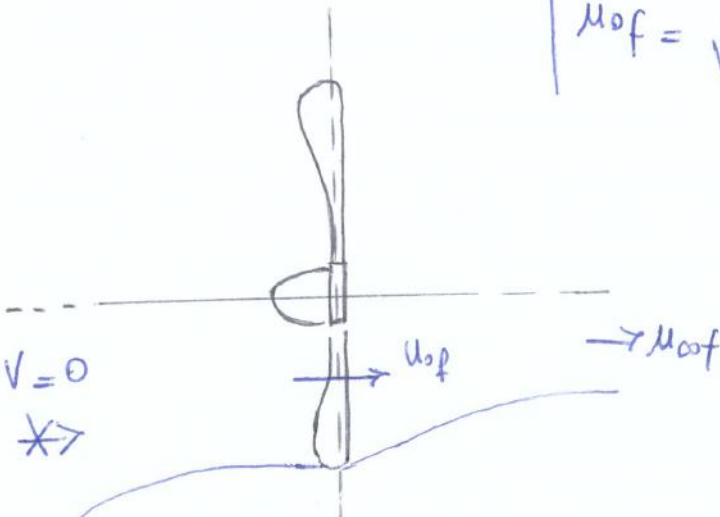
$$\Rightarrow \mu_0^2 + V \mu_0 - \frac{T}{2 A \rho} = 0 \rightarrow \mu_0 = -\frac{V}{2} \pm \sqrt{\frac{V^2}{4} + \frac{T}{2 A \rho}}$$

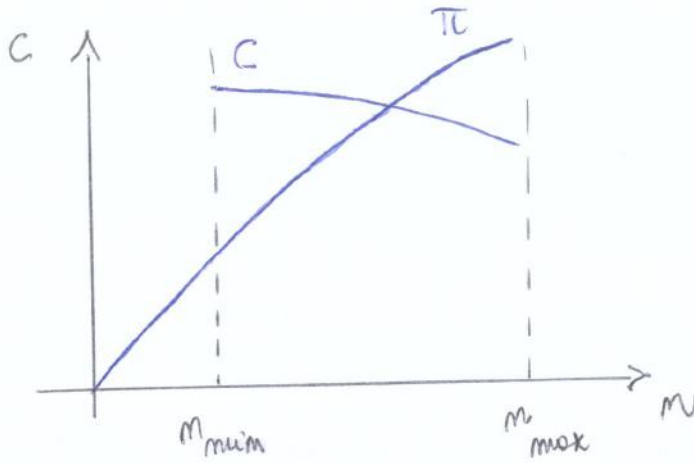
prendiamo solo il valore positivo

$$\Rightarrow \boxed{\mu_0 = -\frac{V}{2} + \sqrt{\frac{V^2}{4} + \frac{T}{2 A \rho}}}$$

incremento al disco d'elica dato le tre fibre  $\Rightarrow$  consideriamo anche la  $u_\infty = 2u_0$

punto fisso:  $V = 0 \text{ m/s} \Rightarrow \begin{cases} T_f = 2 A \rho u_{of}^2 & \text{spinta massima} \\ \mu_{of} = \sqrt{\frac{T_f}{2 A \rho}} & \text{incremento massimo di velocità} \end{cases}$

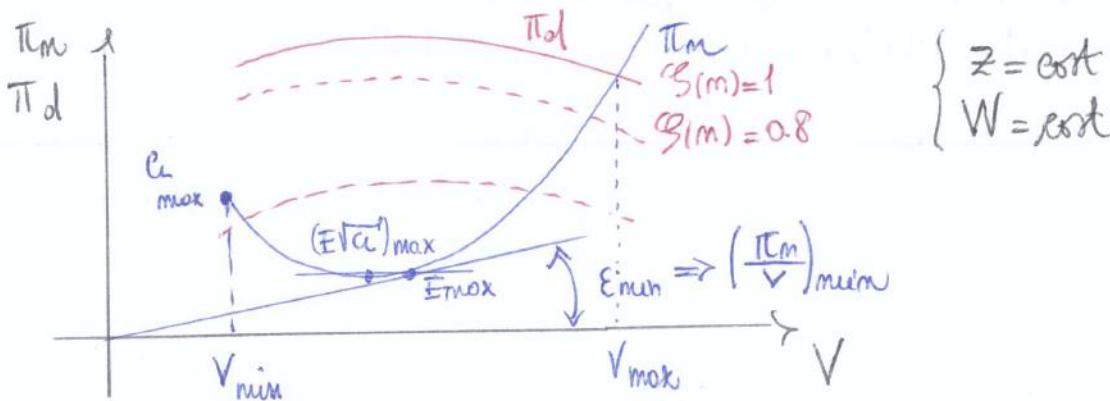




In un motore alternativo la coppia è circa costante al variare del m° di giri  
 $\Rightarrow \pi_{m_0} = C_0 \cdot \omega$ , dipende soltanto dal m° di giri

In base a ciò, data una determinata quota e un certo peso  $W$ , fissato il numero di giri ciò che fa variare la potenza disponibile in funzione delle velocità di volo è solo l'effetto del rendimento

$\Rightarrow$  l'aumento della  $\pi_d$  seguirà le curva del rendimento  $\eta_e$  dell'elica, nell'intervallo del rendimento ottimo



Come varia la curva di  $\pi_d$ ?

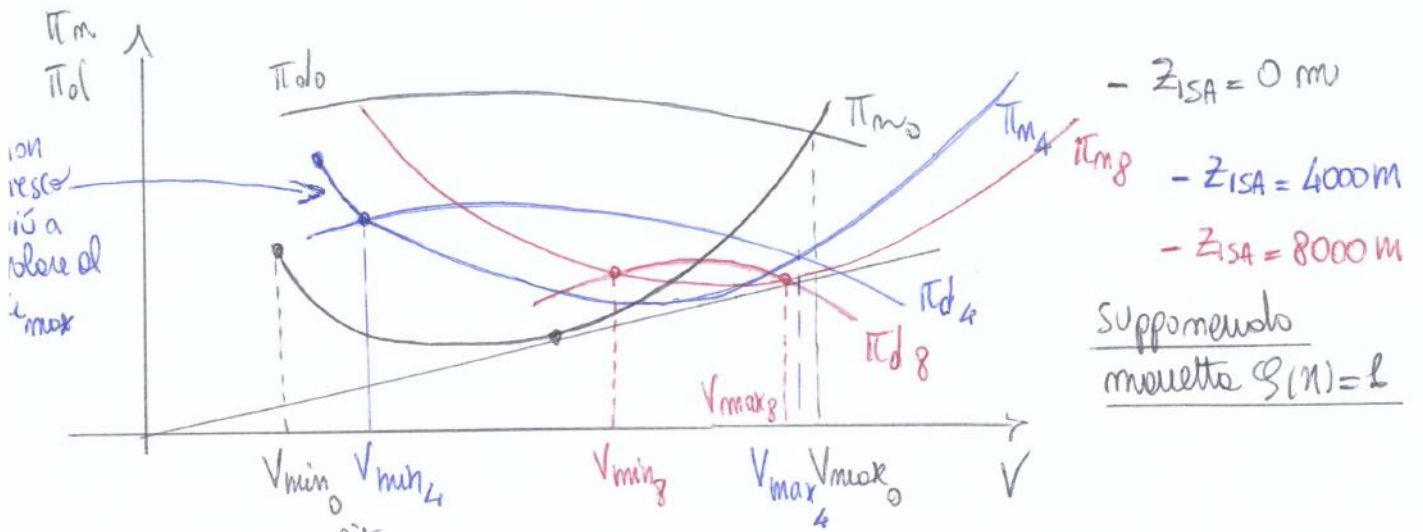
- varia per effetto di  $\psi(z)$   $\rightarrow$  le curve si allargano se  $z \uparrow$
- varia per effetto di  $\mathcal{G}(m)$  (manetta)  $\rightarrow$  se  $\mathcal{G}(m) < 1$  le curve si allargano

$\Rightarrow$  Variando la manetta è possibile far intersecare la curva delle potenze disponibili con quella delle potenze necessarie alla velocità desiderata, tale da permettere il volo orizzontale.

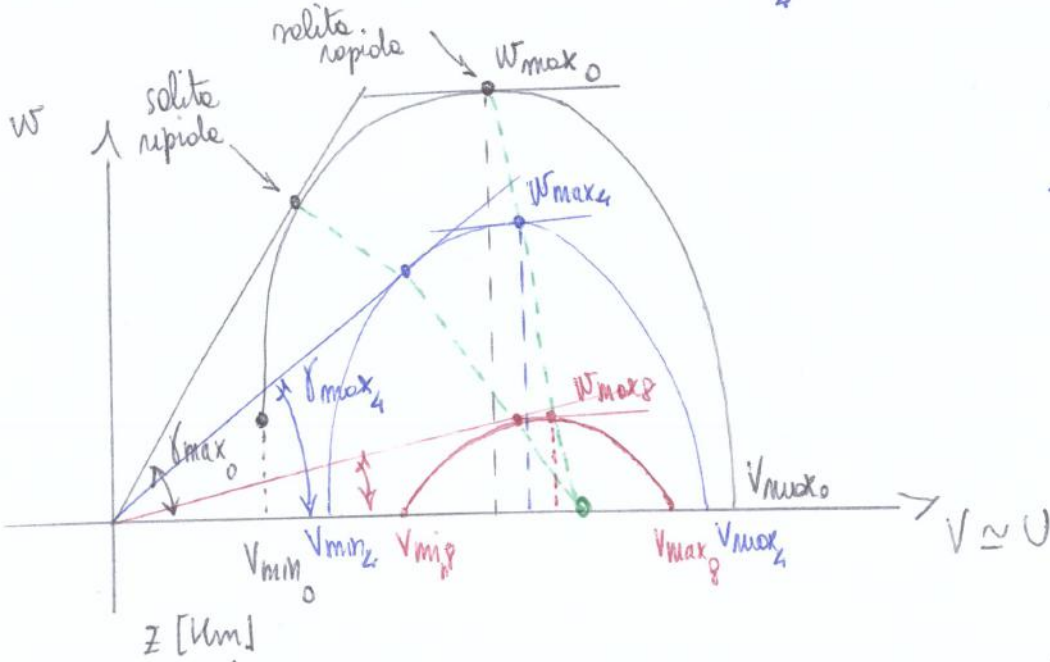
Se si è in una situazione tale per cui la curva delle  $\pi_d$  interseca in due punti la curva delle  $\pi_m \Rightarrow$  stessa potenza, due velocità diverse

Il surplus disponibile rispetto alla somma necessaria può essere utilizzato per ridurre

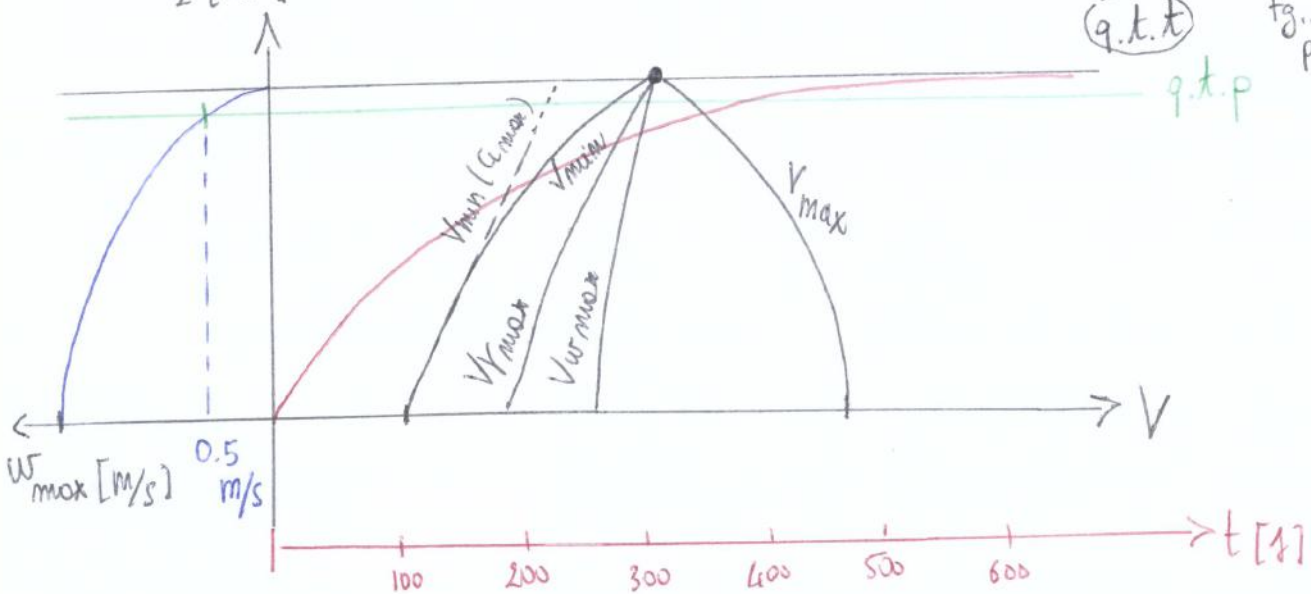
# Potenze disponibili e meccaniche in f. della velocità al variare della quota

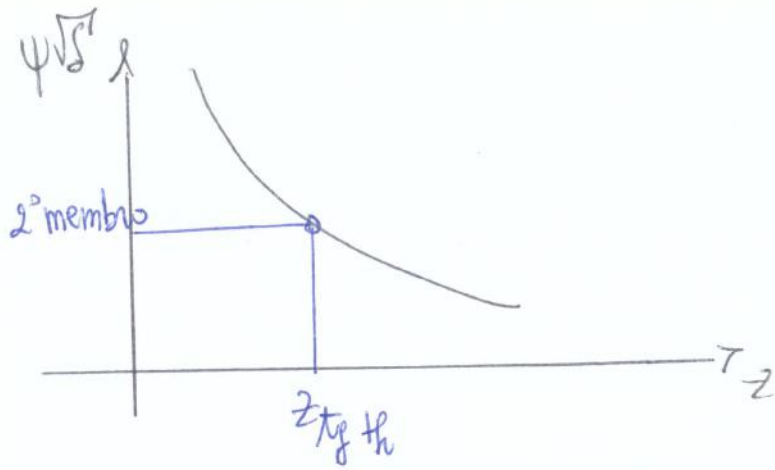


Supponendo  
manetta  $\delta(\eta) = 1$



-  $Z_{ISA} = 0 \text{ m}$   
-  $Z_{ISA} = 4000 \text{ m}$

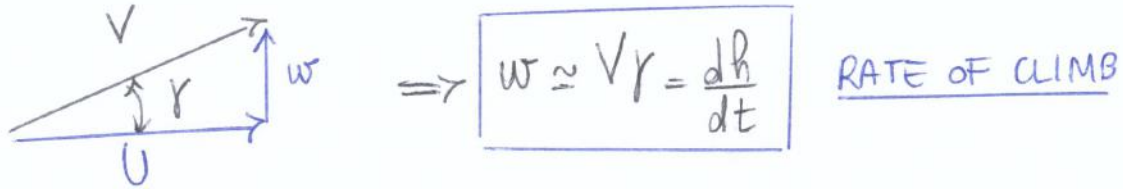




Disegnando il primo membro su f. delle quote ed entrando nel grafico con il valore del secondo membro è possibile scegliere  $z_{t_{gth}}$ .

Dall'equilibrio  $L = W = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \rightarrow V = \sqrt{\frac{W/S}{\frac{1}{2} \rho C_L}}$

Considerando il triangolo delle velocità:



$\Rightarrow$   $t_s = \frac{\Delta Z}{w_{mv}}$

per semplicità considereremo un solo intervallo di salita anche se, per precisioni maggiori  $\rightarrow t_s = \sum_{i=1}^m \frac{\Delta z_i}{w_{m,i}}$

Dalle seguenti equazioni:

$\frac{T-D}{W} = \gamma \rightarrow \frac{T V - D V}{W} = \gamma \cdot V = w \Rightarrow w = \frac{(T-D)V}{W}$

Per calcolare V abbiamo bisogno del  $C_L$ , che si ricava considerando che il velivolo sale in condizioni di  $(D/V)_{min}$ :

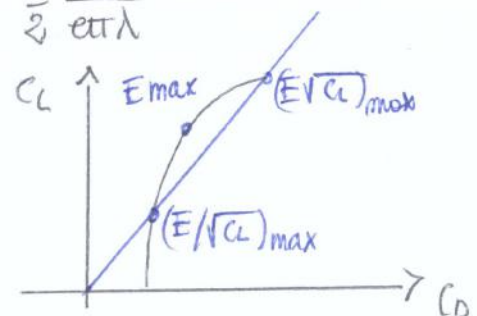
$\left(\frac{D}{V}\right)_{min} = \left(\frac{L}{EV}\right)_{min} = \left(\frac{W}{E \sqrt{\frac{W/S}{\frac{1}{2} \rho C_L}}}\right)_{min} \Rightarrow (E/\sqrt{C_L})_{max}$

$\left(\frac{E}{\sqrt{C_L}}\right)_{max} = \frac{C_L}{C_D \sqrt{a}} = \left(\frac{\sqrt{C_L}}{C_D}\right)_{max} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{C_L}}{C_D}\right)_{min}$

$\Rightarrow \gamma = \frac{C_{D0}}{C_L^{1/2}} + \frac{C_L^{3/2}}{e \pi \lambda} \Rightarrow \frac{d\gamma}{dC_L} = -\frac{1}{2} C_{D0} C_L^{-3/2} + \frac{3}{2} \frac{C_L^{1/2}}{e \pi \lambda} = 0$

Allora:

$C_L = \sqrt{\frac{e \pi \lambda C_{D0}}{3}} \rightarrow E = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{\sqrt{C_{D0} K}}$   
 $C_D = 4/3 C_{D0}$



$$\Rightarrow t_s = \frac{\Delta z}{w_m} = 468.525 = 7,80 \text{ min} = 7 \text{ min } 48 \text{ s}$$

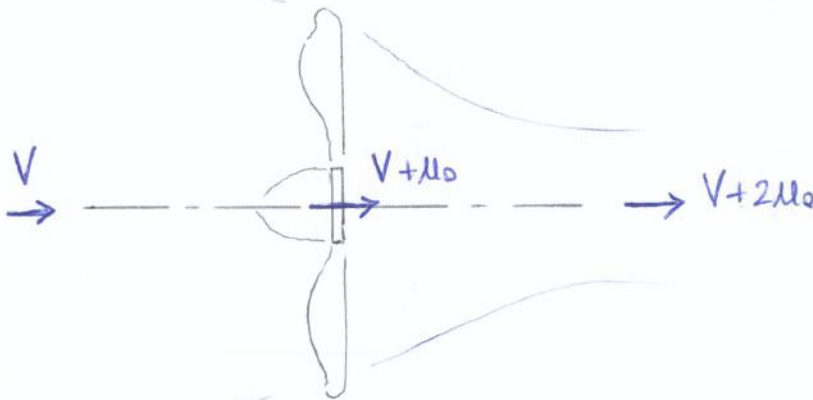
② Determinare la spinta  $T$  erogata da un'elica in volo alla velocità  $V$ , conoscendo l'incremento di velocità del disco  $u_0$ .

Sono dati:

$$\begin{cases} - V = 100 \text{ m/s} \\ - z_{ISA} = 2000 \text{ m} \rightarrow \rho = \rho_0 \left( \frac{T-h z_{ISA}}{T_0} \right)^{4.2561} = 1,006 \text{ kg/m}^3 \\ - \phi_e = 1.6 \text{ m (diametro elica)} \\ - u_0 = 3.5 \text{ m/s} \end{cases}$$

TEOREMA QDM:

$$\begin{aligned} T &= \dot{m} (\Delta V) = \\ &= \rho A_d V_{\text{disco}} (2u_0) = \\ &= \rho \pi \left( \frac{\phi_e}{2} \right)^2 (V+u_0) (2u_0) \end{aligned}$$



risultati derivano dalla teoria di Rankine-Froude:

$$\frac{\Delta E}{t} = \frac{1}{2} \dot{m} [(V+u_\infty)^2 - V^2] = \frac{1}{2} \rho A (V+u_0) [V^2 + u_\infty^2 + 2V u_\infty - V^2]$$

en. cinetica  
nell'unità  
di tempo

$$\frac{\Delta \mathcal{L}}{t} = T \cdot (V+u_0) \text{ lavoro compiuto dall'elica nell'unità di tempo}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta E = \Delta \mathcal{L} &\rightarrow \frac{1}{2} \rho A (V+u_0) [u_\infty^2 + 2V u_\infty] = \rho A (V+u_0)^2 \\ V u_\infty + \frac{u_\infty^2}{2} &= (V+u_0) u_\infty \Rightarrow \boxed{u_0 = \frac{u_\infty}{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = 1,006 \cdot \pi \left( \frac{1.6}{2} \right)^2 (100+3.5) \cdot (2 \cdot 3.5) = 1465,43 \text{ N}$$



Per  $E = E_{max}$  consideriamo che:

$$C_L = \sqrt{e\pi\lambda C_{D_0}} = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{k}} = 0.674$$

$$C_D = 2C_{D_0} = 0.04$$

$$E = \frac{\sqrt{e\pi\lambda C_{D_0}}}{2C_{D_0}} = \sqrt{\frac{e\pi\lambda}{4C_{D_0}}} = \frac{1}{2\sqrt{kC_{D_0}}} = 16.85$$

$$\Rightarrow \pi_m = D \cdot V = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D \cdot V = \frac{1}{2}\rho S C_D \left(\frac{W/S}{1/2\rho C_L}\right)^{3/2} = 149235,87 \text{ N}$$

$$\Rightarrow W = \frac{469791 - 149235,87}{35000} = 9.158 \text{ m/s}$$

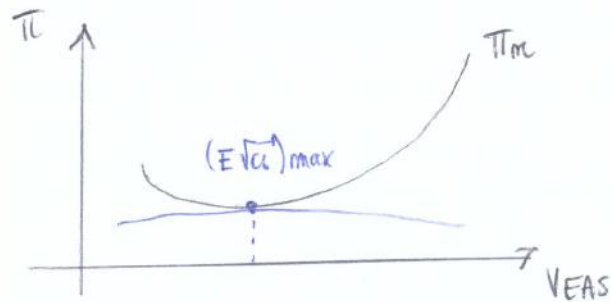
④ Determinare la quota di tangenza teorica  $z_{max}$  per un velivolo col elica propulso che:

$$\left. \begin{array}{l} - C_{D_0} = 0.02 \\ - S = 20 \text{ m}^2 \\ - \lambda = 8 \\ - e = 0.9 \\ - W = 35000 \text{ N} \end{array} \right\} C_D = 0.02 + 0,044 C_L^2$$

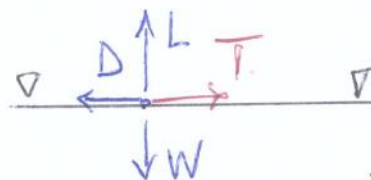
$$- \pi_{m_0} = 1500 \text{ hp} = 1500 \cdot 745,7 \text{ W} = 1118550 \text{ W}$$

$$- \eta_e = 0.85$$

Alle quote di tangenza è possibile solo volo orizzontale alle  $V = V_{(E/C_L)_{max}}$ :



$$(E/C_L)_{max} \Rightarrow \pi_{min}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} L = W \rightarrow V = \sqrt{\frac{2W/S}{C_L}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \\ T = D \Rightarrow \pi_m = \pi_d \end{array} \right.$$

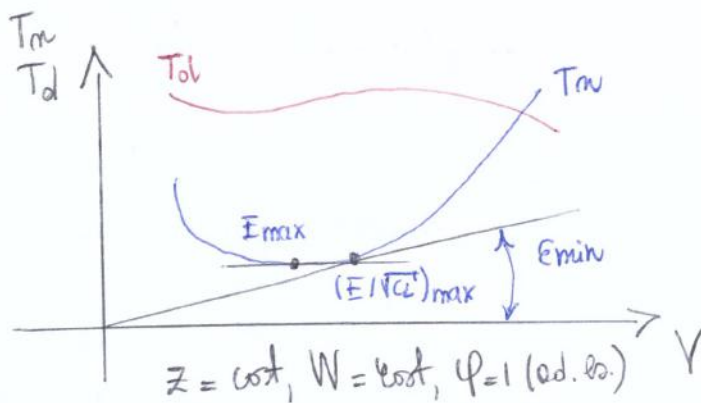
# AUTONOMIA IN CROCIERA

In questa sezione affronteremo il discorso dell'autonomia in crociera per un velivolo a getto e ad elice.

Distinguiamo per prima cosa:

- autonomia → chilometrica
- durata → autonomia oraria

## Autonomia del velivolo a getto



$$T_{0l} = T_{50} \cdot \psi_1 \chi_1 \varphi_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - \psi_1 = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T_0}{T} \left( \frac{T_0}{T} \right)^{0.75} = \frac{\rho}{\rho_0} \left( \frac{T_0}{T} \right)^{1.75} \\ - \varphi_1 = \left( \frac{m}{m_0} \right)^{3.5} \\ - \chi_1 = 1 - \frac{V}{w_g} + \frac{1}{2} \frac{KN^2}{w_g} \left[ 1 - \left( \frac{V}{w_g} \right)^4 \right] \end{array} \right.$$

•  $\left( \frac{E}{\sqrt{c_i}} \right)_{\max} \rightarrow \uparrow_{\max}$  (autonomia max)

•  $E_{\max} \rightarrow t_{\max}$  (massima durata)

## FORMULE DI BREGUET

### Autonomia chilometrica

$$\left. \begin{array}{l} T = D = \frac{1}{2} \rho_0 S V^2 C_D \\ L = W = \frac{1}{2} \rho_0 S V^2 C_L \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{traiettoria orizzontale} \\ \sigma \\ \text{sub-orizzontale} \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{W}{T} = \frac{L}{D} = E \rightarrow \boxed{\frac{T}{W} = \frac{1}{E}} \quad (1)$$



È facile osservare che  $R_{max} \Rightarrow (E/\sqrt{C_L})_{max}$  ( $\alpha z = best, K \approx cost = K_m$ )

In questo caso  $\frac{T_m}{V} = \left(\frac{T_m}{V}\right)_{min} \rightarrow$  minima energia nell'unità di spazio ↓  
consumo specificato medio

Facendo i conti in maniera più precisa si osserva che quello che sarebbe opportuno mantenere costante durante la crociera e massimo non è solo la quantità  $(E/\sqrt{C_L})$ , ma il prodotto:

$$\frac{E}{\sqrt{C_L}} \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} = \sigma$$

fattore di economia di percorso

Quale sarebbe la migliore condotta di volo per consumare il meno possibile e dunque avere il massimo  $\sigma$ ?

Si procede in questo modo:

$R_{max} \Rightarrow \sigma_{max}$ , perché vogliamo percorrere il massimo spazio dato un certo  $G$  e un certo  $W_i$ , con il minimo consumo

$z_i$  } definite

$W_i$  } quote iniziale crociera e peso iniziale crociera

$\Rightarrow$  fisso un  $C_L$  di volo partendo dal  $C_L$  di  $(E/\sqrt{C_L})_{max}$ , poiché l'influenza del  $K$  sopra il  $C_{L,OPT}$  più e di tale valore (e vel. più basse)

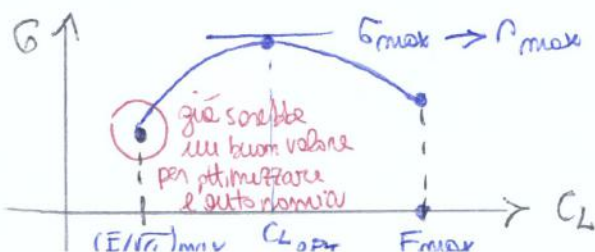
$\rightarrow C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi \Lambda} \rightarrow E \rightarrow \frac{E}{\sqrt{C_L}}$

$\rightarrow V_i \rightarrow V \rightarrow M \rightarrow X_1 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\psi_1}{\text{dalla quota}} \rightarrow \psi_1 = \frac{D}{T_{50} X_1 \psi_1} \rightarrow M$  ( $C = T = W/E$ )

$\rightarrow \psi_2 \rightarrow \psi_2 \rightarrow X_2 \rightarrow K \rightarrow G$  (dalla quota)

Applicando tale procedimento con più valori di  $C_L$  si ottiene tale grafico:



Con tale valore di  $\sigma$  calcolato effettua il primo tratto della tratta. Dopo un tot di carburante utilizzato, vedo lo spazio percorso e ne effettua il calcolo, poiché  $W$  cambia e il  $C_L$  che ottimizza  $\sigma$  sarà un po' differente.

② Se  $C_L = \text{cost}$ ,  $V = \text{cost} \Rightarrow \begin{cases} z \neq \text{cost} \\ \varphi \neq \text{cost} \end{cases}$  (STRATEGIA A VISTA IN PRECEDENZA)

In questo caso, poiché  $V_f = \sqrt{\frac{W_f/S}{\frac{1}{2}\beta\delta C_L}} = \text{cost} \rightarrow$  il delta deve variare allo stesso modo in cui varia il peso.

Note la quota finale, dunque la funzione  $\psi_2$ , dalle relazioni precedenti è possibile calcolare la manovella finale:

Se  $W_f = 90\% W_i$   
 $\Rightarrow \delta = 90\% \delta_i$   
 $\Rightarrow$  la quota finale è subito nota

$$\begin{cases} \frac{T}{W} = \frac{1}{E} \\ T = T_0 \psi_1 \psi_2 K_1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\psi_2 = \frac{W_f}{T_0 E \psi_1 K_1}} \rightarrow \begin{array}{l} \text{secondo membro} \\ \text{completamente} \\ \text{noto} \end{array}$$

Autonomia oraria

Dalla relazione precedentemente ottenuta:

$\left( K dt \frac{T}{W} \right)^{-dW} = \frac{1}{E} K dt$  moltiplicando per K dt cubo i membri

$$- \frac{dW}{W} = \frac{K}{E} dt \rightarrow dt = - \frac{E}{K} \frac{dW}{W};$$

$$t = \frac{E}{K} \ln \frac{W}{W-G} = \left( \frac{E}{K} \right)_m \ln \frac{1}{1 - \frac{G}{W_i}}$$

$W_f = W_i - G \leftarrow$

portato fuori dal segno di integrale considerato un valore medio

Anche in questo caso i parametri in gioco sono gli stessi del caso precedente, poiché in  $\frac{E}{K}$  è compreso:  $C_L, V, \psi_1, z$ .

Considerando  $K = K_m = \text{costante}$

$\Rightarrow$   $t_{\text{max}}$  si ha per  $E = E_{\text{max}}$  (punto di minimo della curva delle spinte necessarie)

In maniera analogo al caso precedente, definiremo  $\frac{E}{K} \equiv$  FATTORE DI MASSIMA DURATA  $\rightarrow$  con un processo iterativo partendo da un determinato  $C_L$  si osserva che per massimizzare  $E/K$

- la curva rossa rappresenta la curva teorica del momento di trasporto

- Introducendo le limitazioni si ha che:

- primo tratto lineare (in verde), poiché  $\left(\frac{J}{W}\right) = \text{cost}$  per  $\rho$  che aumenta (limitazione fuelina)
- secondo tratto che segue la curva teorica e in cui si raggiunge  $i_{\text{max}}$
- tratto verticale fino a  $i=0$ , quando  $\rho = \rho_{\text{max}}^{\text{eff}}$  (limitazione rotolario)

Il momento di trasporto definisce le capacità operative del velivolo, ovvero le tonnellate di carico utile trasportabile, moltiplicate per i Km che è possibile fare con tale carico utile, riferite alle tonnellate del peso massimo.

È importante che il massimo momento di trasporto sia effettivamente utilizzabile: se ci fosse una limitazione per il payload che impedisse di ottenere  $i_{\text{max}}$  che si ha senza limitazioni, il velivolo sarebbe mal progettato.

## Autonomia velivolo ad elica

Per il velivolo ad elica consideriamo la potenza:

potenza utile  $\pi_m$

$$\eta_e \pi_m = \frac{1}{2} \rho_0 S V^3 C_D S ; \quad W = \frac{1}{2} \rho_0 S V^2 C_L S$$

$$\pi_m = \pi_{m_0} \psi \zeta \quad \rightarrow \text{nell'ipotesi di volo orizzontale}$$

Osserviamo che:

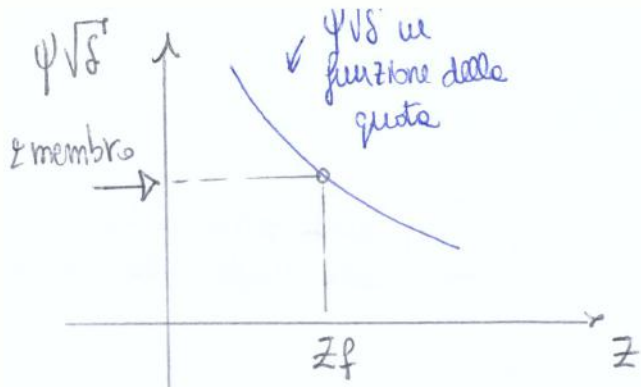
$$\frac{\eta_e \pi_m}{W} = \frac{\frac{1}{2} \rho_0 S V^3 C_D S}{\frac{1}{2} \rho_0 S V^2 C_L S} = \frac{V}{E}$$

Moltiplichiamo su e i membri per  $c dt = \left[ \frac{N}{W \cdot s} \right] \cdot [s]$ , con

$c \rightarrow$  consumo specifico del motore ad elica

$\rightarrow$  potenza

$$\eta_e \pi_m c dt = \frac{V}{E} c dt, \quad \text{con } \pi_m c dt = -dW \quad \text{consumo infinitesimo di carburante}$$



Nel caso in esame overcamo supposto  
 $C_L = \text{cost}$ ,  $C_D = \text{cost}$

⇒ una volta graficata l'andamento di  $\psi\sqrt{S}$  al variare della quota si entra direttamente nel grafico con il valore  $z$  secondo membro e si ricava la quota finale

### Durata del velivolo ad elica

$$\pi_m = \pi_{m0} \psi \frac{C_L}{C_D}$$

$$\int \frac{M_e \pi_m}{W} c dt = \int \frac{V}{E} c dt = \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \sqrt{\frac{W/S}{C_L}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \cdot \frac{l}{E} c dt$$

$$dt = -\frac{M_e}{C} \frac{E \sqrt{C_L} \sqrt{S} \sqrt{S}}{\sqrt{2/\rho_0}} \frac{dW}{W^{3/2}}$$

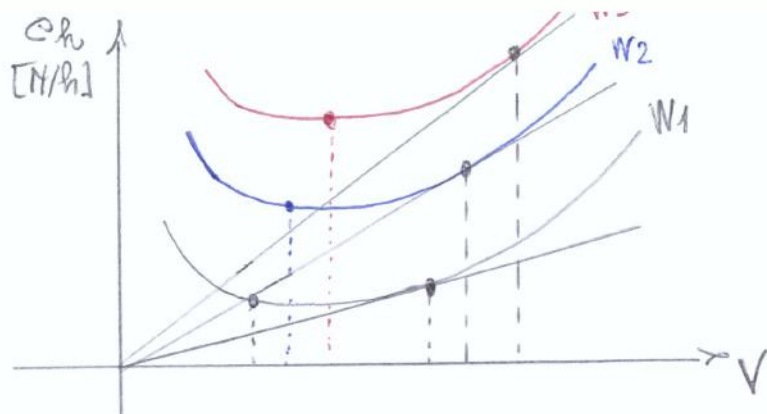
$$t = + \frac{M_e}{C} \frac{E \sqrt{C_L} \sqrt{S} \sqrt{S}}{\sqrt{2/\rho_0}} \int_i^f |W^{-1/2}| = \frac{M_e}{C} \frac{E \sqrt{C_L} \sqrt{S} \sqrt{S}}{\sqrt{2/\rho_0}} \cdot 2 \left( \frac{\sqrt{W_i}}{\sqrt{W_i - G}} - \frac{\sqrt{W_i}}{\sqrt{W_i}} \right)$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{g} \sqrt{\rho_0} \frac{M_e}{C} E \sqrt{C_L} \sqrt{S} \frac{1}{\sqrt{W/S}} \left[ \left( \frac{W}{W-G} \right)^{1/2} - 1 \right]$$

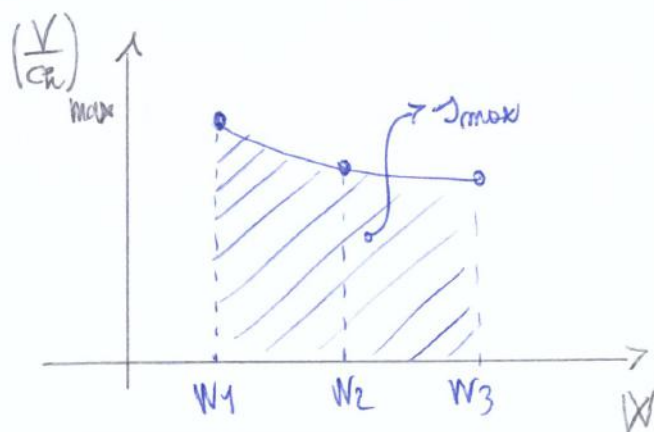
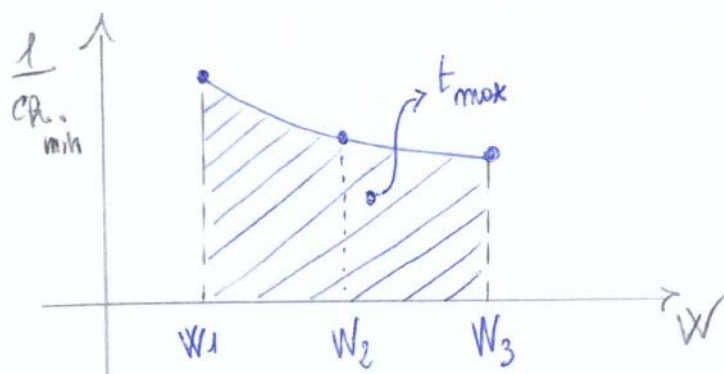
Allora  $t_{\max} \rightarrow (E \sqrt{C_L})_{\max}$ , con  $C_L (E \sqrt{C_L})_{\max} = \sqrt{3e\pi d C_{D0}}$

considerando costanti gli altri parametri, come il rendimento dell'elica, la quota, ...

$$C_D (E \sqrt{C_L})_{\max} = 4 C_{D0}$$



Prendiamo i punti di minimo di ciascuna curva, ne facciamo l'inverso e li riportiamo su un diagramma:



$$Area = \frac{1}{ch} \cdot W \left[ \frac{h}{N} \cdot N \right] \Rightarrow [h]$$

poiché siamo nel punto di minimo consumo orario, l'area sottesa dalla curva sarà un tempo max. Altro modo, anziché utilizzare le formule di Breguet

$$Area = \frac{V}{ch} W \left[ \frac{km}{h} \cdot \frac{h}{N} \cdot N \right] \Rightarrow [km]$$

Riportando su un grafico il rapporto  $\left(\frac{V}{ch}\right)_{max}$ , che corrisponde a  $\left(\frac{ch}{V}\right)_{min}$  ricavabile dal punto di tangenza della retta passante per l'origine con la curva variabile o decresce del peso, in funzione del peso, si ottiene una curva la cui area sottesa rappresenta  $t_{max}$



Se  $k_c = \text{cost} \Rightarrow S_{\text{max}}$  si ha per  $\left(\frac{E}{\sqrt{C_L}}\right)_{\text{max}}$  :

$$\left\{ \begin{aligned} C_L &= \sqrt{\frac{1}{3} \epsilon \pi \lambda C_{D0}} = 0.32 \\ C_D &= \frac{4}{3} C_{D0} = 0.024 \\ E &= \frac{C_L}{C_D} = 13.33 \end{aligned} \right.$$

$\Rightarrow \sigma_{\text{max}} = \left(\frac{E}{\sqrt{C_L}}\right)_{\text{max}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \cdot \frac{1}{k_c} = 299984.28 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{N}}$

Allora:

$$S_{\text{max}} = \int_0^S ds = 2 \sqrt{\frac{2}{\rho_0 S}} \cdot \sigma_{\text{max}} \left( \sqrt{W_i} - \sqrt{W_i - G} \right) = 10736811.11 \text{ m} = 10736.811 \text{ km}$$

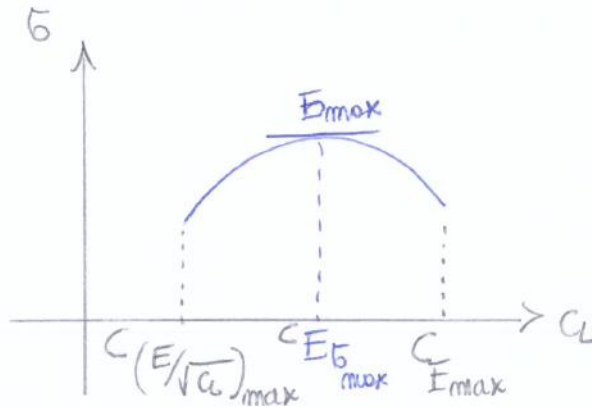
CASO 2

$$k_c = k_{s0} \psi_2 \psi_2 \chi_2$$

$$z = \text{cost}$$

$$L = W = \frac{1}{2} \rho_0 S V^2 C_L$$

$$D = T = \frac{W}{E}$$



$$E_{\text{max}} = \sqrt{\epsilon \pi \lambda C_{D0}} = 0.55$$

$$z \text{ fimate} \rightarrow V = \sqrt{\frac{2W/S}{\rho C_L}}$$

Calcolo con excel:

$C_L$	$C_D$	$E$	$V$	$M$	$\chi_1$	$\psi_1$	$m/m_0$	$\psi_2$	$\chi_2$	$k_c$	$\sigma$
0.32											299984.28
...											...
0.55											

- $C_D = C_{D0} + K C_L^2$
- $E = C_L / C_D$
- $V = \sqrt{\frac{2W_i/S}{\rho C_L}}$
- $V_s = \sqrt{kRT}$

$$\left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} M = \frac{V}{V_s}$$

- $\chi_1 = 1 - \frac{V}{w_g} + \frac{1}{2} \text{km}^2 \left[ 1 - \left(\frac{V}{w_g}\right)^4 \right]$
- $\psi_1 = \left(\frac{P}{P_0}\right) \left(\frac{T_0}{T}\right)^{1.75}$
- $\psi_2 = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{0.75}$

$$\psi_1 = \frac{T}{T_{s0} \chi_1 \psi_1} = \frac{W/E}{T_{s0} \chi_1 \psi_1} = \left(\frac{m}{m_0}\right)^{3.5} \rightarrow \frac{m}{m_0} = (\psi_1)^{1/3.5}$$

$$\psi_2 = 1 + 0.5 \left(\frac{m_0}{m} - 1\right)^2 \quad \chi_2 = 1 + \frac{V}{w_g} \quad k_c = k_{s0} \psi_2 \psi_2 \chi_2 \quad L \rightarrow \frac{T}{T_0}$$

$$dW = -K_c \cdot T dt$$

$$\frac{dW}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = -K_c \frac{W}{E} \rightarrow ds = -\frac{V \cdot E}{K_c} \frac{dW}{W} = -\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\rho_0 S}} \cdot \frac{E}{\sqrt{C_L}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \cdot \frac{1}{K_c}}_G \cdot \frac{dW}{W^{1/2}}$$

Considerando  $K_c = \text{cost} \Rightarrow G = G_{\text{max}}$  per  $\left(\frac{E}{\sqrt{C_L}}\right)_{\text{max}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_L = \sqrt{\frac{1}{3} e \pi \lambda C_{D_0}} = 0.32489 \\ C_D = 4/3 C_{D_0} = 0.0233 \\ E = C_L / C_D = 15.2316 \end{cases} \Rightarrow G_{\text{max}} = 390229,39745$$

$$\Rightarrow ds = -\sqrt{\frac{2}{\rho_0 S}} G_{\text{max}} \frac{dW}{W^{1/2}} \rightarrow S = 2 \sqrt{\frac{2}{\rho_0 S}} G_{\text{max}} \left( \sqrt{W_i} - \sqrt{W_i - G} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho_0 S}{2}} \cdot \frac{S}{G_{\text{max}}} = \sqrt{W_i} - \sqrt{W_i - G} \rightarrow G = -\left[ \sqrt{W_i} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho_0 S}{2}} \frac{S}{G_{\text{max}}} \right]^2 + W_i$$

$$G = W_i - \left( \sqrt{W_i} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho_0 S}{2}} \frac{S}{G_{\text{max}}} \right)^2 = 991364.6626 \text{ N}$$

③ Calcolare l'autonomia massima  $S_{\text{MAX}}$  a quota costante di un velivolo ad elice considerando costante il consumo specifico e tenendo presenti le seguenti caratteristiche:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet C_{D_0} = 0.020 \\ \bullet e = 0.9 \\ \bullet \lambda = 7 \end{array} \right\} C_D = 0.02 + 0.05 C_L^2$$

•  $W_i = 180000 \text{ N}$

•  $G = 60000 \text{ N}$

•  $S = 60 \text{ m}^2$

•  $\eta_p = 0.85$

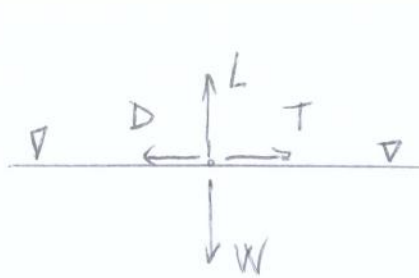
•  $K_c = 0.45 \frac{\rho_b}{\rho_p \cdot h}$

$z = 0 - 2000 \text{ m}$

$\rho_b = 0.4536 \text{ kg}$

$$\rightarrow 0.45 \frac{\rho_b}{\rho_p \cdot h} = \frac{0.45 \cdot 0.4536 \cdot 9.81}{745,5 \cdot 3600} = 7,46 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{W} \cdot \text{s}}$$

$P/\rho_0 = S = 0.742$



$$\begin{cases} L = W = \frac{1}{2} \rho_0 \delta V^2 S C_L \rightarrow V = \sqrt{\frac{2W/S'}{\rho_0 C_L}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta}} \\ T = D = \frac{W}{E} \end{cases}$$

$$dW = -c \cdot \pi m v \cdot dt = -c \cdot \frac{W \cdot V}{E \eta_e} dt$$

$$dt = - \frac{E}{W c} \cdot \frac{\eta_e}{V} dW = - \frac{\rho_0 \delta'}{\sqrt{2}} \cdot E \sqrt{C_L'} \cdot \sqrt{\delta'} \cdot \frac{\eta_e}{c} \frac{dW}{W^{3/2}}$$

$$t = \sqrt{2 \rho_0 \delta'} E \sqrt{C_L'} \cdot \sqrt{\delta'} \cdot \frac{\eta_e}{c} \left( \frac{1}{\sqrt{W_f}} - \frac{1}{\sqrt{W_i}} \right), \text{ con } W_f = W_i - G$$

Im punto caso  $t = t_{\max}$  de  $(E \sqrt{C_L'})_{\max}$

$$\begin{cases} C_L = \sqrt{3 \pi \lambda e C_0} = 1.10519 \\ C_0 = 4 C_0 = 0.072 \\ E = C_L / C_0 = 15.3498 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_{\max} = 127133.49165 = 35,3148 \text{ h} \approx 35 \text{ h } 18 \text{ m}$$

es) Calcolare la minima quantità di carburante richiesta per percorrere  $X = 850$  Km partendo da  $Z = 8000$  m con programma di volo  $C_L - V$  costanti. Assumere l'espressione esponenziale dell'atmosfera ( $H = 9061$  m) e  $K = 0.95 \frac{lb}{lb \cdot h}$  (turbogetto)

$$\begin{cases} W_i = 24000 \text{ lb} = 10886,2176 \text{ kg} = 106793,7947 \text{ N} \\ S = 600 \text{ ft}^2 = 55,7418 \text{ m}^2 \\ C_D = 0.02 + 0.055 C_L^2 \end{cases}$$

$$Z = 8000 \text{ m} \rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{Z}{H}} = 0.41357 = \sigma$$

$$T = T_0 = 288 \text{ K}$$

$$\left. \begin{matrix} L = W \\ T = D \end{matrix} \right\} \rightarrow \frac{T}{W} = \frac{D}{L} = \frac{1}{E} \rightarrow \frac{K V dt T}{W} = \frac{K V dt}{E}$$

$$ds = -\frac{E V}{K} \frac{dW}{W} \rightarrow s = \frac{E V}{K} \ln \left( \frac{1}{1 - G/W_i} \right), \quad K = \frac{0.95 \cdot 0.4535 \cdot 9.81}{0.4535 \cdot 3600 \cdot 9.81} =$$

$$= \frac{2,588 \cdot 10^{-3} \text{ N}}{9.81 \text{ N} \cdot \text{h}} =$$

$$= 2,638 \cdot 10^{-4} \frac{\text{N}}{\text{N} \cdot \text{h}}$$

$$\rightarrow S_{\max} \text{ per } E = E_{\max} \Rightarrow C_L = \sqrt{\frac{1}{\pi A C_D}} = 0.603$$

$$C_D = 2 C_{D_0} = 0.04$$

$$E_{\max} = 15.075$$

$$\frac{s K}{E V} = \ln \left( \frac{1}{1 - G/W_i} \right) \rightarrow \frac{1}{1 - G/W_i} = e^{\frac{s K}{E V}} \rightarrow 1 - G/W_i = \frac{1}{e^{\frac{s K}{E V}}}$$

$$G = \left[ 1 - \frac{1}{e^{\frac{s K}{E V}}} \right] W_i^* = 13282,067 \text{ N}$$

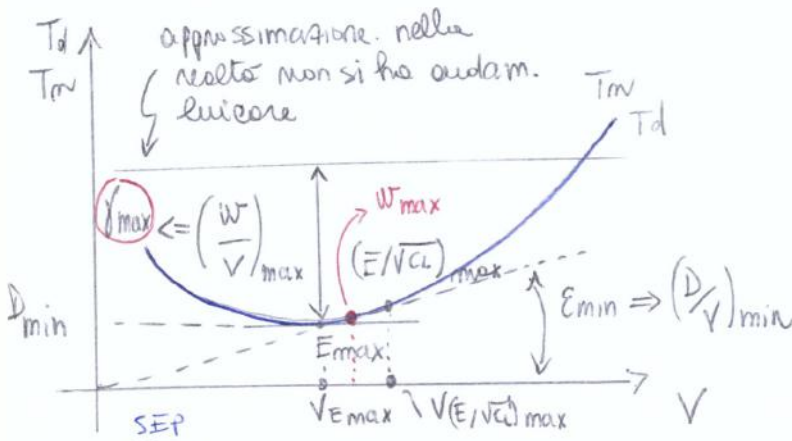
\* supp. traiettoria sub-orizzontale

$$\rightarrow V = \sqrt{\frac{W/S}{\frac{1}{3} \rho_0 C_L}} = 111.9943 \text{ m/s}$$

# SCHEMA RIASSUNTIVO PRESTAZIONI

	$S_{max}$	$t_{max}$	(Rate of climb) ↑ $\gamma_{max}$ FAST CLIMB (solite rapide)	↑ $\gamma_{max}$ STEEP CLIMB (solite ripide)	$h_{rc}$ (ceiling, quota di tangenza)
ALIANTE	$E_{max}$	$(E\sqrt{C_L})_{max}$	—	—	
TURBOGETTO	$\sigma_{max}^*$	$E_{max}$	—	$E_{max}$	$E_{max}$
MOTOELICA	$E_{max}$	$(E\sqrt{C_L})_{max}$	$(E\sqrt{C_L})_{max}$	—	$(E\sqrt{C_L})_{max}$ (indice di quota)

## TURBOGETTO



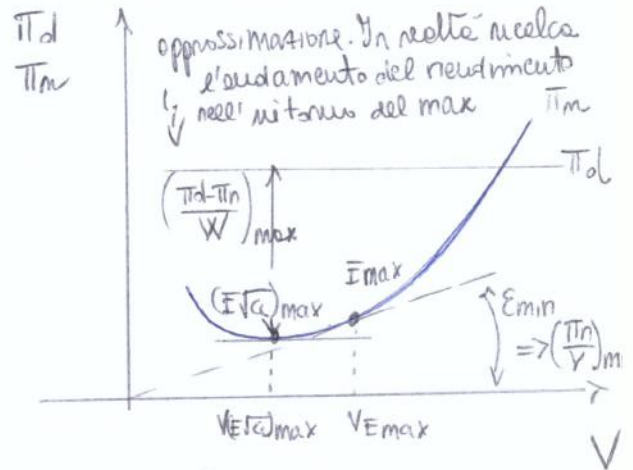
$$W = \frac{(T_d - D)V}{W} = V \sin \gamma = V \cdot SEP \text{ (Specific excess power)}$$

\* Se  $K_c = const = K_m \Rightarrow S_{max}$  per  $(E/\sqrt{C_L})_{max}$

$$\sigma = \frac{E}{\sqrt{C_L}} \cdot \frac{1}{K_c} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}}$$

SEP: eccesso di spinta specifica

## MOTOELICA



$$W = \frac{T_d - T_m}{W} = V \sin \gamma = SEP$$

Le equazioni considerate sono:

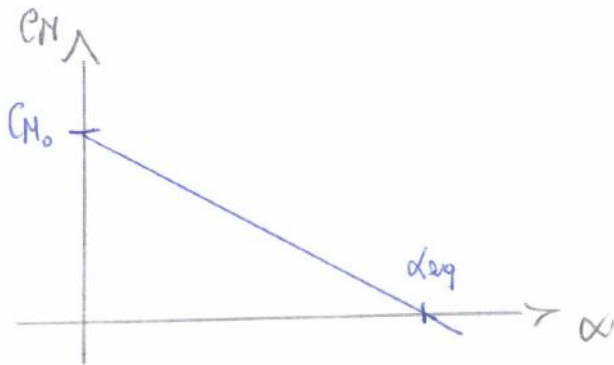
$$L = W, D = T, M = 0 = \frac{1}{2} \rho V^2 C_M S c \Rightarrow \boxed{C_M = 0}$$

il coefficiente di momento deve essere nullo all'equilibrio

Vogliamo inoltre le cond. di stabilità all'equilibrio, allora:

$$\boxed{\frac{dC_M}{d\alpha} = C_{M\alpha} < 0}$$

Poiché vogliamo ciò e  $C_M = f(\alpha) \approx$  retta, come vedremo, segue che la retta del  $C_M$  intersecherà l'asse  $y$  per un valore positivo,  $C_{M0}$ .

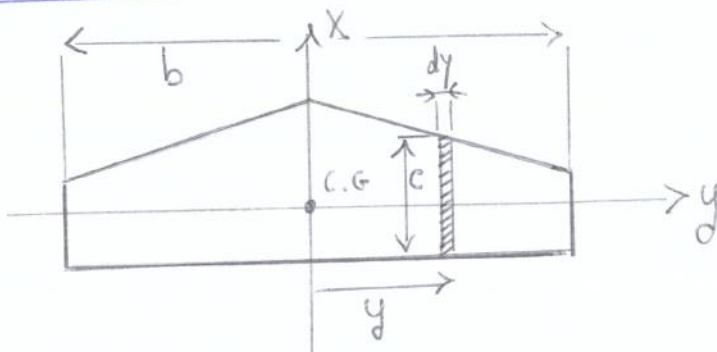


Questa è l'unica soluzione possibile, se vogliamo:

$$\begin{cases} C_M(\alpha_{eq}) = 0 \\ \frac{dC_M}{d\alpha} < 0 \rightarrow \text{pendenza negativa} \Rightarrow C_{M0} > 0 \end{cases}$$

## Espressione del $C_M(\alpha)$

- ala isolata



$$C_{M(g)} = \frac{S}{b} \text{ corda media geometrica}$$

$$C_M = \frac{S}{b} \int_0^{b/2} c \alpha dy$$

$$C_{M(a)} = \frac{S}{S} \int_0^{b/2} c^2 dy \text{ corda media aerodinamica}$$

è l'ala è rettangolare  $\rightarrow C_M \equiv C_{M(a)}$

essenzialmente usiamo come corda di riferimento la corda media aerodinamica



Trascurando:

$$C_{M_G} = C_{LW} \frac{X_G - X_a}{c} + C_{M_0W}$$

Com:

$$C_{LW} = \frac{\partial C_{LW}}{\partial \alpha} \alpha = a_{LW} \alpha \quad (\text{al di sotto dello stall})$$

$$\Rightarrow C_{M_G} = C_{M_0W} + a_{LW} \alpha \frac{X_G - X_a}{c} \quad \text{mette}$$

Considerando il velivolo tutt'ala visto in precedenza:

$$\left\{ \begin{array}{l} - C_{M_G} = 0 \text{ (equilibrio)} \Rightarrow C_{LW} = - \frac{C_{M_0W}}{\frac{X_G - X_a}{c}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - C_{M_\alpha} = \frac{\partial C_{M_G}}{\partial \alpha} < 0 \text{ (stabilità)} \Rightarrow \frac{\partial C_{M_G}}{\partial \alpha} = a_{LW} \frac{X_G - X_a}{c} < 0 \Rightarrow X_G < X_a \end{array} \right.$$

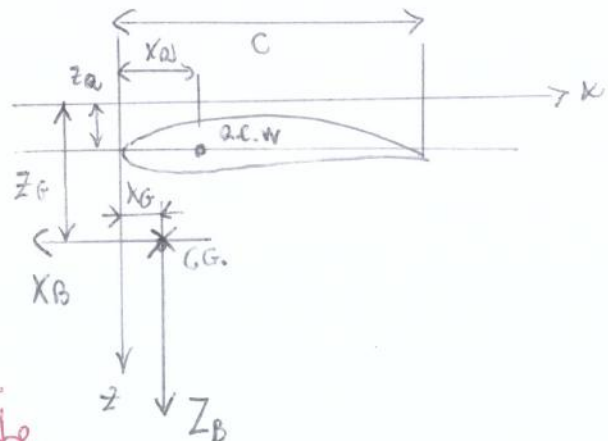
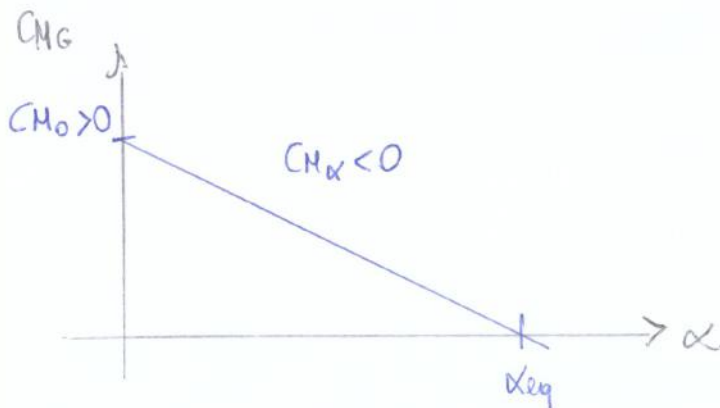
il baricentro deve essere anteriore al fuoco

Allora:

$$C_{M_G} = 0: C_{LW} = \frac{C_{M_0}}{\frac{X_G - X_a}{c}} > 0 \Rightarrow C_{M_0W} > 0$$

$C_{LW} > 0$   
↓

Condizione necessaria per avere equilibrio e stabilità del velivolo tutt'ala.

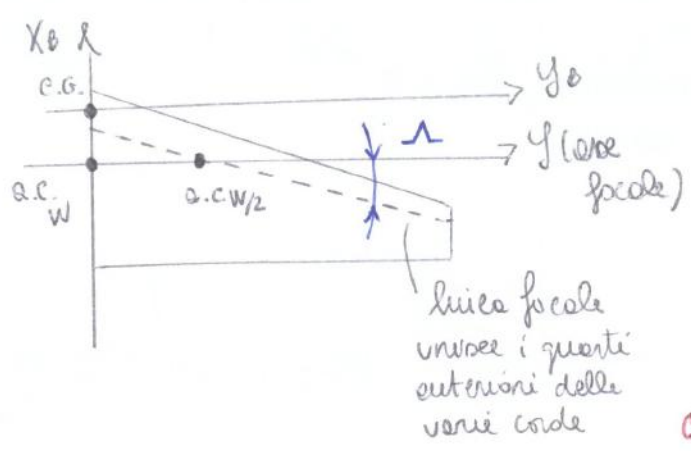


Se  $C_{M_0W} > 0$  l'ala non potrà avere una conformazione convenzionale, che determinerebbe un  $C_{M_0W} < 0$

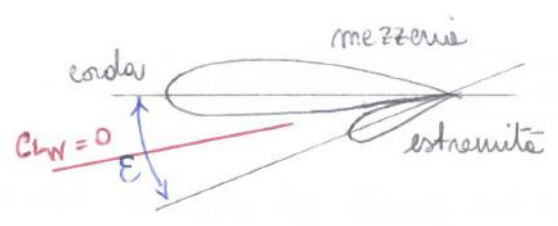


### ③ ALA CON PROFILO CLASSICO CON FRECCIA E SVERGOLAMENTO

Rappresenta le soluzioni più efficaci:



Lo svergolamento comporta che la sezione di estremità sia ruotata e pieghere rispetto alla sezione di mezzeria:



#### SVERGOLAMENTO GEOMETRICO

Se l'angolo di svergolamento è misurato tra corde di mezzeria e corde di estremità

Normalmente lo svergolamento è di 5-6-7°.

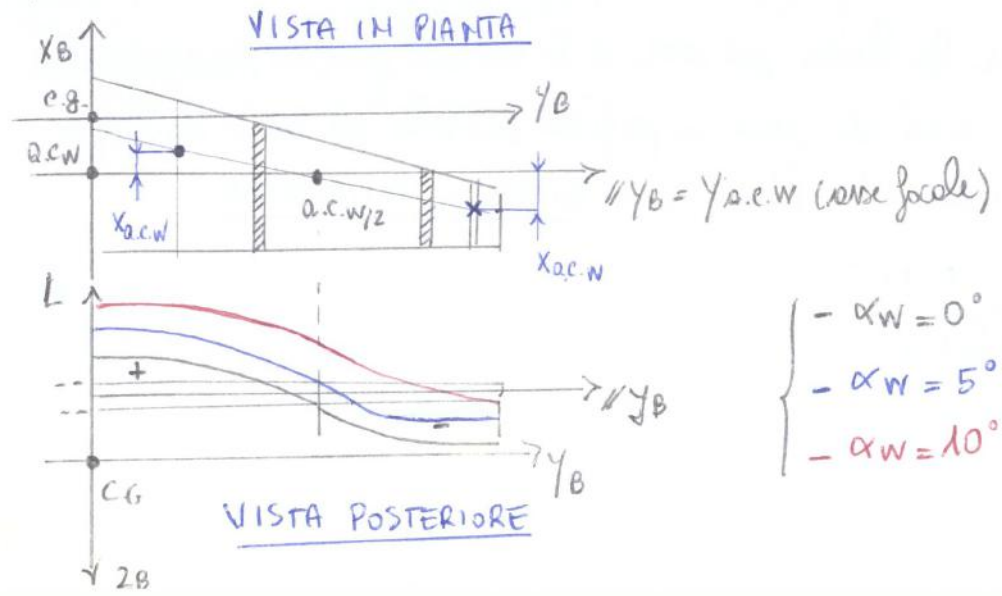
L'asse di portanza nulla della mezzeria non coincide con l'asse di portanza nulla dell'estremità.

⇒ l'asse di portanza nulla della mezzeria è dunque dell'ala si troverà in una posizione intermedia

#### SVERGOLAMENTO AERODINAMICO

Se l'angolo di svergolamento è misurato tra asse di portanza nulla della mezzeria e dell'estremità.

In questo caso, si avrà una porzione di semiala portante e una porzione leportante.



- $\alpha_w = 0^\circ \rightarrow L_w = 0$
- $\alpha_w = 5^\circ$
- $\alpha_w = 10^\circ$

◦ Se non ci fosse svergolamento ma solo ala e freccia?

Non ci sarebbe la distribuzione di portanza/deportanza per  $\alpha = 0^\circ$   
 $\Rightarrow$  non ci sarebbe il contributo del  $C_e$  di ogni sezione perché per  $\alpha = 0^\circ \rightarrow C_e = 0$  su tutte le sezioni

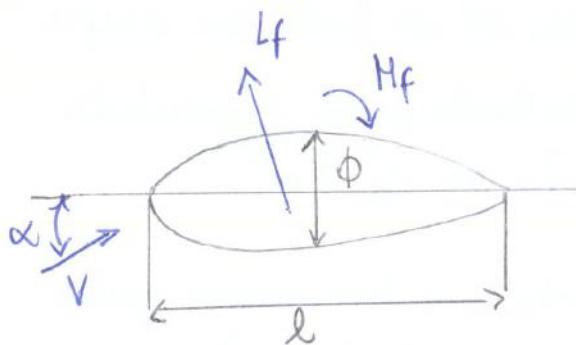
◦ Se ci fosse svergolamento e ala rettangolare?

Si avrebbe la giusta distribuzione di portanza/deportanza ma non ci sarebbe il braccio, sempre nullo, perché ogni sezione avrebbe la portanza locale proprio sull'asse focale. (linea focale  $\equiv$  asse focale)

$\Rightarrow$  solo con FRECCIA + SVERGOLAMENTO si ha  $C_{M_0} > 0$  pur con un profilo a  $C_{m_0} < 0$

## ALA + FUSOLIERA (DEVAO code)

Richiamiamo alcuni concetti di aerodinamica del fuso, anche se il più delle volte la fusoliera è ben diversa dal fuso



$$M_f = f(\alpha) = \frac{1}{2} \rho V^2 (1-\xi) Vol. \sin 2\alpha C_{Mf}$$

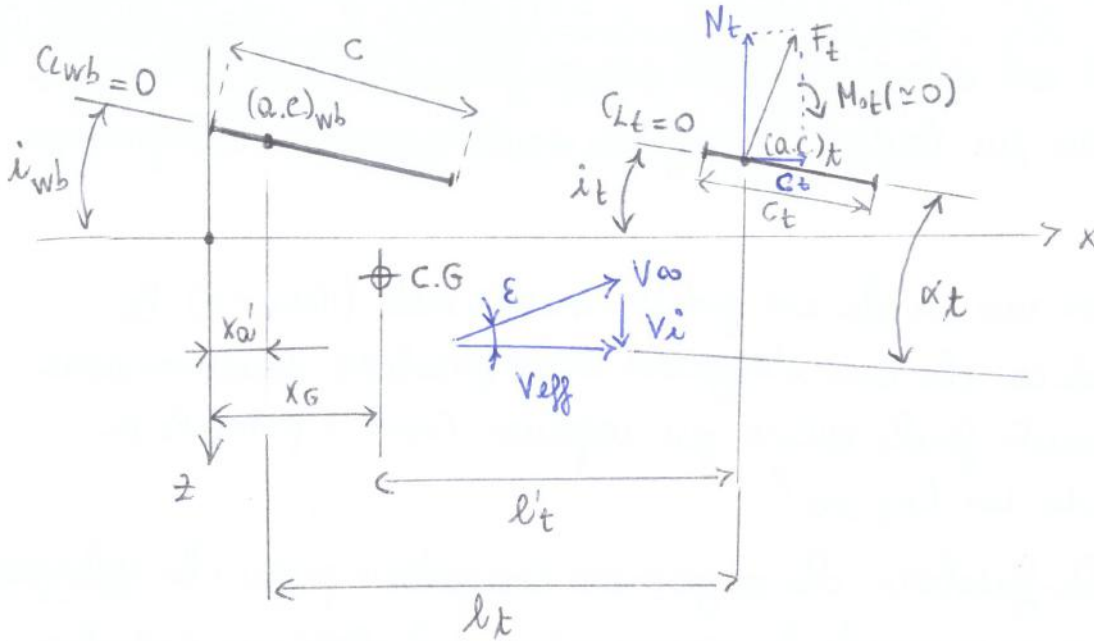
$l/\phi_{max} = \text{spessezza}$

$$C_{Mf} = \frac{M_f}{\frac{1}{2} \rho V^2 (1-\xi) Vol \sin \alpha}$$

Un fuso riesce a generare portanza, per cui potrebbe in teoria essere un velivolo, ma è un corpo intrinsecamente instabile, perché genera un momento che aumenta positivamente se  $\alpha$  aumenta

Quindi andiamo ad aggiungere al velivolo tutt'altre le fusoliera, ci sono 4 parametri che cambiano.

# IMPENNAGGIO ORIZZONTALE



$c_t$ : corda del tail

$M_{0t}$ : sarebbe 0 se il profilo del tail fosse simmetrico, ma comunque è un contributo trascurabile nell'eq. di equilibrio alla rotazione

La  $V_{\infty}$  giunge al tail deflessa di un certo angolo  $\epsilon$  dovuto al downwash dell'ala  $\Rightarrow V_{eff}$

## Contributo del tail al momento di beccheggio

$$M_{Gt} = -N_t l'_t \approx -L_t l'_t \quad (N_t \approx L_t)$$

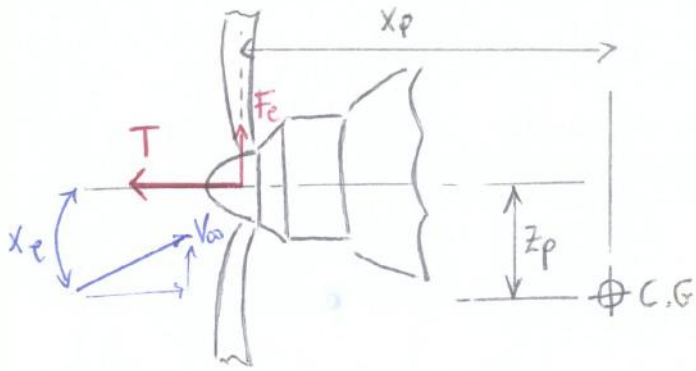
↓  
segno positivo  
e cobrenza

Definiamos :

$$\eta_t = \frac{V_{eff}^2}{V_{\infty}^2} \begin{cases} \otimes & \text{ad. esempio se il flusso dell'elica investe il tail} \\ \ominus & \text{se il tail è nella scia dell'ala o è comunque rallentato} \end{cases}$$

isolato

$$C_{MGt} = \frac{M_{Gt}}{\frac{1}{2} \rho V^2 S c} = - \frac{C_{Lt} \otimes l'_t S x \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \eta_t}{\frac{1}{2} \rho V^2 S c} = - \frac{C_{Lt} \otimes l'_t \eta_t S t}{S c} = - C_{Lt} \otimes \eta_t \bar{V}$$

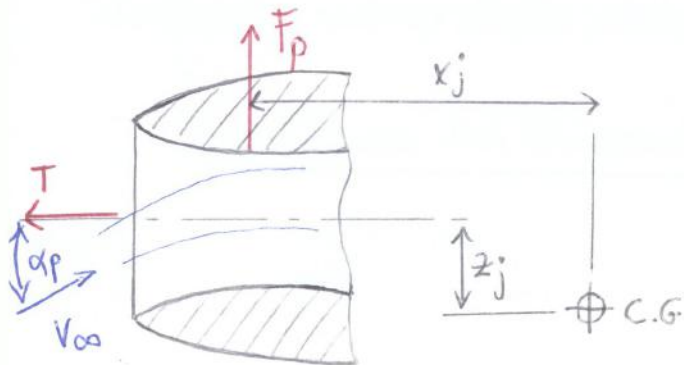


Se  $T$  non cambia neanche al variare di  $\alpha$  (e  $\alpha$  contenuto), la  $F_e$  cresce e si incrementa linearmente al crescere di  $\alpha_e$ .

Se  $\alpha_e = 0 \Rightarrow F_e = 0$

Tale forza è contenuta nel disco d'elica ed è circa due ordini di grandezza inferiore risp. alla  $T$ .

Poiché però  $x_p$  è abbastanza grande,  $F_e$  dà un contributo al beccheggio non trascurabile.



Inche nel caso di un propulsore, e la  $V_{\infty}$  non è diretta secondo l'asse del propulsore, si genera una forza  $F_p$ , posizionata un po' all'interno rispetto alla sezione di ingresso, in prima approssimazione dipendente dall'angolo  $\alpha_p$  in maniera lineare.

Per cui, se  $\alpha_e, \alpha_p$  sono piccoli:

$$F_e, F_p = f(\alpha)$$

$$C_{MG_p} = C_{MP_0} + \frac{\partial C_{MP}}{\partial \alpha} \alpha$$

dipende solo da  $T$

contributo del propulsore al coeff. di mom. di beccheggio

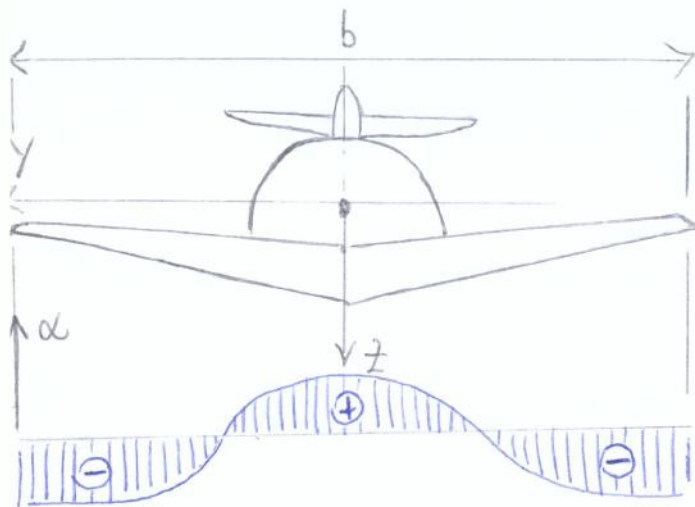
### VELIVOLO COMPLETO

Avevo analizzato tutti i contributi al momento di beccheggio, si ha che:

$$C_{MG} = C_{M_{SWb}} + C_{L_{wb}} \frac{x_G - x_a'}{c} - C_{L_t} \bar{V} + \frac{x_G - x_a'}{c} C_{L_t} \frac{S_t}{S} + C_{MP}$$

in prossimità dell'estremità è deportante.

Il tail si trova proprio dietro la posizione di ala portante, che localmente avrà un  $\alpha > 0$ , per cui esso ricadrà di un downwash factor



Per cui:

$$\alpha_t = \alpha_{wb} - i_{wb} - \epsilon_0 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \alpha_{wb} + i_t =$$

$$= \alpha_{wb} \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) - \underbrace{(i_{wb} + \epsilon_0 - i_t)}_{\text{coefficienti aerodinamici ala / coda} \equiv i}$$

downwash factor

↳ (0.6 ÷ 0.95)

$\bar{i}$  definito una volta definito il velivolo e le sue caratteristiche (non variano con  $\alpha$ )

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_t = \alpha_{wb} \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) - \bar{i}} \quad , \quad \text{con} \quad \boxed{i = i_{wb} + \epsilon_0 - i_t}$$

Allora, poiché  $C_{it} = \alpha_t \alpha_t$ ,

$$\boxed{C_{it} = \alpha_t \left[ \alpha_{wb} \left( 1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) - \bar{i} \right]}$$

Riconfermo che lo svergolamento è a precisiare rispetto alla posizione di mezzo ala per due motivi:

① Se vogliamo ottenere un  $C_{H0} > 0$  abbiamo necessariamente bisogno di FRECCIA + SVERGOLAM. NEGATIVO

② Se il  $C_{H0} > 0$  viene ottenuto grazie al tail (come vedremo), lo svergolamento negativo è comunque necessario a ridurre l'angolo locale di incidenza che si verificherebbe a causa dei vortici di estremità. In questo modo si riesce ad evitare che la porzione di semiala vicina all'estremità stalli prima del resto della semiala.

e quella che rende nulle la portanza del tail.

Si può inoltre osservare che, grazie al fatto che  $\rho_t < a_{wb}$  e che il tail è collocato a picchiare rispetto all'ala, stalla prima questa rispetto al tail.

### Coefficiente angolare di L del velivolo completo

$$\left. \begin{aligned} C_L &= a_{wb} \alpha_{wb} (1+F) - a_t \frac{S_t}{S} i \\ \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} &= a_{wb} (1+F) = a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{C_L = a \alpha}$$

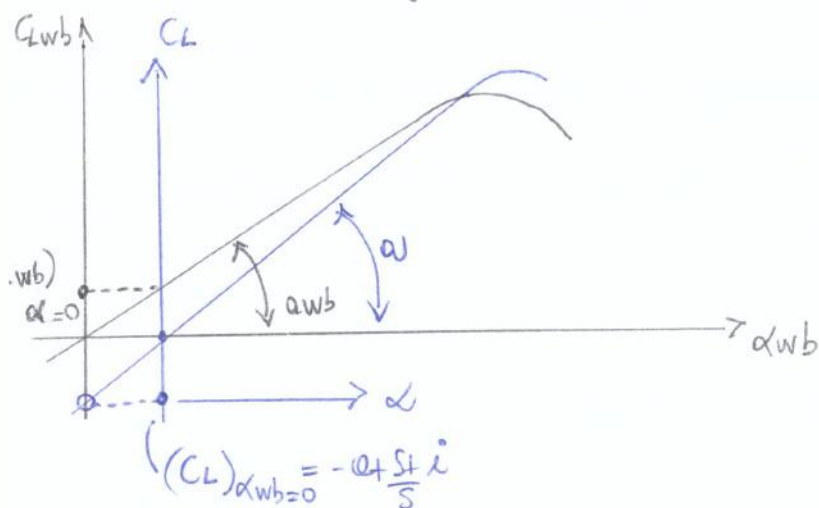
Ymoltne:

$$\left( \alpha_{wb} \right)_{C_L=0} = \frac{a_t}{a_{wb}} \frac{S_t}{S} \frac{i}{1+F}$$

incidenza sull'ala quando la portanza sul velivolo è nulla

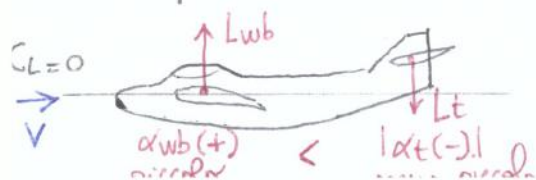
$$\left( C_L \right)_{\alpha_{wb}=0} = -a_t \frac{S_t}{S} i \Rightarrow \alpha_{wb}=0 \Rightarrow L_{wb}=0 \Rightarrow \boxed{L = L_t < 0}$$

Possiamo allora disegnare il grafico seguente:



$$a = a_{wb} (1+F) > a_{wb}$$

Allora, quando  $C_L=0 \Rightarrow \alpha=0^\circ$ , si avrà le seguenti situazioni:

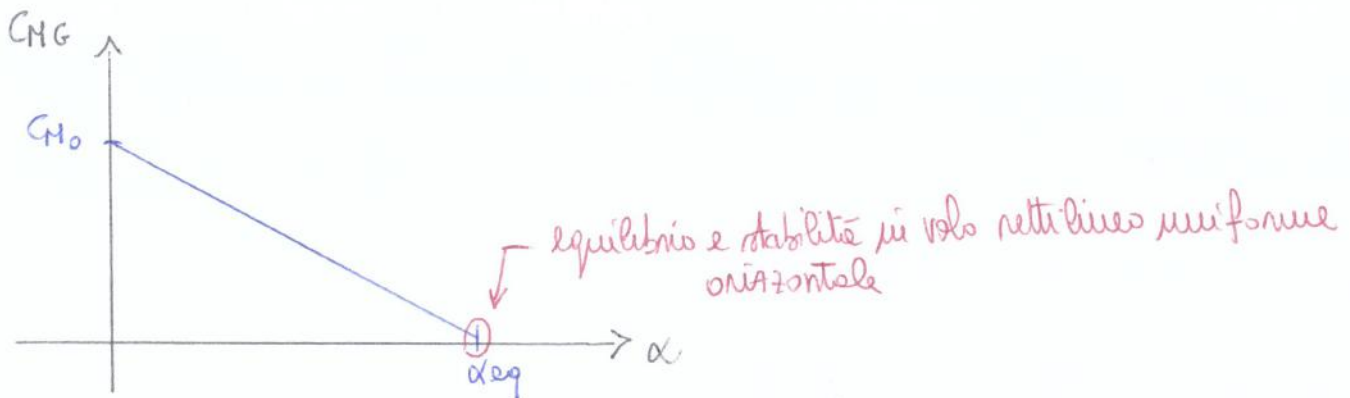


OSS: in questo caso non è possibile volare in volo rettilineo uniforme orizzontale poiché la portanza è nulla e non equilibra il peso. Si avrà dunque il VOLO IN CANDELA

$$C_{M\alpha} = a \frac{X_G - X_{a'}}{c} - a_t \bar{V} \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial C_{MP}}{\partial \alpha} = a \left[ \frac{X_G}{c} - \frac{X_{a'}}{c} - \frac{a_t \bar{V}}{a} \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}\right) + \frac{1}{a} \frac{\partial C_{MP}}{\partial \alpha} \right]$$

$C_{MG} = C_{MG}(\alpha)$  sarà ancora una volta una retta con pendenza

$C_{M\alpha} = \frac{\partial C_{MG}}{\partial \alpha} < 0$  per la condizione di stabilità.



Annullando la relazione del  $C_{M\alpha}$  si ottiene la posizione del Fuoco DEL VELIVOLO, ovvero la posizione del baricentro per cui si ha equilibrio indifferente, che segna il passaggio da equilibrio stabile a instabile.

$$C_{M\alpha} = 0 \Rightarrow \left( \frac{X_G}{c} \right)_{C_{M\alpha}=0} = \frac{X_N}{c} = \frac{X_{a'}}{c} + \frac{a_t \bar{V}}{a} \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}\right) - \frac{1}{a} \frac{\partial C_{MP}}{\partial \alpha}$$

Il nostro scopo è ora capire come sia possibile variare  $\alpha$ , perché variando  $\alpha$  variano le velocità e variano le condizioni di volo, pur rettilineo uniforme orizzontale.

Per variare  $\alpha$  occorrerà o variare il  $C_{M0}$ , o la pendenza, o entrambi, sempre garantendo la pendenza negativa della retta, per la condizione di stabilità.

Dalle relazioni sopra:

$$C_{M\alpha} = a \left( \frac{X_G - X_N}{c} \right) \rightarrow \text{marginio statico: distanza effettiva del baricentro dal punto neutro}$$

Se  $< 0 \Rightarrow C_{M\alpha} < 0$

Allora, supponendo di considerare  $\gamma \approx 0.6$ , ruotando l'equilibratore di  $10^\circ$  si ottiene una variazione dell'angolo di portanza nulla di circa  $5-6^\circ$ , che comporterà una variazione di portanza sul tail  $\Delta\alpha_t$ , riportata nel fuoco, considerando anche il momento di trasporto (non riportato perché trascurabile; nullo se sup. simmetrica)

OSSERVAZIONE

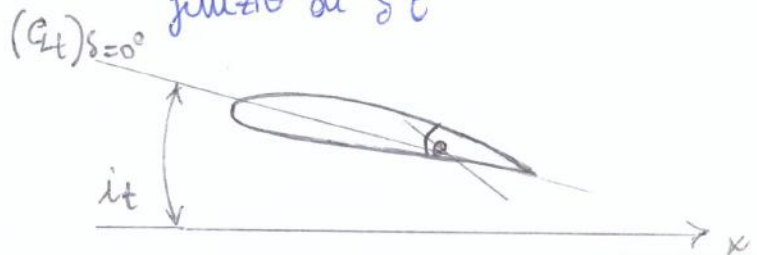
①  $i_T$  → all moving tail ( $c_{e_t}/c_t=1$ ): variando  $\delta$  stiamo effettivamente variando il coefficiente  $i_T$  del tail

↳ stabilizzatore + equilibratore:  $i_T$  è sempre definito con l'equilibratore in posizione neutra ( $\delta_e=0^\circ$ ), poi ruotandolo  $i_T$  varia in modo fittizio di  $\delta\gamma$

Dunque:

$$\Delta\alpha_t = \gamma\delta = \frac{\partial\alpha_t}{\partial\delta}\delta$$

↓  
derivata aerodinamica che è possibile valutare ed è costante nelle misure in cui  $\delta$  è piccolo



Riconducendo che un equilibratore può provare a una rotazione max di circa  $25-30^\circ$ , poi non sarebbe più aerodinamicamente efficace

Le equazioni scritte in precedenza diventano, con l'aggiunta della sup. mobile:

$$\alpha_t = \alpha_{wb} \left(1 - \frac{\partial\epsilon}{\partial\alpha}\right) - i \quad \rightarrow \quad \alpha_t = \alpha_{wb} \left(1 - \frac{\partial\epsilon}{\partial\alpha}\right) - i + \gamma\delta$$

$$C_{L_t} = a_t \alpha_t = a_t \left[ \alpha_{wb} \left(1 - \frac{\partial\epsilon}{\partial\alpha}\right) - i + \gamma\delta \right]$$

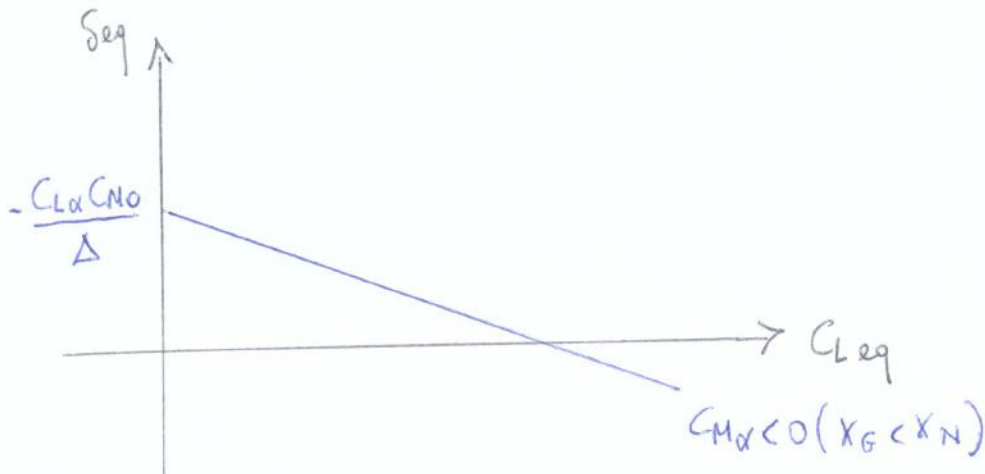
$$C_L = (C_L)_{\delta=0^\circ} + \frac{\partial C_L}{\partial\delta}\delta = C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta}\delta$$

→  $>0$  e piccolo, perché  $\Delta\alpha_t$  è contenuto risp. al lift di tutto il velivolo

$$C_{MG} = (C_{MG})_{\delta=0^\circ} + \frac{\partial C_{MG}}{\partial\delta}\delta = (C_{MG})_{\alpha=0^\circ} + C_{MG\alpha}\alpha + C_{MG\delta}\delta$$

→  $<0$  elevator power  
esprime l'efficacia dell'equilibr. a variare  $C_{MG}$





A questo punto, dobbiamo ricavare l'espressione delle derivate aerodinamiche che  $C_{L_S}$ ,  $C_{M_S}$ .

Riconduciamo che il  $C_L$  del velivolo completo può essere scritto come:

$$C_L = C_{Lwb} + C_{Lt} \frac{S_t}{S}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_L}{\partial \delta} = C_{L_S} = \frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta} + \frac{S_t}{S} \frac{\partial C_{Lt}}{\partial \delta}$$

### VELIVOLO CONVENZIONALE

In prima approssimazione possiamo considerare che  $\frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta} = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_{L_S} &= \frac{S_t}{S} \frac{\partial C_{Lt}}{\partial \delta} = \frac{S_t}{S} \frac{\partial C_{Lt}}{\partial \alpha_t} \frac{\partial \alpha_t}{\partial \delta} \\ &= \frac{S_t}{S} \alpha_t \tilde{\tau} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_{L_S} = \frac{S_t}{S} \alpha_t \tilde{\tau}$$

Se  $\alpha_t \approx 5$ ,  $\frac{S_t}{S} \approx \frac{1}{5}$ ,  $\tilde{\tau} \approx 0.6$

$$\Rightarrow C_{L_S} \approx 0.5 \div 0.6$$

### VELIVOLO TUTT'ALA

Non ha le code  $\Rightarrow \frac{\partial C_{Lt}}{\partial \delta} = 0$

Il  $\delta$  diventa la rotazione dell'elevone, sup. mobile al bordo di fuga dell'ala che ha la possibilità di fungere da equilibratore o da allettone

$$C_{L_S} = \frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta}$$



↳ Tale valore sarà comunque maggiore rispetto al  $C_{L_S}$  del velivolo convenzionale

Ricordando che:

$$C_{M\alpha} = \alpha \frac{X_G - X_M}{c} = C_{L\alpha} \frac{X_G - X_N}{c}$$

$$(X_G - X_{a'}) + (X_N - X_G) = X_N - X_{a'}$$

$$\Rightarrow \Delta = C_{L\alpha} a_t \tilde{v} \left( \frac{S_t}{S} \frac{X_G - X_{a'}}{c} - \bar{V} \right) +$$

$$- C_{L\alpha} \frac{X_G - X_N}{c} \frac{S_t}{S} a_t \tilde{v} =$$

$$= -C_{L\alpha} a_t \tilde{v} \bar{V} + C_{L\alpha} C_{L\beta} \frac{X_N - X_{a'}}{c}$$

$$\Rightarrow \Delta = -C_{L\alpha} a_t \tilde{v} \bar{V} + C_{L\alpha} C_{L\beta} \frac{X_N - X_{a'}}{c}$$

non c'è più dipendenza dalla posizione del baricentro e  $\Delta < 0$  perché il primo term. è molto maggiore del secondo

Allora:

$$\Delta = C_{L\alpha} \left( \frac{\partial C_{M\alpha}}{\partial \delta} + C_{L\beta} \frac{X_G - X_N}{c} \right) - C_{L\alpha} C_{L\beta} \frac{X_G - X_N}{c}$$

$X_N = X_{a'}$

$$\Rightarrow \Delta = C_{L\alpha} \frac{\partial C_{M\alpha}}{\partial \delta}$$

$< 0 \Rightarrow \Delta < 0$  e non dipende dalla posizione di  $X_G$

Ritorniamo al sistema rappresentato dalle eq. di equilibrio

$$\left\{ \begin{aligned} C_{Leq} &= C_{L\alpha} \alpha_{eq} + C_{L\beta} \delta_{eq} \quad (1) \\ C_{M_G} &= 0 \rightarrow C_{M\alpha} \alpha_{eq} + C_{M\beta} \delta_{eq} = -C_{M_0} \quad (2) \end{aligned} \right.$$

$$C_{M\alpha} \alpha_{eq} + C_{M\beta} \delta_{eq} = -C_{M_0} \quad (2)$$

Ricorriamo ora il  $C_{Leq}$ :

$$(2): \delta_{eq} = -\frac{C_{M_0}}{C_{M\beta}} - \frac{C_{M\alpha}}{C_{M\beta}} \alpha_{eq}$$

Sostituendo in (1):

$$C_{Leq} = C_{L\alpha} \alpha_{eq} + C_{L\beta} \left( -\frac{C_{M_0}}{C_{M\beta}} - \frac{C_{M\alpha}}{C_{M\beta}} \alpha_{eq} \right)$$

$$C_{Leq} = C_{L\alpha} \alpha_{eq} - \frac{C_{M_0} C_{L\beta}}{C_{M\beta}} - \frac{C_{M\alpha} C_{L\beta}}{C_{M\beta}} \alpha_{eq}$$

$$C_{Leq} = -\frac{C_{M_0} C_{L\beta}}{C_{M\beta}} + \left( C_{L\alpha} - \frac{C_{M\alpha} C_{L\beta}}{C_{M\beta}} \right) \alpha_{eq}$$

costante una volta det. la posizione del baricentro, perché  $\downarrow C_{M\alpha}, C_{M\beta}$  dipendono da  $X_G$

dove  $C_{L\alpha} - \frac{C_{M\alpha} C_{L\beta}}{C_{M\beta}} = C_{L\alpha,eq} = \frac{\partial C_{Leq}}{\partial \alpha_{eq}}$

Analizziamo ora un diagramma che serve a discutere se i requisiti del comando longitudinale siano soddisfatti oppure no. (ISTANTIVITÀ e SENSIBILITÀ)

Ricondiamo che:

$$\delta_{eq} = - \frac{C_{M0} C_{L\alpha}}{\Delta} - \frac{C_{Mx}}{\Delta} C_{Leg}$$

↓  
non dip. dal baricentro

con  $C_{Mx} = a \frac{X_G - X_N}{c}$ , dipendente dalla posizione del baricentro.

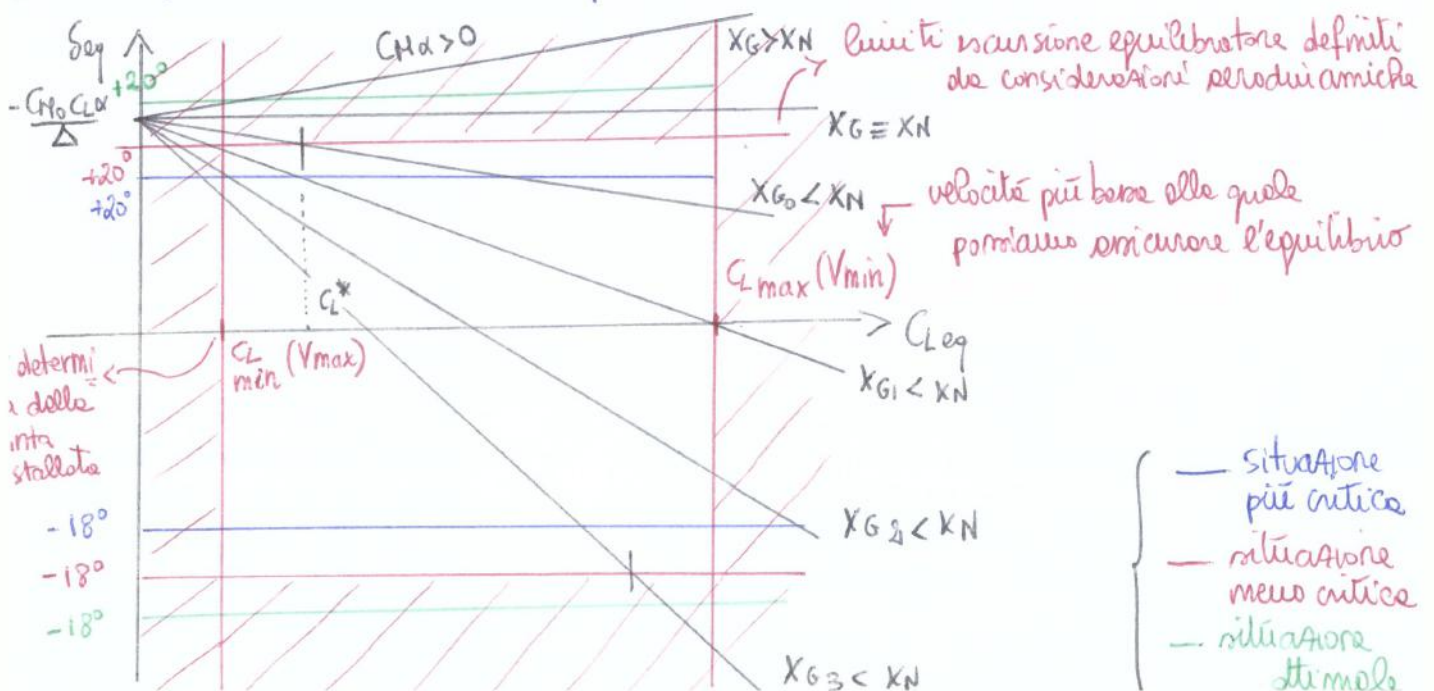
- Se  $X_G > X_N \rightarrow C_{Mx} > 0 \Rightarrow$  pendenza positiva e velivolo instabile
- Se  $X_G < X_N \rightarrow C_{Mx} < 0 \Rightarrow$  pendenza negativa e velivolo stabile
- Se  $X_G = X_N \rightarrow C_{Mx} = 0 \Rightarrow$  retta orizzontale  $\rightarrow$  diversi  $C_L$  di equilibrio, dunque di diverse velocità, con lo stesso  $\delta$  dell'equilibratore.

L'ultimo caso non va bene in quanto non verrebbe rispettato il requisito di SENSIBILITÀ del comando longitudinale in quanto in tali condizioni non sarebbe riparatore il pilota il velivolo.

$\rightarrow$  il pilota deve avere posizioni differenti dell'equilibratore, e dunque delle barre, al variare della velocità

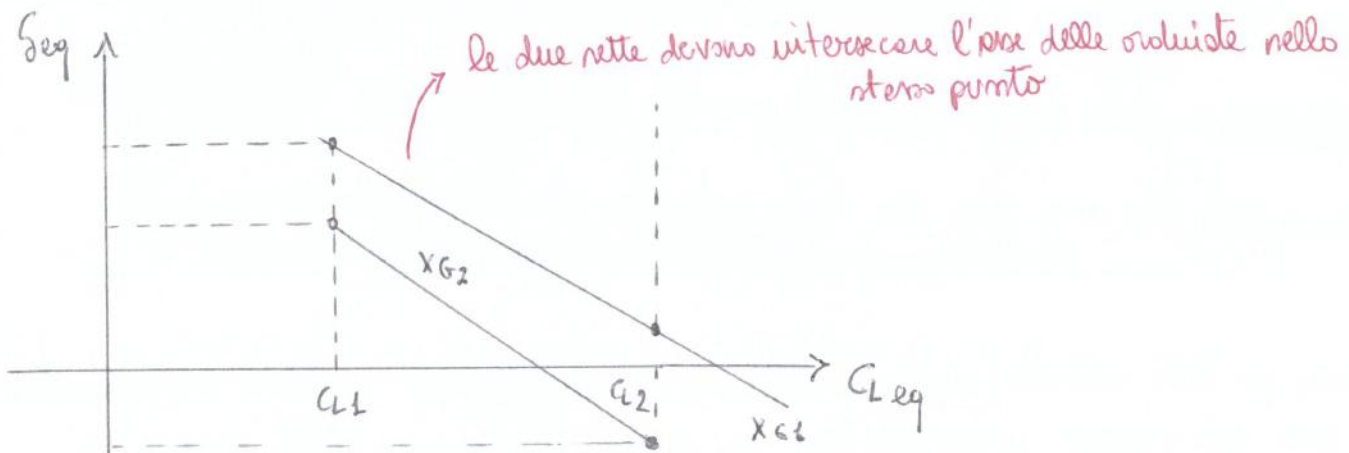
Supponiamo di partire da un  $C_{Leg}$  basso, dunque a una velocità elevata, per cui si ha un determinato  $\delta_{eq}$ . Diminuendo la velocità (il  $C_L$  aumenta) deve ridurre la manetta, cobrare il velivolo agendo per forza sull'equilibratore, equilibrare spinta e resistenza e poi riportare le barre nella stessa posizione precedente.

Per cui un velivolo staticamente stabile consente di annullare i  $\delta_{eq}$  di disturbo con la generazione di un momento aerodinamico di segno opposto e consente di avere una variazione precisa della posizione dell'equilibratore al variare della velocità.



per tutto l'intervallo del  $C_L \Rightarrow$  si definiranno le posizioni limite del baricentro per assicurare l'equilibrio alla  $V_{min}$  e alla  $V_{max}$ .

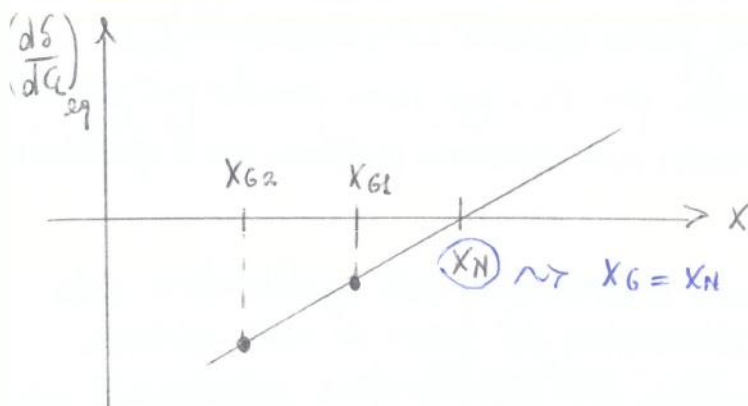
### Determinazione sperimentale del punto neutro N



Tale determinazione sperimentale serve a verificare che la posizione teorica calcolata sia effettivamente corretta.

Si procede facendo minimamente due voli, con differenti posizioni del baricentro, e due velocità differenti, ricavando mediante un potenziometro il valore di  $S_{eq}$ . Avendo a disposizione due punti, è possibile determinare la pendenza della retta che li congiunge.

$$\frac{dS_{eq}}{dC_{L,eq}} = -\frac{C_H \alpha}{\Delta} = -\frac{C_L \alpha}{\Delta} \frac{X_G - X_N}{c}$$



La posizione del punto neutro si ha quando la pendenza si annulla.

Riprendiamo ora il grafico delle pagine precedenti rappresentandolo come serie di  $S_{eq}$  non più in funzione del  $C_L$  ma direttamente delle velocità

### Analizziamo il velivolo con $X_G < X_N$ :

Supponiamo di volare alla  $V_A$  con l'angolo dell'equilibratore necessario ad assicurare l'equilibrio pari a  $\delta_A$ .

Si ha un disturbo, come ad esempio una raffica orizzontale, che modifica la velocità rispetto al velivolo  $\Rightarrow V_B$  (come se il velivolo si trovasse a una velocità maggiore)

Il pilota, se dovesse assicurare l'equilibrio alla  $V_B$ , dovrebbe muovere l'equilibratore e portarlo a  $\delta_B$ , ma non fa nulla. L'equilibratore allora si troverà in una posizione che tenderà a far cabrare il velivolo, facendolo tornare alla  $V_A$ .

### Analizziamo il caso con $X_G > X_N$ :

Voliamo alla  $V_A$  con angolo dell'equilibratore  $\delta_A$ , necessario ad assicurare l'equilibrio. Per effetto di una raffica, il velivolo si porta alla  $V_B$ .

Il pilota, per assicurare l'equilibrio, dovrebbe questa volta muoverlo in senso opposto, con un  $\delta_B < \delta_A$ , ma non fa nulla.

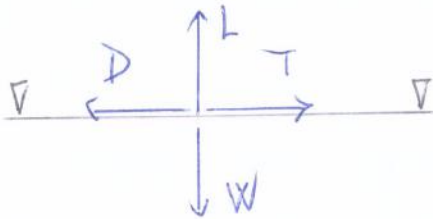
Il velivolo tende allora a picchiare, aumentando la sua velocità e, cessato il disturbo, esso si porta in una condizione di equilibrio corretta a una velocità maggiore della  $V_B$ .

② Determinare l'angolo dell'equilibratore se necessario nella condizione di volo rettilineo stazionaria a regime per un velivolo del quale sono date le seguenti caratteristiche:

- $S = 30 \text{ m}^2$
- $\frac{X_G}{c} = 0.4$
- $\frac{X_H}{c} = 0.6$
- $W = 12.000 \text{ N}$
- $S_t = 4.3 \text{ m}^2$
- $l_t = 5.8 \text{ m}$
- $c = 1.4 \text{ m}$
- $\frac{X_{a'}}{c} = 0.23$
- $a = 5.7$
- $a_t = 4.5$
- $(1 - \frac{\partial E}{\partial \alpha}) = 0.75$
- $\gamma = \frac{\partial a_t}{\partial \delta} = 0.45$
- $(C_{H_0})_{\alpha=0^\circ, \delta=0^\circ} = 0.18$

l'aereo vola a  $V_e$  costante.  
 Dato che  $V_t = V_e \sqrt{\frac{1}{\cos \delta}}$  e  $\delta \downarrow$  se  $z \uparrow$ ,  
 se la quota aumenta, aumenta anche la  $V_t$ .

Determiniamo il  $C_{L_{eq}}$ :



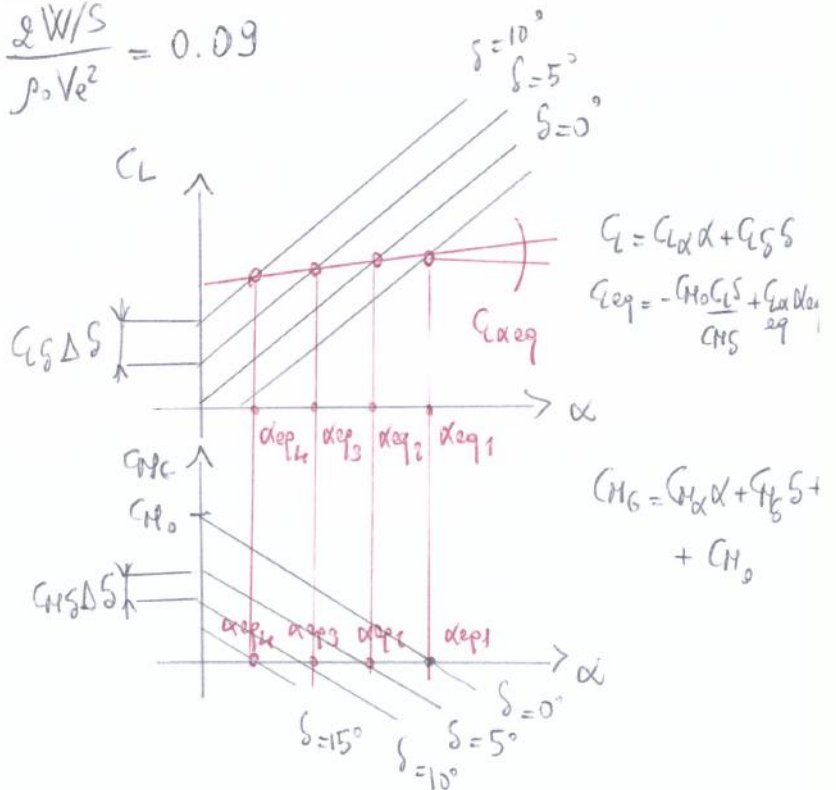
$$\begin{cases} T = D \\ L = W = \frac{1}{2} \rho_0 V_e^2 S C_L \rightarrow C_{L_{eq}} = \frac{2W/S}{\rho_0 V_e^2} = 0.09 \\ M = 0 \end{cases}$$

Ricondiamo che all'equilibrio:

$$\begin{cases} C_L = C_{L_{eq}} = C_{L\alpha} \alpha_{eq} + C_{L\delta} \delta_{eq} \\ C_{M\alpha} \alpha_{eq} + C_{M\delta} \delta_{eq} = -C_{M_0} \end{cases}$$

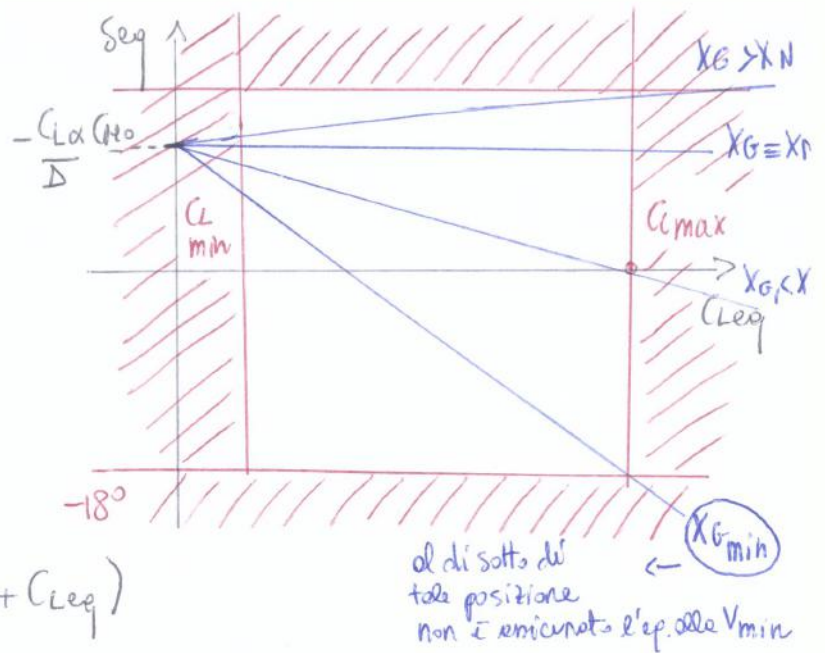
$$\frac{-L\alpha}{C_{M\alpha}} = \frac{-C_{L\delta} \delta_{eq} + C_{L_{eq}}}{-C_{M\delta} \delta_{eq} - C_{M_0}}$$

$$\delta_{eq} = - \frac{C_{L\alpha} C_{M_0} + C_{M\alpha} C_{L_{eq}}}{C_{L\alpha} C_{M\delta} - C_{M\alpha} C_{L\delta}}$$



All'equilibrio:

$$\begin{cases} C_L = C_{Leq} = C_{L\alpha} \alpha_{eq} + C_{L\delta} \delta_{eq} \\ C_{M\alpha} \alpha_{eq} + C_{M\delta} \delta_{eq} = -C_{M0} \end{cases}$$



$$\frac{C_{L\alpha}}{C_{M\alpha}} = \frac{-C_{L\delta} \delta_{eq} + C_{Leq}}{-C_{M\delta} \delta_{eq} - C_{M0}}$$

$$C_{L\alpha} (-C_{M\delta} \delta_{eq} - C_{M0}) = C_{M\alpha} (-C_{L\delta} \delta_{eq} + C_{Leq})$$

$$\delta_{eq} = \frac{-C_{M\alpha} C_{Leq} - C_{L\alpha} C_{M0}}{C_{L\alpha} C_{M\delta} - C_{M\alpha} C_{L\delta}} = -\frac{C_{L\alpha}}{\Delta} C_{M0} - \frac{C_{M\alpha}}{\Delta} C_{Leq}, \text{ con } C_{M\alpha} = C_{L\alpha} \frac{X_G - X_N}{c} \text{ dipendente dal baricentro}$$

La posizione limite anteriore del baricentro si ha per:

$$\delta_{min} = -\frac{C_{L\alpha}}{\Delta} C_{M0} - \frac{C_{M\alpha}}{\Delta} C_{Lmax} \rightarrow C_{M\alpha} = \left( -\frac{C_{L\alpha}}{\Delta} C_{M0} - \delta_{min} \right) \frac{\Delta}{C_{Lmax}} = -1.1012$$

$$\Rightarrow C_{M\alpha} = C_{L\alpha} \frac{X_G - X_N}{c} \rightarrow X_{G,lim} = c \frac{C_{M\alpha}}{C_{L\alpha}} + X_N = 0.1853 \text{ mv}$$

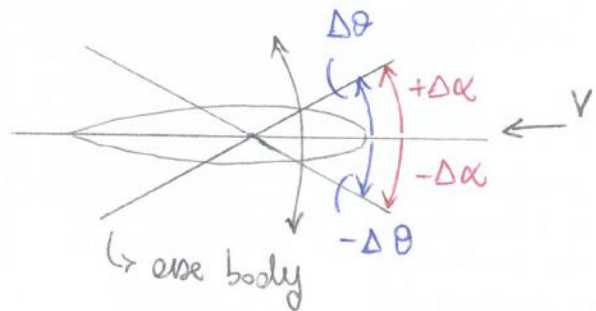
$$\left( \frac{X_G}{c} \right)_{lim} = 0.15$$

γm generale ;

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_{eq} + \Delta\gamma \\ \theta = \theta_{eq} + \Delta\theta \\ \alpha = \alpha_{eq} + \Delta\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\gamma = \Delta\theta - \Delta\alpha \\ \gamma = \theta - (\alpha - \alpha_{eq}) \\ \dot{\gamma} = \dot{\theta} - \dot{\alpha} = q - \dot{\alpha} \end{cases} \text{ relazione tra } \dot{\gamma}, q, \dot{\alpha}$$

• Se  $\dot{\gamma} = 0 \Rightarrow q = \dot{\alpha} \Rightarrow$  oscillazione su traiettoria orizzontale

Le variazioni di incidenza è anche le variazioni di assetto. (situazione molto particolare)



• Se  $\dot{\alpha} = 0 \Rightarrow \dot{\gamma} = q = \frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{V}{R} \Rightarrow$  moto curvo nel piano di simmetria

$\omega$  = velocità angolare del velivolo attorno al centro di istantanea rotazione

Torniamo allo schema iniziale :

eq.  $\perp$  traiettoria :  $L + T \sin \alpha^* = W \cos \gamma + F_c$   $\approx 0$

eq.  $\parallel$  traiettoria :  $T \cos \alpha^* = D + W \sin \gamma + \frac{W}{g} \frac{dV}{dt}$   $\approx 0$

$\rightarrow$  se in ogni istante  $T = D + W \sin \alpha$   
 $\Rightarrow$  NO ACCELERAZIONE

Definiamo  $m = \frac{L}{W}$  FATTORE DI CARICO A CONTINGENZA

Rappresenta quante volte è l'accelerazione del velivolo, nella manovra considerata, rispetto a quella di gravità

$$\Rightarrow m = \frac{L}{W} = \cos \gamma + \frac{V^2}{gR}$$



$$m = \frac{L}{W} \Rightarrow m_{max} = \frac{L_{max}}{W}, \text{ con } L_{max} = \frac{1}{2} \rho V_{max}^2 S C_{L_{max}}$$

La relazione di  $L_{max}$  scritta sopra è valida se non consideriamo una condizione di volo a regime rettilineo uniforme orizzontale.

C'è dunque un qualcosa, oltre al peso, che permette di equilibrare questo  $L_{max}$  visto che le forze presenti solo  $W$  e supponiamo  $C_L = C_{L_{max}} \Rightarrow V = V_{min}$

$$\Rightarrow m_{max} = \frac{L_{max}}{W} = \frac{C_{L_{max}} V_{max}^2 \rho}{2 (W/S)}$$

$$\Rightarrow V_{m_{max}}^2 = \frac{m_{max} \cdot 2 W/S}{\rho C_{L_{max}}}$$

$\Rightarrow$  nella situazione generica, supponendo di mantenere  $C_L = C_{L_{max}}$  e facendo variare  $m$ :

Consideriamo le condizioni di volo rettilineo uniforme orizzontale:

$$V^2 = m \cdot \frac{2 W/S}{\rho C_{L_{max}}} \rightarrow K$$

$$L = W = \frac{1}{2} \rho V_{min}^2 S C_{L_{max}} \Rightarrow$$

$$V_{min}^2 = \frac{2 W/S}{\rho C_{L_{max}}} = K$$

$$\Rightarrow V^2 = K m$$

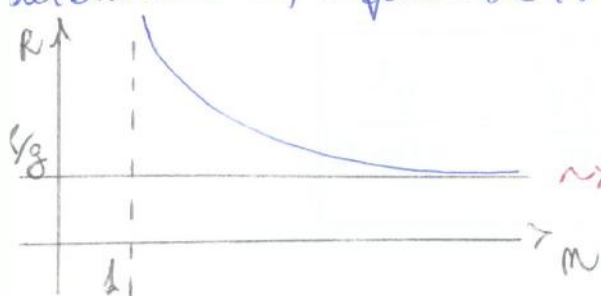
Ritorniamo alla relazione del raggio:

velocità traiettoria di raggio infinito

$$R = \frac{V^2}{g(m-1)} = \frac{K m}{g(m-1)} = \frac{K}{g(1 - \frac{1}{m})}$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{K}{g(1 - \frac{1}{m})} = \frac{K}{g}$$

Il raggio, una volta definito  $C_L = C_{L_{max}}$  solamente perché poi è stato possibile determinare  $K$ , dipende da  $m$  secondo tale relazione.



raggio al di sotto del quale, dato un determinato velocità, dunque fissato  $K$ , non è possibile andare

Supponiamo  $\theta = \dot{\theta} = 0$

$\dot{q} = 0 \rightarrow$  non è presente accelerazione di beccheggio  
 (altrimenti nell' ep. di equil. allo rotazione ci sarebbe stato anche un  $\dot{\gamma} \dot{q}$ )

$$\Rightarrow q = \dot{\theta} = \frac{V}{R} \Rightarrow \boxed{m = 1 + \frac{V^2}{gR} = 1 + \frac{qV}{g}} \Rightarrow \boxed{q = (m-1) \frac{g}{V}}$$

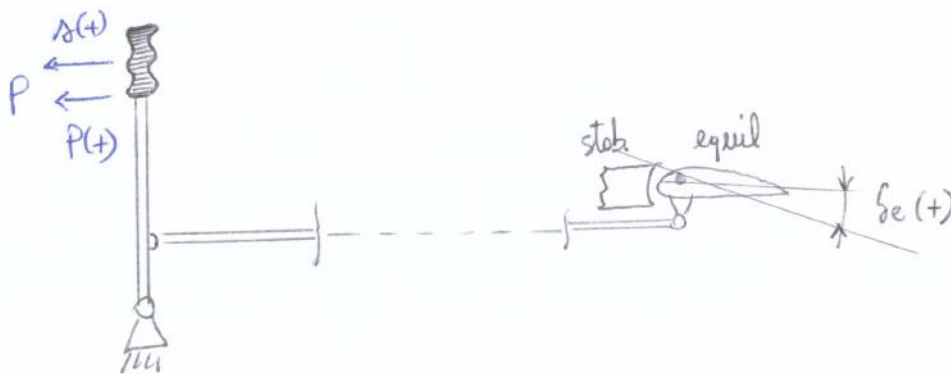
Confronto: volo rettilineo unif. orizzontale / moto curvo (e poi velocità)

$\Rightarrow \alpha_{eq} \neq \alpha$   $\rightarrow$  perché se portata di velocità è cambiata la portanza, che non equilibra più solo  $W$ , ma anche la forza centrifuga  $\Rightarrow \alpha$  sarà aumentato ( $\alpha \uparrow$ )

$\Rightarrow C_L \neq, S_e \neq, P \neq$   
 $\hookrightarrow$  sforzi di bordo

$\rightarrow$  diversa distribuzione di pressione sul piano di coda  $\Rightarrow$  diversa la forza che agisce su di esso

SCHEMA DI UNA TRASMISSIONE A COMANDO MECCANICO REVERSIBILE



Il pilota, spostando le barre in avanti (o positivo), tramite un opportuno cinemotismo fa muovere l'equilibratore nel senso positivo

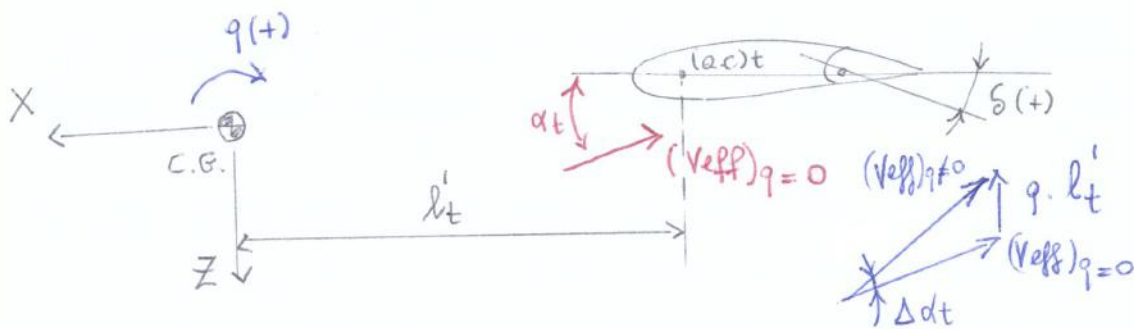
$$\Rightarrow \boxed{\frac{d S_e}{d \delta} > 0}$$

I ragionamenti che porteremo avanti ci baseremo su una trasmissione a comando meccanico classica, poiché i requisiti dell'equilibratore devono essere soddisfatti per una linea di trasmissione del genere poi, se la trasmissione non è meccanica classica ci serve un ARTIFICIAL FEEL che darà al pilota le

Esercizio:

$$\left\{ \begin{aligned} C_{Lq} &= \frac{\partial C_L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial C_L}{\partial q} \frac{V}{c/2} = \frac{\partial C_L}{\partial q} \frac{1}{t^*} \\ C_{Hq} &= \frac{\partial C_H}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial C_H}{\partial q} \frac{V}{c/2} = \frac{\partial C_H}{\partial q} \frac{1}{t^*} \end{aligned} \right.$$

Vediamo come nascono tali derivate aerodinamiche:



Un caso abbiamo rappresentato la  $V$  che incide sul piano orizzontale di coda con  $q=0$ . Sappiamo che questo risulta ruotato di un angolo  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_{nb}}$  rispetto alla velocità che incide sulla penna e può avere un modulo differente, infatti  $V_{eff}^2 = \eta_t^2 V^2$

Considerando una  $q \neq 0$ , occorre sommare alla  $(V_{eff})_{q=0}$  le componenti di velocità rispetto al piano orizzontale di coda dovuta alla rotazione,  $q l_t'$ , per ottenere la  $(V_{eff})_{q \neq 0}$ .

$\Rightarrow$  La  $V_{eff}$  è ruotata di un  $\Delta \alpha_t$  che possiamo esprimere come:

$$\Delta \alpha_t \approx \frac{q l_t'}{V_{eff}}$$

$\rightarrow \left. \begin{aligned} V_{eff} &\neq q l_t' \\ \sin \Delta \alpha_t &\approx \tan \Delta \alpha_t \approx \Delta \alpha_t \end{aligned} \right\}$

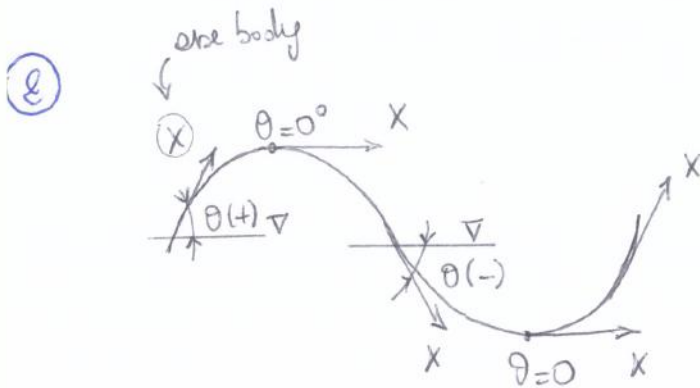
Allora, poiché  $C_{Lt} = a_t \alpha_t$  e si ha una variazione  $\Delta \alpha_t$  dovuta a  $q$

$$\Rightarrow \Delta C_{Lt} = a_t \Delta \alpha_t = a_t \frac{q l_t'}{V}$$

Consideriamo un profilo d'ala animato di moto traslatorio che si alza e si abbassa. Se l'asse body (corda del profilo) rimane orizzontale  $\Rightarrow q=0$   $x$  varia perché alle velocità di traslazione si somma la velocità rispetto al profilo dovuta al fatto che si alza e si abbassa.

(smorzamento)

$\Rightarrow$  Si possono le derivate perodinamiche  $C_{L\dot{\alpha}}, C_{H\dot{\alpha}}$  che è possibile valutare se  $\dot{\alpha}$  è noto e inoltre, perché  $\alpha$  varia nel tempo e dunque anche  $\dot{\alpha}$ , le derivate perodinamiche variano nel tempo



$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 0 \rightarrow \alpha = \text{costante} \\ q \neq 0 \end{cases}$$

Supponiamo di considerare una traiettoria sinusoidale e di assumere l'asse body  $X$  non troppo discostato dal vettore velocità (supponiamo coincidenti)  $\Rightarrow$  si avrà una variazione dell'angolo di attacco  $\theta$  sinusoidale

$\Rightarrow q$  varia, ci sono dei momenti in cui  $q$  è max e altri in cui  $q=0$ .

ISS:

Nella traiettoria sinusoidale, il lift è perpendicolare alla traiettoria, mentre il peso è sempre in direzione verticale. Questo vuol dire che  $L$  varierà in funzione della posizione, perché dovrà equilibrare una componente del peso differente.

- varierà in funzione dell'ampiezza della sinusoidale, in funzione cioè di quanto la traiettoria si discosta da quella orizzontale.

( $L$  varia  $\rightarrow$  varia  $C_L \rightarrow$  varia  $\alpha$ )

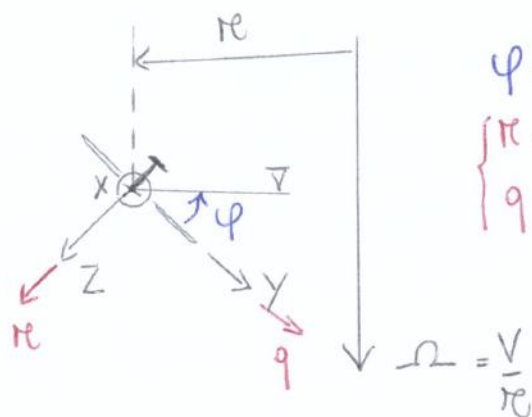
$\Rightarrow$  supponiamo che  $\alpha$  praticamente non vari.

$\Rightarrow$  Si possono le derivate perodinamiche  $C_{Lq}, C_{Hq}$  di smorzamento

# VIRATA

Supponiamo inizialmente di considerare una virata su traiettoria orizzontale

$\Rightarrow \gamma = 0^\circ$



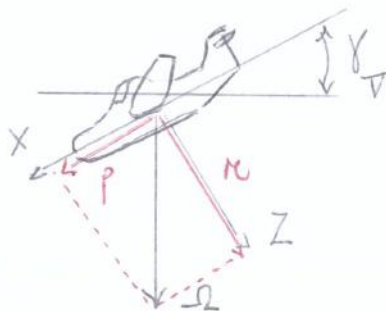
$\varphi$  = angolo di sbalzo (bank angle)  
 $\begin{cases} R = \text{velocità di virata} \\ q = \text{velocità di beccheggio} \end{cases}$

Mentre il velivolo compie la virata, esso è animato da due velocità di rotazione, rappresentate dalle componenti di  $\Omega$  rispetto agli assi body

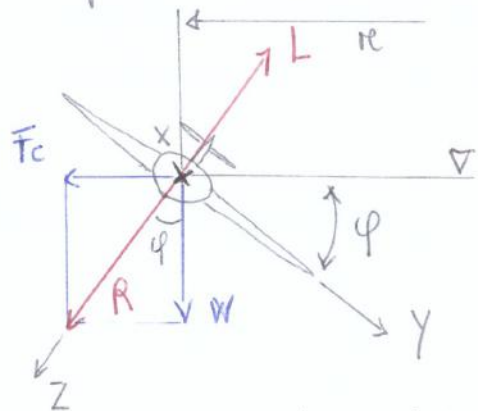
Se  $\gamma \neq 0^\circ \rightarrow \Omega$  avrà anche una componente lungo X  $\Rightarrow p = \text{velocità di rollio} \neq 0$

## VIRATA CORRETTA

Virata per cui la risultante delle forze di massa ( $F_c, W$ ) è contenuta nel piano di simmetria ed è equilibrata dalle portanze (se si è su traiettoria orizzontale  $\Rightarrow \gamma = 0^\circ$ ).



$p = \text{velocità di rollio} \neq 0$



$$R = W \cos \varphi + F_c \sin \varphi = L$$

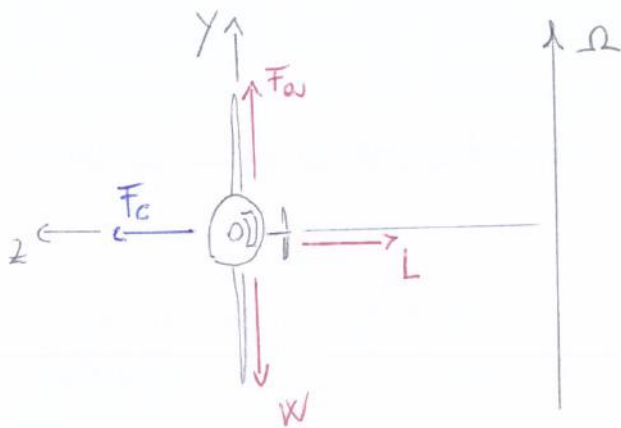
asse X entrante, visto da dietro

La superficie aerodinamica che svilupperà tale forza sarà la fusoliera e l'impennaggio verticale  $\Rightarrow$  dovrà esserci un angolo  $\beta$  (side slip angle o angolo di derapata)

Tale forza aerodinamica non sarà molto elevata, così come l'angolo  $\beta$

$\Rightarrow F_a$  contenute  $\Rightarrow F_c$  contenute  $\Rightarrow$  virate piatte  
 $\left. \begin{array}{l} \bullet R \text{ elevato} \\ \bullet V \text{ non troppo elevato} \end{array} \right\}$

## ② VIRATA A COLTELLO



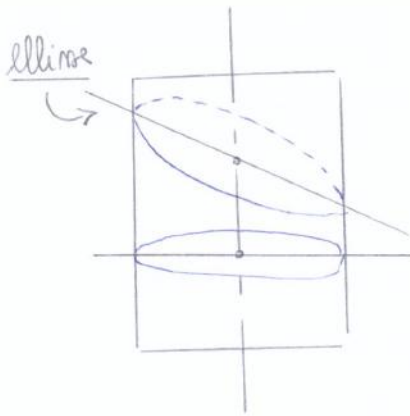
In questo caso, la forza aerodinamica  $F_a$  nasce per equilibrare la forza peso  $W$  ed è sviluppata da fusoliera e impennaggio verticale  
 $\Rightarrow$  dovrà esserci un angolo  $\beta$  che permetta di generare  $F_a$

In questo caso  $F_c$  contenute nel piano di simmetria, ma la risultante delle forze di massa non lo è.  $\Rightarrow$  virate non corrette

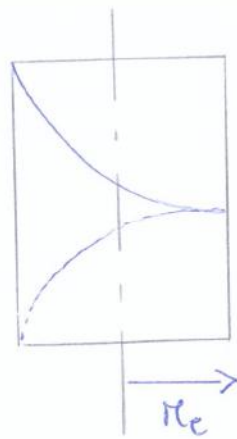
Cosa comporta una virata non corretta?

- 1) Se la risultante delle forze di massa non sono nel piano di simmetria, nascono delle accelerazioni che possono essere fastidiose per il comfort dei passeggeri
- 2) Nel momento in cui la risultante non è nel piano di simmetria, ci sarà una componente di forza orizzontale che tenderà a spostare il velivolo dalla situazione aerodinamica ottimale. Farà nascere nel velivolo componenti di velocità trasversale che peggioreranno la sua aerodinamica

$\Rightarrow$  le virate corrette è quella migliore dal punto di vista della resistenza



traiettoria elicoidale



Non occorre confondere l'ellisse con la traiettoria elicoidale. Questa si ottiene pensando l'ellisse mobile intatta per intanto e intersecante il cilindro nel punto il cui ellissoide sta percorrendo la traiettoria elicoidale.

Relazione di  $\Omega$

$$F_c = m \cdot a_c = m \Omega^2 r_c = \frac{W}{g} \Omega^2 r_c = \frac{W}{g} \Omega \underbrace{\Omega r_c}_U = \frac{W}{g} \Omega U$$

Inoltre, considerando il piano  $m-m$ :

$$F_c = \sqrt{(nW)^2 - W^2 \cos^2 \gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{W}{g} \Omega U = \sqrt{(nW)^2 - W^2 \cos^2 \gamma} \Rightarrow \Omega = \frac{g}{U} \sqrt{n^2 - \cos^2 \gamma} = \frac{g}{V} \sqrt{\frac{m^2}{\cos^2 \gamma} - 1}$$

con  $V = U/\cos \gamma$

$$\Rightarrow \Omega = \frac{g}{V} \sqrt{\frac{m^2}{\cos^2 \gamma} - 1} = f(m, V) \quad (1)$$

definito  $\gamma$ ,  $\Omega$  dipende dal fattore di carico  $m$  e dalla velocità di volo  $V$

Se  $V \uparrow \Rightarrow \Omega \downarrow$   
 $m \uparrow \Rightarrow \Omega \uparrow$

Sempre sul piano  $m-m$ , consideriamo l'equilibrio nella direzione del piano  $m-m$  secondo la componente  $W$  ( $W \cos \gamma$ ):

$$\Rightarrow W \cos \gamma = L \cos \varphi \Rightarrow \frac{L}{W} = m = \frac{\cos \gamma}{\cos \varphi}$$

dato  $\gamma$ ,  $m$  dipende semplicemente dall'angolo di sbalzo  $\varphi$  (in una virata corretta)

Relazione di  $Re_c$ :

$$\begin{cases} Re_c = \frac{U}{\Omega} \\ \Omega = \frac{g}{U} \sqrt{m^2 - \cos^2 \gamma} \end{cases} \Rightarrow Re_c = \frac{U^2}{g \sqrt{m^2 - \cos^2 \gamma}} \stackrel{U = V \cos \gamma}{=} \frac{V^2 \cos^2 \gamma}{g \sqrt{m^2 - \cos^2 \gamma}}$$

$$Re_c = \frac{m(W/S) \cos^2 \gamma}{\frac{1}{2} \rho_0 S C_L g \sqrt{m^2 - \cos^2 \gamma}} = \frac{W/S \cos \gamma}{\frac{1}{2} \rho_0 S C_L g \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \gamma} - \frac{1}{m^2}}} = f(m, C_L)$$

$$V = \sqrt{\frac{m W/S}{\frac{1}{2} \rho_0 S C_L}}$$

(5)

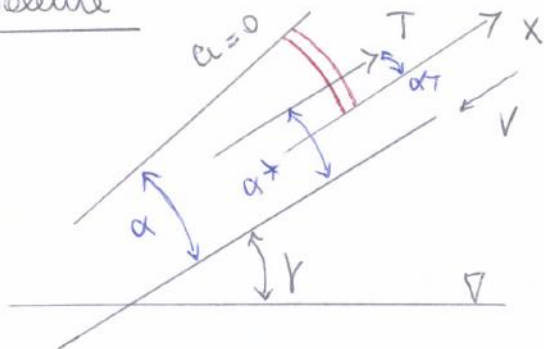
$$\Rightarrow Re_c = \frac{(W/S) \cos \gamma}{\frac{1}{2} \rho_0 S C_L g \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \gamma} - \frac{1}{m^2}}} = f(m, C_L)$$

raggio del cilindro su cui si avvolge la traiettoria elicoidale

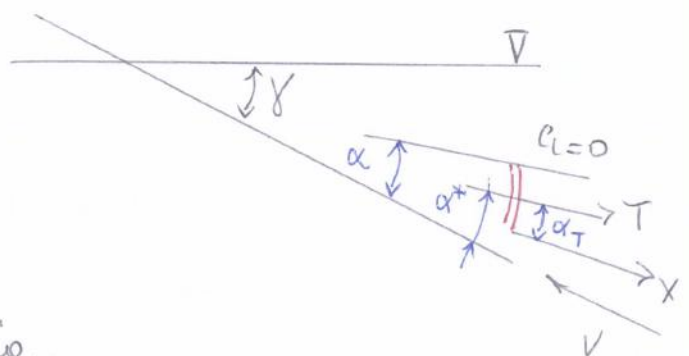
Sembrerebbe che  $Re_c = Re_{c \text{ min}}$  se  $(m_{\text{max}}, C_{L \text{ max}})$ , ma non possiamo prescindere dall'equazione in direzione parallela alla traiettoria.

Spirito nella vinata corrotta su traiettoria elicoidale per velivolo a getto

Salente



Discendente



Equilibrio in direzione // alla traiettoria:

$$T \cos \alpha^* = D \pm W \sin \gamma$$

L'è salente o discendente

poiché  $D = \frac{L}{E}$ ,  $L = nW \Rightarrow D = \frac{mW}{E}$

$$\Rightarrow T \cos \alpha^* = \frac{mW}{E} \pm W \sin \gamma$$



$$\Rightarrow \boxed{\kappa_{c(m_{max})} = \frac{W/S}{\frac{1}{2}\rho_0 S C_L(E_{max}) g \sqrt{1 - \frac{1}{m^2_{max}}}}} \Rightarrow \kappa_{c_{m_{max}}} \text{ si ha per } m_{max} \text{ e } C_{L_{E_{max}}}$$

Se la struttura lo consente e ho spinta sufficiente, poiché  $m = \frac{T_0 \phi_1 \psi_1 K_1 E}{W}$ , posso effettuare una virata ad  $m_{max}$  e cui corrisponde  $W$  un certo  $\kappa_{c_{m_{max}}}$ .

$$\Rightarrow \boxed{\kappa_{c_{min}} \rightarrow C_{L_{max}}; m \rightarrow (E_{(C_{L_{min}} \rightarrow C_{L_{max}})})} \quad m = \frac{\phi_1 K_1 \psi_1 E}{W/T_0} \quad (7)$$

In teoria, poiché l' $m_{max}$  si ha per  $E_{max} \Rightarrow C_{L_{E_{max}}}$ , ma da questa relazione osserviamo che per avere  $\kappa_{c_{min}}$  devo volare ad  $C_{L_{max}} \rightarrow E_{C_{L_{max}}}$ , quindi efficiente occorre prendere? cercare un valore intermedio!

$$\Rightarrow \boxed{\kappa_{c(C_{L_{max}})}}$$

Ricordiamo che:

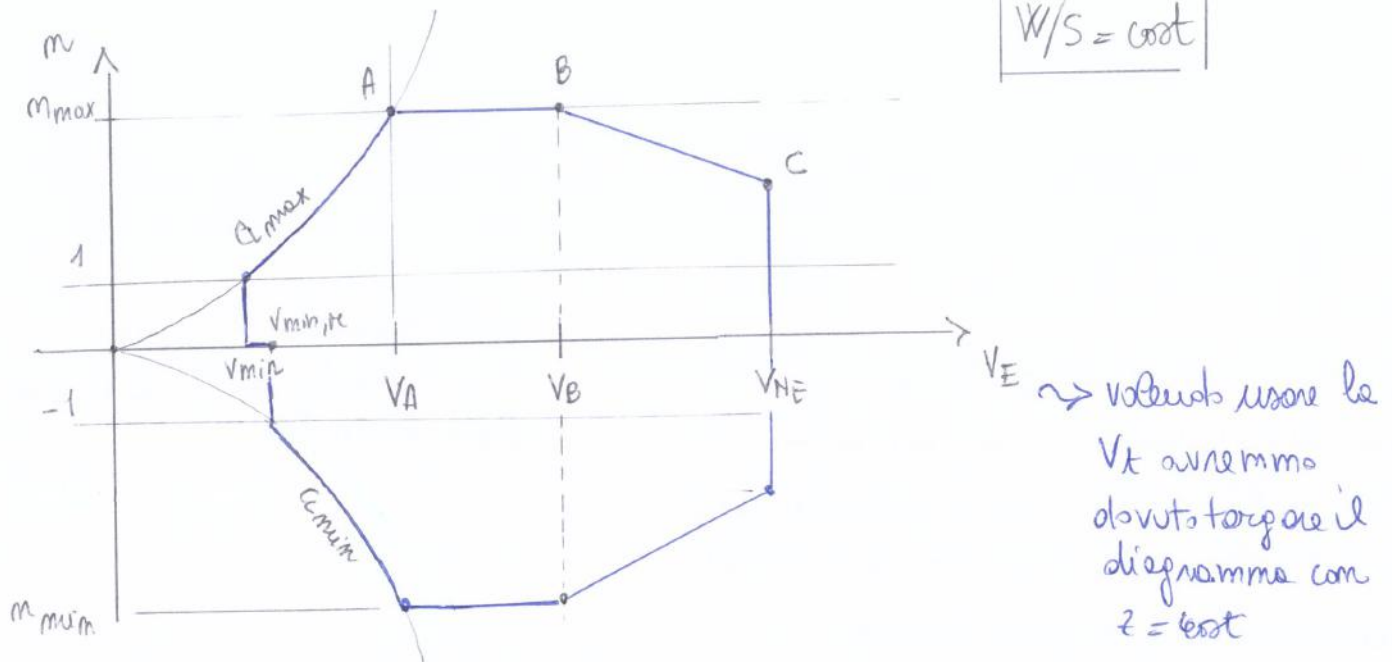
$$m = \frac{T E}{W}, \text{ dall'eq. lungo la traiettoria}$$

$$\Omega = \frac{V}{\kappa_c} \rightarrow V = V(\cos\gamma = 1)$$

$$\left. \begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \sqrt{\frac{m W/S}{C_L}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \\ \kappa_c &= \frac{W/S}{\frac{1}{2}\rho_0 S C_L g \sqrt{1 - \frac{1}{m^2}}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \sqrt{\frac{m W/S}{C_L}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\rho_0 S C_L g \sqrt{1 - \frac{1}{m^2}}}{W/S} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\rho_0}}} g \sqrt{S} \frac{1}{\sqrt{W/S}} \sqrt{C_L} \sqrt{m - \frac{1}{m}}$$

Perciò  $\pi_{c_{m_{max}}}$ ,  $\pi_{c_{m_{min}}}$ ,  $\pi_{c_{L_{max}}}$  sono caratterizzate da valori leggermente differenti di  $C_L$ , e dunque saranno differenti velocità e differenti angoli di sbalzo  $\varphi$ .

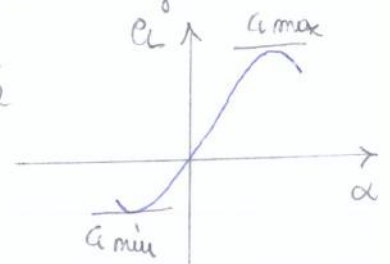
## DIAGRAMMA DI MANOVRA



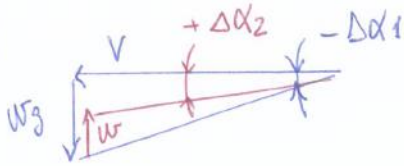
Esistono limitazioni stabilite dalle normative, che dipendono dalla categoria di velivolo considerato:

- 1)  $m_{max}$ ,  $m_{min}$ , che sono normalmente limiti differenti ( $m_{max} > m_{min}$ )
- 2)  $V_{NE}$  (never exceed), definita come:  $\min \left\{ 90\% V_{max} \text{ a cui è stata eseguita la verifica strutturale e trazione dell'ala, } 95\% V_{max} \text{ raggiunta nei flight test} \right\}$
- 3)  $V_B$ , nota ed inferiore alle  $V_{NE}$

4) La  $V_A$  è determinata dall'intersezione tra la retta  $m = m_{max}$  e la parabola  $m = \frac{L}{W} = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{C_{L_{max}}}{W/S} V_e^2$ . Poiché il  $C_{L_{max}}$  non è generalmente uguale e opposto al  $C_{L_{min}}$   $\rightarrow$  due parabole con concavità differente



6



Il velivolo, non essendo più presente la raffica ascendente, rallenta la sua corsa ascendente fino ad annullarsi.  
 Il  $\Delta\alpha_2$  si sottrae al  $\Delta\alpha_1$  fino a tornare a una situazione di aria calma

IPOTESI:

- 1) Mom si sono muovono ( $\delta_e$  e  $\delta_{th}$  (throttle) = cost), altrimenti si avrebbe una risposta del velivolo differente  $\Rightarrow V \approx \text{cost}$
- 2) Mom si sono rotazioni di beccheggio: entrando nella raffica, il velivolo subisce un  $\Delta\alpha$  che supponiamo non influisce sul  $\Delta M$ . In realtà, poiché è presente una der, verrebbe  $C_{M\alpha}$  e un  $\Delta\alpha \Rightarrow$  c'è una variazione di  $C_{M\alpha}$ ,  $\Delta M$ .
- 3) La circolazione che si verifica conseguentemente al  $\Delta\alpha$  è istantanea
- 4) Trascuriamo le deformazioni elastiche, che andrebbero ad attenuare le sollecitazioni
- 5)  $w_g \ll V$
- 6) Traiettoria rispetto al vento rimane orizzontale ( $\theta \approx 0^\circ$ )

Istante iniziale:

accelerazione  
manuale  
↓

$$\Delta\alpha_1 \approx \frac{w_g}{V} \Rightarrow a_m = \frac{\Delta L}{W/g} = \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 S C_{L\alpha} \Delta\alpha}{W/g}$$

↳ incremento incidenza istantaneo quando il fuoco dell'ala entra nella raffica

Im corrispondenza del  $\Delta\alpha_1$ , in cui si ha la variazione di incidenza massima, si avrà l'accelerazione manuale massima (istante iniziale in cui si entra in raffica):

↑ suscettibilità del velivolo alle variazioni di  $\alpha$

$$\Rightarrow Q_m \text{ max} = \frac{\rho C_{L\alpha} w_g V}{2 W/S}$$

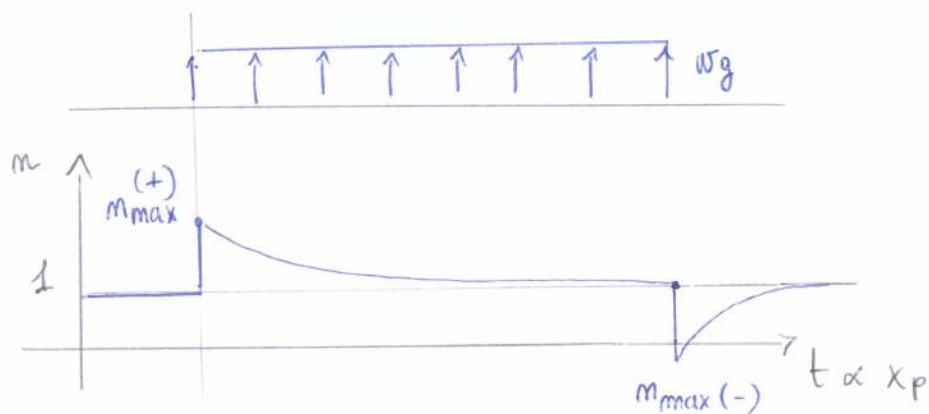
l'accelerazione manuale a cui è soggetto il velivolo, dunque le sollecitazioni a cui è sottoposto, e poiché di raffica, è minore se il carico d'aria è elevato e la velocità è bassa

$$\Rightarrow m = 1 \pm \frac{w_g V}{g h} e^{-\frac{Vt}{h}}$$

poiché  $m = \frac{L + \Delta L}{W} = 1 + \frac{\Delta L}{W}$

con  $\frac{\Delta L}{W} = \frac{\dot{w}}{g}$

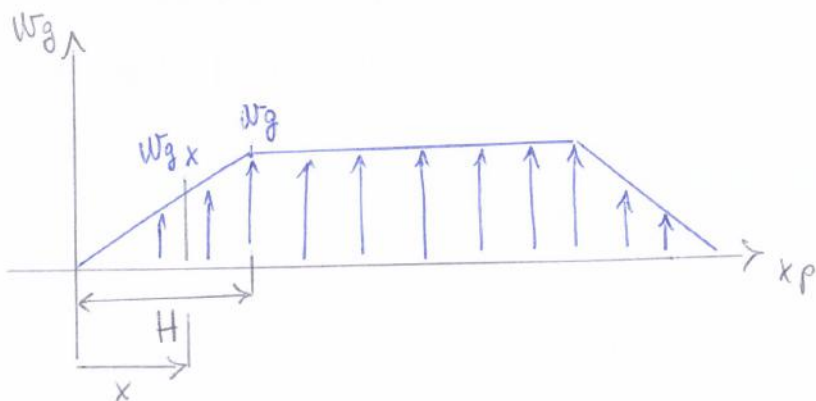
Allora:



### RAFFICCA GRADUALE LINEARE

Si utilizza tale schema per avere una rappresentazione più realistica della raffica.

Si ha un fronte lineare di raffica di lunghezza  $H$ , in cui la velocità cresce linearmente (di lunghezza 30 m).



$$H = 30 \text{ m}$$

$$w_{gx} = \frac{x_p}{H} w_g$$

$$x_p = V \cdot t$$

L'equazione differenziale precedente si modifica sostituendo al  $w_g$  il  $w_{gx}$ :

$$\dot{w} + \frac{V}{h} w - w_{gx} \frac{V}{h} = 0 \rightarrow$$

$$\dot{w} + \frac{V}{h} w - \frac{w_g V^2 t}{h H} = 0$$

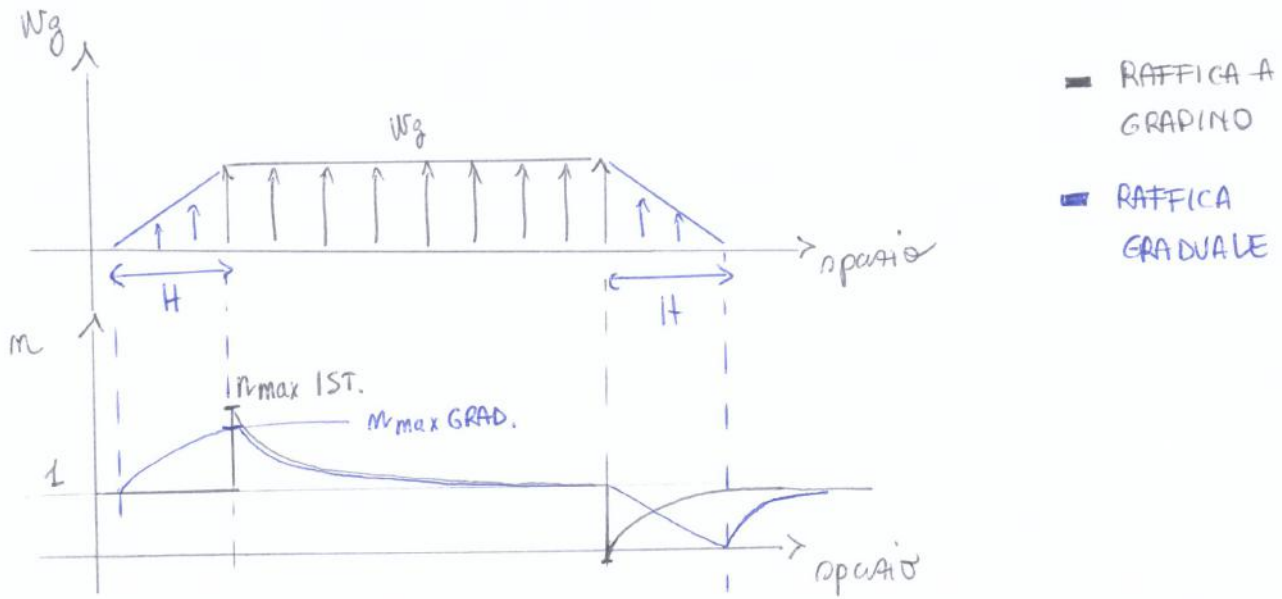
C.I.:

$$t=0 \rightarrow w=0$$

Risolviemo:

$$r(t) = \int_0^t \frac{V}{h} dt = \frac{Vt}{h}$$

Confronti con la raffica istantanea con quella graduale:



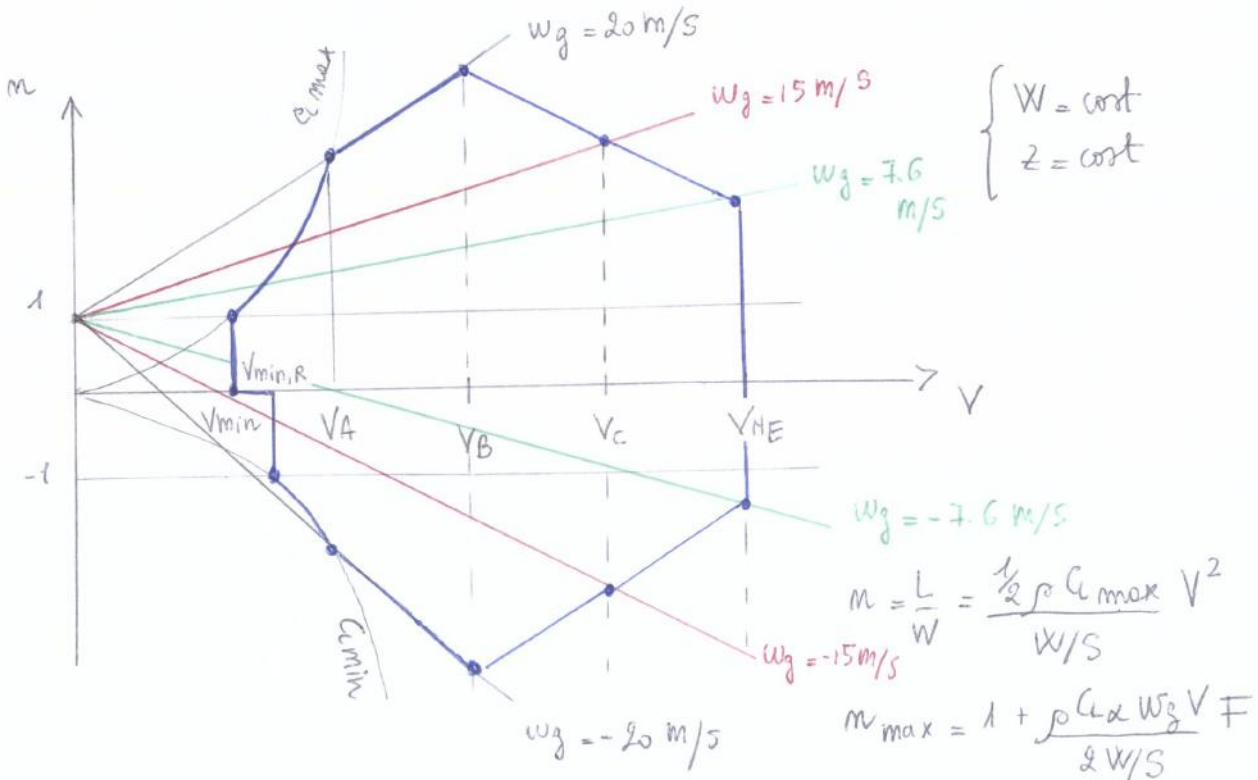
L' $m_{max}$  che si ha nel caso di raffica graduale lineare è inferiore rispetto all' $m_{max}$  della raffica a gradino, poiché è presente il fattore di attenuazione  $F$ .

Analogamente per l' $m_{max}(-)$

La normativa stabilisce che, facendo riferimento a:

RAFFICA ISTANTANEA  $\rightarrow$  tempo di ricorrenza assoluto

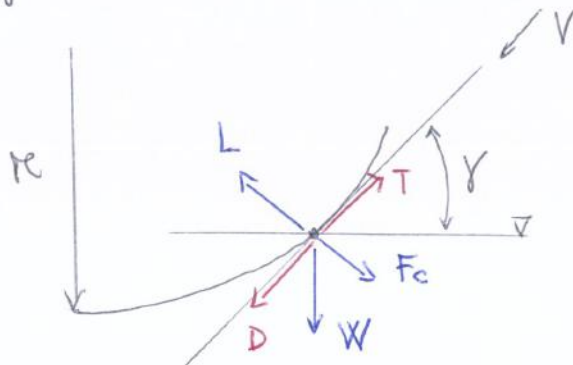
RAFFICA GRADUALE  $\rightarrow$  tempo di ricorrenza relativo



## ESERCITAZIONE 6 - CONDIZIONI DI VOLO NON A REGIME

④ Determinare il fattore di carico e contingenza  $m$  a cui è sottoposto un velivolo in moto curvo di raggio  $R$  nel piano di simmetria, nelle condizioni:

- $R =$  raggio della traiettoria  $= 840 \text{ m}$
- $V =$  velocità di volo  $= 184 \text{ m/s}$
- $\gamma = 30^\circ$



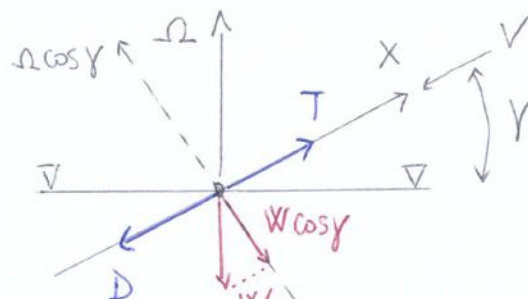
$$m = \frac{L}{W}$$

$$\begin{cases} L = F_c + W \cos \gamma \\ T = D + W \sin \gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow m = \frac{L}{W} = \frac{\frac{W}{g} \frac{V^2}{R} + W \cos \gamma}{W} = \frac{V^2}{Rg} + \cos \gamma = 4.974$$

⑤ Determinare il fattore di contingenza  $m$  a cui è sottoposto un velivolo in virata corveta con raggio di curvatura delle traiettorie  $\rho$ , angolo di rampa  $\gamma$ , con le seguenti caratteristiche:

- $\rho = 400 \text{ m}$
- $V = 110 \text{ m/s}$
- $S = 30 \text{ m}^2$
- $W = 12000 \text{ N}$
- $\gamma = 10^\circ$

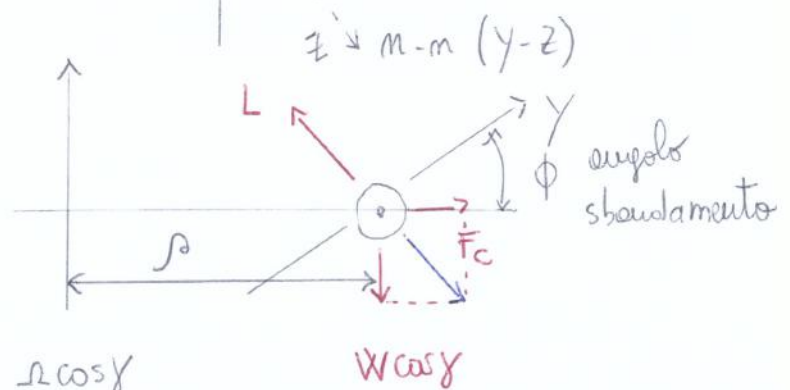


$$L = \sqrt{W^2 \cos^2 \gamma + \frac{W^2}{g^2} \frac{V^4}{\rho^2}}$$

$$m = \frac{L}{W} = \sqrt{\cos^2 \gamma + \frac{V^4}{\rho^2 g^2}} =$$

$$= 3.237$$

piano n-n,  
vista dal  
retro del  
velivolo



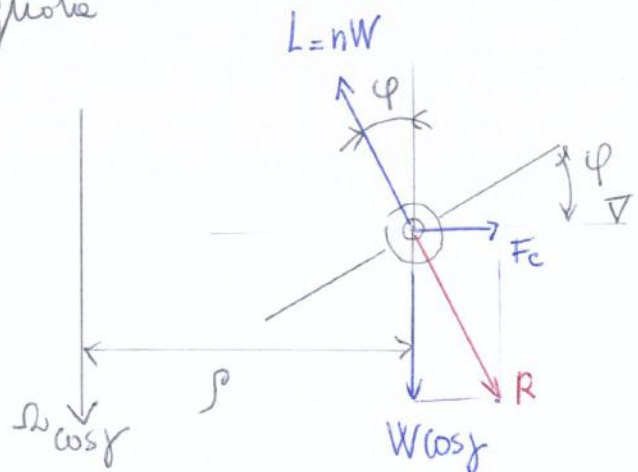
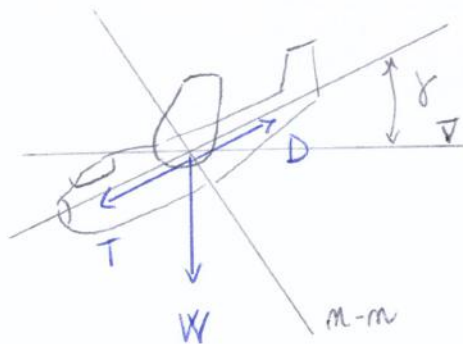
⑦ Un trimotore a getto ha le seguenti caratteristiche:

$$W/S = 90 \text{ psf} = \frac{90 \cdot 0.4536 \cdot 9.81}{(0.3048)^2} = 4309 \text{ N/m}^2$$

$$C_D = 0.025 + 0.05 C_L^2$$

$$\left(\frac{T_{ol}}{W}\right)_{SL} = 0.23$$

Calcolare la  $V_{TAS}$  per una vinata a fattore di carico massimo a livello del mare e a 7500 m di quota



$$\sqrt{m} = L = \sqrt{W^2 \cos^2 \gamma + \frac{W^2}{g^2} \Omega^4 r_{ec}^2} \rightarrow m = \sqrt{\cos^2 \gamma + \frac{V^2 \Omega^2}{g^2}} = \cos \gamma \sqrt{1 + \frac{V^2 \Omega^2}{g^2}}$$

oppure:

$$L \cos \varphi = W \cos \gamma$$

$$L \rightarrow m = \frac{L}{W} = \frac{\cos \gamma}{\cos \varphi} \quad \text{se } \gamma = 0^\circ \rightarrow \text{TRAIETTORIA ORIZZONTALE}$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{\cos \varphi}$$

$\Rightarrow m_{\max}$  se  $\varphi = \varphi_{\max}$

Equazioni di equilibrio:

$$T = D = \frac{1}{2} \rho V^2 S (0.025 + 0.05 C_L^2) = \frac{1}{2} \rho V^2 S (C_{D_0} + K C_L^2)$$

$$L = mW = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \rightarrow C_L = \frac{m W/S}{\frac{1}{2} \rho V^2}$$

② quota 7500 m :  $V_{m_{max}} = \sqrt{\left(\frac{I}{W}\right)_{SL} \left(\frac{T_0 - h z}{T_0}\right)^{3.5061} \frac{W}{S} \frac{1}{\rho C_D}} = 192.857 \text{ m/s}$   
 $\rho = \rho_0 \delta = \rho_0 \left(\frac{T_0 - h z}{T_0}\right)^{4.2561}$   
 $\rho = 0.5563$   
 $m_{max} = \left(\frac{I}{W}\right)_{SL} \left(\frac{T_0 - h z}{T_0}\right)^{3.5061} \frac{\sqrt{C_D/K}}{2 C_D} = 1.697$

Altro modo :

Trazionata orizzontale  $\rightarrow T = D = \frac{mW}{E} \rightarrow m = \frac{T}{W} E$

$$\Rightarrow \boxed{m_{max} = \frac{T}{W} \cdot E_{max}}$$

$$KW = L = \frac{1}{2} \rho_0 \delta S C_L V^2 \rightarrow \boxed{V = \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \cdot \sqrt{\frac{mW/S}{C_L}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta}}}$$

① quota 0 :  $m_{max} = \left(\frac{I}{W}\right)_{SL} \frac{\sqrt{C_D/K}}{2 C_D} = 3.252$

$$V_{m_{max}} = \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \cdot \sqrt{\frac{m_{max} W/S}{C_L E_{max}}} = 1.277 \cdot 140.773 = 179.767 \text{ m/s}$$

$\hookrightarrow \sqrt{C_D/K}$

② quota 7500 m :

$$m_{max} = \left(\frac{I}{W}\right)_{SL} \psi_L \frac{\sqrt{C_D/K}}{2 C_D} = \left(\frac{I}{W}\right)_{SL} \left(\frac{T_0 - h z}{T_0}\right)^{3.5061} \frac{\sqrt{C_D/K}}{2 C_D} = 1.697$$

$$\rho_0 \delta = \rho = \rho_0 \left(\frac{T_0 - h z}{T_0}\right)^{4.2561} = 0.5563$$

$$V_{m_{max}} = \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \cdot \sqrt{\frac{m_{max} W/S}{C_L E_{max}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{0.5563}{1.225}}} = 192.817 \text{ m/s}$$

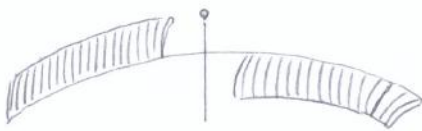
$\sqrt{\delta}$



Occorre valutare anche l'equilibrio al rollio, attorno all'axe body x.  
 Le forze che contribuiscono al rollio sono le lateral load e le spinte del rotore, oltre all'esistenza di altre forze che andremmo considerate analizzandole in caso specifico.

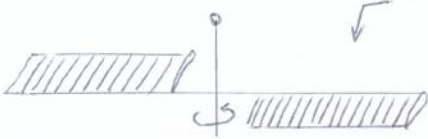
⇒ Nell'elicottero occorre considerare tutti e 6 i gradi di libertà  
 { 3 eq. equilibrio traslazione  
 { 3 eq. equilibrio rotazione

### Caratteristiche geometriche e aerodinamiche del rotore



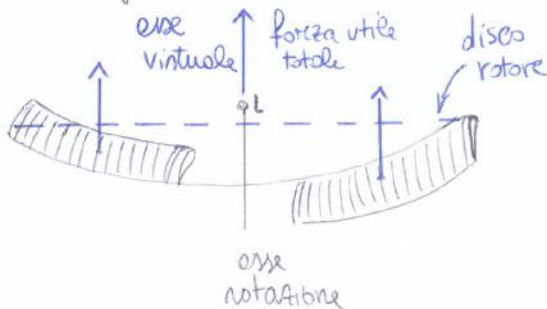
ROTORE FERMO

pale non svergolate ad angolo di incidenza nullo ⇒ portanza nulla



ROTORE in ROTAZIONE : le pale si raddrizzano per l'effetto della forza centripeta

Se supponiamo le pale non svergolate, ovvero con le varie sezioni delle pale lungo il soffio che hanno le corde che giace sullo stesso piano, per generare una portanza, occorrerà muovere il passo, cioè andremo a muovere tutte le pale attorno a un'axe perpendicolare all'axe di rotazione, generando una variazione di incidenza uniforme lungo il soffio. Procedendo in questo modo, ci troveremo nella seguente situazione:



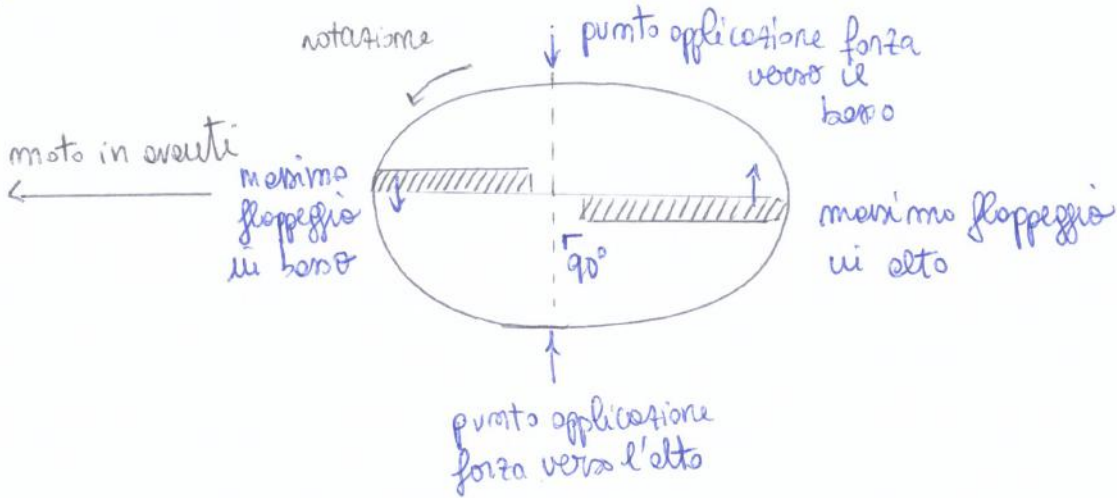
Verificando il passo delle pale, nasce un'azione aerodinamica che serve una distribuzione tale da riflettere le pale come in figura.

Definiamo DISCO ROTORE il cerchio sui raggi morio che unisce il tip delle pale ed è perpendicolare all'axe di rotazione

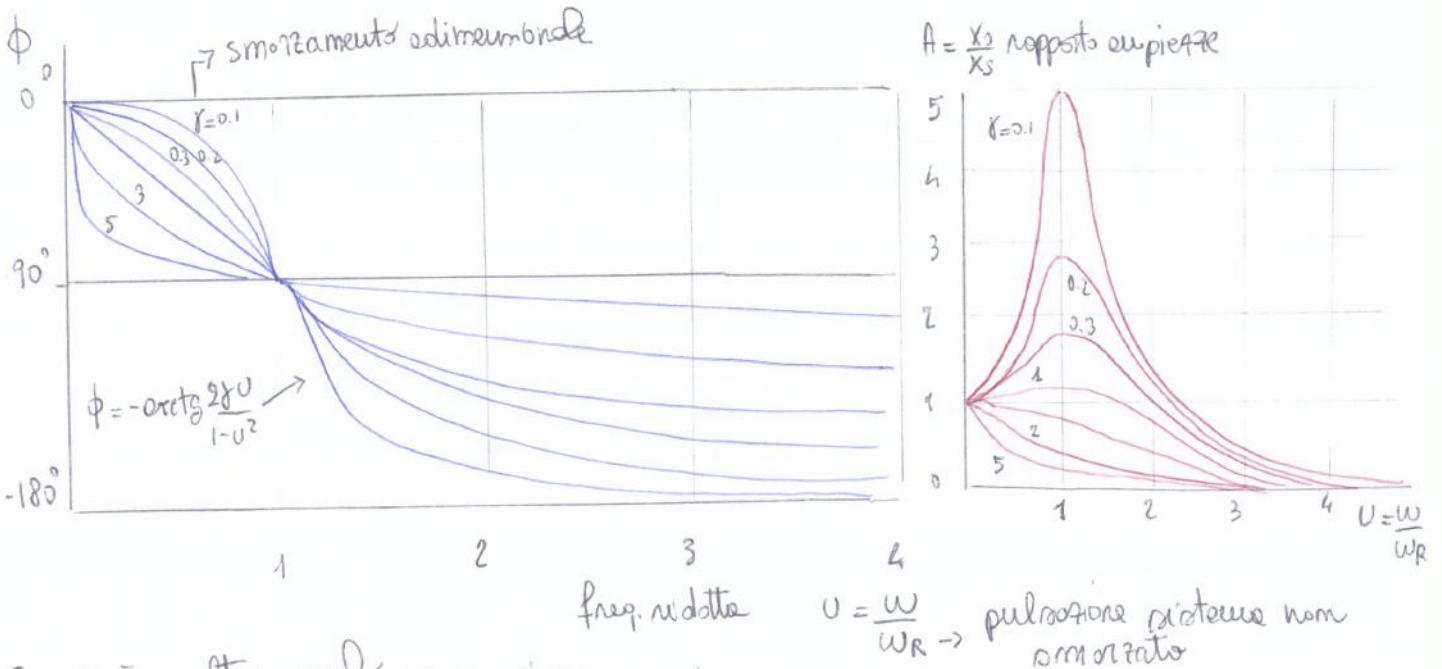


Come tutti i sistemi dinamici riconducibili a quelli del II ordine massa-molle-smorzatore, vi è uno sfasamento tra la forzante e l'ampiezza dello spostamento, come usuali.

Il comando deve essere dato con  $30^\circ$  di anticipo rispetto all'effetto che si vuole ottenere.



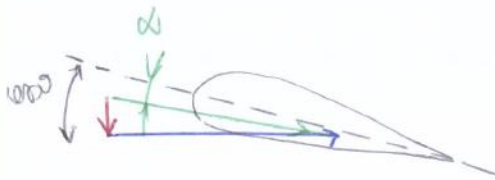
Analizziamo la risposta in fase di un generico sistema dinamico del secondo ordine (vedi richiamo in allegato)



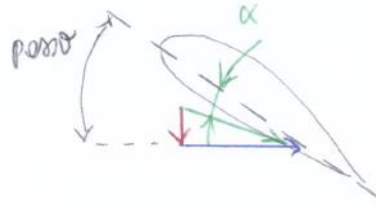
Se  $\gamma$  è molto piccolo, non si arrivano a  $90^\circ$  di sfasamento. È solo quando il sistema è molto smorzato che se siamo a freq. di sollecitazione di poco inferiori o superiori a  $\omega_R$  che lo sfasamento è molto prossimo a  $90^\circ$ . Ci troviamo proprio in questa situazione! Fzendo sul ciclico, sollecitiamo il sistema con una frequenza che è quella corrispondente ai giri al minuto del rotore (es. 500 rpm  $\rightarrow$   $60/500 = 0.12$  Hz), e che variamo il ciclico 1 volta al giro. Qual'è la frequenza propria della pala? È prossima a quella con cui vedo e sollecitare il rotore!

Una soluzione abbandonata in fretta è stata il tentativo di restringere la pale, diminuendo la superficie e dunque la portanza, della radice verso l'estremità, anche perché di maggiore difficoltà costruttiva.

EFFETTO DELLO SVERGOLAMENTO

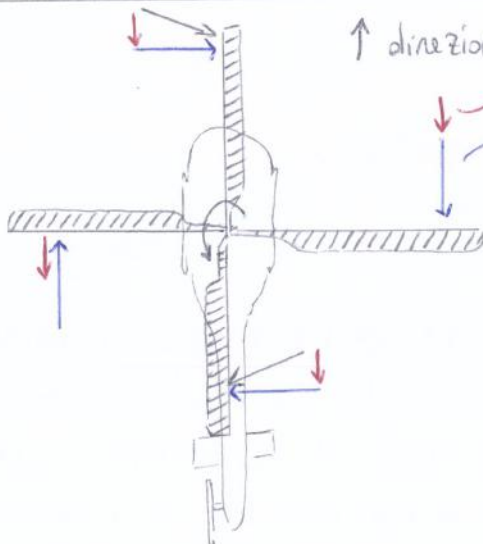


TIP



RADICE

Consideriamo ora cosa succede nel volo traslato:



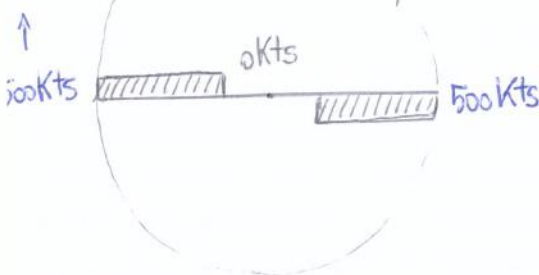
↑ direzione di volo  
 — vento relativo di traslazione  
 — vento relativo di rotazione

Osserviamo che il vento relativo di traslazione si somma vettorialmente a quello relativo di rotazione determinando il vento relativo risultante

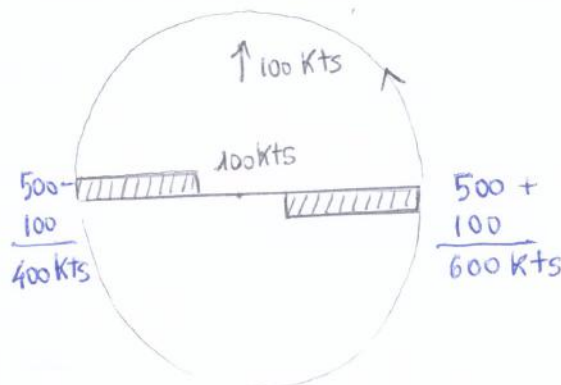
Andiamo a studiare più nel dettaglio e cosa serve il grado di libertà del floppaggio. Una prima spiegazione, come visto, è che questo permette all'asse virtuale di inclinarsi, inclinando di conseguenza anche la trazione.

Supponiamo di considerare questa situazione:

velocità el  
 ip delle  
 ale



HOVERING



Volo TRASLATO

$\Gamma$  se  $\pi = 7 m$   
 $w = \frac{V}{\pi} \approx 35 \text{ rad/s}$   
 $m = 334 \text{ rpm}$