



Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2133A-

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Uffreduzzi Francesco

MATERIA: Gasdinamica - Prof. Iuso

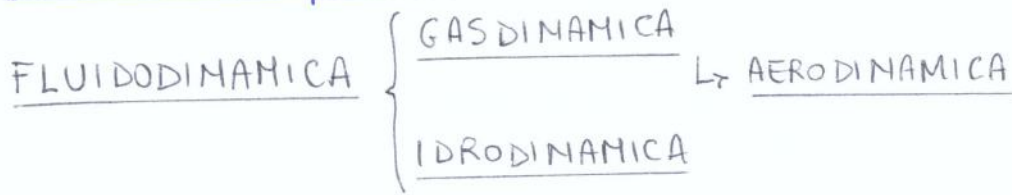
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

GASDINAMICA

Richiami e definizioni



Gas: stato della materia nel quale le particelle sono libere di muoversi e collidere
 Le particelle assumono forma e volume del recipiente che le contiene
 Possono comprimersi sotto l'effetto di variazioni di pressione

Modello descrittivo delle strutture di un gas

In tale modello ricorre il concetto di PARTICELLA FLUIDA.

È una porzione di gas contenente un certo n° di molecole, di dimensioni sufficientemente grande da permettere la definizione di proprietà medie statistiche ma sufficientemente piccole da poter essere considerate puntiformi. \rightarrow INFINITESIMA $dx dy dz$

Quante particelle sono contenute in una particella fluida?

Introduciamo prima altri concetti:

N. Avogadro N_A : 1 mole contiene $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$ molecole

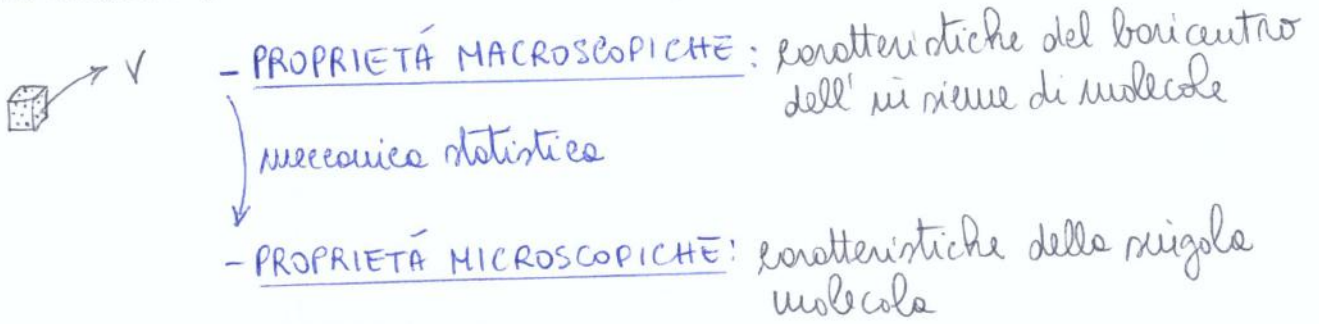
1 Mole (Kilomole) = 1000 moli $\Rightarrow N_A = 6,023 \cdot 10^{26}$ molecole

Volume molare: in condizioni normali, $\begin{cases} p = 760 \text{ mm Hg} \\ T = 0^{\circ} \text{C} \end{cases}$

$$\Rightarrow pV = nRT \rightarrow V = \frac{nRT}{p}; \text{ se } \begin{cases} n = 1 \text{ Mole} \\ R = 8314 \text{ J/Mol.K} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1 \cdot 8314 \cdot 273}{760 \cdot \underbrace{13,6 \text{ Kg/dm}^3}_{\gamma_{\text{Hg}}} \cdot 9,81} = 22,4 \text{ m}^3 \quad \text{se piccole mole} \rightarrow 22,414 \text{ l}$$

Consideriamo un insieme di molecole in moto:



Attraverso la meccanica statistica è possibile passare da una descrizione macroscopica a una caratteristica della singola molecola.

È da affermare che la velocità di una singola molecola è pari alla velocità dell'insieme di molecole.

Le singole molecole facenti parte di un insieme in moto, sono dotate di una velocità V pari a:

$$V = \bar{V} + V'$$

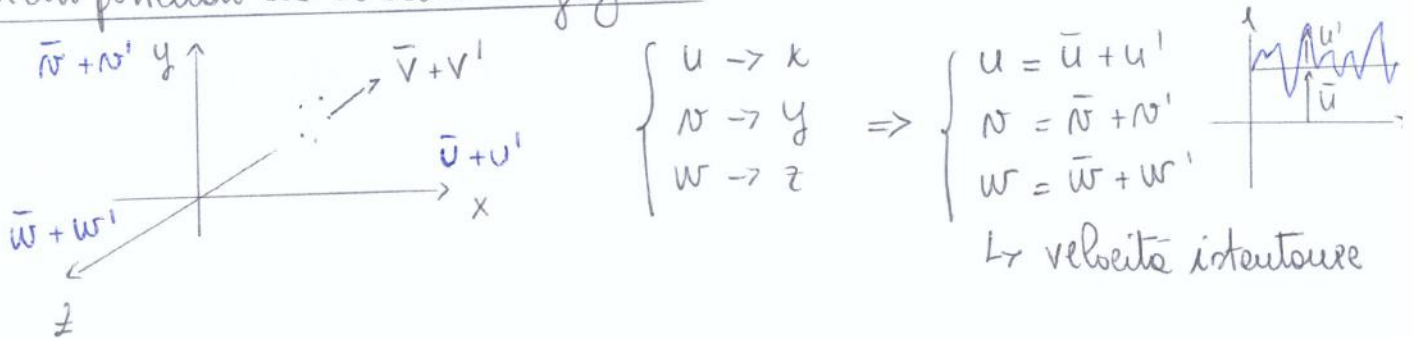
↳ velocità media macroscopica

↳ velocità di spitazione molecolare

sol esempio

- STRATO LIM. LAM: $\bar{V} + V'_{mol}$
- STRATO LIM. TURB: $\bar{V} + V'_{mol} + V'_{turb}$

Decomponendo le velocità lungo gli assi:



Definiamo ENERGIA CINETICA TRASLAZIONALE ASSOCIATA ALLA SINGOLA MOLECOLA E_t la quantità:

$$E_t = \frac{1}{2} m (\bar{u}u + \bar{v}v + \bar{w}w)$$

Svolgendo i prodotti:

$$\begin{aligned} \bar{u}u &= \overline{(\bar{u} + u')(\bar{u} + u')} = \overline{(\bar{u} + u')(\bar{u} + u')} = (\bar{u} + \bar{u}')(\bar{u} + \bar{u}') = \\ &= (\bar{u} \cdot \bar{u}) + \overbrace{(\bar{u} \cdot u')}^0 + \overbrace{(u' \cdot \bar{u})}^0 + (u' \cdot u') = \bar{u}\bar{u} + \overline{u'u'} \end{aligned}$$

↳ regola delle medie

$\bar{u}' = 0$ perché è una fluttua attorno al valor medio

Omnivium che:

$$v_{at} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m} \frac{N_A}{N_A}} = \sqrt{\frac{3 R T}{M}} \rightarrow \boxed{v_{at} = \sqrt{\frac{3 R T}{M}}}$$

$$k_B N_A = R$$

$m N_A = M$ (massa molare) [kg/mol], $N_A = 29 \text{ kg/mol}$

Le collisioni molecolari sono strettamente collegate alle pressioni, infatti

$$P/p_0 = \frac{R}{M} T \quad \text{ep. stato gas}$$

$$\frac{3 k_B T}{m} = 3 \frac{R T}{M}$$

$$\Rightarrow \overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'} = v_{at}^2 = 3 \frac{k_B T}{m} = 3 \frac{P}{\rho}$$

$$\rightarrow \boxed{P = \frac{1}{3} \rho (\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})}$$

la pressione è legata all'agitazione termica

es

ARIA $\rightarrow T = 298 \text{ K} \rightarrow v_{at} \approx 498 \text{ m/s}$

$v_{suono} = c_s = 340 \text{ m/s}$

velocità supersonica: il meccanismo con cui si propaga il suono si basa sulla propagazione di collisioni molecolari

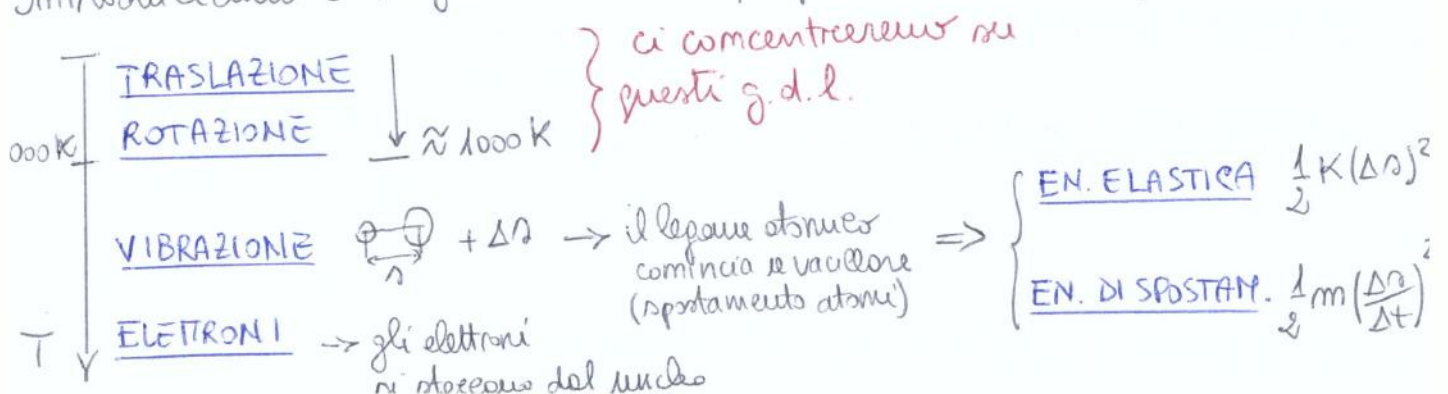
Introduciamo il concetto di GRADI DI LIBERTÀ ENERGETICI:

rappresentano i modi di immagazzinare energie per la molecola.

Abbiamo già visto che l'energia cinetica traslazionale di 1 molecola è pari a:

$$E_t = \frac{1}{2} m (\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})$$

Introduciamo altri gradi di libertà, dipendenti dalla temperatura:



A cosa serve L?

Considerando 1 g.d.l. traslazionale e ricordando che:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2} m (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})$$

Per una molecola e 1 g.d.l., del principio di equipartizione dell'energia:

$$\boxed{\varepsilon_t = \frac{1}{2} k_b T} \quad [\text{J/molecola}] \quad \text{energia cinetica casuale traslazionale associata a 1 g.d.l. di 1 molecola}$$

Se la molecola ha L gradi di libertà, allora:

$$\boxed{\varepsilon_L = \frac{L}{2} k_b T} \quad [\text{J/molecola}] \quad \text{energia associata a una molecola che presenta L gradi di libertà}$$

Definiamo ENERGIA INTERNA ASSOCIATA A L G.D.L. DELLA MOLE la quantità:

$$\boxed{E_L = \varepsilon_L N_A = \frac{L}{2} k_b T \cdot N_A} \quad [\text{J/Mol}] \quad \begin{matrix} \downarrow k_b \cdot N_A = R \\ = \frac{L}{2} RT \end{matrix}$$

Definiamo ENTALPIA MOLARE ASSOCIATA A L G.D.L. la quantità:

$$\boxed{H = E_L + RT = \frac{L}{2} k_b T \cdot N_A + RT = \frac{L}{2} RT + RT = \frac{L+2}{2} RT} \quad [\text{J/Mol}]$$

Volevo calcolare l'ENERGIA INTERNA SPECIFICA e l'ENTALPIA SPECIFICA, riferite all'unità di massa:

$$\boxed{e = \frac{E_L}{M} = \frac{L}{2} \frac{R}{M} T} \quad [\text{J/kg}]$$

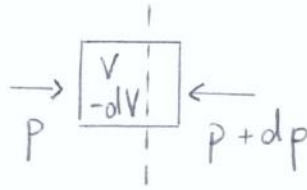
$$\boxed{h = \frac{H}{M} = \frac{L+2}{2} \frac{R}{M} T} \quad [\text{J/kg}]$$

*) CALORI SPECIFICI rappresentano la quantità di calore da fornire a 1 kg / 1 Mol di sostanza per incrementare la sua temperatura di 1°C.

Ad esempio: - VOLUME COSTANTE $\left\{ \begin{array}{l} \text{UNITÀ DI MASSA } C_V \\ \text{MOLE } C_V \end{array} \right.$

COMPRESSIBILITÀ

- Liquidi \rightarrow incompressibili
- Gas \rightarrow compressibili



dipende dalla struttura molecolare: in un gas le molecole sono molto più distanti rispetto ad un liquido

Tale proprietà si quantifica mediante il parametro β :

$$\beta = \frac{dV/V}{dp}$$

\Rightarrow variazione percentuale di volume per effetto di una variazione di pressione

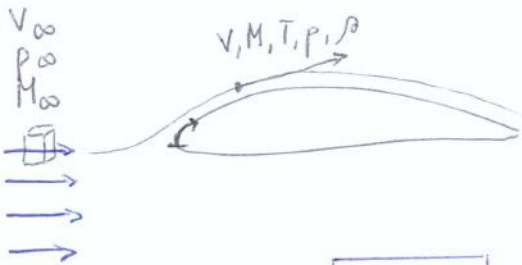
\rightarrow LIQUIDI: $\beta = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$

\rightarrow GAS: $\beta = 1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$

$$[\beta] = \frac{1}{\text{Pa}}$$

Nel caso aerospaziale la compressibilità è legata alla velocità di un gas.

Determiniamo il legame esistente tra M° di Mach e densità.



linea di corrente, tangente in ogni punto al vettore di velocità

NB: ogni deflessione di una linea di corrente comporta variazione di velocità e pressione (quindi anche di densità)

Riconduciamo che $M = \frac{V}{a}$ con $a = \sqrt{\gamma R T}$

Riconduciamo l'equazione di Eulero, ovvero l'equazione del moto lungo una qualsiasi linea di corrente:

$$dp = -\rho V dV$$

\int Se $\rho = \text{cost} \rightarrow$ FLUSSO INCOMPRESSIBILE $\rightarrow P_0 = P + \frac{1}{2} \rho V^2$ Bernoulli per flussi incompressibili
 \int Se $\rho \neq \text{cost} \rightarrow P_0 = P \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

PROPRIETÀ DI TRASPORTO

Consideriamo una particella fluida e, al suo interno, una singola molecola:



Le proprietà legate a tali grandezze sono dette proprietà di trasporto e sono:

- CONDUCEVITÀ TERMICA λ
- VISCOSITÀ DINAMICA μ
- MASSA D

Definiamo FLUSSO di una grandezza la quantità di quella grandezza che attraversa nell'unità di tempo la superficie unitaria.

Avremo dunque:

- $\frac{QDM}{t \cdot Sup.} \rightarrow \frac{FORZA}{Sup. (m^2)} \rightarrow \underline{SFORZO} \rightarrow$ misura $\tilde{\nu}_{viscosi}$
- $\frac{ENERGIA}{t \cdot Sup.} \rightarrow \frac{POTENZA}{Sup. (m^2)} \rightarrow$ misura flussi di calore
- $\frac{MASSA}{t \cdot Sup.} \rightarrow \frac{PORTATA}{Sup. (m^2)} \rightarrow$ misura flussi di massa

SFORZI VISCOSI

Gli sforzi viscosi sono forze che si originano tra un filetto fluido e l'altro (sforzi tangenziali) per effetto di un gradiente di velocità.

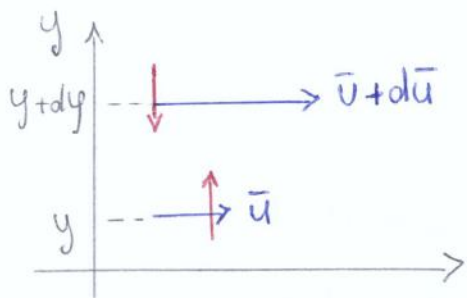
Generalizzazione: lo sforzo viscoso è un tensore di 3 componenti, ognuna delle quali presenta il meccanismo del trasporto delle q.d.m. elastiche da parte delle 3 fluttuazioni costiche.

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{xx} &= \rho \overline{u'u'} & \tilde{\tau}_{yx} &= \rho \overline{v'u'} & \tilde{\tau}_{zx} &= \rho \overline{w'u'} \\ \tilde{\tau}_{xy} &= \rho \overline{u'v'} & \tilde{\tau}_{yy} &= \rho \overline{v'v'} & \tilde{\tau}_{zy} &= \rho \overline{w'v'} \\ \tilde{\tau}_{xz} &= \rho \overline{u'w'} & \tilde{\tau}_{yz} &= \rho \overline{v'w'} & \tilde{\tau}_{zz} &= \rho \overline{w'w'} \end{aligned}$$

Le componenti $\tilde{\tau}_{xx}, \tilde{\tau}_{yy}, \tilde{\tau}_{zz}$ sono quelle delle pressioni

La pressione è legata alle autocorrelazioni e spicca normalmente alle forze

Leghiamo ora queste motine molecolari ad un campo di moto in cui è presente un moto macrosopico, per capire il legame esistente tra sforzo e gradiente di velocità macrosopico.



Per calcolare lo sforzo scambiato dai due filletti fluidi, applichiamo il teorema della q.d.m.:

[La q.d.m. scambiata nell'unità di tempo riferita all'unità di superficie, è pari alle forze scambiato dai due filletti fluidi.]

Poiché parliamo di velocità macrosopiche, la velocità rappresentativa del trasporto che caratterizza tutte le fluttuazioni è la velocità di agitazione v_{at} .

$$\Rightarrow -m(\bar{u} + d\bar{u})m v_{at} + m\bar{u}m v_{at} = -m \underbrace{d\bar{u}}_{\substack{\text{flusso netto} \\ [qdm/t-sup] \\ ?}} m v_{at} = \rho \overline{u'v'}$$

DIPENDENZA DI μ

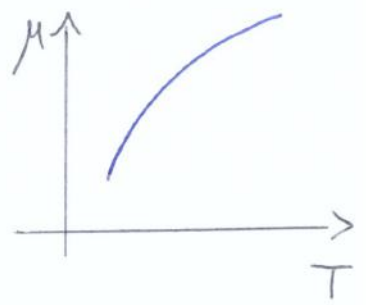
$\mu \approx \rho l v_{at}$, con $v_{at} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}}$

$\rho = \rho(p, T)$, dalla legge di stato dei gas perfetti.

Si può dimostrare che la viscosità di un gas è solo funzione della temperatura del gas, in fatti:

$\tau_{xy} = \rho \bar{u}' v' = m n l v_{at} \frac{d\bar{u}}{dy}$ ma $l = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$

$\Rightarrow \tau \propto m n \frac{1}{d^2 n} \sqrt{\frac{T}{m}} \frac{dT}{dy} = \sqrt{\frac{m T}{d^4}} \frac{dT}{dy} \Rightarrow \mu \propto \sqrt{T}$



I fluidi che soddisfano la legge di Newton si dicono FLUIDI NEWTONIANI.

Ma i fluidi non Newtoniani $\rightarrow \mu = \mu\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)$ la viscosità dipende dal campo di moto

Chi tiene conto degli effetti della viscosità in un campo di moto è il NUMERO DI REYNOLDS Re :

$Re = \frac{V L \rho}{\mu}$

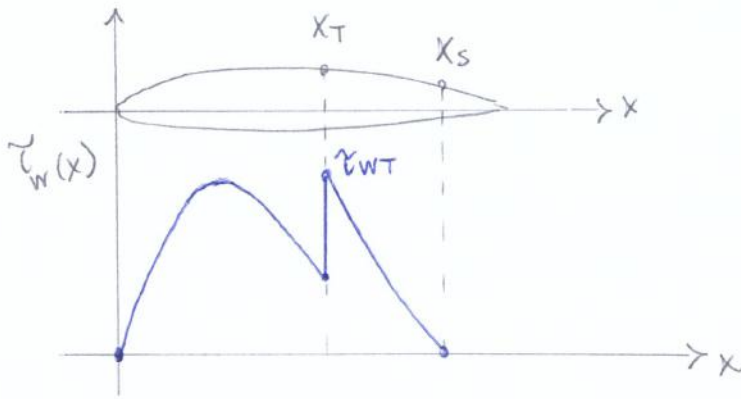
\rightarrow è un rapporto tra forze d'inerzia e forze viscosi

$\rightarrow Re = \frac{V L \rho}{\mu} \frac{V}{V} = \frac{\overbrace{\rho V^2}^{T. \text{inerzia}}}{\underbrace{\mu \frac{V}{L}}_{\text{forze viscosi}}}$

- BASSI Re \rightarrow forze viscosi dominanti
- ALTI Re \rightarrow forze viscosi piccole o forze d'inerzia grandi

OSSERVAZIONE:

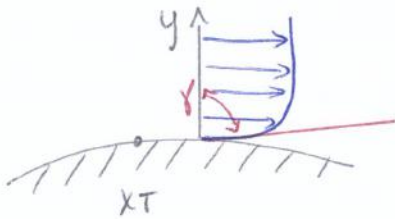
un fluido in moto è tale che $\mu \neq 0$, ma gli effetti della viscosità si fanno sentire solamente in presenza di gradienti di velocità



$\left\{ \begin{array}{l} x_T: \text{ossima transizione} \\ x_S: \text{ossima separazione} \end{array} \right.$

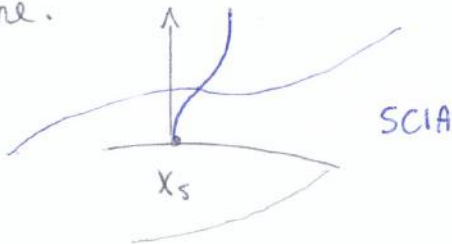
Solitamente lo strato limite parte con una condizione di flusso LAMINARE e, se il Re è sufficientemente elevato, transisce poi a una condizione TURBOLENTA. Il rimescolamento dei filletti fluidi trascina all'interno dello strato limite il flusso esterno (ENTRAINMENT)

\Rightarrow lo strato limite si gonfia enormemente vicino a parete



\Rightarrow aumenta la pendenza γ , per cui aumentano gli sforzi viscosi a parete

Dopo la transizione, gli sforzi viscosi tendono a diminuire in quanto lo strato limite tende ad indebolirsi, fino a giungere al punto di separazione.



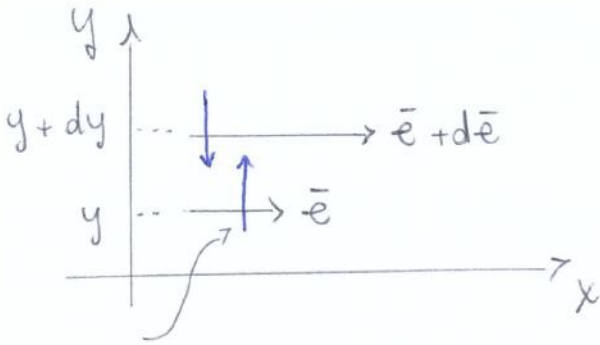
In corrispondenza di x_S il profilo di velocità si presenta a tangente orizzontale $\Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \tau_w = 0$

Il Re regola sia la TRANSIZIONE che la SEPARAZIONE

CONDUCEBILITÀ TERMICA λ

Andiamo ora a vedere come per effetto delle fluttuazioni caotiche nelle tre direzioni, l'energia interna di una particella venga trasportata lungo x, y, z .

Riconduciamo che $e = e_t + e_r + e... [J/kg]$, con e_t legata a $\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}$



$$-m(\bar{e} + d\bar{e})m v_{at} + m\bar{e}m v_{at} =$$

$$= -m d\bar{e}m v_{at} = q_y \rightarrow \text{flusso netto trasportato lungo } y \text{ per effetto delle fluttuazioni molecolari.}$$

(flusso di energia in termini macroscopici)

i flussi si originano per effetto delle fluttuazioni estocastiche

Come esprimiamo $d\bar{e}$?

$$d\bar{e} = \frac{d\bar{e}}{dy} dy \quad \Rightarrow \quad d\bar{e} = \frac{d\bar{e}}{dy} l$$

↳ scala fluttuazioni l

Allora:

$$q_y = -m \frac{d\bar{e}}{dy} l m v_{at} \quad \text{ricordando che } \bar{e} = c_v T$$

$$\Rightarrow q_y = -m \left(c_v \frac{\partial T}{\partial y} \right) l m v_{at} \quad \text{ma } m \cdot m = \rho$$

$$\Rightarrow q_y = -\rho v_{at} c_v l \frac{\partial T}{\partial y} = \overline{\rho v l} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$$

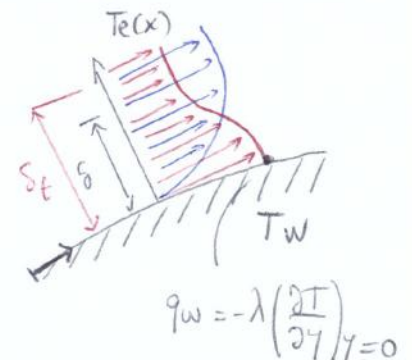
Confrontando le relazioni:

$$\lambda = \underbrace{\rho v_{at} l}_{\mu} c_v \Rightarrow \boxed{\lambda = \mu c_v}$$

λ e μ sono legati poiché basati sullo stesso meccanismo, ovvero quello delle collisioni molecolari.

Allora:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \rightarrow \tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{STRATO LIMITE CINEMATICO} \\ \lambda \rightarrow q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{STRATO LIMITE TERMICO} \end{array} \right.$$



TRASPORTO DI MASSA E DIFFUSIVITÀ

- Diffusività di massa D

- Dalla legge di Fick :

D : proprietà di trasporto di massa

$$\left\{ \begin{array}{l} J_x = -D \frac{\partial S}{\partial x} \\ J_y = -D \frac{\partial S}{\partial y} \\ J_z = -D \frac{\partial S}{\partial z} \end{array} \right\} \rightarrow \text{gradiente di concentrazione della specie nella direzione considerata}$$

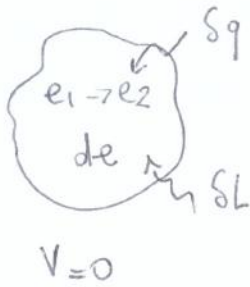
Il fenomeno è analogo a quelli già analizzati: per effetto delle collisioni molecolari si ha il trasporto di una specie da una zona in cui essa è fortemente concentrata a una zona in cui essa è meno concentrata.

Per concludere, osserviamo la somiglianza delle relazioni che legano i flussi ai gradienti di velocità, temperatura, concentrazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_{xy} = -\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \\ J_y = -D \frac{\partial S}{\partial y} \end{array} \right.$$

$\mu, \lambda, D \rightarrow$ PROPRIETÀ DI TRASPORTO

1° PRINCIPIO TERMODINAMICA



Immaginiamo un sistema termodinamico che incrementa la propria energia interna di una quantità de a seguito di una fornitura di calore δq o lavoro δL dall'esterno.

Osserviamo che de è un differenziale esatto in quanto l'energia interna è una funzione di stato, ovvero dipende esclusivamente dallo stato iniziale e finale.

$\delta q, \delta L$ non sono differenziali esatti, in quanto dipendono dal percorso, ovvero dal tipo di trasformazione che collega lo stato iniziale e finale.

Il primo principio afferma che:

$$de = \delta q + \delta L$$

La fornitura di calore o lavoro dall'esterno, può avvenire mediante processi:

REVERSIBILI → sono presenti gradienti di ogni tipo



tomando da ② e ① si otterrebbero gli stessi valori di pressione, volume, temp. ...

IRREVERSIBILI → sono presenti gradienti ⇒ non è possibile tornare



alle condizioni ①, cioè non si torna più allo stesso punto

ADIABATICI + REVERSIBILI → ISOENTROPICI
 $\delta q = 0$ $S = \text{cost}$

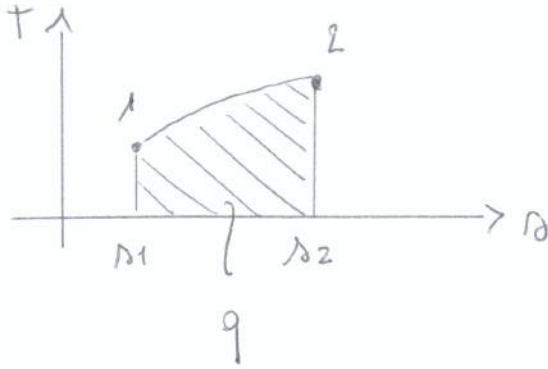
→ il suono, ad esempio, è un fenomeno isentropico

Come calcoliamo il lavoro per un processo REVERSIBILE ?

Il lavoro è dovuto alle forze. In una particella fluida si hanno:

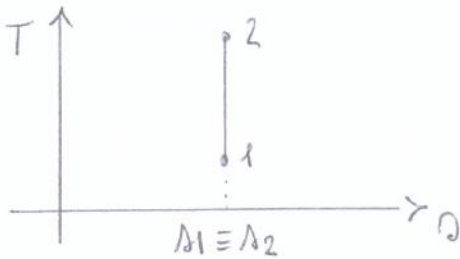
- FORZE di PRESSIONE

- FORZE VISCOSE → sono collegate ai gradienti, che nel caso di processi

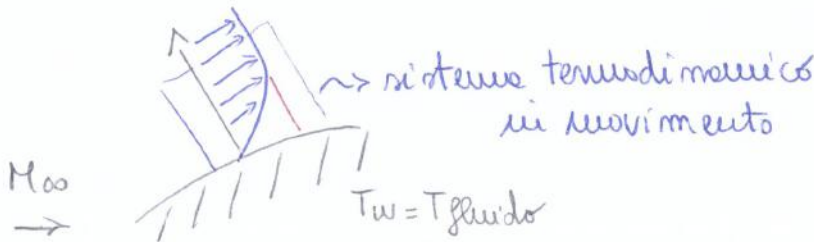


Per un processo ADIABATICO e REVERSIBILE $\rightarrow \delta q = 0$

$\Rightarrow ds = 0$



es. 1 Corrente che lambisce una parete

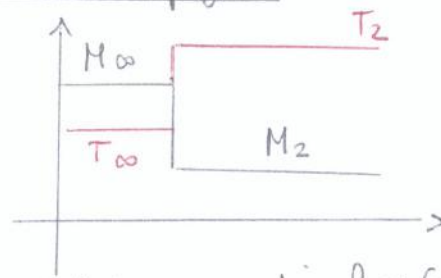
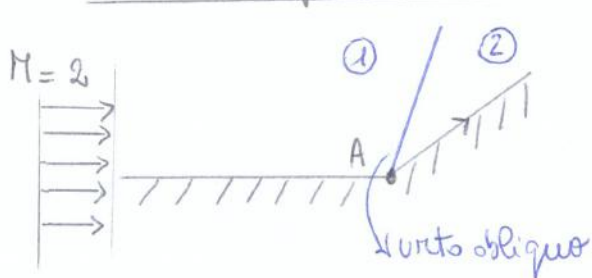


SISTEMA
ADIABATICO e
IRREVERSIBILE

Lo strato limite introduce gli effetti dell'irreversibilità

\rightarrow GRADIENTE DI VELOCITÀ \rightarrow per effetto della viscosità nascono τ che dissipano energia sotto forma di calore \rightarrow lavoro forze viscosi

es. 2 Corrente supersonica che lambisce uno spigolo

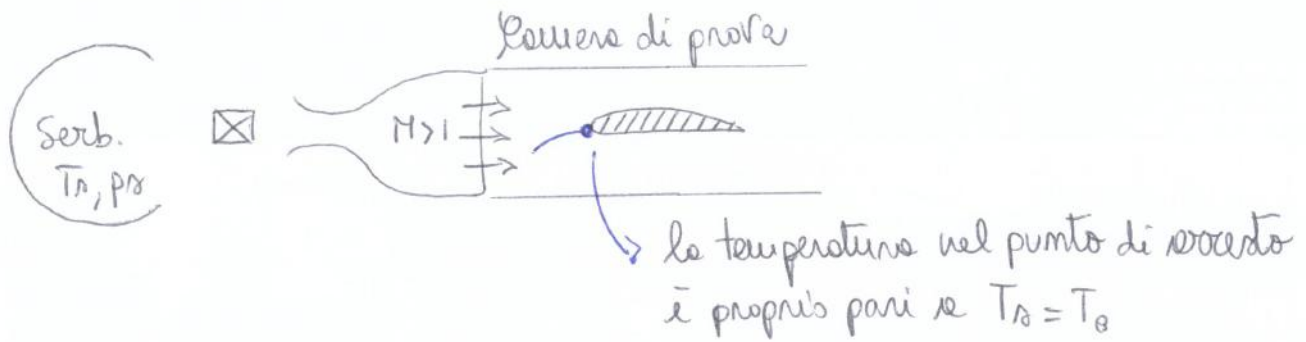


\rightarrow avvengono su scale $l \ll \delta$

URTO OBLIQUO \rightarrow genera gradienti di velocità, pressione, temperatura

\Rightarrow PROCESSO ADIABATICO e IRREVERSIBILE

Supponiamo che l'ugello sia prima della camera di prova di un ugello ipersonico:



CALCOLO DI VARIAZIONI DI ENTROPIA

Mettendo insieme 1° e 2° principio:

$$T ds = de + p dv$$

Riconoscendo che $de = c_v dT$:

$$\Rightarrow ds = c_v \frac{dT}{T} + p \frac{dv}{T}$$

Nell'eq. di stato dei gas perfetti:

$$p v = \frac{R}{M} T \Rightarrow \frac{p}{T} = \frac{1}{v} \frac{R}{M}$$

$$\Rightarrow ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{M} \frac{dv}{v}$$

Integrando:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{M} \ln \frac{v_2}{v_1} = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Oppure:

$$T ds = de + p dv + v dp - v dp \Rightarrow T ds = d(e + p v) - v dp \rightarrow T ds = dh - v dp$$

$c_p dT$
↓
 dh

$$\Rightarrow \Delta s = s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

LEGGI DI BILANCIO

Consideriamo in primo luogo il FLUSSO INVISCIDO.

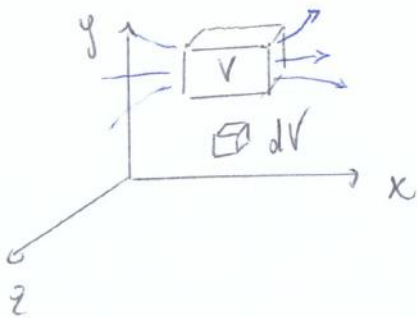
Le leggi di bilancio possono essere scritte in vari modi:

1) FORMA INTEGRALE → si considera un volume finito contenente un elevatissimo numero di particelle. In tal caso si perde il concetto di localizzazione, ovvero non è possibile conoscere il valore puntuale delle grandezze in gioco.

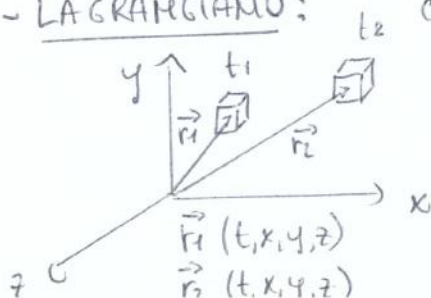
2) FORMA DIFFERENZIALE → si considera un volume infinitesimo $dx dy dz$. In tal caso è possibile determinare il valore delle grandezze (ρ, u, v, w, τ) in ogni istante e per ogni punto dello spazio. Per tornare alle quantità integrali basta integrare le formulazioni differenziali.

A loro volta, tali formulazioni possono essere sviluppate secondo due differenti punti di vista, che ovviamente sono collegati:

- EULERIANO: si considera un volume di controllo FISSO nello spazio e PERMEABILE, osservando come scende al suo interno. La forma del volume è ovviamente orbitaria.



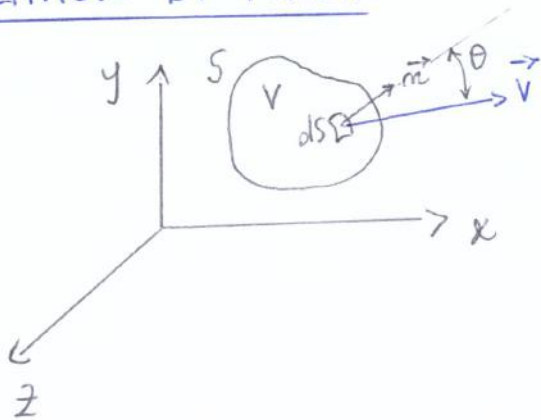
- LAGRANGIANO:



considera un volume di controllo in movimento, seguendo e osservando dunque le variazioni nel tempo e nello spazio.

FORMULAZIONI INTEGRALI - PUNTO DI VISTA EULERIANO

BILANCIO DI MASSA



V : volume di controllo arbitrario, può essere mobile, fisso, permeabile.
 S : superficie del volume di controllo

$G = \text{massa} \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = f$

Si ha che:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dVol = \sum \text{flussi}$$

se flusso netto entrante $\vec{v} \cdot \vec{m} < 0$
 ma $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dVol$ deve essere $>$

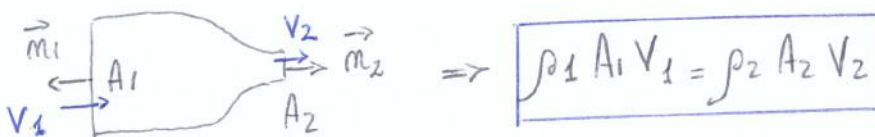
flusso = $\rho (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS \rightarrow \sum \text{flussi} = \text{flusso netto} = - \int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS$

Allora:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dVol = - \int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dVol + \int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS = 0}$$

Nel caso di fenomeno STAZIONARIO: $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dVol = 0$

$$\Rightarrow \int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS = 0$$



$$\Rightarrow \boxed{\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2}$$

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{m}_1 = -V_1 \\ \vec{v} \cdot \vec{m}_2 = V_2 \end{cases}$$

BILANCO DELL'ENERGIA

$$G = m \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \Rightarrow f = \frac{G}{V} = \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right)$$

Ricordiamo che per un sistema in equilibrio termodinamico con $V=0$, il 1° principio afferma che:

$$de = \delta q + \delta L$$

Se il sistema è dotato di moto macroscopico, accanto all'energia interna occorre considerare anche l'energia cinetica macroscopica.

Allora:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dVol = \sum \text{flussi} + \sum \text{apporti energetici} + \mathcal{L} \text{ forze esterne}$$

- flusso: $\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{m}) \rightarrow \sum \text{flussi} = - \int_S \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS$

Gli apporti energetici derivano da:

$$\textcircled{1} \dot{q} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{s}} \right] \Rightarrow \begin{cases} \text{emissione radiativa} \\ \text{assorbimento radiativo} \\ \text{processi chimici} \\ \text{resistenza elettrica} \end{cases} \Rightarrow \int_V \rho \dot{q} dVol$$

$$\textcircled{2} \text{ effetti viscosi : } \dot{Q}_{\text{viscoso}} \Rightarrow \sum \text{apporti energetici} = \int_V \rho \dot{q} dVol + \dot{Q}_{\text{visc}}$$

- lavoro forze esterne (Potenza = F · velocità)

$$\begin{cases} \text{- DI PRESSIONE : } F_P = - \int_S p \cdot \vec{m} dS \Rightarrow F_P \cdot \vec{v} = - \int_S p (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS \\ \text{- VISCOSE : } \dot{W}_{\text{visc}} \\ \text{- DI MASSA : } \vec{f} \text{ (forza per unità di massa)} \\ \Rightarrow \int_V \rho (\vec{f} \cdot \vec{v}) dVol \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dVol = - \int_S \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS + \int_V \rho \dot{q} dVol - \int_S p (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS + \int_V \rho (\vec{f} \cdot \vec{v}) dVol + \dot{Q}_{\text{visc}} + \dot{W}_{\text{visc}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0$$

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0} \quad \text{formulazione differenziale}$$

PASSAGGIO ALLA FORMULAZIONE LAGRANGIANA (non conservativa)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} u + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} v + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} w + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = - \left(\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \vec{v}} \quad \text{formulazione lagrangiana}$$

Mel caso di flusso incomprimibile: $\rho = \text{cost} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$

BILANCIO QDM

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dVol = - \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS - \int_S (\rho \cdot \vec{m}) dS + \int_V \rho \vec{f} dVol$$

$$\int_S (\rho \cdot \vec{m}) dS = \int_V \nabla \rho dV \quad \text{dove } \nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \hat{k}$$

Prima di applicare il teorema di Gauss ai flussi, proiettiamo l'equazione vettoriale delle qdm nelle tre direzioni.

- $\vec{v} \cdot \vec{m}$ NON VA PROIETTATO → identifica il flusso che esce \perp a dS
- \vec{v} VA PROIETTATO

Passando alle forme Leponuziane (non conservativa):

$$\begin{aligned} x) \quad & \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x \\ y) \quad & \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y \\ z) \quad & \rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z \end{aligned}$$

OSS! i prodotti legati all'accelerazione convettiva $u \frac{\partial u}{\partial x}, v \frac{\partial u}{\partial y}, w \frac{\partial u}{\partial z} \dots$ generano termini NON LINEARI che producono problemi nella det. della soluzione

Come si ricavano?

Consideriamo la direzione x:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u w) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x$$


$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x}(\rho u) + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \underbrace{u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right]}_{\text{continuità in forma diff}} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x$$

$$\Rightarrow \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x$$

Volendo dare una scrittura compatta alle equazioni, ricorriamo alle derivate totali:

$$\begin{aligned} x) \quad & \rho \frac{D u}{D t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x \\ y) \quad & \rho \frac{D v}{D t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y \\ z) \quad & \rho \frac{D w}{D t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z \end{aligned}$$

forme Leponuziane 
 ↳ significa scrivere le equazioni rispettando il 2° principio della dinamica

In forma vettoriale:

$$\rho \frac{D \vec{v}}{D t} = -\nabla p + \rho \vec{f}$$

valida per flussi irrotazionali, incompressibili ($\rho = \text{cost}$) e compressibili ($\rho = \rho(t, x, y, z)$)

Consideriamo un fluido in QUIETE:

$$\Rightarrow \vec{V} = 0, \quad u = v = w = 0$$

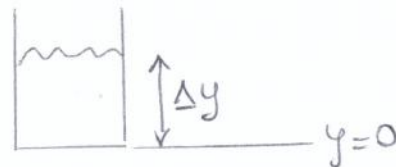
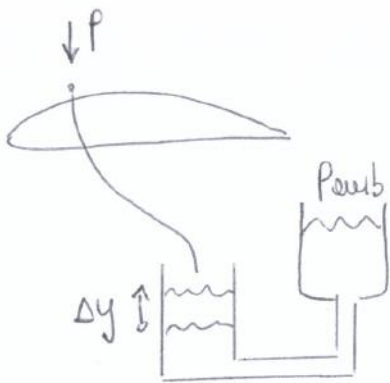
Prendiamo l'eq. di bilancio della DM in direzione y :

$$\uparrow y) \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \underbrace{\rho g}_f \rightarrow \text{equazione che serve per i MANOMETRI}$$

↓
LEGGE DI STEVINO

Integrando: $\Delta p = \rho g \Delta y = f \Delta y$
 con $f \equiv$ peso specifico del fluido

Mel nostro caso:



$$\Rightarrow \Delta p = \gamma \Delta y$$

$$\Rightarrow P_{prof} - P_{amb} = \gamma \cdot \underbrace{\Delta y}_{\text{lettura}}$$

EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV = - \int_S \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS - \int_S p (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS + \int_V \rho (\vec{f} \cdot \vec{v}) dV + \int_V \rho \dot{q} dV$$

$$\int_S p (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS = \int_V \nabla \cdot (p \vec{v}) dV$$

$$\int_S \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{m}) dS = \int_V \left[\nabla \cdot \left(\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right) \right] dV$$

Allora:

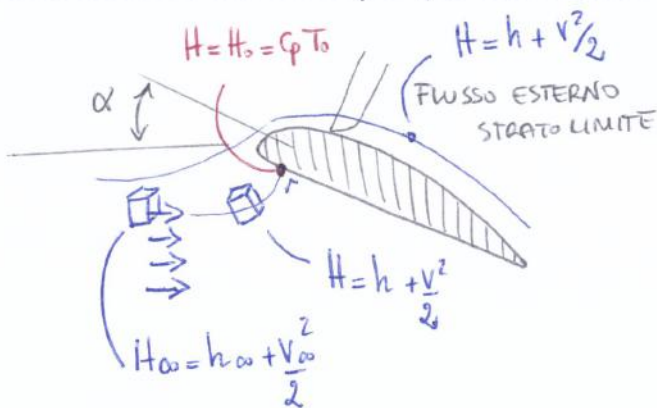
$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right] = - \nabla \cdot (p \vec{v}) + \rho \dot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v})$$

equazione in forma differenziale euleriana

\Rightarrow se lungo le linee di corrente varia la velocità per effetto di un gradiente di pressione $\Rightarrow h = c_p T$ varia in modo da mantenere H costante

Analogamente, nel caso di gradienti di temperatura $\Rightarrow V$ varia in modo da adattarsi alla variazione di $h = c_p T$.

Consideriamo un profilo ad incidenza α :



$$\Rightarrow H_0 = c_p T_0 = c_p T + \frac{1}{2} V^2$$

$$\rightarrow T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$

con $T_0 \equiv$ temperatura totale

Concludiamo:

Se $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, $\vec{f} = 0$, $\vec{q} = 0$, flusso inviscido

$$\Rightarrow \rho \frac{DH}{Dt} = 0 \Rightarrow H = \text{costante} \rightarrow \text{FLUSSO ISENTROPICO}$$

Vediamo ora come scrivere la soluzione dell'equazione $H = \text{cost}$ in altri modi.

Lungo la linea di corrente che termina nel punto di arresto, le correnti rallentano $\Rightarrow V \downarrow \Rightarrow h = c_p T \uparrow \Rightarrow T \uparrow$
 Il punto di ARRESTO più prossimo del bordo d'attacco è detto PUNTO DI ARRESTO ISENTROPICO, in questo la corrente non è rallentata per effetto delle forze viscose.

\Rightarrow Nel punto di arresto isentropico $p \equiv p_0$, mentre in ogni altro punto e lontano dal profilo $p \neq p_0$, in questo si incontrano gli effetti dissipativi.

Un altro modo di scrivere tale relazione si ottiene facendo riferimento alla velocità critica:

Se localmente $V = a \rightarrow M = 1 \Rightarrow \left. \begin{matrix} V = a^* \\ a = a^* \end{matrix} \right\}$ condizioni critiche
 con $a^* = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T^*}$

Allora:

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a^{*2}}{\gamma-1} + \frac{a^{*2}}{2} = \frac{a^{*2}}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

Per cui, riannunciando:

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1} = \frac{V_e^2}{2} = \frac{a^{*2}}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

RAPPORTI CARATTERISTICI DEI GAS

$$\frac{V_e}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$$

$$\frac{V_e}{a^*} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$$

Per l'aria $\gamma = 1.4$, allora:

$$\frac{V_e}{a^*} = \sqrt{6} = 2.449 \Rightarrow \text{max velocità corrente d'aria pari a 2.5 volte } a^*$$

$$\frac{a^*}{a_0} = 0.913$$

$$\frac{V_e}{a_0} = 2.236 \Rightarrow \text{in cond. di serbatoio } a_0 = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T_0} \Rightarrow V_e = 2.236 a_0$$

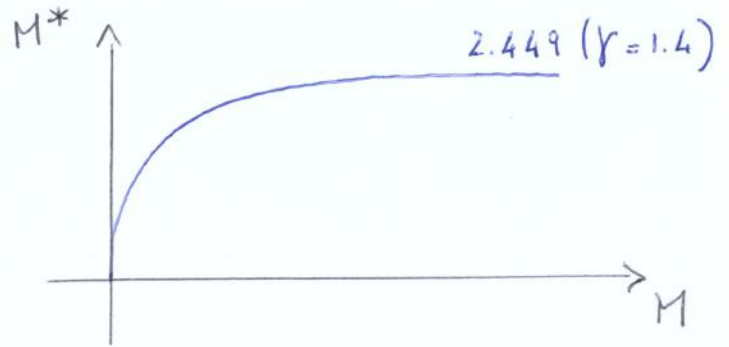
LEGAME TRA M e M*

Sappiamo che $M = \frac{V}{a} \rightarrow$ n° di Mach locale effettivo

Definiamo $M^* = \frac{V}{a^*}$ come il rapporto tra la velocità effettiva nel punto e la velocità critica che ci sarebbe realizzando le cond. critiche in quel punto

Osserviamo che:

- Se $M=1 \rightarrow M^*=1$
- Se $M > 1 \rightarrow M^* > 1$
- Se $M < 1 \rightarrow M^* < 1$
- Se $M \rightarrow \infty \Rightarrow M^* \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$



RAPPORTI TRA GRANDEZZE IN CONDIZIONI DI ARRESTO E IN CONDIZIONI CRITICHE PER ISENTROPICHE

Ricordiamo che:

$$\frac{a^*{}^2}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \frac{a_0^2}{\gamma-1} \rightarrow \boxed{\frac{a^*{}^2}{a_0^2} = \frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1}}$$

osserviamo che

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)$$

se $M=1 \rightarrow T = T^* \rightarrow \frac{T^*}{T} = \frac{2}{\gamma+1}$

Poiché $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/\gamma-1}$, se $\begin{cases} 2 \rightarrow \text{CONDIZIONI CRITICHE} \\ 1 \rightarrow \text{CONDIZIONI ARRESTO} \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\gamma/\gamma-1} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/\gamma-1}}$$

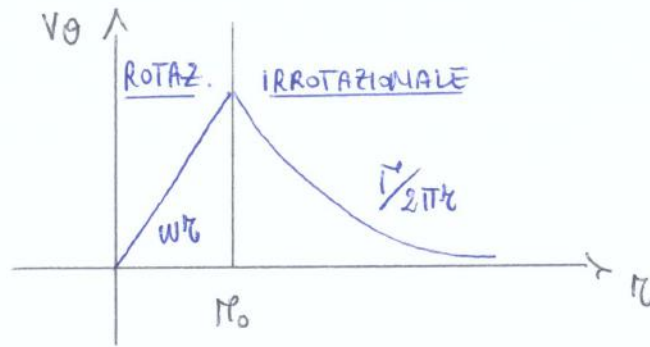
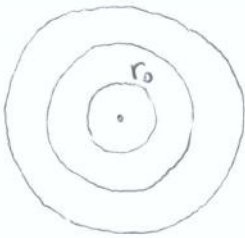
$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{1/\gamma-1} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/\gamma-1}}$$

Per l'aria $\gamma = 1.4$

$$\Rightarrow \frac{T^*}{T_0} = 0.833, \quad \frac{p^*}{p_0} = 0.528, \quad \frac{f^*}{f_0} = 0.634$$

In un vortice, una parte del corpo di moto è ROTAZIONALE, una parte IRROTAZIONALE



$$\begin{cases} v_\theta = \omega \cdot r & 0 \leq r \leq r_0 \\ v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} & r > r_0 \end{cases}$$

Dopo alcuni esempi di flussi rotazionali e irrotazionali, determiniamo l'equazione di Crocco.

IPOTESI

- FLUSSO INVISCIDO ($\mu=0$)
- PROCESSI REVERSIBILI
- $\vec{f} = 0$

Scriviamo l'espressione del 1° e 2° principio della termodinamica scritti congiuntamente:

$$T ds = dh - v dp = dh - \frac{dp}{\rho}$$

Se si vogliono descrivere le variazioni lungo le tre direzioni, occorre usare dei differenziali ai gradienti:

$$\Rightarrow T \nabla s = \nabla h - \frac{\nabla p}{\rho}$$

Si conclude l'equazione di conservazione della q.d.m. in forma vettoriale e lagrangiana:

$$\Rightarrow \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

Virtà nell'altro modo:

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla H - T \nabla s$$

La nascita del rotore in un campo è dovuta a gradienti di H e di s

EQUAZIONE DEL POTENZIALE DELLA VELOCITÀ

Sintetizza in sé l'equazione di continuità, delle quantità di moto e dell'energia.

Ricerchiamo in primo luogo l'equazione di Eulero:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \vec{f} \quad \text{cons. q.d.m in f. vettoriale e lagrangiana}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right] = -\nabla p + \vec{f}$$

ASSUNZIONI

$$\begin{cases} \bullet \vec{f} = 0 \\ \bullet \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \\ \bullet F_v = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\rho (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = -\nabla p}$$

Riconduciamo che vale l'identità:

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \quad \text{assumendo IRROTAZIONALITÀ } \nabla \times \vec{v} = 0$$

sostituendo:

$$\rho \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\nabla p \quad \text{l'equazione coinvolge le tre direzioni}$$



Isolando volentieri le variazioni infinitesime, passiamo dal gradiente al differenziale:

$$\Rightarrow \rho d \left(\frac{v^2}{2} \right) = -dp \Rightarrow \boxed{dp = -\rho v dv} \quad \text{equazione di Eulero}$$

$$\Rightarrow \text{Se } \nabla \times \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A} = \nabla \varphi$$

$$\Rightarrow \nabla \times \nabla \varphi = 0 \quad (\text{conseguenza})$$

è consideriamo un campo di velocità $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$

$$\nabla \times \vec{V} = 0 \quad (\text{campo irrotazionale}) \Rightarrow \boxed{\vec{V} = \nabla \phi} \quad \text{con } \phi = \text{velocità potenziale}$$

Consideriamo:

$$\vec{V} = u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k}$$

$$\vec{V} = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k}$$

$$\Rightarrow u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x ; v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_y ; w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \phi_z$$

↳ valida per flussi

IRROTAZIONALI e INVISCHI

⇒ FLUSSI POTENZIALI

1) EQ. CONTINUITÀ, per flussi stazionari e compressibili

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] dV = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho \phi_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \phi_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \phi_z) = 0$$

$$\boxed{\rho (\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}) + \phi_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \phi_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0}$$

Come esprimiamo $\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z}$?

④ RELAZIONE ENTALPIA TOTALE

$$H = h + \frac{v^2}{2} = c_p T + \frac{v^2}{2} = H_0 = c_p T_0 \quad \text{lungo una linea di corr. di un campo}$$

IRROTAZIONALE e
INVISCIDO

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M} T + \frac{v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M} T_0 \quad \rightarrow \quad \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{v^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$$

$$\rightarrow \boxed{a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)} \quad \Rightarrow \quad a^2 = a^2(\phi)$$

Per cui:

$$\boxed{\left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2}\right) \phi_{xx} + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{a^2}\right) \phi_{yy} + \left(1 - \frac{\phi_z^2}{a^2}\right) \phi_{zz} - \frac{2\phi_x \phi_y}{a^2} \phi_{yx} - \frac{2\phi_x \phi_z}{a^2} \phi_{zx} - \frac{2\phi_y \phi_z}{a^2} \phi_{zy} = 0}$$

con

$$\boxed{a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)}$$

equazione del potenziale delle velocità

Incognite $\rightarrow \phi = \phi(x, y, z)$ per flussi $\left\{ \begin{array}{l} \text{INVISCIDO} \\ \text{IRROTAZIONALE} \end{array} \right.$

L'equazione del potenziale delle velocità vale in campo SUBSONICO, INCOMPRESSIBILE, COMPRESSIBILE, TRANSONICO, SUPERSONICO, PERSONICO.

È fortemente non lineare in quanto l'incognita è moltiplicata per la propria derivata.

Riuscendo a trovare la soluzione $\phi = \phi(x, y, z)$ è facile determinare il campo di velocità e pressione attorno a un corpo.

è FLUSSO INCOMPRESSIBILE $\Rightarrow M \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{v}{a} \rightarrow 0 \Rightarrow a \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0} \quad \text{eq. di Laplace}$$

Conservazione delle masse

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho V = 0 = - \int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{m}) ds \quad \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

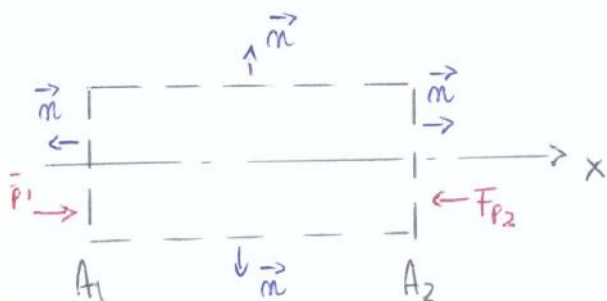
$$\int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{m}) ds = \int_{A_1} \rho (\vec{v} \cdot \vec{m}) ds + \int_{A_2} \rho (\vec{v} \cdot \vec{m}) ds + \int_{A_L} \rho (\vec{v} \cdot \vec{m}) ds = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{m} = -u_1 \\ A_2 \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{m} = +u_2 \end{array} \right\} \Rightarrow -\rho_1 u_1 A_1 + \rho_2 u_2 A_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2} \Rightarrow \boxed{\rho u A = \text{cost}}$$

Se $A = \text{cost} \Rightarrow \rho u = \text{cost}$

Conservazione delle q.d.m



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV = 0 = - \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{m}) ds - \int_S p \cdot \vec{m} ds$$

$$\Rightarrow \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{m}) ds = - \int_S p \cdot \vec{m} ds$$

$$\left. \begin{array}{l} - \int_S p \cdot \vec{m} ds = - [-p_1 A_1 + p_2 A_2] = p_1 A_1 - p_2 A_2 \\ \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{m}) ds = -\rho_1 u_1 u_1 A_1 + \rho_2 u_2 u_2 A_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$-\rho_1 u_1^2 A_1 + \rho_2 u_2^2 A_2 = p_1 A_1 - p_2 A_2$$

Se $A_1 = A_2$:

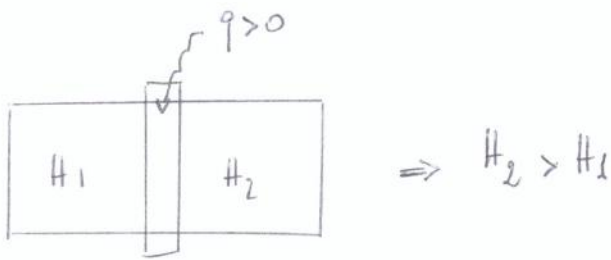
$$\boxed{p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2} \Rightarrow \boxed{p + \rho u^2 = \text{cost}}$$

$$q + h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Riconducendo alla $H = h + \frac{u^2}{2}$:

$$q + H_1 = H_2 \Rightarrow q + c_p T_{01} = c_p T_{02} \Rightarrow T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p}$$

Osservazioni:



Se FLUSSO ADIABATICO: $q = 0 \Rightarrow H_1 = H_2 \Rightarrow T_{01} = T_{02}$

\Rightarrow la temperatura totale si conserva in un flusso adiabatico, NON NECESSARIAMENTE ISENTROPICO

Ricapitolando, le EQUAZIONI PER FLUSSI UNIDIMENSIONALI sono:

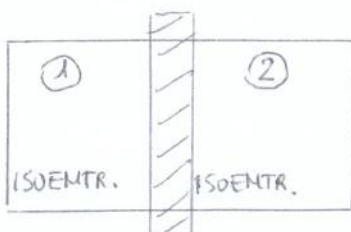
① $\rho u = \text{cost}$

② $p + \rho u^2 = \text{cost}$

③ $q + h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$

Stesso considerando:

- FORZE VISCOSE = 0
- FORZE DI CAMPO = 0
- EFFETTI DI CONDUABILITÀ = 0
- TRASPORTO DI MASSA = 0



Le equazioni esprimono un legame tra due campi omogenei, in cui sono presenti effetti dissipativi \rightarrow ISOENTROPICI

Nelle zone di separazione tra i due flussi possono invece verificarsi anche fenomeni che implicano dissipazioni

Equazione q.d.m :

$$p + \rho u^2 = \text{cost}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p + \rho a^2 &= p + dp + (\rho + d\rho)(a + da)^2 \\ &= p + dp + (\rho + d\rho)(a^2 + 2a da + da^2) \quad \text{trascuriamo} \\ &= p + dp + \rho a^2 + 2\rho a da + a^2 d\rho + 2a d\rho da \quad \text{trascuriamo} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dp = -2\rho a da - a^2 d\rho$$

$$da = \frac{dp + a^2 d\rho}{-2\rho a} \Rightarrow \boxed{\frac{da}{d\rho} = \frac{dp/d\rho + a^2}{-2a\rho}}$$

Uguagliando le due equazioni:

$$-\frac{a}{\rho} = \frac{dp/d\rho + a^2}{-2a\rho} \Rightarrow \boxed{a^2 = \frac{dp}{d\rho}} \xrightarrow{\text{ISOENTROPICA}} \boxed{a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s=\text{cost}}}$$

Osservazioni:

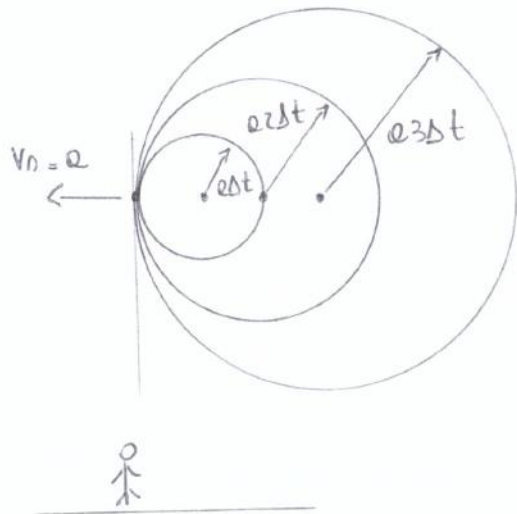
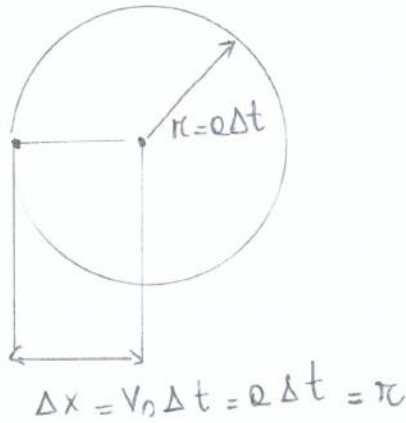
1) $\frac{1}{a^2} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{s=\text{cost}} \rightarrow$ INDICE DI COMPRESSIBILITÀ DEL GAS
 perché $\frac{1}{a^2}$ esprime le variazioni di densità per effetto di una variazione di pressione

Se $a \rightarrow \infty$, $M \rightarrow 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right) \rightarrow 0$ FLUSSO INCOMPRESSIBILE

Se $a \rightarrow 0$, $M \rightarrow \infty \Rightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right) \rightarrow \infty$ FLUSSO FORTEMENTE COMPRESSIBILE

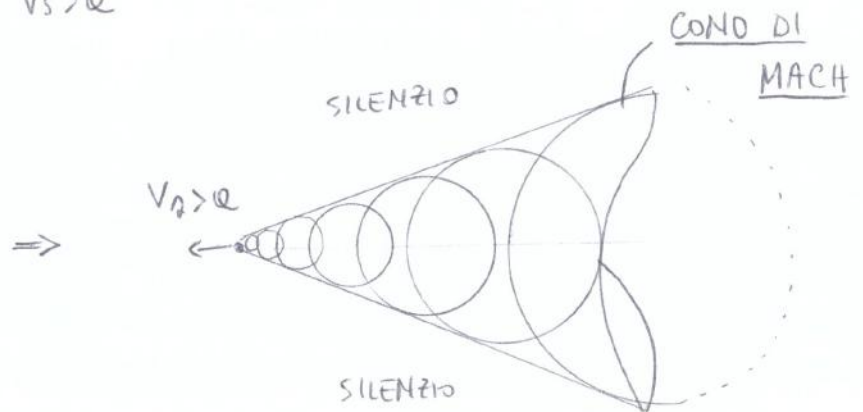
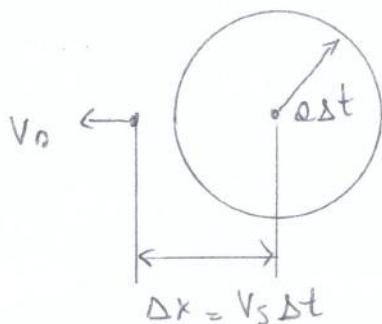
2) ISOENTROPICA: $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost} \Rightarrow p = \text{cost} \rho^\gamma \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \rho} = \text{cost} \gamma \rho^{\gamma-1} = \text{cost} \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}$

③ SORGENTE IN MOVIMENTO CON $M=1$, $v_s=c$



La sorgente non sarà mai in posizione avanzata né arretrata rispetto al sistema di onde che descrive la propagazione sonora. Un osservatore vede l'oggetto e sente il suono nello stesso istante.

④ SORGENTE CON $M>1$, $v_s>c$

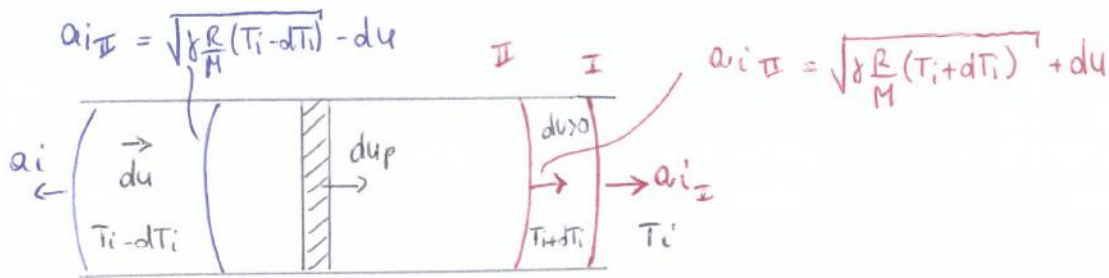


Intersecazioni il cono con un piano:



dell'improvviso "reincendio".

Supponiamo che dopo un certo Δt il pistone si sposti di un'altra quantità infinitesima \rightarrow SECONDO IMPULSO



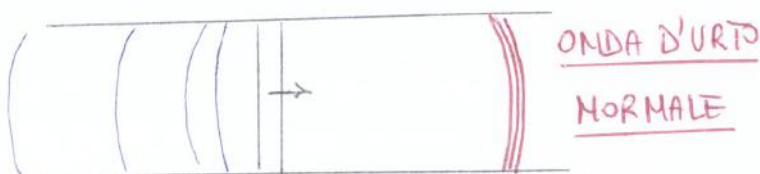
La seconda onda si muove in un campo perturbato della prima onda, in cui le molecole non sono ferme, ma si muovono a una velocità $du > 0$ e una temperatura $T_i + dT_i$.

$\Rightarrow a_{iII} > a_{iI} \rightarrow$ l'onda finirà per impacchettarsi con la prima, senza superare perché se dovesse farlo entrerebbe in un campo in cui la temperatura sarebbe T_i e non più $T_i + dT_i$.

Le seconde onde di espansione propagano a valle del gas perturbato della prima onda, più freddo e dotato di una velocità du opposta al senso di propagazione dell'onda stessa.

$\Rightarrow a_{iII} < a_{iI} \rightarrow$ le onde di espansione non si impacchettano mai.

Allora, considerando di dare infiniti impulsi ad un pistone posto in un tubo sufficientemente lungo, si avrà che:

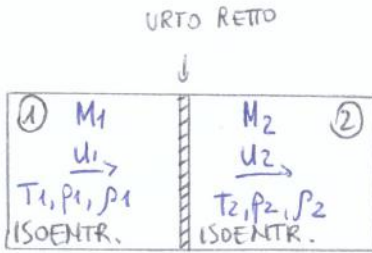


\hookrightarrow impacchettamento di onde elementari isentropiche

L'ordine di grandezza della spessore dell'onda d'urto è dell'ordine del libero cammino medio molecolare (ARIA: $\lambda \approx 10^{-4} \text{ mm}$)

EQUAZIONI DELL'URTO RETTO (monodimensionale)

L'onda d'urto genera un campo di moto a valle unidimensionale.



Riconduciamoci a un problema stazionario considerando l'URTO fermo e la corrente che lo attraversa.

PROBLEMA: assegnato il campo ①, calcolare il campo ②

ASSUNZIONI

1) Flusso uniforme in campo 1

2) Condizioni adiabatiche $\Rightarrow q=0 \Rightarrow T_{01} = T_{02}$

Utilizzeremo le equazioni:

$$\begin{cases} \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \\ h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \end{cases}$$

incognite: p, ρ, u, T

$$+ \frac{p}{\rho} = \frac{R}{M} T$$

Ricoveremo le soluzioni dell'urto retto nelle forme: $\frac{p_2}{p_1} = \text{funzione}(M_1)$

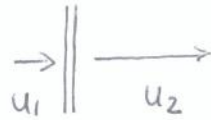
① QDM
CONTINUITÀ $\Rightarrow \frac{p_1 + \rho_1 u_1^2}{\rho_1 u_1} = \frac{p_2 + \rho_2 u_2^2}{\rho_2 u_2}$

$$\frac{p_1}{\rho_1 u_1} + u_1 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} + u_2 \Rightarrow u_1 - u_2 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1}{\rho_1 u_1}$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \gamma \frac{p}{\rho} \\ \frac{a^2}{\gamma} &= \frac{p}{\rho} \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_1 - u_2 = \frac{a_2^2}{\gamma u_2} - \frac{a_1^2}{\gamma u_1} \Rightarrow u_2 - u_1 = \frac{a_1^2}{\gamma u_1} - \frac{a_2^2}{\gamma u_2}$$

Come devono essere u_1, u_2 in un urto netto?

1) Se $u_1 < a^* \Rightarrow u_2 > a^*$

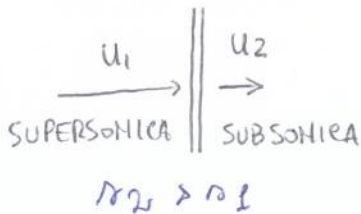


2) Se $u_1 > a^* \Rightarrow u_2 < a^*$

FISICAMENTE

IRREALIZZABILE

(onda di espansione)
 inoltre $\rho_2 < \rho_1$ ⚡



CIÒ CHE AVVIENE NELLA REALTÀ

\Rightarrow Lo cuneo, per generare un'onda d'urto, deve essere supersonico (il velivolo deve viaggiare a velocità supersonica)

$v_{sw} > a$

Riprendiamo la relazione di Prandtl:

$a^{*2} = u_1 u_2 \rightarrow 1 = \frac{u_1}{a^*} \cdot \frac{u_2}{a^*} = M_1^* M_2^*$

Riconduciamo la relazione tra M, M^* :

$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a^{*2}}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rightarrow \frac{1}{M^2(\gamma-1)} + 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{M^{*2}} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$

$M^{*2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \cdot \frac{2(\gamma-1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2} = \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2} \Rightarrow \begin{cases} M_2^{*2} = \frac{(\gamma+1)M_2^2}{2+(\gamma-1)M_2^2} \\ M_1^{*2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \end{cases}$

Poiché $M_1^* M_2^* = 1$,

$M_2^* = \frac{1}{M_1^*} \rightarrow \frac{(\gamma+1)M_2^2}{2+(\gamma-1)M_2^2} = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2}$

Ricaviamo $M_2^2 = f(M_1^2)$:

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\rho_2 u_1}{\rho_2 u_2} \frac{\rho_1}{\rho_1} &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \\ \frac{\rho_1 u_2}{\rho_1 u_1} \frac{\rho_2}{\rho_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \end{aligned} \right\} \text{dall'equazione di continuità}$$

Per cui:

$$u_1^2 - u_2^2 = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho_1} \right) + \left(\frac{\rho_2}{\rho_2} - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) = \frac{1}{\rho_1} (\rho_2 - \rho_1) + \frac{1}{\rho_2} (\rho_2 - \rho_1) = (\rho_2 - \rho_1) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

$$\Rightarrow u_1^2 - u_2^2 = (\rho_2 - \rho_1) \left[\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right]$$

Ricaviamo $u_1^2 - u_2^2$ per altra via:

$$H = c_p T + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M} T + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}$$

$$\rightarrow u_1^2 - u_2^2 = 2H_1 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} - 2H_2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right)$$

$$\Rightarrow u_1^2 - u_2^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right)$$

uguagliando le relazioni:

$$\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = (\rho_2 - \rho_1) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad \text{moltiplichiamo per } \frac{\rho_2}{\rho_1} :$$

$$\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) \frac{\rho_2}{\rho_1} = (\rho_2 - \rho_1) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_2}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_1} \right) = \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + 1 \right) = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + 1 \right)$$

Rapporto P_2/P_1 :

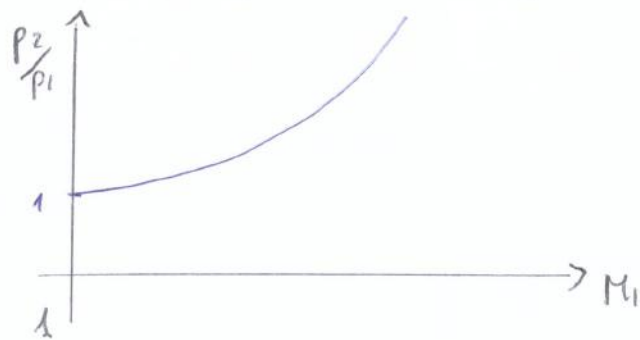
Utilizziamo le relazioni di Rankine-Hugoniot: $P_2/P_1 = f(P_2/P_1)$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{P_2}{P_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{P_2}{P_1}} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{(\gamma+1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_1^2} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{(\gamma+1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_1^2}} =$$

$$= \frac{(\gamma+1)^2 M_1^2 - (\gamma-1)[2 + (\gamma-1) M_1^2]}{(\gamma-1)[2 + (\gamma-1) M_1^2]} \cdot \frac{(\gamma-1)[2 + (\gamma-1) M_1^2]}{(\gamma+1)[2 + (\gamma-1) M_1^2] - (\gamma+1)(\gamma-1) M_1^2} =$$

$$= \frac{4\gamma M_1^2 - 2(\gamma-1)}{2(\gamma+1)} = \frac{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}{\gamma+1} = \frac{2\gamma M_1^2 - 2\gamma + 2\gamma - \gamma + 1}{\gamma+1} = \frac{2\gamma(M_1^2 - 1) + 1}{\gamma+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1)}$$



Commenti:

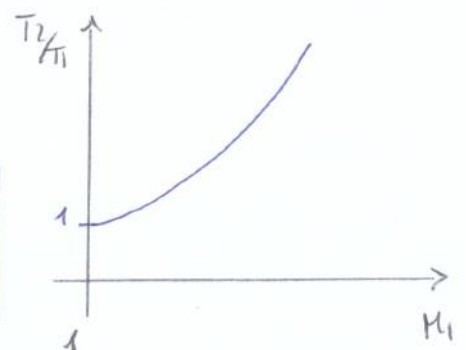
-) $M_1 > 1 \Rightarrow P_2/P_1 > 1$, la valle dell'ondata d'urto si ha una compressione
-) $M_1 \rightarrow \infty \Rightarrow P_2/P_1 \rightarrow \infty$

OSSERVAZIONE: $M_1 = 5 \rightarrow$ limite al di sopra del quale le relazioni trovate non hanno più senso (il gas non è più caloricamente perfetto, ci sono i gradi di libertà vibrazionali che entrano in gioco)

Rapporto T_2/T_1 :

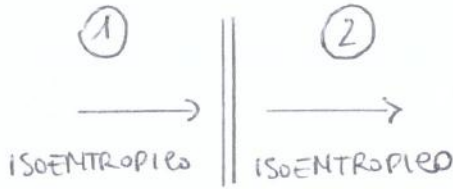
Ricorriamo alla eq. di stato:

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (\gamma-1) M_1^2}{(\gamma+1) M_1^2} \right]}$$



Valutazione del salto entropico

Poiché l'urto è un fenomeno dissipativo, dobbiamo quantificarne l'aumento di entropia.



Riconduciamo che per un processo reversibile, ovvero isocoro:

$$\left. \begin{aligned} T ds &= dh - v dp \\ v &= \frac{R}{M} \frac{T}{P} \end{aligned} \right\} \rightarrow ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{R}{M} \frac{dp}{P} \Rightarrow \boxed{s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{P_2}{P_1}}$$

Poiché l'entropia è una FUNZIONE DI STATO, la relazione va bene anche in processi IRREVERSIBILI, come l'urto netto, in quanto s dipende solo dal valore iniziale e finale.

Illone:

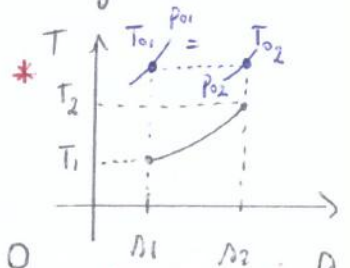
$$\boxed{s_2 - s_1 = c_p \ln \left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \right] \right\} - \frac{R}{M} \ln \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right]}$$

Come si esprime la variazione di entropia in funzione delle grandezze statiche?

Si dimostra che*:

$$\Delta s_2 - \Delta s_1 = s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{P_2}{P_1} = -\frac{R}{M} \ln \frac{P_2}{P_1} > 0$$

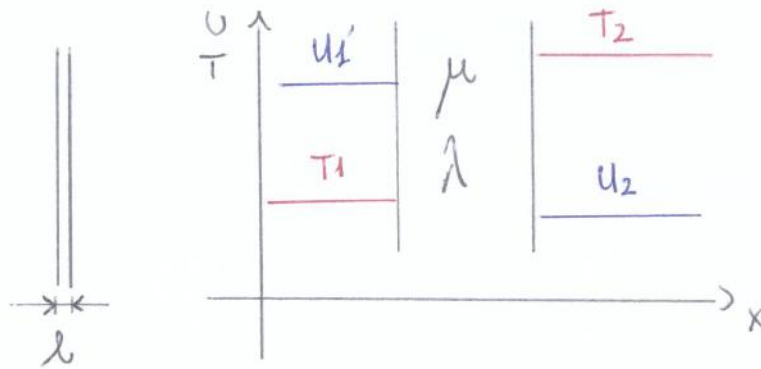
come nei
flussi forcati
i form. di oroscio



*
ntorno Δs ma
con grand. statiche
che totale!

$$\text{Il rapporto } \frac{P_2}{P_1} < 1! \quad \left\{ \begin{aligned} P_2 &= P_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \\ P_1 &= P_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \end{aligned} \right. \Rightarrow \begin{aligned} P_2/P_1 &> 1 \text{ ma} \\ M_2 &\ll M_1 \end{aligned}$$

FENOMENI DISSIPATIVI



All'interno della regione interposta dell'urto, di spessore dell'ordine del libero cammino medio, l'effetto delle viscosità associate a gradienti di velocità comporta la nascita delle τ .

Le τ , moltiplicate per la velocità, forniscono una potenza persa, in quanto la viscosità è responsabile di dissipazione.

Non solo, la presenza di un gradiente di temperatura comporta anche la nascita di flussi di calore, per effetto di λ .

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{GRADIENTE DI VELOCITÀ} \quad \frac{\partial U}{\partial x} \rightarrow \tau_{xx} = \mu \frac{\partial U}{\partial x} \\ \text{GRADIENTE DI TEMPERATURA} \quad \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \end{cases}$$

Nei fenomeni adiabatici la vera manifestazione delle dissipazioni è come attraverso il rapporto delle pressioni totali

Allone:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} = f(M_1, M_2)$$

Rapporto T_2/T_1 :

Equazione di stato + continuità

$$\begin{cases} \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} \\ \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \end{cases} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{u_2}{u_1} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{a_2 M_2}{a_1 M_1} \right) = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2} \frac{M_2}{M_1} \frac{p_2}{p_1}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2$$

Rapporto ρ_2/ρ_1 :

Dell'equazione di stato:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \right)^2 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 = \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2$$

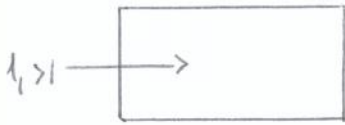
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2$$

Rapporti tra le grandezze totali

Rapporto P_{02}/P_{01} :

$$\begin{cases} P_{02} = p_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \\ P_{01} = p_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \end{cases} \rightarrow \frac{P_{02}}{P_{01}} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right) \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

• INGRESSO SUPERSONICO



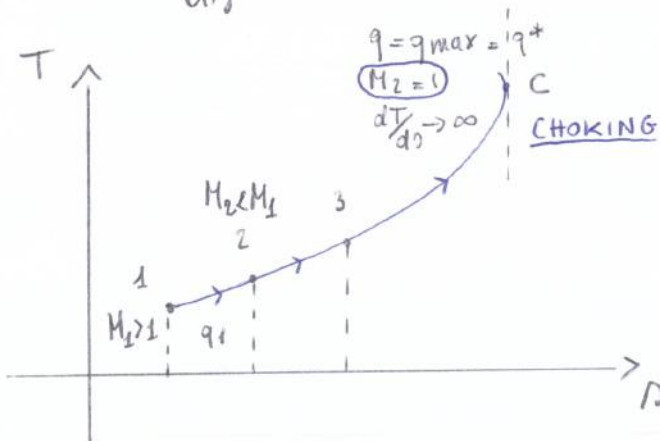
$$\frac{dT}{ds} = \frac{T}{c_p} \frac{(\gamma M^2 - 1)}{M^2 - 1}, \quad \frac{dU}{ds} = -\frac{U}{c_v} \frac{1}{\gamma(M^2 - 1)}$$

se $M > 1$, lo sarà anche in ogni altro punto del condotto.

$$M > 1 \rightarrow D\left(\frac{dT}{ds}\right) = M^2 - 1 > 0 \Rightarrow \frac{dT}{ds} > 0 \text{ se } \gamma M^2 - 1 > 0 \rightarrow M > \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$$

↳ denom.

$\frac{dU}{ds} < 0$ sempre! \Rightarrow se $M > 1$ la corrente decelera



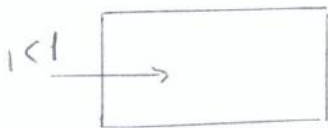
$$q_1 \rightarrow M_2 < M_1, M_2 > 1$$

$$q_2 > q_1 \rightarrow M_2' < M_2 < M_1, M_2' > 1$$

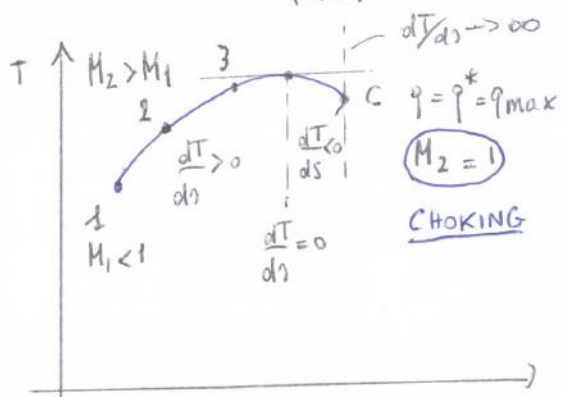
$$q_{max} = q^* \rightarrow M_2 = 1$$

CONDIZIONE DI CHOKING

• INGRESSO SUBSONICO



$$M < 1 \rightarrow D\left(\frac{dT}{ds}\right) = M^2 - 1 < 0 \Rightarrow \frac{dT}{ds} > 0 \text{ per } \gamma M^2 - 1 < 0 \rightarrow M < \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT}{ds} > 0 \text{ per } M < \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \\ \frac{dT}{ds} < 0 \text{ per } M > \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \\ \frac{dT}{ds} = 0 \text{ per } M = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \\ \frac{dT}{ds} \rightarrow \infty \text{ per } M = 1 \end{array} \right.$$

$$q_1, q_2, \dots, q_{max} = q^*$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{ds} = -\frac{U}{c_v} \left(\frac{1}{\gamma(M^2 - 1)} \right) > 0 \text{ la corrente ACCELERA}$$

② Riferimento delle grandezze alle condizioni critiche

$$\frac{p_2}{p_1} = f(M_1, M_2) \rightarrow \frac{p}{p^*}$$

Allora:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \quad \text{se } \begin{cases} \text{② } p_2 \rightarrow p, M \\ \text{① } p_1 \rightarrow p^*, M=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{p^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2}$$

rapporto tra pressione e la pressione che avrei nelle condizioni critiche

$$\frac{T}{T^*} = f(M) = M^2 \left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right)^2$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M^2} \left(\frac{1 + \gamma M^2}{1 + \gamma} \right)$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \left(\frac{\gamma + (\gamma - 1) M^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(1 + \gamma) M^2}{(1 + \gamma M^2)^2} \left[2 + (\gamma - 1) M^2 \right]$$

gli rapporti sono riportati in opportune tabelle:

M	p/p*	T/T*	ρ/ρ*	p ₀ /p ₀ *	T ₀ /T ₀ *
M ₁	→	→	→	→	→
M ₂ <					(T ₀₂ /T ₀ *)
L	→	→	→	→	

② Calcola $T_{02} = T_{01} + q/c_p$

RISOLUZIONE CON TABELLE

CONDIZIONI ASSEGNATE:

$$p_1, T_1, \rho_1, q, M_1, \dots; T_{01} = T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)$$

① $M_1 \xrightarrow{\text{tabella}} p_1^*/p^*, \rho_1^*/\rho^*, \dots, T_{01}^*/T_0^*$

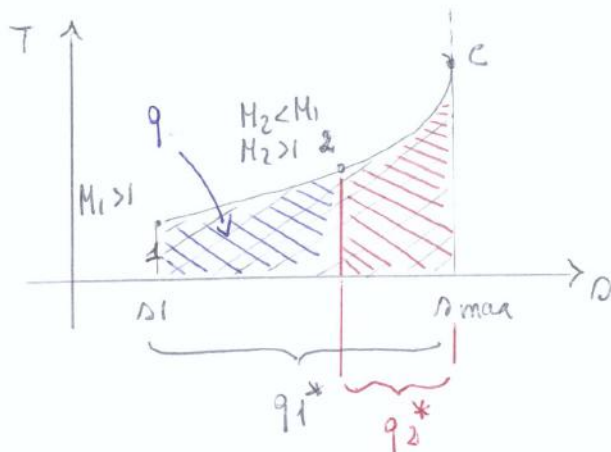
con $T_{02}^* = T_{01}^* = T_0^*$

②, ci sarà bisogno di un certo calore q_2^* .

Allora, si ha che:

$$q_2^* = q_1^* - q$$

Ciò può anche essere osservato dal diagramma T-s:



$$\Rightarrow q_2^* = q_1^* - q$$

Ciò ci è servito a capire che, qualunque sia il Mach di ingresso nel condotto, esiste sempre una quantità di calore q^* che rende la sezione di uscita sovracritica.

Ricordando che:

$$q = c_p (T_{02} - T_{01})$$

Se il condotto è in condizioni di choking $\rightarrow M_2 = M^* = 1, T_{02} = T_0^*$

$$\Rightarrow q^* = c_p (T_0^* - T_{01}) \quad \text{con } T_{01} = T_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)$$

$\Rightarrow q^* = q^*(M_1)$, dipende solo da Mach 1.

o il calcolo delle variazioni di entropia:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$s_{02} - s_{01} = c_p \ln \frac{T_{02}}{T_{01}} - \frac{R}{M} \ln \frac{p_{02}}{p_{01}}$$

τ_w :

$$\boxed{\begin{array}{c} dS \\ dx \end{array}} A \Rightarrow dS = \pi D dx \Rightarrow \int \tau_w(x) dS = \pi D \int_0^L \tau_w dx$$

Per cui, avremo:

$$-\rho_1 u_1^2 A + \rho_2 u_2^2 A = (p_1 A - p_2 A) - \pi D \int_0^L \tau_w(x) dx \quad \text{dividiamo per } A = \pi \frac{D^2}{4}$$

$$\Rightarrow (p_2 - p_1) + (\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2) = -\frac{4}{D} \int_0^L \tau_w(x) dx \quad \text{flusso compressibile}$$

FLUSSO INCOMPRESSIBILE

$$\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = 0 \Rightarrow p_2 - p_1 = -\frac{4}{D} \int_0^L \tau_w dx = -\frac{4}{D} \tau_w L$$

$$\tau_w = \text{cost}$$

$$\boxed{\frac{p_2 - p_1}{L} = -\frac{4}{D} \tau_w}$$

gradiente di pressione che si genera nel condotto per effetto degli sforzi viscosi.

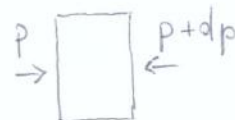
FLUSSO COMPRESSIBILE

invece al caso compressibile, si osserva che l'equazione determinata è di difficile risoluzione in quanto è presente una funzione integrale, poiché $\tau_w = \tau_w(x)$.

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{4}{D} \tau_w$$

allora:

FORMA INTEGRALE \rightarrow FORMA DIFFERENZIALE



$$\Rightarrow p_2 - p_1 = dp$$

$$\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = d(\rho u^2) = d(\rho u \cdot u) = \rho u du$$

adimensionalizziamo lo sforzo viscoso: $f(x) = \frac{\tau_w(x)}{\frac{1}{2} \rho u^2}$ COEFFICIENTE DI SFORZO DI ATRITO

$$\Rightarrow \boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_2^2} \right)^{1/2}}$$

•) Dall'equazione di stato: $\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_2^2} \right)^{-1/2}}$$

$$\cdot) \boxed{\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{2 + (\gamma-1)M_2^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}} = \boxed{\frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (\gamma-1)M_2^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} \Rightarrow \frac{p_{02}}{p_{01}} < 1$$

) Per il salto di entropia:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{p_2}{p_1} = c_p \ln \left(\frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_2^2} \right) - \frac{R}{M} \ln \left[\frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_2^2} \right)^{1/2} \right]$$

$$s_{02} - s_{01} = s_2 - s_1 = -\frac{R}{M} \ln \frac{p_{02}}{p_{01}} = -\frac{R}{M} \ln \left[\frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (\gamma-1)M_2^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \right]$$

CURVA DI FANNO

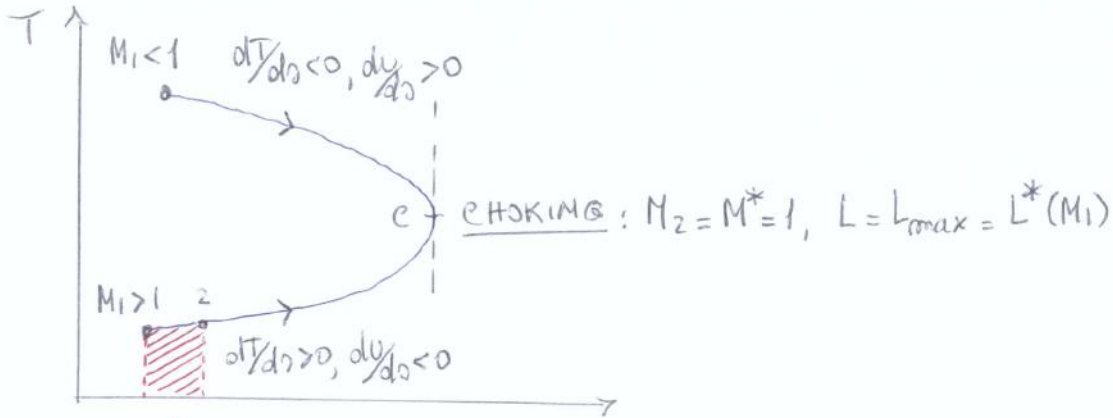
problema: dati $M_2, L \rightarrow$ calcolare $\text{comp} \textcircled{2}$

Per studiare il comportamento del flusso di Fanno sul diagramma T-s, rispetto M_2 e una certa lunghezza L del condotto, dobbiamo valutare le derivate $\frac{dT}{ds}$, $\frac{du}{ds}$.

$$\boxed{\frac{dT}{ds} = \frac{T}{c_p} \gamma \frac{M^2}{M^2-1}}$$

$$\boxed{\frac{du}{ds} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{T}{u} \frac{M^2}{M^2-1}}$$

Riunendo i due grafici in un unico diagramma si ottiene la CURVA DI FANNO:



$q = \int_1^2 T ds$ → calore che si genera per effetto viscoso
degrado di energie cinetiche che si traduce in
aumento di temperatura, per effetto del lavoro
delle forze visose.

OSSERVAZIONI:

Non si procede se $M_1 > 1, L > L_{max}$
 $M_1 < 1, L > L_{max}$ } → si generano fenomeni (ad es. vortici)
 che modificano le condizioni
a monte, in modo che la lunghezza
 importa sia plausibile.

• Qualunque sia la condizione di partenza, portandosi nella situazione di choking ottengo le stesse grandezze critiche

RISOLUZIONE DEL FLUSSO DI FANNO

$$\frac{4}{D} \int_0^L c_f dx = \left[-\frac{1}{\gamma M^2} - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{M^2}{1+\frac{\gamma-1}{2} M^2} \right) \right]_{M_1}^{M_2}$$

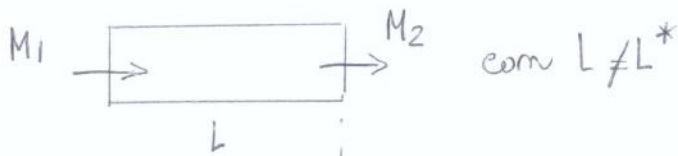
Se $L = L^* \rightarrow M = M^* = 1$. Partendo da un generico valore di ingresso $M_1 = M$ e giungendo a $M_2 = 1$, avremo che:

$$\frac{4}{D} \int_0^{L^*} c_f dx = \left[-\frac{1}{\gamma M^2} - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{M^2}{1+\frac{\gamma-1}{2} M^2} \right) \right]_M^1$$

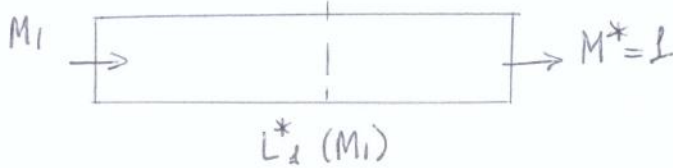
È possibile raccogliere in una tabella, in funzione del Mach generico, i rapporti critici determinati:

M	$\frac{T}{T^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{P_0}{P_0^*}$	$\frac{4\bar{C}_f L^*}{D}$

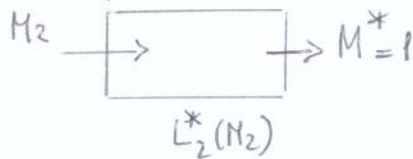
Supponiamo di avere un flusso sregolato:



calcolare il campo ② noto il campo ①



⇒



e tale condotto fittizio che in ingresso ha M_1 sregolato e giunge in condizioni critiche mediante un condotto di lunghezza $L^*(M_1)$ sarà sregolato su valore preciso del gruppo adimensionale $\frac{4\bar{C}_f L^*}{D}$.

$$\Rightarrow \left(\frac{4\bar{C}_f L^*}{D} \right)_2$$

Il secondo condotto fittizio sarà sregolato su altro valore del gruppo adimensionale:

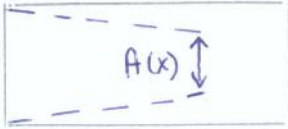
$$\Rightarrow \left(\frac{4\bar{C}_f L^*}{D} \right)_2$$

Che relazione esiste tra il gruppo critico in cond. 1, il gruppo critico in cond. 2 e il gruppo non critico del condotto sregolato?

$$\left(\frac{4\bar{C}_f L}{D} \right)_{\text{Ass.}} = \left(\frac{4\bar{C}_f L^*}{D} \right)_1 - \left(\frac{4\bar{C}_f L^*}{D} \right)_2$$

Devo considerare che in tale flusso sono presenti gli effetti della viscosità

VISCOSITÀ → CONDIZIONE DI ADERENZA ⇒ nascita dello strato limite



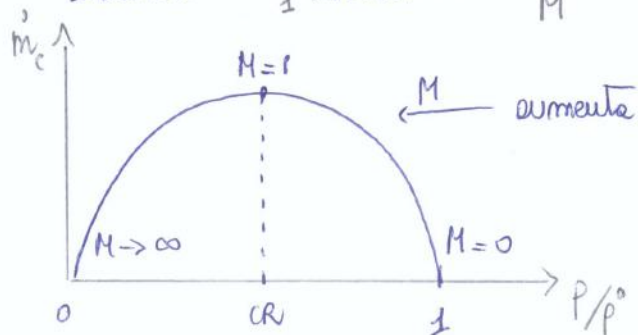
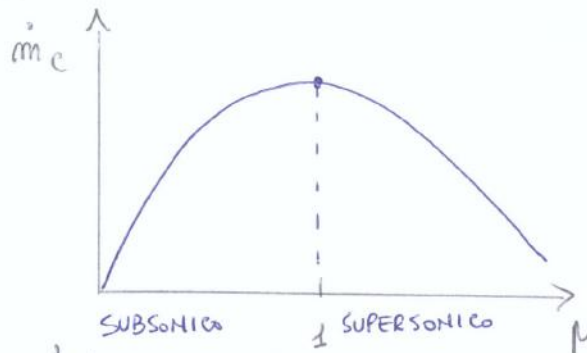
Il flusso vede una sezione di passaggio che via via si restringe. Per cui:

- * $M_1 < 1 \rightarrow$ in un convergente un flusso subsonico accelera. Se L è opportuna, si potranno raggiungere le condizioni critiche nella sezione di uscita
- * $M_1 > 1 \rightarrow$ in un convergente un flusso supersonico decelera. Se L è opportuna, il flusso decelera fino alle condizioni critiche

* Ricondiamo che in un condotto:

$$\dot{m}_c = \frac{\dot{m} \sqrt{RT^*}}{A p^*} \propto \frac{1}{A}$$

↳ PORTATA CRITICA



per la conservazione della portata e supponendo che le perdite totali si conservino:

• SUBSONICO:

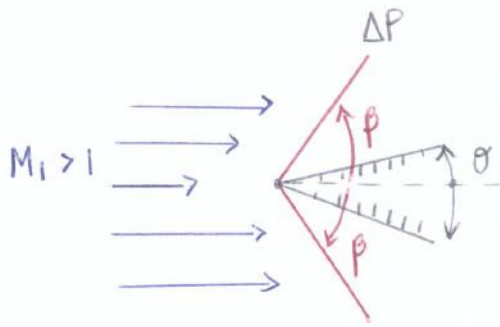
$$M \uparrow \Rightarrow e \uparrow$$

$$\dot{m}_c \uparrow \Rightarrow A \downarrow$$

• SUPERSONICO:

$$M \uparrow \Rightarrow e \uparrow$$

$$\dot{m}_c \downarrow \Rightarrow A \uparrow$$

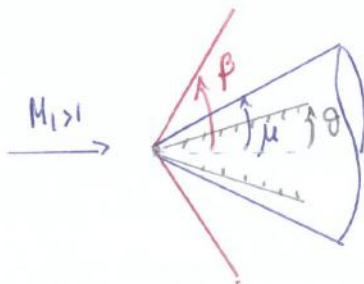


Un corpo di dimensione finita, come un cono, introduce GRANDI PERTURBAZIONI $M_1 \rightarrow$ e livello dell'onda d'urto si genera una brusca variazione di pressione



Una SORGENTE SONORA introduce delle PIUCCHE PERTURBAZIONI \rightarrow e livello dell'onda si ha una variazione infinitesima di pressione

Si dimostra che $\mu < \beta$, allora:



EQUAZIONI DELL'URTO OBLIQUO

Ipotesi:

-) $M_1 > 1$
-) Flusso stazionario $\partial/\partial t = 0$
-) Flusso 2D $\rightarrow \vec{v} = u\hat{i} + v\hat{j}$
-) Flusso inviscido $\rightarrow \mu = 0$
-) Fenomeno adiabatico $\rightarrow q = 0$

Scriveremo le equazioni in forma integrale, dal punto di vista Eulero

⇒ risultato analogo a quello ottenuto per flussi unidimensionali, considerando le componenti normali.

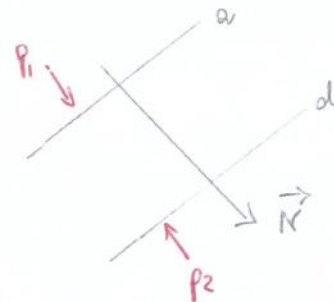
EQUAZIONE DELLA QDM

$$\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{m}) ds = - \int_S p \cdot \vec{m} ds \quad \text{equazione vettoriale da proiettare lungo le direzioni } \vec{N} \text{ e } \vec{T}$$

• proiezione lungo $\vec{N} \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{N} = u_N = u$

$$\begin{aligned} \left[\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{m}) ds \right]_N &= \int_{A_a} \rho_1 u_1 (-u_1) ds + \int_{A_d} \rho_2 u_2^2 ds + \int_{A_f} \rho_1 u_1 (-w_1) ds + \int_{A_b} \rho_1 u_1 w_1 ds + \\ &+ \int_{A_e} \rho_2 u_2 (-w_2) ds + \int_{A_c} \rho_2 u_2 w_2 ds = \\ &= -\rho_1 u_1^2 A_a + \rho_2 u_2^2 A_d - \rho_1 u_1 w_1 A_f + \rho_1 u_1 w_1 A_b - \rho_2 u_2 w_2 A_e + \rho_2 u_2 w_2 A_c \end{aligned}$$

$$- \int_S p \cdot \vec{m} ds = - [-p_1 A_a + p_2 A_d] = + p_1 A_a - p_2 A_d$$



$$\Rightarrow -\rho_1 u_1^2 A_a + \rho_2 u_2^2 A_d = + p_1 A_a - p_2 A_d$$

$$\boxed{p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2} \quad \text{nella direzione normale}$$

• proiezione lungo $\vec{T} \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{T} = u_T = w$

$$\begin{aligned} \left[\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{m}) ds \right]_T &= \int_{A_a} \rho_1 w_1 (-u_1) ds + \int_{A_d} \rho_2 w_2 u_2 ds + \int_{A_f} \rho_2 w_2 (-w_2) ds + \int_{A_b} \rho_1 w_1^2 ds + \\ &+ \int_{A_e} \rho_2 w_2 (-w_2) ds + \int_{A_c} \rho_2 w_2^2 ds = \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{H_1 = H_2} \rightarrow \boxed{T_{01} = T_{02}}$$

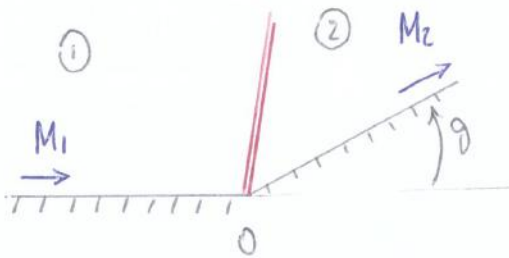
Osservando che:

$$\left. \begin{array}{l} v_1^2 = u_1^2 + w_1^2 \\ v_2^2 = u_2^2 + w_2^2 \\ w_1 = w_2 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}}$$

Per cui, le equazioni ricavate per l'urto obliquo sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \\ h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \\ w_1 = w_2 \end{array} \right.$$

CAMPO A VALLE DELL'URTO OBLIQUO



Le equazioni dell'urto obliquo si riferiscono a quelle dell'urto retto, purché si faccia riferimento alle componenti normali.

\Rightarrow otterremo per riferimento non a $M_1 = \frac{V_1}{\alpha_1}$, ma a $\boxed{M_{1n} = \frac{u_1}{\alpha_1}}$

Allora, se nell'urto retto:

$$\begin{array}{l} f_2/f_1 = f(M) \\ M_2 = f(M_1) \end{array}$$

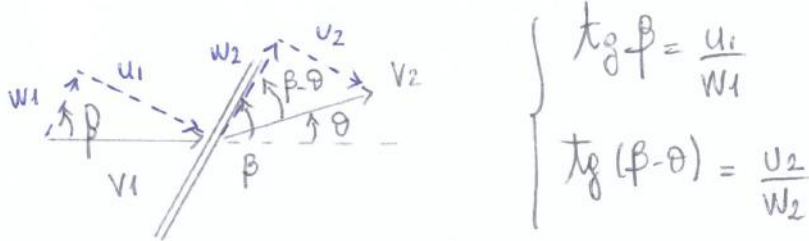
nell'urto obliquo:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_2/f_1 = f(M_{1n}) \\ M_2 = f(M_{1n}) \end{array} \right.$$

Le relazioni determinate, per $M_1 > 1$, fornisce due risultati e secondo delle condizioni e valle dell'urto:

- $M_2 > 1$ URTO DEBOLE
- $M_2 < 1$ URTO FORTE

Riprendiamo nuovamente i triangoli di velocità:



$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{u_1}{w_1} \\ \operatorname{tg} (\beta - \theta) &= \frac{u_2}{w_2} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{tg} (\beta - \theta)}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{u_2/w_2}{u_1/w_1} = \frac{u_2}{u_1} \frac{w_1}{w_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = f(M_{1m}), \text{ con } M_{1m} = M_1 \sin \beta = \frac{u_1}{a_1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = f(M_{1m}) = \frac{(\gamma + 1) M_{1m}^2}{2 + (\gamma - 1) M_{1m}^2}$$

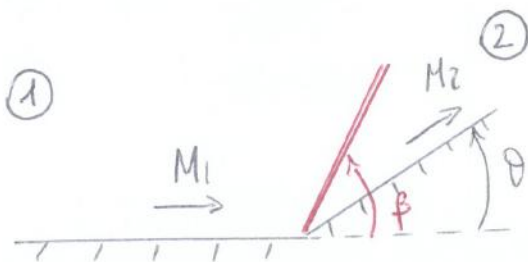
$$\Rightarrow \frac{\operatorname{tg} (\beta - \theta)}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta} \quad \text{dopo passaggi trigonometrici ...}$$

$$\tan \theta = 2 \cdot \frac{1}{\tan \beta} \left[\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right]$$

Relazione $\theta - \beta - M_1$

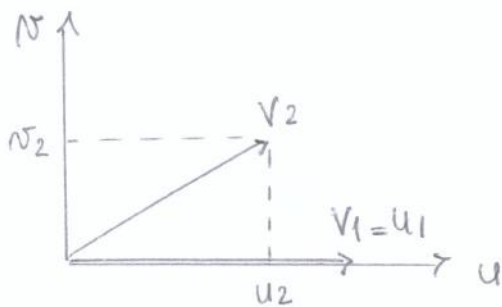
assegnati $M_1, \theta \Rightarrow \beta$

RISOLUZIONE PROBLEMA



- ① Assegnato $M_1, \theta \rightarrow$ relazione θ, β, M_1 troviamo β
- ② Calcoliamo M_{1n}
- ③ Calcoliamo $M_{2n} = f(M_{1n})$ e tutte le altre grandezze, poiché $\frac{\rho_2}{\rho_1} = f(M_{1m})$
- ④ $M_{2n} = M_2 \sin(\beta - \theta) \rightarrow$ calcolo M_2

ISS: $H_1 = H_2$ ($q=0$) $\rightarrow T_{01} = T_{02}; P_{01} > P_{02}$



$$\textcircled{1} \vec{V}_1 = u \hat{i} = u_1$$

$$\textcircled{2} \vec{V}_2 = u \hat{i} + v \hat{j}$$

Il piano odografico consente di descrivere, per un assegnato V_1, M_1 , o M_1^* , come varia facendo l'estremità del vettore \vec{V}_2 al variare di θ, β .

Si può dimostrare che:

$$N_2^2 = (V_1 - u_2)^2 \frac{V_1 u_2 - a^{*2}}{\frac{2}{\gamma+1} V_1^2 - V_1 u_2 + a^{*2}}$$

con a^* : velocità del suono in cond. critiche.

dividendo per a^{*2} :

$$\frac{N_2^2}{a^{*2}} = \left(\frac{V_1}{a^*} - \frac{u_2}{a^*} \right)^2 \frac{a^{*2} \left(\frac{V_1}{a^*} \frac{u_2}{a^*} - 1 \right)}{a^* \left(\frac{2}{\gamma+1} \frac{V_1^2}{a^{*2}} - \frac{V_1}{a^*} \frac{u_2}{a^*} + 1 \right)}$$

Pensando dal campo 1 al campo 2 le condizioni critiche non cambiano, perché entrambi i campi sono isentropici e possono rallentarsi/accelerarsi isentropicamente a raggiungere le cond. critiche.

$$\frac{N_2^2}{a^{*2}} = \left(M_1^* - \frac{u_2}{a^*} \right)^2 \frac{M_1^* \frac{u_2}{a^*} - 1}{\frac{2}{\gamma+1} M_1^{*2} - M_1^* \frac{u_2}{a^*} + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{a^*} = \pm \sqrt{\left(M_1^* - \frac{u_2}{a^*} \right)^2 \frac{M_1^* \frac{u_2}{a^*} - 1}{\frac{2}{\gamma+1} M_1^{*2} - M_1^* \frac{u_2}{a^*} + 1}} = f\left(\frac{u_2}{a^*}\right)$$

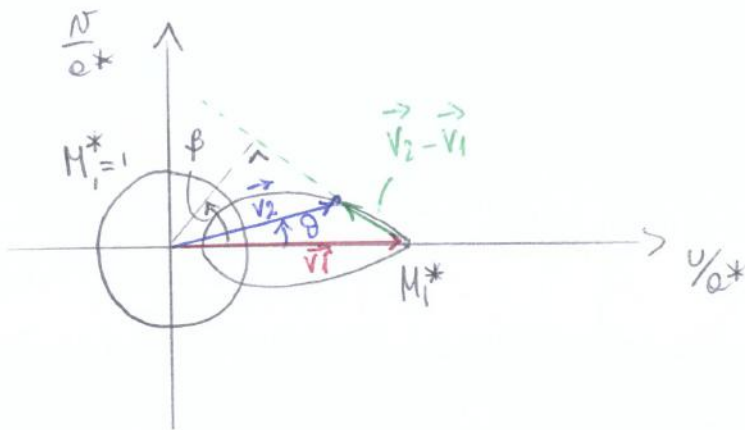
Finendo M_1, γ le relazioni forniscono $N_2/a^* = f(u_2/a^*)$

Riconosciamo che $M_1^* = f(M_1)$.

Per $M_1 \rightarrow \infty, M_1^* \rightarrow 2.449$ ($\gamma = 1.4$)

Riportiamo sull'odografo le velocità N, u normalizzate

Del piano obliquo si ricavano anche altre due informazioni:



Quanto vale $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$?

$$\begin{cases} \vec{v}_2 = v_{m2} + v_{t2} \\ \vec{v}_1 = v_{m1} + v_{t1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (v_{m2} - v_{m1}) + (v_{t2} - v_{t1})$$

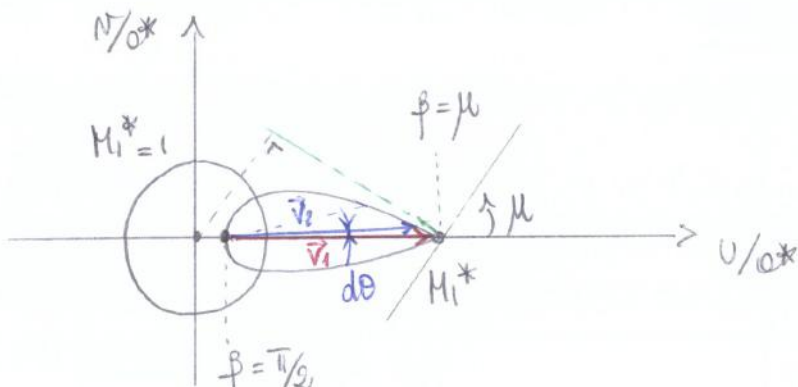
$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = v_{m2} - v_{m1}$$

0 perché le componenti di velocità tangenziali all'urto sono uguali

\Rightarrow prolungando la direzione di $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$, che è normale alla direzione dell'urto, la perpendicolare a tale direzione ci permette di individuare l'angolo ϕ .

oss: non confondere u, v su tale piano con u, w utilizzate nel caso precedente!

Come ricaviamo l'inclinazione delle linee di Mach?



Considerando una deflessione $d\theta$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \rightarrow dV$$

\Rightarrow Tracciando la tangente alle polare in corrispondenza dello spigolo, la normale alla tangente individua la direzione delle linee di Mach.

pendenza locale in direzione β in quel punto.

$\Rightarrow \beta = \pi/2$ a parete e $\beta \downarrow$ all'aumentare della distanza dalla parete

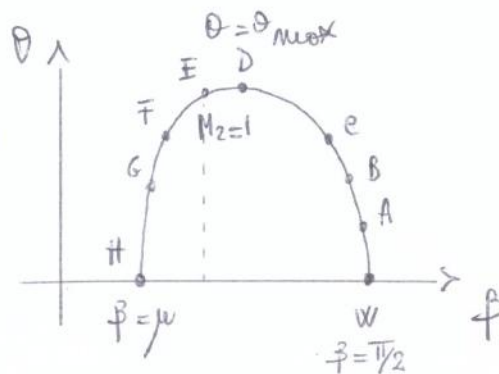
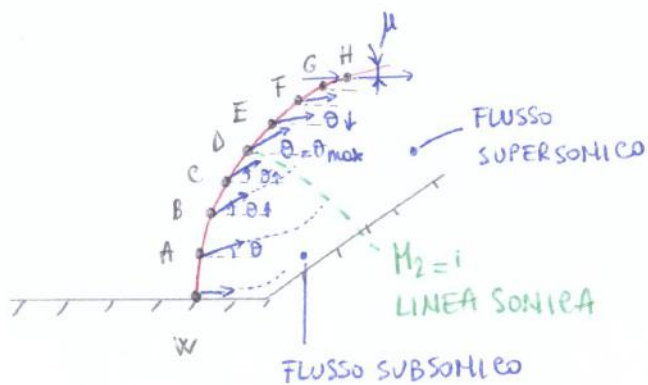
In ogni punto si avrà una deflessione locale θ della corrente, immediatamente a valle dell'urto.

\Rightarrow localmente si possono applicare le relazioni dell'urto obliquo.

Dopo l'urto, la corrente evolverà fino ad adattarsi alla pendenza della parete.

\Rightarrow vicino a parete non valgono le relazioni dell'urto obliquo

Descriviamo il fenomeno in maniera più dettagliata:



W) URTO RETTO $\rightarrow M_2 < 1$, punto in cui si hanno le maggiori dissipazioni

A) $M_A < 1, M_A > M_W, V_A > V_W$ perché l'urto non è più retto

B) $\theta_B > \theta_A, M_B < 1, M_B > M_A > M_W$

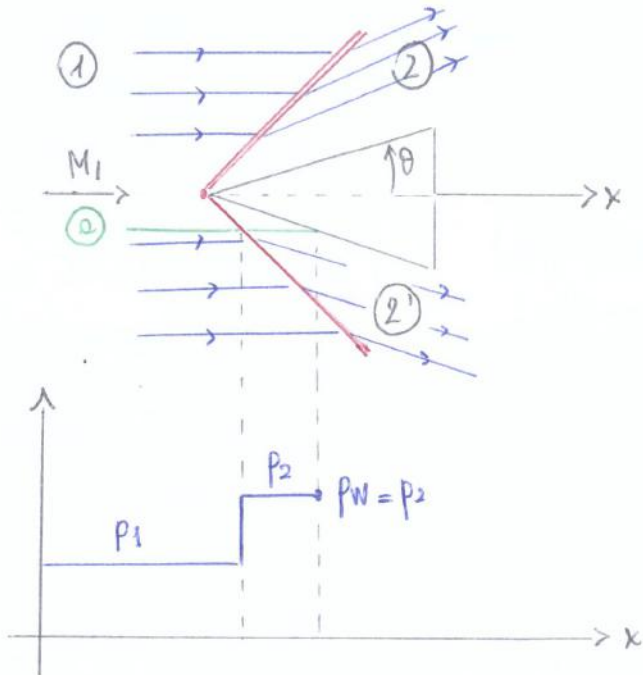
D) $\theta = \theta_{max}$
 E) $M_E = 1, \theta < \theta_{max}$ } le differenze tra D e E è di circa 0.5°

F) $\theta_F < \theta_E, M_F > M_E = 1 \rightarrow$ URTO DEBOLE

H) $M_2 = M_1, \beta = \mu \rightarrow$ URTO EVANESCENTE, linea di Mach a distanza suff. dalla parete

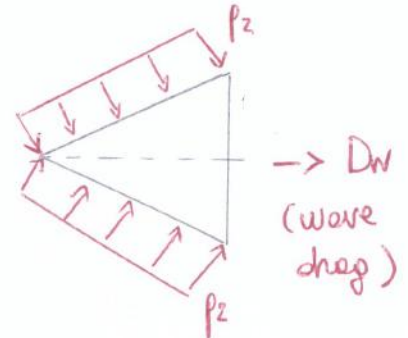
Vicino a parete, il flusso subsonico a valle dell'urto accelera fino a portarsi in condizioni supersoniche. \rightarrow si può definire una linea sonica.
 A separare il flusso subsonico da quello supersonico

DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE ATTORNO A UN CUNEO BIDIMENSIONALE



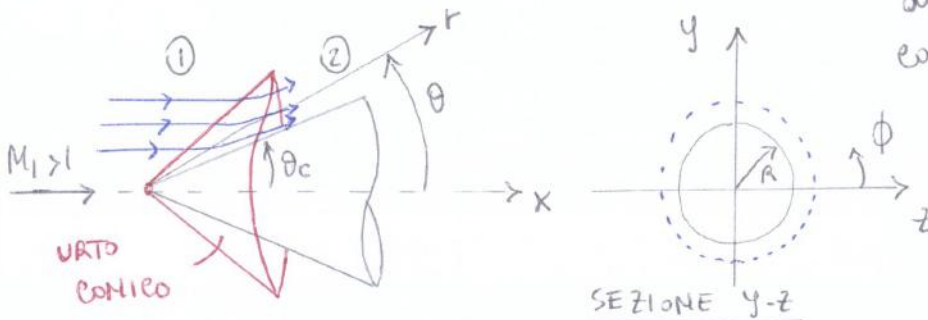
2 due campi 2 e 2' sono tra loro indipendenti

Distribuzione di pressione seguendo la linea verde (a)



Nonostante l'aver considerato flusso inviscido, nasce una resistenza, detta RESISTENZA D'ONDA, che si ottiene proiettando le risultante delle forze di pressione nella direzione della corrente e monte

CONFRONTO COM FLUSSO SUPERSONICO ATTORNO A UN CONO

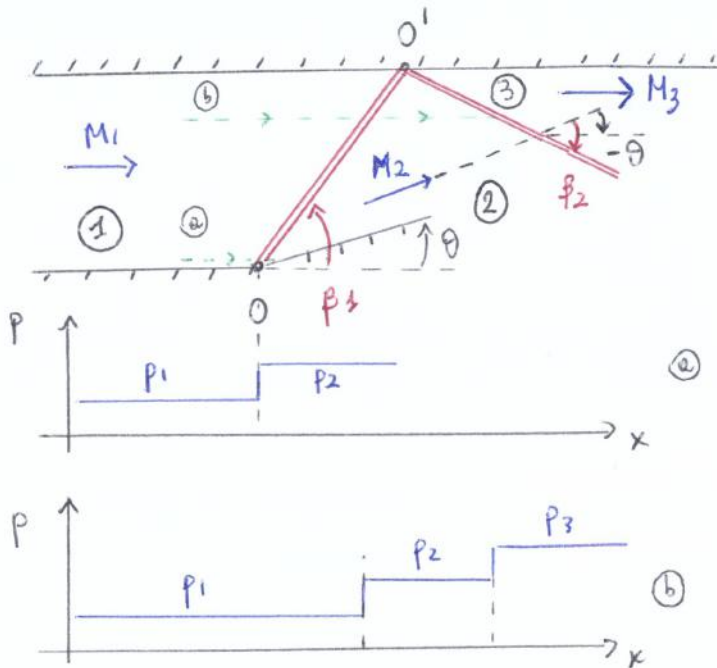


In tal caso, il campo 2 è più complesso del caso del cuneo, perché le linee di corrente non si inclinano subito come la pendenza della parete, ma curvano. Il flusso in campo 2, inoltre, è COLLEGATO, non si hanno due regioni indipendenti => EFFETTO 3D DEL CONO: l'intensità dell'urto sarà inferiore, poiché il flusso è meno ristretto.

si dimostra che se $\alpha = 0^\circ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \phi} = 0, \frac{\partial}{\partial r} = 0, \frac{\partial}{\partial \theta} \neq 0$

RIFLESSIONE E INTERSEZIONE DI URTI OBLIQUI

RIFLESSIONE REGOLARE $\rightarrow \theta < \theta_{max}(M_2)$



Urtoroo' debole $\Rightarrow M_2 > 1$
 Riflessione regolare: la crocetta e valle dell'urtoroo' riflessoroo' per rispettare le cond. di tangenza, deve ruotare di un angolo $-\theta$ per riportarsi nella situazione orizzontale.

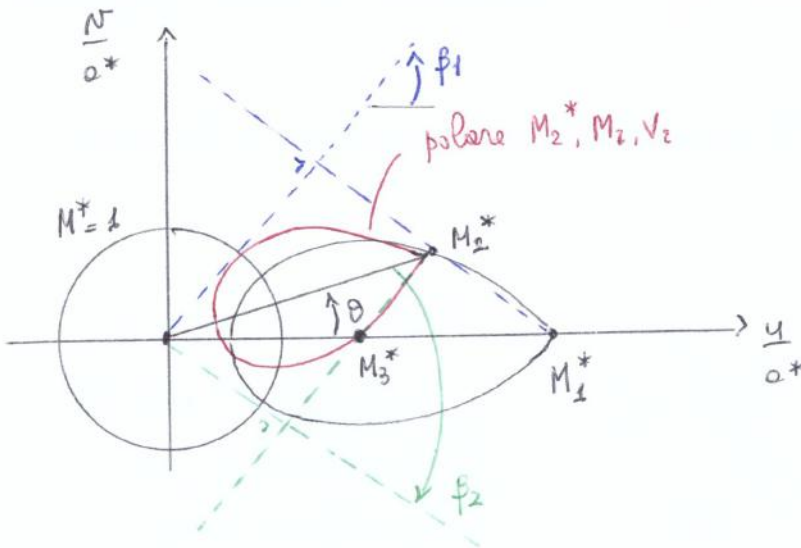
Si ha che:

$$M_2 < M_1$$

$$\Rightarrow \frac{p_3}{p_2} < \frac{p_2}{p_1}$$

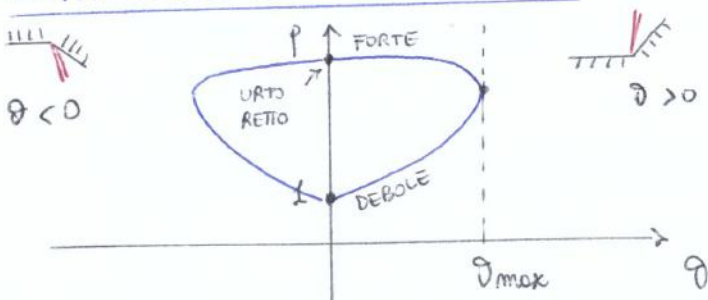
generato da M_2 generato da M_1

PIANO ODOGRAFICO



Il vettore V_3 lo determiniamo dall'intersezione della polare ottenuta fissando M_2^* con l'asse u/a^* , poiché sappiamo che è orizzontale

PIANO PRESSIONE - DEFLESSIONE



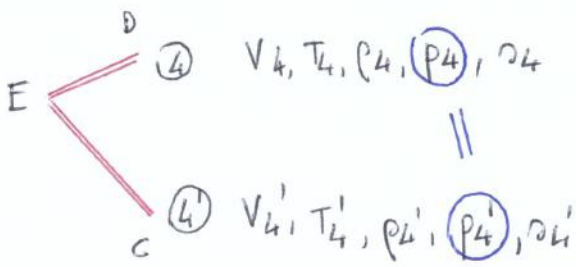
Dato un valore M_1 e angolo θ

$\hookrightarrow \theta - \beta - M \Rightarrow$ calcolo β

$$\Rightarrow M_{1m} = M_1 \sin \beta$$

$$\Rightarrow M_{2m}, p_2/p_1 \rightarrow (P_2), T_2/T_1, \dots$$

Bloccando M_1 , e facendo variare θ , si ha la curva pressione-deflessione



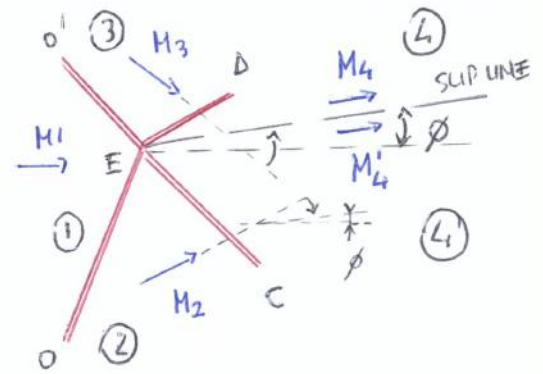
A valle del campo 4 e 4',
 si possono avere grandezze
 differenti, dovute delle
 quali possono coesistere, ma
 altre no!

Sicuramente p_4 non
 potrà essere diversa da p_4' ,
 perché un gradiente di
 pressione tra campo 4 e 4'
 implicherebbe moto in quella
 direzione (forza di pressione)

\Rightarrow $p_4 = p_4'$

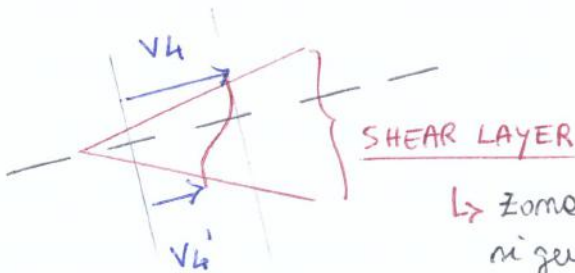
\Rightarrow Tra il campo 4 e 4' nasce una
SLIP LINE che parte dal punto E
 ed è orientata con un certo angolo
 rispetto all'orizzontale (M_1).

A cavallo della slip line sono ammesse
 tutte le discontinuità ad eccezione che
 quella di pressione.
 Le correnti in campo 4 e 4', inoltre,
 risultano allineate.



Le correnti in campo 3 e 2
 devono ruotare di un certo
 angolo per portarsi parallele all'
 slip line

Immaginando la slip line:



\hookrightarrow Zona in cui
 si genera il gradiente
 di velocità che occorre
 v_4 e v_4'

Studieremo ora l'interazione degli vortici nel piano ogodrofico.

Consideriamo ora un'onda di Mach generata nel punto B.

In tal caso:

$$u_2 = V_2 \sin(\beta - \theta) \Rightarrow \sin(\beta - \theta) = \frac{u_2}{V_2}$$

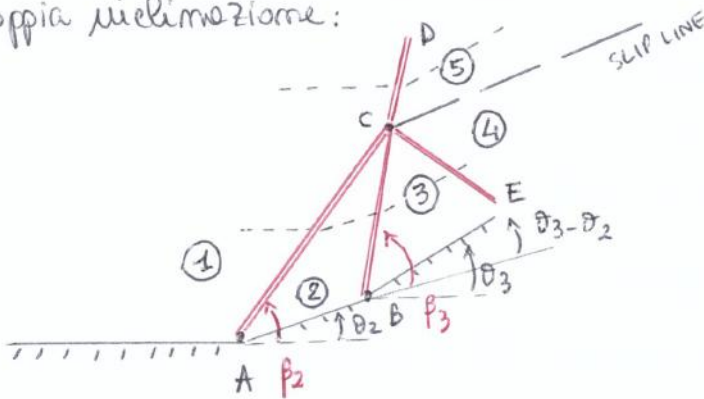
$$\sin \mu_2 = \frac{a_2}{V_2}$$

Abbiamo visto che se valle dell'angolo obliquo $u_2 < a_2$

$$\Rightarrow (\beta - \theta) < \mu_2$$

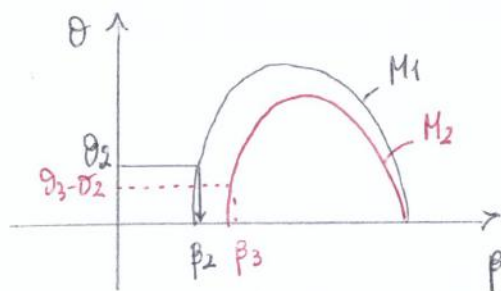
\Rightarrow anche la linea di Mach se valle dell'angolo obliquo intersecherà l'onda d'angolo

Risulta ora semplice capire che cosa succede prendendo una parete con una doppia inclinazione:



Poiché l'onda d'angolo BC è più inclinata dell'onda di Mach che si genera se valle del 1° angolo obliquo, e l'onda di Mach intersecherà tale onda, si avrà un'intersezione tra i due urti.

osserviamo che $p_3 > p_2$, poiché:



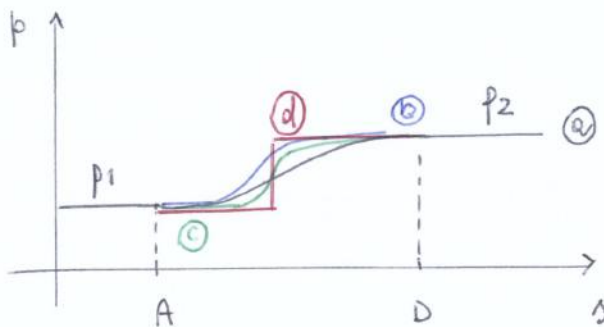
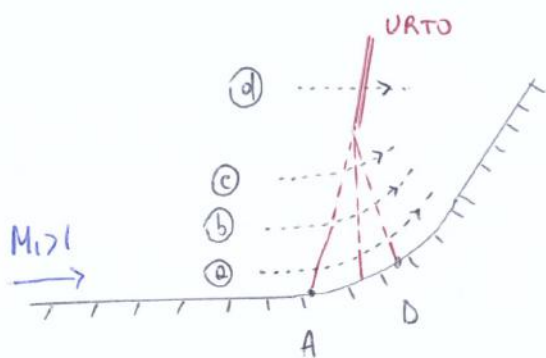
Che $\theta_3 - \theta_2 > \theta_2$ o $\theta_3 - \theta_2 < \theta_2$, si ottiene sempre $p_3 > p_2$

Dall'intersezione tra i due urti si genera l'urto CD e un'ulteriore onda CE, che può essere o un urto debole, e in questo caso proseguirà fino alla parete, posizionandosi in direzione perpendicolare, o un'onda di espansione. Per garantire la compensazione delle pressioni in campo (4) e (5), nasce una slip line e cavallo della quale sono riunite tutte le discontinuità tranne quelle di pressione. L'onda riflessa CE genera serve proprio ad evitare la compensazione delle pressioni, che altrimenti sarebbe impossibile.

Le linee di Mach successive tendono ad essere maggiormente inclinate rispetto alle precedenti, in quanto:

$$M \downarrow, \mu = \arcsin\left(\frac{1}{M}\right) \uparrow$$

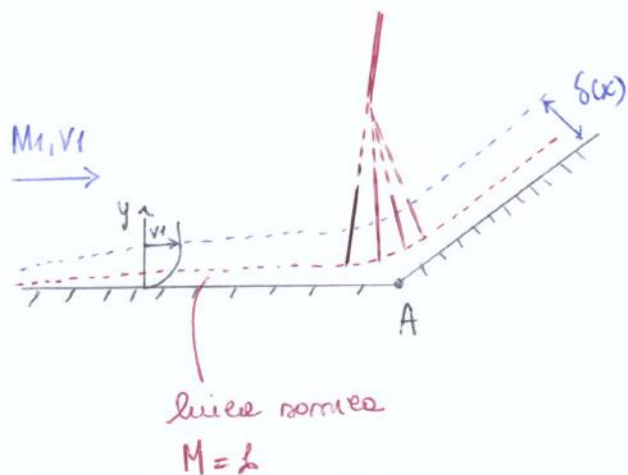
Le linee di Mach tendono a convergere e ad una certa distanza dalla parete si genererà un'onda d'urto.



Il gradiente di pressione aumenta all'aumentare della distanza dalla parete

EFFETTO DELLA VISCOSITÀ

$\mu \neq 0 \rightarrow$ condizione di aderenza \rightarrow STRATO LIMITE



Con la nascita dello strato limite, si avrà una zona di esso più vicina alla parete in cui il flusso è subsonico e una zona in cui il flusso diventa supersonico.

$$u(x, y) \uparrow$$

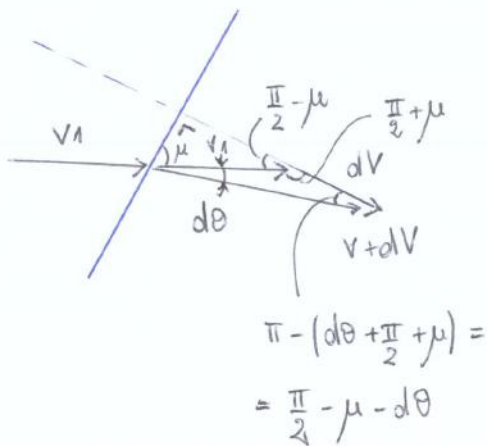
se poi x , $u(y) \uparrow$ con $y \uparrow$

- per $y \leq y^*(x) \rightarrow u(y) < a$
- per $y = y^*(x) \rightarrow u = a$

Le linee di Mach si originano dal punto in cui il flusso diventa sonico e poi si comportano come nel caso precedentemente analizzato

LEGAME $\theta - V$

Consideriamo una singola onda di espansione del fascio:



Si può dimostrare che $dV \perp$ alle linee di Mach.

Applichiamo il TEOREMA DEI SENI:

$$\frac{V+dV}{V} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \mu)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \mu - d\theta)}$$

$$\frac{V+dV}{V} = \frac{\cos \mu}{\cos(\mu + d\theta)} = \frac{\cos \mu}{\cos \mu \cos d\theta - \sin \mu \sin d\theta}$$

ASSUMENDO $d\theta$ piccoli \Rightarrow $\begin{cases} \sin d\theta \approx d\theta \\ \cos d\theta \approx 1 \end{cases}$

in cui:

$$1 + \frac{dV}{V} = \frac{\cos \mu}{\cos \mu - d\theta \sin \mu} = \frac{1}{1 - d\theta \tan \mu}$$

ricorrendo lo sviluppo in serie di Taylor:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

riprendendo lo sviluppo al 1° ordine:

$$\frac{1}{1 - d\theta \tan \mu} \approx 1 + d\theta \tan \mu \Rightarrow 1 + \frac{dV}{V} = 1 + d\theta \tan \mu \Rightarrow \frac{dV}{V} = d\theta \tan \mu$$

Ricordando che $\sin \mu = \frac{1}{M} \Rightarrow \cos \mu = \sqrt{1 - \sin^2 \mu} = \sqrt{1 - \frac{1}{M^2}}$

se invece di considerare un'espansione avessimo considerato una compressione, avremmo ottenuto:

$$d\theta = - \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

Allora, la relazione generale sarà:

$$d\theta = \pm \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \oplus \text{ se espansione} \\ \ominus \text{ se compressione} \end{cases}$$

Integriamo tale relazione per avere le deflessioni finite della corrente:

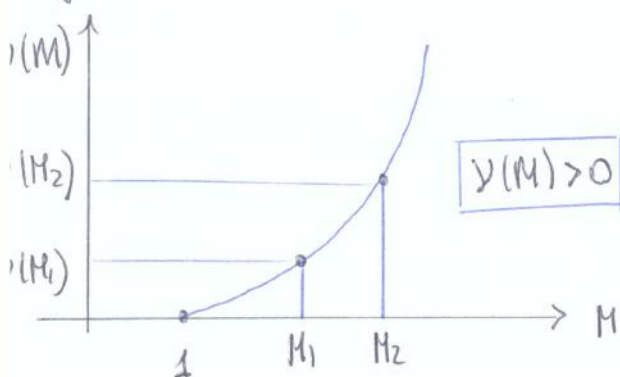
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \pm \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

La funzione integranda è una particolare funzione il cui integrale indefinito prende il nome di FUNZIONE DI PRANDTL-MEYER:

$$v(M) = \int \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} = \left[\frac{\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{\gamma-1}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{\gamma+1}} \cdot \sqrt{M^2-1} \right) - \operatorname{arctg} \left(\sqrt{M^2-1} \right) \right] + C$$

come C si prende il valore che assume $v(M)$ per $M=1 \Rightarrow \boxed{e=0}$

Si esprimendo la funzione $v(M)$:



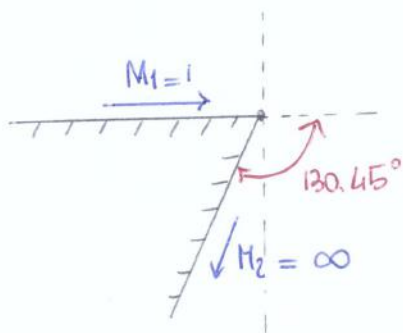
$$\Rightarrow \forall M \rightarrow v(M)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\theta_2 - \theta_1}_{\Delta\theta} = v(M_2) - v(M_1)$$

$$\nu(M) = \left[\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \sqrt{M^2-1} \right) - \operatorname{arctg} \left(\sqrt{M^2-1} \right) \right]$$

$$\nu(M=1) = 0$$

$$\nu(M_2 \rightarrow \infty) \Rightarrow \Delta\theta \rightarrow \pm 130.45^\circ \quad (\text{per } \gamma = 1.4)$$

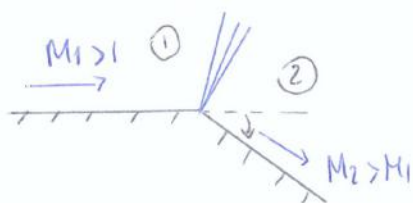


$$\theta_2 - \theta_1 = \nu(M_2) - \nu(M_1)$$

$$\theta_2 = \nu(M_2 \rightarrow \infty) = 130.45^\circ$$

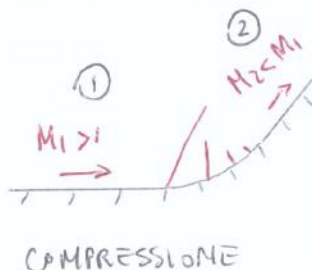
Tale soluzione è solo numerica!
 Non è fisicamente possibile avere tale deflessione, in quanto le correnti scappano prima.

In generale, possiamo presentarsi 4 situazioni:



ESPANSIONE DI PRANDTL-MEYER

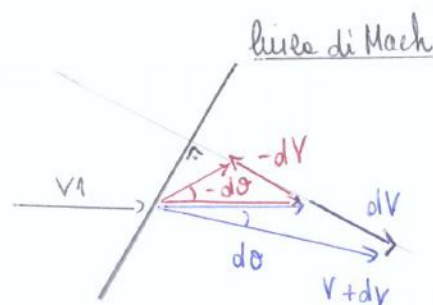
$$\theta > 0$$



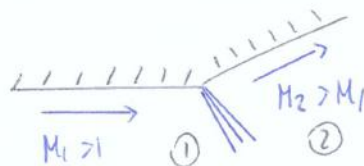
COMPRESSIONE

(successione compr. elem.)

$$\theta < 0$$

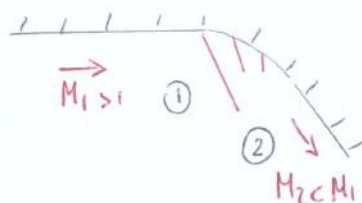


linea di Mach



ESPANSIONE DI PRANDTL-MEYER

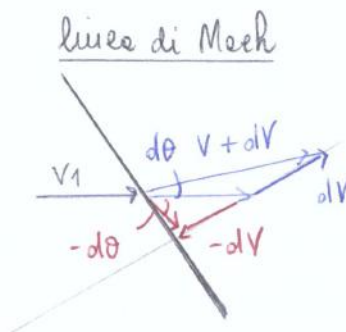
$$\theta > 0$$



COMPRESSIONE

(succ. compr. elementi)

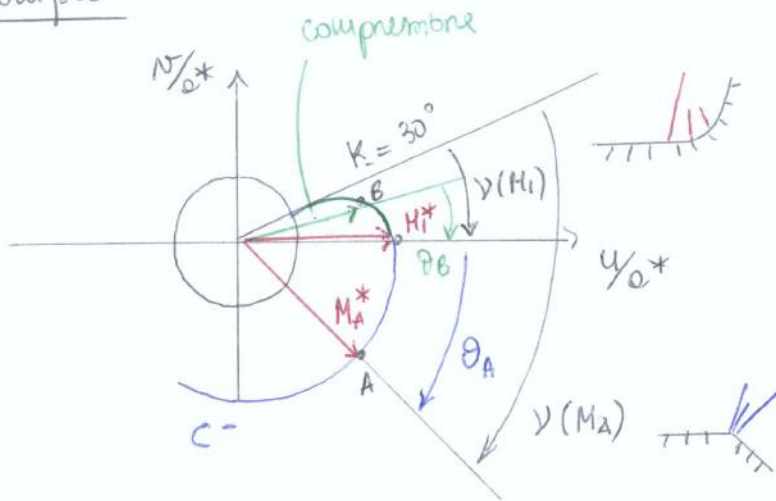
$$\theta < 0$$



linea di Mach

Gli angoli positivi, nel piano fisico, si troveranno nel 1° quadrante.

esempio



$v(M_A)$ deve necessariamente essere $> v(M_1)$

\Rightarrow supponiamo $v(M_A) = 45^\circ$

$$\Rightarrow \theta_A = -v(M_A) + K_- = -45^\circ + 30^\circ$$

$\Rightarrow \theta_A = -15^\circ$ la deflessione si è portata nel 4° quadrante (angolo negativo)

La zona superiore a M_1^* descrive le compressioni elementari, mentre quella inferiore le espansioni.

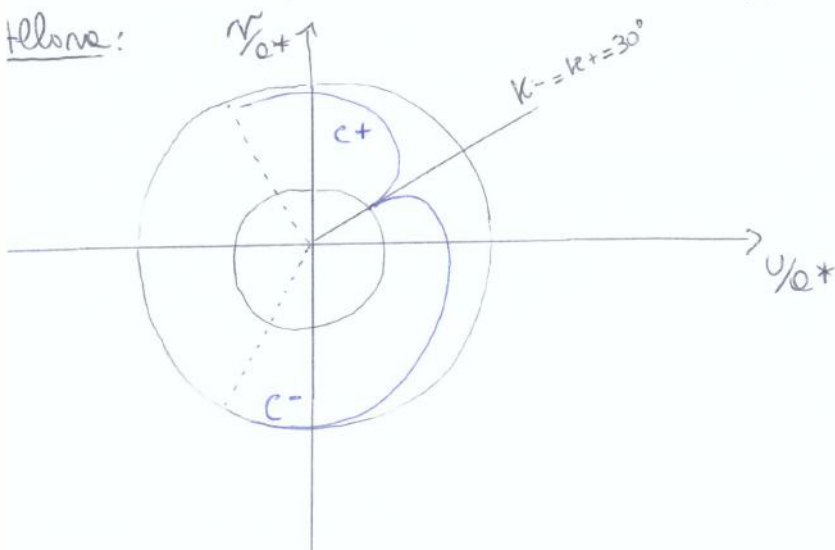
Nel punto B $v(M_B)$ deve essere $< v(M_1)$.

Supponiamo $v(M_B) = 10^\circ$

$$\Rightarrow \theta_B = -v(M_B) + K_- = -10^\circ + 30^\circ = 20^\circ$$

Proviamo a rappresentare le curve C^+ supponendo $K^+ = K^- = 30^\circ$.

risultato:



In tal caso, per lo studio di espansioni e compressioni elementari, la curva C^+ non ha alcun significato fisico. Affinché lo abbia, K_+ deve essere un angolo negativo

supponiamo di considerare $K_+ = -30^\circ$ e $K_- = 30^\circ$. Sappiamo come disegnare la curva C^- , vediamo ora come disegnare la curva C^+ .

PROBLEMA

Arretrato $\vartheta, M_1 \rightarrow$ come calcoliamo $M_2, T_2, p_2, \rho_2, p_{02}, T_{02}$?

- $p_{02} = p_{01} \rightarrow$ ISOENTROPICO

- $T_{02} = T_{01} \rightarrow$ ADIABATICO

- $\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1 = \gamma(M_2) - \gamma(M_1)$

- per una espansione : $\vartheta > 0$

$\Rightarrow M_1 \rightarrow \gamma(M_1)$ tabella

$$\gamma(M_2) = \vartheta + \underset{(+)}{\gamma(M_1)} \Rightarrow \gamma(M_2) > \gamma(M_1)$$

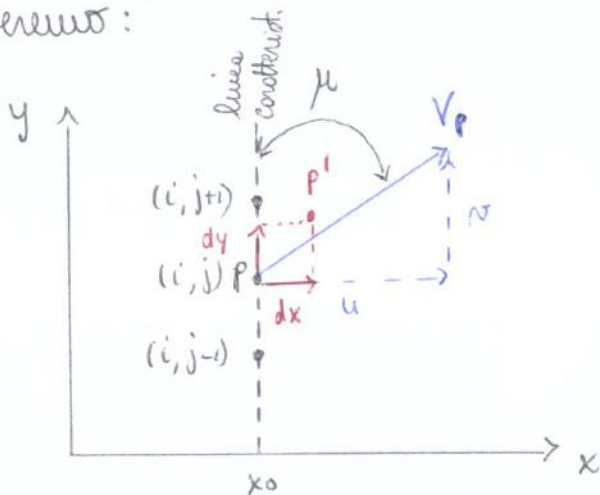
$\Rightarrow \gamma(M_2) \rightarrow M_2$ tabella

\Rightarrow calcoliamo le altre grandezze del campo da:

$$p_{02} = p_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$T_{02} = T_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)$$

Per semplificare la trattazione consideriamo una linea caratteristica particolare, parallela all'asse y , per poi generalizzare i risultati che troveremo:



La velocità V è nota in ogni punto, dunque anche le componenti u, v .

\Rightarrow Le derivate $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ saranno note in ogni punto.

Ciò che è incognito è lo $\frac{\partial v}{\partial x}$. Come procede parlando e controllo delle linee?

$\frac{\partial u}{\partial x}$ si ricava dall'equazione del potenziale della velocità:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial u v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y}}{\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)}$$

\rightarrow possiamo calcolare $\frac{\partial v}{\partial x}$ in ogni punto tranne nel caso in cui la componente di velocità u perpendicolare alla linea caratteristica è pari alla velocità del suono.

\Rightarrow se $u \equiv a$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ INDETERMINATA

\Rightarrow non è possibile calcolare $u(P')$.

Che angolo forma la velocità V_P nel punto P in cui $u \equiv a$?

$$\frac{u}{v} = \frac{a}{v} = \sin \alpha = \frac{1}{M} \Rightarrow \boxed{\alpha = \mu}$$

\rightarrow la linea $x = x_0$ forma un angolo μ con il vettore velocità

\Rightarrow la linea è una LINEA DI MACH

\Rightarrow una linea che in un determinato punto forma un angolo di Mach con la direzione della velocità è una linea attraverso la quale $\frac{\partial v}{\partial x}$ è indeterminata e coincide con una linea di Mach

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \phi_{xx} - \frac{2uv}{a^2} \phi_{xy} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \phi_{yy} = 0 \\ dx \phi_{xx} + dy \phi_{xy} + 0 = du \\ 0 + dx \phi_{xy} + dy \phi_{yy} = dv \end{cases}$$

Per ricavare il valore delle incognite dalla regola di Cramer.
Ad esempio, risolvendo per ϕ_{xy} :

$$\phi_{xy} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \frac{u^2}{a^2} & 0 & 1 - \frac{v^2}{a^2} \\ dx & du & 0 \\ 0 & dv & dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \frac{u^2}{a^2} & -\frac{2uv}{a^2} & 1 - \frac{v^2}{a^2} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix}} = \frac{N}{D}$$

com dx, dy arbitrari
 Per qualunque scelta dx, dy sarà sempre lo stesso valore

scoprendo dx, dy tali da annullare il denominatore $D \Rightarrow \phi_{xy}$ INDETERMINATI
 ϕ_{xy} non è definita in quella particolare direzione dettata da dx, dy
 ma $\phi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}$ indeterminato non ha senso fisicamente

\Rightarrow affinché ϕ_{xy} abbia un suo valore e non sia indeterminato, occorre porre $M=0$.

Conclusioni: 1) Ponendo $D=0 \Rightarrow$ determinazione delle direzioni caratteristiche (curve attraverso le quali le derivate delle proprietà del fluido saranno indeterminate, $\phi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$)

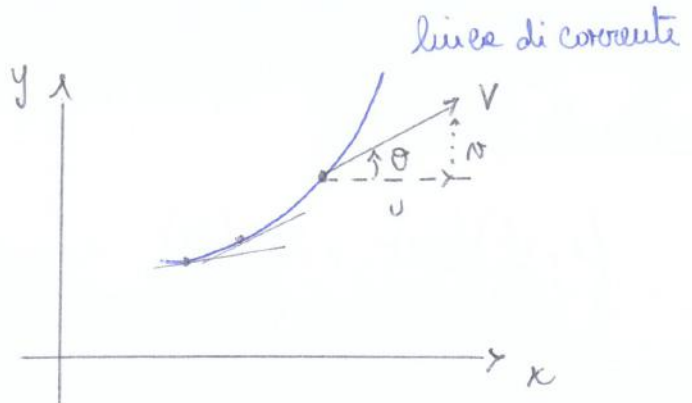
2) Ponendo $M=0 \Rightarrow$ definizione delle EQUAZIONI DI COMPATIBILITÀ, che descrivono come le grandezze del campo evolvono correttamente lungo una linea caratteristica.

⇒ in campo irrotazionale, dato un punto P e noti dx e dy , è sempre possibile calcolare la velocità in prossimità del punto P.

Riprendiamo la relazione:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{con} = \frac{-\frac{u}{a^2} \pm \sqrt{M^2 - 1}}{1 - u^2/a^2}$$

Indichiamo con θ l'inclinazione della velocità V rispetto all'asse x in un determinato punto P.



$$\Rightarrow \begin{cases} u = V \cos \theta \\ v = V \sin \theta \end{cases} \Rightarrow M^2 = \frac{u^2 + v^2}{a^2} = \frac{V^2}{a^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$v^2/a^2 = M^2 = 1/\sin^2 \mu$$

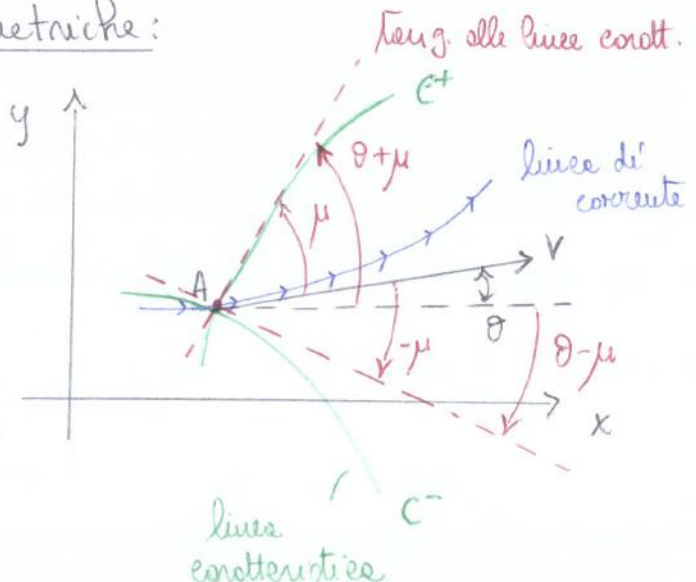
allora:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{con} &= \frac{-\frac{V^2 \cos \theta \sin \theta}{a^2} \pm \sqrt{\frac{V^2}{a^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 1}}{1 - \frac{V^2 \cos^2 \theta}{a^2}} \downarrow = \frac{-\cos \theta \sin \theta \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \mu} - 1}}{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \mu}} = \\ &= \frac{-\frac{\cos \theta \sin \theta}{\sin^2 \mu} \pm \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \mu}{\sin^2 \mu}}}{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \mu}} = \frac{-\frac{\cos \theta \sin \theta}{\sin^2 \mu} \pm \frac{1}{\sin \mu}}{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \mu}} \end{aligned}$$

Dopo varie manipolazioni trigonometriche:

$$\boxed{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{con} = \tan(\theta \mp \mu)}$$

firmato in un punto su una linea di corrente di un campo irrotazionale, è possibile individuare le linee caratteristiche che corrispondenti.



Ricaviamo $\frac{dv}{du}$ dalla relazione determinata annullando il denominatore:

$$\frac{dv}{du} = \frac{-(1 - \frac{u^2}{a^2})}{(1 - \frac{v^2}{a^2})} \frac{dy}{dx}$$

Abbiamo posto $M=0$ per rendere le derivate delle grandezze del flusso finite, quando $D=0 \Rightarrow$ dobbiamo considerare le direzioni lungo le linee caratteristiche, perciò:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\text{car}}$$

Allora:

$$\frac{dv}{du} = - \frac{(1 - \frac{u^2}{a^2})}{(1 - \frac{v^2}{a^2})} \left[\frac{-\frac{uv}{a^2} \pm \sqrt{\frac{u^2+v^2}{a^2} - 1}}{1 - \frac{u^2}{a^2}} \right] = \frac{\frac{uv}{a^2} \mp \sqrt{\frac{u^2+v^2}{a^2} - 1}}{1 - \frac{v^2}{a^2}}$$

Ricordando che:

$$\left. \begin{aligned} u &= V \cos \theta \\ v &= V \sin \theta \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{d(V \sin \theta)}{d(V \cos \theta)} = \frac{M^2 \cos \theta \sin \theta \mp \sqrt{M^2 - 1}}{1 - M^2 \sin^2 \theta}$$

Dopo qualche passaggio algebrico:

$$\boxed{d\theta = \mp \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}} \quad \text{equazione di compatibilità}$$

L'equazione descrive, fissato il valore di M , la variazione di velocità per una variazione di direzione delle correnti lungo le direzioni caratteristiche

$$\left. \begin{aligned} d\theta &= -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \\ d\theta &= \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{integrando} \quad \begin{cases} \theta = \nu(M) + K^+ & (\text{I}^\circ \text{ famiglia } e^+) \\ \theta = -\nu(M) + K^- & (\text{II}^\circ \text{ famiglia } e^-) \end{cases}$$

L'annullarsi del numeratore porta a definire le equazioni di compatibilità che possono essere ricondotte alle equazioni utilizzate per studiare le espansioni e compressioni elementari

\Rightarrow le equazioni delle linee caratteristiche.

Tra il campo ④ e l'ambiente esterno esiste una differenza di pressione
 ⇒ nasce una SLIP LINE inclinata localmente di θ che garantisce $p_4 = p_a$
 e ammette qualsiasi altra discontinuità

Come calcoliamo il campo ④?

$$M_1, p_1, p_a \text{ ineguali} \rightarrow p_{01} = p_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = p_{04} \rightarrow \text{ESPANSIONE ISENTROPICA}$$

$$p_{04} = p_4 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Rightarrow M_4$$

\uparrow
 p_a

Altre:

$$\left. \begin{array}{l} M_4 \rightarrow v(M_4) \\ M_1 \rightarrow v(M_1) \end{array} \right\} \rightarrow v(M_4) - v(M_1) = \Delta\theta \rightarrow \theta, \text{ deflessione locale della slip line}$$

La slip line è solo localmente inclinata di θ , in quanto è seguito dall'iterazione di quest'ultima con le onde semplici di espansione riflesse, una curva.

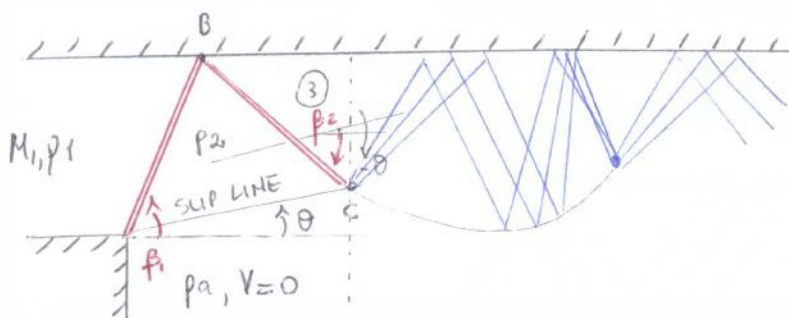
Dopo la prima riflessione, la corrente si è espansa troppo e $p < p_a$.

⇒ le onde che si riflettono sulla slip line sono onde di compressione semplici e, riflettendo sulla parete, convergono in un punto.

+ valle delle compressioni, il flusso torna a $v = v_1, p = p_1 > p_a$

⇒ tutta la struttura descritta si ripete nuovamente e si genera dunque una struttura a lobi

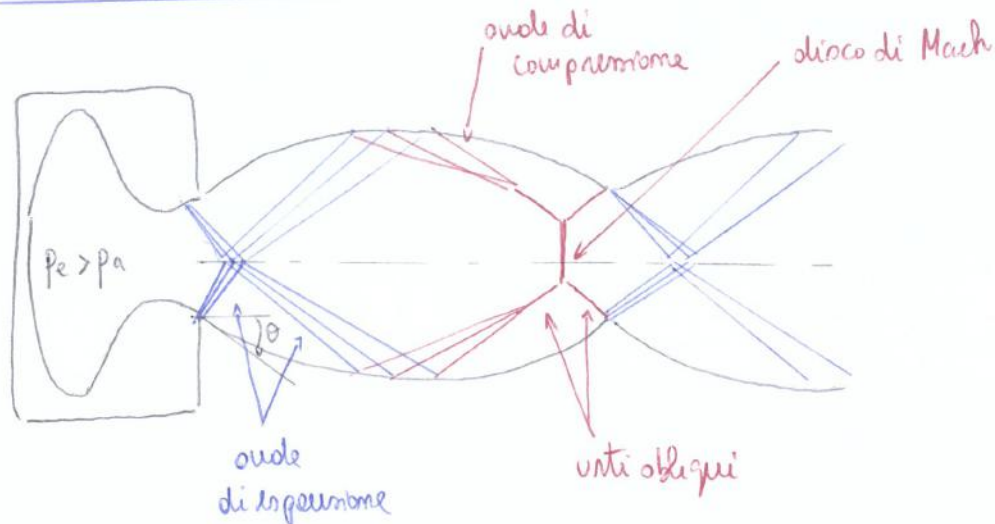
GETTO SOVRAESPANSO



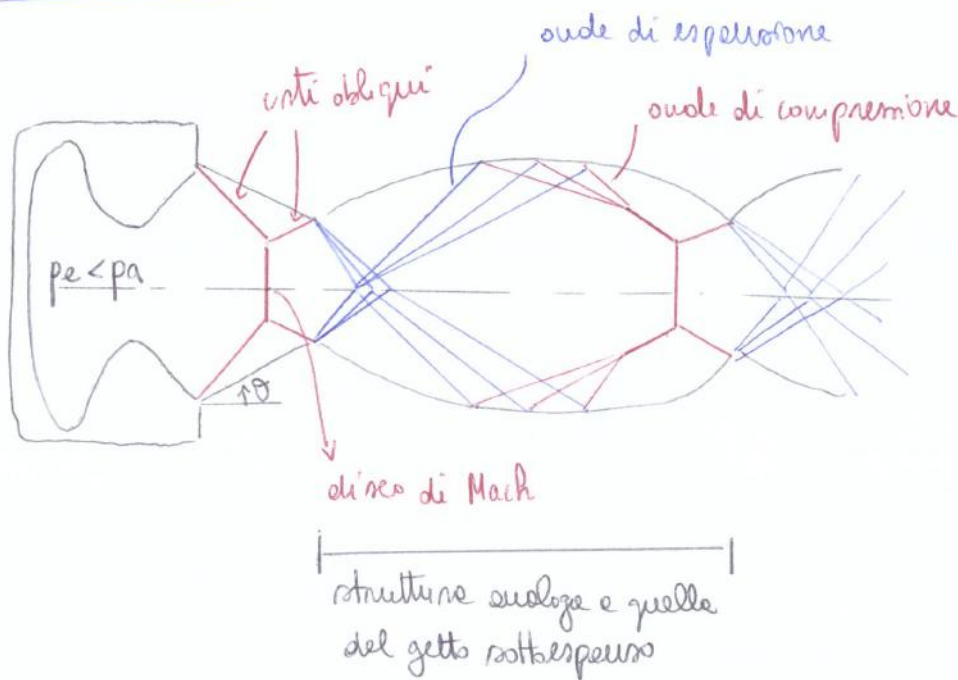
In tal caso, poiché $p_1 < p_a$ si crea una zona di espansione dello spigolo si genera un vortice obliquo.

Supponiamo che in B si verifichi una riflessione regolare ($\theta < \theta_{max}(M_2)$)

GETTO SOTTOESPANSO



GETTO SOVRAESPANSO



Tale trattazione è comunque semplificata, in quanto si considerano le linee di espansione/compressione rette anche dopo la loro intersezione. In realtà queste si incurvano e assumono configurazioni più complesse.

Allonar:

$$C_p = \left(\frac{p}{p_1} - 1 \right) \frac{1}{\gamma/2 M_1^2}$$

Per cui:

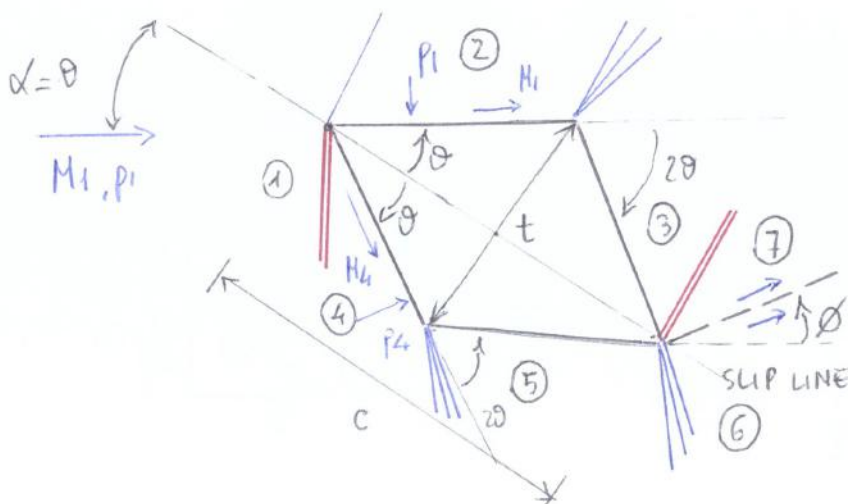
$$C_D = \frac{(p_2 - p_1) - (p_3 - p_1)}{p_1 \gamma/2 M_1^2} \frac{t}{e} = (C_{p2} - C_{p3}) \frac{t}{e} = (C_{p2} - C_{p3}) \tan \theta$$

$$\Rightarrow C_D = (C_{p2} - C_{p3}) \frac{t}{e} = (C_{p2} - C_{p3}) \tan \theta$$

$C_L = 0$ \rightarrow il contributo del dorso è uguale e opposto a quello del ventre

\Rightarrow Nel supersonico cade il paradosso di D'Alembert, in quanto per $\mu = 0 \rightarrow D \neq 0$

PROFILO A DIAMANTE $\alpha \neq 0, \alpha = 0$

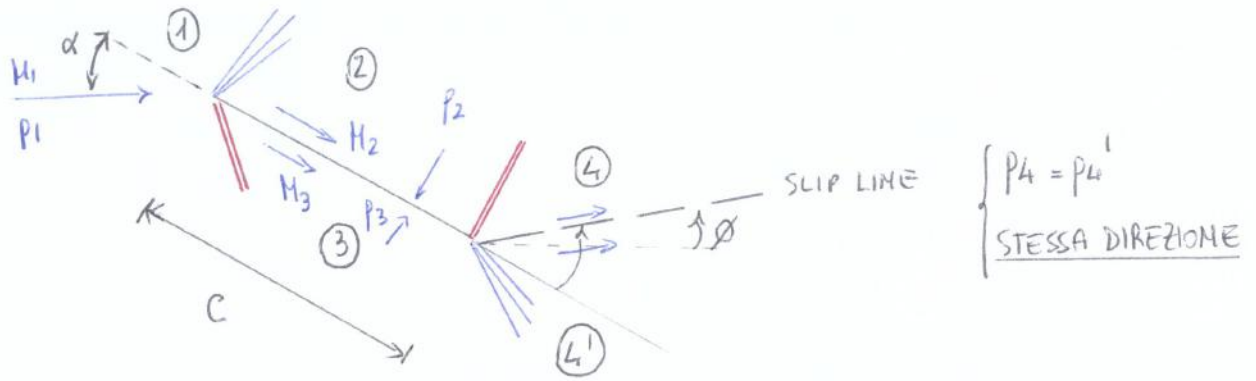


La parte dorsale del profilo risulta allineata con la corrente a monte \Rightarrow si genererà esclusivamente una linea di Mach, per effetto di una piccola perturbazione

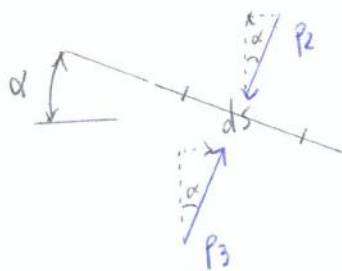
Poiché nel campo ⑥ e ⑦ il flusso proviene da storie diverse e dunque avrà caratteristiche diverse \rightarrow nasce una SLIP LINE che garantisce $p_6 = p_7$

$$\Rightarrow C_{DW} = f(M_1, \theta, \alpha)$$

Partiamo la piana piana per l'incidenza:



Calcoliamo il CL e il Cow:



$$\begin{cases} dL = (p_3 - p_2) \cos \alpha \cdot (ds \cdot 1) = (p_3 - p_2) (ds \cdot 1) \cos \alpha \\ dD = (p_3 - p_2) (ds \cdot 1) \sin \alpha \end{cases}$$

Allora:

$$\left. \begin{aligned} L &= (p_3 - p_2) (e \cdot 1) \cos \alpha > 0 \uparrow \\ D_w &= (p_3 - p_2) (e \cdot 1) \sin \alpha > 0 \rightarrow \end{aligned} \right\} \mu = 0, \text{ ma } L \neq 0, D \neq 0 \rightarrow \text{CADE PARADOSSO DI D'ALFIMBERT}$$

$$\Rightarrow C_L = \frac{(p_3 - p_1) - (p_2 - p_1)}{(e \cdot 1) \frac{1}{2} \rho_1 M_1^2} \cos \alpha = (C_{p3} - C_{p2}) \cos \alpha$$

$$C_D = (C_{p3} - C_{p2}) \sin \alpha$$

Quindi:

$$C_L = (C_{p3} - C_{p2}) \cos \alpha$$

$$C_D = (C_{p3} - C_{p2}) \sin \alpha$$

⑤ $\rightarrow 1,4 \Rightarrow P_4 > P_2$

Alloca:

$$\frac{P_4}{P_1} = f(\underbrace{M_1 \sin \beta'}_{M'_{1m}})$$

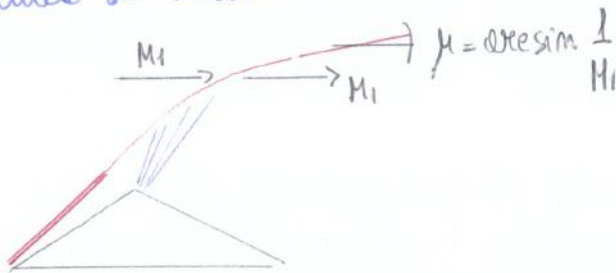
poiché localmente, pensando da ① e ② lungo le linee di corrente ① si ha un urto obliquo di inclinazione β' .

$$\frac{P_2}{P_1} = f(\underbrace{M_1 \sin \beta}_{M_{1m}})$$

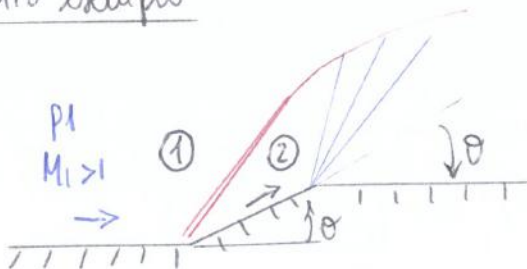
considerando il pannello da ① e ② lungo le linee di corrente ②

Poiché $\frac{P_4}{P_1} < \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow \sin \beta' < \sin \beta \Rightarrow \boxed{\beta' < \beta}$
 $M_1 = \text{cost}$

Quando comincia l'incidenza con le linee di espansione, l'urto curva in continuità fino a che, a una distanza sufficiente dalla parete, diventerà una linea di Mach



Altro esempio



Introduciamo il POTENZIALE DI PERTURBAZIONE:

$\phi \rightarrow$ associato a u', v', w' , con: $\frac{\partial \phi}{\partial x} = u', \frac{\partial \phi}{\partial y} = v', \frac{\partial \phi}{\partial z} = w'$

Allora:

$\Phi(x, y, z) = V_\infty x + \phi(x, y, z)$ potenziale totale della velocità

$V_x = V_\infty + u' = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = V_\infty + \frac{\partial \phi}{\partial x} = V_\infty + u'$, con $\frac{\partial \phi}{\partial x} = u'; \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial u'}{\partial x}$

$V_y = v' = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$, con $\frac{\partial \phi}{\partial y} = v'; \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial v'}{\partial y}$

$V_z = w' = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$, con $\frac{\partial \phi}{\partial z} = w'; \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial w'}{\partial z}$

Indichiamo con:

$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_x, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \Phi_{xx} \dots \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \Phi_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \Phi_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; \Phi_{zz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$
 $\Phi_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}; \Phi_{xz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}; \Phi_{yz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z}$

Prendiamo l'eq. del potenziale della velocità, all'interno della quale sostituiamo la funzione potenziale $\Phi(x, y, z)$:

$\left(1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2}\right) \Phi_{xx} + \left(1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2}\right) \Phi_{yy} + \left(1 - \frac{\Phi_z^2}{a^2}\right) \Phi_{zz} - 2 \frac{\Phi_x \Phi_y}{a^2} \Phi_{xy} - 2 \frac{\Phi_x \Phi_z}{a^2} \Phi_{xz} - 2 \frac{\Phi_y \Phi_z}{a^2} \Phi_{yz} = C$

Moltiplichiamo ora e dx e dz per a^2 e sostituiamo a $\Phi(x, y, z) = V_\infty x + \phi(x, y, z)$:

$\left[a^2 - (V_\infty + u')^2\right] \frac{\partial u'}{\partial x} + (a^2 - v'^2) \frac{\partial v'}{\partial y} + (a^2 - w'^2) \frac{\partial w'}{\partial z} - 2(V_\infty + u')v' \frac{\partial u'}{\partial y} - 2(V_\infty + u')w' \frac{\partial u'}{\partial z} - 2v'w' \frac{\partial v'}{\partial z} = 0$

A questo punto dobbiamo ricavare a^2 . Poiché fluido ISENTROPICO e IRROTAZIONALE e STAZIONARIO $\Rightarrow H = \text{cost} = h + \frac{V^2}{2}$

$$2(V_\infty + u') \rho' \frac{\partial u'}{\partial y} + 2(V_\infty + u') w' \frac{\partial u'}{\partial z} + 2 \rho' w' \frac{\partial v'}{\partial z} = 0$$

$$(V_\infty + u') \rho' \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + (V_\infty + u') w' \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \rho' w' \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right) = 0$$

$$M_\infty^2 \left[\frac{\rho'}{V_\infty} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \frac{u' v'}{V_\infty^2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \frac{w'}{V_\infty} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \frac{u' w'}{V_\infty^2} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \frac{\rho' w'}{V_\infty^2} \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right) \right] = 0$$

$$M_\infty^2 \left[\frac{\rho'}{V_\infty} \left(1 + \frac{u'}{V_\infty} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \frac{w'}{V_\infty} \left(1 + \frac{u'}{V_\infty} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \frac{\rho' w'}{V_\infty^2} \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right) \right] = 0$$

Considerando tutti i riarrangiamenti fatti, l'equazione del potenziale delle velocità può ricrivarsi nel seguente modo:

$$\begin{aligned} (1 - M_\infty^2) \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= M_\infty^2 \left[(\beta + 1) \frac{u'}{V_\infty} + \left(\frac{\beta + 1}{2} \right) \frac{u'^2}{V_\infty^2} + \left(\frac{\beta - 1}{2} \right) \left(\frac{v'^2 + w'^2}{V_\infty^2} \right) \right] \frac{\partial u'}{\partial x} + \\ &+ M_\infty^2 \left[(\beta - 1) \frac{u'}{V_\infty} + \left(\frac{\beta + 1}{2} \right) \frac{u'^2}{V_\infty^2} + \left(\frac{\beta - 1}{2} \right) \left(\frac{w'^2 + v'^2}{V_\infty^2} \right) \right] \frac{\partial v'}{\partial y} + \\ &+ M_\infty^2 \left[(\beta - 1) \frac{u'}{V_\infty} + \left(\frac{\beta + 1}{2} \right) \frac{w'^2}{V_\infty^2} + \left(\frac{\beta - 1}{2} \right) \left(\frac{u'^2 + v'^2}{V_\infty^2} \right) \right] \frac{\partial w'}{\partial z} + \\ &+ M_\infty^2 \left[\frac{\rho'}{V_\infty} \left(1 + \frac{u'}{V_\infty} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \frac{w'}{V_\infty} \left(1 + \frac{u'}{V_\infty} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \frac{\rho' w'}{V_\infty^2} \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

L'equazione è esatta ESATTA per flussi IRROTAZIONALI e ISOENTROPICI e non sono neanche state fatte ipotesi sull'entità delle perturbazioni, possono cioè essere piccole o grandi.

L'equazione è inoltre applicabile in tutto il campo di variazione di Mach, dal SUBSONICO all'IPERSONICO ed è NON LINEARE.

Per linearizzare, facciamo le seguenti approssimazioni:

$$u', v', w' \ll V_\infty \Rightarrow \frac{u'}{V_\infty}, \frac{v'}{V_\infty}, \frac{w'}{V_\infty} \ll 1; \left(\frac{u'}{V_\infty} \right)^2, \left(\frac{v'}{V_\infty} \right)^2, \left(\frac{w'}{V_\infty} \right)^2 \ll \ll 1 \quad \begin{array}{l} \text{PICCOLE} \\ \text{PERTURBAZIONI} \end{array}$$

CAMPO DI APPLICABILITÀ: $0 \leq M_\infty \leq 0.8$ (alto e basso subsonico); $1.2 \leq M_\infty \leq 5$ (supers.)

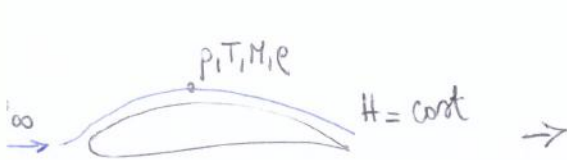
COEFFICIENTE DI PRESSIONE C_p

Dato una distribuzione di pressione misurata in campo incompressibile, vediamo come, mediante la teoria linearizzata, sia possibile scegliere quella associata a un flusso compressibile.

Espressione del C_p nella teoria linearizzata

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} \quad \left. \begin{aligned} \rho_\infty V_\infty^2 &= \rho_\infty \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} a_\infty^2 = \rho_\infty M_\infty^2 \gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty} = \gamma p_\infty M_\infty^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow C_p = \frac{\gamma}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right)$$

Come esprimiamo $\frac{p}{p_\infty}$?



Le particelle fluide che parte dall'infinito a monte subisce una EVOLUZIONE ISOENTROPICA.
Tale trattazione vale sia in campo subsonico che supersonico \rightarrow linearizzando non è come tutti me' esprimiamo.

$$\Rightarrow \frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{p}{p_\infty} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{V^2}{a_\infty^2} \right)$$

Perché il flusso è ONDENTRIPICO: $h + \frac{V^2}{2} = h_\infty + \frac{V_\infty^2}{2}$ con $\begin{cases} h = \frac{\gamma R}{\gamma-1} T = \frac{a^2}{\gamma-1} \\ h = c_p T \end{cases}$

$$T + \frac{V^2}{2c_p} = T_\infty + \frac{V_\infty^2}{2c_p}$$

$$\Rightarrow T - T_\infty = \frac{V_\infty^2 - V^2}{\frac{\gamma R}{\gamma-1} M} \Rightarrow \frac{T}{T_\infty} - 1 = \frac{V_\infty^2 - V^2}{\frac{\gamma}{\gamma-1} a_\infty^2}$$

Ricordando che $V^2 = (V_\infty + u)^2 + v^2 + w^2$

$$\Rightarrow \frac{T}{T_\infty} = 1 + \frac{V_\infty^2 - (V_\infty^2 + u^2 + 2V_\infty u + v^2 + w^2)}{\frac{\gamma}{\gamma-1} a_\infty^2} \rightarrow \boxed{\frac{T}{T_\infty} = 1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} (2uV_\infty + u^2 + v^2 + w^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{p_\infty} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} (2uV_\infty + u^2 + v^2 + w^2) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{2u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{V_\infty^2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$E \ll 1$

PIECOLE PERTURBAZIONI

$$\left. \begin{array}{l} u' \ll V_\infty \\ \text{tan } \theta \approx \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{df}{dx} \approx \frac{v'}{V_\infty} = \theta \Rightarrow \boxed{v' = V_\infty \frac{df}{dx}}$$

Riconoscendo che $v' = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial y} = V_\infty \frac{df}{dx}}$

Riprendiamo l'equazione del potenziale della velocità per flussi subsonici compressibili, linearizzate:

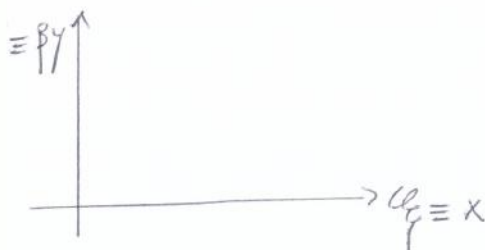
$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{per } 0 \leq M_\infty \leq 0.8$$

Indichiamo con $\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$, allora:

$$\boxed{\beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0} \quad \text{per flusso compressibile}$$

Come si trasforma l'equazione, in un opportuno piano di trasformazione, per rappresentare il flusso incompressibile?

Si dimostra che il piano opportuno ha come asse $\xi \equiv x$ e come ordinata $\eta = \beta y$



In tale piano è definito un nuovo potenziale nel seguente modo:

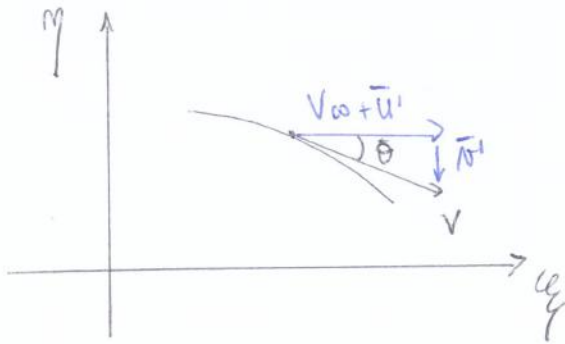
$$\boxed{\bar{\phi}(\xi, \eta) = \bar{\phi}(\xi(x), \eta(y)) = \beta \phi(x, y)}$$

POTENZIALE DI PERTURBAZIONE NEL PIANO TRASFORMATO

Calcoliamo le derivate necessarie:

$$\bullet \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \frac{\partial \eta}{\partial y} = \beta$$

$$\bullet \phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \xi} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = \frac{1}{\beta} \bar{\phi}_\xi$$



- FORMA PROFILO ASSEGNATA

$\eta = \eta(\xi)$ legge di distribuzione degli spessori

\Rightarrow sono definite le $\frac{d\eta}{d\xi}$, pendenze locali

- CONDIZIONE DI TANGENZA ($\mu=0$)

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \tan \theta = \frac{\bar{w}'}{V_\infty + \bar{u}'}$$

- PICCOLE PERTURBAZIONI

$$\left. \begin{array}{l} \bar{u}' \ll V_\infty \\ \tan \theta \approx \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d\eta}{d\xi} \approx \frac{\bar{w}'}{V_\infty} = \theta \Rightarrow \bar{w}' = V_\infty \frac{d\eta}{d\xi}$$

poiché $\bar{w}' = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta} = V_\infty \frac{d\eta}{d\xi}}$ (B) piano $\xi-\eta$

uguagliando (A) e (B):

$$V_\infty \frac{d\eta}{d\xi} = V_\infty \frac{df}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{df}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}}$$

le pendenze locali nei due piani si conservano
 \Rightarrow si conserva la forma del profilo

allora:

$$\bar{w}' = V_\infty \frac{d\eta}{d\xi}, \bar{w}' = V_\infty \frac{df}{dx} \Rightarrow \boxed{\bar{w}' = \bar{w}'}$$

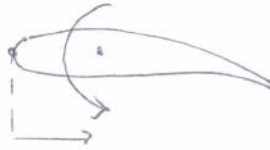
la velocità di perturbazione verticale non cambia passando da un piano all'altro

Come esprimiamo dunque il c_{pe} in funzione del c_{pi} ?

$$c_{pe} = -\frac{2u'}{V_\infty} = -\frac{2}{V_\infty} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \right) = -\frac{2}{V_\infty} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} \right) \quad \text{nel piano trasformato}$$

Anche il momento di beccheggio subisce una modifica analogica:

$$C_{Hi} = \int_0^1 (C_{pe_i} - C_{pu_i}) \left(\frac{x}{c}\right) d\left(\frac{x}{c}\right)$$



$$C_{Hc} = \frac{C_{Hi}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

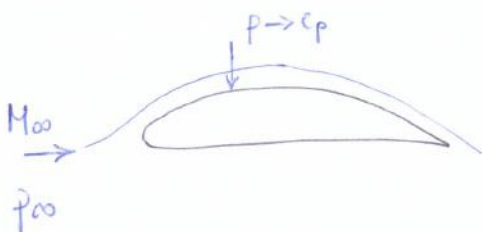
Come cambia la componente u' passando da un piano all'altro?

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}' &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ u' &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow u' = \frac{1}{\beta} \bar{u}' \Rightarrow \boxed{u' > \bar{u}'}$$

passando dal piano incompressibile al piano compressibile la velocità di perturbazione orizzontale aumenta

CORREZIONE DI LAITONE PER IL C_p



La correzione sfrutta il mach locale della corrente:

$$C_{pc} = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1 - M^2}}$$

poiché dall'infinito a monte l'evoluzione è isentropica:

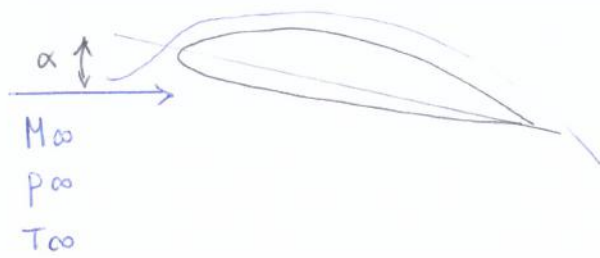
$$H = \text{cost}$$

$$T_{0\infty} = T_0 = \text{cost} \Rightarrow T_\infty \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right) = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \Rightarrow M = f(M_\infty)$$

Allora:

$$C_{pe} = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + \left[M_\infty^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right) / 2 \sqrt{1 - M_\infty^2} \right] C_{pi}}$$

CALCOLO DEL MACH CRITICO DI UN PROFILO ALARE



Poiché l'evoluzione lungo una qualunque linea di corrente è isentropica (fuori dallo strato limite):

$$T_0 = \text{cost}$$

$$p_0 = \text{cost}$$

Allora:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_0}{p_\infty} &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \\ \frac{p_0}{p} &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

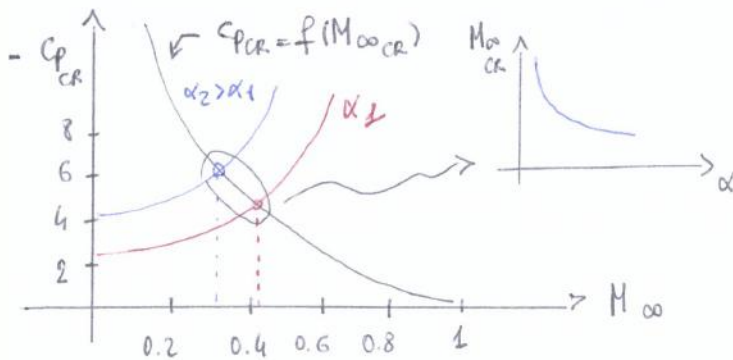
$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) \Rightarrow C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left[\left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right]$$

Se attorno al profilo si raggiunge la condizione sonora $\Rightarrow M=1$

$$\Rightarrow C_{p_{CR}} = \frac{2}{\gamma M_{\infty CR}^2} \left[\left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty CR}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right]$$

ricavato dall'evoluzione isentropica

$$\Rightarrow C_{p_{CR}} = f(\gamma, M_{\infty CR})$$



Per cui, dato un profilo sregolato e un α sregolato

$\Rightarrow C_{p_{min i}}$ è noto (ottenuto da misurazioni)

$$\Rightarrow C_{p_e} = \frac{C_{p_{min i}}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

Procedendo a variare il M_∞ nella formula del $C_{p_{min i}}$, si ottiene una curva che, intersecata con $C_{p_e} = f(M_{\infty CR})$, fornisce il $M_{\infty CR}$ del profilo ad una data incidenza

⇒ le pendenze locali, ovvero le tangenti al profilo punto per punto, sarà:

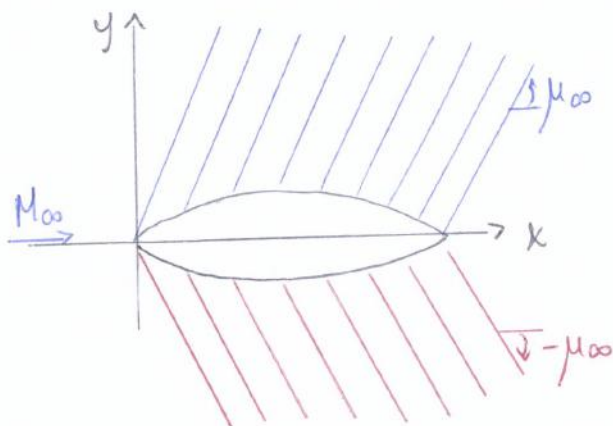
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0 \text{ perché } M_\infty > 1$$

Riconfermando che:

$$\sin \mu_\infty = \frac{1}{M_\infty} \rightarrow \tan \mu_\infty = \frac{\sin \mu_\infty}{\cos \mu_\infty} = \frac{\sin \mu_\infty}{\sqrt{1 - \sin^2 \mu_\infty}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{M_\infty^2} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \tan \mu_\infty = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

Allora:



Le linee caratteristiche saranno rette parallele, poiché il campo è uniforme, tutte inclinate di un angolo μ_∞ . Ciò è frutto della linearizzazione, poiché nella teoria esatta sappiamo che le linee caratteristiche sono inclinate di un angolo μ dipendente dal Mach locale.

VENTRE

Si dimostra che la forma più appropriata della soluzione è del tipo:

$$\phi = g(x + \lambda y), \quad f = 0$$

Im tal caso $\phi = \text{cost}$ nel piano x-y corrisponde a volere:

$$x + \lambda y = \text{cost} \Rightarrow y = \frac{\text{cost} - x}{\lambda} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\lambda} = -\tan \mu_\infty$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\tan \mu_\infty = -\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

VENTRE

$$\phi(x,y) = g(x+\lambda y)$$

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{1} \quad u' &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial [g(x+\lambda y)]}{\partial (x+\lambda y)} \frac{\partial (x+\lambda y)}{\partial x} = g' \cdot 1 \\ \textcircled{2} \quad v' &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial [g(x+\lambda y)]}{\partial (x+\lambda y)} \frac{\partial (x+\lambda y)}{\partial y} = g' \cdot \lambda \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{u' = \frac{v'}{\lambda}}$$

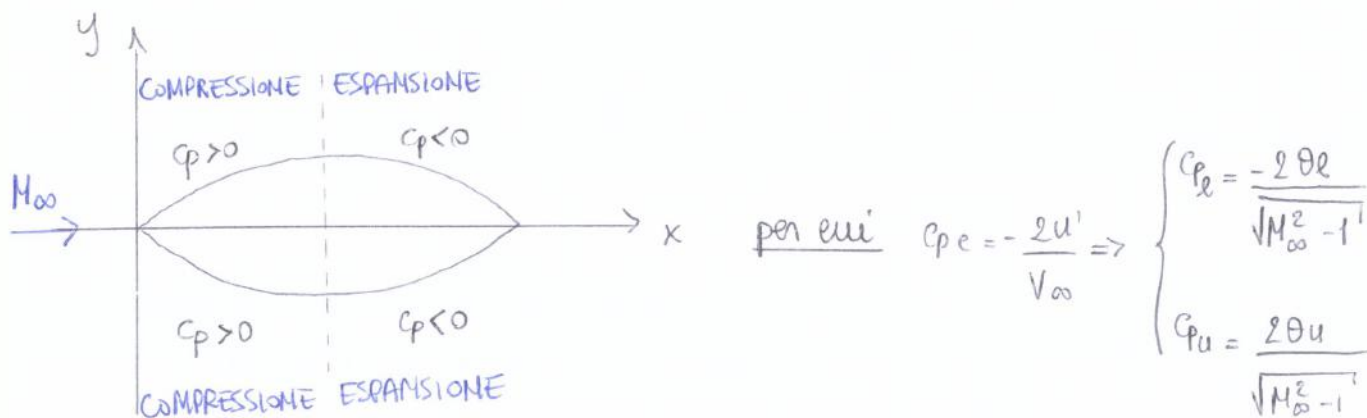
CONDIZIONE DI TANGENZA

$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{v'}{V_{\infty} + u'}$ poiché piccole perturbazioni $\tan \theta \approx \theta$
 $u' \ll V_{\infty}$

$$\Rightarrow \tan \theta \approx \theta = \frac{v'}{V_{\infty}} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \boxed{v' = V_{\infty} \theta}$$

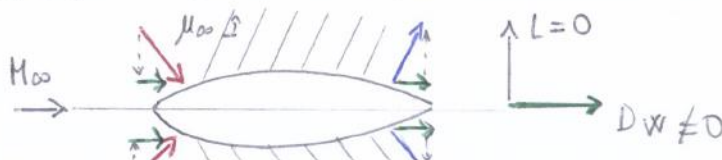
Per cui:

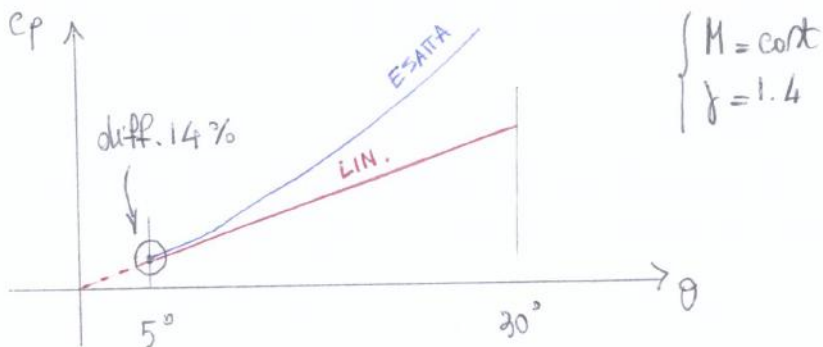
$$u' = \frac{V_{\infty} \theta}{\lambda} \Rightarrow \boxed{c_p = -\frac{2u'}{V_{\infty}} = -\frac{2\theta}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}}$$



3) convenzionalmente, quando il $c_p < 0 \rightarrow$ freccia verso l'esterno
 $c_p > 0 \rightarrow$ freccia verso l'interno

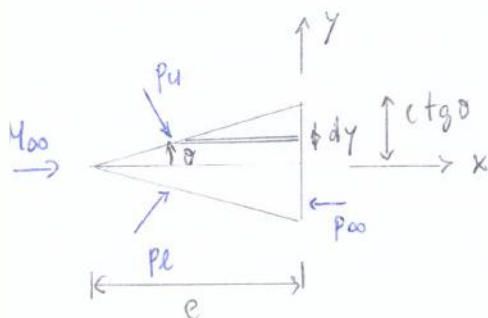
Le forze di pressione però è sempre dirette perpendicolarmente e nel verso delle vortici. La convenzione però si presta molto bene alle visualizzazioni dei contributi alle forze perducibili.





$$\begin{cases} M = c \cos t \\ \gamma = 1.4 \end{cases}$$

Poleolo del C_D nella teoria linearizzata:



$$dD = \rho (p_u \sin \theta (ds \cdot i) - p_l (dy \cdot i))$$

$$D = 2(p_u - p_l) \int_0^{ctg \theta} dy = 2(p_u - p_l) c \operatorname{tg} \theta$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 (c \cdot i)} = \frac{4(p_u - p_l) \operatorname{tg} \theta}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2} = \frac{4(p_u - p_l)}{\rho_{\infty} M_{\infty}^2} (\operatorname{tg} \theta)$$

$$C_D = \frac{4}{\gamma M_{\infty}^2} \left(\frac{p_u - p_l}{p_{\infty}} \right) \operatorname{tg} \theta = \underbrace{\frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \left(\frac{p_u - 1}{p_{\infty}} \right)}_{C_{p_u}} \cdot \underbrace{2 \operatorname{tg} \theta}_{\approx \theta}$$

Supponendo che sulla
cassa spina p_{∞}

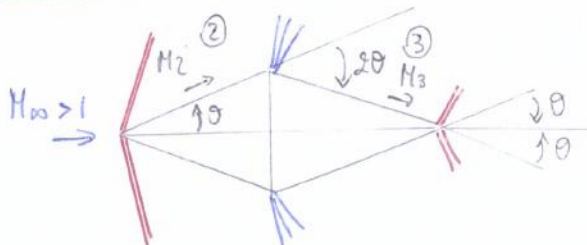
$$\Rightarrow C_D = 2 C_{p_u} \theta \Rightarrow$$

$$C_D = \frac{4 \theta^2}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}$$

$$C_L = 0$$

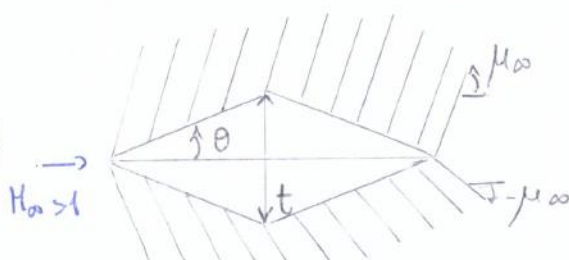
PROFILO A DIAMANTE COM $\alpha = 0$

TEORIA ESATA
(unto esperimento)



$$\Delta \theta = \gamma (M_3) - \gamma (M_2)$$

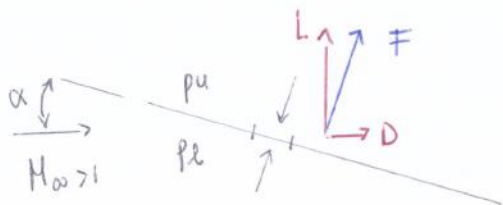
TEORIA LINEARIZZATA



Allora:

$$c_p = \pm \frac{2\sigma}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \pm \frac{2\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad \left\{ \begin{array}{l} + \text{ compressione} \\ - \text{ espansione} \end{array} \right.$$

Calcoliamo il C_L e il C_D per la teoria linearizzata:



La risultante delle forze di pressione agenti su una piastra piana è perpendicolare alla piastra stessa

$$F = (p_l - p_u) (c \cdot l) \rightarrow C_F = \frac{F}{\rho_\infty (c \cdot l)}$$

$$\begin{cases} L = F \cos \alpha \\ D = F \sin \alpha \end{cases} \quad \text{per la teoria esatta}$$

nel caso di piccole perturbazioni: $\cos \alpha \rightarrow 1$
 $\sin \alpha \rightarrow \alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} L \approx F \\ D \approx F \alpha \approx L \alpha \end{cases}$$

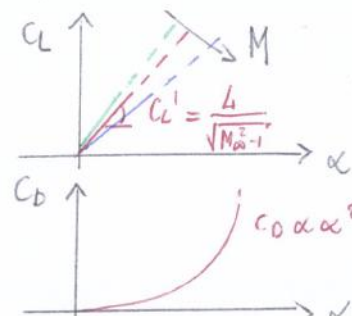
Allora:

$$C_L = \frac{F \cos \alpha}{\rho_\infty (c \cdot l)} = \frac{(p_l - p_u) \cos \alpha}{\rho_\infty (c \cdot l)} = (c_{p_l} - c_{p_u}) \cos \alpha$$

$$C_D = \frac{F \sin \alpha}{\rho_\infty (c \cdot l)} = (c_{p_l} - c_{p_u}) \sin \alpha$$

piccole perturbazioni: $\rightarrow C_L \approx (c_{p_l} - c_{p_u}); C_D \approx C_L \cdot \alpha = (c_{p_l} - c_{p_u}) \alpha$

$$\begin{cases} c_{p_l} = \frac{2\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \\ c_{p_u} = \frac{-2\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_L = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \\ C_D = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \end{cases}$$



\rightarrow all'aumentare della velocità $c_l' \downarrow$

\Rightarrow profilo meno portante

Nella situazione reale la forza sarà posizionata nel centro di pressione x_{cp} . Possiamo pensare di trasportare la forza risultante F al bordo di attacco, a patto di considerare il corrispondente momento di trasporto M_A . Volendo poi spostare il sistema di forze nel fuoco del profilo, dovremo considerare il momento focale:

$$M_o = M_A + F x_o \approx M_A + L x_o \quad \text{nella teoria linearizzata}$$

Adimensionalizzandolo:

$$C_{M_o} = C_{M_A} + C_L \frac{x_o}{c} \Rightarrow C_{M_o} = -\frac{2\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{x_o}{c}$$

Come ricaviamo la coordinata del fuoco del profilo?

Sfruttando la proprietà focale:

$$\frac{\partial C_{M_o}}{\partial \alpha} = -\frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{x_o}{c} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{x_o}{c} = \frac{1}{2}}$$

in un flusso supersonico il fuoco della pancia si sposta da $\frac{x_o}{c} = \frac{1}{4}$ a $\frac{x_o}{c} = \frac{1}{2}$.

Sostituendo $\frac{x_o}{c}$ in C_{M_o} :

$$\boxed{C_{M_o} = 0} \rightarrow \text{risultato valido per tutti i corpi simmetrici bidimensionali, anche nell'incompressibile.}$$

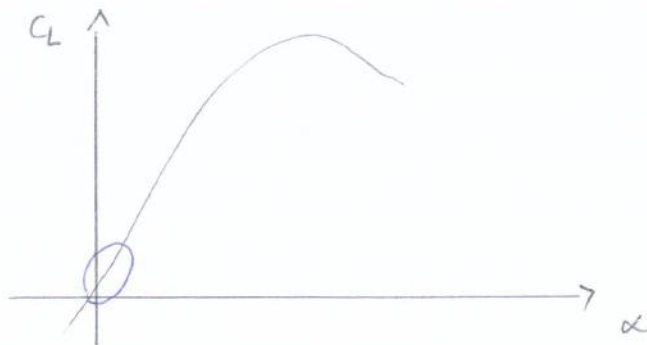
Per flusso subsonico incompressibile $\frac{x_o}{c} = \frac{1}{4}$. Il risultato vale anche se il corpo non è una pancia piana.

Ciò può essere dedotto anche calcolando il momento ad un'incidenza chiave e poi sfruttando la proprietà focale:

se $\alpha = 0^\circ \Rightarrow L = 0$ per corpi simmetrici \Rightarrow momento nullo rispetto a qualsiasi punto \Rightarrow momento focale nullo

Poiché $\frac{\partial C_{M_o}}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow C_{M_o}$ necessariamente nullo

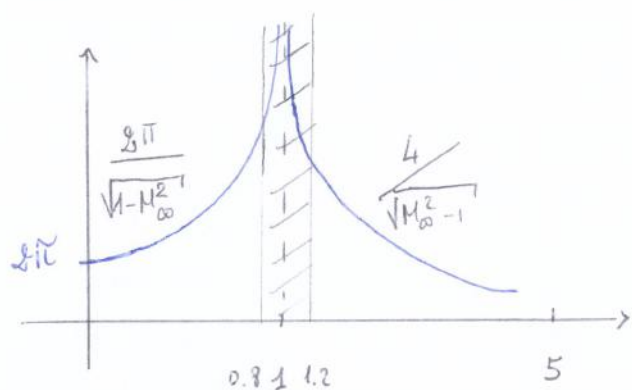
$$C_L = C_L' \alpha \rightarrow C_L' = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$



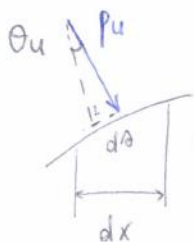
Per cui:

$$C_L = f(\alpha, \text{geom.}, M_\infty) \text{ se } \mu = 0$$

$$C_L = f(\alpha, \text{geom.}, R_\infty, M_\infty) \text{ se } \mu \neq 0$$



Determiniamo il coefficiente di resistenza d'onda:



Per evitare il problema causato dal fatto che $\frac{dy}{dx}$ cambia segno muovendosi lungo il dorso e il ventre $\frac{dx}{dx}$ del profilo, prendiamo un valore assoluto:

$$dD_u = |(p_u - p_\infty) ds \cdot \sin \theta_u|$$

$$dD_e = |(p_e - p_\infty) ds \cdot \sin \theta_e|$$

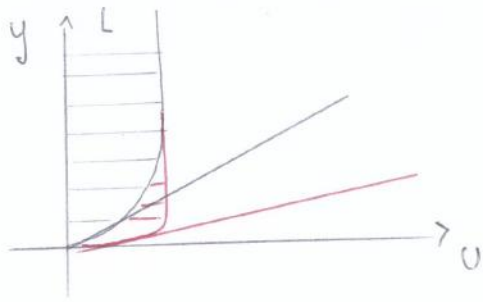
sottraiamo il contributo nel dorso e nel ventre p_∞ , che non cambia la risultante netta

Introducendo le piccole perturbazioni: $\sin \theta \approx \theta$, $ds \approx dx$

$$D = \int_0^c |(p_e - p_\infty) \theta_e| dx + \int_0^c |(p_u - p_\infty) \theta_u| dx$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c \cdot 1} = \left\{ \int_0^c |c_{p_e} \theta_e| dx + \int_0^c |c_{p_u} \theta_u| dx \right\} \frac{1}{c}$$

TRANSIZIONE



$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

$\tau_{wL} < \tau_{wT} \rightarrow$ quando lo strato limite diventa turbolento aumentano gli attriti a parete e dunque la resistenza

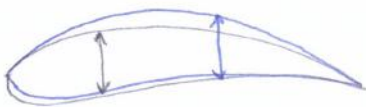
Studiando la stabilità dello strato limite laminare si trova che:

- $\frac{dp}{dx} > 0$, gradiente di pressione avverso \rightarrow destabilizzante
 - $\frac{dp}{dx} < 0$, gradiente di pressione favorevole \rightarrow stabilizzante
- Immersa la transizione e anche la separazione

Dall'equazione di Eulero:

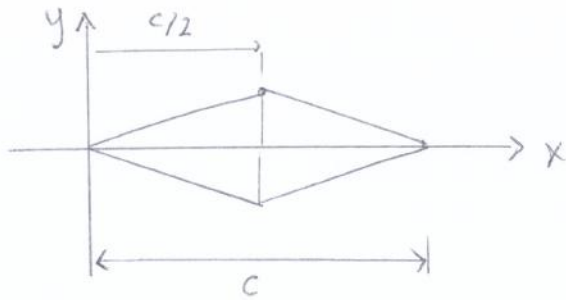
$$\frac{dp}{dx} = -\rho u \frac{du}{dx} \Rightarrow \text{gradiente pressione negativo} \rightarrow \text{accelerazione della corrente}$$

§ PROFILI LAMINARI vedremo lo spostamento dello spessore massimo verso il bordo di fuga, poiché tale punto è approssimativamente il punto fino al quale la corrente accelera



Il MOMENTO si calcola in maniera perfettamente analoga:

$$C_{M_A} = \frac{1}{c^2} \int_0^c (c_{pL} - c_{pu}) x dx$$



Il $C_{D\min}$ può essere calcolato o mediante la teoria esatta dell'urto ipersuonico o mediante la teoria linearizzata.

Prendendo la teoria linearizzata, se al posto del rombo consideriamo una parabola:

$$C_{D\text{PAR}} = 1,33 C_{D\text{ROMBO}}, \quad C_{D\text{ROMBO}} = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\frac{t}{c}\right)^2, \quad \alpha = 0^\circ$$

EQUAZIONE DEL POTENZIALE DI PERTURBAZIONE PER IL TRANSONICO

Riprendiamo l'equazione del potenziale della velocità nella forma esatta:

$$\begin{aligned} (1-M_\infty^2) \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = & M_\infty^2 \left[(\gamma+1) \frac{u'}{V_\infty} + \left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \frac{u'^2}{V_\infty^2} + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \left(\frac{v'^2+w'^2}{V_\infty^2}\right) \right] \frac{\partial u'}{\partial x} + \\ & + M_\infty^2 \left[(\gamma-1) \frac{u'}{V_\infty} + \left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \frac{v'^2}{V_\infty^2} + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \left(\frac{w'^2+u'^2}{V_\infty^2}\right) \right] \frac{\partial v'}{\partial y} + \\ & + M_\infty^2 \left[(\gamma-1) \frac{u'}{V_\infty} + \left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \frac{w'^2}{V_\infty^2} + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \left(\frac{u'^2+v'^2}{V_\infty^2}\right) \right] \frac{\partial w'}{\partial z} + \\ & + M_\infty^2 \left[\frac{v'w'}{V_\infty} \left(1 + \frac{u'}{V_\infty}\right) \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right) + \frac{w'v'}{V_\infty} \left(1 + \frac{u'}{V_\infty}\right) \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}\right) + \frac{v'w'}{V_\infty^2} \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y}\right) \right] \end{aligned}$$

Per fare in modo che tale equazione mantenga la sua validità anche in campo transonico, si mantengono a dx dell'equazione i termini $\frac{u'}{V_\infty}$, $\frac{v'}{V_\infty}$, $\frac{w'}{V_\infty}$, troncando tutti i termini quadratici.

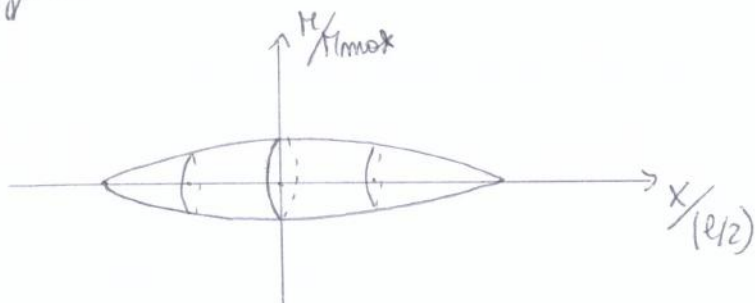
allora:

$$\begin{aligned} (1-M_\infty^2) \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = & M_\infty^2 (\gamma+1) \frac{u'}{V_\infty} \frac{\partial v'}{\partial x} + M_\infty^2 (\gamma-1) \frac{u'}{V_\infty} \left(\frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right) + \\ & + M_\infty^2 \frac{v'}{V_\infty} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right) + M_\infty^2 \frac{w'}{V_\infty} \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

valida per
subsonico,
transonico,
ipersuonico

Il corpo che minimizza la resistenza d'onda in campo transonico è il corpo di SEARS-HAAK.

Esso ha una forma assialsimmetrica ed è come quello riportato in figura:



$$\frac{\eta}{\eta_{max}} = \left[1 - \left(\frac{x}{l/2} \right)^2 \right]^{0.75}$$

con $-1 \leq x/l/2 \leq 1$

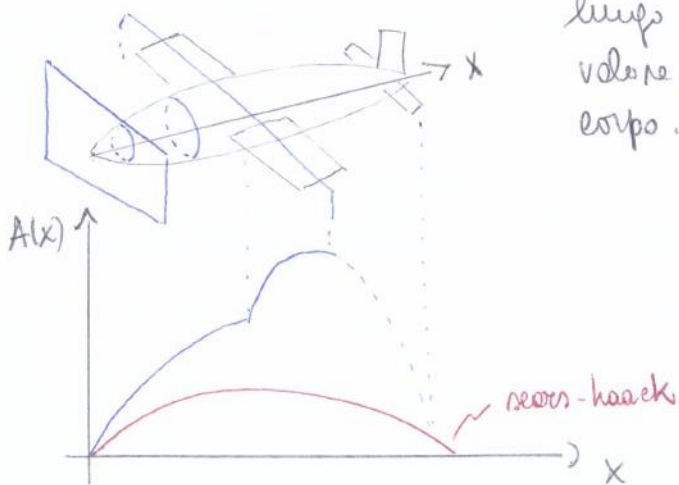
Il C_{DW} di tale corpo è pari a:

$$C_{DW} = \frac{1}{S_{ref}} \left[\frac{3\pi}{2} \left(\frac{A_{max}}{l} \right)^2 \right], \text{ con } A_{max} = \frac{\pi D^2}{4}$$

Come si minimizza la D_w di un corpo 3D?

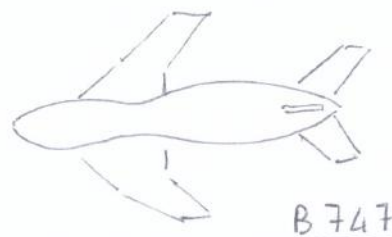
In condizioni di volo transonico, prendendo $M=1$, si fa riferimento alle linee di Mach:

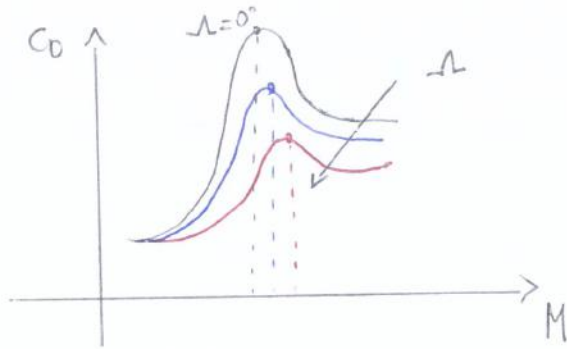
$\mu_{\infty} = \arcsin \frac{1}{M_0} = 90^\circ \Rightarrow$ questo è il riferimento che porta a definire l'orientamento di un piano che sposta lungo l'asse x del corpo va a determinare il valore dell'area delle sezioni trasversali del corpo.



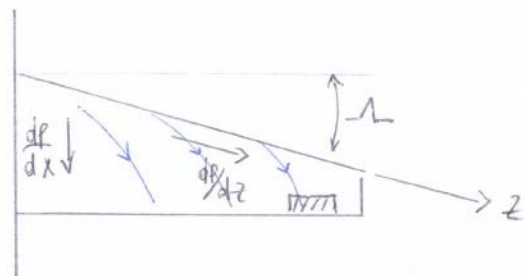
Più un velivolo ha una distribuzione $A(x)$ simile al corpo di Sears-Haack, minore sarà la sua resistenza d'onda in campo transonico.

Migliori investimenti al-fusoliera si può ottimizzare la variazione di area lungo l'asse longitudinale mediante una rientranza della fusoliera





Dotare l'ala di freccia però potrebbe portare allo stallo di estremità, poiché oltre a un $\frac{dp}{dx}$, nasce un $\frac{dp}{dz}$:



Per effetto di tale gradiente la corrente accelera anche lungo z e verso l'estremità la pressione diminuisce sempre più. A questo diventa troppo basso \rightarrow STALLO DI ESTREMITÀ che porterebbe alla perdita delle superfici di controllo

\Rightarrow SVERGOLAMENTO che riduce l'incidenza di estremità e ritarda i fenomeni di stallo

\Rightarrow SVERGOLAMENTO che riduce l'incidenza di estremità e ritarda i fenomeni di stallo

REGOLA DELLE AREE IN CAMPO SUPERSONICO

Abbiamo visto che per $M=1$, la regola delle aree prevede di affettare il velivolo con piani perpendicolari all'asse corpo, ovvero perpendicolari alla direzione di M_∞ .

In condizioni di $M_\infty > 1$ il corpo di riferimento è sempre quello di Sears-Haack ma $D_w = f(M_\infty, x/c, \psi)$.

Per prima cosa, i piani con cui sezionare il velivolo possono inclinarsi dell'angolo $\mu = \arcsin \frac{1}{M_\infty}$. Inoltre, la minima D_w è una media delle D_w che si ottengono affettando il corpo in tutti i possibili modi. In supersonico non esiste un modo universale di affettare il corpo.

SHOCK INDUCED SEPARATION



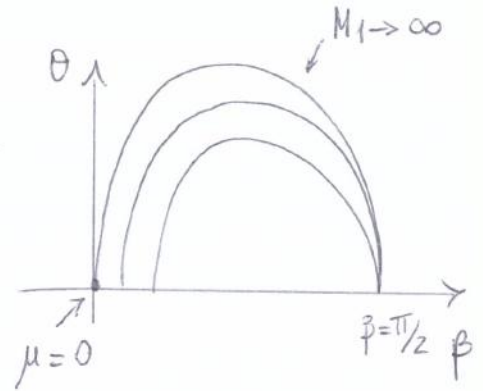
La nascita di un unto sul dorso del profilo si comporta come un gradiente di pressione inverso e può comportare la separazione del flusso

Se $M \rightarrow \infty$, allora:

$$C_p = \frac{4}{\gamma+1} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{M_1^2} \right) \Rightarrow \boxed{C_p = \frac{4}{\gamma+1} \sin^2 \beta}$$

Come si modifica la relazione $\theta - \beta - M$?

$$\tan \theta = \frac{2}{\tan \beta} \left[\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos(2\beta)) + 2} \right] \text{ per l'urto obliquo}$$



Se $M_1 \rightarrow \infty$ } $\sin \beta \sim \beta, \tan \beta \sim \beta$
 θ piccoli } $\rightarrow \cos 2\beta \sim 1$
 β piccoli } $\tan \theta \sim \theta$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2}{\beta} \left[\frac{M_1^2 \beta^2}{M_1^2 (\gamma+1) + 2} \right] = \frac{2}{\beta} \left[\frac{M_1^2 \beta^2}{M_1^2 (\gamma+1)} \right] = \frac{2}{\gamma+1} \beta \text{ per } M_1 \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\gamma+1}{2} \theta}$$

sol esempio, se: $\gamma = 1.4$ } $\beta = 1.2 \theta = 18^\circ \rightarrow$ urto molto schiacciato e gas fortemente compresso
 $\theta = 15^\circ$

È possibile ricavare una relazione $C_p = f(\theta)$ come fatto nel flusso ipersonico linearizzato?

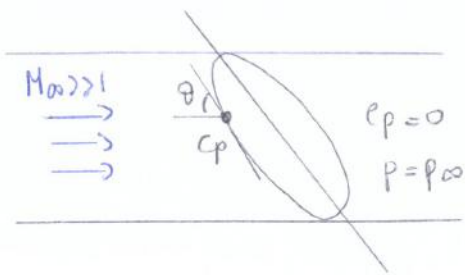
TEORIA NEWTONIANA (1687)

La teoria newtoniana descrive la resistenza generata su un flusso con $\mu=0$ (ideale per il calcolo della resistenza su flussi a basse velocità)

ASSUNZIONI

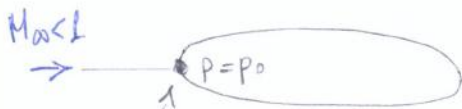
- particelle identiche, sferiche, equidistanti e non interagenti
- Solo moto macroscopico e assenza di moto caotico \rightarrow si trascurano gli sforzi viscosi che nascono per il trasporto delle qdm nelle 3 direzioni

Per un corpo ad incidenza $\alpha \neq 0$:



Il C_p in un qualsiasi punto si calcola facilmente noto l'angolo di inclinazione della parete rispetto alla direzione della corrente e monte

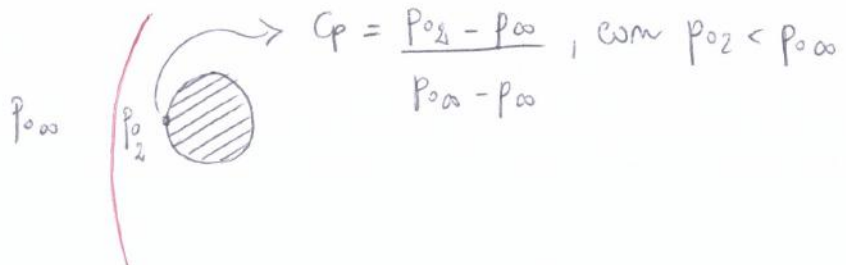
Nel caso subsonico, nel punto di stacco:



$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = \frac{p_0 - p_\infty}{p_0 - p_\infty} = 1 \Rightarrow \text{per l'ipersonico } C_p = 2$$

Nel 1955, Lees ha elaborato in maniera migliore tale relazione e dunque:

$$C_p = C_{pmax} \sin^2 \theta$$



Perché la teoria newtoniana descrive bene come accade in campo ipersonico?

Se $\gamma \rightarrow 1$, le relazioni dell'angolo obliquo per $M_1 \rightarrow \infty$ tendono alle relazioni ricavate da Newton:

$$\begin{cases} C_p = \frac{4}{\gamma+1} \sin^2 \beta \\ \beta = \frac{\gamma+1}{2} \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_p = 2 \sin^2 \beta \\ \beta = \theta \end{cases} \Rightarrow C_p = 2 \sin^2 \theta$$

Perché solo la $(QDM)_\perp$ normale è responsabile della misura della forza? se $\beta \approx \theta$, la corrente ipersonica si deflette praticamente in corrispondenza della parete \Rightarrow la componente normale si riceve praticamente a parete

modo 1 sezione che intercetta normalmente il flusso

$$F_H = \dot{m} (V_N - 0) = \rho_{\infty} V_{\infty} A_N \cdot V_{\infty} \sin \theta = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \overbrace{A \sin \theta}^{H/2} \cdot \sin \theta = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \frac{H}{2} \sin^2 \theta$$

$$D = 2 F_H \sin \theta = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 H \sin^2 \theta$$

$$C_D = \frac{H \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \sin^2 \theta}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \underbrace{A_N}_{(H \cdot 1)}} = 2 \sin^2 \theta = C_p \Rightarrow C_D = 2 \sin^2 15^\circ = 0.134$$

$C_D = 2 \sin^2 \theta = C_p$ nel caso in cui si adimensionalizza rispetto ad A_N

Attrimenti:

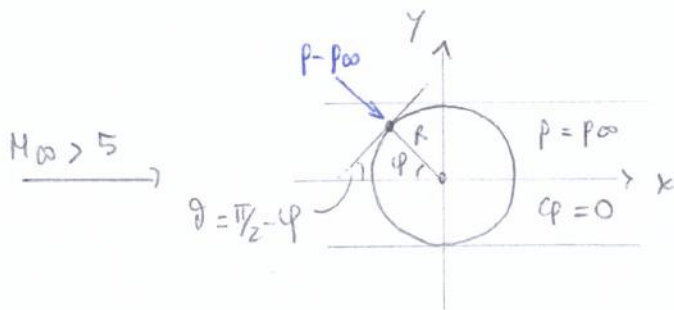
$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 A} = \frac{\rho_{\infty} V_{\infty}^2 H \sin^2 \theta}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 (C \cdot 1)} = \frac{2 H \sin^2 \theta}{\frac{1}{2} C} = 4 \sin^2 \theta \tan \theta$$

modo 2

$$D = (p - p_{\infty}) A_N$$

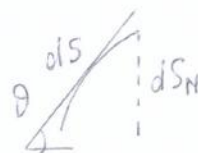
$$C_D = \frac{D}{\rho_{\infty} A_N} = \frac{p - p_{\infty}}{\rho_{\infty}} = C_p = 2 \sin^2 \theta$$

CILINDRO IN CAMPO IPERSONICO



$$C_p = 2 \sin^2 \theta$$

$$\text{con } \theta = \frac{\pi}{2} - \phi$$



$$dS = dn \cdot 1$$

$$dS_N = dS \sin \theta =$$

$$= dn \sin \theta =$$

$$= R d\phi \sin \theta =$$

$$= R \cos \phi d\phi$$

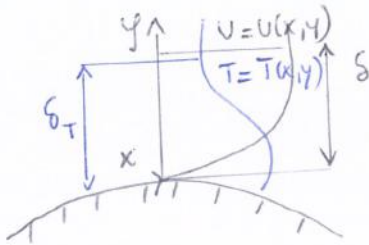
$$dD = (p - p_{\infty}) dA_N = (p - p_{\infty}) R \cos \phi d\phi$$

$$D = 2R \int_0^{\pi/2} (p - p_{\infty}) \cos \phi d\phi$$

STRATO LIMITE

Gli effetti della viscosità e delle conducibilità diventano importanti quando $M_{\infty} > 2$ (ipersonico).

Considerando un flusso viscoso e conduttibile, occorre tener presenti i campi di moto che si vengono a generare in prossimità della parete:

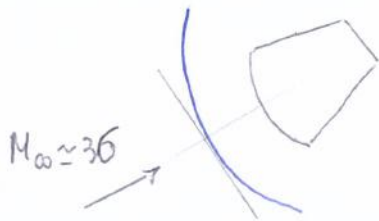


- STRATO LIMITE CINEMATICO δ : y per cui $U(x,y) = 0.99 U_e$
- STRATO LIMITE TERMICO δ_T : y_T per cui $T(x,y) = 0.99 T_e$

Le cause che portano alla generazione dello strato limite termico sono:

- CONDUCEBILITÀ \rightarrow trasformazione di $v^2/2$ in e
- URTI \rightarrow aumento di temperatura e volume dell'urto
- IRRAGGIAMENTO $\rightarrow q_R = \sigma T^4$

⊙ Capola di rientro



per $z = 50 \text{ km} \rightarrow \begin{cases} T_{\infty} = 280 \text{ K} \\ \rho_{\infty} = 338 \text{ kg/m}^3 \end{cases}$

Nell'intorno della zona centrale del corpo sfermico l'urto avverrà come sotto:

$\Rightarrow M \approx 30 \rightarrow \frac{T_v}{T_{\infty}} \approx 200 \rightarrow T_v \approx 56000 \text{ K!}$ ovviamente questa è solo una stima, ma comunque le temperature sono molto elevate. Ad esempio, nello Shuttle in fase di rientro le temperature a parete sono dell'ordine di 1500 K .



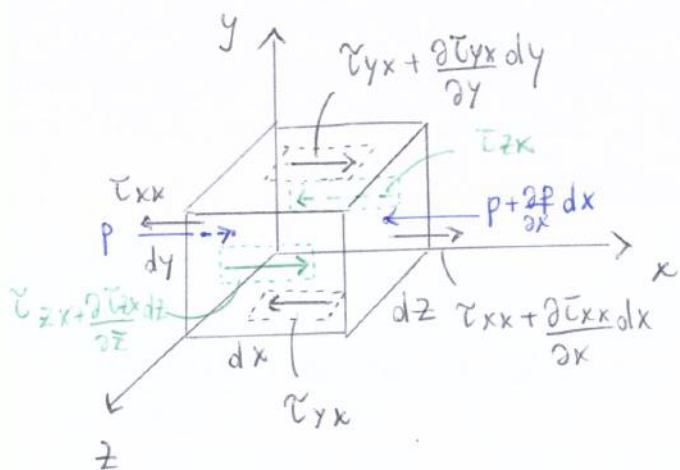
$F_p = \text{pressione} \cdot \text{superficie}$

$F_{\text{attr. viscoso}} = \tau \cdot \text{superficie}$, con $\tau = \tau_{ij}$ $\left\{ \begin{array}{l} j \text{ direzione sforzo} \\ i \text{ normale alla faccia su cui agisce lo sforzo} \end{array} \right.$

Scriviamo la II^a legge di Newton

nella direzione dell'asse x, nelle altre due direzioni si procede in maniera analogo

$$F_x = m a_x, \text{ con } a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$



Un'equazione differenziale:

$$dF_x = dm a_x$$

$$dm = \rho dx dy dz$$

Allora:

$$dF_x = \left[(p - \tau_{xx}) - p - \frac{\partial p}{\partial x} dx + \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right] dy dz + \left[\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz - \tau_{zx} \right] dx dy + \left[\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{yx} \right] dx dz$$

Per cui:

$$\rho dx dy dz \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] =$$

$$= \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right] dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz$$

$$\Rightarrow \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (x)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (y)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (z)$$

μ

• Se $\mu = 0 \rightarrow$ equazioni di Eulero

• ATTENZIONE: $\rho = \rho(p, x, y, z) \neq \text{cost!}$

• Dall'equilibrio alla rotazione attorno agli spigoli: $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$

Le incognite del campo sono p, u, v, w e, in questo momento, anche le τ_{ij} .

Si introducono allora le RELAZIONI COSTITUTIVE che permettono di legare gli sforzi viscosi alle velocità di deformazione dell'elemento fluido. Per trovare le relazioni costitutive si considera l'atto di moto elementare delle particelle fluide.

Questo può essere scomposto in una sovrapposizione di:

- TRASLAZIONE RIGIDA
- ROTAZIONE RIGIDA
- DEFORMAZIONE

Ai fini della determinazione delle τ_{ij} , si considerano le DEFORMAZIONI A VOLUME COSTANTE.

Si dimostra che:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_v (\nabla \cdot \vec{v}) \\ \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda_v (\nabla \cdot \vec{v}) \\ \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda_v (\nabla \cdot \vec{v}) \end{aligned} \right\} \text{SFORZI NORMALI}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \text{SFORZI TANGENZIALI}$$

Il coefficiente $\lambda_v = -2/3 \mu$ è detto II° coefficiente di viscosità

Se flusso incomprimibile $\rightarrow (\nabla \cdot \vec{v}) = 0$

Im forma compatta:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \text{ con } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Sostituendo le relazioni costitutive all'interno delle equazioni di bilancio delle qdm nelle tre direzioni si ottengono le equazioni di Navier-Stokes

EQUAZIONE DELL'ENERGIA

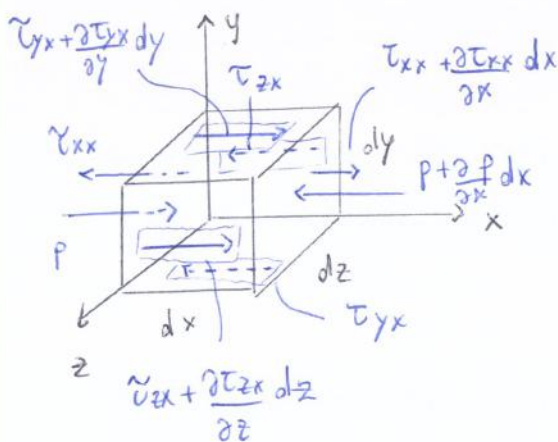
Riconfermiamo che per un fluido non viscoso e non conduttibile:

$$\rho \frac{DH}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \dot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v})$$

dobbiamo ora vedere come gli effetti di conduttibilità e viscosità entrano nell'equazione.

Trascuriamo gli effetti di \dot{q} e \vec{f} e concentriamoci sull'espressione del lavoro delle forze di pressione e delle forze viscose nell'unità di tempo (potenza)

Riprendiamo il volume infinitesimo già studiato:



Consideriamo cosa succede lungo l'asse x:

$$dz dy \left[p u - \left(p u + \frac{\partial (p u)}{\partial x} dx \right) \right] dy dz +$$

$$+ \left[-\tau_{xx} u + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial (\tau_{xx} u)}{\partial x} dx \right) \right] dy dz$$

$$dx dz \left[-\tau_{yx} u + \left(\tau_{yx} u + \frac{\partial (\tau_{yx} u)}{\partial y} dy \right) \right] dx dz$$

$$dx dy \left[-\tau_{zx} u + \left(\tau_{zx} u + \frac{\partial (\tau_{zx} u)}{\partial z} dz \right) \right] dx dy$$

Sommando i tre contributi:

$$\left[-\frac{\partial (p u)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{xx} u)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{yx} u)}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_{zx} u)}{\partial z} \right] dx dy dz$$

Nella direzione y:

$$\left[-\frac{\partial (p v)}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_{xy} v)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{yy} v)}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_{zy} v)}{\partial z} \right] dx dy dz$$

Nella direzione z:

$$\left[-\frac{\partial (p w)}{\partial z} + \frac{\partial (\tau_{xz} w)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{yz} w)}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_{zz} w)}{\partial z} \right] dx dy dz$$

L'effetto di q si manifesta la variazione di energia interna e non la variazione della velocità macroscopica \rightarrow EFFETTO DISSIPATIVO

In formule compatte: $\frac{\partial q_i}{\partial x_j}$

L'effetto degli sforzi viscosi può essere scomposto in due contributi:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} u_j) = \underbrace{\tau_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}_{\text{termine dissipativo}} + u_j \underbrace{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}}_{\text{termine non dissipativo che contribuisce alla redistribuzione di energia esistente } v^2/2}$$

termine dissipativo

$v^2/2 \rightarrow e$

lavoro delle forze viscosi nell'unità di tempo per deformare l'elemento fluido

termine non dissipativo che contribuisce alla redistribuzione di energia esistente $v^2/2$.

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

in $u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ figurano termini $\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}$ legati alla redistribuzione di energia

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

\Rightarrow in $\tau_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ figurano termini $\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2$, legati alla dissipazione

Torniamo all'equazione dell'energia, da scrivere nella forma finale:

$$H = h + v^2/2, \text{ con } h = e + p/\rho$$

$$\Rightarrow \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = \rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot (p \vec{v}) \quad \text{si può dimostrare}$$

$$\Rightarrow \rho \frac{D}{Dt} \underbrace{\left(h + \frac{v^2}{2} \right)}_H - \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot (p \vec{v}) = -\nabla \cdot (p \vec{v}) + [\text{termini in } \tau_{ij}] + [\text{termini in } q]$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + [\text{termini in } \tau_{ij}] + [\text{termini in } q]}$$

• Se flusso inviscido, non conduttibile, $\dot{q} = 0$ e stazionario $\Rightarrow H = \text{costante}$

Scriviamo ora l'equazione dell'energia, con $\dot{q} = 0$, considerando il caso

stazionario $\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$

- $u \rightarrow U_e$
 - $x \rightarrow L \Rightarrow x' = x/L$
 - $y \rightarrow \delta \Rightarrow y' = y/\delta$
 - $p \rightarrow \rho U_e^2$
 - $N \rightarrow$ continuità $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \Rightarrow N \approx \frac{U \delta}{L}$ con $\frac{\delta}{L} \propto \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$ nel
caso laminare
- \Rightarrow ne ad esempio $Re_L = 10^4 \rightarrow \frac{\delta}{L} \approx 0.01$
- $\Rightarrow N \approx 0.01 U \Rightarrow \boxed{N \ll U}$

Si può inoltre considerare che, all'interno dello strato limite $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$, ovvero le evoluzioni lungo x di una certa grandezza sono molto inferiori alle evoluzioni lungo y .

Fatte tali ipotesi, occorrerebbe effettuare un'analisi degli ordini di grandezza basandosi sulle equazioni in forma bidimensionale. Noi considereremo una trattazione semplificata basandoci sulle equazioni in forma unidimensionale

• CONTINUITÀ

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0}$$

$\rho U \gg \rho v$, ma $\partial/\partial x \ll \partial/\partial y \Rightarrow$ termini dello stesso ordine di grandezza

• QUANTITÀ DI MOTO

$$y) \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \Rightarrow \text{dall'analisi degli ordini di grandezza risulta che il termine più importante è } \partial/\partial y$$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0} \rightarrow p \approx \text{cost lungo } y$

$$\Rightarrow \boxed{p = p_e = p_w} \text{ e } p = p(x, y) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow \frac{dp_e}{dx}}$$

Allora:

$$\rho \left[u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{1}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right]$$

$$\rho \left[u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{Pr} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(Pr u^2/2 + h \right) \right) \right]$$

eq. energie specializzate per lo strato limite termico e compress.

$$\mu = \mu(T(y)), \quad \lambda = \lambda(T(y))$$

Per cui, le equazioni che governano lo strato limite sono:

$$\rho \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] = 0$$

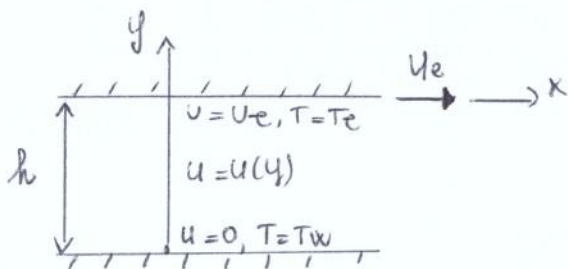
$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dPe}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{Pr} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(Pr u^2/2 + h \right) \right) \right]$$

In tale forma, le equazioni dello strato limite non forniscono soluzioni analitiche. Cerchiamo dunque di realizzare in primo luogo situazioni più semplici.

FLUSSO DI COUETTE

- Flusso piano & parallelo, $\mu \neq 0, \lambda \neq 0$



Si ha che: $\bullet) u \neq 0$
 $v = 0$ (piano & parallelo)

$$\bullet) \frac{\partial}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{dPe}{dx} = 0$$

$$\begin{cases} y=0 \rightarrow u=0, T=T_w \\ y=h \rightarrow v=u_e, T=T_e \end{cases}$$

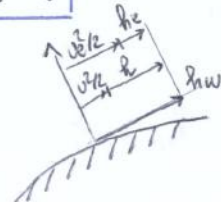
Sia $Pr = 1$, dP/dx qualunque

SOLUZIONE EQUAZIONE DELL'ENERGIA - BUSEMANN (1931)

$$\rho \left(u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial H}{\partial y} \right)$$

La soluzione dell'equazione dell'energia è $H = \text{cost lungo } y$

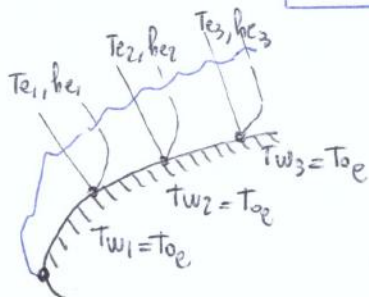
$$\Rightarrow H = u^2/2 + h = \frac{U_e^2(x)}{2} + h_e(x) = H_w = h_w = c_p T_w$$



Allora:

$$\frac{U_e^2}{2} + c_p T_e = c_p T_w \rightarrow T_w = T_e + \frac{U_e^2}{2c_p} = T_{0e} = T_{0\infty} \quad \text{perché } H_e = H_{\infty} \Rightarrow T_{0e} = T_{0\infty}$$

$$T_w = T_e \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right) \quad \text{temperatura a cui si porta la parete}$$



↳ punto esterno: $H_w = H_{\infty} \rightarrow T_w = T_{0\infty} = T_{0e}$

Qual è il profilo di temperatura all'interno dello strato limite termico?

È vero che la soluzione trovata $H = h + u^2/2 = \text{cost}$, risponde alle condizioni di adiabaticità, ovvero $q_w = 0$?

Per verificarlo, deriviamo H rispetto a y e imponiamo la derivata uguale a 0:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (c_p T + u^2/2) = c_p \frac{\partial T}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial y}$$

- Per $Pr=1 \rightarrow H = \text{cost} = \frac{v^2}{2} + h$
 - Per Couette $\rightarrow Pr \frac{v^2}{2} + h = \text{cost}$
- } trasversalmente allo strato limite

La soluzione sarà intermedia tra quella del flusso di Couette e quella del flusso con $Pr=1$.

$\Rightarrow Pr \neq 1 (<1)$: $R \frac{v^2}{2} + h = \text{cost}$ con $R = \text{fattore di recupero}$
($R < 1$ se $Pr < 1$)

Definiamo $R \frac{v^2}{2} + h = H_{\text{recupero}} = \text{entalpia di recupero}$

$\Rightarrow H_{\text{rec}} < H_e$, perché $\begin{cases} H_e = \frac{v_e^2}{2} + h_e \\ H_{\text{rec}} = R \frac{v^2}{2} + h \end{cases}$

Per cui, lungo y , la soluzione sarà:

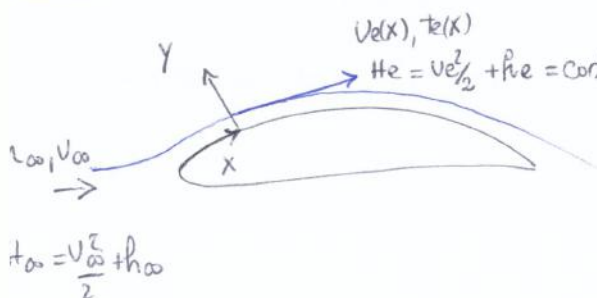
$R \frac{v^2}{2} + h = \text{cost} = H_{\text{rec}} = c_p T_{\text{rec}}$ $\Rightarrow T_{\text{rec}} = T + \frac{R v^2}{2 c_p} = \text{cost lungo } y$

Allora:

$H_{\text{rec}} = \frac{R v^2}{2} + h = \frac{R v_e^2}{2} + h_e = H_w = h_w = c_p T_w$

Per cui:

$T_w = T_e + \frac{R v_e^2}{2 c_p} = T_{\text{rec}} = T_e \left(1 + \frac{R v_e^2}{2 c_p T_e} \right) = T_e \left(1 + R \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right)$ con $T_e = T_e(x)$
 $v_e = v_e(x)$



DENTRO ALLO STRATO LIMITE

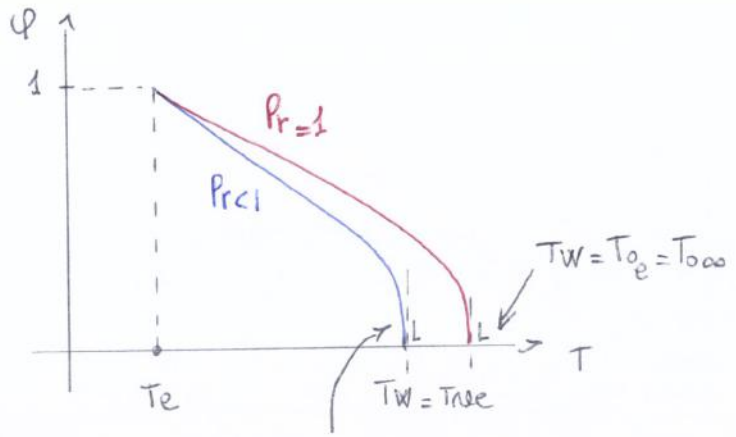
- $Pr=1 \Rightarrow \frac{v^2}{2} + h = H = H_e = H_{\infty} \rightarrow T_w = T_{0e} = T_{\infty}$
- $Pr \neq 1 \Rightarrow R \frac{v^2}{2} + h = H_{\text{rec}} = R \frac{v_e^2}{2} + h_e \rightarrow T_w = T_{\text{rec}} = R \frac{v_e^2}{2 c_p} + T_e$

Per cui:

$$T = T_e + \frac{R U_e^2}{2 C_p} (1 - \varphi^2) \quad Pr < 1$$

$$\varphi = 1 \rightarrow T = T_e$$

$$\varphi = 0 \rightarrow T = T_e + \frac{R U_e^2}{2 C_p} = T_{rec}$$



Se $Pr = 1$:

$$T = T_e + \frac{U_e^2}{2 C_p} (1 - \varphi^2)$$

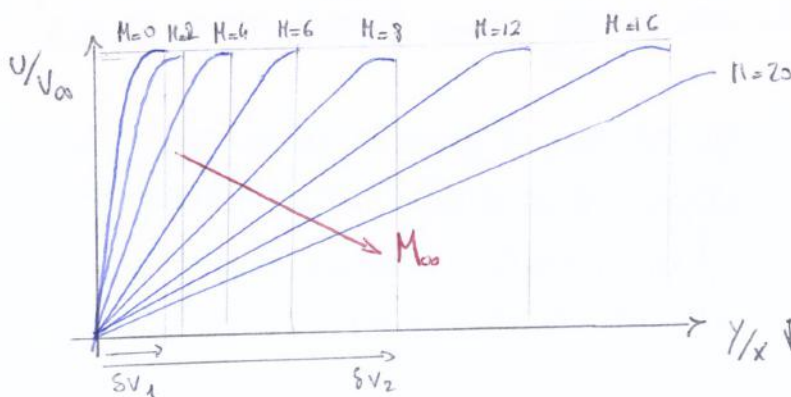
$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0 = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

L'effetto di $Pr < 1$ è benefico, in quanto la parete è più fredda rispetto al caso $Pr = 1$. Ciò deriva dal fatto che se parete non tutta l'energia cinetica si trasforma in energia termica, ma parte di essa viene trasportata per effetto della conducibilità in strati più lontani della parete.

STRATO LIMITE ADIABATICO COMPRESSIBILE TERMICO E STAZIONARIO

DISTRIBUZIONE VELOCITÀ E TEMPERATURA PER PLACCA PIANA (VAN DRIEST)

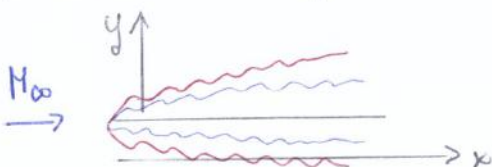
Placca piana $\rightarrow \frac{d\rho_e}{dx} = 0$, PARETE ADIABATICA $\rightarrow q_w = 0$, $Pr = 0.75$



- Lo spessore dello strato limite aumenta all'aumentare di M_∞
- $q_w = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0$ diminuisce all'aumentare di M_∞

com $Re_\infty = \frac{U_\infty \times \rho_\infty}{\mu_\infty}$

fissando U_∞ e un punto sulla placca piana, si ottiene l'andamento di $u = f(y)$



Se $Pr = 1$:

$$\begin{cases} \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial H}{\partial y} \right) \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{cases} \rightarrow \text{equazioni strato limite termico, comprimibile per la parete piana}$$

SOLUZIONE DI CROCCO PER $Pr = 1$

Le due equazioni sono formalmente identiche, allora, se u è soluzione dell'equazione della q_{du} , H sarà una combinazione lineare delle soluzioni trovate per l'equazione della q_{du} .

$$\Rightarrow H = c_1 + c_2 u$$

Verificare:

$$\rho u \frac{\partial (c_1 + c_2 u)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial (c_1 + c_2 u)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial (c_1 + c_2 u)}{\partial y} \right] \Rightarrow \rho u c_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v c_2 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu c_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

$$\Rightarrow \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \checkmark$$

Determiniamo le costanti imponendo le condizioni al contorno:

$$y = 0 \rightarrow u_w = 0 \Rightarrow c_1 = H_w$$

$$y \rightarrow \infty \rightarrow u = u_e \Rightarrow H = H_e = H_\infty \Rightarrow H_e = H_w + c_2 u_e \Rightarrow c_2 = \frac{H_e - H_w}{u_e}$$

Sostituendo:

$$H = H_w + \frac{H_e - H_w}{u_e} u \Rightarrow \frac{u}{u_e} = \frac{H - H_w}{H_e - H_w} \quad \text{analogia di Reynolds tra campo di velocità e campo di entalpia}$$

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{u^2}{2} + h \\ H_e &= H_\infty = \frac{u_\infty^2}{2} + h_\infty \\ H_w &= \frac{u_w^2}{2} + h_w = h_w \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{h + \frac{u^2}{2} - h_w}{h_\infty + \frac{u_\infty^2}{2} - h_w} = \frac{T + \frac{u^2}{2c_p} - T_w}{T_\infty + \frac{u_\infty^2}{2c_p} - T_w}$$

$$Pr = 1$$

analogia dei campi
 conoscendo il profilo di temperatura è possibile ricavare quello di velocità e viceversa

MODIFICA SOLUZIONE DI CROCCO PER $Pr \neq 1$

In tal caso si introduce il fattore di recupero R che moltiplica il termine cinetico.

ANALOGIA DEI CAMPI

$$\frac{U}{U_{\infty}} = \frac{h + R \frac{U^2}{2} - h_w}{h_{\infty} + R \frac{U_{\infty}^2}{2} - h_w} = \frac{T + R \frac{U^2}{2 c_p} - T_w}{T_{\infty} + R \frac{U_{\infty}^2}{2 c_p} - T_w} = \frac{T(1 + R \frac{\gamma-1}{2} M^2) - T_w}{T_{\infty}(1 + R \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2) - T_w}$$

$$\text{dove } \begin{cases} h_{tree} = h_{\infty} + R \frac{U_{\infty}^2}{2} = h_e + R \frac{U_e^2}{2} = c_p T_{tree} \\ T_{tree} = T_{\infty} + R \frac{U_{\infty}^2}{2 c_p} = T_{\infty} \left(1 + R \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2 \right) \end{cases}$$

Tale relazione comprende anche quelle ricavate nel caso di strato limite adiabatico

CASO ADIABATICO

$$h_w = h_w = h_{tree} = h_{\infty} + R \frac{U_{\infty}^2}{2} \Rightarrow \text{denominatore} = 0$$

poiché U/U_{∞} assume un valore finito in ogni punto dello strato limite \Rightarrow anche il numeratore deve essere $= 0$.

$$\Rightarrow h + R \frac{U^2}{2} = \text{cost} = h_w = h_{\infty} + R \frac{U_{\infty}^2}{2}$$

Dall'analogia dei campi per $Pr \neq 1$ si ricava:

$$T = T_w (1 - \varphi) + T_{\infty} \varphi^2 + T_{tree} (\varphi - \varphi^2) \quad \text{profilo di temperatura}$$

- Se $T_w = T_{tree}$ (ADIABATICO) $\rightarrow q_w = 0 \Rightarrow T = T_{\infty} \varphi^2 + T_{tree} (1 - \varphi^2)$
- Se $T_w = T_{\infty}$ (ISOTERMO) $\Rightarrow T = T_{\infty} (1 - \varphi) + T_{\infty} \varphi^2 + T_{tree} (\varphi - \varphi^2)$

Diagrammiamo questi due casi estremi

ANALOGIA DEGLI SCAMBI LOCALI

Riprendiamo l'analogia dei corpi per $Pr=1, q_w \neq 0, \frac{dpe}{dx} = 0$:

$$\frac{U}{U_\infty} = \frac{h + v^2/2 - hw}{h_\infty + \frac{U_\infty^2}{2} - hw}$$

deriviamo e valutiamo a parete:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 = \frac{\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_0 + v \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0}{h_\infty + \frac{U_\infty^2}{2} - hw} = 0$$

ma $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 = \frac{\tau_w(x)}{\mu}$; $\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_0 = c_p \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0 = -c_p \frac{q_w}{\lambda}$

$$\Rightarrow \frac{\tau_w(x)}{\mu U_\infty} = \frac{-c_p/\lambda q_w}{h_\infty + \frac{U_\infty^2}{2} - hw} \Rightarrow \frac{\tau_w(x)}{U_\infty} = \frac{-c_p \mu q_w(x)}{h_\infty + \frac{U_\infty^2}{2} - hw}$$

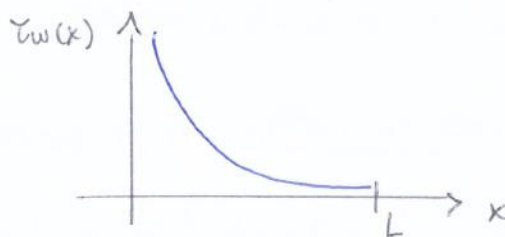
Allora:

$$\boxed{\frac{\tau_w(x)}{U_\infty} = - \frac{q_w(x)}{h_\infty + \frac{U_\infty^2}{2} - hw}}$$

analogia degli scambi locali ($Pr=1$)

nota $\tau_w(x)$ si può ricavare $q_w(x)$ e viceversa

$$\tau_w(x) \leftrightarrow q_w(x)$$



Mel caso di una
pellea piana, per
uno strato limite
laminare,
 $\tau_w(x) \propto \frac{1}{\sqrt{x}}$

Come si modifica l'analogia
degli scambi locali se $Pr \neq 1$?

Se $Pr \neq 1 \rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} R \text{ modifica il termine} \\ \text{cinetico} \\ A \rightarrow q_w, \text{ con } A = \text{fattore di analogia} \end{array} \right.$

$$\frac{\tau_w(x)}{U_\infty} = - \frac{A q_w(x)}{h_\infty + \frac{R U_\infty^2}{2} - hw} = - \frac{A q_w(x)}{c_p (T_{free} - T_w)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\tau_w(x)}{U_\infty} = - \frac{A q_w(x)}{c_p (T_{free} - T_w)}}$$

analogia scambi locali per

$Pr \neq 1$

CONVEZIONE FORZATA

Si parla di convezione forzata quando si ha uno scambio di calore fra una parete ed una corrente fluida che la riveste e la velocità delle correnti è imposta e non dipende dallo scambio di calore.

Quando la corrente fluida è provocata dallo stesso scambio di calore si parla di convezione naturale.

Mel caso di convezione forzata:

$$\bar{q}_w = -K \Delta T$$

↓
[$\frac{W}{m^2K}$]

⇒ dall'analogia degli scambi integrali:

$$\bar{q}_w = -\frac{\bar{c}_w c_p}{A U_\infty} (T_{free} - T_w)$$

Allora:

$$\begin{cases} \Delta T = T_{free} - T_w \\ K = \frac{\bar{q}_w \cdot c_p}{A U_\infty} \end{cases} \rightarrow$$

Riconducendo che: $\frac{\bar{c}_w(x)}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = C_f$ coefficiente di attrito locale dello strato di attrito

Per cui:

$\frac{\bar{c}_w}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = C_D$ coefficiente di attrito medio

$$K = \frac{\bar{q}_w c_p}{A U_\infty} \cdot \frac{2 \rho_\infty U_\infty}{2 \rho_\infty U_\infty} = \frac{C_D \rho_\infty U_\infty c_p}{2 A}$$

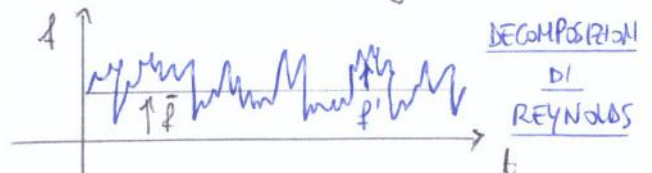
$$\bar{q}_w = -\frac{\rho_\infty c_p U_\infty C_D}{2 A} (T_{free} - T_w)$$

la trattazione vale per strato limite laminare

Apri una parentesi sullo strato limite turbolento:

- Per lo strato limite turbolento INCOMPRESSIBILE, possiamo essere utilizzate le RANS (Reynolds-averaged - Navier-Stokes - equations), in cui ogni grandezza è scomposta in un valor medio stazionario e una fluttuazione:

$$f = \bar{f} + f', \text{ con } \bar{f} = \frac{1}{T} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) dt$$



Nel buffer layer aumentano sempre più importanza gli sforzi di Reynolds, poi si entra nella regione logaritmica.

Questa regione presenta una propria legge di velocità:

definiscono $u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}$, con $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$

$y^+ = \frac{y}{l_\tau}$, con $l_\tau = \frac{\nu}{u_\tau}$

Allora, ad esempio, si dimostra che:

- VISCOUS SUBLAYER: $u^+ = y^+$
- REGIONE LOGARITMICA: $u^+ = \frac{1}{K} \ln y^+$

Torniamo al nostro problema:

$$\bar{q}_w = - \frac{\rho_\infty c_p U_\infty}{2A} C_D (T_{rec} - T_w)$$

Ma se il C_D è possibile ricavare \bar{q}_w e dall'evoluzione degli numeri integrati anche \bar{T}_w .
(oppure $\bar{T}_w = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 R_D$)

CALCOLO DEL C_D

- incompressibile $\rightarrow D = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 S C_D$, con $S = \text{sup. bagnata} = 2(B \cdot L)$

in tal caso: $C_D = f(Re)$, con $Re = \frac{U_\infty \rho_\infty L}{\mu_\infty}$

- compressibile $\rightarrow D = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 S C_{Dc}$

in tal caso: $C_D = f(Re, M_\infty, T_w/T_\infty)$, perché può essere presente un flusso a parete.

Come introduciamo gli effetti della compressibilità e della trasmissione termica, modificando il C_D del caso incompressibile?

Nel caso comprimibile e termico, allora:

$$\bar{T}w_e \propto \sqrt{p^* \mu^*} \quad \text{con} \quad \begin{cases} p^* = p(T^*) \\ \mu^* = \mu(T^*) \end{cases}$$

Per cui:

$$\chi = \frac{\bar{T}w_e}{\bar{T}w_i} = \left(\frac{p^*}{p_\infty} \frac{\mu^*}{\mu_\infty} \right)^{1/2}$$

della formula isoproxica: $\frac{\mu^*}{\mu_\infty} = \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^w$
 con $w = 0.75$

dell'eq. di stato: $p/e = \frac{R}{M} T \rightarrow \frac{p^*}{p_\infty} = \frac{T_\infty}{T^*}$

Allora:

$$\chi = \left[\left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^w \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^{-1} \right]^{1/2} = \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^{\frac{w-1}{2}} \quad \text{e, per } w = 0.75 \Rightarrow \chi = \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^{-0.125}$$

Risolvendo che:

$$T^* = 0.5 T_w + 0.25 T_\infty + 0.25 T_{rec} \Rightarrow \frac{T^*}{T_\infty} = 0.5 \frac{T_w}{T_\infty} + 0.25 + 0.25 \frac{T_{rec}}{T_\infty}$$

$$\Rightarrow \frac{T^*}{T_\infty} = 0.5 \frac{T_w}{T_\infty} + 0.25 + 0.25 \left(1 + R \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right) =$$

$$= \frac{T_w}{2T_\infty} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(1 + R \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right) = \frac{T_w + T_\infty}{2T_\infty} + R \frac{\gamma-1}{2} \frac{M_\infty^2}{4}$$

$\hookrightarrow \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} R M_\infty^2 \right)$

Dunque:

$$\chi = \left[\frac{T_w + T_\infty}{2T_\infty} + R \frac{\gamma-1}{2} \frac{M_\infty^2}{4} \right]^{-0.125}$$

\rightarrow tale relazione è in pratica utilizzata per estrapolare il C_{oi} e non $\bar{T}w_i$.

$$\Rightarrow \chi = \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^{\frac{w}{5}} \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^{-4/5} = \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^{\frac{w-4}{5}}$$

Se $w = 0.75$:

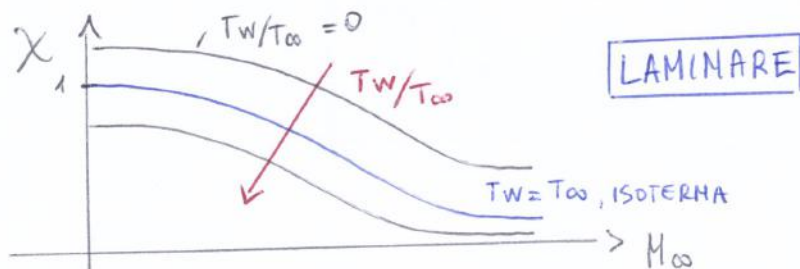
$$\Rightarrow \chi = \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^{-0.65} = \left[\frac{T_w + T_\infty}{2 T_\infty} + R \frac{1}{2} \frac{M_\infty^2}{4} \right]^{-0.65}$$

valida per BASSA TURBOLENZA

$$5 \cdot 10^5 \leq Re_L \leq 10^7$$

Mel caso di ALTA TURBOLENZA, $Re_L > 10^7 \Rightarrow$ l'esponente della formula vale -0.75

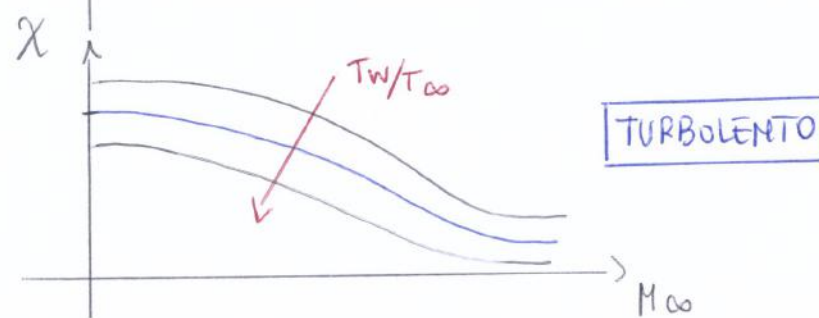
Come varia $\chi = \chi(M_\infty, T_w/T_\infty)$ al variare di M_∞ ?



Il C_{Dc} diminuisce rispetto al C_{Di} all'aumentare di M_∞ , ma $D \uparrow$, perché:

$$D = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 S C_D$$

e il termine U_∞^2 è molto elevato.



Perché $C_{De} < C_{Di}$?

Riconoscere che $\bar{c}_{we} \propto \mu^* \rho^{*m}$

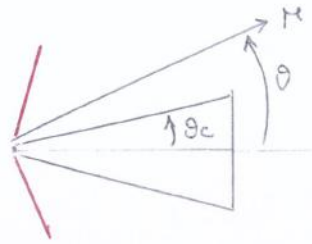
Im giacché $T_w > T_\infty$ all'interno dello strato limite $\Rightarrow T \uparrow, \mu \uparrow, \rho_w \uparrow$

Gli esponenti m, n sono tali da far prevalere l'effetto di diminuzione della densità rispetto all'aumento della viscosità.

$T \uparrow, \rho \downarrow, \rho_w \downarrow$

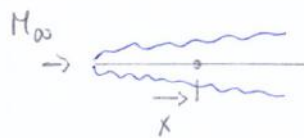
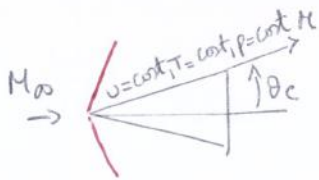
CONO - SUPERSONIC CONE RULES

Come è possibile calcolare c_f e q_w di un cono immerso in una corrente supersonica, posto ad incidenza nulla?



Si condiziona che, per un flusso conico $\frac{\partial(\cdot)}{\partial r} = 0 \rightarrow$ le proprietà del flusso sono costanti lungo r

Il flusso conico, per $M_\infty > 1.2$, presenta delle similitudini con il flusso della piastra piana:



$$\begin{aligned} u_e &= \text{cost} = U_\infty \\ p_e &= \text{cost} = p_\infty \\ T_e &= \text{cost} = T_\infty \end{aligned}$$

Considerando la generica coordinata x con origine nel bordo d'attacco della piastra piana, è possibile definire un Reynolds locale:

$$Re_x = \frac{\rho_\infty U_\infty x}{\mu_\infty}$$

Analogamente per il cono, è possibile definire un Reynolds locale con il generico valore di r che corrisponde alla coordinata x della piastra piana.

Allora, si ha:

$$\left. \begin{aligned} \bullet Re_{x \text{ cono}} &= Re_{x \text{ P.P.}} \\ \bullet M_\infty \text{ cono} &= M_\infty \text{ P.P.} \\ \bullet \left(\frac{T_w}{T_e} \right)_{\text{cono}} &= \left(\frac{T_w}{T_e} \right)_{\text{P.P.}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{C_{f \text{ cono}}(x) = \sqrt{3} C_{f \text{ P.P.}}(x)} \text{ dove } \left\{ \begin{aligned} C_f &= \frac{\tau_w(x) \text{ locale}}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} \\ C_D &= \frac{\bar{\tau}_w}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} \text{ globale} \end{aligned} \right.$$

Per cui:

$$C_{f \text{ cono}} = C_{f \text{ cono}} \chi(M_\infty, T_w/T_\infty) = \sqrt{3} C_{f \text{ P.P.}} \chi$$

inoltre, si ha:

$$\bullet Pr(x)_{\text{cono}} = Pr(x)_{\text{P.P.}} \rightarrow \boxed{q_{w \text{ cono}} = \sqrt{3} q_{w \text{ P.P.}}} \text{ STRATO LIMITE LAMINARE}$$

Voliti avere l'equazione di parete e isoliamo la derivata seconda $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_{y=0}$.
 Osserviamo che per $y=0 \rightarrow v=0, v=v_w$, poiché nel caso di parete permeabile è possibile effettuare L'ASPIRAZIONE o la SOFFIATURA ($v_w \geq 0$)

Allora:

$$\rho_w \nu_w \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 = -\frac{dp_e}{dx} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 + \mu_w \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{\rho_w \nu_w}{\mu_w} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 + \frac{1}{\mu_w} \frac{dp_e}{dx} - \frac{1}{\mu_w} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0$$

$$\text{ma} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 = \frac{v_w}{\mu_w}$$

$$\left\{ \mu = \mu(T(y)) \rightarrow \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y}\right)_0 \right.$$

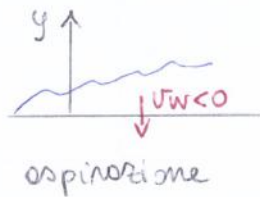
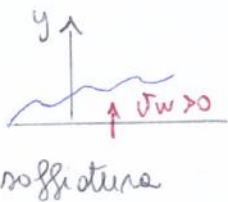
Per cui:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{\rho_w \nu_w v_w}{\mu_w^2} + \frac{1}{\mu_w} \frac{dp_e}{dx} - \frac{1}{\mu_w^2} v_w \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0 = -\frac{q_w}{\lambda}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{\rho_w \nu_w v_w}{\mu_w^2} + \frac{1}{\mu_w} \frac{dp_e}{dx} + \frac{v_w}{\mu_w^2 \lambda} \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_0 q_w}$$

① EFFETTO DI v_w



L'aspirazione ($v_w < 0$) stabilizza lo strato limite mentre la soffiatura lo destabilizza

② EFFETTO DI dp_e/dx

Riconducendo, dall'espressione di Euler:

$$\frac{dp_e}{dx} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx} \rightarrow \frac{dp_e}{dx} > 0 \Rightarrow \frac{dU_e}{dx} < 0$$

$$\frac{dp_e}{dx} < 0 \Rightarrow \frac{dU_e}{dx} > 0$$

Un gradiente di pressione favorevole, $dp_e/dx < 0$, che comporta accelerazione del flusso, stabilizza lo strato limite.

Un gradiente di pressione avverso lo destabilizza

Nel caso non adiabatico, se ad esempio la parete è mantenuta ad una certa temperatura $\neq T_{free}$, allora:

$$\begin{cases} T_{WA} \neq T_{free} \rightarrow q_w \propto (T_0 - T_w) \\ T_{WB} \neq T_{free} \rightarrow q_w \propto (T_{free} - T_w) \end{cases}$$

Nell'intorno del punto di stacco le equazioni di Navier-Stokes ammettono la soluzione esatta:

$$u_e(x) = Kx, \text{ con } K = \left(\frac{du_e}{dx} \right)_{x=0} > 0$$

Per risolvere il problema della determinazione del flusso nell'intorno del punto di stacco, si possono utilizzare le equazioni per lo strato limite in forma integrale:

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} (2+H) = \frac{C_f}{2}$$

EQUAZIONE VALIDA PER FLUSSI INCOMPRESSIBILI, SIA PER IL LAMINARE CHE PER IL TURBOLENTO (a valle dell'vnto possiamo considerare il flusso incompressibile)

u_e = velocità all'esterno dello strato limite, $u_e = u_e(x)$

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} (1 - \frac{u}{u_e}) dy \quad \text{spessore di q.d.m.}$$

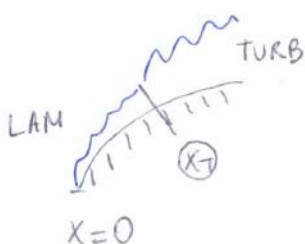
$$H = \frac{\delta^*}{\theta}, \text{ con } \delta^* = \int_0^{\infty} (1 - \frac{u}{u_e}) dy \quad \text{spessore di spostamento}$$

H = parametro di forma

($H = 2.6$ per strato lim. laminare
 $H = 1.3$ per strato lim. turbolento)

- Strato limite laminare \rightarrow METODO THWAITES
- Strato limite turbolento \rightarrow METODO HEAD

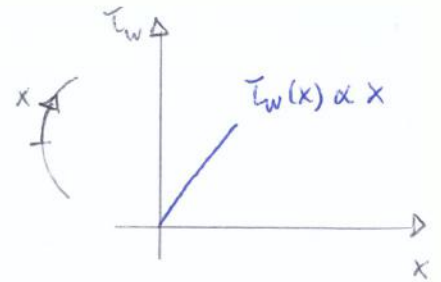
Da un profilo dove, generalmente lo strato limite parte laminare e poi diventa turbolento:



- Nell'intorno del punto di stacco $\rightarrow u_e = Kx$
 \Rightarrow lo stacco è accelerato perché $K > 0$
 \Rightarrow strato limite laminare stabilizzato
 \Rightarrow METODO DI THWAITES
- calcolo di $x_T \rightarrow$ METODO DI MIEHEL
- Dopo $x_T \rightarrow$ METODO DI HEAD

Allora:

$$\tau_w = \left[0.328 \mu \sqrt{\frac{\kappa}{0.075 \nu}} \kappa \right] x \Rightarrow \tau_w = C x$$

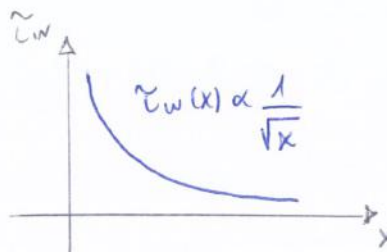


$\Rightarrow \tau_w(0) = 0$

dipende dalle proprietà del fluido e dalla sua geometria

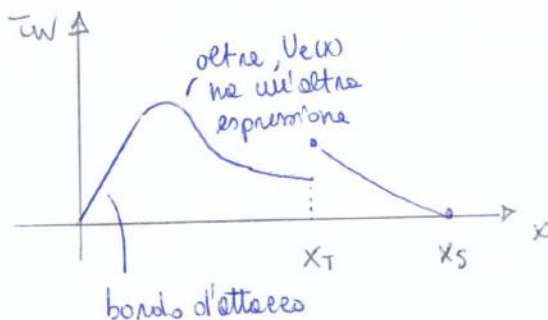
Per la piana piana:

$$\tau_w(x) = 0.332 \sqrt{\frac{\mu \rho U_\infty^3}{x}} \quad \text{BLASIUS}$$



La relazione di $\tau_w(x)$ determinata nell'intorno del punto di stacco vale per $x \ll$ qualche raggio di curvatura R , poi l'andamento si discosta da quello lineare.

Ad esempio, per un cilindro:



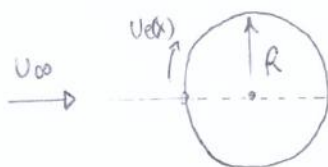
Risvolgendo l'espressione $\tau_w = Cx$, si ottiene:

$$\tau_w(x) = 1.1977 \sqrt{\mu \rho U_e^2(x) \left(\frac{dU_e}{dx} \right)_0}$$

notiamo che la struttura della formula è analoga a quella della piana piana

Nell'espressione di τ_w è presente il parametro κ . Da cosa dipende?

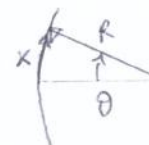
CILINDRO (2D)



La teoria del flusso potenziale afferma che:

$$U_e(\theta) = 2U_\infty \sin \theta, \text{ con } \theta = x/R$$

$$\Rightarrow U_e(x) = 2U_\infty \sin(x/R)$$



$$\frac{dU_e}{dx} = 2U_\infty \cos(x/R) \cdot \frac{1}{R} \rightarrow \text{per } x=0: \left(\frac{dU_e}{dx} \right)_0 = \frac{2U_\infty}{R}$$

$$\Rightarrow \text{Per } x=0, \kappa = \left(\frac{dU_e}{dx} \right)_0 = \frac{2U_\infty}{R} = \frac{4U_\infty}{D} \rightarrow \boxed{\frac{\kappa D}{U_\infty} = 4}$$

per subsonici
incan premibile

Ym tel caso, si può notare che $q_w(0) \propto K^{1/2}$

Mel caso di sfera e cilindro, per flussi incompressibile, abbiamo visto come ricavare K e il gruppo adimensionale ad esso associato $\frac{KD}{U_\infty}$.

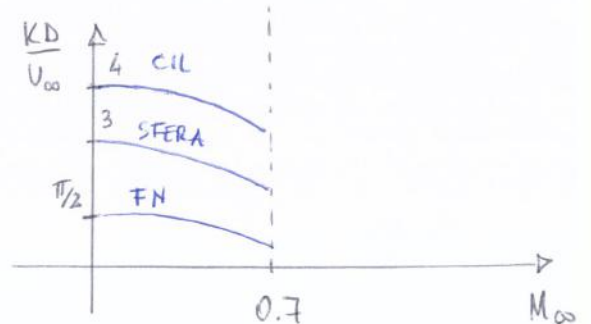
Come si modifica il valore di $\frac{KD}{U_\infty}$ considerando un flusso subsonico compressibile e un flusso supersonico e ipersonico?

FLUSSI SUBSONICI COMPRESSIBILI ($M_\infty < 0.7$)

$$\left(\frac{KD}{U_\infty}\right)_{CIL} = 4 \left(1 - 0.416 M_\infty^2 - 0.164 M_\infty^4 + \dots\right)$$

$$\left(\frac{KD}{U_\infty}\right)_{SFERA} = 3 \left(1 - 0.252 M_\infty^2 - 0.0175 M_\infty^4 + \dots\right)$$

$$\left(\frac{KD}{U_\infty}\right)_{FLAT NOSED} = \frac{\pi}{2} \left(1 - f(M_\infty)\right)$$

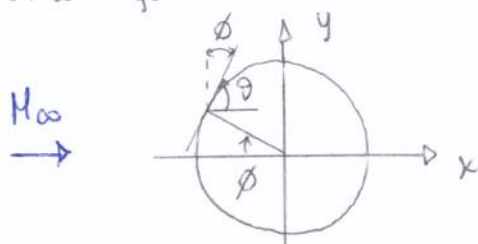


Per $M_\infty \rightarrow 0$ si ritrovano i valori per flussi incompressibile

FLUSSI SUPERSONICI e IPERSONICI

Ym tel caso si ricorre alla TEORIA NEWTONIANA:

Consideriamo il cilindro, ma i risultati che otterremo saranno validi anche per la sfera:



Dalla teoria Newtoniana, ricordiamo che:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = 2 \sin^2 \theta = 2 \sin^2 (\pi/2 - \phi) = 2 \cos^2 \phi$$

$$\text{con } \phi = x/R$$

① $\frac{dp_e}{dx} = -\rho_e U_e \frac{dU_e}{dx}$, per $x \rightarrow 0$: $U_e = Kx$, con $K = \left(\frac{dU_e}{dx}\right)_0$

$\Rightarrow \left(\frac{dp_e}{dx}\right)_0 = -\rho_e K^2 x$ con $\rho_e = \rho_0$ a valle dell'urto

② $p - p_\infty = \rho_\infty U_\infty^2 \cos^2 \phi \Rightarrow \left(\frac{dp_e}{dx}\right) = -\rho_\infty U_\infty^2 \cdot 2 \sin \phi \cos \phi \frac{d\phi}{dx}$, con $\phi = x/R$

Mel punto di crescita $q_w(x) \propto \sqrt{1/R}$ \Rightarrow bordi di attacco e cuspidi, caratterizzati da un raggio di curvatura elevato, anch'esse molto più fluide di calore rispetto ad un bordo di attacco più arrotondato.

\Rightarrow Il flat model è caratterizzato da $R \rightarrow \infty \Rightarrow$ stare molto meglio rispetto alla sfera e al cilindro.

\Rightarrow RAGGI DI CURVATURA ELEVATI



STIMA DEL CALCOLO DI $q_w(x)$ CON MODIFICA ANALOGIA REYNOLDS

Riconduciamo che:

$q_w(x) = - \frac{\tau_w(x)}{A U_\infty} c_p (T_{ree} - T_w)$ valido per piana piana, $\frac{d\rho}{dx} = 0$ e per un crescita non adiabatica, costante delle forze viscose

Come modificare la relazione?

- 1) $U_\infty \rightarrow U_e(x)$, nell'intorno del punto di crescita
- 2) $T_{ree} \rightarrow T_0$ nel caso adiabatico $\Rightarrow T_{ree} - T_w \rightarrow T_0 - T_w$
- 3) $\tau_w(x)$ piana piana $\rightarrow \tau_w(x) = C \sqrt{\mu^* \rho^* U_e^2(x) \left(\frac{dU_e}{dx}\right)_0}$ nell'intorno del punto di crescita

$\Rightarrow q_w(x) = \frac{C \sqrt{\mu^* \rho^* U_e^2(x) \left(\frac{dU_e}{dx}\right)_0}}{A U_e} c_p (T_0 - T_w)$ con $\left\{ \begin{array}{l} \rho_\infty \rightarrow \rho^* \\ \mu_\infty \rightarrow \mu^* \end{array} \right.$

$q_w(x) = \frac{C \sqrt{\mu^* \rho^* \left(\frac{dU_e}{dx}\right)_0}}{A} c_p (T_0 - T_w)$, con $A = Pr^{0.67}$ per stato limite laminare

calcolate nella sezione rappresentativa.

Moltiplicando per $\frac{\rho_e U_e}{\rho_e U_e}$:

$q_w(x) = C Pr^{-0.67} \sqrt{\frac{\rho^* \mu^*}{\rho_e \mu_e}} (\rho_e \mu_e k)^{1/2} c_p (T_0 - T_w) = C Pr^{-0.67} (\rho_e \mu_e k)^{1/2} \left(\frac{\rho^* \mu^*}{\rho_e \mu_e}\right)^{1/2} c_p (T_0 - T_w)$

$\Rightarrow q_w(x) = C Pr^{-0.67} (\rho_e \mu_e k)^{1/2} \left(\frac{\rho^* \mu^*}{\rho_e \mu_e}\right)^{1/2} c_p (T_0 - T_w)$ struttura analoga a quella ottenuta per via Ferriss

ESERCITAZIONE 1

Richiami: equazione di stato dei gas perfetti

$$\bullet \boxed{pV = m \frac{R}{M} T} \quad \text{con } V = \text{volume occupato [m}^3\text{]} \\ m = \text{massa [kg]}$$

osserviamo che $\frac{V}{m} = v = \frac{1}{\rho}$, allora:

$$\bullet \boxed{\frac{p}{\rho} = \frac{R}{M} T} \quad \text{con } \rho = \frac{m}{V} \text{ densità [kg/m}^3\text{]}$$

osserviamo che $\frac{m}{M} = N$ numero di moli, allora:

$$\bullet \boxed{pV = NRT}$$

dividendo per $V \rightarrow \frac{N}{V} = n$ densità molare $[\frac{\text{Moli}}{\text{m}^3}]$, allora:

$$\bullet \boxed{p = nRT}$$

esercizio 1

Sia $V = 0.4 \text{ m}^3$ di NH_3

$$T = 50^\circ \text{C}$$

$$p = 4.9 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Calcolare Q da fornire per scaldare il gas a $V = \text{cost}$ fino a 100°C .

Ricordando che:

$$Q = m c_v \Delta T \rightarrow m = \frac{pV M}{RT} = \frac{4.9 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 0.4 \text{ m}^3 \cdot 17 \text{ kg/Mole}}{8314 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{Mole}} \cdot 323 \text{ K}} = 1.2407 \text{ kg}$$

$$\bullet \left[R_{\text{misc}}^* = \frac{R}{\mathcal{V}_{\text{misc}}} = \frac{R}{\sum X_i \mathcal{V}_i} \right]$$

Legge dei gas perfetti per miscela

Consideriamo un serbatoio il cui interno si trovano diverse specie.
La pressione totale esercitata all'interno del serbatoio è data dalla legge di Dalton:

$$\left[P_t = \sum P_i \right] \quad \text{dove } P_i \equiv \text{pressioni parziali dei singoli gas}$$

Considerando il volume V del serbatoio e una singola specie, l'eq. di stato per tale specie sarà:

$$\left[P_i V = m_i \frac{R}{M_i} T = N_i R T \right]$$

Sommando i contributi delle singole specie:

$$\left[V \sum_i P_i = V P_t = R T \sum_i N_i = R T N_t \right]$$

Rapportando le due relazioni:

$$\left[\frac{P_i}{P_t} = \frac{N_i}{N_t} = X_i \right] \quad \text{la frazione molare corrisponde anche al rapporto tra la pressione parziale e totale}$$

Immaginiamo di separare nella miscela i singoli componenti e di comprimervi alle pressioni $P_t \rightarrow$ ogni specie occuperà un certo volume V_i

$$\Rightarrow \left[P_t V_i = N_i R T \right] \quad \text{considerando la singola specie}$$

Sommando:

$$P_t \sum V_i = R T \sum N_i \rightarrow P_t V_t = R T N_t \rightarrow \left[\frac{V_i}{V_t} = \frac{N_i}{N_t} = X_i \right] \begin{array}{l} \text{la frazione molare} \\ \text{coincide con la} \\ \text{frazione} \\ \text{volumetrica} \end{array}$$

$$c_{C\#H_4} = \frac{m_{C\#H_4}}{m_{TOT}} = 0.111 \quad c_{CO} = 0.333 \quad c_{C_2\#H_6} = 0.556$$

$$2) X_i = \frac{N_i}{N_t} = \frac{V_i}{V_t} \quad \text{con } N_t = 0.67228$$

$$X_{C\#H_4} = 0.1859, \quad X_{CO} = 0.3187, \quad X_{C_2\#H_6} = 0.4953$$

$$3) M_{miste} = \sum_i X_i M_i = 26,757 \text{ Kg/Mole}$$

Oppure:

$$M_{miste} = \frac{1}{\sum_i \frac{c_i}{M_i}} = \frac{1}{0.0373636} = 26,764 \text{ Kg/Mole}$$

esercizio 3.1

Dati la composizione volumetrica dell'aria: 78% N_2 , 21% O_2 , 1% Ar, det. le masse molari dell'aria e la composizione ponderale.

$$M_{aria} = X_{N_2} M_{N_2} + X_{O_2} M_{O_2} + X_{Ar} M_{Ar} = 28,96 \text{ Kg/Mole}$$

$$X_i = \frac{N_i}{N_T} = \frac{m_i/M_i}{m_T/M_{miste}} = \frac{m_i}{m_T} \frac{M_{miste}}{M_i} \rightarrow c_i = X_i \frac{M_i}{M_{miste}}$$

$$c_{N_2} = X_{N_2} \frac{M_{N_2}}{M_{miste}} = 0.754$$

$$c_{O_2} = X_{O_2} \frac{M_{O_2}}{M_{miste}} = 0.232$$

$$c_{Ar} = X_{Ar} \frac{M_{Ar}}{M_{miste}} = 0.0138$$

$$C_p = \frac{\partial}{\partial T} \left(e + \frac{pT}{M} \right)_s = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{L R T}{2 M} + \frac{R T}{M} \right) = \frac{L+2}{2} \frac{R}{M} \quad \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$$

$$C_v = \frac{\partial}{\partial T} (e)_v = \frac{L}{2} \frac{R}{M} \quad \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$$

$$C_{p,mix} = \sum C_{p,i} \cdot c_i = 1193.21 \text{ J/kg} \cdot K$$

$$C_{v,mix} = \sum c_i C_{v,i} = 882.537 \text{ J/kg} \cdot K$$

$$C_{p,CH_4} = 4 \frac{R}{M} = 2078.5 \text{ J/kg} \cdot K$$

$$C_{p,CO} = \frac{7}{2} \frac{R}{M} = 1033.25 \text{ J/kg} \cdot K$$

$$C_{v,CH_4} = 3 \frac{R}{M} = 1558.875 \text{ J/kg} \cdot K$$

$$C_{v,CO} = \frac{5}{2} \frac{R}{M} = 742.321 \text{ J/kg} \cdot K$$

$$C_{p,C_2H_6} = 4 \frac{R}{M} = 1108.53 \text{ J/kg} \cdot K$$

$$C_{v,C_2H_6} = 3 \frac{R}{M} = 831.4 \text{ J/kg} \cdot K$$

$$\Rightarrow \gamma_{mix} = 1.352 \quad \text{altre formule: } \gamma_{mix} = \frac{\sum_i \chi_i (L_i + 2)}{\sum_i \chi_i L_i}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\gamma_{mix} \frac{R T}{M_{mix}}} = 368.335 \text{ m/s}$$

esercizio 3.5

$$\left. \begin{array}{l} - 4 \text{ m}^3 \text{ N}_2 \\ - 36 \text{ m}^3 \text{ H}_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} T = 0^\circ \text{C} = 273 \text{ K} \\ p = 1,013 \text{ bar} = 101300 \text{ Pa} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} - 4 \text{ m}^3 \text{ N}_2 \\ - 36 \text{ m}^3 \text{ H}_2 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{condizioni} \\ \text{standard} \end{array}$$

Calcolare composizioni volumetriche e ponderali, numero di moli dei singoli comp. e massa molecola miscela.

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{N_2} = \frac{V_{N_2}}{V_{TOT}} = \frac{N_{N_2}}{N_{TOT}} = \frac{1}{10} \\ \chi_{H_2} = \frac{9}{10} \end{array} \right.$$

perché, considerando il ming. comp. i' alle pres. p:

$$\begin{aligned} p V_i &= N_i R T \rightarrow p \sum V_i = \sum N_i R T \\ p V_T &= N_T R T \Rightarrow \frac{V_i}{V_T} = \frac{N_i}{N_T} = \chi_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M_{\text{miscel}} = X_{\text{NH}_3} M_{\text{NH}_3} + X_{\text{He}} M_{\text{He}} = 10,916 \text{ Kg/Mole}$$

$$N_{\text{NH}_3} = X_{\text{NH}_3} N_T = 1,92 \text{ Moli} \rightarrow m_{\text{NH}_3} = 32.64 \text{ Kg}$$

$$N_{\text{He}} = 1,6306 \text{ Moli} \rightarrow m_{\text{He}} = 6,7624 \text{ Kg}$$

esercizio 3.7

Si conosce la velocità del suono in una miscela di He e Ar a $T=30^\circ\text{C}$
 $a = 710 \text{ m/s}$.

Calcolare concentrazioni ponderali e $c_{p, \text{miscel}}$.

$$a = \sqrt{\frac{\gamma_{\text{miscel}} R T}{M_{\text{miscel}}}} \quad \gamma_{\text{miscel}} = \frac{c_{p, \text{miscel}}}{c_{v, \text{miscel}}} = \frac{\sum_i X_i (L_i + 2)}{\sum_i X_i L_i}$$

$$\frac{\gamma_{\text{miscel}}}{M_{\text{miscel}}} = \frac{a^2}{RT} = 0.2 \rightarrow \gamma_{\text{miscel}} = 0.2 M_{\text{miscel}}$$

$$\gamma_{\text{miscel}} = \frac{5X_{\text{He}} + (1-X_{\text{He}}) \cdot 5}{3X_{\text{He}} + (1-X_{\text{He}}) \cdot 3} = \frac{5}{3} \Rightarrow M_{\text{miscel}} = 8.333 \text{ Kg/Mole}$$

$$M_{\text{miscel}} = X_{\text{He}} M_{\text{He}} + (1-X_{\text{He}}) M_{\text{Ar}} \rightarrow X_{\text{He}} = \frac{M_{\text{miscel}} - M_{\text{Ar}}}{M_{\text{He}} - M_{\text{Ar}}} = 0.87962$$

$$X_i = \frac{N_i}{N_t} = \frac{m_i}{m_t} \frac{M_{\text{miscel}}}{M_i} \quad X_{\text{Ar}} = 0.12038$$

$$c_{\text{He}} = X_{\text{He}} \frac{M_{\text{He}}}{M_{\text{miscel}}} = 0.422 \rightarrow c_{\text{Ar}} = 0.578$$

$$c_{p, \text{miscel}} = c_{\text{He}} c_{p_{\text{He}}} + c_{\text{Ar}} c_{p_{\text{Ar}}} = 0,422 \frac{L+2}{2} \frac{R}{M_{\text{He}}} + 0,578 \frac{L+2}{2} \frac{R}{M_{\text{Ar}}} = 8493.16 \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot \text{K}}$$

esercizio 3.10

Calcolare la temperatura di stacco di una corrente d'aria a $V = 400 \text{ m/s}$ alla temperatura statica di $T = 250^\circ\text{C}$.

Per l'aria $R^* = \frac{R}{M} = 287 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$

Ricordando che:

$$H = h + \frac{v^2}{2} = c_p T + \frac{v^2}{2} = c_p T_0 \rightarrow T_0 = T + \frac{v^2}{2c_p}$$

$$c_p = 1005 \text{ J/kg}\cdot\text{K} \rightarrow T_0 = 602,6 \text{ K}$$

esercizio 3.11

miscela con: 6 kg He } inizialmente a $p_1 = 8 \text{ bar}$ e $T_1 = 350 \text{ K}$
 40 kg CH_4 } viene fatta espandere isentropicamente
 fino a $p_2 = 1,6 \text{ bar}$

Trovare densità e temperatura finali.

$$M_{\text{misc}} = \frac{1}{\frac{c_{\text{He}}}{M_{\text{He}}} + \frac{c_{\text{CH}_4}}{M_{\text{CH}_4}}} = 11,5 \text{ kg/Mole}$$

$$p_1/\rho_1 = \frac{R}{M_{\text{misc}}} T_1 \rightarrow \rho_1 = \frac{p_1 M_{\text{misc}}}{RT_1} = 3,161 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\chi_{\text{misc}}? \quad \chi_{\text{He}} = c_{\text{He}} \frac{M_{\text{misc}}}{M_{\text{He}}} = 0,375 \rightarrow \chi_{\text{CH}_4} = 0,625$$

$$\gamma_{\text{misc}} = \frac{0,375(3+2) + 0,625(5+2)}{0,375 \cdot 3 + 0,625 \cdot 5} = 1,41 = \gamma$$

$$\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} \rightarrow \rho_2 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma} \rho_1 = 1,00948 \text{ kg/m}^3$$

$$p v^\gamma = \text{cost}, \quad v \propto \frac{1}{\rho} \rightarrow p \frac{1}{\rho^\gamma} = \text{cost} \rightarrow \frac{1}{\rho}^{\gamma-1} = \text{cost} \rightarrow T_2 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_1 = 219 \text{ K}$$

$$T_0 = T_{CR} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\right) \rightarrow T_{CR} = \frac{T_0}{1 + \frac{\gamma-1}{2}} = 270 \text{ K}$$

Dell'ep. di stato dei gas perfetti:

$$\frac{p_0}{p_0} = \frac{R}{M_{mixe}} T_0 \quad M_{mixe} = \frac{1}{\frac{0.6}{2} + \frac{0.4}{28}} = 3.1818 \text{ kg/Mole}$$

$$\rho_0 = \frac{p_0 M_{mixe}}{R T_0} = 0,05793 \text{ kg/m}^3 \quad \text{densità di ossigeno}$$

Riconducendo che:

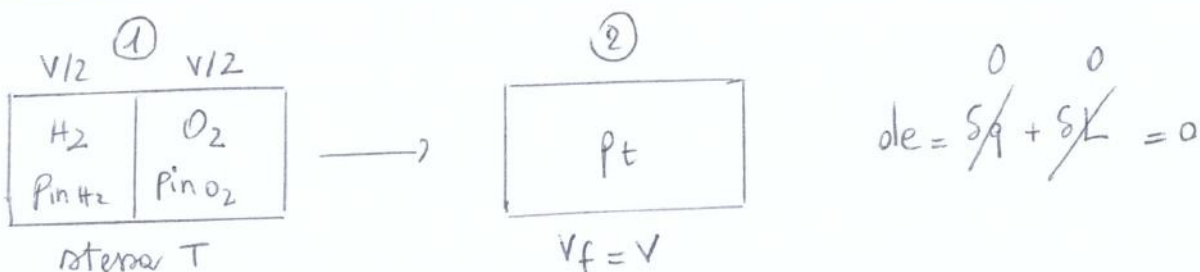
$$p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \rightarrow p_{CR} = \frac{p_0}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = 259122 \text{ Pa}$$

$$\rho_{CR} = \frac{p_{CR} M_{mixe}}{R T_{CR}} = 0,036728 \text{ kg/m}^3 \quad \text{densità in gola}$$

$$V_{CR} = a_{CR} = \sqrt{\gamma \frac{R T_{CR}}{M_{mixe}}} = 933,835 \text{ m/s} \quad \text{velocità in gola}$$

$$\Rightarrow G = \rho_{CR} V_{CR} A_{CR} = 7,30 \text{ kg/s}$$

esercizi 3.14



$$\Rightarrow c \frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow T = \text{costante (trasformazione isoterma)}$$

- $p_{in H_2} \frac{V}{2} = p_{f H_2} V \rightarrow p_{f H_2} = \frac{p_{in H_2}}{2}$
 - $p_{in O_2} \frac{V}{2} = p_{f O_2} V \rightarrow p_{f O_2} = \frac{p_{in O_2}}{2}$
- } le pressioni dimezzano e i volumi raddoppiano

$$m_{\text{geo}} = \frac{582}{9,81} - 54 = 5,327 \text{ Kg}$$

$$P_{\text{int}} - P_{\text{AMB}} = 148 \cdot 10^5 \text{ Pa} \rightarrow P_{\text{int}} = 149 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V = 39,8 \text{ L} = 39,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = 133,844 \text{ Kg/m}^3$$

$$\frac{P_{\text{int}}}{\rho} = \frac{R}{M_{\text{mixe}}} T \rightarrow M_{\text{mixe}} = \frac{\rho R T}{P_{\text{int}}} = 22,2556 \text{ Kg/Mol}$$

$$M_{\text{mixe}} = X_{\text{He}} \cdot 4 + (1 - X_{\text{He}}) \cdot 28$$

$$X_{\text{He}} = \frac{M_{\text{mixe}} - 28}{4 - 28} = 0,23935$$

$$X_{\text{N}_2} = 0,76065$$

FORMULA DI SUTHERLAND

La sezione efficace d'urto σ dipende dalla temperatura e del campo di forze. Considerando GAS NON IONIZZATI Sutherland propose di scrivere:

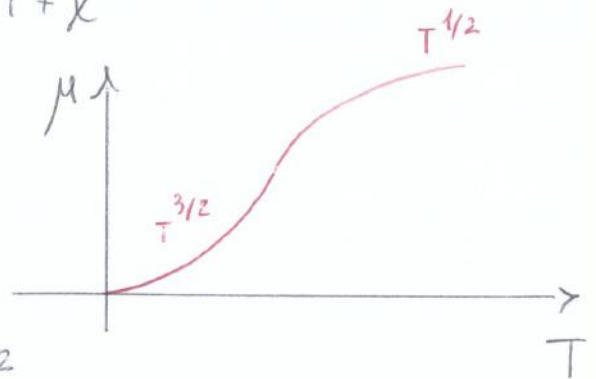
$$\sigma = \sigma_{\infty} \left(1 + \frac{\chi}{T} \right) \quad \text{con } \sigma_{\infty} \text{ valore a cui tende } \sigma \text{ per } T \rightarrow \infty$$

$\chi \rightarrow$ temperature caratteristiche

Poiché: $\mu \propto \frac{\sqrt{m} \sqrt{T}}{\sigma} \Rightarrow \mu \propto \left(\frac{\sqrt{m}}{\sigma_{\infty}} \right) \frac{T^{3/2}}{T + \chi}$

PER GAS PURI:

$$\mu = S \frac{T^{3/2}}{T + \chi} \quad \left[\frac{\text{Kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right]$$



osserviamo che se $T \ll \chi \Rightarrow \mu \propto T^{3/2}$
 se $T \gg \chi \Rightarrow \mu \propto T^{1/2}$

Per miscele di gas con componenti aventi masse molecolari molto diverse fra loro, la formula di Sutherland non dà risultati soddisfacenti

\Rightarrow Si ricorrono a formule più complesse, come la FORMULA DI WILKE
 Benché l'aria non sia miscela di gas, si ottengono buoni risultati usando le formule di Sutherland

FORMULA MONOMIA

Una espressione spesso utilizzata per il calcolo di μ è la seguente:

$$\frac{\mu}{\mu_{RIF}} = \left(\frac{T}{T_{RIF}} \right)^{\omega}$$

È una rappresentazione un' approssimazione delle formule di Sutherland di più facile impiego.

È funzione di T per cui tale formula non è in generale utilizzabile in ampie variazioni di T ma, scegliendo opportunamente ω , approssima bene l'andamento reale della viscosità nell'intervallo delle temp. T_{RIF} prescelta.

esercizio 4.5

Determinare il valore dell'esponente w della formula monomiale che meglio approssima la formula di Sutherland per l'aria, nell'intervallo tra $T_{RIF} = 300 K$ e $T_{RIF} = 1000 K$.

$$\mu_{RIF 300} = S \frac{T_{RIF}^{3/2}}{\chi + T} \quad S = 1,46 \cdot 10^{-6} \frac{Kg}{m \cdot s \cdot K^{1/2}} \quad \chi = 110 K$$

$$\mu_{RIF 300} = 1,85 \cdot 10^{-5} \frac{Kg}{m \cdot s} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu}{\mu_{RIF}} = \left(\frac{T}{T_{RIF}} \right)^w \quad \text{formula monomiale}$$

$$\mu_{RIF 1000} = 4,159 \cdot 10^{-5} \frac{m \cdot s}{Kg}$$

Dividendo membro a membro:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= S \frac{T^{3/2}}{\chi + T} \\ \mu_{RIF} &= S \frac{T_{RIF}^{3/2}}{(\chi + T)_{RIF}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\mu}{\mu_{RIF}} = \left(\frac{T}{T_{RIF}} \right)^{3/2} \cdot \frac{(\chi + T_{RIF})}{(\chi + T)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T}{T_{RIF}} \right)^{3/2} \frac{\chi + T_{RIF}}{\chi + T} = \left(\frac{T}{T_{RIF}} \right)^w$$

passando ai logaritmi:

$$\ln \left[\frac{\chi + T_{RIF}}{\chi + T} \left(\frac{T}{T_{RIF}} \right)^{3/2} \right] = w \ln \frac{T}{T_{RIF}}$$

$$\ln \frac{\chi + T_{RIF}}{\chi + T} + \frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_{RIF}} = w \ln \frac{T}{T_{RIF}}$$

$$\Rightarrow \boxed{w} = \frac{\ln \frac{\chi + T_{RIF}}{\chi + T} + \frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_{RIF}}}{\ln \frac{T}{T_{RIF}}} = \boxed{\frac{3}{2} + \frac{\ln \frac{\chi + T_{RIF}}{\chi + T}}{\ln \frac{T}{T_{RIF}}}} \Rightarrow \begin{cases} \text{ALTE } T \\ w \approx 0.6 \\ \text{BASSE } T \\ w \approx 0.75 \end{cases}$$

VEDERE GRAFICO MATLAB

ESERCITAZIONE 2

Esercizio 4.1 – VISCOSITA' DELL'ARIA

Calcolare e diagrammare la viscosità dinamica dell'aria al variare della temperatura utilizzando la formula di Sutherland.

Codice:

```
clear all

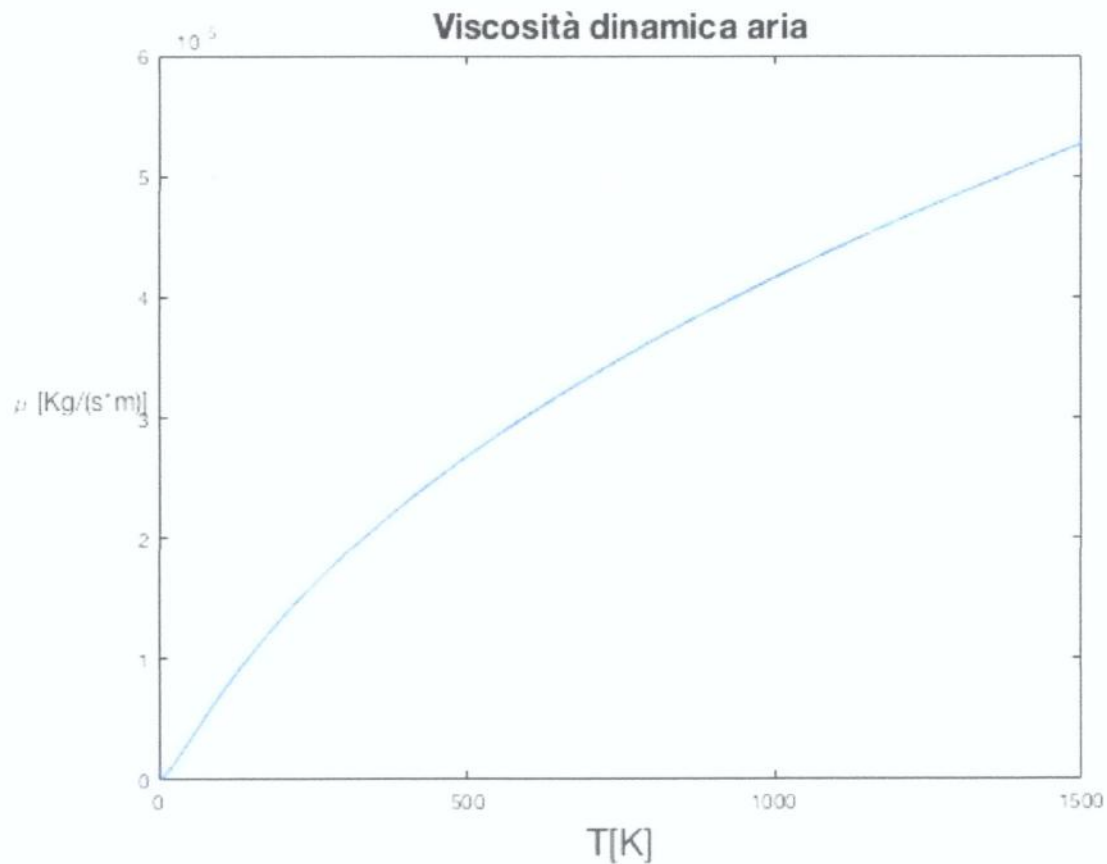
T=0:5:1500;
chi=110;
S=1.46*10^-6;

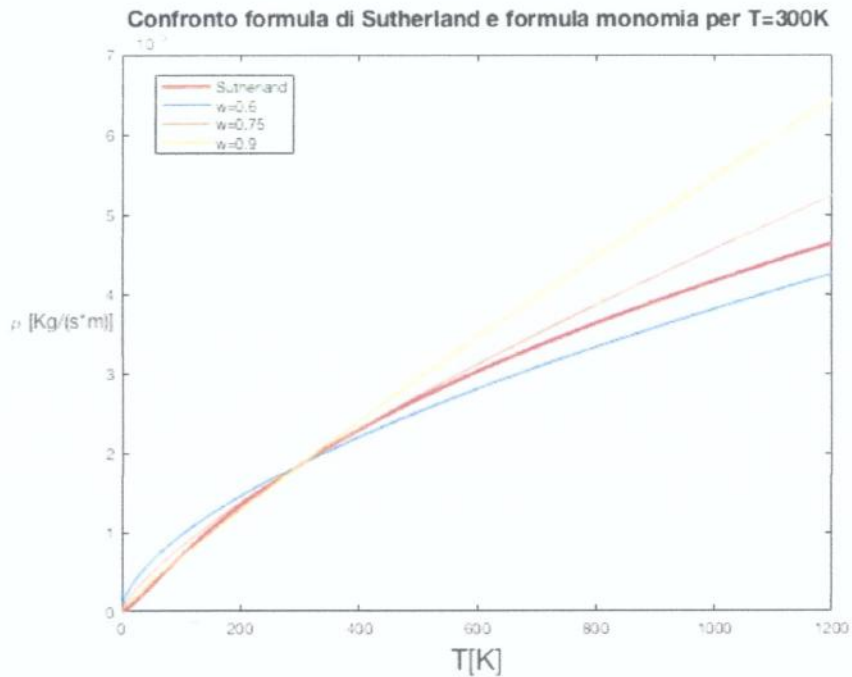
%formula di Sutherland%

mu=S*(T.^(3/2))./(T+chi);

plot(T,mu)

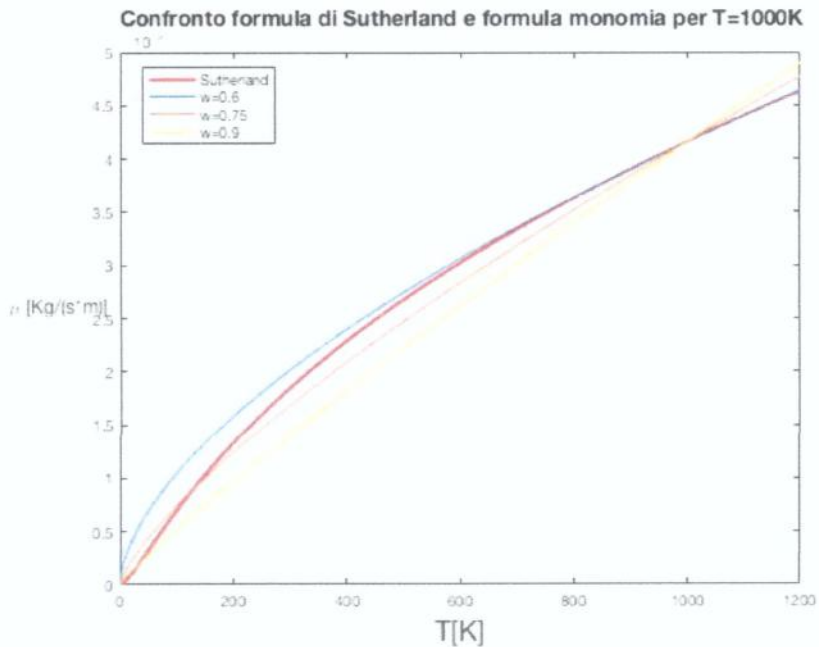
title('Viscosità dinamica aria','FontSize',16);
xlabel('T[K]','FontSize',18);
ylabel('\mu [Kg/(s*m)]','FontSize',12,'Rotation',0);
```



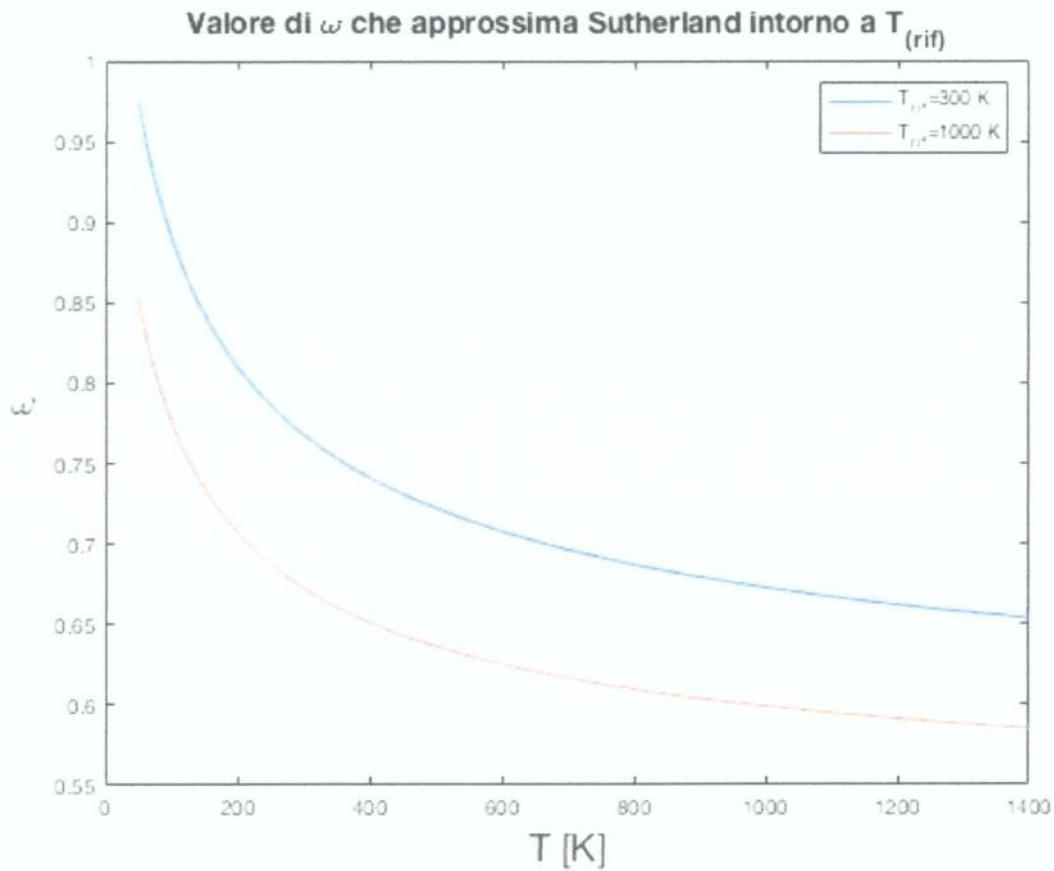


Si osserva come l'esponente $\omega=0.75$ approssimi bene i risultati ottenuti dalla formula di Sutherland nell'intorno di T=300K.

Cosa succede aumentando la temperatura?



L'esponente che meglio approssima l'andamento dei risultati ottenuti dalla formula di Sutherland nell'intorno di 1000K è $\omega=0.6$.



Esercizio 4.6 – VISCOSITA' DI UNA MISCELA DI COMPOSIZIONE VARIABILE

Calcolare la viscosità di una miscela di H₂ e O₂, tenuta alla temperatura T=288K, al variare delle concentrazioni volumetriche dei due componenti.

Implementando in Matlab la formula di Wilke per una miscela binaria si ha che:

Codice:

```
clear all

T=288;
c_h=0:0.05:1;
c_o=1-c_h;
M_h2=2;
M_o2=32;
S_h=0.65*10^-6;
S_o=1.65*10^-6;
chi_h=71;
chi_o=110;

mhu_h2=S_h*T^(3/2)/(chi_h+T);
mhu_o2=S_o*T^(3/2)/(chi_o+T);

G12=( (1+(mhu_h2/mhu_o2)^0.5*(M_o2/M_h2)^0.25) )^2/(2^1.5*(1+M_h2/M_o2)^0.5);
```

Esercizio 4.7 – VISCOSITA' MISCELA AL VARIARE DELLA TEMPERATURA

Determinare la viscosità di una miscela binaria avente la seguente composizione volumetrica: 90% H₂, 10% CO nel campo di temperature comprese tra 300 e 1000K.

Codice:

```
clear all

c_h2=0.9;
chi_h2=71;
M_h2=2;

c_co=0.1;
chi_co=109;
M_co=28;

T=300:1:1000;

mu_h2=0.65*10^-6*(T.^(3/2))./(T+chi_h2);

mu_co=1.40*10^-6*(T.^(3/2))./(T+chi_co);

G12=(1+(mu_h2./mu_co).^0.5*(M_co/M_h2)^0.25).^2/(2^1.5*(1+(M_h2/M_co))^0.5);
G21=(1+(mu_co./mu_h2).^0.5*(M_h2/M_co).^0.25).^2/(2^1.5*(1+(M_co/M_h2))^0.5);

mu=mu_h2./(1+G12*(c_co/c_h2))+mu_co./(1+G21*(c_h2/c_co));

plot(T,mu)

title('Variazione viscosità miscela 90% H2, 10% CO al variare della
temperatura ');
xlabel('T[K]', 'FontSize', 18);
ylabel('\mu [kg/(m*s)]', 'FontSize', 12, 'Rotation', 0);

hold on

mu_h2=0.65*10^-6*T.^(3/2)./(71+T);

plot(T,mu_h2)

hold on

%G12, G21 dipendono poco dalla temperatura, per cui l'andamento della
%viscosità della miscela al variare della temperatura può essere calcolato
%mediante la formula monomia valida per gas monocomponente, in quanto
%varier di più o meno con la stessa legge con cui variano le viscosità dei
%singoli componenti%

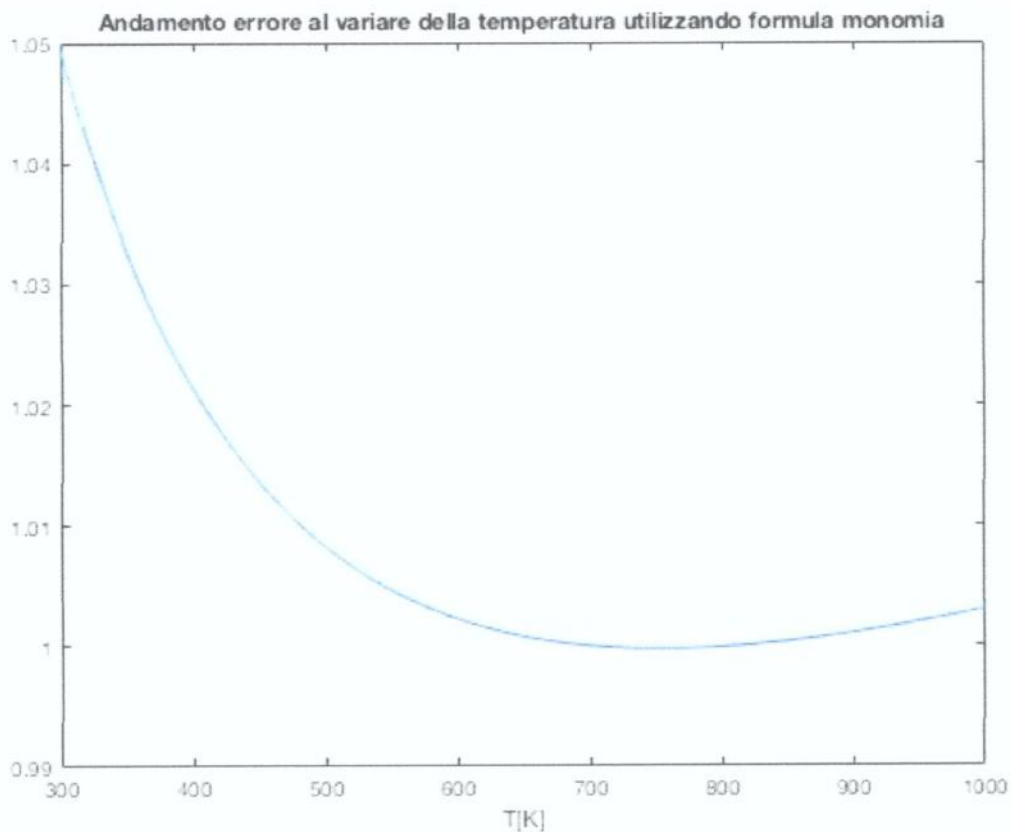
T_rif=700;
mu_rif_h2=0.65*10^-6*T_rif^(3/2)/(71+T_rif);
mu_rif_co=1.40*10^-6*T_rif^(3/2)/(109+T_rif);
w=0.6;

G12_rif=(1+(mu_rif_h2/mu_rif_co)^0.5*(M_co/M_h2)^0.25)^2/(2^1.5*(1+(M_h2/M_co))^0.5);
G21_rif=(1+(mu_rif_co/mu_rif_h2)^0.5*(M_h2/M_co).^0.25)^2/(2^1.5*(1+(M_co/M_h2))
```

Diagrammando l'andamento della viscosità della miscela in funzione della temperatura si ottiene la curva blu rappresentata in figura. Poiché i coefficienti G12 e G21 dipendono poco dalla temperatura, l'andamento della viscosità della miscela in funzione della temperatura ricalca l'andamento delle viscosità con la temperatura dei singoli componenti della miscela, ricavabile mediante la formula monomia.

Allora, è possibile utilizzare la formula monomia anche per calcolare la variazione di viscosità della miscela al variare della temperatura, ottenendo la curva gialla.

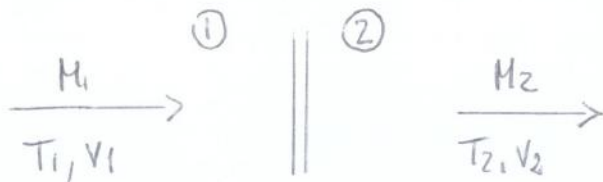
L'errore che si ottiene rapportando la viscosità ottenuta con la formula monomia alla viscosità effettiva della miscela calcolata con Wilke è diagrammato nel grafico seguente:



Si osserva un errore massimo del 5% quando $T=300K$, che è la temperatura più lontana da quella di riferimento utilizzata per approssimare la viscosità della miscela mediante la formula monomia ($T_{ref}=700K$).

n° 5.5 pag. 43 - RIPARTIZIONE ENERGIA TOTALE NEU' URTO RETTO

Una corrente d'aria supersonica con temperatura statica $T_1 = 300\text{K}$ e velocità a monte $V_1 = 1100\text{ m/s}$ subisce un urto retto. Calcolare la percentuale di energia cinetica a monte e a valle dell'urto e la percentuale di entalpia statica a monte e a valle dell'urto.



$$H_1 = H_2 \rightarrow h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

Dalle tabelle:

$$M_1 = \frac{1100}{\sqrt{\gamma R/M T}} = 3.168 \rightarrow M_2 = 0.4653$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 2.8846 \rightarrow T_2 = 865.38\text{K}$$

$$a_2 = \sqrt{\gamma R/M T_2} = 389.69\text{ m/s}$$

$$\Rightarrow V_2 = M_2 a_2 = 274.733\text{ m/s}$$

$$H = c_p T_1 + \frac{V_1^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2} R T_1 + \frac{V_1^2}{2} = 906377.477\text{ J/kg}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{V_1^2/2}{H} &\cong 66.74\% \\ \frac{h_1}{H} &\cong 33.26\% \end{aligned} \right\} \text{PRIMA DELL'URTO}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_2^2/2}{H} &\cong 4.16\% \\ \frac{h_2}{H} &\cong 95.836\% \end{aligned} \right\} \text{DOPO L'URTO}$$

l valle dell'urto si ha una forte riduzione dell'energia cinetica, non solo perché il gas si comprime e rallenta, ma anche perché una parte dell'energia meccanica si trasforma in calore per effetto delle forze viscose

5.2

Con gli stessi dati del problema 5.1 trovare la temperatura di stacco comune delle correnti a monte e a valle dell'urto.

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = 700 \text{ m/s} \\ v_2 = 600 \text{ m/s} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{u_1}{u_2} = 1.75 \rightarrow M_1 = 1.4348$$

$$\Rightarrow M_2 = 0.7252$$

$$\frac{M_1}{u_1} = \frac{1}{a} \rightarrow a = \frac{u_1}{M_1} = \sqrt{\frac{\gamma R}{M} T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{u_1^2 M}{\gamma R M_1^2} = 592.33 \text{ K}$$

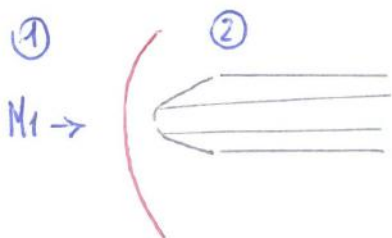
$$\Rightarrow T_0 = T_{01} = T_{02} = T_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) = 836.210 \text{ K}$$

5.3 TUBO DI PITOT IN CORRENTE SUPERSONICA

Un tubo di pitot, munito di prese di pressione totale e prese di pressione statica, inserito in una corrente supersonica, fornisce i seguenti dati:

$p_0 = 0.53 \text{ bar}$; $p = 0.38 \text{ bar}$. Moti $T_0 = 350 \text{ K}$, ricavare la velocità della corrente.

OSS: il tubo di pitot è un corpo non appuntito \Rightarrow in una corrente supersonica genera un urto curvo e staccato che in prossimità del tubo si può considerare un urto retto \Rightarrow le pressioni misurate dallo strumento saranno p_{02} e p_2 e valle dell'urto retto



$$\Rightarrow \frac{p_{02}}{p_2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$M_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_{02}}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} = 0.706$$

$$T_{01} = T_{02} = T_0$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{T_0}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)}$$

\hookrightarrow tabelle $\Rightarrow M_1 = ?$ non troppo preciso

$$\frac{p_2}{p_1} = f(M_1) = 1 + \frac{\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1)}$$

$$\frac{p_{02}}{p_2} = \frac{p_{02}}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{p_{02}}{p_1} = \frac{p_{02}}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1}$$

$$\Rightarrow \frac{p_{02}}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \frac{1}{\frac{\gamma+1 + 2\gamma(M_1^2-1)}{\gamma+1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \frac{\gamma+1}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}$$

$$M_2^2 = \frac{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{p_{02}}{p_1} &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1} = \\ &= \left(\frac{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1 + \gamma - \gamma + \frac{1}{2}(\gamma^2 - 2\gamma + 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1} = \\ &= \left(\frac{2\gamma M_1^2 + \frac{\gamma^2 M_1^2}{2} - \gamma M_1^2 + M_1^2 \frac{1}{2}}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1} = \\ &= \left(\frac{2\gamma M_1^2 + \gamma^2 M_1^2 + M_1^2}{2[2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)]}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1} = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{M_1^2 (\gamma+1)^2}{2[2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)]}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1} = 18.75$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\gamma+1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1}\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{p_{02}}{p_1}$$

FORMULA DI RAYLEIGH

L7 due Metodi

per $\frac{p_{02}}{p_1} = 18.75 \rightarrow M_1 = 3.768$

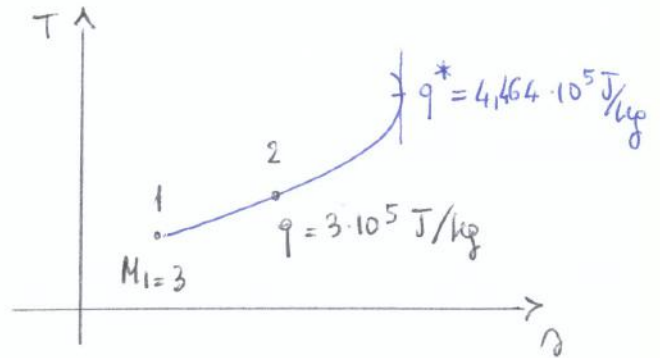
3.15 p.110

Calcolare q^* che manda in choking il condotto precedente

$$q^* = c_p (T_0^* - T_{10}) \text{ , perché se } q = q^* \rightarrow M_2 = M_2^* = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{T_{01}}{T_0^*} = 0.6540 \\ T_{01} = 840 \text{ K} \end{array} \right\} \rightarrow T_0^* = 1284,4 \text{ K}$$

$$\Rightarrow q^* = c_p (T_0^* - T_{10}) = 4,464 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$$



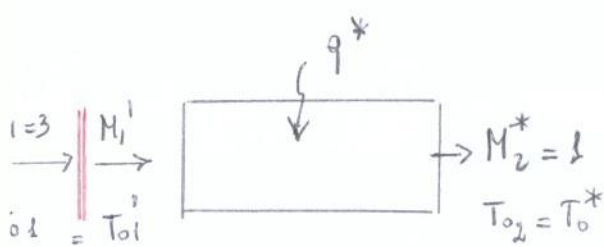
3.16 p.110

Calcolare le nuove condizioni di ingresso nel condotto se

$$q' > q^* = 6 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$$

Ipotesi: nuovo morsa su vito netto che modifichi le condizioni di ingresso, ma che mantenga sempre l'uscita.

$$\Rightarrow q' = q^* (M_1')$$



A cavallo dell'vito si conserva la temperatura totale

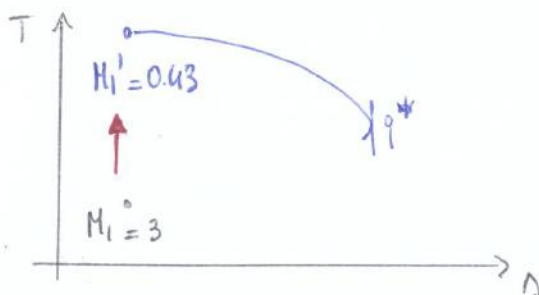
$$\Rightarrow T_{01}' = T_{01} = 840 \text{ K}$$

$$q^* = c_p (T_0^* - T_{01})$$

$$T_0^* = T_{01} + \frac{q^*}{c_p} = 1437,258 \text{ K}$$

Tabella

$$\Rightarrow \frac{T_{01}}{T_0^*} = 0.5844 \rightarrow M_1' \approx 0.43$$



$$M_1 = 0.3 \xrightarrow{\text{tab}} \left(\frac{4 \bar{c}_f L^*}{D} \right)_1 = 5.2993 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow \left(\frac{4 \bar{c}_f L^*}{D} \right)_2 = 1.2993$$

$$\left(\frac{4 \bar{c}_f L}{D} \right)_{\text{crit}} = 4$$

⇒ tabelle → $M_2 \approx 0.475$

$$P_2/P^* = 2.2561 \rightarrow P_2 = \frac{P_2}{P^*} \frac{P^*}{P_1} P_1 = 0,62338 \text{ atm}$$

$$\rho_2/\rho^* = 1.96625 \rightarrow \rho_2 = \frac{\rho_2}{\rho^*} \frac{\rho^*}{\rho_1} \rho_1 = 0,81674 \text{ Kg/m}^3$$

$$T_2/T^* = 1.14815 \rightarrow T_2 = \frac{T_2}{T^*} \frac{T^*}{T_1} T_1 = 265,901 \text{ K}$$

$$\frac{P_{20}}{P_0^*} = 1.39095 \rightarrow P_{20} = \frac{P_{20}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{10}} P_{10} = 0.7275 \text{ atm}$$

$$\frac{T_{20}}{T_0^*} = \frac{T_{10}}{T_0^*} \Rightarrow T_{20} = T_{10} = T_1 (1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2) = 277.914 \text{ K} \text{ perché } q = 0 \Rightarrow h_1 = h_2.$$

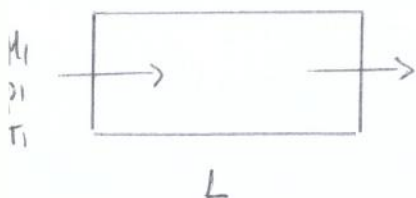
Qual è la lunghezza necessaria L^* a mandare in choking il combustibile?

CHOKING → $M_2 = M_2^* = 1$

Se $M_1 = 0.3$ e per $M_1 = 0.3 \rightarrow \left(\frac{4 \bar{c}_f L^*}{D} \right) = 5.2993$

$$\Rightarrow L^* = \frac{5.2993 D}{4 \bar{c}_f} = 33.744 \text{ m}$$

3.18



$$M_1 = 3$$

$$\bar{c}_f = 0.005$$

$$P_1 = 1 \text{ atm}$$

$$D = 0.4 \text{ ft} = 0.12192 \text{ m}$$

$$T_1 = 300 \text{ K}$$

$$L = 5 \text{ ft} = 1.524 \text{ m}$$

Calcolare M_2, P_2, T_2, P_{02}

es. 5.7 p. 45

Calcolare il valore minimo teorico $M_{2, \min}$ a valle di un tubo netto

Riconducendo che:

$$u_1 u_2 = e^* \Rightarrow M_2^* = \frac{1}{M_1^*}$$

$$\frac{e^2}{\gamma-1} + \frac{v^2}{2} = \frac{e^{*2}}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \frac{(\gamma+1)M_2^2}{2+(\gamma-1)M_2^2} = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2}$$

$$\frac{1}{M^2} \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{M^{*2}} \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$M^{*2} = \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \cdot \frac{2+(\gamma-1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2} = \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}$$

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - (\frac{\gamma-1}{2})}$$

$$\Rightarrow \text{se } M_1^2 \rightarrow \infty \Rightarrow M_2^2 \rightarrow \frac{\gamma-1}{2\gamma} \Rightarrow$$

$$M_{2, \min} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = 0.3773 \quad (\gamma=1.4)$$

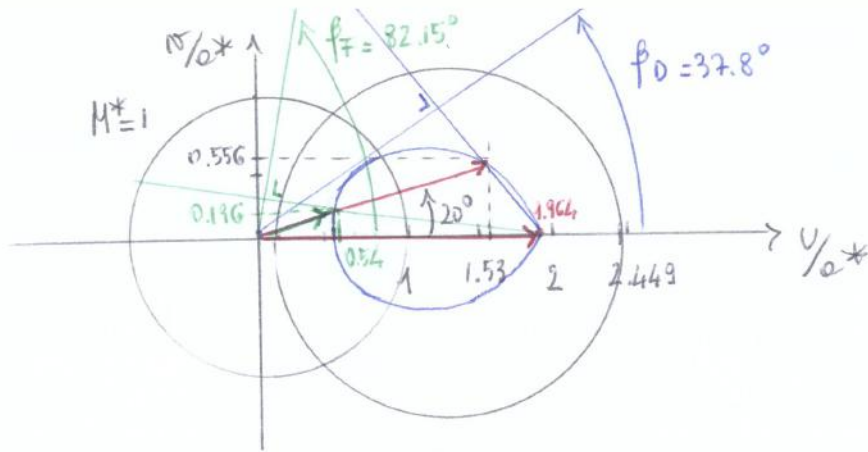


tabella $M_1 = 3$
 $\Rightarrow M^* = 1.964$

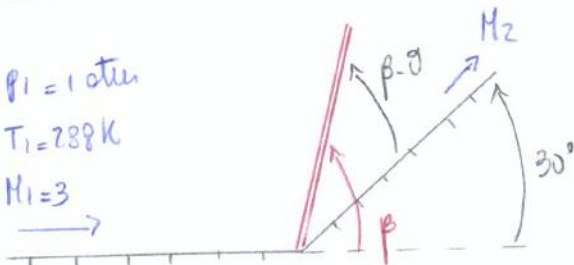
debole $M_2 = 1.9925$
 $M^* = 1.6284$

forte $M_2 = 0.539$
 $M^* = 0.575$

es. 4.2

Supponere ora che $\theta = 30^\circ$

$p_1 = 1 \text{ atm}$
 $T_1 = 288 \text{ K}$
 $M_1 = 3$



Calcolare $p_2, M_2, T_2, p_2^\circ, T_2^\circ$

supponendo:

- URTO DEBOLE
- URTO FORTE

$\theta - \beta - M \rightarrow \begin{cases} \beta_D = 52.01^\circ \\ \beta_F = 75.24^\circ \end{cases}$

URTO DEBOLE

$M_{in} = M_1 \sin \beta = 8.364$

Tabella: $M_{2m} = 0.5275 \rightarrow M_2 = 1.4075$

$p_2/p_1 = 6.3312 \rightarrow p_2 = 6.3312 \text{ atm}$

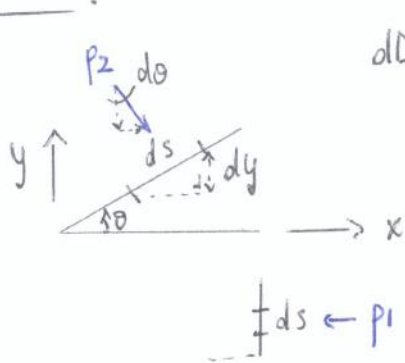
$T_2/T_1 = 2.0025 \rightarrow T_2 = 576.72$

$p_{02}/p_{01} = 0.5572 \rightarrow p_{02} = p_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \cdot 0.5572 = 20.467 \text{ atm}$

$T_{02} = T_{01} = T_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) = 806.4 \text{ K}$

\Rightarrow e poiché di esondizioni di monte, all'aumentare di θ l'urto diventa più intenso. Più è evidente della maggiore riduzione di M_2 e dell'incremento di p_2 rispetto al caso $\theta = 20^\circ$

Allone:



$$dD = \int [p_2 (ds \cdot 1) \sin \theta] - p_1 (ds \cdot 1) = \int [p_2 dy - p_1 dy]$$

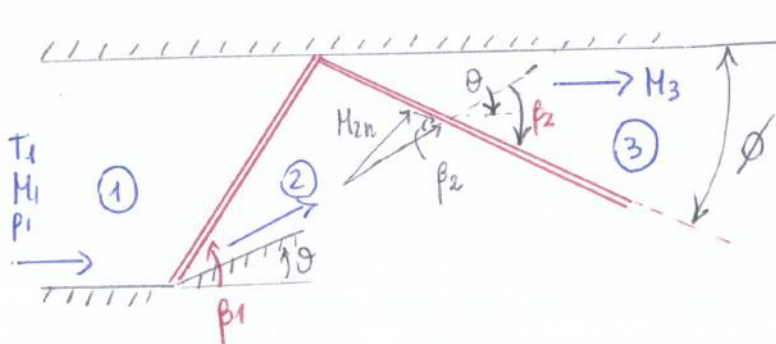
$$D = \int_0^{ctg \theta} (p_2 - p_1) dy = \int_0^{ctg \theta} (p_2 - p_1) e^{tg 15^\circ} dy$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho v^2 (c \cdot s)} = \frac{D}{\frac{\gamma}{2} c p_1 M_1^2} = \int \frac{(p_2 - p_1) e^{tg 15^\circ}}{\frac{\gamma}{2} p_1 M_1^2} = \frac{4}{\gamma} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \frac{tg 15^\circ}{M_1^2} = 0.1548$$

esercizio 4.10 p.153

Si consideri una corrente supersonica orizzontale con $M_1 = 2.8$, $p_1 = 1 \text{ atm}$, $T_1 = 519^\circ \text{R}$. Tale corrente incontra una rampa di compressione con $\theta = 16^\circ$. L'urto obliquo generato si propaga e ricade contro una parete superiore orizzontale.

Calcolare l'angolo β tra l'ondata riflessa e la parete orizzontale, il Mach, la pressione e la temperatura a valle dell'ondata riflessa



$$T_1 = 519^\circ \text{R} = 288,33 \text{ K}$$

$$\left. \begin{matrix} M_1 = 2.8 \\ \theta = 16^\circ \end{matrix} \right\} \Rightarrow \beta_{10} = 34.92^\circ \Rightarrow M_{1n} = M_1 \sin 34.92^\circ = 1.60$$

$$\Rightarrow \text{URTO RETTO: } M_{2n} = 0.6684$$

$$p_2/p_1 = 2.82 \rightarrow p_2 = 2.82 \text{ atm}$$

$$T_2/T_1 = 1.388 \rightarrow T_2 = 400.202 \text{ K}$$

$$M_2 = \frac{M_{2n}}{\sin(\beta - \theta)} = 2.06138$$

VRTO RETTO:

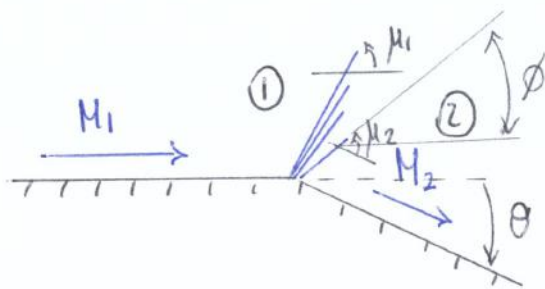
$$M_{3m} = 0.6078$$

$$\beta/p_2 = 3.7832 \rightarrow p_3 = 9.9736 \text{ atm}$$

$$T_3/T_2 = 1.5617 \rightarrow T_3 = 634.268 \text{ K}$$

$$M_3 = \frac{M_{3m}}{\sin(\beta_2 - \theta_1 - \theta_2)} = 1.259$$

ESERCIZIO 4.13 - ESPANSIONE DI PRANDTL MEYER



$$M_1 = 1.5$$

$$p_1 = 1700 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^2} = \frac{1700 \cdot 0.453 \cdot 9.81}{(0.3048)^2} = 81317.9035 \text{ Pa} = 0.8025 \text{ atm}$$

$$T_1 = 460^\circ \text{R} = 255.556 \text{ K}$$

$$\theta_2 = 20^\circ$$

Calcolare M_2 , p_2 , T_2 , p_{02} , T_{02} e μ_1 , μ_2 .

$$p_{02} = p_{01} = p_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 2,946 \text{ atm}$$

$$T_{02} = T_{01} = T_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) = 370.556 \text{ K}$$

$$d\theta = \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \Rightarrow \Delta\theta = \nu(M_2) - \nu(M_1) \text{ con } \Delta\theta (+) \text{ perché espansivo}$$

$$\Rightarrow \nu(M_2) = \underbrace{\nu(M_1)}_{11.9052^\circ} + \Delta\theta = 11.9052^\circ + 20^\circ = 31.9052^\circ \rightarrow M_2 \approx 2.21$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{p_{02}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = 0.2712 \text{ atm}$$

$$T_2 = \frac{T_{02}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)} = 187.45 \text{ K}$$

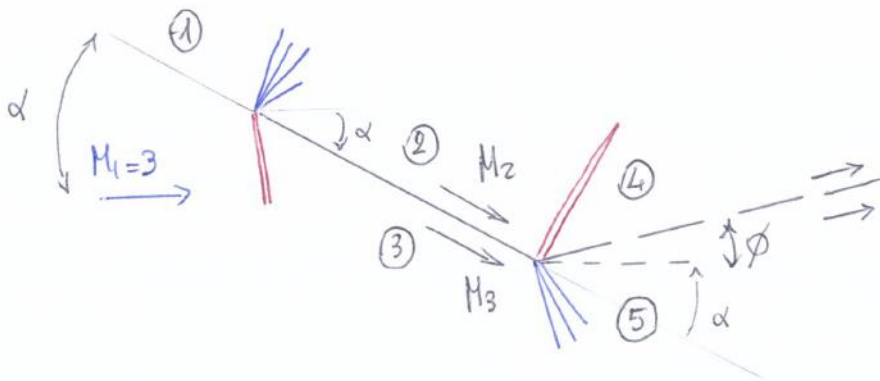
$$\Rightarrow \mu_1 = \arcsin \frac{1}{M_1} = 41.81^\circ$$

$\mu_2 = \arcsin \frac{1}{M_2} = 26.90^\circ$ e rispetto alla corrente uniforme l'ultima linea del fascio di espansione forma un angolo ϕ pari a: $\phi = M_2 - \theta_2 = 6.9^\circ$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_L = \frac{2}{\gamma \cdot 2.6^2} (1.4032 - 0.70239) \cos 5^\circ = 0.1475 \\ C_D = \frac{2}{\gamma \cdot 2.6^2} (1.4032 - 0.70239) \sin \alpha = 0.0129 \end{cases}$$

4.16

Considerare una piuma piuma posta ad $\alpha = 20^\circ$ in una corrente a $M_1 = 3$.
Calcolare l'angolo di inclinazione delle slip line ϕ rispetto alla direzione orizzontale.



CAMPO 2

$$\nu(M_1) = 69.7573^\circ \rightarrow \nu(M_2) = \nu(M_1) + \alpha = 69.7573^\circ \rightarrow M_2 \approx 4.32$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2^\circ} \cdot \frac{P_2^\circ}{P_1^\circ} \cdot \frac{P_1^\circ}{P_1} = \frac{1}{230.5742} \cdot 36.7327 = 0.1593$$

$$\frac{P_2^\circ}{P_1^\circ} = 230.5742$$

CAMPO 3

$$\theta = \alpha = 20^\circ \left. \begin{array}{l} \theta - \beta - \mu \\ M_1 = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \beta = 37.76^\circ \Rightarrow M_{1m} = 1.83706 \Rightarrow M_{3m} = 0.6078$$

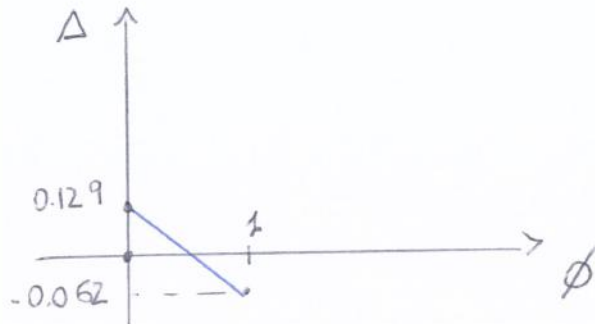
$$P_2/P_1 = 3.7832$$

$$\Rightarrow M_3 = \frac{M_{3m}}{\sin(\beta - \theta)} = 1.9925$$

Mel caso del libro, i risultati ottenuti erano:

$$\phi = 0^\circ \quad p_4/p_1 = 0.921 \quad p_5/p_1 = 1.05 \quad \rightarrow \Delta_1 = 0.129$$

$$\phi = 1^\circ \quad p_4/p_1 = 1.036 \quad p_5/p_1 = 0.974 \quad \rightarrow \Delta_2 = -0.062$$



\Rightarrow Interpolazione lineare:

$$y - 0.129 = \underbrace{(-0.062 - 0.129)}_m (x - 0)$$

$$\Delta = 0.129 - 0.191 \phi$$

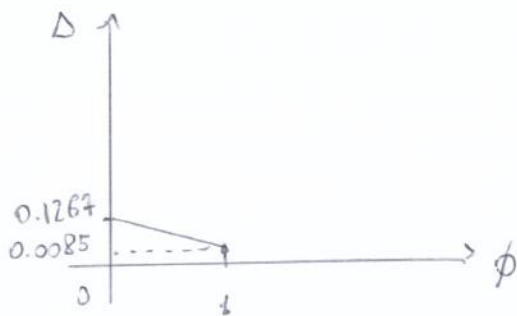
Per $\Delta = 0$:

$$\phi = \frac{0.129}{0.191} = 0.675^\circ$$

Con i miei risultati:

$$\phi = 0^\circ \quad p_4/p_1 = 0.9143 \quad p_5/p_1 = 1.041 \quad \rightarrow \Delta_1 = 0.1267$$

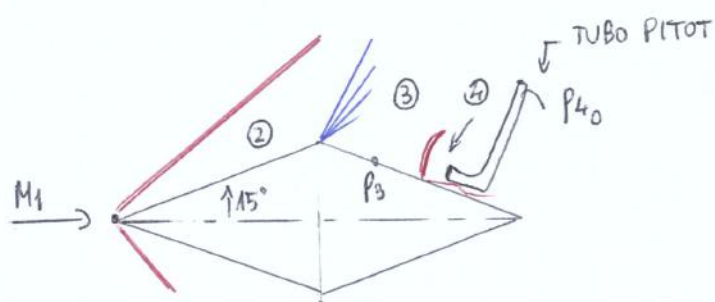
$$\phi = 1^\circ \quad p_4/p_1 = 0.9791 \quad p_5/p_1 = 0.9876 \quad \rightarrow \Delta_2 = 0.0085$$



$$\Delta = 0.1267 - 0.1182 \phi$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \phi = \frac{0.1267}{0.1182} = 1.07^\circ$$

es. p. 173 n° 4.14



$$\theta = 15^\circ$$

$$P_4^0 = 2.596 \text{ atm}$$

$$P_3 = 0.1 \text{ atm}$$

Calcolare il Mach di monte.

Approssimare l'urto curvo e deceduto a monte del Pitot come urto retto.

Modo 1

$$\frac{P_4^0}{P_3} = \frac{P_4^0}{P_3^0} \cdot \frac{P_3^0}{P_3} = \left[\frac{1 + \frac{\gamma}{2} (M_3^2 - 1)}{\gamma + 1} \right]^{-\frac{1}{\gamma - 1}} \cdot \left[\frac{(\gamma + 1) M_3^2}{(\gamma - 1) M_3^2 + 2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \cdot \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 25.96$$

\downarrow relazione urto retto \downarrow isentropica

Tale relazione può essere disegnamata in f di M_3 , ricavando per ogni valore di Mach il rapporto $\frac{P_4^0}{P_3}$. \Rightarrow Per $\frac{P_4^0}{P_3} = 25.96 \rightarrow \boxed{M_3 = 4.45}$

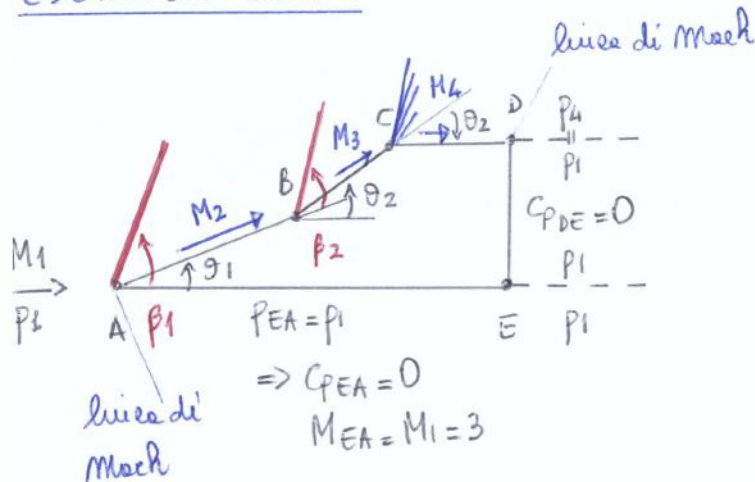
Modo 2

Non avendo a disposizione la tabella con $\frac{P_4^0}{P_3}$, ci procede iterativamente nel seguente modo:

	ISOENTROPICA	URTO RETTO	PRODOTTO
tentativo 1 $M_3 = 4 \Rightarrow$	$\frac{P_3^0}{P_3} = 151,8352$	$\frac{P_4^0}{P_3^0} = 0.1388$	21.4911 (troppo basso)
tentativo 2 $M_3 = 3.5 \Rightarrow$	$\frac{P_3^0}{P_3} = 76.2723$	$\frac{P_4^0}{P_3^0} = 0.2129$	16.2383 (occorre allora $M > 4$)
tentativo 3 $M_3 = 4.45 \Rightarrow$	$\frac{P_3^0}{P_3} = 271,875$	$\frac{P_4^0}{P_3^0} = 0,0955$	25.96 ✓

$$\Rightarrow \boxed{M_3 = 4.45}$$

ESEKIZIO ESAME



$M_1 = 3$
 $P_1 = 1 \text{ etm}$
 $\theta_1 = 8^\circ$
 $\theta_2 = 10^\circ$

- Calcolare:

- M nei campi AB, BC, CD, DE, EA ✓
- $C_{PAB}, C_{PBC}, C_{PCD}, C_{PDE}, C_{PEA}$ ✓

utilizzando la teoria esatta dell'urto - esplosione.

- Disegnare il campo di urto sul piano fisico ✓
- Rappresentare sul piano olografico le grandezze dei vari campi.

(AB) $M_1 = 3$
 $\theta_1 = 8^\circ$ } $\rightarrow \beta_1 = 25.61^\circ$

$M_{1n} = M_1 \sin \beta_1 = 1.2967 \approx 1.3$

\rightarrow URTO RETTO: $M_{2m} = 0.7860$

$M_2 = \frac{M_{2m}}{\sin(\beta_1 - \theta_1)} = 2.598$

$P_2/P_1 = 1.805 \rightarrow C_{PAB} = \frac{2}{\delta M_1^2} \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) = 0.12778$

(BC) $M_2 = 2.598$
 $\theta = \theta_2 - \theta_1 = 2^\circ$ } $\rightarrow \beta_2 \approx 24.07^\circ$

$M_{2n} = M_2 \sin \beta_2 = 1.0596$

\rightarrow URTO RETTO: $M_{3m} = 0.9444 \rightarrow M_3 = \frac{M_{3m}}{\sin(\beta_2 - \theta)} = 2.5134$

$P_3/P_2 = 1.1442$

$P_3/P_1 = \frac{P_3}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_1} = 2.065 \rightarrow C_{PBC} = \frac{2}{\delta M_1^2} \left(\frac{P_3}{P_1} - 1 \right) = 0.169$

(CD) $M_3 = 2.5134 \rightarrow \nu(M_3) \approx 39.3565^\circ$
 $\theta = \theta_2 = 10^\circ$

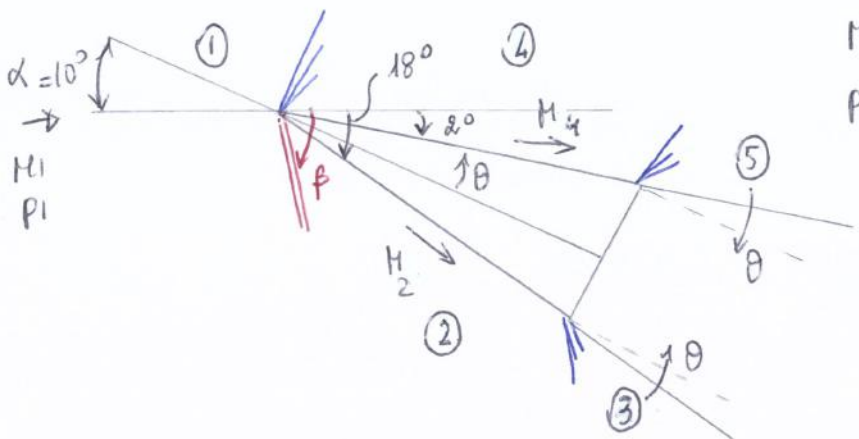
$\nu(M_4) = \nu(M_3) + \theta = 49.3565^\circ \rightarrow M_4 \approx 2.98$

$P_{40} = P_{30} = \frac{P_3}{P_1} \cdot P_1 \left(1 + \frac{1}{2} M_3^2 \right)^{1/1-1} = 36.0254 \text{ etm}$

$P_4 = P_{40} / \left(1 + \frac{1}{2} M_4^2 \right)^{1/1-1} = 1.0106 \text{ etm} \rightarrow C_P = \frac{2}{\nu_{112}} \left(\frac{P_4}{P_1} - 1 \right) = 1.689 \cdot 10^{-1}$

ESERCIZIO

$\alpha = 10^\circ$
 $\vartheta = 8^\circ$
 $M_1 = 3.5$
 $p_1 = 1 \text{ atm}$



Considerando la teoria esatta dell'urto-espanzione, calcolare: M_2, M_3, M_4, M_5 .

④ $\gamma(M_4) = \gamma(M_1) + 2^\circ$
 $\gamma(M_1) = 58.5298^\circ$ } $\rightarrow \gamma(M_4) = 60.5298^\circ \rightarrow M_4 \approx 3.63$

⑤ $\gamma(M_5) = \gamma(M_4) + 8^\circ = 68.5298^\circ \rightarrow M_5 \approx 4.22$

② $M_1 = 3.5$
 $\vartheta = 18^\circ$ } $\rightarrow \vartheta - \beta - \mu \rightarrow \beta = 32.385^\circ \rightarrow M_{1N} = 1.8746$
 \Rightarrow URTO RETTO: $M_{2N} \approx 0.6016 \rightarrow M_2 = \frac{M_{2N}}{\sin(\beta - \vartheta)} = 2.4215$

③ $\gamma(M_3) = \gamma(M_2) + 8^\circ = 45.2289^\circ \rightarrow M_3 \approx 2.78$
 $\underbrace{\gamma(M_2)}_{37.2289}$

Calcolo c_p con la teoria esatta:

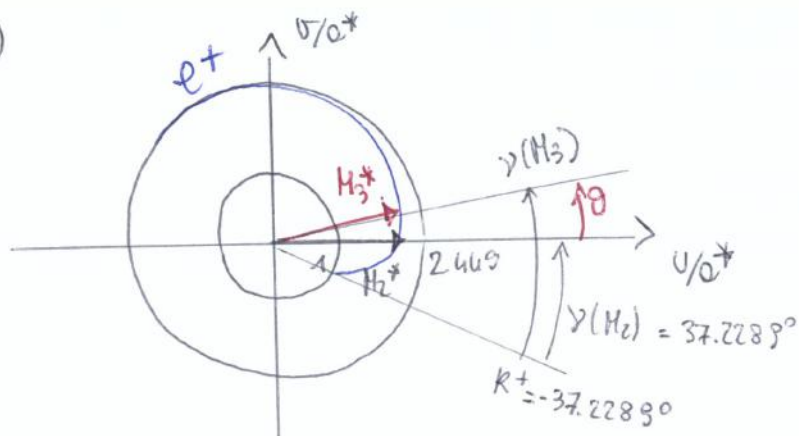
④ $M_4 \approx 3.63 \rightarrow p_{40}/p_4 = 91.6061$
 $M_1 = 3.5 \rightarrow p_{10}/p_1 = 76.2723$ } $\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_4}{p_{40}} \cdot \frac{p_{10}}{p_1} = 0.8326 \rightarrow c_{p4} = \frac{2}{\gamma M_4^2} \left(\frac{p_4}{p_1} - 1 \right)$

⑤ $M_5 \approx 4.22 \rightarrow p_{50}/p_5 = 202.7388$ } $c_{p5} = -0.0195$

$\frac{p_5}{p_1} = \frac{p_5}{p_{50}} \cdot \frac{p_{50}}{p_{40}} \cdot \frac{p_{40}}{p_4} \cdot \frac{p_4}{p_1} = 0.3762 \rightarrow c_{p5} = -0.072746$

② $M_2 \approx 2.42 \rightarrow p_{20}/p_2 = 3.9131$ } $\rightarrow c_{p2} = 0.33972$ ③ $M_3 \approx 2.78$
 $p_{30}/p_3 = 23.3217 = 2.53 \rightarrow c_{p3} = 0.1784$
 $p_{30}/p_1 = p_{30}/p_{30} \cdot p_{30}/p_{20} \cdot p_{20}/p_2 \cdot p_2/p_1 = 1 \cdot 15.0836 \cdot 2.53 = 2.53$

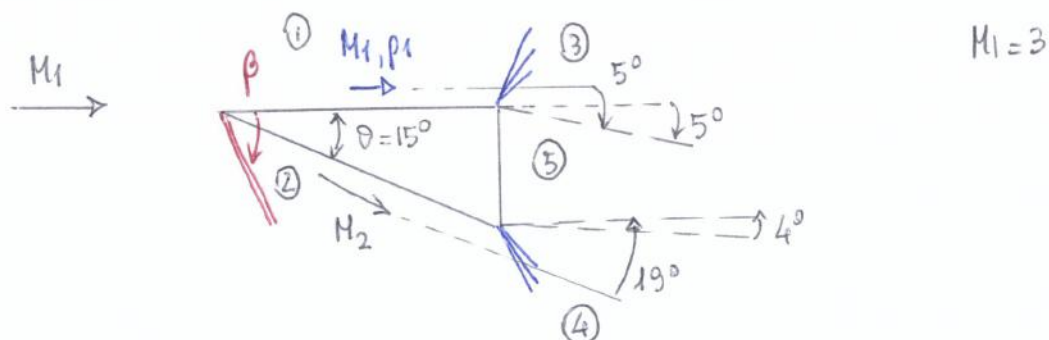
(2-3)



$$M_2^* = 2.05098$$

$$\begin{aligned} e^+ : \vartheta &= \gamma(M_2) + K^+ = \\ &= 45.2289 - 37.2289 = \\ &= 8.00^\circ \end{aligned}$$

ESERCIZIO ESAME



- ① Rappresentazione del campo di moto mediante teorie esatte ✓
- ② Calcolare il M e il ep nei vari campi, supponendo che $e_{p5} = \frac{e_{p3} + e_{p4}}{2}$.

① $M = M_1 = 3$
 $P = P_1 \rightarrow e_{p1} = \frac{2}{\delta M_1} \left(\frac{P_1}{P_1} - 1 \right) = 0$

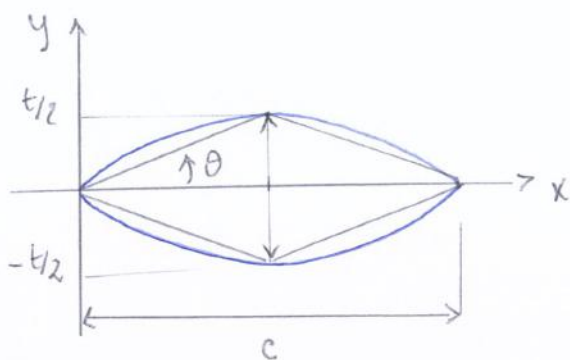
③ $M_1 = 3$
 $\vartheta = 5^\circ$ } $\rightarrow \gamma(M_3) = \gamma(M_1) + \vartheta = 49.7573^\circ + 5^\circ = 54.7573^\circ$
 $M_3 \rightarrow \sim 3.27$
 $\frac{P_{30}}{P_3} = 54.773$
 $M_1 = 3 \rightarrow \frac{P_{10}}{P_1} = 36.7327$ } $\rightarrow \frac{P_3}{P_1} = \frac{P_3}{P_{30}} \cdot \frac{P_{10}}{P_1} = 0.67063$
 $e_{p3} = \frac{2}{\delta M_1^2} \left(\frac{P_3}{P_1} - 1 \right) = -0.05228$

② $\vartheta = 15^\circ$
 $M = 3$ } $\rightarrow \beta = 32.24^\circ \rightarrow M_{11} = 1.6 \rightarrow M_{21} = 0.6684 \rightarrow M_2 = 2.255$
 $\frac{P_2}{P_1} = 2.82$

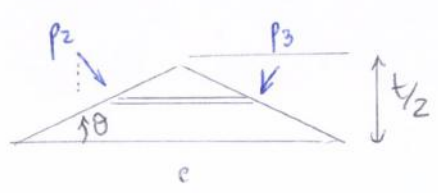
④ $M_2 = 2.255 \rightarrow \frac{P_2^0}{P_2} = 11.6543$
 $\frac{P_2}{P_1} = 2.82$ } $e_{p2} = \frac{2}{\delta M_1^2} \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) = 0.2889$
 $\gamma(M_4) = \gamma(M_2) + \vartheta = 33.1457^\circ + 19^\circ = 52.1457^\circ \rightarrow M_4 \approx 3.13 \rightarrow \frac{P_4^0}{P_4} = 64.5864$

ESERCIZIO

Dimostrare che nel caso $\alpha=0^\circ \rightarrow C_{D\text{PAR}} = 1,33 C_{D\text{ROMBO}}$ (piccola perturbazione $\Rightarrow \theta$ piccolo)



ROMBO



$$dD = 2 \left[\rho_3 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + \rho_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \right] dt$$

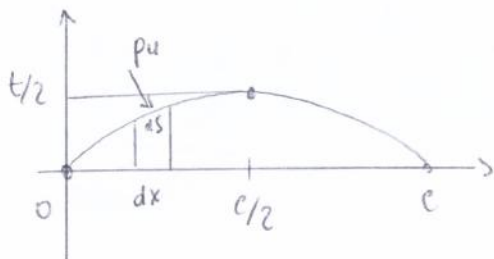
$$= -(\rho_3 + \rho_2) dt$$

$$D = -(\rho_3 + \rho_2) t \rightarrow C_D = \frac{-(\rho_3 + \rho_2) t}{\rho U^2 c}$$

$$\rightarrow C_D = \frac{4\theta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{t}{c} = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\frac{t}{c} \right)^2$$

$$C_{p2} = \frac{2\theta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, \quad C_{p3} = \frac{-2\theta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

PARABOLA



$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + e \\ e = 0 \\ t/2 = ac^2/4 + bc/2 \rightarrow 2t = ac^2 + 2bc \\ 0 = ac^2 + bc \rightarrow b = -ac \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 2t &= ac^2 - 2ace^2 \rightarrow a = -\frac{2t}{c^2 e^2} \\ b &= +\frac{2t}{c} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} y_u(x) = -\frac{2t}{c^2} x^2 + \frac{2t}{c} x \\ y_e(x) = \frac{2t}{c^2} x^2 - \frac{2t}{c} x \end{cases}$$

θ piccoli $\Rightarrow ds \approx dx$

$$dD = |(\rho_u - \rho_\infty) \partial u| dx + |(\rho_e - \rho_\infty) \partial e| dx$$

$$D = \int_0^c \left[|(\rho_u - \rho_\infty) \partial u| dx + |(\rho_e - \rho_\infty) \partial e| dx \right] \rightarrow C_D = \frac{1}{\rho U^2 c} \left\{ \int_0^c |\rho_u \partial u| dx + \int_0^c |\rho_e \partial e| dx \right\}$$

$$C_{pu} = \frac{2\theta u}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, \quad C_{pe} = \frac{2\theta e}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \Rightarrow C_D = \frac{1}{c} \left\{ \int_0^c \partial u^2 dx + \int_0^c \partial e^2 dx \right\} \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$