NUMERO: 2132A-

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Uffreduzzi Francesco

MATERIA: Meccanica del Volo - Prof. Gili

MECCANICA DEL VOLO

Richiami: STABILITÀ STATICA LONGITUDINALE

$\Delta\alpha(+) \rightarrow M(-) \rightarrow \Delta\alpha \rightarrow 0$
$\Delta\alpha(-) \rightarrow M(+) \rightarrow \Delta\alpha \rightarrow 0$

in presenza di un disturbo sul velivolo deve instaurarsi un momento di segno opposto tale da annullare il $\Delta\alpha$.

Esprimiamo la stabilità statica con la relazione:

$$\boxed{C_{M\alpha} = \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} < 0}$$

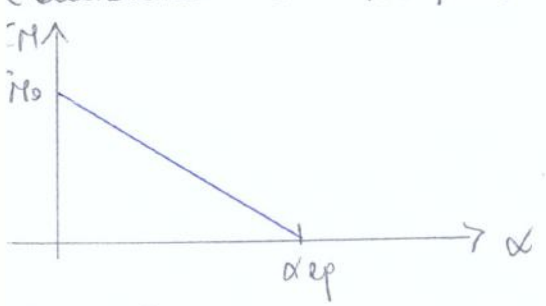
Ipotesi:

1) Il velivolo presenta un piano di simmetria (x-z)
2) Condizione iniziale con V = cost
3) Il vettore $\vec{V}$ è contenuto nel piano x-z → MOTO LONGITUDINALE + β = ANGOLO DI DERAPATA = 0° (sideslip angle)
4) Angolo traiettoria iniziale $\simeq 0 \rightarrow \gamma \simeq 0^\circ$
5) Struttura rigida

Poiché consideriamo moto rettilineo uniforme orizzontale o sub-orizzontale, le equazioni considerate saranno:

$$L = W, \quad T = D, \quad M = \frac{1}{2}\rho V^2 S c\, C_M = 0 \rightarrow C_M = 0$$

Trascurando i termini non lineari (WING DRAG TERM), si dimostra che l'andamento di $C_M = f(\alpha) \simeq$ retta:



$$\begin{cases} C_M = f(\alpha) \simeq \text{RETTA} \\ C_{M\alpha} < 0 \\ C_{M_0} > 0 \end{cases}$$

VELIVOLO COMPLETO

$$C_{M_G} = C_{M_{0_{wb}}} + C_{L_{wb}} \frac{x_G - x_a'}{c} - C_{L_t} \bar{V} + \frac{S_t}{S} C_{L_t} \frac{x_G - x_a'}{c} + C_{M_p} =$$

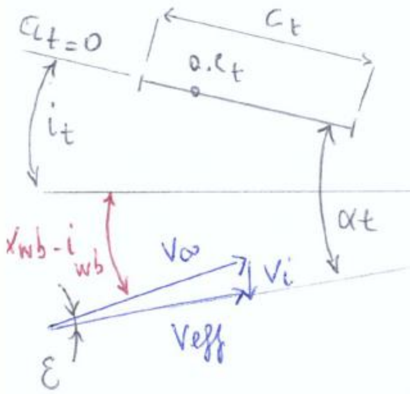
$$= C_{M_{0_{wb}}} + \underbrace{\left(C_{L_{wb}} + \frac{S_t}{S} C_{L_t}\right)}_{C_L} \frac{x_G - x_a'}{c} - C_{L_t} \bar{V} + C_{M_p}$$

Ricordiamo che:

$$L = L_{wb} + L_t \rightarrow C_L = C_{L_{wb}} + \frac{S_t}{S} C_{L_t}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{M_G} = C_{M_{0_{wb}}} + C_L \frac{x_G - x_a'}{c} - C_{L_t} \bar{V} + C_{M_p}}$$

Analizziamo il tail più nel dettaglio:



$$\alpha_t = \alpha_{wb} - i_{wb} + i_t - \varepsilon$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_{wb}} \alpha_{wb}$$

↳ down-wash angle per $\alpha_{wb} = 0°$

$$\alpha_t = \alpha_{wb} - i_{wb} - \varepsilon_0 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_{wb}} \alpha_{wb} + i_t$$

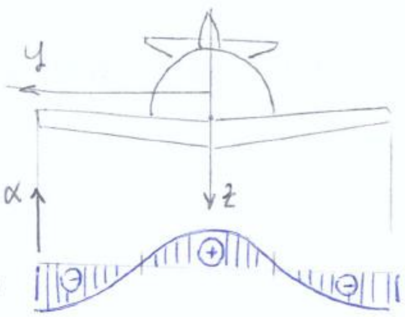
ma:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_{wb}} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \underbrace{\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_{wb}}}_{\simeq 1} \simeq \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}$$

Quando $\alpha_{wb} = 0°$

↳ PORTANZA COMPLESSIVA NULLA, ma per lo svergolamento dell'ala la porzione più vicina alla fusoliera è portante, mentre l'estremità è deportante.

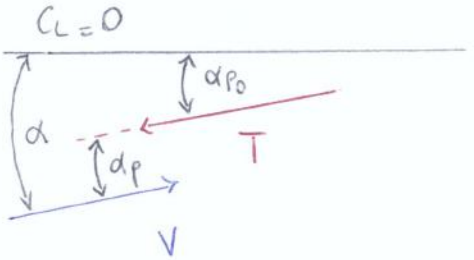
Il tail si trova dietro la porzione di ala portante, che localmente avrà un $\alpha > 0$ → DOWN-WASH FACTOR.



$$\Rightarrow \alpha_t = \alpha_{wb} \underbrace{\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)}_{\substack{\text{down wash} \\ \text{factor} \\ 0.6 \div 0.95}} - \underbrace{(i_{wb} + \varepsilon_0 - i_t)}_{\substack{i \\ \text{calettamento} \\ \text{aerodinamico} \\ \text{ala - coda}}}$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha_t = \alpha_{wb} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i}$$

CONTRIBUTO DEL PROPULSORE AL MOMENTO DI BECCHEGGIO



$$\frac{\partial C_{M_p}}{\partial \alpha} = \frac{\partial C_{M_p}}{\partial \alpha_p} \cdot \underbrace{\frac{\partial \alpha_p}{\partial \alpha}}_{\sim 1}$$

$$\rightarrow \frac{\partial C_{M_p}}{\partial \alpha_p}\alpha_p = \frac{\partial C_{M_p}}{\partial \alpha}(\alpha - \alpha_{p_0}) = \frac{\partial C_{M_p}}{\partial \alpha}\alpha - \overbrace{\frac{\partial C_{M_p}}{\partial \alpha}\alpha_{p_0}}^{\text{cost} \rightarrow C_{M_{p_0}}}$$

Tornando alla relazione del velivolo completo:

$$C_{M_G} = C_{M_{0wb}} + C_L \frac{x_G - x_a'}{c} - C_{L_t}\bar{V} + C_{M_p} =$$

$$= C_{M_{0wb}} + a\alpha \frac{x_G - x_a'}{c} - a_t\left[\alpha_{wb}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i\right]\bar{V} + C_{M_p} =$$

$$= C_{M_{0wb}} + a\alpha \frac{x_G - x_a'}{c} - a_t\bar{V}\left[\left(\alpha + \frac{a_t}{a}\frac{S_t}{S}i\right)\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i\right] + C_{M_p} =$$

$$= C_{M_{0wb}} + \left[a\frac{x_G - x_a'}{c} - a_t\bar{V}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)\right]\alpha - a_t\bar{V}\frac{a_t}{a}\frac{S_t}{S}i\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) + a_t\bar{V}i + C_{M_{p_0}} + \frac{\partial C_{M_p}}{\partial \alpha}\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{M_G} = C_{M_0} + C_{M_\alpha}\alpha}$$

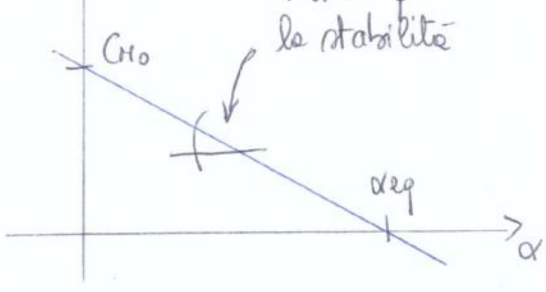
<u>dove</u>:

$$\boxed{C_{M_0}} = C_{M_{0wb}} + a_t\bar{V}i\left[1 - \frac{a_t}{\underbrace{a}_{\hookrightarrow a_{wb}(1+F)}}\frac{S_t}{S}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)\right] + C_{M_{p_0}} =$$

$$= \boxed{C_{M_{0wb}} + a_t\bar{V}\frac{i}{1+F} + C_{M_{p_0}}} \Rightarrow (C_{M_G})_{\alpha=0}$$

$$\boxed{C_{M_\alpha} = a\left[\frac{x_G}{c} - \frac{x_a'}{c} - \frac{a_t}{a}\bar{V}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) + \frac{1}{a}\frac{\partial C_{M_p}}{\partial \alpha}\right]}$$

$C_{M_\alpha} = 0 \rightarrow$ C.G $\equiv$ <u>FUOCO DEL VELIVOLO</u>
(aircraft aerodynamic center)



$$\boxed{\left(\frac{x_G}{c}\right)_{C_{M_\alpha}=0} = \frac{x_N}{c} = \frac{x_a'}{c} + \frac{a_t}{a}\bar{V}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - \frac{1}{a}\frac{\partial C_{M_p}}{\partial \alpha}}$$

(3) VARIAZIONE DI $C_{M_{P0}}$ → METODO CLASSICO PER DEFINIRE α_{eq}

Significa variare T, che ha braccio rispetto a C.G.

↳ VARIAZIONE MANETTA (solo in emergenza)

↳ VARIAZIONE DIREZIONE DELLA SPINTA (tecnica usata nei VTOL e STOL)

↳ utilizzi non classici — Vertical and short take off and landing

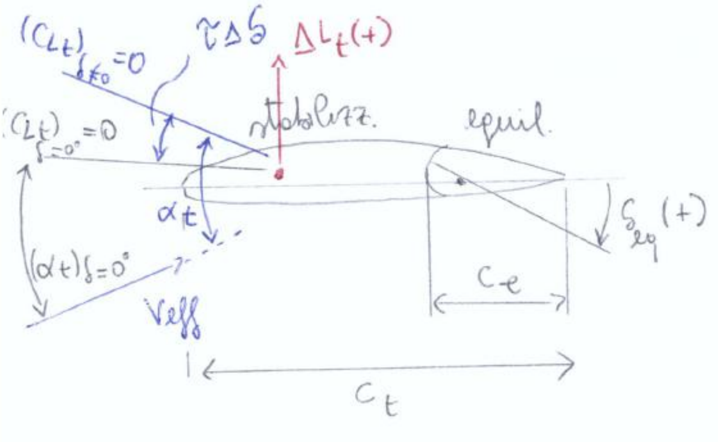
(4) VARIAZIONE DI X_G

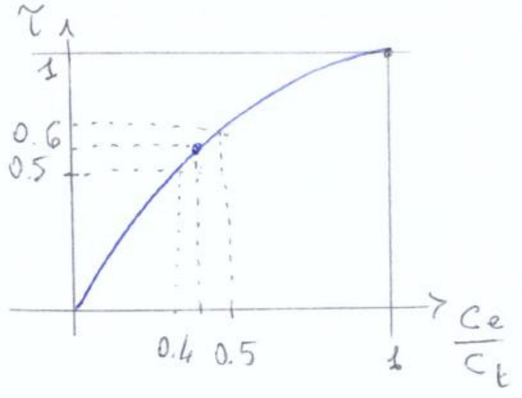
Si sposta la posizione del baricentro a bordo

↳ DELTAPLANO

↳ CONCORDE (nel passaggio da subsonico a supersonico)

Analizziamo più nel dettaglio il modo 2:





$$\tau = \frac{\partial \alpha_t}{\partial \delta}$$

$$\Delta\alpha_t = \tau\Delta\delta = \frac{\partial \alpha_t}{\partial \delta}\Delta\delta \rightarrow \begin{cases} \alpha_t = \alpha_{wb}\left(1-\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i & \text{no equilibratore} \\ \alpha_t = \alpha_{wb}\left(1-\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i + \tau\delta & \text{con equilibratore} \end{cases}$$

$$C_{L_t} = a_t\alpha_t = a_t\left[\alpha_{wb}\left(1-\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i + \tau\delta\right]$$

$$C_L = (C_L)_{\delta=0°} + \frac{\partial C_L}{\partial \delta}\delta = C_{L_\alpha}\alpha + C_{L_\delta}\delta$$

$$C_{M_G} = (C_{M_G})_{\delta=0°} + \frac{\partial C_{M_G}}{\partial \delta}\delta = (C_{M_0})_{\substack{\alpha=0\\ \delta=0}} + C_{M_\alpha}\alpha + \underbrace{C_{M_\delta}\delta}_{<0}$$

↳ ELEVATOR POWER: quanto la coda è in grado di variare il C_{M_G}

- $C_{M_G} = C_{M_{0_{wb}}} + C_L \dfrac{x_G - x_a'}{c} - C_{L_t} \bar{V} + C_{M_P}$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_{M_G}}{\partial \delta} = C_{M_\delta} = \frac{\partial C_{M_{0wb}}}{\partial \delta} + \frac{\partial C_L}{\partial \delta} \frac{x_G - x_a'}{c} - \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \delta} \bar{V} + \cancel{\frac{\partial C_{M_P}}{\partial \delta}}_{\simeq 0}$$

VELIVOLO CONVENZIONALE

$$\boxed{C_{M_\delta} = \frac{S_t}{S} a_t \tau \frac{x_G - x_a'}{c} - a_t \tau \bar{V}}$$

VELIVOLO TUTT'ALA

$$\boxed{C_{M_\delta} = \frac{\partial C_{M_0 wb}}{\partial \delta} + \frac{\partial C_{L wb}}{\partial \delta} \frac{x_G - x_a'}{c}}$$

$\hookrightarrow \delta = \delta_{elevon}$

Ricaviamo i valori di $\Delta = C_{L_\alpha} C_{M_\delta} - C_{M_\alpha} C_{L_\delta}$

VELIVOLO CONVENZIONALE

$$\Delta = C_{L_\alpha}\left(\frac{S_t}{S} a_t \tau \frac{x_G - x_a'}{c} - a_t \tau \bar{V}\right) - C_{L_\alpha} \frac{x_G - x_N}{c} \frac{S_t}{S} a_t \tau =$$

$$= - C_{L_\alpha} a_t \tau \bar{V} + C_{L_\alpha} C_{L_\delta} \frac{x_N - x_a'}{c} \Rightarrow \boxed{\Delta = \underbrace{- C_{L_\alpha} a_t \tau \bar{V}}_{(1)} + \underbrace{C_{L_\alpha} C_{L_\delta}}_{(2)} \frac{x_N - x_a'}{c}}$$

$\Rightarrow \Delta < 0,\ \Delta \neq f(x_G/c)$

$\downarrow$

$(1) \gg (2)$

VELIVOLO TUTT'ALA

$x_a' \equiv x_N$

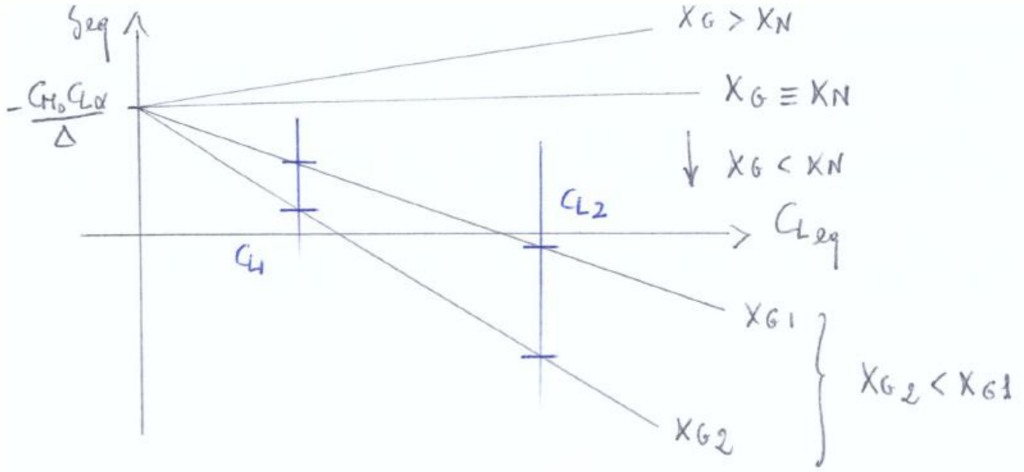
$$\Delta = C_{L_\alpha}\left(\frac{\partial C_{M_0 wb}}{\partial \delta} + \underbrace{\frac{\partial C_{L wb}}{\partial \delta}}_{C_{L_\delta}} \frac{x_G - x_a'}{c}\right) - C_{L_\alpha} \frac{x_G - x_N}{c} C_{L_\delta} = C_{L_\alpha} \frac{\partial C_{M wb}}{\partial \delta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = C_{L_\alpha} \frac{\partial C_{M wb}}{\partial \delta}} \Rightarrow \Delta < 0 \text{ perché } \frac{\partial C_{M wb}}{\partial \delta} < 0 \text{ e } \Delta \neq f(x_G)$$

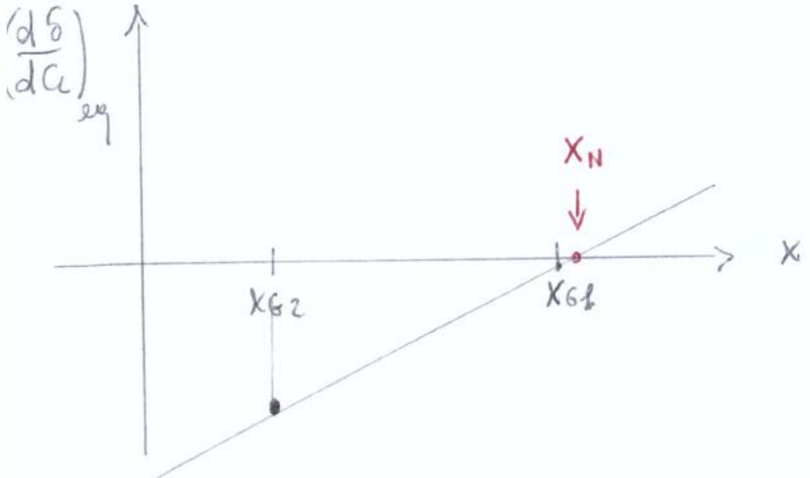
$\hookrightarrow$ rotazione δ_e (+)

$\Rightarrow$ aumento incurvamento

$\Rightarrow$ $C_{M_{0_{wb}}}$ incrementa negativamente.



Sperimentalmente, mediante un potenziometro collegato all'asse di rotazione dell'equilibratore, si misura il δ_{ep} a due differenti C_L, per due diverse posizioni del baricentro.
Avendo a disposizione due punti, si ricava la pendenza $\left(\frac{d\delta}{dC_L}\right)_{ep}$ della retta che li congiunge.



Estrapolando le rette passante per i due punti nel grafico, si determina X_N, che è tale per cui $\left(\frac{d\delta}{dC_L}\right)_{ep} = 0$

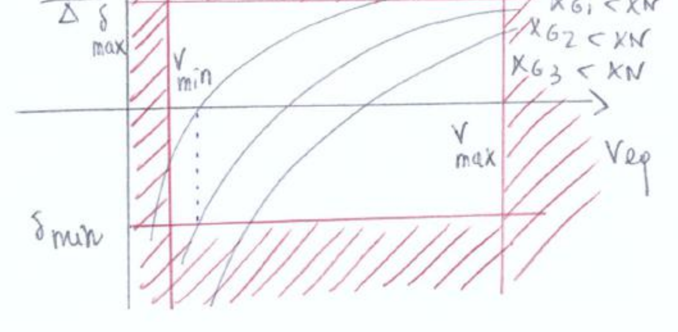
Ricaviamo la relazione $\delta_{ep} = f(V_{ep})$:

$$W = L \rightarrow W = \frac{1}{2}\rho_0 V_e^2 C_{L_{eq}} S \Rightarrow C_{L\,ep} = \frac{W/S}{\frac{1}{2}\rho_0 V_{e_{ep}}^2}$$

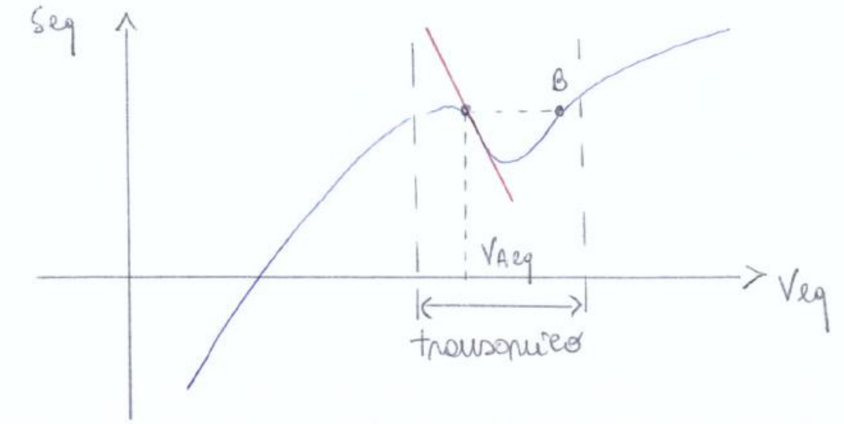
$$\Rightarrow \boxed{\delta_{ep} = -\frac{C_{M_0} C_{L\alpha}}{\Delta} - \frac{C_{H\alpha}}{\Delta}\left(\frac{W/S}{\frac{1}{2}\rho_0 V_{e_{ep}}^2}\right)}$$

In questo caso:

- per $x = x_{G2} \rightarrow$ non è assicurato l'ep. alla velocità min
- per $x = x_{G1} \rightarrow$ non è assicurato l'ep. alla velocità max



PERDITA DEL REQUISITO DELLA SPEED STABILITY IN REGIME TRANSONICO



In regime transonico la curva $S_{eq} = f(V_{eq})$ può variare drasticamente la sua pendenza.

In questo caso, un disturbo alla V_A comporta un incremento della velocità fino al punto B, nel quale la curva $S_{eq} = f(V_{eq})$ torna ad avere una concavità verso il basso e si ha di nuovo una condizione di speed stability soddisfatta.

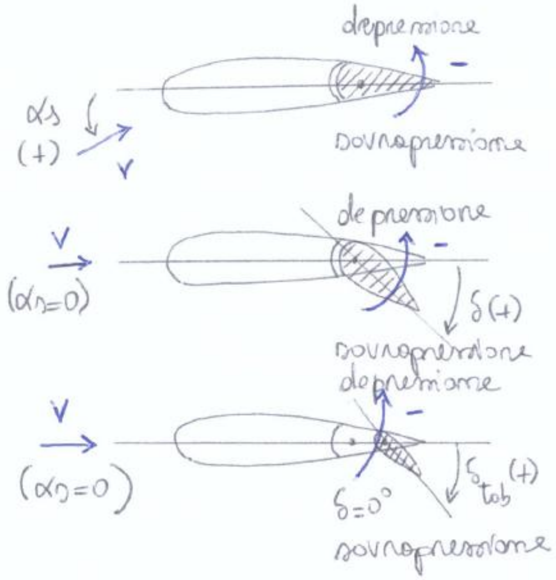
RIASSUMENDO: Condizioni equivalenti di stabilità statica longitudinale

- $C_{M_\alpha} < 0$
- $\dfrac{d\delta}{dC_{L_{eq}}} < 0$
- $\dfrac{dS_{eq}}{dV_{eq}} > 0$

$b_0 = 0$ se profilo simmetrico

L'intervallo di variazione di $\alpha_s, \delta, \delta_{tab}$ deve essere limitato. Questo perché vogliamo esprimere C_H attraverso dei termini b_1, b_2, b_3 che siano costanti.

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{\partial C_H}{\partial \alpha_s} = \text{cost} \\[2ex] b_2 = \dfrac{\partial C_H}{\partial \delta} = \text{cost} \\[2ex] b_3 = \dfrac{\partial C_H}{\partial \delta_{tab}} = \text{cost} \end{cases}$$



$b_1 < 0$

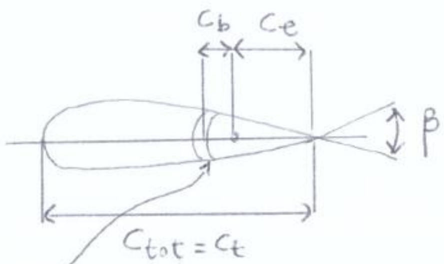
$b_2 < 0$

$b_3 < 0$

Osservando le figure, che mostrano i contributi dei singoli addendi al C_H, si osserva che $b_1, b_2, b_3 < 0$ in quanto le distribuzioni di pressione attorno alla superficie mobile generano un momento aerodinamico negativo.

I valori b_1, b_2, b_3 vengono forniti dall'aerodinamica

PARAMETRI CHE INFLUENZANO b_1, b_2, b_3



1) Tipo di profilo
2) $\dfrac{C_e}{C_t}$
3) C_b/C_e
4) forma del becco dell'equilibratore
5) fessura tra stabilizzatore ed equilibratore $\begin{cases}\text{se esiste} \\ \text{entità} \\ \text{forma}\end{cases}$

6) Angolo β
7) Forma del bordo d'uscita

8) Re
9) M

} dipendono dall'inviluppo di volo

COMANDI LIBERI

Consideriamo una trasmissione di comando priva di attriti e immaginiamo che nella condizione di volo rettilineo uniforme orizzontale considerata ci sia un certo δ dell'equilibratore ad assicurare l'equilibrio a quella determinata velocità.

Se $C_H \neq 0$ ⟹ ci dovrà essere qualcuno o qualcosa che tenga l'equilibratore in posizione.

- COMANDO REVERSIBILE → pilota
- COMANDO IRREVERSIBILE → attuatore

La situazione di COMANDI LIBERI consiste nel lasciare libero l'equilibratore di raggiungere la posizione tale da annullare il momento di cerniera

→ LIBERO ORIENTAMENTO EQUILIBRATORE ⟹ δ_{float}

Valutiamo tale situazione:

- senza considerare l'inerzia
- senza considerare l'attrito

Ricordando che:

$$C_H = C_{H_0} + C_{H_\alpha}\alpha + b_2\delta + b_3\delta_{tab} = 0$$

poniamo $\delta = \delta_{float}$ poiché $C_H = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_{float} = -\frac{1}{b_2}\left(C_{H_0} + C_{H_\alpha}\alpha + b_3\delta_{tab}\right)}$$

Indichiamo con " ' " ciò che si riferisce ai comandi liberi

COEFFICIENTE DI PORTANZA DEL VELIVOLO A COMANDI LIBERI

$$C_L' = C_{L_\alpha}\alpha + C_{L_\delta}\delta_{float}$$

Possiamo scriverlo come:

$$C_L' = C_{L_0}' + C_{L_\alpha}'\alpha$$

VELIVOLO CONVENZIONALE

$$C'_{L_t} = \alpha_t a_t = a_t\left(\alpha_o + \tau\delta_{float} + \cancel{\frac{\partial\alpha_t}{\partial\delta_{tab}}}\delta_{tab}\right) \quad \text{con } \alpha_o = \alpha_{wb}\left(1-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right) - i$$

$\hookrightarrow \simeq 0$

$$\tau = \frac{\partial\alpha_t}{\partial\delta}, \quad \frac{\partial\alpha_t}{\partial\delta_{tab}} \simeq 0$$

$$\Rightarrow C'_{L_t} = a_t\alpha_o + \tau\delta_{float}a_t \quad \text{introduciamo} \quad \boxed{a_e = a_t\tau = \frac{\partial C_{L_t}}{\partial\delta}}$$

$$C'_{L_t} = a_t\alpha_o + a_e\left[-\frac{1}{b_2}\left(b_o + b_1\alpha_o + b_3\delta_{tab}\right)\right] \rightarrow \begin{array}{l} C_H = b_o + b_1\alpha_o + b_2\delta_{float} + b_3\delta_{tab} \\ C_H = 0 \Rightarrow \delta_{float} = \dots \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{C'_{L_t} = \left(a_t - a_e\frac{b_1}{b_2}\right)\alpha_o - \frac{a_e}{b_2}\left(b_o + b_3\delta_{tab}\right)}$$

Per cui:

$$\boxed{\frac{\partial C'_{L_t}}{\partial\alpha_o} = a_t - a_e\frac{b_1}{b_2} = a_t\underbrace{\left(1-\tau\frac{b_1}{b_2}\right)}} \rightarrow \boxed{\frac{\partial C'_{L_t}}{\partial\alpha_o} = a_t f}$$

$\hookrightarrow$ free elevator factor f $\rightarrow$ quanto perde di efficacia il piano orizzontale

FUOCO DEL VELIVOLO A COMANDI LIBERI

$$\frac{x_N}{c} = \frac{x_a'}{c} + \frac{a_t}{a}\bar{V}\left(1-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right) - \frac{1}{a}\frac{\partial C_{MP}}{\partial\alpha} \quad \text{comandi bloccati}$$

$$\frac{x_N'}{c} = \frac{x_a'}{c} + \frac{a_t f}{a'}\bar{V}\left(1-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right) - \frac{1}{a'}\frac{\partial C_{MP}}{\partial\alpha} \quad \text{comandi liberi}$$

Dobbiamo dimostrare che $\frac{x_N}{c} > \frac{x_N'}{c}$ $\Rightarrow$ stabilità dell'equilibrio a comandi liberi è più restrittiva in termini di escursione del baricentro

$$= \frac{x_G}{c}\frac{1}{a'}\underbrace{\left(a - \frac{C_{H\alpha} C_{L\delta}}{b_2}\right)}_{a'} - \frac{a}{a'}\frac{x_N}{c} + \frac{x_a'}{c}\frac{C_{H\alpha} C_{L\delta}}{a' b_2} + a_e \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2}\bar{V} =$$

$$= \frac{x_G}{c} - \frac{1}{a'}\left(a \frac{x_N}{c} - \frac{C_{H\alpha} C_{L\delta}}{b_2}\frac{x_a'}{c}\right) + \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} a_e \bar{V}$$

Osserviamo che:

$$\frac{x_a'}{c} = \frac{x_a' - x_N}{c} + \frac{x_N}{c}$$

$$\frac{x_N}{c}\overbrace{\left(a - \frac{C_{H\alpha} C_{L\delta}}{b_2}\right)}^{a'} - \frac{C_{H\alpha} C_{L\delta}}{b_2}\frac{x_a' - x_N}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{x_G - x_N'}{c} = \frac{x_G}{c} - \frac{1}{a'}\left(a\frac{x_N}{c} - \frac{C_{H\alpha} C_{L\delta}}{b_2}\frac{x_a' - x_N}{c} - \frac{C_{H\alpha} C_{L\delta}}{b_2}\frac{x_N}{c}\right) + \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} a_e \bar{V}$$

$$\frac{x_G - x_N'}{c} = \frac{x_G}{c} - \frac{a'}{a'}\frac{x_N}{c} + \frac{C_{H\alpha} C_{L\delta}}{a' b_2}\frac{x_a' - x_N}{c} + \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} a_e \bar{V}$$

Ricordando che:

$$C_{L\delta} = a_t \tilde{v} \frac{S_t}{S} = a_e \frac{S_t}{S}$$

$$C_{H\alpha} = b_1\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x_N'}{c} = \frac{x_N}{c} - \frac{C_{H\alpha} C_{L\delta}}{a' b_2}\left(\frac{x_a' - x_N}{c} + \frac{a_e \bar{V}}{C_{L\delta}}\right)$$

$$\frac{x_N'}{c} = \frac{x_N}{c} - \frac{b_1 a_e}{a' b_2}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)\frac{S_t}{S}\left[\frac{x_a' - x_N}{c} + \frac{a_e \bar{V}}{a_e \frac{S_t}{S}}\right]$$

$$\boxed{\frac{x_N'}{c} = \frac{x_N}{c} - \underbrace{\frac{a_e \overset{(-)}{b_1}}{\underset{(-)}{a' b_2}}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)}_{\text{costante, una volta definito il velivolo}}\left(\bar{V} - \frac{S_t}{S}\overset{(+)}{\frac{x_N - x_a'}{c}}\right)}$$

la parentesi è (+) in quanto $\bar{V}$ è circa 1 ordine di grandezza maggiore del 2° termine

$\Rightarrow$ il limite posteriore del baricentro sarà x_N', più arretrato rispetto a x_N, nel caso si voglia avere il velivolo staticamente stabile a comandi liberi

$$C_H = C_{H_0} + C_{H_\alpha}\alpha + b_2\delta + b_3\delta_{tab} = 0$$

$$\Rightarrow \delta_{tab} = \delta_{\substack{tab \\ trim}}$$

$$\boxed{\delta_{\substack{tab \\ trim}} = -\frac{1}{b_3}\left(C_{H_0} + C_{H_\alpha}\alpha_{eq} + b_2\delta_{eq}\right)}$$

Dove stiamo considerando una situazione di volo rettilineo uniforme orizzontale

Ricordiamo che, dal sistema:

$$\begin{cases} C_{L_\alpha}\alpha_{eq} + C_{L_\delta}\delta_{eq} = C_{L_{eq}} \\ C_{M_\alpha}\alpha_{eq} + C_{M_\delta}\delta_{eq} = -C_{M_0} \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} \alpha_{eq} &= \frac{C_{M_0}C_{L\delta}}{\Delta} + \frac{C_{M\delta}}{\Delta}C_{Leq} \\ \delta_{eq} &= -\frac{C_{M_0}C_{L\alpha}}{\Delta} - \frac{C_{M\alpha}}{\Delta}C_{Leq} \end{aligned}$$

Sostituendo in $\delta_{\substack{tab \\ trim}}$:

$$\delta_{\substack{tab \\ trim}} = -\frac{1}{b_3}\left(C_{H_0} + \frac{C_{H\alpha}}{\Delta}\left(C_{M_0}C_{L\delta} + C_{M\delta}C_{Leq}\right) - \frac{b_2}{\Delta}\left(C_{M_0}C_{L\alpha} + C_{M\alpha}C_{Leq}\right)\right)$$

$$\delta_{\substack{tab \\ trim}} = -\frac{1}{b_3}\left[C_{H_0} + \frac{C_{M_0}}{\Delta}\left(C_{H\alpha}C_{L\delta} - b_2C_{L\alpha}\right) + \frac{1}{\Delta}\left(C_{H\alpha}C_{M\delta} - b_2C_{M\alpha}\right)C_{Leq}\right]$$

Ricordiamo ora che:

$$\frac{x_G - x_N'}{c} = \frac{C_{M\alpha}'}{a'} = \frac{1}{a'}\left(C_{M\alpha} - \frac{C_{M\delta}C_{H\alpha}}{b_2}\right) \rightarrow a'\frac{x_G - x_N}{c} = \frac{C_{M\alpha}b_2 - C_{M\delta}C_{H\alpha}}{b_2}$$

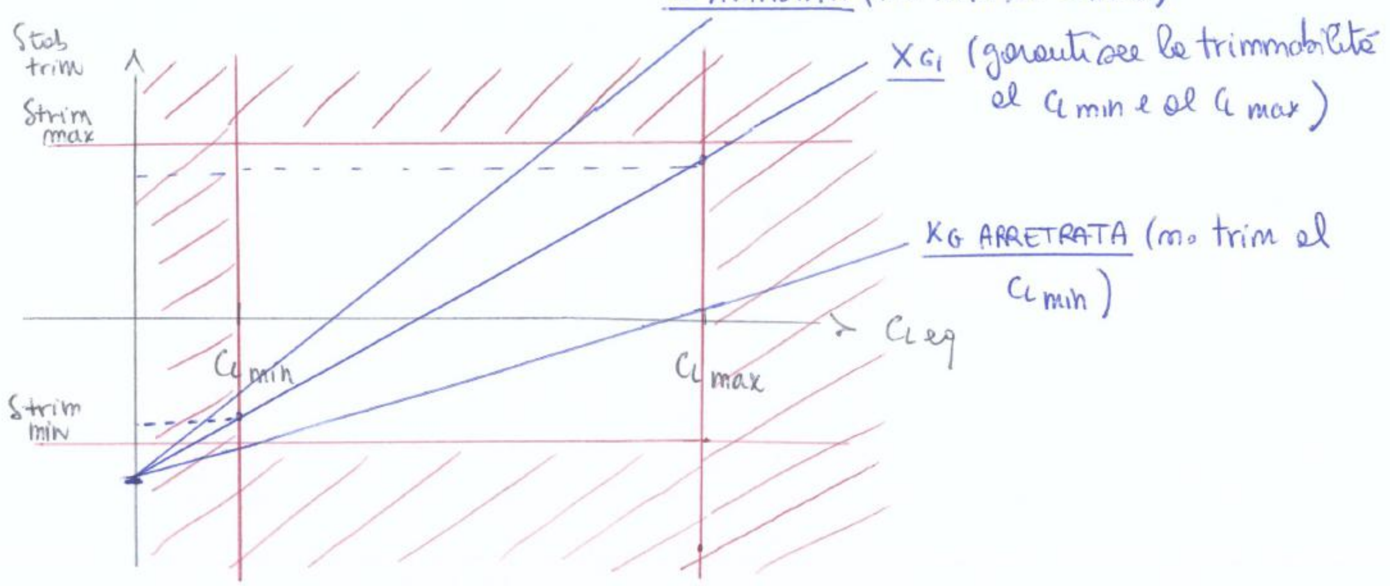
$$\Rightarrow C_{H\alpha}C_{M\delta} - b_2C_{M\alpha} = -a'b_2\frac{x_G - x_N'}{c}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_{\substack{tab \\ trim}} = \underbrace{-\underset{(-)}{\frac{1}{b_3}}\left[C_{H_0} + \underset{(-)}{\frac{\overset{(+)}{C_{M_0}}}{\Delta}}\left(\overset{(-)}{C_{H\alpha}}C_{L\delta} - \overset{(-)}{b_2}C_{L\alpha}\right)\right.}_{(-)} \left. - \frac{a'b_2}{\Delta}\frac{x_G - x_N'}{c}C_{Leq}\right]}$$

termine noto della retta $\delta_{\substack{tab \\ trim}} = f(C_{Leq})$

INTERVALLO DI TRIMMABILITÀ DEL VELIVOLO

Riportiamo su un grafico le escursioni di C_{Leq} e δ_{tab}



Generalmente $|\delta_{trim\ max}| > |\delta_{trim\ min}|$ perché il flusso sul ventre dell'impennaggio orizzontale è più efficace rispetto al flusso sul dorso, che separa prima.

NORMATIVA SULLA TRIMMABILITÀ

Facendo riferimento alle FAR 23 (FAA) $\Rightarrow$ Airworthiness (standard, acrobatici, ...)

Il velivolo deve essere trimmabile nell'intervallo:

$$\boxed{1.2\ V_{ST} < V_{eq} < 2.4\ V_{ST}} \quad \text{con } V_{ST} \cong V_{eq\ min}$$

Si accetta che il velivolo sia trimmabile in un intervallo di V_{eq} inferiore rispetto a quello possibile.

Al decollo $\rightarrow$ $V_{eq} \simeq 1.2 V_{ST}$ $\Rightarrow$ il pilota, manovrando, deve esercitare uno sforzo

A velocità maggiori di $2.4\ V_{ST}$ $\Rightarrow$ il pilota dovrà esercitare uno sforzo (non eccessivo) ed è giusto che sia così, in modo da avere una maggiore attenzione al pilotaggio

Si ha che:

$\boxed{\delta_{tab} = -K\delta}$ con $K \simeq 1$ $\quad K \equiv$ RAPPORTO DI TRASMISSIONE DELL'ALETTA (tab gearing)

Allora:

$K = \left| \dfrac{\partial \delta_{tab}}{\partial \delta} \right| \simeq 1$ a rigore $\neq$ costante, ma noi la consideriamo tale

Ricordiamo che:

$$C_H = b_0 + b_1 \alpha_a + b_2 \delta + b_3 \delta_{tab}$$

$$C_H = b_0 + b_1 \alpha_a + b_2 \delta - K \delta b_3$$

$$C_H = b_0 + b_1 \alpha_a + (b_2 - K b_3)\delta$$

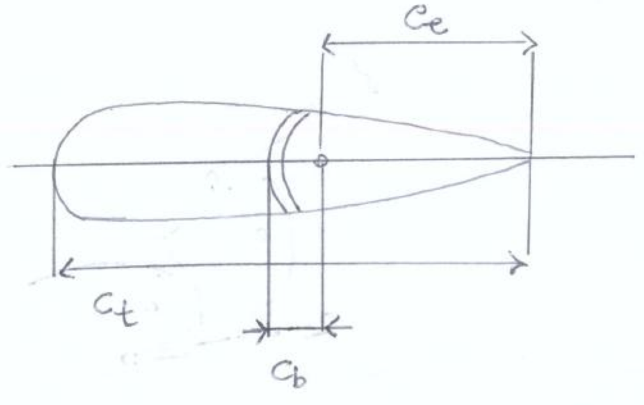
$$\boxed{C_H = b_0 + b_1 \alpha_a + b_2 \left(1 - K \frac{b_3}{b_2}\right)\delta}$$

con $b_3 < 0$; $b_2 < 0$; $|b_2| > |b_3|$; $K > 0$

$\Rightarrow K \dfrac{b_3}{b_2} > 0$; $\quad K \dfrac{b_3}{b_2} < 1$; $\quad \Rightarrow \left(1 - K\dfrac{b_3}{b_2}\right) < 1$ ma > 0

$\Rightarrow$ Riduzione del termine in δ

ARRETRAMENTO DELL'ASSE DI CERNIERA



Dobbiamo determinare come variano i coeff. b_1, b_2 in funzione del rapporto c_b/c_e, che maggiormente li influenza.

Ricordiamo che b_1, b_2 sono considerati costanti, in un intervallo di variazione di α_a, δ contenuti.

In tal caso: $\boxed{\delta_{tab} = +K\delta}$ con $K > 0$ e $K \simeq 1$

Allora:

$$C_H = b_0 + b_1\alpha_0 + b_2\delta + b_3\delta_{tab}$$

$$C_H = b_0 + b_1\alpha_0 + b_2\delta + K\delta b_3$$

$$\boxed{C_H = b_0 + b_1\alpha_0 + b_2\left(1 + K\frac{b_3}{b_2}\right)\delta}$$

Poiché siamo nel punto ③:

$$b_2 > 0 \rightarrow \frac{\overset{(-)}{b_3}}{b_2} < 0 \Rightarrow K\frac{b_3}{b_2} < 0 \text{ e } \underbrace{\left|K\frac{b_3}{b_2}\right| > 1}$$

si realizza facendo in modo che $|Kb_3| > |b_2|$

Quindi:

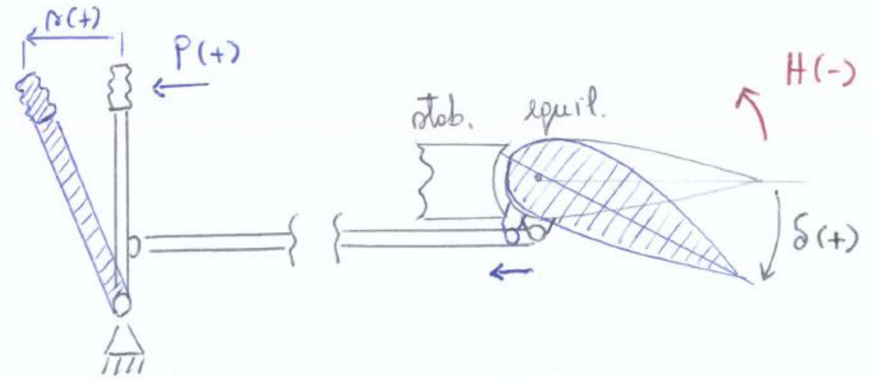
$K > 0$, $b_2 > 0$, $b_3 < 0$

$$\Rightarrow \left|b_2\left(1 + K\frac{b_3}{b_2}\right)\right| < |b_2| \quad \text{perché} \quad \left(1 + K\frac{b_3}{b_2}\right) < 0 \text{ e } \left|\left(1 + K\frac{b_3}{b_2}\right)\right| < 1$$

$\Rightarrow$ RIDUZIONE DEL TERMINE IN δ E $b_2\left(1 + K\frac{b_3}{b_2}\right) < 0$

$\hookrightarrow$ STABILITÀ DEL COMANDO CONSERVATA

TRASMISSIONE DI COMANDO



4) REQUISITO DELLA TRIMMABILITÁ

Deve esserci una V_{ep} in cui il velivolo sia trimmato, anche se questo non presenta la TRIM TAB.

5) REQUISITO DELLA SENSIBILITÁ (seconda parte):

$$\boxed{\frac{dP_{eq}}{dV_{ep}} > 0}$$

Lo sforzo di barra deve aumentare all'aumentare della velocità, non solo la barra deve spostarsi in avanti.

Osserviamo che:

- 4, 5 sono realizzate se $x_G < x_N'$, cioè se il velivolo è stabile a comandi liberi
- Se velivolo stabile a comandi liberi $\Rightarrow$ stabile anche a comandi bloccati $\Rightarrow$ se soddisfo 4, 5 $\Rightarrow$ soddisfo anche 2

Dimostriamolo:

$$P = -GH \rightarrow \boxed{P = -G C_H S_e c_e \frac{1}{2}\rho V^2}$$

$$C_H = C_{H_0} + C_{H_\alpha}\alpha_{eq} + b_2 \delta_{eq} + b_3 \delta_{tab} \quad \leftarrow \text{situazione di equilibrio generica}$$

$$C_H = 0 = C_{H_0} + C_{H_\alpha}\alpha_{ep} + b_2 \delta_{ep} + b_3 \, tab_{trim} \quad \leftarrow \text{velivolo trimmato}$$

Differenza membro a membro:

$$\boxed{C_H = b_3 \left(\delta_{tab} - \delta_{tab_{trim}}\right)}$$

$$\downarrow \; \frac{W/S}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

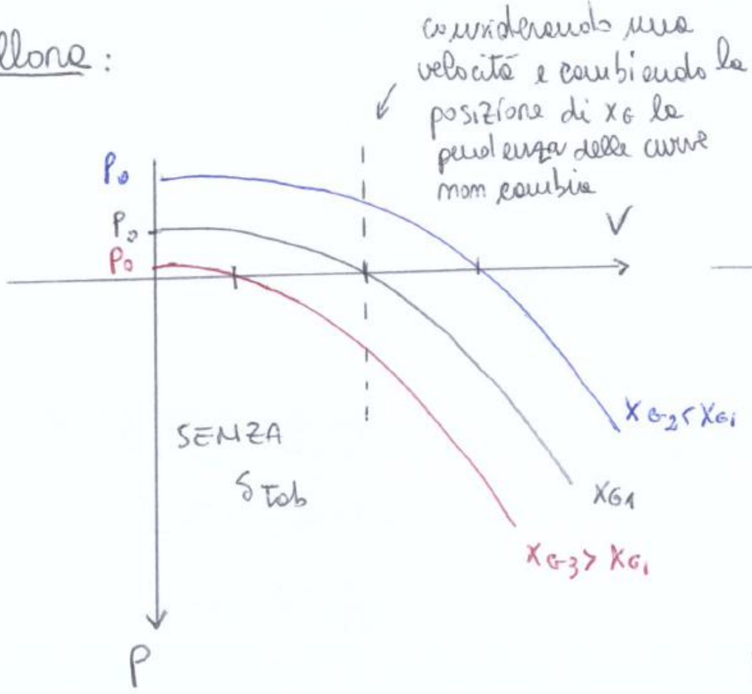
$$\delta_{tab_{trim}} = -\frac{1}{b_3}\left(C_{H_0} + \frac{C_{H\alpha} C_{L\delta} - b_2 C_{L\alpha}}{\Delta} C_{M_0} - \frac{a' b_2}{\Delta} \frac{x_G - x_N'}{c} C_{L_{ep}}\right)$$

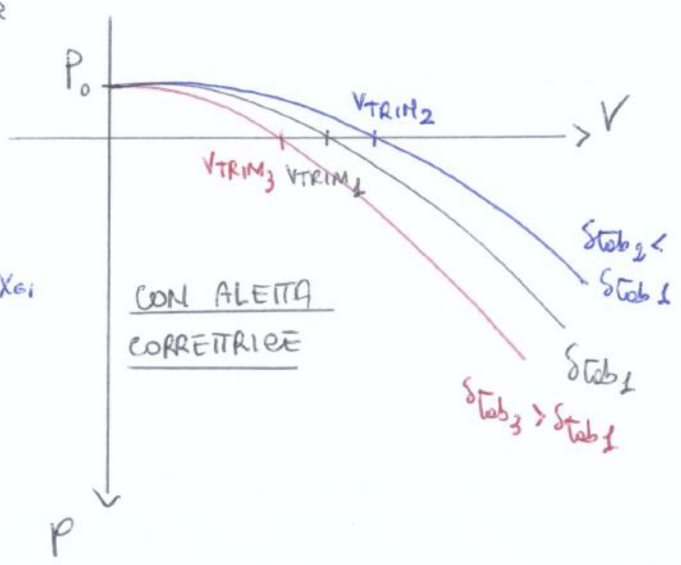
$$\Rightarrow C_H = b_3 \delta_{tab} + C_{H_0} + \frac{C_{H\alpha} C_{L\delta} - b_2 C_{L\alpha}}{\Delta} C_{M_0} - \frac{a' b_2}{\Delta} \frac{x_G - x_N'}{c} \frac{W/S}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

Osserviamo che:

- $P_0 = f(x_G)$
- $B = f(S_{tab})$

Allora:





Spostando la posizione del baricentro sarebbe possibile trimmare il velivolo a differenti velocità.

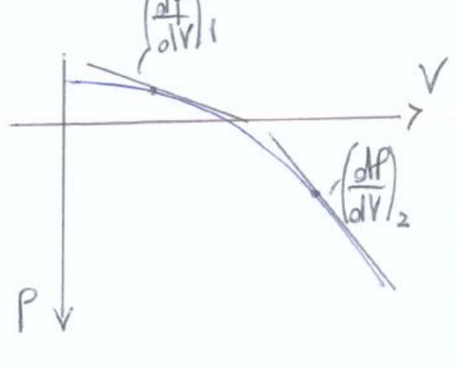
Poiché $P = P_0 + B \frac{1}{2} \rho V^2$

$\Rightarrow$ dal requisito 5: $\frac{dP}{dV} = B \rho V$

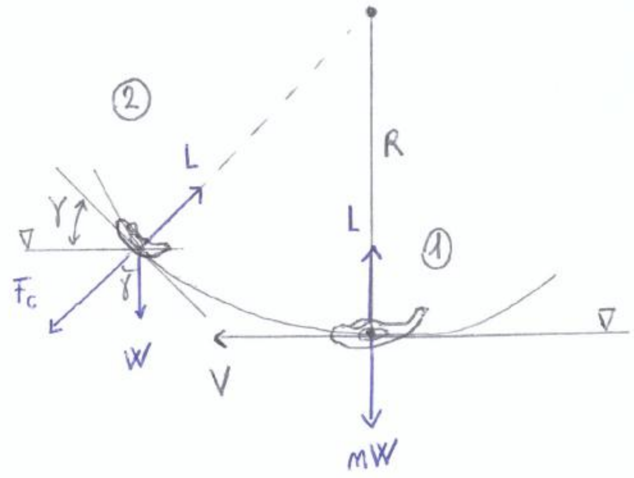
Poiché B = costante, una volta definito S_{tab}

$\Rightarrow \frac{dP}{dV}$ cresce con ρ e V

$\Rightarrow$
- se $z \uparrow$, $\rho \downarrow \Rightarrow$ le curve si appiattiscono ($\frac{dP}{dV} \downarrow$)
- la curvatura aumenta con V
  - $\hookrightarrow$ se la normativa richiede un certo valore di $\frac{dP}{dV}$, occorre che questo sia assicurato in tutto l'intervallo di variazione possibile delle velocità.



MOTO ACCELERATO (con accelerazione normale alla traiettoria)



① $L = mW$

$$mW = W + F_c = W + \frac{W}{g}\frac{V^2}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 1 + \frac{V^2}{gR}}$$

$$q = \dot{\theta} = \frac{V}{R} \quad \text{(pitch rate)}$$

② $L = mW = W\cos\gamma + \dfrac{W}{g}\dfrac{V^2}{R} \Rightarrow \boxed{n = \cos\gamma + \dfrac{V^2}{gR}}$

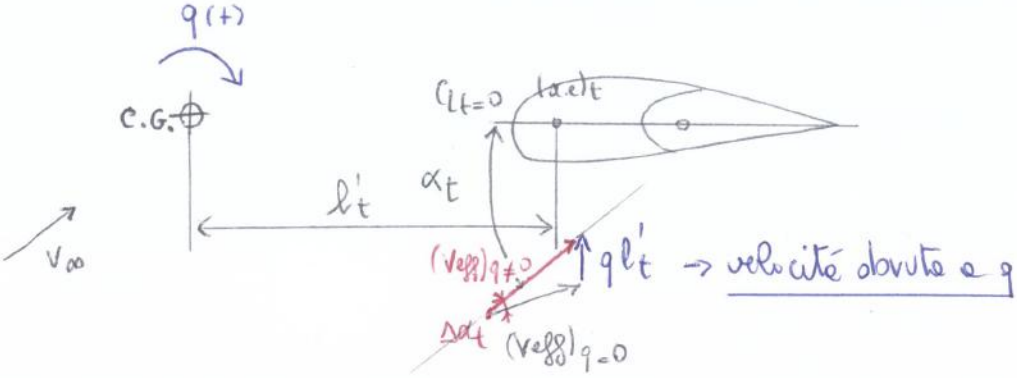
Stiamo considerando la velocità costante, poiché l'accelerazione è normale alla traiettoria. Se V è la stessa e R è lo stesso ⇒ stessa forza centrifuga tra ① e ②.
La portanza, passando da ① e ② deve equilibrare una componente minore del peso ($W\cos\gamma$) ⇒ L diminuisce ⇒ α diminuisce.

Nonostante ciò, considereremo costanti i parametri nell'intorno del punto considerato ⇒ α non cambia nell'intorno del punto considerato ⇒ $\dot{\alpha} = 0$ (come se la richiamata fosse talmente lenta da poter essere pensata come una successione di stati stazionari) → MOTO ACCELERATO A REGIME

→ considereremo solo l'effetto dell'accelerazione centrifuga

V = cost. Se considero α = cost (nell'intorno del punto) ⇒ n = cost (consideriamo $\gamma \simeq$ costante)

CONTRIBUTO DELLA CODA AL C_{Lq} e C_{Mq}



$\Delta\alpha_t \simeq \frac{q l'_t}{V}$ (con le dovute approssimazioni)

$$\begin{cases} \Delta C_L = C_{L_\alpha}\Delta\alpha + C_{L_\delta}\Delta\delta + \frac{\partial C_L}{\partial q} q \\ \Delta C_{M_G} = C_{M_\alpha}\Delta\alpha + C_{M_\delta}\Delta\delta + \frac{\partial C_{M_G}}{\partial q} q \end{cases}$$

dove Δ è rispetto a $n = 1$, ovvero rispetto a $W = L$ (moto rettilineo uniforme orizzontale)

Le derivate $\frac{\partial C_L}{\partial q}$, $\frac{\partial C_{M_G}}{\partial q}$ sono dimensionate. Introduciamo allora le derivate ADIMENSIONALI:

$\hat{q} = \frac{q}{V/c_{/2}} = \frac{q c}{2V}$, dove $\frac{c/2}{V} = t^* =$ tempo aerodinamico (tempo per percorrere alla V la distanza $c/2$)

$\Rightarrow C_{Lq} = \frac{\partial C_L}{\partial \hat{q}}$, $C_{Mq} = \frac{\partial C_{M_G}}{\partial \hat{q}}$ sono le derivate adimensionali

Andiamo a calcolarle:

$$C_{L_t} = \alpha_t a_t \Rightarrow \Delta C_{L_t} = a_t\Delta\alpha_t = +\frac{q l'_t}{V} a_t = a_t \frac{l'_t}{\cancel{V}} \overbrace{q \frac{c}{2V}}^{\hat{q}} \cdot \frac{2\cancel{V}}{c} = a_t l'_t \hat{q} \cdot \frac{2}{c}$$

$$\boxed{\Delta C_{L_t} = \frac{2}{c} a_t l'_t \hat{q}}$$

variazione del coeff. di portanza del tail per effetto di $\hat{q}$.

Il contributo del velivolo deve essere riportato alla sezione alare $\Rightarrow (\Delta C_L)_{tail} = \frac{S_t}{S}\Delta C_{L_t} = 2 a_t \overbrace{\frac{l'_t}{c}\frac{S_t}{S}}^{\bar{V}'}\hat{q} = 2 a_t \bar{V}'\hat{q}$

Nel passaggio dal volo rettilineo al volo accelerato:

$$\left.\begin{array}{l} L = W \\ L = W + \frac{W}{g}\frac{V^2}{R} = W + \frac{W}{g} q V \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta L = \frac{W}{g} q V$$

Ricordando che, nel punto più basso della traiettoria

$$n = 1 - \frac{V^2}{gR} \Rightarrow n - 1 = \Delta n = \frac{V^2}{gR} = \frac{qV}{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta L = \frac{W}{g} q V = W(n-1)}$$

Allora:

VRUO $\longrightarrow L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_L)_{n=1}$

VOLO ACCELERATO $\Rightarrow \Delta L = \frac{qV}{g} W = \frac{qV}{g} \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_L)_{n=1}$

$$\Rightarrow \Delta C_L = \frac{qV}{g}(C_L)_{n=1} \cdot \frac{c}{2V} \cdot \frac{2V}{c} = 2\hat{q}\frac{V^2}{gc}(C_L)_{n=1}$$

$$\frac{qc}{2V} = \hat{q}$$

Osservando che:

$$(C_L)_{n=1} = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}$$

$$\Rightarrow \Delta C_L = \frac{2\hat{q} W}{g c S \frac{1}{2}\rho} = \frac{2\hat{q}\, W/g}{c/2\, \rho S} \Rightarrow \boxed{\Delta C_L = \frac{2\hat{q}\,(W/g)}{(c/2\,\rho S)}}$$

→ massa del velivolo

↳ massa d'aria convenzionale

Introduciamo il PARAMETRO DI MASSA RELATIVA μ (o massa del velivolo adimensionalizzata):

$$\boxed{\mu = \frac{W/g}{c/2\,\rho S}} \Rightarrow \boxed{\Delta C_L = 2\hat{q}\mu} \quad \text{con } \mu \uparrow \text{ se } z \uparrow$$

Determiniamo il gradiente $\Delta\delta/\Delta n$:

$$\boxed{\frac{C_{L\alpha}}{C_{M\alpha}} = \frac{-C_{L\delta}\Delta\delta - \frac{C_{Lq}}{2\mu}(C_L)_{n=1}\Delta n + (C_L)_{n=1}\Delta n}{-C_{M\delta}\Delta\delta - \frac{C_{Mq}}{2\mu}(C_L)_{n=1}\Delta n}}$$

$$\frac{C_{L\alpha}}{C_{M\alpha}}\left(-C_{M\delta}\Delta\delta - \frac{C_{Mq}}{2\mu}(C_L)_{n=1}\Delta n\right) = -C_{L\delta}\Delta\delta - \frac{C_{Lq}}{2\mu}(C_L)_{n=1}\Delta n + (C_L)_{n=1}\Delta n$$

$$\Delta\delta\left(C_{L\delta} - \frac{C_{L\alpha}C_{M\delta}}{C_{M\alpha}}\right) = \Delta n\left(\frac{C_{L\alpha}}{C_{M\alpha}}\frac{C_{Mq}}{2\mu}(C_L)_{n=1} - \frac{C_{Lq}}{2\mu}(C_L)_{n=1} + (C_L)_{n=1}\right)$$

$$-\Delta\delta\cdot\frac{\Delta}{C_{M\alpha}} = \Delta n\,(C_L)_{n=1}\left[\frac{C_{L\alpha}}{C_{M\alpha}}\frac{C_{Mq}}{2\mu} - \frac{C_{Lq}}{2\mu} + 1\right]$$

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta n} = -\frac{(C_L)_{n=1}}{\Delta}\left[C_{M\alpha}\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right) + \frac{C_{L\alpha}C_{Mq}}{2\mu}\right], \qquad C_{M\alpha} = C_{L\alpha}\frac{x_G - x_N}{c}$$

$$\boxed{\frac{\Delta\delta}{\Delta n} = -\frac{C_{L\alpha}}{\Delta}\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right)(C_L)_{n=1}\left[\frac{x_G - x_N}{c} + \frac{C_{Mq}}{2\mu - C_{Lq}}\right]} \Rightarrow \frac{\Delta\delta}{n-1} = f\left(\frac{x_G}{c}, \underset{\mu}{\underset{\uparrow}{z}}, \underset{(C_L)_{n=1}}{\underset{\uparrow}{V_{eq}}}\right)$$

Dove ricordiamo che:

$$\left.\begin{aligned} C_{Lq} &= 2a_t\bar{V}' \\ C_{Mq} &= -2a_t\bar{V}'\frac{l_t'}{c}\end{aligned}\right\}\quad \bar{V}' = f(l_t')$$

CONTRIBUTO DELLA CODA

Il valore $\frac{\Delta\delta}{\Delta n}$ deve assumere un valore stabilito dalle normative e deve essere rispettato al variare della posizione del baricentro, della quota e della velocità.

In un velivolo convenzionale il C_{Lq}, C_{Mq} sono influenzati soprattutto dalla coda.

In un velivolo tutt'ala le derivate C_{Lq}, C_{Mq} derivano dal contributo dell'ala che dobbiamo valutare.

Ciò può essere sfruttato in due modi:

① SPERIMENTALE

Considero l'ala così com'è aggiungendo un incurvamento con legge parabolica. Dopodiché si testa l'ala in galleria del vento con una semplice velocità di traslazione V. L'effetto però quello di una V + una q.
Variando la velocità, mentre la legge dell'incurvamento rimane la stessa poiché il profilo non cambia, è come se il profilo venisse testato a differenti q, poiché $\hat{q}$ rimane costante, in quanto $z = \frac{\hat{q}}{e} x^2$
Per testare l'ala a differenti $\hat{q}$, si può ad esempio fissare q e far variare V. In tal caso varierà anche l'incurvamento del profilo, per cui per ogni $\hat{q}$ si avrà un'ala il cui profilo avrà un particolare incurvamento.
Poiché però le derivate rispetto a $\hat{q}$ non variano, C_{Lq}, C_{Mq} dovrebbero assumere un valore preciso indipendentemente dal valore di $\hat{q}$.
Infatti:

$$C_{Mq} = \frac{\Delta C_{MG}}{\Delta \hat{q}} = \frac{(C_{MG})_{curv} - (C_{MG})_{base}}{\hat{q}}$$

variando $\hat{q}$, dovrebbe variare allo stesso modo la differenza al numeratore

Analogamente, si può valutare la derivata C_{Lq}.

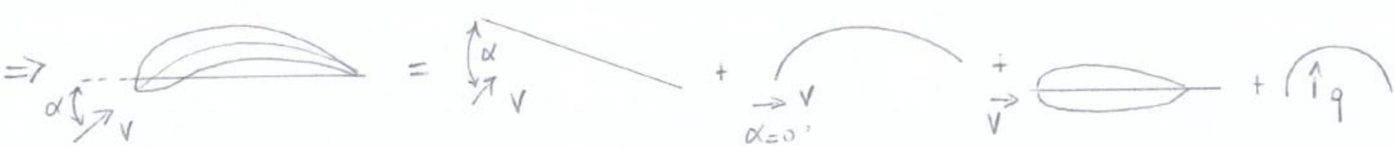
2) AERODINAMICA TEORICA

PROFILO BASE

PROFILO MODIFICATO

Aggiungiamo alla linea d'asse, punto per punto, un incurvamento arbitrario con legge parabolica

Alla linea d'asse modificata, si aggiunge punto per punto la legge degli spessori del profilo originale



L'ala avrà un contributo alle derivate C_{Lq}, C_{Mq} se poco allungata.

=> ALA A DELTA (EFA, CONCORDE -> derivata C_{Mq} molto forte)

Allora, l'espressione del $\frac{dS}{dn}$ diventa:

$$\boxed{\frac{dS}{dn} = -\frac{C_{L\alpha}}{\Delta}\left(1-\frac{C_{Lq}}{2\mu}\right)(C_L)_{n=1}\,\frac{X_G - X_M}{c}}$$

quindi, una volta stabilito X_M, noto x_G, V, z si può calcolare il gradiente dS/dn

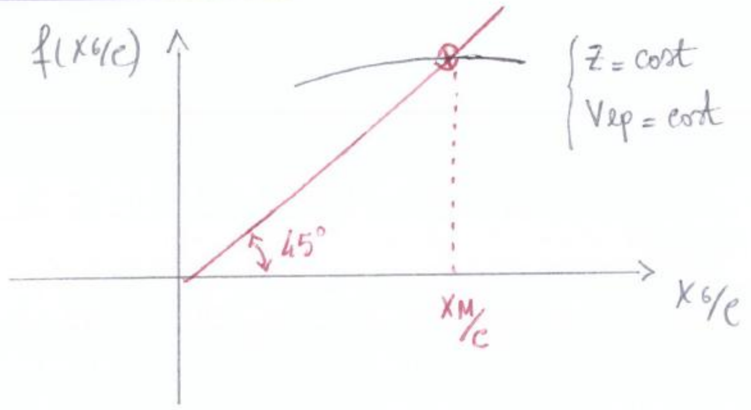
Se volessimo fare i conti più precisi:

2ª APPROSSIMAZIONE: $C_{Mq}, C_{Lq} = f(x_G)$

Allora, definisco una $f(x_G/c) = \underbrace{\frac{x_N}{c} - \frac{C_{Mq}}{2\mu - C_{Lq}}}_{x_M/c}$ con C_{Mq}, C_{Lq} che variano con la posizione del baricentro

Per cui:

$$\boxed{\frac{x_G}{c} = f\left(\frac{x_G}{c}\right)}$$



Si riporta l'andamento di $f(x_G/c)$ in funzione della posizione x_G/c.
Intersecando la funzione $f(x_G/c) = \frac{x_M}{c}$ con la bisettrice 1°-3° quadrante di equazione $x_G/c = f(x_G/c) = \frac{x_M}{c}$, si determina il punto di manovra a comandi bloccati, che è quello tale per cui $dS/dn = 0$

Definiamo MARGINE DI MANOVRA A COMANDI BLOCCATI:

$$\boxed{K_M = \frac{x_M - x_G}{c} \cdot 100}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\alpha}{m-1} = -\frac{1}{C_{L\alpha}}\left[C_{L\delta}\frac{\Delta\delta}{m-1} - (C_L)_{m=1} + (C_L)_{m=1}\frac{C_{Lq}}{2\mu}\right]$$

Sostituendo nella relazione del $\frac{\Delta C_H}{m-1}$:

$$\frac{\Delta C_H}{m-1} = -\frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}}\left[C_{L\delta}\frac{\Delta\delta}{m-1} + (C_L)_{m=1}\frac{C_{Lq}}{2\mu} - (C_L)_{m=1}\right] + b_2\frac{\Delta\delta}{m-1} + C_{Hq}\frac{(C_L)_{m=1}}{2\mu}$$

$$\frac{\Delta C_H}{m-1} = \frac{1}{2\mu C_{L\alpha}}\left[-C_{H\alpha}C_{Lq} + C_{H\alpha}\cdot 2\mu + C_{Hq}C_{L\alpha}\right](C_L)_{m=1} + \left(b_2 - \frac{C_{H\alpha}C_{L\delta}}{C_{L\alpha}}\right)\frac{\Delta\delta}{m-1}$$

$$\frac{\Delta C_H}{m-1} = \frac{1}{2\mu C_{L\alpha}}\left[(2\mu - C_{Lq})C_{H\alpha} + C_{Hq}C_{L\alpha}\right](C_L)_{m=1} + \left(b_2 - \frac{C_{H\alpha}C_{L\delta}}{C_{L\alpha}}\right)\frac{\Delta\delta}{m-1}$$

Ricordando che:

$$C'_{L\alpha} = a' = C_{L\alpha} - \frac{C_{H\alpha}C_{L\delta}}{b_2} = C_{L\alpha}\left(1 - \frac{C_{H\alpha}C_{L\delta}}{b_2 C_{L\alpha}}\right) = \frac{C_{L\alpha}}{b_2}\left(\frac{C_{L\alpha}b_2 - C_{H\alpha}C_{L\delta}}{C_{L\alpha}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a' b_2}{C_{L\alpha}} = b_2 - \frac{C_{H\alpha}C_{L\delta}}{C_{L\alpha}}$$

Per cui:

$$\frac{\Delta C_H}{m-1} = \frac{1}{2\mu C_{L\alpha}}\left[(2\mu - C_{Lq})C_{H\alpha} + C_{Hq}C_{L\alpha}\right](C_L)_{m=1} + \frac{a' b_2}{C_{L\alpha}}\frac{\Delta\delta}{m-1}$$

con $C_{Hq} = 2b_1\frac{l'_t}{c} = f\left(x_G/c\right)$ poiché è presente l'_t

•) PRIMA APPROSSIMAZIONE: $C_{Lq}, C_{Hq}, C_{Mq} \neq f\left(x_G/c\right)$

Ricordiamo che:

$$\frac{\Delta\delta}{m-1} = -\frac{C_{L\alpha}}{\Delta}\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right)(C_L)_{m=1}\frac{x_G - x_M}{c}$$

STICH - FORCE per g

$$\frac{\Delta P}{n-1} = -G S_e c_e \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{\Delta C_H}{n-1}$$

variazione dello sforzo di barra per effetto della variazione del fattore di carico o contingenza

$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{n-1} = G S_e c_e \frac{1}{2}\rho V^2 (C_L)_{n=1} \frac{a' b_2}{\Delta}\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right) \frac{x_G - x_M'}{c}$$

Osservando che:

$$(C_L)_{n=1} = \frac{W/S}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta P}{\Delta n} = \frac{\Delta P}{n-1} = \frac{dP}{dn} = G S_e c_e \frac{W}{S}\frac{a' b_2}{\Delta}\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right) \frac{x_G - x_M'}{c}}$$

Affinché $\frac{\Delta P}{n-1} < 0 \Rightarrow x_G < x_M'$ baricentro anteriore al punto di manovra a comandi liberi

OSSERVAZIONI

- $\frac{dP}{dn}$ non dipende dalla velocità $\rightarrow \frac{dP}{dn} \neq f(V)$
- $\left|\frac{dP}{dn}\right|$ diminuisce con z, (per effetto di $\mu = \frac{W/S}{\frac{1}{2}\cdot e \rho S}$ dovrebbe aumentare, ma vedi esercitaz.)

- Velivolo acrobatico: $\frac{dP}{dn} \sim 1\ Kg/g$
- Velivolo da trasporto: $\frac{dP}{dn} \sim 4\ Kg/g$

$\rightarrow$ la normativa stabilisce un intervallo, non un valore specifico

- Notiamo che per variare il valore di $\frac{\Delta P}{\Delta n}$ in modo che questo si adatti a quanto richiesto dalla normativa, oppure i parametri geometrici e/o aerodinamici che non possono variare molto, pena lo stravolgimento del velivolo progettato, si può agire su x_M', che però dipende da x_M, che a sua volta dipende da x_N. Il problema è dunque abbastanza delicato

DETERMINAZIONE PRECISA di $\frac{\Delta C_H}{\Delta m}$

Ricordiamo che:

$$\frac{\Delta C_H}{m-1} = \frac{1}{2\mu C_{L\alpha}}\left[(2\mu - C_{Lq})C_{H\alpha} + C_{Hq}C_{L\alpha}\right](C_L)_{m=1} + \frac{a'b_2}{C_{L\alpha}}\frac{\Delta\delta}{m-1}$$

$$\frac{\Delta\delta}{m-1} = -\frac{C_{L\alpha}}{\Delta}\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right)(C_L)_{m=1}\frac{x_G - x_M}{c}$$

$$f\left(\frac{x_G}{c}\right) = \underbrace{\frac{x_N}{c} - \frac{C_{Mq}}{2\mu - C_{Lq}}}_{x_M/c}$$

definito per trovare in maniera esatta il punto di manovra a comandi bloccati.
Dipendenza da x_G perché C_{Mq}, C_{Lq} dipendono dalla posizione del baricentro.

Sostituendo nella prima relazione:

$$\frac{\Delta C_H}{m-1} = (C_L)_{m=1}\left\{\left[\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right)\frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}} + \frac{C_{Hq}}{2\mu}\right] - \frac{a'b_2}{\Delta}\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right)\left(\frac{x_G}{c} - f\left(\frac{x_G}{c}\right)\right)\right\} =$$

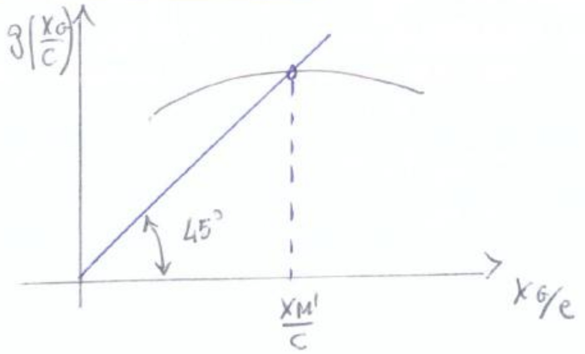
$$= -\frac{a'b_2}{\Delta}\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right)(C_L)_{m=1}\left[\frac{x_G}{c} - f\left(\frac{x_G}{c}\right) - \frac{\Delta}{a'b_2}\left(\frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}} + \frac{C_{Hq}}{2\mu - C_{Lq}}\right)\right]$$

Poniamo:

$$g\left(\frac{x_G}{c}\right) = f\left(\frac{x_G}{c}\right) + \frac{\Delta}{a'b_2}\left(\frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}} + \frac{C_{Hq}}{2\mu - C_{Lq}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta C_H}{m-1} = \frac{\partial C_H}{\partial m} = -\frac{a'b_2}{\Delta}\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right)(C_L)_{m=1}\left[\frac{x_G}{c} - g\left(\frac{x_G}{c}\right)\right]}$$

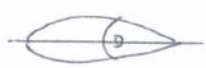
$$\Rightarrow \left(\frac{x_G}{c}\right)_{\frac{\Delta C_H}{m-1}=0} = g\left(\frac{x_G}{c}\right) = \frac{x_M'}{c} = \left(\frac{x_G}{c}\right)_{\frac{dP}{dm}=0}$$



EFFETTO SUOLO

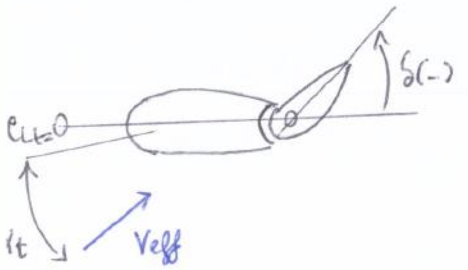
Il downwash a valle dell'ala diminuisce per effetto della vicinanza del suolo. Inoltre, l'effetto suolo aumenta l'efficienza in quanto si ha un incremento di portanza e una riduzione della resistenza indotta. Questa diminuisce poiché i vortici di estremità non si sviluppano come se fossero in aria libera.
La portanza aumenta per "l'effetto cuscino" che incrementa la sovrapressione nel ventre.

$\Rightarrow$ diminuisce con l'effetto suolo $\Rightarrow \varepsilon\downarrow$

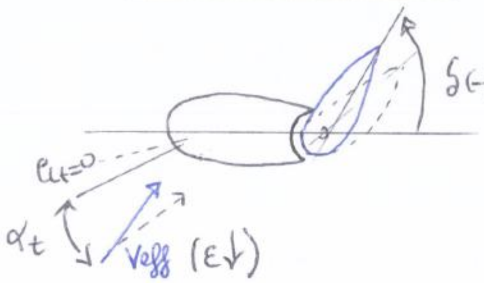


$\Rightarrow \alpha_t = \alpha_{wb} - i_{wb} - \varepsilon + i_t + \tau\delta$, se $\varepsilon\downarrow \Rightarrow |\alpha_t|\uparrow$ con effetto suolo $\Rightarrow \delta\downarrow$

SENZA EFFETTO SUOLO



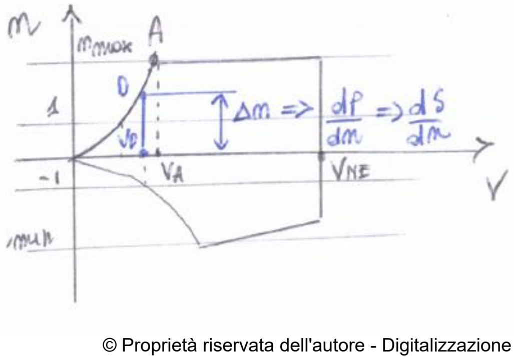
CON EFFETTO SUOLO



$\Rightarrow |\delta|\uparrow$

Poiché $\varepsilon\downarrow$, se non diminuisse δ si avrebbe un α_t maggiore.
Allora, a pari δ: $C_L = C_{L_{wb}} + \frac{S_t}{S} a_t \alpha_t \uparrow$ perché $\alpha_t\uparrow \Rightarrow$ se a pari δ si ha un C_L maggiore, vuol dire che in condizioni di effetto suolo, per equilibrare il velivolo al $C_{L_{max}}$ sarò necessario meno equilibratore.

Occorre infine assicurarsi che l'escursione dell'equilibratore permetta il raggiungimento di tutti i punti estremi del diagramma di manovra:



Alla V_D, mediante una opportuna escursione dell'equilibratore, devo riuscire a portare il velivolo allo stallo

0. Tracciare le curve $C_{MG} - C_{Lwb}$ per il solo complesso ala-fusoliera per le 5 posizioni di X_G/c = 0,205; 0,285; 0,365; 0.445; 0.525

Coefficienti aerodinamici e punto neutro

1. Tracciare su un unico diagramma con ascissa α_{wb}, le due curve relative a C_L e $C_{L_{wb}}$.
   N.B. Consideriamo il fattore di induzione pari a 0.75.

2. Ricavare il C_{M_G} in funzione di α per le cinque posizioni del baricentro del velivolo di cui al punto 1 e valutare i corrispondenti valori di C_{M_α}.
   $X_G/c = 0{,}205$; $X_G/c = 0{,}285$; $X_G/c = 0{,}365$; $X_G/c = 0{,}445$; $X_G/c = 0{,}525$

3. Determinare la posizione del punto neutro del velivolo completo e discutere le condizioni di stabilità.

4. Determinare l'incidenza di portanza nulla $(C_L = 0)$ del velivolo completo.

Determinazione delle condizioni di equilibrio

1. Su un diagramma avente ascissa α, riportare le curve C_L e $C_{L_{eq}}$ punteggiando quest'ultima con i valori δ_{eq}, per le due posizioni estreme del baricentro $X_G/c = 0{,}205$ e $X_G/c = 0{,}365$.

2. Tracciare il diagramma δ_{eq}, $C_{L_{eq}}$ per le seguenti posizioni del baricentro X_G/c = 0,205 – 0,285 – 0,365 – 0,445; con $X_N/c = 0{,}512$.

3. Per la posizione del baricentro $Xg/c = 0{,}285$ tracciare le curve $C_L(\alpha,\delta)$ e $C_{M_G}(\alpha,\delta)$ e verificarne la congruenza nelle condizioni di equilibrio $(\alpha_{eq},\delta_{eq})$.

Derivate aerodinamiche di manovra e trimmaggio

Per tutte le posizioni del baricentro precedentemente considerate:

1. Calcolare le derivate C_{L_δ} e C_{M_δ} e valutare percentualmente il contributo del termine in C_{L_δ} ai valori di C_{M_δ}.

2. Tracciare le curve (δ_{eq}, V_i)

3. Calcolare la posizione del punto neutro X_N'/c a comandi liberi

4. Tracciare le curve $(\delta_{tab_{trim}}, C_{L_{eq}})$ e $(\delta_{tab_{trim}}, V_{i_{eq}})$ per le seguenti posizioni del baricentro: X_G/c=0,205 – 0,285 – 0,365 – 0,445 – 0,525.

Politecnico di Torino

Dipartimento di ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Corso di MECCANICA DEL VOLO

Anno Accademico 2016/2017

Di seguito vengono fornite le viste (trittico in scala 1:50 circa) e i dati relativi all'aliante monoposto d'addestramento N° 73, oltre alcuni richiami teorici utili allo svolgimento dell'esercitazione relativa a questo velivolo.

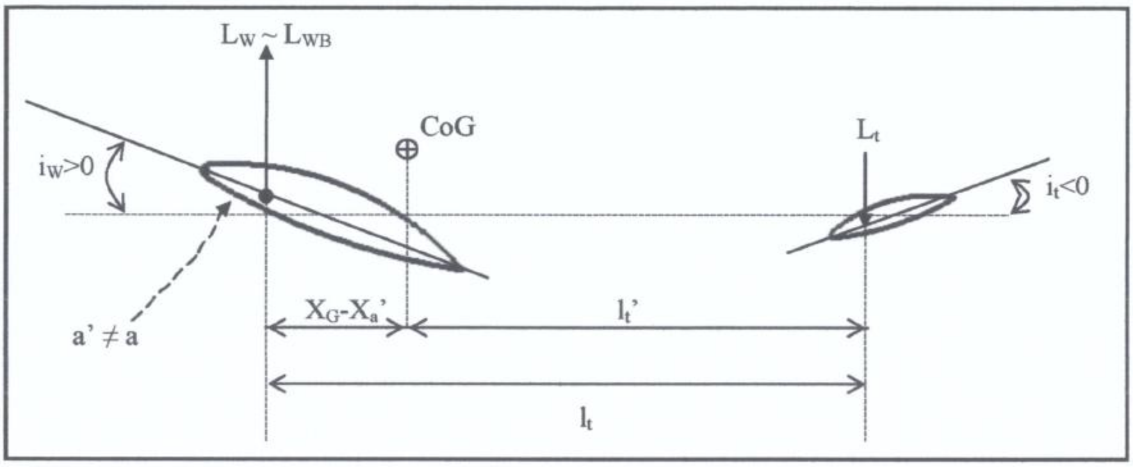
se il pilota non raggiunge 56 Kg → ZAVORRA

Velivolo completo		
Peso a vuoto	(Empty weight)	$W_e = 190$ Kg
Peso totale	(Total weight)	$W = 246 \div 300$ Kg
Carico alare	(Wing loading)	$\frac{W}{S} = 19.5 \div 23.8 \ \frac{Kg}{m^2}$
Posizioni estreme del baricentro riferite alla corda media aerodinamica c		$\frac{X_G}{c} = 0.365 \div 0.205$ $\frac{Z_G}{c} \approx 0$ (si trascura il wing drag term)

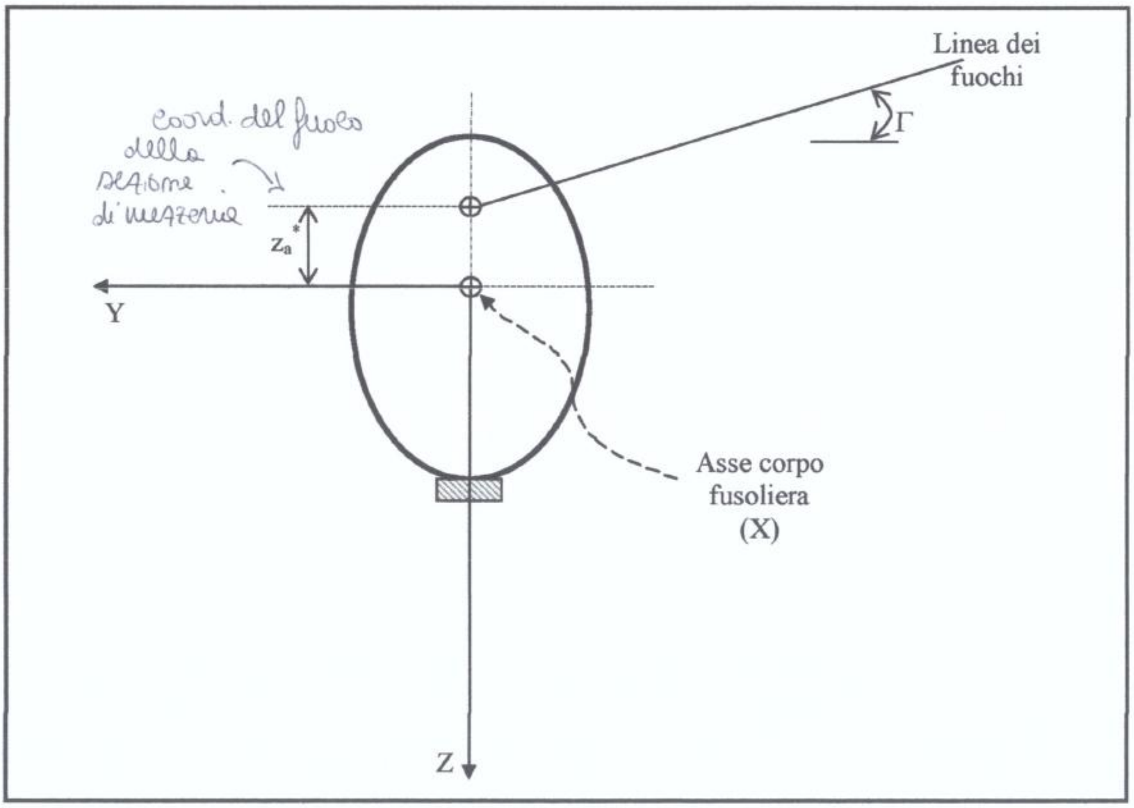
Ala (wing)		
Apertura	(Wing span)	$b = 15$ m
Superficie	(Wing surface)	$S = 12.6$ m^2
Allungamento	(Wing aspect ratio)	$A = 17.85$
Coeff. di portanza massimo	(Wing max lift coefficient)	$C_{L\max\ w} = 1.35$
Calettamento	(Wing setting)	$i_w = 8.5°$ (tra direzione di portanza nulla ala e asse longitudinale X)
Coefficiente di momento focale	(Zero lift moment coefficient)	$C_{M0\_w} = -0.109$ ($0° \leq \alpha_w \leq 10°$)
Coefficiente di resistenza	(Zero lift drag coefficient)	$C_{D0\ w} = 0.0076$ (Per $C_{Lw} = 0$)
Curva interpolatrice della polare	$C_D = C_{D0} + K^*C_L{}^x$	$C_{Dw} = 0.0076 + 0.0199^*C_{Lw}{}^{2.35}$ ($0.15 < C_{Lw} < 1.3$)
Diedro	(Wing dihedral)	$\Gamma = 1.5°$
Freccia della linea dei fuochi	(Sweep of quarter-chord line)	$\Lambda = -1.37°$
Coefficiente angolare di portanza	(Wing lift curve slope)	$a_w = \frac{C_{l\alpha}}{1 + \frac{C_{l\alpha}}{\pi\lambda}} = 5.615$ rad^{-1}
Corda della sezione di mezzeria	(Wing root centerline chord)	$c_r = 1.20$ m
Corda di estremità	(Wing tip chord)	$c_t = 0.48$ m
Rapporto di rastremazione (ala monotrapezia)	(Wing taper ratio) (straight tapered wing)	$r = \frac{c_t}{c_r} = 0.4$
Posizione del fuoco del profilo di mezzeria rispetto al riferimento X, asse corpo fusoliera		$z_a^* = -0.36$ m
Profilo alare, costante lungo tutta la superficie	(Wing section)	Wortman FX-61184

non coincide con C_L stallo

↳ si considera anche l'effetto del C_{D_0} che non è cost. ⇓ increm. resistenza di forma



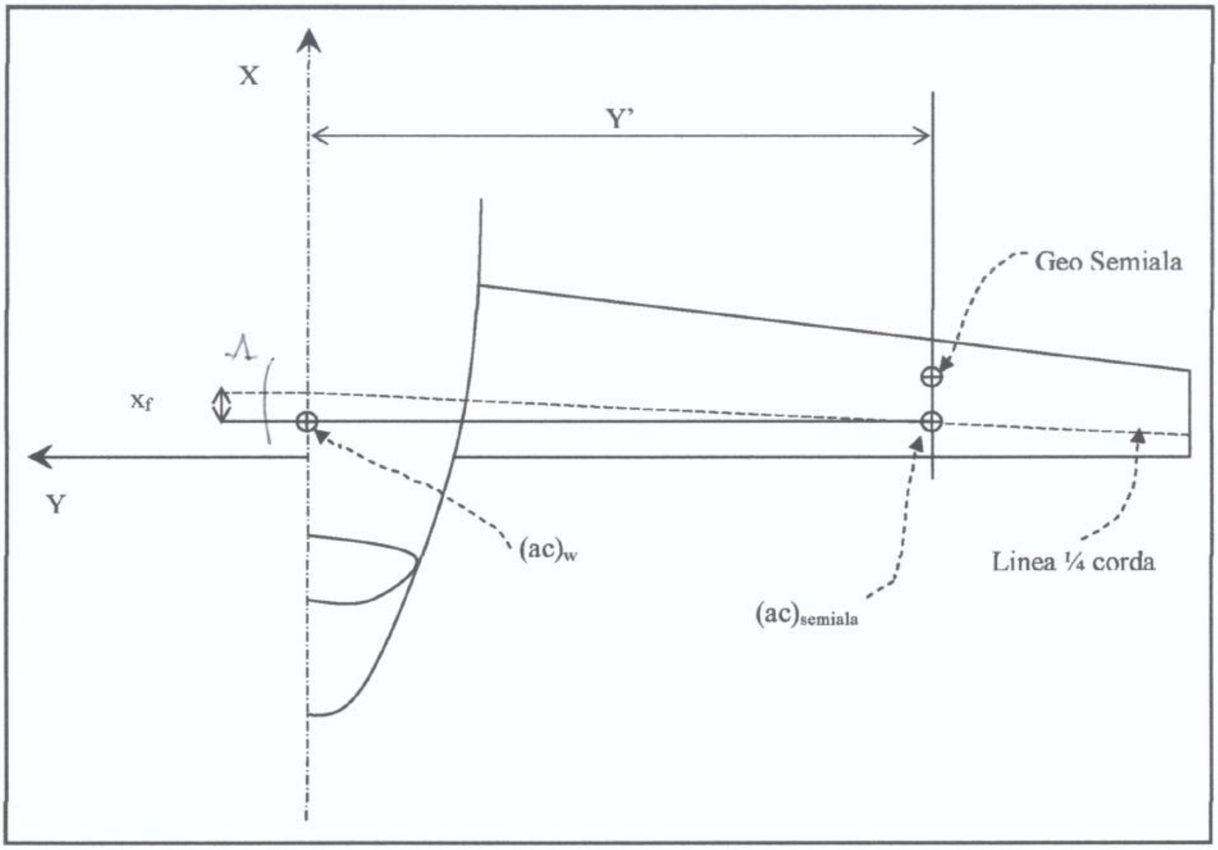
N.B. i_W e i_t sono volutamente esagerati



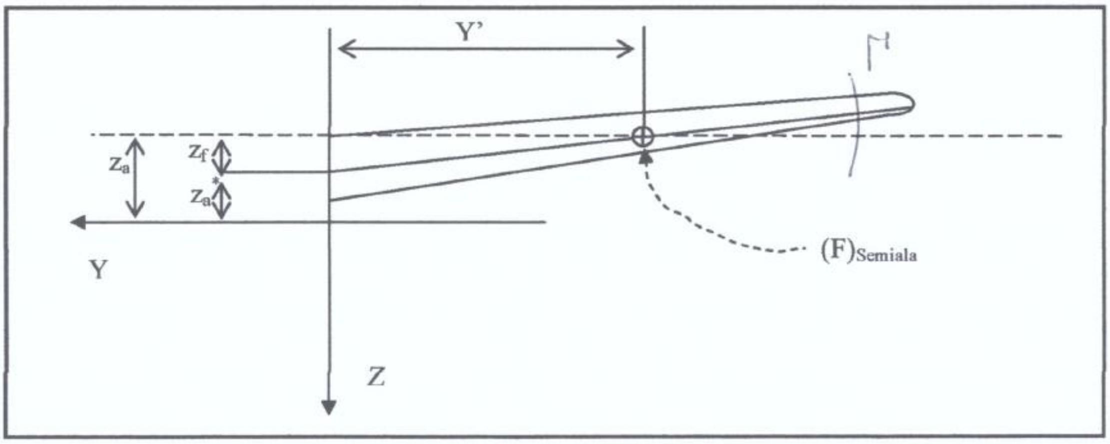
L'asse X è conveniente sia prossimo alla direzione di momento nullo sulla fusoliera

Breve richiamo sul calcolo della posizione del fuoco dell'ala

Se l'ala è trapezia, pluritrapezia ed ellittica con profilo costante, il $C_{l\alpha}$ è costante lungo l'apertura e quindi il fuoco si trova sulla corda baricentrica (si parla ovviamente di baricentro geometrico).



L' $(ac)_w$ si trova sulla congiungente dei fuochi delle due semiali nel piano Z-X .



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 208

Report sperimentali

La fusoliera può essere assimilata ad un corpo fusiforme che, immerso in una corrente, è soggetto a forze aerodinamiche che, come per l'ala, si possono ridurre ad una portanza, una resistenza e un momento di beccheggio, limitandosi al piano longitudinale. Tuttavia, quando si analizzano ala e fusoliera insieme, non basta considerare il principio di sovrapposizione degli effetti, poiché si manifestano fenomeni di interferenza in grado, addirittura, di stravolgere i risultati della sovrapposizione. L'ala, infatti, influenza il campo di flusso attorno alla fusoliera e viceversa. Gli effetti dell'aggiunta della fusoliera all'ala possono essere ridotti ai quattro di seguito riportati:

- spostamento in avanti del centro aerodinamico ;
- incremento del coefficiente angolare di portanza ;
- incremento del coefficiente di momento di beccheggio C_{m_0} ;
- diminuzione dell'incidenza complessiva rispetto a quella dell'ala isolata, a causa del raddrizzamento dei filetti fluidi.

Nell'analisi in questione, l'ultimo effetto viene ritenuto trascurabile. L'incremento del coefficiente angolare di portanza è valutato sommando i coefficienti angolari di ala e fusoliera isolate, riportando quest'ultimo alla superficie di riferimento S:

$$C_{L_{\alpha wb}} = C_{L_{\alpha w}} + C_{L_{\alpha fuso}} \frac{S_f}{S}$$

I rimanenti due effetti sono valutati sperimentalmente mediante i diagrammi riportati in *report* sperimentali della NASA, poiché non è possibile una trattazione analitica di tali effetti.
In figura si trova diagrammato il termine Δx_a dello spostamento del centro aerodinamico. Il punto neutro del velivolo è definito come il punto nel piano di simmetria per il quale il coefficiente di momento di beccheggio risulta indipendente dalla variazione dell'angolo di incidenza. Il valore dello spostamento, dovuto alla presenza della fusoliera, di tale punto è dato in funzione delle dimensioni e della posizione della fusoliera stessa rispetto all'ala. Altri parametri, comunque, hanno influenza su questo spostamento, tra i quali i più importanti sono il volume della fusoliera posto davanti all'ala e il coefficiente angolare di portanza dell'ala: essi fanno sì che il punto neutro si sposti ulteriormente in avanti. Anche la configurazione del velivolo influisce significativamente: si riscontrano variazioni pari a circa il 5% al di sopra o al di sotto del valore ottenuto per ala bassa e ala alta, rispettivamente. In conclusione, il gran numero di parametri da cui la grandezza dipende porta ad una inaccuratezza dei valori forniti dalle curve di ± 0.01 volte la corda media geometrica dell'ala.
Il diagramma riporta risultati validi sia per la fusoliera che per le gondole motrici: il velivolo in esame presenta una "fusoliera a *nacelle*" non tradizionale, ma assimilabile ad una gondola motrice, per cui è attendibile l'utilizzo di tali dati.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 208

Note le caratteristiche geometriche del velivolo in questione, si effettua un procedimento iterativo che prevede, in prima battuta, la ricerca della curva da utilizzare in base al parametro $\frac{l_N}{l}$ (distanza dalla prua della fusoliera del quarto anteriore della corda di radice dell'ala sulla lunghezza della fusoliera), e poi l'interpolazione sull'ascissa $\frac{c_{radice}}{l}$. Ricavata l'ordinata, si risale, infine, al valore di Δx_a , che andrà sommato algebricamente alla posizione del centro aerodinamico dell'ala isolata.
In ordinata è riportato il termine $-\Delta h_n \left(\frac{S\bar{c}}{wc^2}\right)$ dove i termini sono:

$-\Delta h_n$ = spostamento del punto neutro dovuto alla presenza della fusoliera espresso come frazione della corda media aerodinamica.

S = superficie alare in pianta

$\bar{c}$ = corda media geometrica

w = massima larghezza della fusoliera (o nacelle)

c = corda di radice

Nella figura sottostante viene diagrammato ΔC_{m_0}, incremento al coefficiente di momento di beccheggio ad incidenza di portanza nulla, da attribuire alla presenza della fusoliera. I dati presentati si riferiscono a corpi caratterizzati da una sezione trasversale circolare o quasi e con l'ala posizionata a metà della fusoliera. È necessario, pertanto, tener conto di effetti addizionali dovuti a diverse posizioni alari: occorre sommare al valore ottenuto dal diagramma un termine dell'ordine di 0.004, con segno positivo per ala alta e negativo per ala bassa.
Il procedimento di interpolazione che porta a ΔC_{m_0} è analogo a quello seguito per lo spostamento del fuoco. Il valore ottenuto verrà sommato algebricamente al coefficiente di momento di beccheggio per incidenza di portanza nulla dell'ala isolata, dando origine al termine $C_{m_{0_{wb}}}$ del coefficiente di momento di beccheggio complessivo del velivolo.

ESERCITAZIONE 1

Richiami teorici

POLARE TEORICA DI PRANDTL

Ala ellittica: $C_D = \underbrace{C_{D_0}}_{\text{resistenza di forma}} + \overbrace{\frac{C_L^2}{\pi \lambda}}^{\text{resistenza indotta}}$

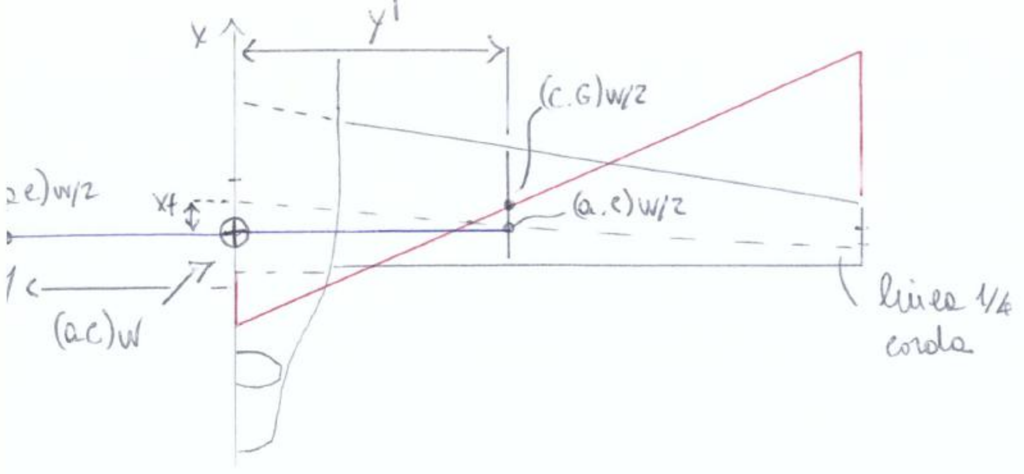
Ala non ellittica: $C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi \lambda} i + K C_L^2$

$$= C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi \lambda}(i + K\pi\lambda) = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{e \pi \lambda} \quad \text{con } e = \frac{1}{i + K\pi\lambda}$$

fattore di Ostwald

CALCOLO POSIZIONE FUOCO DELL'ALA

- Per ali trapezie e pluritrapezie la corda baricentrica coincide con la corda media aerodinamica
- Per ali trapezie, pluritrapezie ed ellittiche, l'$(a.c)_{w/2}$ giace nel quarto anteriore della corda baricentrica



$$x_f = y' \operatorname{tg} \Lambda$$

① COEFFICIENTI AERODINAMICI E PUNTO NEUTRO

• Tracciare in un unico diagramma le curve $C_{MG} - C_{Lwb}$ per il solo complesso ala fusoliera per le 5 posizioni del baricentro $x_G/c = 0.205,\ 0.285,\ 0.365,\ 0.445,\ 0.525$

$$C_{MG} = C_{M_{0_{wb}}} + C_{Lwb}\left(\frac{x_G - x_a'}{c}\right) \qquad \text{con } C_{M_{0_{wb}}} = -0.125$$

$$x_a'/c = 0.216$$

$$C_{Lwb} = a_{wb}\,\alpha_{wb}$$

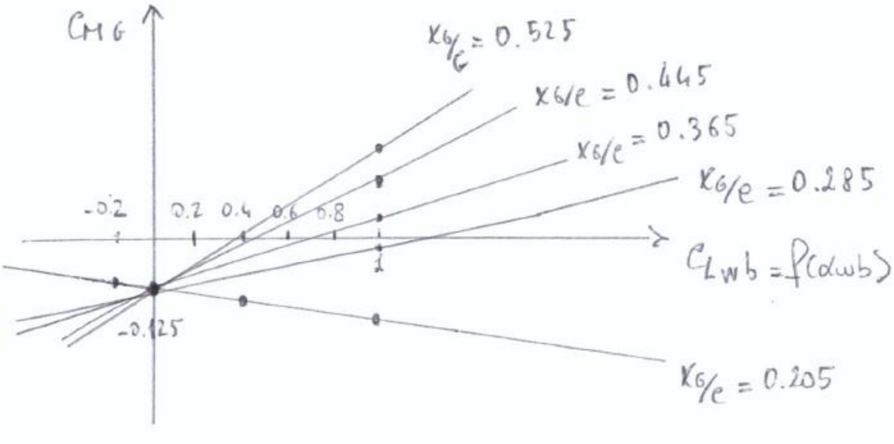
Osserviamo che $C_{Lwb_{max}} = 1.35$ (inferiore al $C_{Lwb_{stallo}}$) $\Rightarrow \alpha_{wb_{max}} = \dfrac{C_{Lwb\,max}}{a_{wb}} = 0.24$ rad $= 13.8°$

$\Rightarrow$ fino a 13.8° la curva $C_{Lwb}-\alpha_{wb}$ avrà un andamento lineare, poiché $C_{Lwb_{max}}$ è approssimato dalla polare 'quadratica'

Allora:

x_G/c	$C_{MG} = f(C_{Lwb})$
0.205	$\rightarrow C_{MG} = -0.125 + C_{Lwb}(-0.011)$
0.285	$\rightarrow C_{MG} = -0.125 + C_{Lwb}(0.069)$
0.365	$\rightarrow C_{MG} = -0.125 + C_{Lwb}(0.149)$
0.445	$\rightarrow C_{MG} = -0.125 + C_{Lwb}(0.229)$
0.525	$\rightarrow C_{MG} = -0.125 + C_{Lwb}(0.309)$

	C_{MG}				
C_{Lwb}	x_{G1}	x_{G2}	x_{G3}	x_{G4}	x_{G5}
-0.2	-0.1228	-0.1388	-0.1548	-0.1708	-0.1868
0.0	-0.125	-0.125	-0.125	-0.125	-0.125
0.4	-0.1294	-0.0974	-0.0654	-0.0334	-0.0014
1	-0.136	-0.056	0.024	0.104	0.184



Per la posizione $x_G/c = 0.205$, che è anteriore al punto neutro del complesso ala-fusoliera (fuoco del complesso ala fusoliera) l'aliante potrebbe in teoria volare in volo rovescio (ma l'incidenza è troppo negativa) in equilibrio stabile.

Per tutte le altre posizioni $x_G/c \rightarrow$ EQUILIBRIO INSTABILE $\Rightarrow$ è bene avere il TAIL

- Ricavare il C_{MG} in funzione di α per le seguenti posizioni del baricentro $X_G/c = 0.205,\ 0.285,\ 0.365,\ 0.445,\ 0.525$ e valutare i corrispondenti valori di $C_{M\alpha}$

$$C_{MG} = C_{M0_{wb}} + C_L \frac{x_G - x_a'}{c} - C_{L_t} \bar{V} + \overbrace{\frac{\partial C_{Mp}}{\partial \alpha}\alpha + C_{Mp0}}^{0}$$

$$C_{L_t} = a_t \left[\alpha_{wb}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i\right]$$

$$C_{MG} = C_{M0_{wb}} + a\alpha \frac{x_G - x_a'}{c} - a_t \bar{V}\left[\alpha_{wb}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i\right]$$

$$a\alpha = a_{wb}(1+F) - \frac{S_t}{S} a_t i \;\rightarrow\; \alpha_{wb} = \alpha + \frac{S_t}{S}\frac{a_t}{a} i$$

$$C_{MG} = C_{M0_{wb}} + a\alpha \frac{x_G - x_a'}{c} - a_t \bar{V}\left[\left(\alpha + \frac{S_t}{S}\frac{a_t}{a} i\right)\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i\right] =$$

$$= C_{M0_{wb}} + \alpha\left[a\frac{x_G - x_a'}{c} - a_t\bar{V}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)\right] - \frac{S_t}{S}\frac{a_t}{a}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) a_t \bar{V} i + a_t \bar{V} i$$

$$C_{M0} = C_{M0_{wb}} - a_t \bar{V} i\left[\frac{S_t}{S}\frac{a_t}{a}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - 1\right] = C_{M0_{wb}} + \frac{a_t \bar{V} i}{1+F}$$

$$C_{M\alpha} = a\left[\frac{x_G}{c} \underbrace{- \frac{x_a'}{c} - \frac{a_t}{a}\bar{V}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)}_{-0.50889}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{V} &= \frac{S_t}{Sc} l_t = 0.501 \\ C_{M0_{wb}} &= -0.125 \\ i &= 0.183 \text{ rad} \end{aligned}\right\} \rightarrow C_{M0} = 0.276$$

$$C_{MG} = C_{M0} + C_{M\alpha}\alpha$$

α	X_{G1}	X_{G2}	X_{G3}	X_{G4}	X_{G5}
	$C_{M\alpha}$				
	-1.843	-1.357	-0.8725	-0.387	0.0376
	C_{MG}				
0	0.276	0.276	0.276	0.276	0.276
(rad) 0.087 = 5	0.115	0.1575	0.1998	0.242	0.2845
(rad) 0.1745 = 10	-0.0456	0.0392	0.1237	0.2084	0.2930

② DETERMINAZIONE DELLE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

- Su un diagramma avente ascissa α, riportare le curve C_L e C_{Leq} punteggiando quest'ultima con i valori δ_{eq}, per le due posizioni del baricentro $x_G/c = 0.205$ e $x_G/c = 0.365$

$$C_L = C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta}\delta$$

$$C_{MG} = C_{M0} + C_{M\alpha}\alpha + C_{M\delta}\delta$$

$$C_L = C_{Lwb} + \frac{S_t}{S}C_{Lt} \rightarrow C_{L\delta} = \frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta} + \frac{S_t}{S}\frac{\partial C_{Lt}}{\partial \delta} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta}}}_{\sim 0} + \frac{S_t}{S}a_t\tau = 0.3602\ rad^{-1}$$

$$C_{MG} = C_{M0wb} + C_L\frac{x_G - x_a'}{c} - C_{Lt}\bar{V} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial C_{Mp}}{\partial \alpha}}}_{0}\alpha + \underbrace{\cancel{C_{Mp0}}}_{0}$$

$$C_{M\delta} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial C_{M0wb}}{\partial \delta}}}_{\sim 0} + C_{L\delta}\frac{x_G - x_a'}{c} - a_t\tau\bar{V} = C_{L\delta}\frac{x_G - x_a'}{c} - a_t\tau\bar{V} < 0 \text{ e dipendente da } x_G/c$$

<u>All'equilibrio:</u>

$$\begin{cases} C_{L\alpha}\alpha_{eq} + C_{L\delta}\delta_{eq} = C_{Leq} \\ C_{M\alpha}\alpha_{eq} + C_{M\delta}\delta_{eq} = -C_{M0} \end{cases}$$

$$\delta_{eq} = -\frac{C_{M0}}{C_{M\delta}} - \frac{C_{M\alpha}\alpha_{eq}}{C_{M\delta}} \rightarrow C_{L\alpha}\alpha_{eq} + C_{L\delta}\left(-\frac{C_{M0}}{C_{M\delta}} - \frac{C_{M\alpha}}{C_{M\delta}}\alpha_{eq}\right) = C_{Leq}$$

$$\alpha_{eq}\underbrace{\left(C_{L\alpha} - \frac{C_{L\delta}C_{M\alpha}}{C_{M\delta}}\right)}_{\frac{\Delta}{C_{M\delta}}} = \frac{C_{M0}C_{L\delta}}{C_{M\delta}} + C_{Leq}$$

$$\Rightarrow \alpha_{eq} = \frac{C_{M0}C_{L\delta}}{\Delta} + \frac{C_{M\delta}}{\Delta}C_{Leq}$$

$$\Delta = C_{L\alpha}C_{M\delta} - C_{L\delta}C_{M\alpha} = C_{L\alpha}C_{L\delta}\frac{x_G - x_a'}{c} - C_{L\alpha}a_t\tau\bar{V} - \overbrace{\frac{S_t}{S}a_t\tau}^{C_{L\delta}}C_{L\alpha}\frac{x_G - x_N}{c} =$$

$$= C_{L\delta}C_{L\alpha}\frac{x_N - x_a'}{c} - C_{L\alpha}a_t\tau\bar{V} = -7.9846$$

Si può osservare un'escursione dell'equilibratore molto sbilanciata verso valori positivi.

Possiamo fare la seguente considerazione:

$$\alpha_t = \alpha_{wb}\left(1-\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i_{wb} + i_t + \tau \delta_{eq}$$

$$\left(\alpha_t = \alpha_{wb} - i_{wb} - \varepsilon + i_t \,,\ \varepsilon = \underset{0}{\cancel{\varepsilon_0}} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\alpha_{wb}\right)$$

con un certo $\Delta\delta_{ep}$ necessario ad assicurare l'equilibrio a un certo $C_{L_{ep}}$, ne deriva un certo α_t sul piano orizzontale

A parità di α_t, possiamo variare il calettamento del tail in modo da avere un differente angolo dell'equilibratore:

$$\alpha_t = \alpha_{wb}\left(1-\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i_{wb} + i_t + \underbrace{\Delta i_t}_{\text{correzione}} + \tau \delta_{ep} + \tau \underline{\Delta \delta}$$

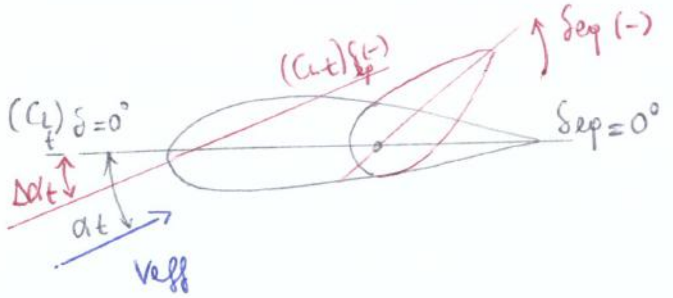
↳ correzione

↳ spostamento escursione angolo dell'equilibratore

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \Delta i_t = -\tau \Delta\delta \\ \hline \Delta\delta = -\dfrac{\Delta i_t}{\tau} \end{array}}$$

per avere un $\Delta\delta$ negativo Δi_t deve essere positivo e viceversa

Prendiamo la posizione $X_G/c = 0.365$, al $C_L \sim 1.9$:



In tal caso, per $C_L \sim 1.9$ avremmo un $\delta_{ep} = 0°$. Ci piacerebbe però avere un δ_{ep} negativo, in modo da sfruttare meglio l'escursione dell'equilibratore, per cui, per ottenere tale risultato, varieremo il calettamento del tail di una quantità $\Delta i_t = -\tau\Delta\delta$.

ATTENZIONE: lo spostamento dell'escursione dell'angolo dell'equilibratore non deve essere eccessivamente elevato, perché se necessario dobbiamo comunque avere un'escursione sufficiente a far stallare il velivolo e raggiungere tutti i punti del diagramma di manovra

- Tracciare le curve $\delta_{ep} = f(V_i)$

$$\delta_{ep} = -\frac{C_{m0} C_{L\alpha}}{\Delta} - \frac{C_{L\alpha}}{\Delta}\frac{x_G - x_N}{c} C_{Leq}$$

Osserviamo che i grafici vengono richiesti con la V_i poiché, supponendo l'assenza di errori di posizione, date le velocità moderate non si avranno effetti legati alla compressibilità $\Rightarrow V_i = V_e = V_e$

$C_{Leq} = \frac{2W/S}{\rho_0 V_i^2}$ → Tale relazione deriva da $L = W$ ed è un'approssimazione, in quanto l'aliante sarà sicuramente su una traiettoria discendente, allora:

$L = W\cos\gamma$

VELOCITÀ LIMITE:

- Velocità max:

$$\begin{cases} V_{NE1} = V_D \cdot 0.9 & \text{con } V_D = 250\,Km/h = 69{,}44\,m/s \text{ (assegnata da regolamento)} \\ V_{NE2} = 0.85 \cdot V_{DF} & \text{con } V_{DF} = V_D \text{ in flight, raggiunta durante i test di volo preliminari} \end{cases}$$

Poiché non disponiamo della V_{DF} → $V_{max} = V_{NE} = \min\{V_{NE_1}, V_{NE_2}\}$

$\Rightarrow V_{NE} = V_{NE1}$

- Velocità minima: funzione di C_{Lmax} e W

- POSIZIONE PIÙ AVANZATA: $x_G/c = 0.205$ → $W_{max} = 300\,Kg$ ($W_{ew} + 110\,Kg$)
- POSIZIONE INTERMEDIA: $x_G/c = 0.285$ → $W_{interm} = 273\,Kg$ ($(W_{max}+W_{min})/2$)
- POSIZIONE PIÙ ARRETRATA: $x_G/c = 0.365$ → $W_{min} = 246\,Kg$ ($W_{ew} + 56\,Kg$) e tutte le altre

In teoria, il regolamento richiede di andare a verificare, per le posizioni estreme del baricentro, sia il peso massimo che quello minimo.

• Calcolare la posizione del punto neutro $\frac{x_N'}{c}$ a comandi liberi

$$C_{M\alpha}' = a' \frac{x_G - x_N'}{c} \rightarrow \frac{x_G - x_N'}{c} = \frac{C_{M\alpha}'}{a'}$$

$$C_L' = C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta}\delta_{float} \quad , \quad \delta_{float} = -\frac{1}{b_2}\left(C_{H_0} + C_{H\alpha}\alpha + b_3\delta_{Tab}\right)$$

$$C_L' = \alpha\left(C_{L\alpha} - \frac{C_{H\alpha}}{b_2}\right) - \frac{1}{b_2}\left(C_{H_0} + b_3\delta_{Tab}\right)$$

$$a' = \frac{\partial C_L'}{\partial \alpha} = C_{L\alpha}\left(1 - \frac{C_{H\alpha}}{b_2 C_{L\alpha}}\right)$$

$$C_{M\alpha} = C_{L\alpha}\frac{x_G - x_N}{c}$$

$$C_{M_G}' = C_{M_0} + C_{M\alpha}\alpha + C_{M\delta}\delta_{float} = C_{M_0} + \alpha\left(C_{M\alpha} - \frac{C_{M\delta}C_{H\alpha}}{b_2}\right) - \frac{1}{b_2}\left(C_{H_0} + b_3\delta_{Tab}\right)$$

$$C_{M\alpha}' = C_{M\alpha} - \frac{C_{M\delta}C_{H\alpha}}{b_2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_G - x_N'}{c} = \frac{1}{a'}\left(C_{M\alpha} - \frac{C_{M\delta}C_{H\alpha}}{b_2}\right) = \frac{1}{a'}\left(a\frac{x_G - x_N}{c} - \frac{C_{M\delta}C_{H\alpha}}{b_2}\right)$$

$$C_{M\delta} = C_{L\delta}\frac{x_G - x_a'}{c} - a_t\tau\bar{V}$$

$$\Rightarrow \frac{x_G - x_N'}{c} = \frac{a}{a'}\frac{x_G - x_N}{c} - \frac{C_{L\delta}C_{H\alpha}}{a'b_2}\frac{x_G - x_a'}{c} + \frac{\overbrace{a_t\tau}^{a_e}\bar{V}C_{H\alpha}}{a'b_2} =$$

$$\frac{x_a'}{c} = \frac{x_a' - x_N}{c} + \frac{x_N}{c}$$

$$= \frac{x_G}{c}\left(\frac{a}{a'} - \frac{C_{L\delta}C_{H\alpha}}{a'b_2}\right) - \frac{a}{a'}\frac{x_N}{c} + \frac{C_{L\delta}C_{H\alpha}}{a'b_2}\frac{x_a'}{c} + \frac{a_e\bar{V}C_{H\alpha}}{a'b_2} =$$

a'

$$= \frac{x_G}{c} - \frac{x_N}{c}\left(\frac{a}{a'} - \frac{C_{L\delta}C_{H\alpha}}{a'b_2}\right) + \frac{C_{L\delta}C_{H\alpha}}{a'b_2}\frac{x_a' - x_N}{c} + \frac{a_e\bar{V}C_{H\alpha}}{a'b_2} =$$

$$= \frac{x_G}{c} - \frac{x_N}{c} + \frac{C_{L\delta}C_{H\alpha}}{a'b_2}\frac{x_a' - x_N}{c} + \frac{a_e\bar{V}}{a'b_2}C_{H\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{x_N'}{c} = \frac{x_N}{c} - \frac{C_{L\delta}C_{H\alpha}}{a'b_2}\frac{x_a' - x_N}{c} - \frac{a_e\bar{V}}{a'b_2}C_{H\alpha} \quad , \quad \begin{cases} C_{L\delta} = a_t\tau\frac{S_t}{S} = \frac{S_t}{S}a_e \\ C_{H\alpha} = b_1\left(1 - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right) \end{cases}$$

- Tracciare le curve $(\delta_{tab_{trim}}, C_{L_{eq}})$ e $(\delta_{tab_{trim}}, V_{i_{eq}})$ per le seguenti posizioni del baricentro:

$x_G/c = 0.205,\ 0.285,\ 0.365,\ 0.445,\ 0.525$.

$$C_H = C_{H_0} + C_{H\alpha}\alpha_{eq} + b_2\delta_{eq} + b_3\delta_{tab} \quad \text{all'equilibrio}$$

$$\delta_{tab} \rightarrow \delta_{tab_{trim}} \Rightarrow C_H = 0$$

$$\delta_{tab_{trim}} = -\frac{1}{b_3}\left(C_{H_0} + C_{H\alpha}\alpha_{eq} + b_2\delta_{eq}\right)$$

Determiniamo α_{eq}, δ_{eq}:

$$\begin{cases} C_{L\alpha}\alpha_{eq} + C_{L\delta}\delta_{eq} = C_{L_{eq}} \\ C_{M\alpha}\alpha_{eq} + C_{M\delta}\delta_{eq} = -C_{M_0} \rightarrow \delta_{eq} = -\dfrac{C_{M_0}}{C_{M\delta}} - \dfrac{C_{M\alpha}}{C_{M\delta}}\alpha_{eq} \end{cases}$$

$$C_{L\alpha}\alpha_{eq} - C_{M_0}\frac{C_{L\delta}}{C_{M\delta}} - C_{M\alpha}\frac{C_{L\delta}}{C_{M\delta}}\alpha_{eq} = C_{L_{eq}}$$

$$\alpha_{eq}\underbrace{\left(C_{L\alpha} - C_{M\alpha}\frac{C_{L\delta}}{C_{M\delta}}\right)}_{\Delta / C_{M\delta}} = C_{L_{eq}} + \frac{C_{M_0}C_{L\delta}}{C_{M\delta}} \rightarrow \alpha_{eq} = \frac{C_{M_0}C_{L\delta}}{\Delta} + \frac{C_{M\delta}}{\Delta}C_{L_{eq}}$$

$$\delta_{eq} = -\frac{C_{M_0}C_{L\alpha}}{\Delta} - \frac{C_{M\alpha}}{\Delta}C_{L_{eq}}$$

Sostituiamo:

$$\delta_{tab_{trim}} = -\frac{1}{b_3}\left[C_{H_0} + C_{H\alpha}\left(\frac{C_{M_0}C_{L\delta}}{\Delta} + \frac{C_{M\delta}}{\Delta}C_{L_{eq}}\right) + b_2\left(-\frac{C_{M_0}C_{L\alpha}}{\Delta} - \frac{C_{M\alpha}}{\Delta}C_{L_{eq}}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{b_3}\left[C_{H_0} + \frac{C_{H\alpha}C_{M_0}C_{L\delta}}{\Delta} - \frac{b_2 C_{M_0}C_{L\alpha}}{\Delta} + \left(\frac{C_{H\alpha}C_{M\delta}}{\Delta} - \frac{b_2 C_{M\alpha}}{\Delta}\right)C_{L_{eq}}\right] =$$

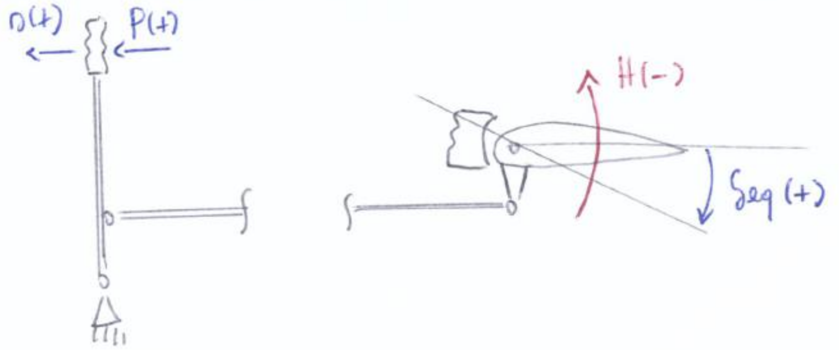
$$= -\frac{1}{b_3}\left[C_{H_0} + \frac{C_{M_0}}{\Delta}\left(C_{H\alpha}C_{L\delta} - b_2 C_{L\alpha}\right) + \frac{1}{\Delta}\left(C_{H\alpha}C_{M\delta} - b_2 C_{M\alpha}\right)C_{L_{eq}}\right]$$

$$\frac{x_G - x_N'}{c} = \frac{C'_{M\alpha}}{a'} = \frac{1}{a'}\left(C_{M\alpha} - \frac{C_{H\alpha}C_{M\delta}}{b_2}\right) \rightarrow C_{H\alpha}C_{M\delta} - b_2 C_{M\alpha} = -a' b_2\frac{x_G - x_N'}{c}$$

$$\Rightarrow \delta_{tab_{trim}} = -\frac{1}{b_3}\left[C_{H_0} + \frac{C_{M_0}}{\Delta}\left(\overset{(-)}{C_{H\alpha}}C_{L\delta} - \overset{(-)}{b_2}C_{L\alpha}\right) - \frac{a' b_2}{\Delta}\frac{x_G - x_N'}{c}C_{L_{eq}}\right]$$

4) SFORZI DI BARRA E PUNTI DI MANOVRA

- Per la posizione del baricentro $x_G/c = 0.285$ tracciare le curve relative allo sforzo di barra P in funzione di V_i, imponendo le seguenti velocità di trimmaggio: 20, 30, 40 m/s



$G = 2{,}5$ rad/m

$V_i = V\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$

↳ $V_i = V_c = V_e$ perché quote basse e velocità moderate

$$P \cdot dD = -H\,d\delta \Rightarrow P = -\frac{d\delta}{dD}H = -GH = -G c_e S_e \frac{1}{2}\rho_0 V_i^2 C_H$$

$C_H = C_{H_0} + C_{H\alpha}\alpha_{ep} + b_2\delta_{ep} + b_3\delta_{tab}$ in una generica condizione di equilibrio

$C_H = C_{H_0} + C_{H\alpha}\alpha_{ep} + b_2\delta_{eq} + b_3\delta_{tab_{trim}} = 0$ in volo trimmato

$$\Rightarrow C_H = b_3\left(\delta_{tab} - \delta_{tab_{trim}}\right)$$

$$\delta_{tab_{trim}} = -\frac{1}{b_3}\left[C_{H_0} + \frac{C_{M_0}}{\Delta}\left(C_{H\alpha}C_{L\delta} - b_2 C_{L\alpha}\right) - \frac{a' b_2}{\Delta}\frac{x_G - x_N'}{c}C_{L_{ep}}\right]$$

$$C_H = b_3\delta_{tab} + C_{H_0} + \frac{C_{M_0}}{\Delta}\left(C_{H\alpha}C_{L\delta} - b_2C_{L\alpha}\right) - \frac{a' b_2}{\Delta}\frac{x_G - x_N'}{c}C_{L_{eq}}$$

$$P = -G c_e S_e \frac{1}{2}\rho_0 V_i^2\left[b_3\delta_{tab} + C_{H_0} + \frac{C_{M_0}}{\Delta}\left(C_{H\alpha}C_{L\delta} - b_2C_{L\alpha}\right) - \frac{a' b_2}{\Delta}\frac{x_G - x_N'}{c}\frac{2W/S}{\rho_0 V_i^2}\right] =$$

$$= G c_e S_e \frac{W}{S}\frac{a' b_2}{\Delta}\frac{x_G - x_N'}{c} - \frac{1}{2}\rho_0 V_i^2 G c_e S_e\left[b_3\delta_{tab} + C_{H_0} + \frac{C_{M_0}}{\Delta}\left(C_{H\alpha}C_{L\delta} - b_2C_{L\alpha}\right)\right]$$

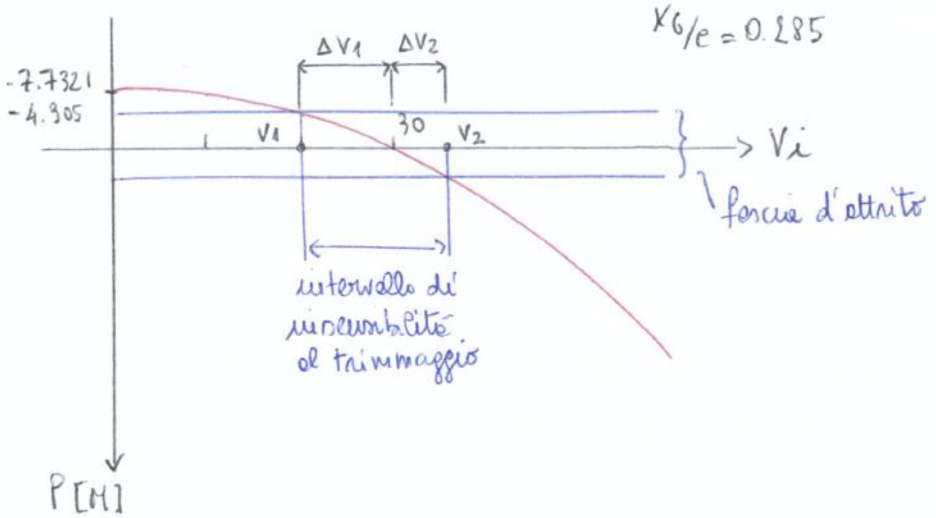
$$\Rightarrow P = P_0 + B\cdot\frac{1}{2}\rho_0 V_i^2 \quad \text{con} \begin{cases} P_0 = f(x_G/c) \\ B = f(\delta_{tab}) \rightarrow \text{deve essere} > 0 \end{cases}$$

Considerazioni sulla forza d'attrito:

Supponiamo di considerare $\Delta P = \pm 0.5\ Kg$ (forza d'attrito ritenuta costante, quando in volo non lo è, ed esagerata)

Prendendo la curva $P = f(V_i)$

per $X_{G/e} = 0.285$ e $V_{trim} = 30\ m/s$, ad esempio, si ha che:



Si osserva che $\Delta V_1 \neq \Delta V_2$

Poiché $P = P_0\left(1 - \frac{V_i^2}{V_{trim}^2}\right) \rightarrow \pm\Delta P = P_0\left(1 - \frac{V_i^2}{V_{trim}^2}\right)$

$$\Rightarrow V_{1-2} = V_{trim}\sqrt{1 \pm \frac{\Delta P}{P_0}} = V_{trim}\sqrt{1 \pm 0.634} \nearrow \begin{cases} V_1 = V_{trim} \cdot 0{,}604 \\ V_2 = V_{trim} \cdot 1{,}278 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V = V_{trim} \cdot 0.674 = V_2 - V_1}$$ $\uparrow$ se $V_{trim} \uparrow$

Ricordando inoltre che:

$$P = P_0 + \frac{1}{2}\rho_0 B V_i^2 \rightarrow \frac{dP}{dV} = \rho_0 B V_i$$

in condizioni di trim $P = P_0 + \frac{1}{2}\rho_0 B V_{i_{trim}}^2 = 0 \Rightarrow B_{trim} = -\frac{2P_0}{\rho_0 V_i^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{dP}{dV}\right)_{trim} = -\frac{2P_0}{V_{i\,trim}}}$$ $\downarrow$ se $V_{trim} \uparrow$

All'aumentare di V_{trim} $\left(\frac{dP}{dV}\right)_{trim} \downarrow$ e a pari forza d'attrito aumenta l'int. di ins. al trim

- Calcolare le posizioni dei punti di manovra a comandi bloccati (x_M/c) e a comandi liberi (x_M'/c) alle quote di 0 e 8000 m e al peso intermedio e i corrispondenti valori dei gradienti $\frac{d\delta}{dn}$ e $\frac{dP}{dn}$ per $x_G/c = 0.205$ e $x_G/c = 0.365$. Per il gradiente $\frac{d\delta}{dn}$ si esegua il calcolo per le due velocità $V_i = 20$ m/s e $V_i = 40$ m/s

$$\frac{x_M}{c} = \left(\frac{x_G}{c}\right)_{\frac{\Delta\delta}{\Delta n}=0} \quad , \text{ poiché i requisiti impongono } \frac{d\delta}{dn} < 0 \rightarrow \frac{x_G}{c} < \frac{x_M}{c}$$

Determiniamo x_M:

Ricordiamo che $\hat{q} = \frac{(C_L)_{n=1}(n-1)}{2\mu}$ con $\mu = \frac{W/g}{\frac{\rho}{2} S}$

$$C_{L\alpha}\Delta\alpha + C_{L\delta}\Delta\delta + \frac{C_{Lq}}{2\mu}(C_L)_{n=1}(n-1) = (C_L)_{n=1}(n-1)$$

$$C_{M\alpha}\Delta\alpha + C_{M\delta}\Delta\delta + \frac{C_{Mq}}{2\mu}(C_L)_{n=1}(n-1) = 0$$

$$C_{L\alpha}\Delta\alpha = (C_L)_{n=1}(n-1) - C_{L\delta}\Delta\delta - \frac{C_{Lq}}{2\mu}(C_L)_{n=1}(n-1)$$

$$C_{M\alpha}\Delta\alpha = -C_{M\delta}\Delta\delta - \frac{C_{Mq}}{2\mu}(C_L)_{n=1}(n-1)$$

$$\frac{C_{L\alpha}}{C_{M\alpha}} = \frac{(C_L)_{n=1}(n-1) - C_{L\delta}\Delta\delta - \frac{C_{Lq}}{2\mu}(C_L)_{n=1}(n-1)}{-C_{M\delta}\Delta\delta - \frac{C_{Mq}}{2\mu}(C_L)_{n=1}(n-1)}$$

$$\frac{C_{L\alpha}}{C_{M\alpha}}\left(-C_{M\delta}\Delta\delta - \frac{C_{Mq}}{2\mu}(C_L)_{n=1}(n-1)\right) = (C_L)_{n=1}(n-1) - C_{L\delta}\Delta\delta - \frac{C_{Lq}}{2\mu}(C_L)_{n=1}(n-1)$$

$$\Delta\delta\left(C_{L\delta} - \frac{C_{L\alpha}C_{M\delta}}{C_{M\alpha}}\right) = \Delta n\left(\frac{C_{L\alpha}C_{Mq}}{2\mu C_{M\alpha}}(C_L)_{n=1} - \frac{C_{Lq}}{2\mu}(C_L)_{n=1} + (C_L)_{n=1}\right)$$

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta n} = -\frac{C_{M\alpha}}{\Delta}(C_L)_{n=1}\left(\frac{C_{L\alpha}C_{Mq}}{2\mu C_{M\alpha}} - \frac{C_{Lq}}{2\mu} + 1\right) = -\frac{(C_L)_{n=1}}{\Delta}\left[\frac{C_{L\alpha}C_{Mq}}{2\mu} + C_{L\alpha}\frac{x_G - x_N}{c}\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right)\right]$$

$$\frac{\Delta C_H}{\Delta n} = -\frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}}\left(C_{L\delta}\frac{\Delta\delta}{\Delta n} + \frac{(C_L)_{n=1}}{2\mu}C_{Lq} - (C_L)_{n=1}\right) + b_2\frac{\Delta\delta}{\Delta n} + C_{Hq}\frac{(C_L)_{n=1}}{2\mu}$$

$$C'_{L\alpha} = a' = C_{L\alpha}\left(1 - \frac{C_{H\alpha}C_{L\delta}}{b_2 C_{L\alpha}}\right)$$

$$\frac{\Delta C_H}{\Delta n} = \frac{(C_L)_{n=1}}{2\mu C_{L\alpha}}\left(-C_{H\alpha}C_{Lq} + 2\mu C_{H\alpha} + C_{Hq}C_{L\alpha}\right) + \underbrace{\left(b_2 - \frac{C_{H\alpha}C_{L\delta}}{C_{L\alpha}}\right)}\frac{\Delta\delta}{\Delta n}$$

$$\frac{\Delta C_H}{\Delta n} = \frac{1}{2\mu C_{L\alpha}}\left(C_{H\alpha}(2\mu - C_{Lq}) + C_{Hq}C_{L\alpha}\right)(C_L)_{n=1} + \frac{a' b_2}{C_{L\alpha}}\frac{\Delta\delta}{\Delta n}$$

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta n} = -\frac{C_{L\alpha}}{\Delta}\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right)(C_L)_{n=1}\left[\frac{x_G}{c} - \underbrace{\left(\frac{x_N}{c} - \frac{C_{Mq}}{2\mu - C_{Lq}}\right)}_{f(x_G/c)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta C_H}{\Delta n} = (C_L)_{n=1}\left[\frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}}\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right) + \frac{C_{Hq}}{2\mu}\right] - \frac{a' b_2}{\Delta}\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right)(C_L)_{n=1}\left(\frac{x_G}{c} - f\left(\frac{x_G}{c}\right)\right) =$$

$$= -\frac{a' b_2}{\Delta}\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right)(C_L)_{n=1}\left[\frac{x_G}{c} - f\left(\frac{x_G}{c}\right) - \frac{\Delta}{a' b_2}\left(\frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}} + \frac{C_{Hq}}{2\mu - C_{Lq}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow g(x_G/c) = f(x_G/c) + \frac{\Delta}{a' b_2}\left(\frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}} + \frac{C_{Hq}}{2\mu - C_{Lq}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta C_H}{\Delta n} = -\frac{a' b_2}{\Delta}\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right)(C_L)_{n=1}\left[\frac{x_G}{c} - g\left(\frac{x_G}{c}\right)\right]$$

Il punto di manovra a comandi liberi x_M' si trova allora dalla seguente relazione implicita:

$$\boxed{\left(\frac{x_G}{c}\right)_{\frac{\Delta C_H}{\Delta n}=0} = g\left(\frac{x_G}{c}\right) = \frac{x_M'}{c}}$$

Per il calcolo del gradiente $\frac{dP}{dn}$ si ha che:

$$\frac{\Delta P}{\Delta n} = -G\, C_e S_e \frac{1}{2} \rho_0 V_i^2 \frac{\Delta C_H}{n-1}$$

$$\frac{\Delta C_H}{n-1} = \frac{\Delta C_H}{\Delta n} = -\frac{a' b_2}{\Delta}\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right)(C_L)_{n=1}\left[\frac{x_G}{c} - g\left(\frac{x_G}{c}\right)\right] \quad , \quad (C_L)_{n=1} = \frac{W/S}{\frac{1}{2}\rho_0 V_i^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{\Delta n} = G\, C_e S_e \frac{W}{S} \frac{a' b_2}{\Delta}\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right)\left[\frac{x_G}{c} - g\left(\frac{x_G}{c}\right)\right]$$

Si ottiene che $\frac{\Delta P}{\Delta n}$ non dipende più dalla velocità, ma solo da x_G/c e z.

Allora:

	$x_G/c = 0.205$ ($W = 300$ kg)	$x_G/c = 0.365$ ($W = 246$ kg)
0 m	-2.4163 Kg/g	-1.1186 Kg/g
8000 m	-1.8775 Kg/g	-0.6003 Kg/g

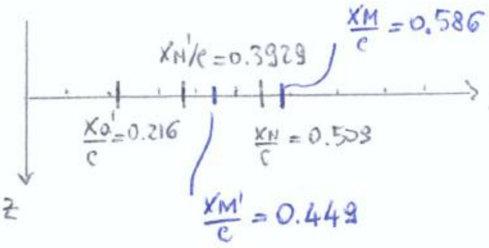
OSSERVAZIONE

Se $z \uparrow$, $\rho \downarrow \Rightarrow \mu = \frac{W/g}{c/2\, \rho S} \uparrow \Rightarrow \frac{C_{Lq}}{2\mu} \downarrow \Rightarrow \left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right) \uparrow$

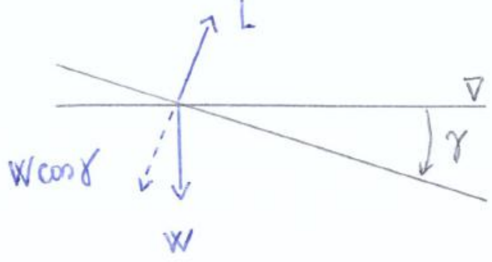
per cui sembrerebbe che $\frac{dP}{dn} \uparrow$ se $z \uparrow$

In realtà $\frac{dP}{dn} \downarrow$ se $z \uparrow$ poiché l'avanzamento del punto di manovra, che riduce la parentesi $\left(x_G/c - g\left(x_G/c\right)\right)$, ha un maggiore effetto sul $\frac{dP}{dn}$

Riassumendo tutti i punti caratteristici del velivolo con un esempio, consideriamo $z = 8000$ m e $W = 300$ kg.



Sono valide le approssimazioni di volo rettilineo uniforme orizzontale?



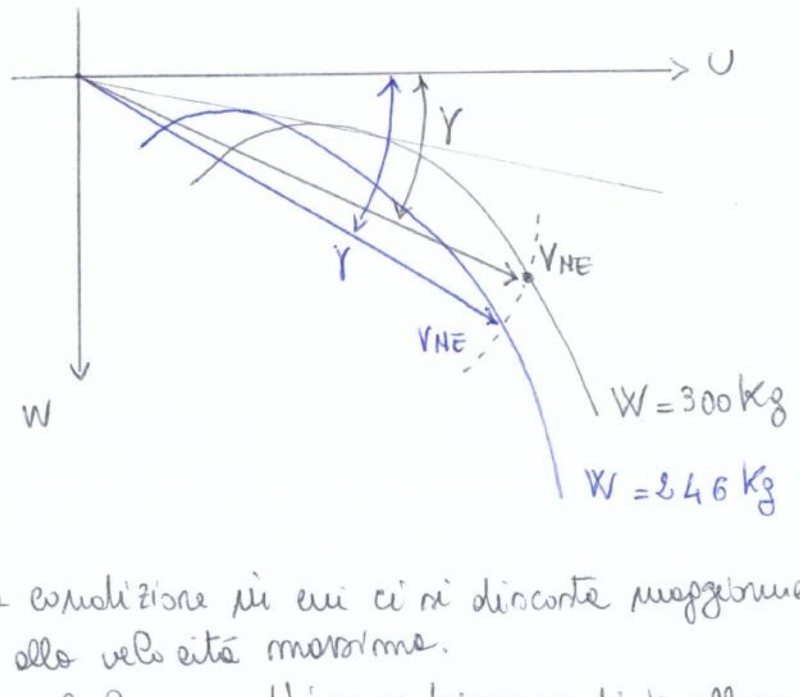
Poniamoci alla $V_{NE} = 62.5\ m/s$, poiché è a tale velocità che le ipotesi di VRUO potrebbero non essere valide

$$\begin{cases} L = W\cos\gamma \\ D = W\sin\gamma \end{cases} \rightarrow \quad n = \frac{L}{W} = \frac{W\cos\gamma}{W} = \cos\gamma$$

$w = V\sin\gamma$, velocità di discesa

$U = V\cos\gamma$, componente orizzontale della velocità

Tracciamo l'ODOGRAFA:



Abbiamo considerato V_{NE} = costante al variare del peso.

A pari V, se $W\downarrow \Rightarrow \gamma\uparrow$

La condizione in cui ci si discosta maggiormente dal VRUO è al peso minimo e alla velocità massima.

Per calcolare n, abbiamo bisogno di γ, allora:

$$C_L \rightarrow C_D = 0.0076 + 0.0199\, C_{LW}^{2.35} \rightarrow E \rightarrow \gamma \rightarrow V_i \rightarrow n = \cos\gamma$$

$$V_i = \sqrt{\frac{(W/S)\cos\gamma}{\frac{1}{2}\rho_0 C_L}}$$

(polare dell'ala che per l'aliante si discosta poco da quella del velivolo)

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{W\sin\gamma}{W\cos\gamma} = \frac{D}{L} = \frac{1}{E}$$

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{E}\right)$$

↳ su Matlab:

per $C_L = 0.097$

$V_i = 62.6$

$\Rightarrow \boxed{n = 0.9969}$

APPROSSIMAZIONI VALIDE ✓

Il fatto che ci sia MOTO ROTATORIO TERRESTRE + SUPERFICIE SFERICA comporta accelerazioni aggiuntive che occorre valutare per capire se esse siano trascurabili:

OSSERVAZIONE

Quota max considerata: 20 km → R (raggio equatoriale) = 6378 km

① ACCELERAZIONE DOVUTA ALLA ROTAZIONE TERRESTRE:

$$a_c = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600}\right)^2 6.4 \cdot 10^6 = 0.033 \ m/s^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_c}{g} \cong \frac{1}{300}$$

② ACCELERAZIONE CENTRIFUGA DOVUTA ALLA TRAIETTORIA DEL VELIVOLO:

$$a_f = \frac{V^2}{R} = \frac{550^2}{6.4 \cdot 10^6} = 0.047 \ m/s^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{g} \cong \frac{1}{200}$$

$V = 550$ m/s → Concorde $M = 1.8$

$z = 20000$ m

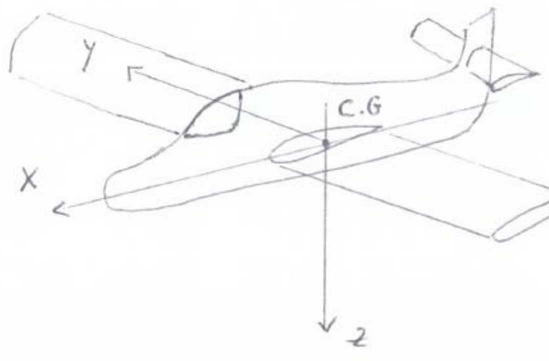
③ ACCELERAZIONE DI CORIOLIS:

$a_{COR} = 2 V \wedge \omega$ → a_{COR} è max quando $V \perp \omega$, ovvero quando il velivolo vola lungo un parallelo

$$a_{COR} = 2 \cdot 550 \cdot \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 0.08 \ m/s^2 \quad \rightarrow \quad \frac{a_{COR}}{g} \cong \frac{1}{125}$$

Tali accelerazioni possono dunque essere trascurate.

ASSI BODY



La terna di assi body deve sicuramente essere baricentrica e avere gli assi x-z contenuti nel piano di simmetria, con x uscente dal muso del velivolo

Nel sistema ABC si ha:

$\overline{V}_B$ = vettore velocità relativa di ABC rispetto a NED $= \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$

$\overline{W}_B$ = vettore velocità di rotazione relativa di ABC rispetto a NED $= \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix}$

$\overline{F}_B$ = vettore forze applicate

$\overline{T}_B$ = vettore momenti applicati

MATRICE DI ROTAZIONE B_B

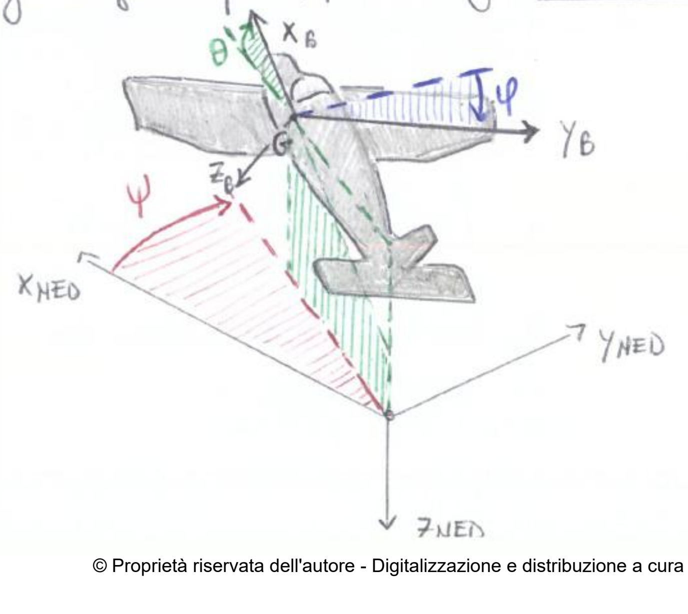
Per scrivere la matrice di rotazione, in modo da PORTARE ABC A COINCIDERE CON NED si deve:

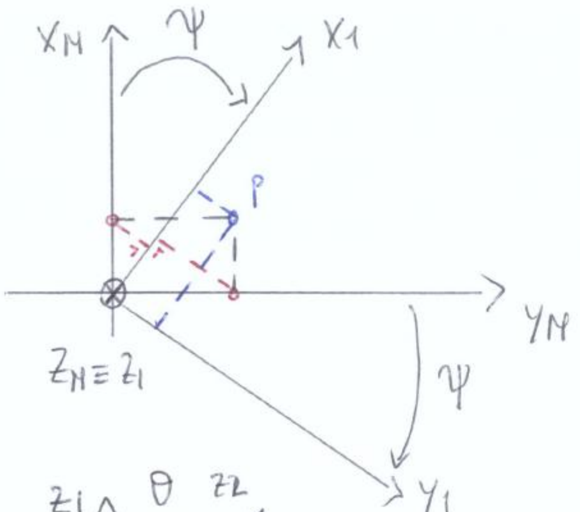
① ROTAZIONE ATTORNO A Z_{NED} DI $\psi > 0$ (il rif. body diventa X_1, Y_1, Z_{NED})

② ROTAZIONE ATTORNO A Y_1 DI $\theta > 0$ (X_2, Y_1, Z_2)

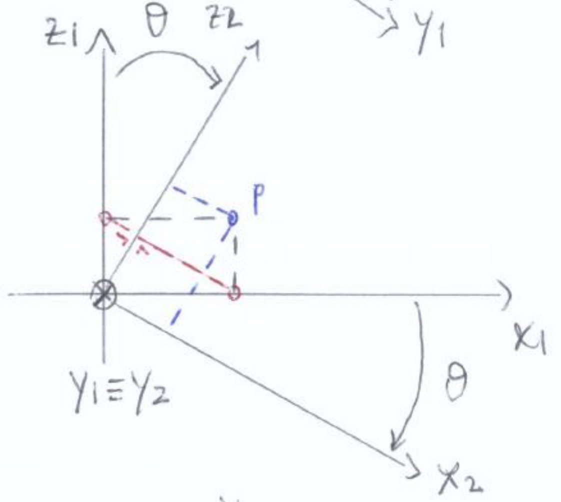
③ ROTAZIONE ATTORNO A X_B DI $\varphi > 0$ (X_B, Y_B, Z_B)

In tale modo il sistema NED si porta a coincidere con il sistema ABC (come rotazioni, poi occorrerebbe spostarlo nel baricentro del velivolo). Le rotazioni devono essere effettuate proprio in tale modo, e se ciò accade gli angoli ψ, θ, φ sono gli ANGOLI DI EULERO

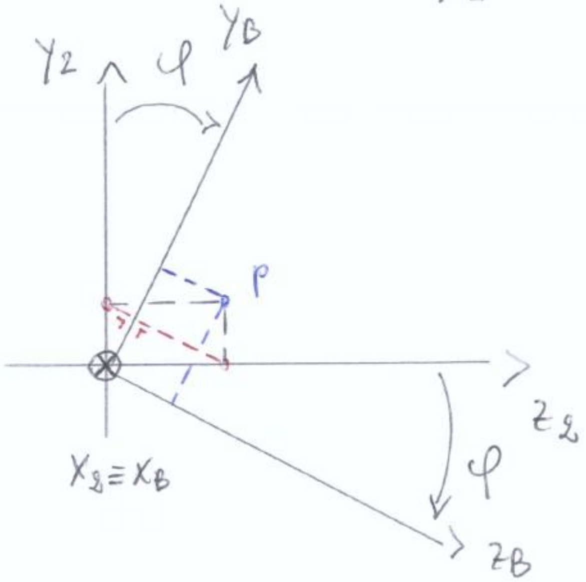




$$\begin{cases} x_1 = x_N \cos\psi + y_N \sin\psi \\ y_1 = -x_N \sin\psi + y_N \cos\psi \\ z_1 = z_N \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos\theta - z_1 \sin\theta \\ y_2 = y_1 \\ z_2 = x_1 \sin\theta + z_1 \cos\theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_B = x_2 \\ y_B = y_2 \cos\varphi + z_2 \sin\varphi \\ z_B = -y_2 \sin\varphi + z_2 \cos\varphi \end{cases}$$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO DINAMICO (corpo rigido ABC con riferimento sistema inerziale)

$\vec{F}(a) + \vec{F}(r) + \vec{F}(i) = 0$ equazione di equilibrio delle forze

$\vec{M}(a) + \vec{M}(r) + \vec{M}(i) = 0$ equazione di equilibrio dei momenti

$$\vec{M}(a) = \frac{d\vec{K}}{dt} = \dot{\vec{K}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{K}$$

Il momento della quantità di moto totale del velivolo rispetto al baricentro sarà:

$$\vec{K} = \int_B d\vec{K} = \int_B \vec{r}_p \wedge \vec{v}_p \, dm = \int_B \vec{r}_p \wedge \left(\vec{V}_G + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_p\right) dm$$

dove $\vec{v}_P = \vec{V}_G + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_P$ è la velocità di un punto P a distanza $\vec{r}_P$ dal baricentro, con $\vec{V}_G$ velocità del baricentro.

Allora:

$$\vec{K} = \int_B \vec{r}_P \wedge \vec{V}_G \, dm + \int_B \vec{r}_P \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}_P) \, dm$$

Il primo integrale è nullo in quanto $\vec{r}_P$ ha origine proprio nel baricentro

Per cui:

$$\vec{K} = \int_B \vec{r}_P \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}_P) \, dm$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_P = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (qz - ry)\,\hat{i} + (rx - pz)\,\hat{j} + (py - qx)\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_P \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}_P) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ qz - ry & rx - pz & py - qx \end{vmatrix} = \left[y(py - qx) - z(rx - pz)\right]\hat{i} + \\ - \left[x(py - qx) - z(qz - ry)\right]\hat{j} + \\ + \left[x(rx - pz) - y(qz - ry)\right]\hat{k}$$

Per cui:

$$\vec{K} = \int_B \begin{bmatrix} p(y^2 + z^2) - qxy - rxz \\ q(x^2 + z^2) - pxy - ryz \\ r(x^2 + y^2) - pxz - qyz \end{bmatrix} dm = \begin{bmatrix} pI_x - qI_{xy} - rI_{xz} \\ qI_y - pI_{xy} - rI_{yz} \\ rI_z - pI_{xz} - qI_{yz} \end{bmatrix}$$

Se c'è un piano di simmetria ma non c'è simmetria di massa

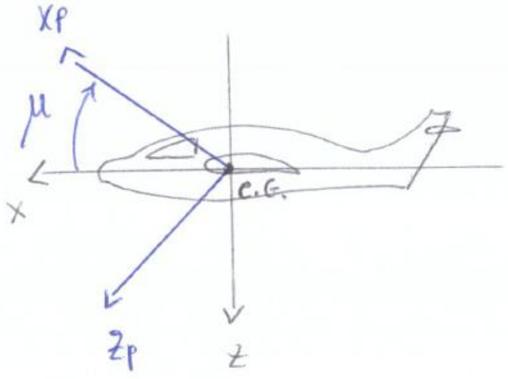
$\Rightarrow I_{xy} \neq 0$

$I_{yz} \neq 0$

Le equazioni scritte in precedenza si modificano nel modo seguente:

$$
\begin{cases}
F_x = m(\dot{u} + (qw - rv)) \\
F_y = m(\dot{v} + (ru - pw)) \\
F_z = m(\dot{w} + (pv - qu)) \\
L = I_x \dot{p} - \dot{r}\cancel{I_{xz}} - pq\cancel{I_{xz}} + qr(I_z - I_y) - \cancel{I_{yz}(q^2 - r^2)} - \cancel{I_{xy}(\dot{q} - rp)} \\
M = I_y \dot{q} + pr(I_x - I_z) - \cancel{(r^2 - p^2) I_{xz}} - \cancel{I_{xy}(\dot{p} + qr)} - \cancel{I_{yz}(\dot{r} - pq)} \\
N = I_z \dot{r} - \dot{p}\cancel{I_{xz}} + pq(I_y - I_x) + \cancel{qr I_{xz}} - \cancel{I_{xy}(p^2 - q^2)} - \cancel{I_{yz}(\dot{q} + rp)}
\end{cases}
$$

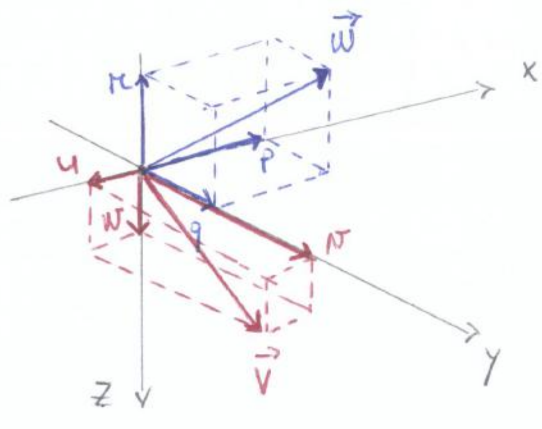
Nel caso di assi principali d'inerzia $\Rightarrow I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$



In tal caso sono nulli tutti i termini che presentano i momenti centrifughi. Eliminiamo tali termini con il colore rosso dalle equazioni scritte sopra

MOTO VARIO

In generale, avremo la seguente situazione:



- CONDIZIONI INIZIALI

Moto rettilineo uniforme

$$
\begin{cases}
- \; p_{eq} = q_{eq} = r_{eq} = 0 \\
- \; u_{eq} \simeq V_{eq}; \; v_{eq} = 0 \text{ (perché } \vec{V} \text{ nel piano di simm.)} \\
- \; w_{eq} \neq 0 \text{ in generale, ma potrebbe}
\end{cases}
$$

essere $= 0$ $\theta \simeq 0$

Il sistema linearizzato sarà dunque:

$$\begin{cases} F_x \simeq m(\Delta\dot{u} + q w_{eq}) & (L) \\ F_y \simeq m(\dot{v} + r u_{eq} - p w_{eq}) & (LD) \\ F_z \simeq m(\Delta\dot{w} - q u_{eq}) & (L) \\ L \simeq \dot{p} I_x - \dot{r} I_{xz} & (LD) \\ M \simeq \dot{q} I_y & (L) \\ N \simeq \dot{r} I_z - \dot{p} I_{xz} & (LD) \end{cases}$$

(L) equazioni in cui figurano variabili relative solo al MOTO LONGITUDINALE (u, w, q)

(LD) equazioni in cui figurano variabili relative solo al MOTO LATERO - DIREZIONALE (v, p, q)

Osserviamo che per trattare il moto longitudinale ($\vec{V}$ contenuto nel piano di simmetria) non c'è in realtà bisogno della linearizzazione, poiché considerando un moto esclusivamente longitudinale, i termini eliminati se ne andrebbero comunque $\Rightarrow$ LE PERTURBAZIONI POSSONO ANCHE NON ESSERE PICCOLE

L'ipotesi delle piccole perturbazioni è però necessaria a garantire la SEPARAZIONE DEL MOTO, poiché ci permette di eliminare i termini misti che figurano in F_y, L, M, che altrimenti non se ne andrebbero.
In tale modo, in F_y, L, N rimangono solamente termini relativi al moto latero-direzionale.

Allora:

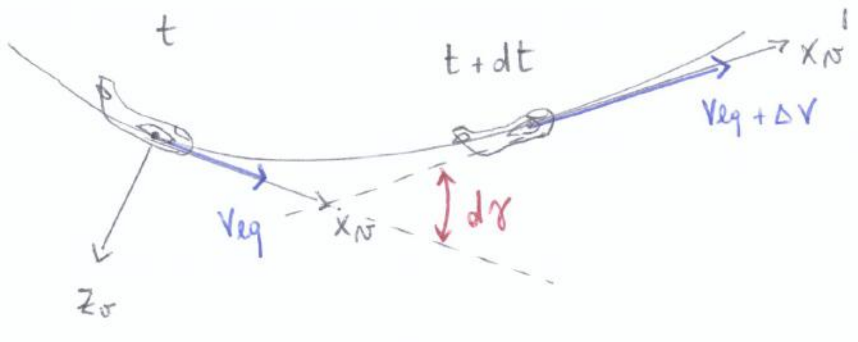
SEPARAZIONE DEL MOTO
- $\rightarrow$ LONGITUDINALE $\begin{cases} 3 \text{ gdl } (M, F_x, F_z) \\ 3 \text{ variabili } (u, w, q) \end{cases}$
- $\rightarrow$ LATERO - DIREZIONALE $\begin{cases} 3 \text{ gdl } (L, N, F_y) \\ 3 \text{ variabili } (p, r, v) \end{cases}$

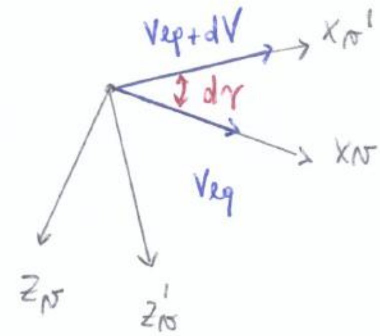
Per cui, per il MOTO LONGITUDINALE:

$$\begin{cases} F_x = m(\Delta\dot{u} + q w_{eq}) + m q \Delta w \\ F_z = m(\Delta\dot{w} - q u_{eq}) - m q \Delta u \\ M = \dot{q} I_y \end{cases}$$

termini in blu
$\rightarrow$ se perturbazioni $\neq$ piccole

LONGITUDINALE: assi vento (volendo)
Le forze sono facilmente note e coincidono con L e D





Dalla legge di Newton:

$F = m a$

$$a_x \; \frac{(V_{eq}+dV)\overbrace{\cos d\gamma}^{\simeq 1} - V_{eq}}{dt} = \frac{dV}{dt} = \dot{V}$$

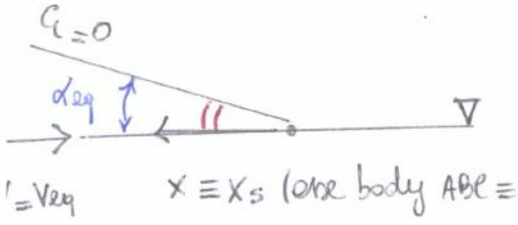
$$a_z = \frac{-(V_{eq}+dV)\overbrace{\sin d\gamma}^{d\gamma} - 0}{dt} = -V_{eq}\frac{d\gamma}{dt} = -V_{eq}\dot{\gamma}$$

Allora:

$$\begin{cases} F_x = m\dot{V} \\ F_z = -m V_{eq}\dot{\gamma} \\ M = I_y \dot{q} \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \gamma = \text{angolo di rampa (discesa)} \\ \alpha = \text{angolo incidenza} \\ \vartheta = \text{angolo di assetto} \end{cases}$$

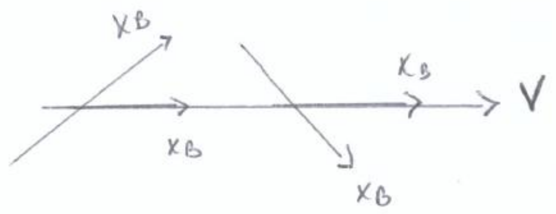
Prima di esplicitare i primi membri, ricordiamo la relazione che lega la variazione di γ alla variazione di α e ϑ.

SITUAZIONE INIZIALE (moto rettilineo uniforme, che può essere o meno orizzontale)



Se non cambio configurazione di volo → $C_L = 0$ asse body
⇒ angolo ‹‹ costante anche nella situazione generica

VARIAZIONE DI $\dot{\alpha}$ e q



$$\begin{cases} \dot{\alpha} \neq 0 \\ q \neq 0 \\ \dot{\gamma} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \dot{\theta} = q = \dot{\alpha}$$

Torniamo ora al sistema scritto in precedenza:

$$\begin{cases} F_x = m\dot{V} \\ F_z = -mV_{eq}\,\dot{\gamma} = -mV_{eq}(q-\dot{\alpha}) = -mV_{eq}(\dot{\theta}-\dot{\alpha}) \\ M = \dot{q}\,I_y \end{cases}$$

Le variabili fondamentali in ASSI VENTO sono: V, α, θ

Se fossero stati ASSI CORPO: u, w, q

Andiamo ad esplicitare i primi membri:

$$\begin{cases} F_x = \overset{0}{\cancel{F_{x\,eq}}} + \Delta F_x \quad \Rightarrow \quad F_x = F_x(V,\alpha,\theta,\dot{V},\dot{\alpha},\dot{\theta},\ddot{V},\ddot{\alpha},\ddot{\theta},\ldots) \\ F_z = \overset{0}{\cancel{F_{z\,eq}}} + \Delta F_z \\ M = \overset{0}{\cancel{M_{eq}}} + \Delta M \end{cases}$$

Poiché è tutto linearizzato:

$$F_x = \underbrace{\frac{\partial F_x}{\partial V}}_{cost}\Delta V + \underbrace{\frac{\partial F_x}{\partial \alpha}}_{cost}\Delta\alpha + \underbrace{\frac{\partial F_x}{\partial \theta}}_{cost}\Delta\theta + \ldots$$

$F_z = \ldots$

$M = \ldots$

ciò vale esclusivamente nell'intorno della condizione di equilibrio considerata, ad una precisa V_{eq} e a una determinata quota z, in un preciso punto dell'inviluppo di volo.

Le derivate aerodinamiche saranno dunque costanti solamente nell'intorno del punto di equilibrio considerato.

$$F_z = -(T_{eq}+\Delta T)\sin(\alpha_T+\Delta\alpha) - L_{eq} - \Delta L + W =$$

$$= -T_{eq}\cancel{\sin\alpha_T}\overbrace{\cos\Delta\alpha}^{\simeq 1} - T_{eq}\cos\alpha_T\,\Delta\alpha - \Delta T\sin\alpha_T\cos\Delta\alpha - \underbrace{\Delta T\cancel{\cos\alpha_T}\,\Delta\alpha}_{\simeq 0,\ \text{infinit. II° ordine}} - \cancel{L_{eq}} +$$

$$-\Delta L + \cancel{W} = -mV_{eq}\,q + mV_{eq}\,\dot\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta F_z = F_z - F_{eq_z} = -\Delta T\sin\alpha_T - T_{eq}\cos\alpha_T\,\Delta\alpha - \Delta L = -mV_{eq}\,q + mV_{eq}\,\dot\alpha}$$

<u>II° equazione</u>

$$\boxed{\Delta M = M_V\Delta V + M_\alpha\Delta\alpha + M_q\,q + M_{\dot\alpha}\,\dot\alpha = I_y\,\dot q}$$

<u>III° equazione</u>

$$M_V \rightarrow \frac{\partial M}{\partial V}$$

In tale equazione abbiamo trascurato $\dot V$, il cui effetto su M è secondario.

$$\boxed{\dot\theta = q}$$

<u>IV° equazione</u>, equazione della cinematica

Abbiamo ottenuto un sistema di equazioni differenziali del I° ordine nella forma:

$$\dot x = A x \quad \longleftrightarrow \quad \begin{Bmatrix}\dot V\\ \dot\alpha\\ \dot q\\ \dot\theta\end{Bmatrix} = \underbrace{[A]}_{\text{matrice di sistema}} \underbrace{\begin{Bmatrix}V\\ \alpha\\ q\\ \theta\end{Bmatrix}}_{\text{vettore di stato}}$$

<u>Per cui:</u>

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = -h_{11}\Delta V - h_{12}\Delta\alpha - h_{14}\theta \\ \dfrac{d\alpha}{dt} = -h_{21}\Delta V - h_{22}\Delta\alpha - h_{23}\,q \\ \dfrac{dq}{dt} = -h_{31}\Delta V - h_{32}\Delta\alpha - h_{33}\,q \\ \dot\theta = h_{43}\,q \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 115 di 208

- D_α

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi A_e} \quad , \text{ dove } \begin{cases} A = b/c \text{ con } c = c_{ma} = \text{corda media aerodin.} \\ \lambda = b/c_m \text{ con } c_m = \text{corda media geometrica} \end{cases}$$

In campo lineare $C_L = a\alpha$, allora:

$$e\pi\lambda = A_e \pi \, , \text{ con } A_e = e\lambda$$

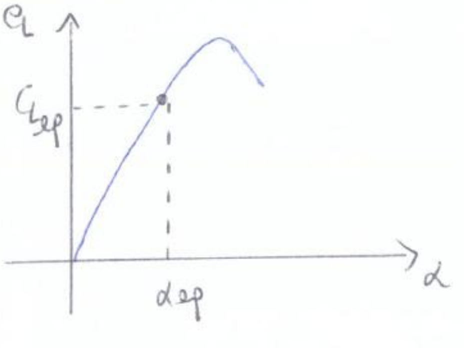
$$C_D = C_{D_0} + \frac{a^2}{\pi A_e}\alpha^2$$

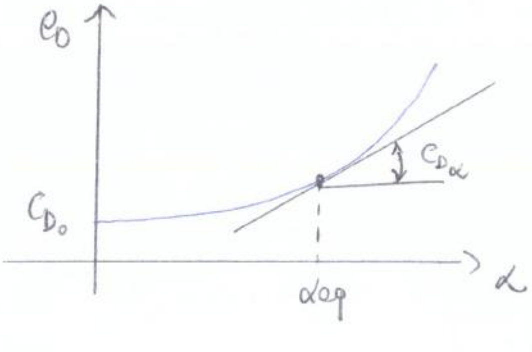
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial D}{\partial \alpha} = D_\alpha = C_{D_\alpha}\frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}^2 S} \quad , \text{ con } \left(C_{D_\alpha}\right)_{eq} = \frac{2a^2}{\pi A_e}\alpha_{eq}$$

Ovviamente, note V_{eq} e W, a:

$$C_{L_{eq}} = \frac{W/S}{\frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}^2} \Rightarrow \alpha_{eq} = \frac{C_{L_{eq}}}{a} \Rightarrow \text{è noto il } C_{D_\alpha}$$

Avendo a disposizione i grafici di $C_L(\alpha)$ e $C_D(\alpha)$:





DERIVATE DELLA PORTANZA L

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$$

$$\boxed{L_V = \left(\frac{\partial L}{\partial V}\right)_{eq} = \left(\frac{\partial C_L}{\partial V}V_{eq}^2 + 2C_{L_{eq}}V_{eq}\right)\frac{1}{2}\rho_{eq}S}$$

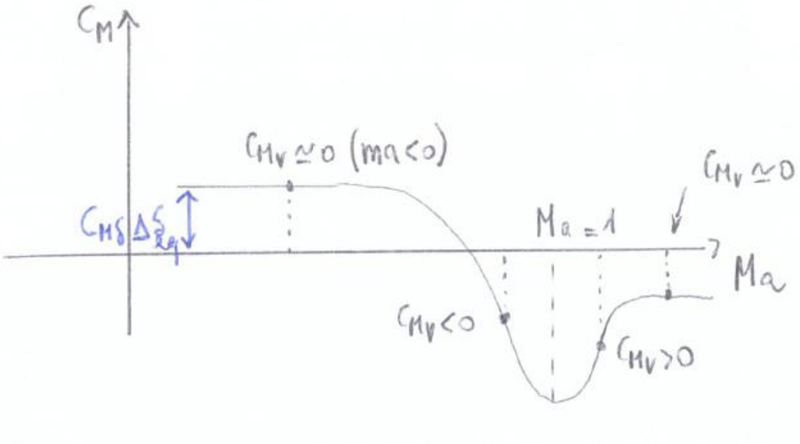
$$\Rightarrow \boxed{M_V = \frac{\partial C_M}{\partial V} V_{eq}^2 \frac{1}{2} \rho_{eq} S c} = C_{M_V} V_{eq} \frac{1}{2} \rho_{eq} S c \text{, con } C_{M_V} = \frac{\partial C_M}{\partial \hat{V}} \text{, } \hat{V} = \frac{V}{V_{eq}}$$

- $\boxed{\frac{\partial M}{\partial \alpha} = M_\alpha = C_{M_\alpha} S c \frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2}$

- $\boxed{\frac{\partial M}{\partial q} = M_q = \frac{\partial C_M}{\partial q} S c \frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2}$ con $\frac{\partial C_M}{\partial q} \neq \frac{\partial C_M}{\partial \hat{q}} = C_{Mq}$

* approfondiamo il discorso sul $\frac{\partial C_M}{\partial \hat{V}} = C_{M_V}$:

Riportiamo un tipico andamento del C_M al variare del Mach andando a considerare una successione di condizioni di equilibrio.
Se non teniamo conto di quello che è il contributo di momento dato dall'equilibratore per assicurare l'equilibrio, l'andamento è come quello riportato in figura:



La coordinata in blu è quella di cui ho bisogno come angolo dell'equilibratore per andare ad annullare il momento se non ci fosse la manovra, riportando il diagramma a 0.

- Se $M\uparrow \Rightarrow V\uparrow \Rightarrow \alpha\downarrow \Rightarrow C_M\downarrow$ se $C_{M_V}<0$

OSSERVAZIONE

Considerando il tratto subsonico della curva, assumere $C_{M_V} \simeq 0$ vorrebbe dire che, supposto $C_{M\delta} \simeq$ costante, non ci sarebbe variazione dell'angolo dell'equilibratore al variare della velocità, mentre sappiamo che $\frac{d\delta}{dV} \neq 0$ e $\frac{d\delta}{dV} > 0$

DERIVATE DELLA SPINTA

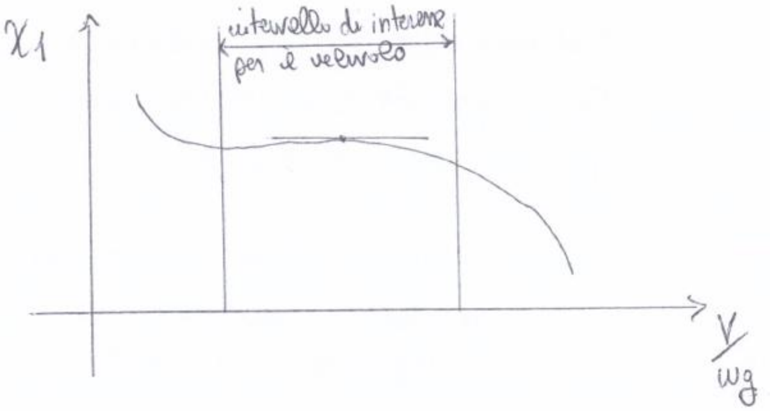
$$\Delta T = \Delta T(V) = \frac{\partial T}{\partial V}\Delta V = T_V \Delta V$$

Possiamo trascurare l'effetto di α, q, $\dot{\alpha}$, $\dot{q}$ e θ non influisce per nulla sul ΔT.

Come valutiamo T_V?

VELIVOLO A GETTO $\rightarrow T = T_{S0}\varphi_1(m)\psi(z)\chi_1(V,z)$

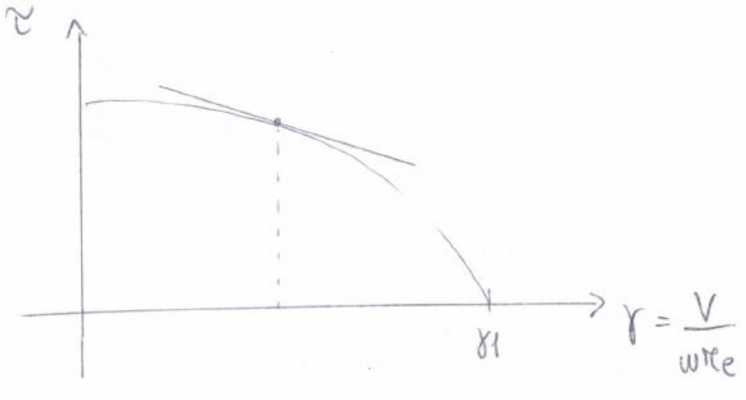
$$\chi_1(V,z) = 1 - \frac{V}{w_g} + \frac{1}{2}\frac{K M^2}{\alpha}\left[1-\left(\frac{V}{w_g}\right)^4\right]$$



La T_V non è una derivata molto forte ma può essere valutata dalla pendenza del grafico $\chi_1 = f(V/w_g, z)$

VELIVOLO AD ELICA $\rightarrow T = \tau \rho \omega^2 r_e^4$ (formula di Renard di 1° specie)

$$\tau = \frac{1}{2} z \int_0^1 \frac{C_L\cos\varepsilon - C_D\sin\varepsilon}{\cos^2\varepsilon}\frac{c}{r_e}\frac{r^2}{r_e^2}\, d\left(\frac{r}{r_e}\right) \rightarrow \text{geometria e aerodinamica della pala}$$



Anche in tal caso, la T_V si valuta dalla pendenza della curva $\tau = f(\gamma)$

Siamo ora in grado di scrivere il sistema di equazioni del moto longitudinale a comandi bloccati, scritto nella terna di assi vento.

EQUAZIONI MOTO LONGITUDINALE

$$\begin{cases} \Delta F_x = \Delta T\cos\alpha_T - T_{eq}\sin\alpha_T\,\Delta\alpha - \Delta D - W\gamma = m\dot{V} \quad \text{con } \gamma = (\theta - \Delta\alpha) \\ \Delta F_z = -\Delta T\sin\alpha_T - T_{eq}\cos\alpha_T\,\Delta\alpha - \Delta L = -m V_{eq} q + m V_{eq}\dot{\alpha} \\ \Delta M = M_V\Delta V + M_\alpha\Delta\alpha + M_q q + M_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} = I_y \dot{q} \\ \dot{\theta} = q \end{cases}$$

EQUAZIONE 1

1° membro

$$m\dot{V} = m\frac{dV}{dt} = \underbrace{\frac{m}{\frac{\rho}{2}\rho_{eq}S}}_{\mu}\frac{\rho}{2}\rho_{eq}S\overbrace{\frac{dV}{V_{eq}}}^{d\hat{V}}V_{eq}\cdot\underbrace{\frac{1}{dt}\frac{\rho}{2V_{eq}}}_{d\hat{t}}\cdot\frac{2V_{eq}}{\rho} = \frac{1}{2}\cdot 2\mu\frac{d\hat{V}}{dt}\rho_{eq}V_{eq}^2S$$

$$\Rightarrow \frac{m\dot{V}}{\frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}^2S} = 2\mu\frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} \quad \Rightarrow \text{dividiamo il 2° membro per } \frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}^2S$$

2° membro

- $T = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_T \rightarrow T_V = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{eq} = \frac{1}{2}\rho_{eq}S\left(\frac{\partial C_T}{\partial V}V_{eq}^2 + 2V_{eq}C_{Teq}\right) = \frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}S\left(C_{TV} + 2C_{Teq}\right)$

  con $C_{TV} = \frac{\partial C_T}{\partial V}V_{eq} = \frac{\partial C_T}{\partial(V/V_{eq})} = \frac{\partial C_T}{\partial\hat{V}}$

- $D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D \rightarrow D_V = \frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}S\left(C_{DV} + 2C_{Deq}\right)$, con $C_{DV} = \frac{\partial C_D}{\partial\hat{V}}$

- $\frac{mg}{\frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}^2S} = C_{Weq}$

- $D_\alpha = \left(\frac{\partial D}{\partial\alpha}\right)_{eq} = \frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}^2SC_{D\alpha} \rightarrow C_{D\alpha} = \frac{D_\alpha}{\frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}^2S}$

- $T_{eq} = \frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}^2SC_{Teq} \rightarrow C_{Teq} = \frac{T_{eq}}{\frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}^2S}$

$$\Rightarrow \frac{T_V\cos\alpha_T - D_V}{\frac{1}{2}\rho_{eq}V_{eq}^2S}\Delta V = \left[\left(C_{TV} + 2C_{Teq}\right)\cos\alpha_T - \left(C_{DV} + 2C_{Deq}\right)\right]\Delta\hat{V}$$

equilibrio cond. iniziali $\rightarrow$ $C_{Teq}\cos\alpha_T - C_{Deq} = 0$ $\qquad$ $C_{Weq} - C_{Teq}\sin\alpha_T = C_{Leq}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} = \frac{1}{2\mu}\left\{\left[C_{TV}\cos\alpha_T - C_{DV} + 2\overset{0}{\cancel{\left(C_{Teq}\cos\alpha_T - C_{Deq}\right)}}\right]\Delta\hat{V} + \overbrace{\left(C_{Weq} - C_{D\alpha} - C_{Teq}\sin\alpha\right)}\Delta\alpha - C_{Weq}\theta\right\}}$$

EQUAZIONI DEL MOTO LONGITUDINALE - COMANDI BLOCCATI

Condizioni iniziali di moto rettilineo uniforme orizzontale - terna di assi vento

$$
\begin{cases}
\dot V = \dfrac{T_V\cos\alpha_T - D_V}{m}\Delta V + \dfrac{mg - D_\alpha - T_{eq}\sin\alpha_T}{m}\Delta\alpha - g\theta \\[2ex]
\dot\alpha = -\dfrac{L_V + T_V\sin\alpha_T}{mV_{eq}+L_{\dot\alpha}}\Delta V - \dfrac{L_\alpha + T_{eq}\cos\alpha_T}{mV_{eq}+L_{\dot\alpha}}\Delta\alpha + \dfrac{mV_{eq}-L_q}{mV_{eq}+L_{\dot\alpha}}\, q \\[2ex]
\dot q = \dfrac{1}{I_y}\left[\left(M_V - M_{\dot\alpha}\dfrac{L_V+T_V\sin\alpha_T}{mV_{eq}+L_{\dot\alpha}}\right)\Delta V + \left(M_\alpha - M_{\dot\alpha}\dfrac{L_\alpha+T_{eq}\cos\alpha_T}{mV_{eq}+L_{\dot\alpha}}\right)\Delta\alpha + \left(M_q + M_{\dot\alpha}\dfrac{mV_{eq}-L_q}{mV_{eq}+L_{\dot\alpha}}\right) q\right] \\[2ex]
\dot\theta = q
\end{cases}
$$

- T $\quad Kg$ $\quad C_T = T/\frac{1}{2}\rho V^2 S$
- D $\quad Kg$ $\quad C_D = D/\frac{1}{2}\rho V^2 S$
- L $\quad Kg$ $\quad C_L = L/\frac{1}{2}\rho V^2 S$
- M $\quad Kg\cdot m$ $\quad C_M = M/\frac{1}{2}\rho V^2 S c$
- V $\quad m/s$ $\quad \hat V = V/V_{eq}$
- $\dot\alpha$ $\quad rad/s$ $\quad \hat{\dot\alpha} = \dot\alpha/(2V_{eq}/c)$
- q $\quad rad/s$ $\quad \hat q = qc/2V_{eq}$
- m $\quad Kg\cdot s^2/m$ $\quad \mu = m/\frac{1}{2}\rho_{eq} c S$
- J_y $\quad Kg\cdot m\cdot s^2$ $\quad \hat J_y = J_y/[\rho_{eq} S (c/2)^3]$
- t $\quad s$ $\quad \hat t = t/t^* = t/(c/2/V_{eq})$

- T_V $\quad Kg\cdot s/m$ $\quad C_{TV} = \partial C_T/\partial\hat V$
- D_V $\quad Kg\cdot s/m$ $\quad C_{DV} = \partial C_D/\partial\hat V$
- D_α $\quad Kg/rad$ $\quad C_{D\alpha} = \partial C_D/\partial\alpha$
- L_V $\quad Kg\cdot s/m$ $\quad C_{LV} = \partial C_L/\partial\hat V$
- L_α $\quad Kg/rad$ $\quad C_{L\alpha} = \partial C_L/\partial\alpha$
- $L_{\dot\alpha}$ $\quad Kg\cdot s/rad$ $\quad C_{L\dot\alpha} = \partial C_L/\partial\hat{\dot\alpha}$
- L_q $\quad Kg\cdot s/rad$ $\quad C_{Lq} = \partial C_L/\partial\hat q$
- M_V $\quad Kg\cdot s$ $\quad C_{MV} = \partial C_M/\partial\hat V$
- M_α $\quad Kg\cdot m/rad$ $\quad C_{M\alpha} = \partial C_M/\partial\alpha$
- $M_{\dot\alpha}$ $\quad Kg\cdot m\cdot s/rad$ $\quad C_{M\dot\alpha} = \partial C_M/\partial\hat{\dot\alpha}$
- M_q $\quad Kg\cdot m\cdot s/rad$ $\quad C_{Mq} = \partial C_M/\partial\hat q$

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{d\hat t}\hat V = \dfrac{1}{2\mu}\left[(C_{TV}\cos\alpha_T - C_{DV})\Delta\hat V + (C_{Leq} - C_{D\alpha})\Delta\alpha - C_{Weq}\theta\right] \\[2ex]
\dfrac{d}{d\hat t}\alpha = -\dfrac{C_{TV}\sin\alpha_T + C_{LV} + 2C_{Weq}}{2\mu + C_{L\dot\alpha}}\Delta\hat V - \dfrac{C_{L\alpha} + C_{Deq}}{2\mu + C_{L\dot\alpha}}\Delta\alpha + \dfrac{2\mu - C_{Lq}}{2\mu + C_{L\dot\alpha}}\hat q \\[2ex]
\dfrac{d}{d\hat t}\hat q = \dfrac{1}{\hat I_y}\left[\left(C_{MV} - C_{M\dot\alpha}\dfrac{(C_{TV}\sin\alpha_T + C_{LV} + 2C_{Weq})}{2\mu + C_{L\dot\alpha}}\right)\Delta\hat V + \left(C_{M\alpha} - \dfrac{C_{M\dot\alpha}(C_{L\alpha}+C_{Deq})}{2\mu + C_{L\dot\alpha}}\right)\Delta\alpha + \left(C_{Mq} + C_{M\dot\alpha}\dfrac{(2\mu - C_{Lq})}{2\mu + C_{L\dot\alpha}}\right)\hat q\right] \\[2ex]
\dfrac{d}{d\hat t}\theta = \hat q
\end{cases}
$$

Allora:

$$\begin{vmatrix} (\lambda + h_{11}) & h_{12} & h_{14} \\ h_{21} & (\lambda + h_{22}) & h_{23}\lambda \\ h_{31} & h_{32} & (\lambda^2 + h_{33}\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda^4 + B_1\lambda^3 + C_1\lambda^2 + D_1\lambda + E_1 = 0}$$

Otteniamo un polinomio caratteristico di 4° grado, in cui, all'interno dei coefficienti B_1, C_1, D_1, E_1 figurano i termini h_{ij}.

Dal polinomio caratteristico si determinano 4 autovalori che possono essere:

- 4 AUTOVALORI REALI
- 2 AUTOVALORI REALI + 2 COMPLESSI CONIUGATI
- 2 COPPIE COMPLESSE CONIUGATE

Quello che si vorrebbe ottenere, in modo che la dinamica del velivolo soddisfi i requisiti, sono due coppie complesse coniugate.

In generale, le soluzioni per ogni variabile sarà della forma:

$$\begin{cases} \Delta\hat{V} = \rho_{11}e^{\lambda_1\hat{t}} + \rho_{12}e^{\lambda_2\hat{t}} + \rho_{13}e^{\lambda_3\hat{t}} + \rho_{14}e^{\lambda_4\hat{t}} \\ \Delta\alpha = \rho_{21}e^{\lambda_1\hat{t}} + \rho_{22}e^{\lambda_2\hat{t}} + \rho_{23}e^{\lambda_3\hat{t}} + \rho_{24}e^{\lambda_4\hat{t}} \\ \vartheta = \rho_{31}e^{\lambda_1\hat{t}} + \rho_{32}e^{\lambda_2\hat{t}} + \rho_{33}e^{\lambda_3\hat{t}} + \rho_{34}e^{\lambda_4\hat{t}} \end{cases}$$

con ρ_{ij} determinati dalle condizioni iniziali

Le variabili verranno influenzate nello stesso modo dagli autovalori λ_i, ma l'effetto di ogni autovalore su ciascuna variabile dipende dal coefficiente ρ_{ij}.

Le variabili sono comunque influenzate da tutti e quattro gli autovalori

↳ sovrapposizione degli effetti

Ovviamente parleremo di dinamica del velivolo riferita ad una certa condizione di volo iniziale

I due MODI che si sovrappongono possono essere studiati separatamente:

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \hat{a} \pm i\hat{b} \quad \text{con } a \ll 0 \rightarrow \text{CORTO PERIODO (short period) (moto molto smorzato)} \\ \lambda_{3,4} = \hat{c} \pm i\hat{d} \quad \text{con } c \gtrless 0 \text{, ma } |c| \simeq 0 \rightarrow \text{FUGOIDE (phugoid)} \end{cases}$$

(moto poco smorzato o leggermente amplificato)

Le caratteristiche fisiche possono essere concentrate in 3 parametri, ottenuti semplicemente dalla coppia di autovalori complessi coniugati considerata:

① PERIODO : $\boxed{T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\hat{b}} t^*}$, con $t^* = \frac{c}{2V_{eq}}$ $\Rightarrow b = \omega$

② TEMPO DI DIMEZZAMENTO : $\boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{|a|} = \frac{\ln 2}{|\hat{a}|} t^* = \frac{0.693}{|a|}}$

(o tempo di raddoppio se $a < 0$)

③ NUMERO DI CICLI DI DIMEZZAMENTO : $\boxed{N_{1/2} = \frac{t_{1/2}}{T} = \frac{\ln 2}{|a| 2\pi} b = \frac{\ln 2 \hat{b}}{|\hat{a}| 2\pi}}$

(o di raddoppio → $t_{2/1}$)

esempio numerico: possibili soluzioni della dinamica longitudinale

GRANDE VELIVOLO

$c = 10\ m$

$V_{eq} = 250\ m/s$

$t^* = 0.02\ s \rightarrow \hat{t} = 50\,t$

CP: $\lambda_{1,2} = \underbrace{-0.1 \cdot 10^{-1}}_{\hat{a}} \pm \underbrace{0.2 \cdot 10^{-1}}_{\hat{b}} i$

FUGOIDE: $\lambda_{3,4} = \underbrace{-0.3 \cdot 10^{-4}}_{\hat{c}} \pm \underbrace{0.6 \cdot 10^{-3}}_{\hat{d}} i$

PICCOLO VELIVOLO

$c = 1.5\ m$

$V_{eq} = 50\ m/s$

$t^* = 0.015\ s \rightarrow \hat{t} = 66.3\,t$

CP: $\lambda_{1,2} = \underbrace{-0.2 \cdot 10^{-1}}_{\hat{a}} \pm \underbrace{0.6 \cdot 10^{-1}}_{\hat{b}} i$

FUGOIDE: $\lambda_{3,4} = \underbrace{-0.5 \cdot 10^{-3}}_{\hat{c}} \pm \underbrace{0.1 \cdot 10^{-3}}_{\hat{d}} i$

$$\begin{cases} \frac{\rho_{1i}}{\rho_{3i}}(h_{11}+\lambda_i) + \frac{\rho_{2i}}{\rho_{3i}} h_{12} + \frac{\rho_{3i}}{\rho_{3i}} h_{14} = 0 \\ \frac{\rho_{1i}}{\rho_{3i}} h_{21} + \frac{\rho_{2i}}{\rho_{3i}}(h_{22}+\lambda_i) + \frac{\rho_{3i}}{\rho_{3i}} h_{23}\lambda_i = 0 \\ \frac{\rho_{1i}}{\rho_{3i}} h_{31} + \frac{\rho_{2i}}{\rho_{3i}} h_{32} + \lambda_i(\lambda_i^2 + h_{33})\frac{\rho_{3i}}{\rho_{3i}} = 0 \end{cases}$$

OSS: $\rho_{1i}, \rho_{2i}, \rho_{3i}$ rappresentano le componenti dell'autovettore associato all'autovalore λ_i

Poiché abbiamo diviso per ρ_{3i} non abbiamo più 3 variabili ($\rho_{1i}, \rho_{2i}, \rho_{3i}$) ma solo 2. Allora, una qualsiasi delle 3 equazioni sarà combinazione lineare delle altre 2.
Prendiamo ad esempio le prime 2 equazioni, poiché la 3ª sarà una loro combinazione lineare.

A questo punto, ricordiamo che la soluzione del sistema di equazioni differenziali era della forma:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{V} &= \boxed{\rho_{11}} e^{\lambda_1 \hat{t}} + \boxed{\rho_{12}} e^{\lambda_2 \hat{t}} + \boxed{\rho_{13}} e^{\lambda_3 \hat{t}} + \boxed{\rho_{14}} e^{\lambda_4 \hat{t}} \\ \Delta\alpha &= \boxed{\rho_{21}} e^{\lambda_1 \hat{t}} + \boxed{\rho_{22}} e^{\lambda_2 \hat{t}} + \boxed{\rho_{23}} e^{\lambda_3 \hat{t}} + \boxed{\rho_{24}} e^{\lambda_4 \hat{t}} \\ \theta &= \boxed{\rho_{31}} e^{\lambda_1 \hat{t}} + \boxed{\rho_{32}} e^{\lambda_2 \hat{t}} + \boxed{\rho_{33}} e^{\lambda_3 \hat{t}} + \boxed{\rho_{34}} e^{\lambda_4 \hat{t}} \end{aligned}$$

Le colonne in blu rappresentano gli autovettori $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ associati a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

Per il CORTO PERIODO prendiamo esclusivamente λ_1 di $\lambda_{1,2}$ poiché entrambi individuano lo stesso MODO, si avrà solo un'oscillazione sfasata.
Per il fugoide prendiamo analogamente λ_3 di $\lambda_{3,4}$.

Allora, ricordando che abbiamo diviso per ρ_{3i}, le soluzioni del sistema possono scriversi come:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{V} &= \frac{\rho_{11}}{\rho_{31}} e^{\lambda_1 \hat{t}} + \frac{\rho_{13}}{\rho_{33}} e^{\lambda_3 \hat{t}} \\ \Delta\alpha &= \frac{\rho_{21}}{\rho_{31}} e^{\lambda_1 \hat{t}} + \frac{\rho_{23}}{\rho_{33}} e^{\lambda_3 \hat{t}} \\ \theta &= 1\, e^{\lambda_1 \hat{t}} + 1\, e^{\lambda_3 \hat{t}} \end{aligned}$$

In rosso abbiamo indicato la soluzione associata al corto periodo, in blu quella associata al fugoide

La fase delle altre variabili mi dicherà la proiezione sull'asse reale e dunque il valore effettivo, reale, della variabile.

Si trova che:

- $\Delta\alpha, \Delta\hat{V}, \theta$ sono quasi in fase, ovvero raggiungono il loro valore massimo mantenendosi in fase
- $\Delta\alpha, \theta$ sono variabili importanti
- $\Delta\hat{V}$ poco importante (variazione piccola)

$\Rightarrow$ Lo short period vede variazioni importanti di α e θ che sono sostanzialmente in fase

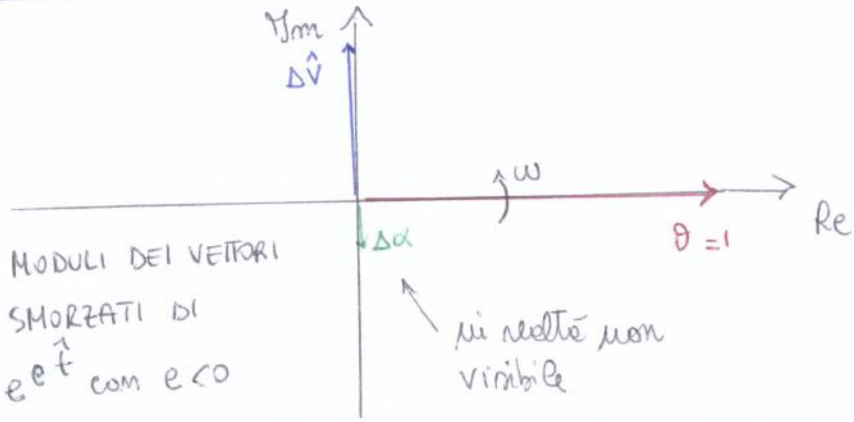
Ricordando che $\dot{\gamma} = \dot{\theta} - \dot{\alpha}$ e che le variazioni di α e θ sono più o meno uguali $\Rightarrow \dot{\gamma} = 0$. (Le variazioni si leggono sull'asse reale)

Per quello che è lo short period la traiettoria rimane orizzontale e si ha solamente un'oscillazione attorno all'asse di beccheggio

$\hat{V}$ non varia perché non ha tempo di variare, è tutto troppo veloce e smorzato.

Prendendo ad esempio il grande velivolo, con $T_{CP} \cong 6\,s$ e $t_{1/2CP} = 1.4\,s$ in circa $1/4$ di giro i vettori dimezzano la loro ampiezza mantenendo le proporzioni e gli sfasamenti.

DIAGRAMMA DI ARGAND - FUGOIDE



Prendiamo $\lambda_3 = c + id$

$\Rightarrow \omega \uparrow$ e $\omega = d$

Generalmente $D_1, E_1 << B_1, C_1$ e possiamo riscrivere la quartica come prodotto di due polinomi di secondo grado:

$$\boxed{\underbrace{(\lambda^2+B_1\lambda+C_1)}_{\substack{\text{soluzione approssimata}\\ \text{CORTO PERIODO}}}\underbrace{\left(\lambda^2+\frac{C_1D_1-B_1E_1}{C_1^2}\lambda+\frac{E_1}{C_1}\right)}_{\substack{\text{soluzione approssimata}\\ \text{FUGOIDE}}}=0}$$

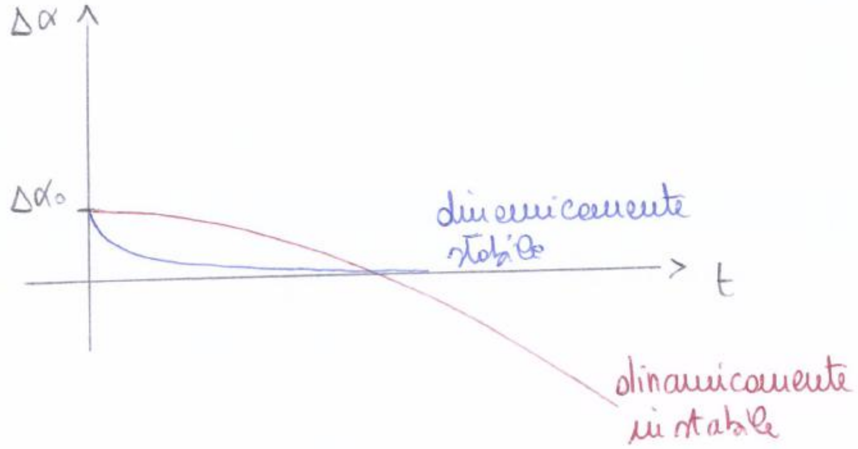
DIAGRAMMA DI STABILITÀ

Il diagramma di stabilità fa un confronto fra quella che è la stabilità statica e quella che è la stabilità dinamica.

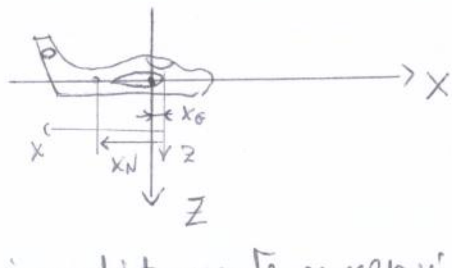
Per la stabilità statica: $C_{M\alpha}=\frac{\partial C_M}{\partial \alpha}=C_{L\alpha}\frac{x_G-x_N}{c}<0$ se stabile

$\Rightarrow x_G < x_N$

Prendendo ad esempio il $\Delta\alpha$ in conseguenza a un disturbo $\Delta\alpha_0$:



In entrambi i casi abbiamo una situazione staticamente stabile, ma non dinamicamente stabile.

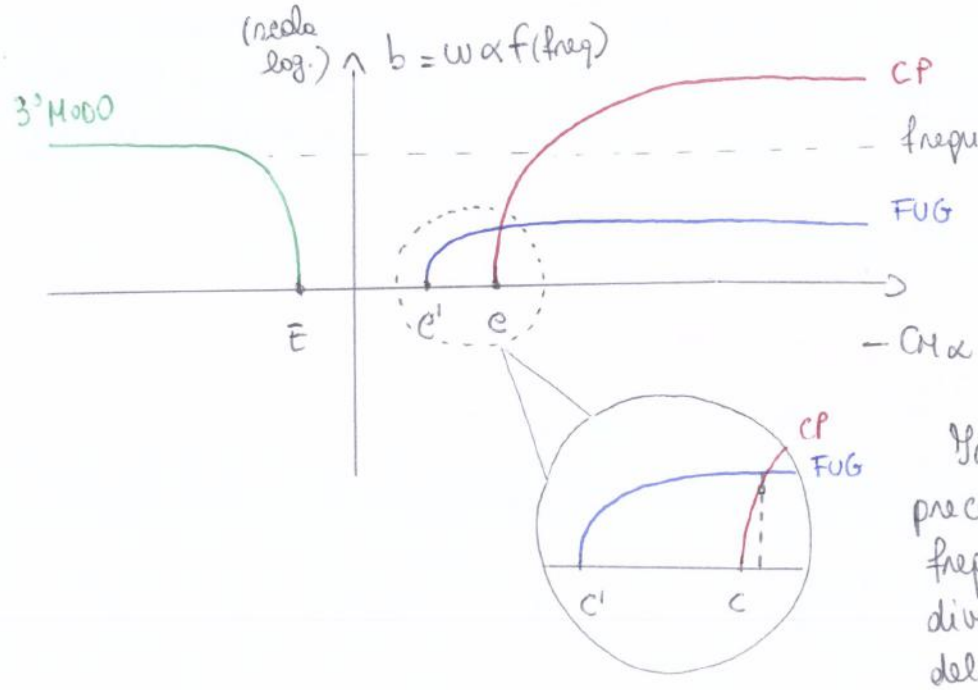


Per cui, la statica descrive cosa avviene negli istanti immediatamente successivi al disturbo, mentre la dinamica descrive come poi variano le variabili nel tempo, secondo una determinata legge.

Nel diagramma è definita la CONFIGURAZIONE (W e geometria velivolo) e le CONDIZIONI INIZIALI (V_{eq} e z).

La nascita del terzo modo potrebbe avvenire anche prima che il velivolo diventi staticamente instabile, anche se generalmente avviene dopo, e la parte reale del 3° modo è compresa tra le parti reali del fugoide e del corto periodo

Rappresentiamo ora la parte immaginaria:



In una zona leggermente precedente al punto C la frequenza del corto periodo diventa inferiore a quella del fugoide, causando una dinamica strana, poiché il corto periodo sarebbe così definito proprio per la sua elevata frequenza.

I velivoli moderni in cui per motivi vari si ha una instabilità statica intrinseca e dunque devono essere dotati di sistemi automatici di controllo, sono, in assenza di tali sistemi automatici, caratterizzati da una dinamica costituita dal 3° modo + 2 moti aperiodici, uno stabile e uno instabile, che può diventare fortemente instabile

variabili coinvolte.
Questo equivale a studiare la dinamica via via che questa tende sempre più a una condizione statica, in quanto le variabili tendono a variare sempre più lentamente.

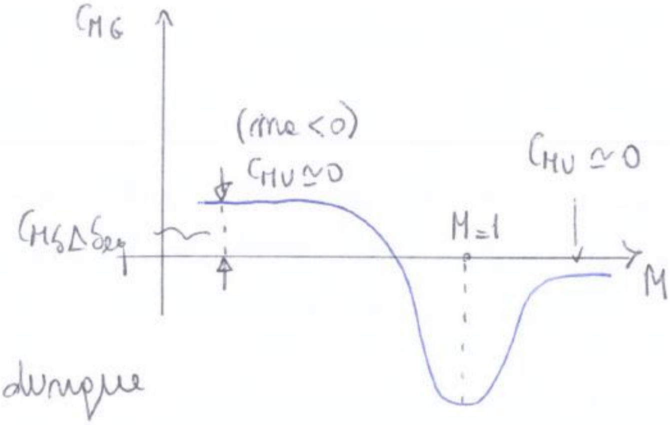
$\Rightarrow$ STABILITÁ STATICA diventa una condizione limite della STABILITÁ DINAMICA

Sappiamo che, per la stabilità statica:

$$C_{M\alpha} < 0 \Rightarrow \frac{x_G - x_N}{c} < 0 \Rightarrow x_G < x_N \quad \left(\text{semplificazione: } C_{M\alpha} = C_{L\alpha}\frac{x_G - x_N}{c}\right)$$

Procedendo mediante il metodo di Routh, si ottiene, come situazione limite:

$$\frac{C_{M\alpha}}{C_{L\alpha}} < \frac{C_{Mu}}{\ldots > 0}, \quad \text{con } C_{Mu} = \frac{\partial C_M}{\partial u}$$



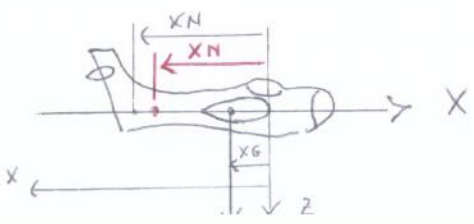
Abbiamo già visto che in condizioni statiche l'equilibrio alla rotazione e dunque l'annullarsi del C_{MG} è ottenuto dal ΔS_{eq}.

Se $M\uparrow \Rightarrow V\uparrow \Rightarrow \alpha\downarrow$
se $C_{MU} < 0 \Rightarrow \Delta S_{eq} \neq$ cost e in particolare $|\Delta S_{eq}|\downarrow$

Tornando alla relazione di Routh e osservando che $\frac{C_{M\alpha}}{C_{L\alpha}} = \frac{x_G - x_N}{c}$, si ottiene che:

$$\frac{x_G - x_N}{c} < \frac{C_{Mu}}{\ldots > 0} \rightarrow \boxed{\frac{x_G}{c} < \frac{x_N}{c} + \frac{C_{Mu}}{\ldots > 0}} \Rightarrow$$

x_G limite si sposta a destra, cioè diminuisce



ESERCITAZIONE 2

DINAMICA LONGITUDINALE A COMANDI BLOCCATI, EQUAZIONI SCRITTE CON RIFERIMENTO ALLA TERNA DI ASSI VENTO, CONDIZIONI INIZIALI DI VOLO RETTILINEO UNIFORME E ORIZZONTALE

Si consideri un velivolo da trasporto con i dati seguenti:

$m = 45360$ Kg

$S = 154.7\ m^2$

$c = 4.7$ m

$J_Y = 1.7535 \cdot 10^6$ Kg m^3

$\mathcal{R}A = 7$

$x_G/c = 0.35$

$x_N/c = 0.5$

$\alpha_T \simeq 0$ → spinta allineata asse vento

$C_D = 0.016 + \dfrac{C_L^2}{\pi e A}$

$C_{L\alpha} = 4.88\ rad^{-1}$

$C_{L\dot{\alpha}} \cong 0$

$C_{M\dot{\alpha}} \simeq -4.2$

$C_{Lq} \simeq 0$

$C_{Mq} = -22.9$

Determinare le caratteristiche del moto libero longitudinale, a comandi bloccati, conseguente a condizioni iniziali di volo rettilineo uniforme orizzontale caratterizzato da:

$z = 30000$ ft $\quad V_{eq} = 800$ Km/h

e ipotizzando che in tali condizioni la spinta T e i coefficienti aerodinamici C_D, C_L e C_M non dipendano dalla velocità.
Costruire i diagrammi di Argand corrispondenti alle soluzioni della quartica di stabilità ottenute precedentemente. La rappresentazione delle variabili $\Delta\hat{V}$ e $\Delta\alpha$ sia fatta assumendo $\theta = 1$, adottando un verso antiorario per la pulsazione delle oscillazioni, cioè prendendo dei quattro autovalori complessi coniugati i due con la parte immaginaria positiva.
Tracciare inoltre il luogo delle radici nelle condizioni ipotizzate.

SVOLGIMENTO

$z = 30000\ ft = 9144\ m$

$\rho_{eq} = \rho_0 \left(\dfrac{T_0 - hz}{T_0}\right)^{4.2561} = 0.458\ Kg/m^3$

$V_{eq} = 800\ Km/h = 222.22\ m/s$

$\hat{I}_j = \dfrac{I_j}{\left(\frac{c}{2}\right)^3 \rho_{eq} S} = 1906.98$

$b = S/c = 32.91$ m

$$\boxed{C_{LV} = C_{L\dot{\alpha}} = C_{Lq} = C_{DV} = C_{MV} = 0}$$

$$\boxed{C_{Mq} = -22.9}$$

Il sistema dinamico sarà dunque:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{V}}{d\hat{t}} = -h_{11}\Delta\hat{V} - h_{12}\Delta\alpha - h_{14}\theta \\ \dfrac{d\alpha}{d\hat{t}} = -h_{21}\Delta\hat{V} - h_{22}\Delta\alpha - h_{23}\hat{q} \\ \dfrac{d\hat{q}}{d\hat{t}} = -h_{31}\Delta\hat{V} - h_{32}\Delta\alpha - h_{33}\hat{q} \\ \dfrac{d\theta}{d\hat{t}} = \hat{q} \end{cases}$$

Con:

$$h_{11} = -\frac{C_{TV}\overbrace{\cos\alpha_T}^{\simeq 1} - C_{DV}}{2\mu} = 6.937\cdot 10^{-5} \qquad h_{12} = -\frac{C_{Lep} - C_{D\alpha}}{2\mu} = -2.6\cdot 10^{-4}$$

$$h_{14} = \frac{C_{Wep}}{2\mu} = 4.66\cdot 10^{-4} \qquad h_{21} = \frac{C_{TV}\cancel{\sin\alpha_T} + \cancel{C_{LV}} + 2C_{Wep}}{2\mu + C_{L\dot{\alpha}}} = 9.32\cdot 10^{-4}$$

$$h_{22} = \frac{C_{L\alpha} + C_{Dep}}{2\mu + C_{L\dot{\alpha}}} = 8.97\cdot 10^{-3} \qquad h_{31} = \frac{1}{\hat{I}_Y} C_{M\dot{\alpha}} \frac{2C_{Wep}}{2\mu} = -2.05\cdot 10^{-6}$$

$$h_{23} = -\frac{2\mu - C_{Lq}}{2\mu + C_{L\dot{\alpha}}} = -1 \qquad h_{31} = -\frac{1}{\hat{I}_Y}\left(C_{M\alpha} - \frac{C_{M\dot{\alpha}}(C_{L\alpha} + C_{Dep})}{2\mu}\right) = 3.64\cdot 10^{-4}$$

$$h_{33} = -\frac{1}{\hat{I}_Y}\left(C_{Mq} + C_{M\dot{\alpha}}\frac{(2\mu - C_{Lq})}{2\mu + C_{L\dot{\alpha}}}\right) = 1.42\cdot 10^{-2}$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice di sistema:

$$\begin{vmatrix} -h_{11}-\lambda & -h_{12} & 0 & -h_{14} \\ -h_{21} & -h_{22}-\lambda & -h_{23} & 0 \\ -h_{31} & -h_{32} & -h_{33}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -h_{11}-\lambda & -h_{12} & -h_{14} \\ -h_{21} & -h_{22}-\lambda & 0 \\ -h_{31} & -h_{32} & 0 \end{vmatrix} - \lambda\begin{vmatrix} -h_{11}-\lambda & -h_{12} & 0 \\ -h_{21} & -h_{22}-\lambda & -h_{23} \\ -h_{31} & -h_{32} & -h_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow h_{14}\left[h_{21}h_{32} - h_{31}(h_{22}+\lambda)\right] - \lambda\left[(-h_{11}-\lambda)\left[(h_{22}+\lambda)(h_{33}+\lambda) - h_{23}h_{32}\right] + h_{12}(h_{33}+\lambda)h_{21} - h_{12}h_{23}h_{31}\right] = 0$$

Riferiamo tutto a ϑ, dividendo per ρ_{3i}, allora:

$$\Delta\hat{V} = \boxed{\frac{\rho_{11}}{\rho_{31}}} e^{\lambda_1 \hat{t}} + \boxed{\frac{\rho_{13}}{\rho_{33}}} e^{\lambda_3 \hat{t}}$$

$$\Delta\alpha = \boxed{\frac{\rho_{21}}{\rho_{31}}} e^{\lambda_1 \hat{t}} + \boxed{\frac{\rho_{23}}{\rho_{33}}} e^{\lambda_3 \hat{t}}$$

$$\vartheta = \boxed{1} e^{\lambda_1 \hat{t}} + \boxed{1} e^{\lambda_3 \hat{t}}$$

CP FUG

Determiniamo $\frac{\rho_{11}}{\rho_{31}}$ e $\frac{\rho_{21}}{\rho_{31}}$:

$$\begin{cases} \frac{\rho_{11}}{\rho_{31}}(h_{11}+\lambda_1) + \frac{\rho_{21}}{\rho_{31}} h_{12} + \frac{\rho_{31}}{\rho_{31}} h_{14} = 0 \\ \frac{\rho_{11}}{\rho_{31}} h_{21} + \frac{\rho_{21}}{\rho_{31}}(\lambda_1 + h_{22}) + \lambda \frac{\rho_{31}}{\rho_{31}} h_{23} = 0 \end{cases}$$

Sostituendo all'interno del sistema precedente λ_1 e riferendo la soluzione del CP a ϑ, dunque dividendo per ρ_{31}, si ha un sistema di due equazioni in due incognite

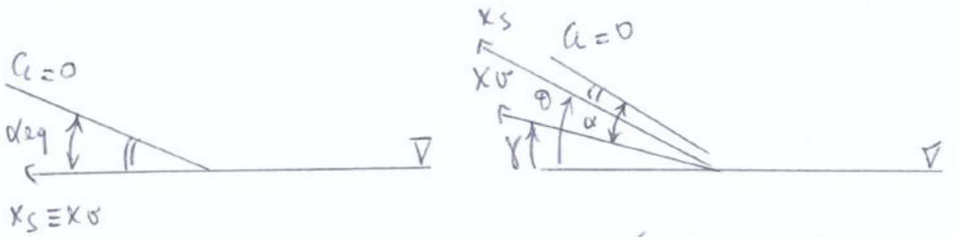
Allora:

$$\frac{\rho_{11}}{\rho_{31}} = \frac{\begin{vmatrix} -h_{14} & h_{12} \\ -h_{23}\lambda & h_{22}+\lambda_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{11}+\lambda_1 & h_{12} \\ h_{21} & \lambda_1+h_{22} \end{vmatrix}} = 9.196 \cdot 10^{-3} + 4.837 \cdot 10^{-3}\, i \rightarrow \begin{array}{l} (\Delta\hat{V}/\vartheta) \\ r = 0.01039 \\ \varphi = 27,74^\circ = 27^\circ 44' \end{array}$$

$$\frac{\rho_{21}}{\rho_{31}} = \frac{\begin{vmatrix} h_{11}+\lambda_1 & -h_{14} \\ h_{21} & -h_{23}\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{11}+\lambda_1 & h_{12} \\ h_{21} & h_{22}+\lambda_1 \end{vmatrix}} = 1.064 + 0.4677\, i \rightarrow \begin{array}{l} (\Delta\alpha/\vartheta) \\ r = 1.2376 \\ \varphi = 23.683^\circ = 23^\circ 40' \end{array}$$

Tracciamo il diagramma di Argand per il corto periodo, considerando un verso antiorario per la pulsazione delle oscillazioni, ovvero considerando l'autovalore λ_1, che presenta parte reale negativa e parte immaginaria positiva

Prima però osserviamo che:



$$\gamma + \alpha = \theta +))$$

$$d\gamma + d\alpha = d\theta$$

$$\Delta\gamma = \Delta\theta - \Delta\alpha$$

$$\begin{cases} \gamma_{eq} = 0 \\ \theta_{eq} = 0 \\ \alpha_{eq} \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = \gamma_{eq} + \Delta\gamma = \Delta\gamma \\ \theta = \theta_{eq} + \Delta\theta = \Delta\theta \\ \alpha = \alpha_{eq} + \Delta\alpha \end{cases} \Rightarrow \gamma = \theta - \Delta\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma}{\theta} = 1 - \frac{\Delta\alpha}{\theta} = 1 - \frac{\rho_{21}}{\rho_{31}} = -0.064 - 0.4677i \rightarrow r = 0.472$$

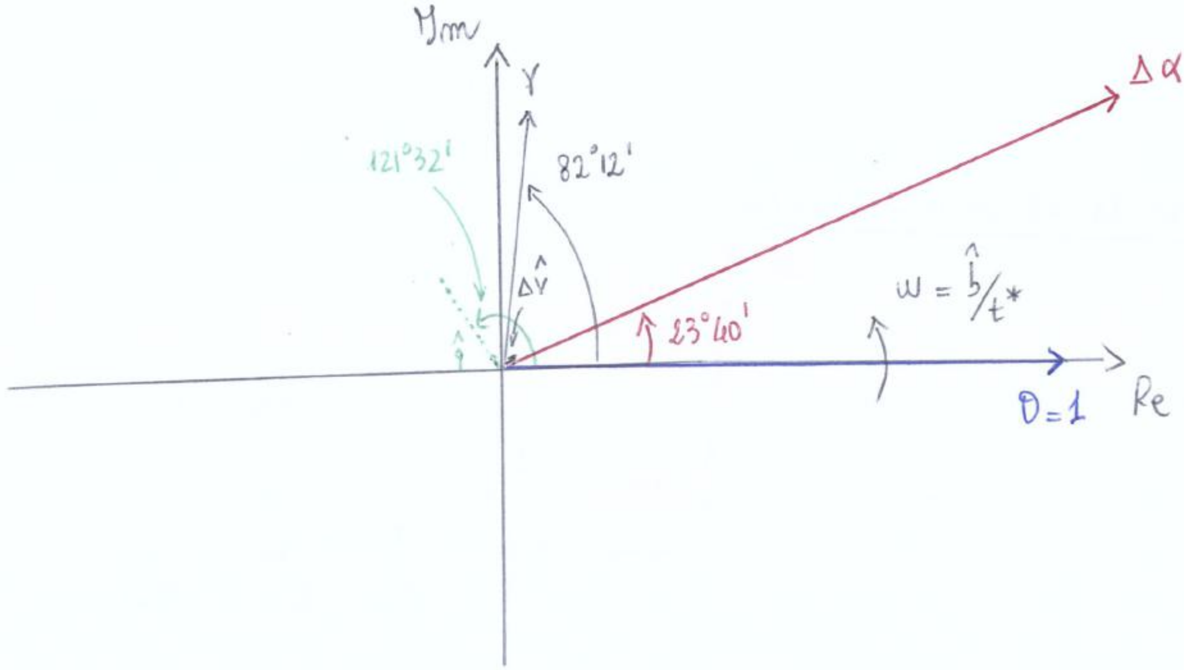
$$\varphi = 82°12'$$

- $\theta = \rho_{31} e^{\lambda_1 \hat{t}} \rightarrow \hat{q} = \underbrace{\rho_{31} \lambda_1 e^{\lambda_1 \hat{t}}}_{\theta} \rightarrow \frac{\hat{q}}{\theta} = \lambda_1 = -0.0116 + 0.0189\,i$

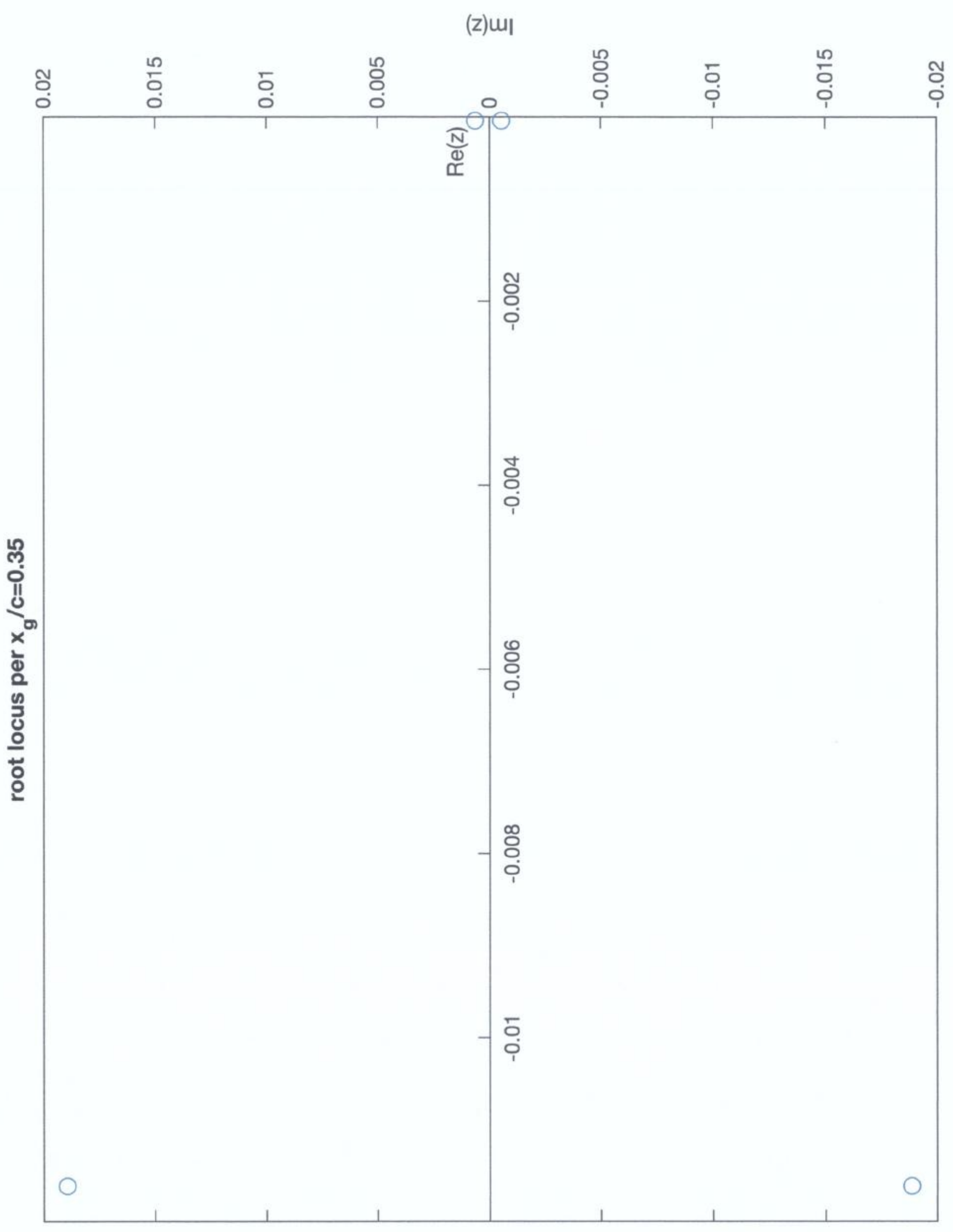
$\hookrightarrow r = 0.0221$

$\varphi = 121°32'$

DIAGRAMMA DI ARGAND - CORTO PERIODO



Determiniamo ora ρ_{13}/ρ_{33} e ρ_{23}/ρ_{33} per tracciare il diagramma di Argand relativo al fugoide.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 149 di 208

un solo modo.

Quale modo rimane?

Il modo che rimane (se rimane) è il corto periodo, in quanto abbiamo fatto l'ipotesi di $\Delta\hat{V} = 0$.

Ricordiamo che:

$$PH \to \begin{cases} \cancel{\Delta\hat{V}}, \theta \text{ importanti} \\ \Delta\alpha \text{ poco importante} \end{cases} \qquad CP \to \begin{cases} \Delta\alpha, \theta \text{ importanti} \\ \cancel{\Delta\hat{V}} \text{ poco importante} \end{cases}$$

Ipotizzando $\Delta\hat{V} = \text{cost}$ si ha una soluzione che diventa valida solo nel momento in cui la variabile $\Delta\hat{V}$ non risulta sufficientemente eccitata.

$\Rightarrow$ Abbiamo eliminato il fugoide, in cui $\Delta\hat{V}$ era importante e la soluzione ottenuta è valida per tempi brevi, confrontati con $T_{fugoide}$

In tal modo non perdiamo alcuna informazione sullo short period.

$\Rightarrow$ Il sistema ridotto fornirà ζ e ω_n del corto periodo

LOCKEED NT-33A

Negli anni '50, a seguito di molte ricerche, si era capito che erano le caratteristiche del corto periodo ad influenzare la dinamica a tempi brevi del velivolo che interessa al pilota. Il fugoide non crea problemi in quanto, data la dinamica molto lenta, lascia al pilota la possibilità di intervenire per correggere i parametri di volo.

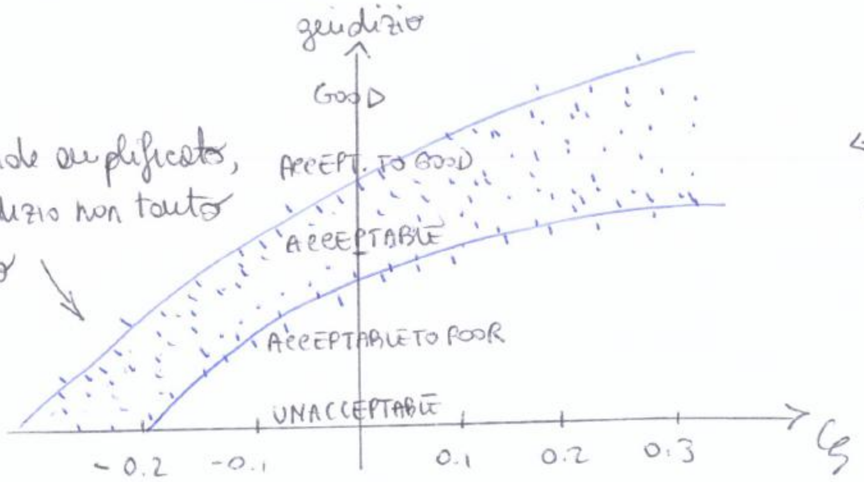
Il Lockeed NT-33A è stato il primo velivolo a montare un sistema automatico di controllo, ma molto più complesso di quanto si potesse immaginare. Esso era in grado di variare le caratteristiche dinamiche di corto periodo del velivolo, permettendo ai piloti di testare vari tipi di risposta dinamica a tempi brevi.

menti ai sensori a garantire una risposta dinamica del velivolo soddisfacente.

DIAGRAMMA DI OPINIONE - FUGOIDE

Ha senso preoccuparsi delle caratteristiche dinamiche del fugoide quando si passa dalle VFR (Visual flight rules) all' IFR (Instruments flight rules).
Nel volo a vista, c'è un riferimento esterno e il pilota riesce a correggere senza problemi la dinamica del fugoide.
Nel caso di scarsa visibilità, senza riferimenti, il fugoide può creare problemi poiché la strumentazione presenta un certo ritardo nel riportare le informazioni al pilota.

fugoide amplificato, giudizio non tanto buono



← se il fugoide è smorzato è sicuramente meglio marnice $\delta \neq 0$.

Vediamo come si modifica il sistema:

$$\boxed{\dot{V} = -h'_{11}\Delta V - h'_{12}\Delta\alpha - h'_{15}\theta - \cancel{h'_{16}}\Delta\delta}$$
$\simeq 0$

equazione equilibrio dinamico in direzione x (asse vento)

In h'_{16} è presente la variazione della resistenza per effetto della rotazione dell'equilibratore $\rightarrow D_\delta$
Possiamo considerare $C_{D_\delta} \simeq 0$

$$\boxed{\dot{\alpha} = -h'_{21}\Delta V - h'_{22}\Delta\alpha - h'_{23} q - h'_{26}\Delta\delta}$$

equazione di equilibrio dinamico in direzione z (asse vento)

In h'_{26} è presente il C_{L_δ}, che in linea di principio non può essere trascurato.
Il C_{L_δ}, ricordiamo, evidenzia la variazione di portanza per effetto della rotazione dell'equilibratore.

$$\boxed{\dot{q} = -h'_{31}\Delta V - h'_{32}\Delta\alpha - h'_{33} q - h'_{36}\Delta\delta}$$

equazione di equilibrio dinamico alla rotazione attorno a y

In h'_{36} c'è il contributo della derivata C_{M_δ} (elevator power), che evidenzia come varia il momento aerodinamico per effetto della rotazione dell'equilibratore.

A questo punto, aggiungiamo la 4ª equazione, $\boxed{\ddot{\delta} = \ldots}$, ovvero l'equazione di equilibrio dinamico dell'equilibratore attorno al suo asse di cerniera

Inoltre, si hanno le due equazioni della cinematica:

$\boxed{\dot{\theta} = q}$ $(h'_{53} = 1)$

$\boxed{\dot{\delta} = \frac{d\delta}{dt}}$ $(h'_{64} = 1)$

Andiamo ora ad esplicitare la 4ª equazione

In tale trattazione abbiamo trascurato gli effetti di:

- q → determina una velocità lineare se moltiplicata per il braccio.
  La velocità lineare conseguente a una rotazione determina una forza centrifuga.
  Generalmente, il braccio di tale forza rispetto all'asse di cerniera è trascurabile
- $\dot{\delta}$ → anche il $\dot{\delta}$ se moltiplicato per il braccio dà luogo a una velocità lineare che determina una forza centrifuga, che però trascuriamo per lo stesso motivo esposto sopra.

Una volta esplicitati i termini inerziali, andiamo ad esplicitare H, ovvero i momenti delle forze esterne.

$$H = H(V, \underbrace{\cancel{\dot{V}}}_{\simeq 0}, \alpha, \dot{\alpha}, q, \cancel{\dot{q}}, \delta, \dot{\delta})$$

$\simeq 0$ effetto della variazione di velocità nel momento per dinamico agente sull'equilibratore

Possiamo scrivere dunque che:

$$\Delta H = \frac{\partial H}{\partial V}\Delta V + \frac{\partial H}{\partial \alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial H}{\partial \dot{\alpha}}\dot{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q} q + \frac{\partial H}{\partial \delta}\Delta\delta + \frac{\partial H}{\partial \dot{\delta}}\dot{\delta} = H_V \Delta V + H_\alpha \Delta\alpha + H_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + H_q q + H_\delta \Delta\delta + H_{\dot{\delta}}$$

Ricordiamo che:

$$H = \frac{1}{2}\rho_{eq} V_{eq}^2 S_e c_e C_H$$

Allora:

0, perché $H_{eq} = 0$

$$H_V = \frac{1}{2}\rho_{eq} S_e c_e \left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial C_H}{\partial V}}}_{\simeq 0} V_{eq}^2 + 2V_{eq}\cancel{C_{H_{eq}}} \right) \Rightarrow \boxed{(H_V)_{eq} \simeq 0}$$

$$H_\alpha \rightarrow \frac{\partial C_H}{\partial \alpha} = C_{H\alpha} = b_1\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right), \quad \text{con } b_1 = \frac{\partial C_H}{\partial \alpha_t}$$

avendo il $C_{H\alpha}$ possiamo valutare l'H_α.

$H_\delta \Rightarrow \frac{\partial C_H}{\partial \delta} = b_2 \rightarrow$ è poi possibile valutare H_δ.

$H_{\dot\delta} \rightarrow$ più complessa da determinare e la si può determinare mediante una procedura utilizzata per valutare i termini smorzanti dei sistemi dinamici del 2° ordine $\rightarrow$ vedi più avanti

Siamo ora in grado di scrivere la 4ª equazione del sistema dinamico:

$$-\underbrace{(I_e + m_e x_e l''_t)}_{h'_{48}\cdot I_e}\dot q + \underbrace{(m_e x_e V_{eq} + H_q)}_{h'_{43}\cdot I_e} q - \underbrace{(m_e x_e V_{eq} - H_{\dot\alpha})}_{h'_{47}\cdot I_e}\dot\alpha + \underbrace{H_\alpha}_{h'_{42}\cdot I_e}\Delta\alpha + \underbrace{\overset{h_{41}}{H_V}\Delta\delta}_{\sim 0} =$$

$$= I_e\ddot\delta - \underbrace{H_{\dot\delta}}_{I_e\cdot h'_{44}}\dot\delta - \underbrace{H_\delta}_{h'_{46}\cdot I_e}\Delta\delta$$

Facendo tutti i passaggi:

$$(I_e + m_e x_e l''_t)\dot q - m_e x_e V_{eq} q + m_e x_e V_{ep}\dot\alpha + I_e\ddot\delta = H_V\Delta V + H_\alpha\Delta\alpha + H_{\dot\alpha}\Delta\dot\alpha + H_q q + H_\delta\Delta\delta + H_{\dot\delta}\dot\delta$$

$$I_e\ddot\delta - H_{\dot\delta}\dot\delta - H_\delta\Delta\delta = -(I_e + m_e x_e l''_t)\dot q + (m_e x_e V_{ep} + H_q) q - (m_e x_e V_{ep} - H_{\dot\alpha})\dot\alpha + H_\alpha\Delta\alpha + H_V\Delta V$$

$$\Rightarrow \ddot\delta = \underbrace{\frac{H_V}{I_e}}_{h'_{41}}\Delta V + \underbrace{\frac{H_\alpha}{I_e}}_{h'_{42}}\Delta\alpha + \underbrace{\frac{(m_e x_e V_{ep} + H_q)}{I_e}}_{h'_{43}} q + \underbrace{\frac{H_{\dot\delta}}{I_e}}_{h'_{44}}\dot\delta + \underbrace{\frac{H_\delta}{I_e}}_{h'_{46}}\Delta\delta - \underbrace{\frac{(m_e x_e V_{ep} - H_{\dot\alpha})}{I_e}}_{h'_{47}}\dot\alpha +$$

$$-\underbrace{\frac{(I_e + m_e x_e l''_t)}{I_e}}_{h'_{48}}\dot q \Rightarrow \boxed{\ddot\delta = -\overset{\sim 0}{\cancel{h'_{41}}}\Delta V - h'_{42}\Delta\alpha - h'_{43} q - h'_{44}\dot\delta - h'_{46}\Delta\delta - h'_{47}\dot\alpha + - h'_{48}\dot q}$$

Per risolvere il sistema abbiamo dunque:

- 4 eq. dinamica
- 2 eq. cinematica $\rightarrow \dot\theta = q,\ \dot\delta = d\delta/dt$
- 2 eq. ulteriori $\rightarrow \dot\alpha = d\alpha/dt,\ \dot q = d^2\theta/dt^2 \rightarrow$ poiché il $\ddot\delta$ dipende anche da $\dot\alpha$ e $\dot q$

SOLUZIONI APPROSSIMATE DEI TRE MODI

① Soluzione approssimata 3° modo

Dalla risoluzione del sistema completo si osserva che tutte le variabili ad eccezione di $\Delta\delta$ sono poco importanti. Allora, riprendendo la 4ª equazione della dinamica:

$$\boxed{I_e \ddot{\delta} - H_{\dot{\delta}} \dot{\delta} - H_\delta \Delta\delta = 0}$$

→ oscillazione libera dell'equilibratore
A dx dell'uguale sono state trascurate le variabili $\dot{q}, q, \dot{\alpha}, \alpha, V$

② Soluzione approssimata del 1° modo

Supponiamo di partire da una situazione a comandi bloccati ed innescare il fugoide, per poi liberare l'equilibratore ⟹ il fugoide diverrà la forzante della 4ª equazione della dinamica

⟹ l'equilibratore si muoverà con le caratteristiche della forzante, ovvero con bassa frequenza ⟹ $\dot{\delta}, \ddot{\delta}$ possono essere trascurati.

Allora:

$$-H_\delta \Delta\delta = f(t) \rightarrow \Delta\delta = -\frac{f(t)}{H_\delta}, \quad \text{con } f(t) = -(\dots)\cancel{\dot{q}}^{\simeq 0} + (\dots)\cancel{q}^{\simeq 0} - (\dots)\cancel{\dot{\alpha}}^{\simeq 0} + H_\alpha \cancel{\Delta\alpha}^{\simeq 0} + \cancel{H_V}^{0}\Delta V$$

Poiché nel fugoide $\dot{q}, q, \dot{\alpha}, \Delta\alpha$ sono variabili poco importanti ⟹ $\boxed{\Delta\delta \simeq 0}$

Se anche $\Delta\delta \simeq 0$ ⟹ il primo modo ottenuto a comandi liberi è praticamente analogo a quello ottenuto a comandi bloccati (fugoide)

③ Soluzione approssimata del 2° modo

Per la soluzione approssimata del secondo modo possiamo considerare $V = \text{cost}$

⟹ $\boxed{\Delta V = 0}$

⟹ il sistema si riduce a 3 equazioni dinamiche + 1 cinematica

⟹ l'equazione risolutiva sarà una quartica che fornisce due soluzioni:

L'equazione è la classica equazione di un sistema massa, molla, smorzatore, che può anche essere scritto come:

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{confrontandola con} \quad \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

si ha che:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{r}{m} \rightarrow \zeta = \frac{r}{r_{CR}} = \frac{r}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{r}{2\sqrt{mk}} \Rightarrow r_{CR} = 2\sqrt{mk}$$

Scrivendo l'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale:

$$\lambda^2 + \frac{r}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Nel caso di soluzioni complesse coniugate $\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{4mk}} = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Per cui:

- $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$; $r_{CR} = 2\sqrt{mk}$; $\zeta = \frac{r}{2\sqrt{mk}}$; $T = \frac{2\pi}{\omega}$

nel nostro caso:

$$\omega = \sqrt{-\frac{H_\delta}{I_e} - \frac{H_{\dot\delta}^2}{4I_e^2}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Allora, in galleria del vento facciamo oscillare l'equilibratore e analizziamo la time-history:

$\omega = \omega_n = \sqrt{-\frac{H_\delta}{I_e}}$

Per cui, noto ω_n (calcolato) e $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (T misurato), si calcola ζ:

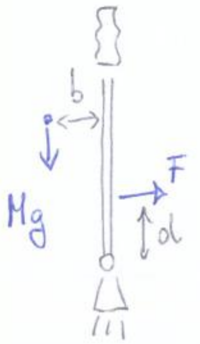
$$\boxed{\zeta = \sqrt{1-\left(\omega/\omega_n\right)^2}}$$

$$\Rightarrow 2\zeta\omega_n = -H_{\dot\delta}/I_e \rightarrow \boxed{H_{\dot\delta} = -2\zeta\omega_n I_e}$$

Consideriamo in 1ª approssimazione solo $\mathring{q}$ come effetti inerziali:

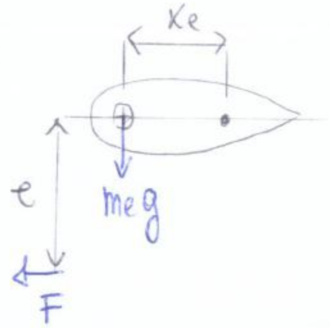
$\Rightarrow$ aggiungiamo un'unica massa M come in figura.

- EQUILIBRAMENTO STATICO



$$Fd - Mgb = 0$$

$$F = Mg\frac{b}{d}$$



$$m_e g x_e - Fe = 0$$

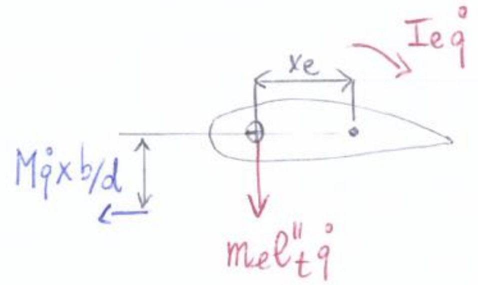
$$m_e g x_e - Mge\frac{b}{d} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m_e x_e - Me\frac{b}{d} = 0}$$

Dall'equilibrio attorno all'asse di cerniera si può ricavare:

$$\boxed{M = \frac{m_e x_e}{e\, b/d}}$$

- EQUILIBRAMENTO DINAMICO



$$+ I_e\mathring{q} - m_e l''_t \mathring{q}\, x_e + M\mathring{q}\, x\cdot e\frac{b}{d} = 0$$

Sostituendo M ricavato precedentemente si ottiene una quantità $\neq 0$!

Considerando anche gli effetti di a_z, si dovrebbe aggiungere:

$$+ nMg\frac{b}{d}e - m_e n g x_e$$

Considerando anche gli effetti di $\ddot{\delta}$ si dovrebbe aggiungere:

$$+ I_e\ddot{\delta}$$

$\Rightarrow$ in tale situazione non si riesce ad avere equilibramento statico e dinamico

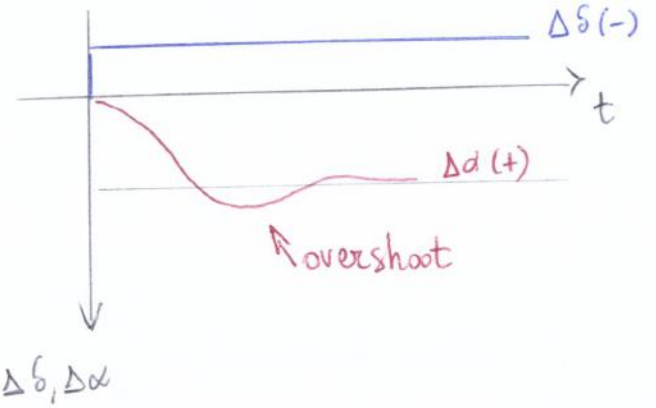
$\Rightarrow$ si leva la massa M e se ne aggiungono 2, m e m', come lo schema riportato nella pagina seguente.

RISPOSTA ALLA MANOVRA

Una manovra è un'azione esercitata dal pilota sui comandi per passare da una condizione di equilibrio a un'altra.
Non siamo interessati a una manovra costituita da una successione di stati di equilibrio (manovra molto lenta), ma ad una manovra che alteri la dinamica del velivolo.

Manovra a gradino

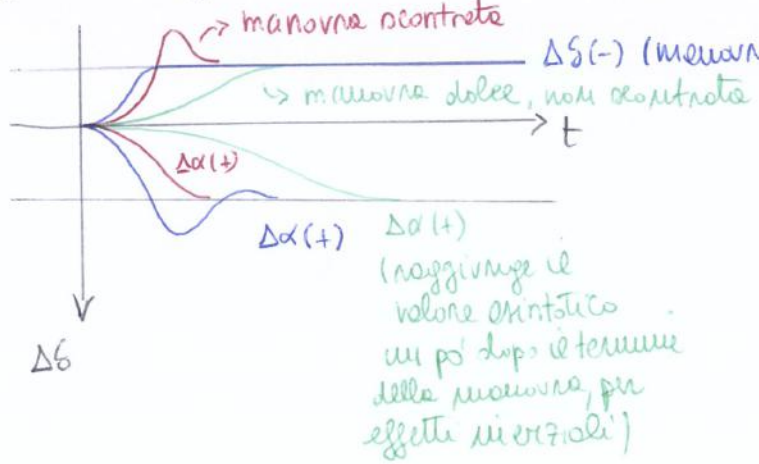
La manovra a gradino è ideale, in quanto non è possibile portare istantaneamente l'equilibratore da una posizione definita a un'altra. La normativa, comunque, fa riferimento a tale manovra per definire alcune caratteristiche dinamiche del velivolo, in quanto essa è conservativa, nel senso che qualsiasi manovra realistica determina una sollecitazione inferiore a quella istantanea.



MANOVRA ISTANTANEA O A GRADINO
(non scontrata)
In seguito alla manovra a gradino, varia tutto il vettore di stato. Abbiamo rappresentato un possibile andamento di $\Delta\alpha$, che se $\Delta\delta$ muta positivamente, si porterà ad un valore asintotico positivo

Manovra reale

Riportiamo gli andamenti di $\Delta\delta$ e $\Delta\alpha$ per una possibile manovra reale:



Nella MANOVRA SCONTRATA il pilota accelera fortemente il velivolo attorno all'asse di beccheggio e poi lo frena (cabrandolo/contemporaneamente) in maniera da raggiungere il valore asintotico più rapidament

A seguito della manovra, che possiamo pensare come un disturbo, si innesca il moto vario del velivolo caratterizzato dalla sovrapposizione dei due modi.

Considerando $\Delta\hat{V} = 0 \rightarrow \hat{V} = \text{cost}$ si ottiene una soluzione valida a tempi brevi, in modo che in tale tempo lo short period si è sviluppato ed esaurito, mentre il fugoide non si è ancora sviluppato.

=> SISTEMA RIDOTTO in cui rimangono solo le caratteristiche del corto periodo.

Il sistema diventa:

- $\cancel{\frac{d}{d\hat{t}}\hat{V}} + \cancel{h_{11}\Delta\hat{V}} + h_{12}\Delta\alpha + h_{14}\theta = -\underbrace{\cancel{h_{15}\Delta\delta(t)}}_{\simeq 0}$ -> legame cinematico
- $\frac{d}{d\hat{t}}\alpha + \cancel{h_{21}\Delta\hat{V}} + h_{22}\Delta\alpha + h_{23}\hat{q} = -h_{25}\Delta\delta(t)$
- $\frac{d}{d\hat{t}}\hat{q} + \cancel{h_{31}\Delta\hat{V}} + h_{32}\Delta\alpha + h_{33}\hat{q} = -h_{35}\Delta\delta(t)$
- $\frac{d\theta}{d\hat{t}} = \hat{q}$

1ª APPROSSIMAZIONE: $h_{25} = 0$ (trascuro C_{L_δ})
ovviamente $h_{35} \neq 0$

=> dalla 2ª equazione:

$$\hat{q} = -\frac{1}{h_{23}}\frac{d\alpha}{d\hat{t}} - \frac{h_{22}}{h_{23}}\Delta\alpha$$

$$\frac{d\hat{q}}{d\hat{t}} = -\frac{1}{h_{23}}\frac{d^2\alpha}{d\hat{t}^2} - \frac{h_{22}}{h_{23}}\frac{d\alpha}{dt}$$

=> sostituendo nella 3ª equazione:

$$-\frac{1}{h_{23}}\frac{d^2\alpha}{d\hat{t}^2} - \frac{h_{22}}{h_{23}}\frac{d\alpha}{dt} + h_{32}\Delta\alpha - \frac{h_{33}}{h_{23}}\frac{d\alpha}{d\hat{t}} - \frac{h_{33}h_{22}}{h_{23}}\Delta\alpha = -h_{35}\Delta\delta$$

$$\boxed{\frac{d^2\alpha}{d\hat{t}^2} + (h_{22} + h_{33})\frac{d\alpha}{dt} + (h_{22}h_{33} - h_{23}h_{32})\Delta\alpha = h_{23}h_{35}\Delta\delta}$$ equazione massa-molla-smorzatore

OSSERVAZIONE

Studiando il diagramma di stabilità, avevamo notato che dopo una certa posizione del baricentro il corto periodo passava da un modo oscillatorio a due soluzioni aperiodiche.

In tale caso, invece, vedremo il passaggio da modo oscillatorio a modo aperiodico variando ζ.

Riprendiamo l'equazione:

$$\frac{d^2\alpha}{d\hat{t}^2} + (h_{22} + h_{33})\frac{d\alpha}{d\hat{t}} + (h_{22}h_{33} - h_{23}h_{32})\Delta\alpha = h_{23}h_{35}\Delta\delta$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = F(t) = h_{23}h_{35}\Delta\delta(t)$$

In ζ figurano i termini h_{22}, h_{33}, all'interno dei quali troviamo:

$h_{22} \rightarrow C_{L\alpha}$ (h_{22} termine elastico 2ª equazione dinamica)

$h_{33} \rightarrow C_{Mq}$ (h_{33} termine smorzante 3ª equazione dinamica)

Risolvendo l'equazione differenziale:

$$\boxed{\Delta\alpha = \frac{h_{23}h_{35}}{\omega_n^2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n\hat{t}} \sin(\overbrace{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}^{\omega}\hat{t} + \varphi)\right]\Delta\delta}$$

con $\omega_n = \sqrt{h_{22}h_{33} - h_{23}h_{32}}$, $\zeta = \frac{h_{22}+h_{33}}{2\omega_n}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1} = \arcsin\sqrt{1-\zeta^2}$

$\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, $h_{35} = -\frac{C_{M\delta}}{\hat{I}_y}$

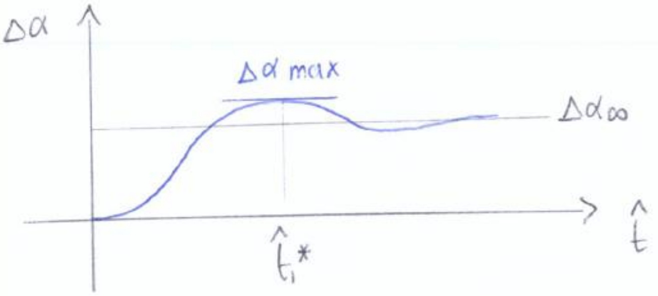
- Se $\zeta = 0 \rightarrow \boxed{\Delta\alpha = \frac{h_{23}h_{35}}{\omega_n^2}\left[1 - \sin(\omega_n\hat{t} + \varphi)\right]\Delta\delta}$, $\boxed{\varphi = \pi/2}$ $\rightarrow$ sfasamento tra forzante e risposta

- Se $\zeta = 1 \rightarrow \boxed{\Delta\alpha = \frac{h_{23}h_{35}}{\omega_n^2}\left[1 - e^{-\omega_n\hat{t}}\right]\Delta\delta}$ perché $\lim_{\zeta \to 1} \frac{\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n\hat{t} + \overset{\varphi \to 0}{\varphi})}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1$

Allora:

$$\Delta n = cost\, \Delta\alpha \rightarrow \boxed{\Delta n_\infty = cost\, \Delta\alpha_\infty = cost \cdot cost' \Delta\delta}$$

Inoltre:



$\Delta\alpha_{max}$ = fattore di ampl. $\cdot\, \Delta\alpha_\infty$

$\Rightarrow \Delta n_{max} = cost\, \Delta\alpha_{max} =$

$= cost \cdot$ fatt. di ampl. $\cdot\, \Delta\alpha_\infty =$

$= cost \cdot cost' \cdot$ fatt. di ampl. $\Delta\delta$

Per cui:

$$\boxed{\Delta\alpha_{max} = \text{fatt. di ampl.} \cdot cost'\, \Delta\delta}$$

$$\boxed{\Delta n_{max} = cost \cdot cost' \cdot \text{fatt. di ampl.} \cdot \Delta\delta}$$

In seguito a una manovra a gradino è possibile determinare dunque il Δn_{max} raggiunto.
Il Δn_{max} di una qualsiasi manovra reale, a pari $\Delta\delta$ sarà sicuramente inferiore

Ricaviamo ora il fattore di amplificazione:

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta} = K_1\left[1 - K_2 e^{-K_3\hat t} \sin(K_4\hat t + \varphi)\right] \quad \text{con} \quad K_1 = \frac{h_{23}h_{35}}{\omega_n^2}, \; K_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\varsigma^2}}, \; K_3 = \varsigma\omega_n$$

$$K_4 = \omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}$$

$$\frac{d}{d\hat t}\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta}\right) = K_1K_2 e^{-K_3\hat t}\left[-K_4\cos(K_4\hat t+\varphi) + K_3\sin(K_4\hat t+\varphi)\right]$$

$$\frac{d}{d\hat t}\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta}\right) = 0 \rightarrow \underbrace{K_1K_2e^{-K_3\hat t} = 0}_{\text{non ci interessa}}, \; \left[-K_4\cos(K_4\hat t+\varphi) + K_3\sin(K_4\hat t+\varphi)\right] = 0$$

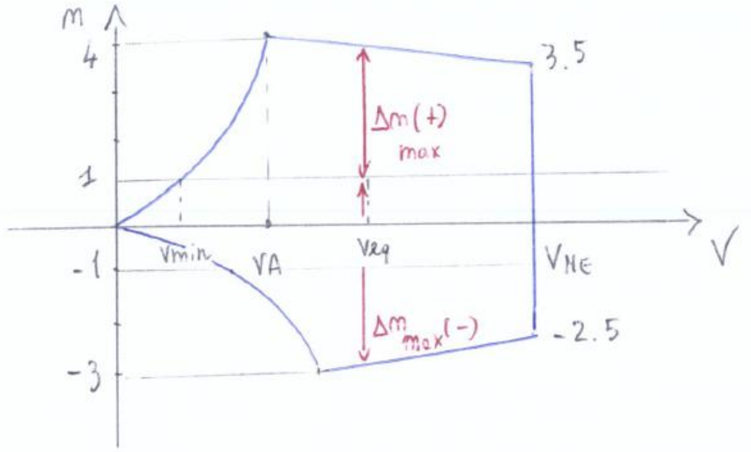
Poniamo $\beta = K_4\hat t + \varphi \Rightarrow K_4\cos\beta = K_3\sin\beta \rightarrow tg\,\beta = \frac{K_4}{K_3} = \frac{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma\omega_n} = \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2}-1} = tg\,\varphi$

$\Rightarrow tg\,\beta = tg\,\varphi \rightarrow \beta = \varphi \rightarrow K_4\hat t + \varphi = \varphi \rightarrow \boxed{\hat t = 0}$ 1ª soluzione, le curve partono a tangente orizzontale

$(\beta = \varphi + m\pi)$ $\quad (m=0)$

$\cdot\; m = 1 \rightarrow \beta = \varphi + \pi \rightarrow K_4\hat t + \varphi = \varphi + \pi \rightarrow \boxed{\hat t_1^* = \pi/K_4 = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}}}$ 2ª soluzione

Prendiamo un diagramma di manovra molto semplice:



Ad una certa $V_{eq} > V_A$ dobbiamo poter raggiungere il $\Delta m_{max}(+)$ e il $\Delta m_{max}(-)$.

Qual è il comando che consente di raggiungere i limiti del diagramma di manovra.

$$\frac{\Delta m_{max}}{\Delta \delta} = \text{cost} \cdot \text{cost}' \cdot \text{fatt. di ampl.} \rightarrow \boxed{\Delta \delta = \frac{\Delta m_{max}}{\text{cost} \cdot \text{cost}' \cdot \text{fatt. di ampl.}}}$$

Se il $\Delta\delta$ ricade all'interno della escursione possibile dell'equilibratore

↳ progetto ben fatto, il pilota deve stare attento a non superare quel $\Delta\delta$ perché svilupperebbe fattori di carico e contingenza maggiori rispetto a quelli permessi dal diagramma di manovra

Se il $\Delta\delta$ non ricade all'interno dell'escursione possibile dell'equilibratore

↳ non sarà possibile raggiungere i limiti del diagramma di manovra

Tale discorso è analogo a quello visto per la manovra di richiamata.
La normativa dunque impone di verificare il raggiungimento dei limiti del diagramma di manovra per:

- la RICHIAMATA → noto il gradiente $\frac{d\delta}{dm}$ e il Δm → si determina il $\Delta\delta$
- la MANOVRA a GRADINO → $\Delta\delta = \frac{\Delta m_{max}}{(\dots)}$

Un'altra verifica che impone la normativa è la seguente:

a seguito di un $\Delta\delta$ determinato da una manovra istantanea, verificare l'attacco coda-fusoliera, dal punto di vista strutturale, a partire dall'$L_{t_{eq}}$.

DINAMICA LATERO-DIREZIONALE

Riprendiamo le tre equazioni che descrivono la dinamica latero-direzionale:

$$\begin{cases} F_y = m(\dot{v} + ru - pw) \\ L = I_x \dot{p} - I_{xz}\dot{r} - I_{xz}pq + (I_z - I_y)qr \\ N = I_z \dot{r} - I_{xz}\dot{p} - I_{xz}qr + (I_y - I_x)pq \end{cases}$$

Linearizzando le equazioni:

$u = u_{eq} + \Delta u$, $v = \underbrace{\cancel{v_{eq}}}_{0} + \Delta v$, $w = w_{eq} + \Delta w$, $p = \Delta p$, $q = \Delta q$, $r = \Delta r$

Ipotizzando Δ piccoli:

$$\begin{cases} F_y = m(\dot{v} - p w_{eq} + r u_{eq}) \\ L = I_x \dot{p} - I_{xz}\dot{r} \\ N = I_z \dot{r} - I_{xz}\dot{p} \end{cases}$$

non ha senso prendere assi vento perché dovremmo calcolare in ogni istante i mom. di inerzia

$\downarrow$

se assi body ≡ assi di stabilità $\Rightarrow w_{eq} = 0$, $u_{eq} = V_{eq}$

Per cui:

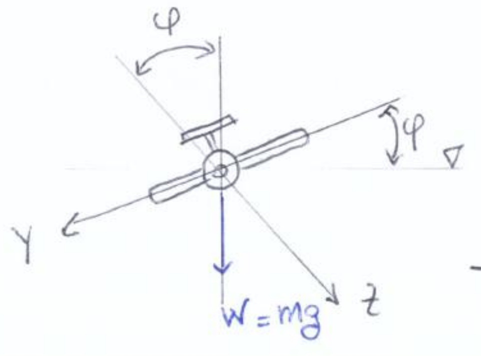
$$\begin{cases} F_y = m(\dot{v} + r V_{eq}) \\ L = I_x \dot{p} - I_{xz}\dot{r} \\ N = I_z \dot{r} - I_{xz}\dot{p} \end{cases}$$

$\rightarrow$ variabili fondamentali: v, p, r

Occorre ora esplicitare i primi membri, ovvero forze esterne e momenti delle forze esterne.

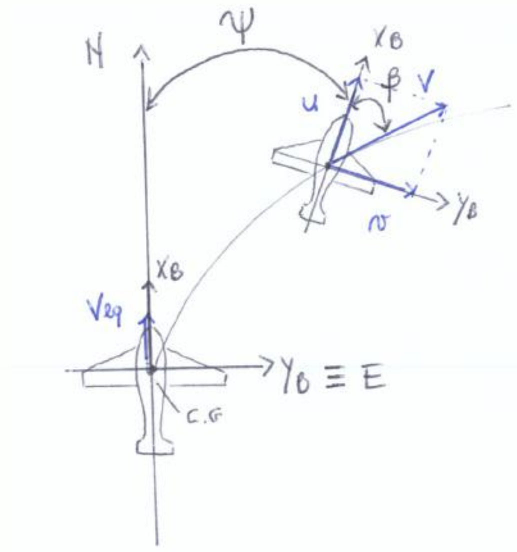
$$F_y = f(v, p, r, ?) = \frac{\partial Y}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial Y}{\partial p} p + \frac{\partial Y}{\partial r} r + ?$$

con Y è indicata la risultante delle forze esterne (aerodinamiche e propulsive) in direzione y.

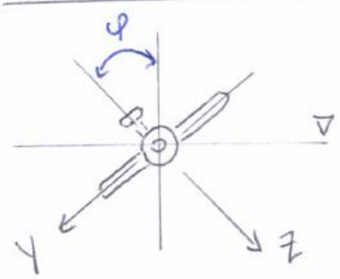


$\rightarrow$ Una componente del peso, $mg \sin\varphi$, va riportata nella direzione y.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 177 di 208



VISTA IN PIANTA



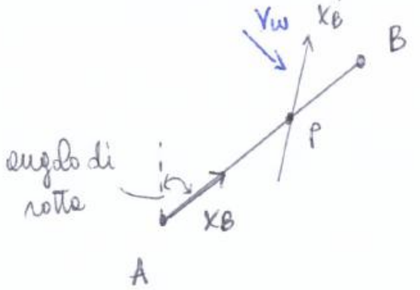
VISTA FRONTALE

• ψ = yaw angle (angolo di imbardata): angolo tra la direzione body iniziale diventata inerziale e coincidente con N e l'asse body x nella condizione generica

• β = sideslip angle (angolo di derapata)

• φ = angolo di sbandamento

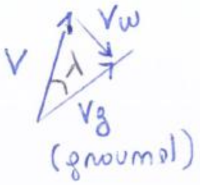
Apriamo una parentesi:



A (senza vento): prua (x_B) $\equiv$ rotta (A-B)

P (con vento): prua (x'_B) $\not\equiv$ rotta (A-B)

Volendo seguire la rotta in presenza di vento V_W, $x_B \to x'_B$ in modo che $\vec{V} + \vec{V}_W = \vec{V}_g$



λ = angolo di deriva (leeway o drift)

V_g deve essere diretta secondo AB

Passando da x_B a x'_B cambia l'angolo ψ, che inizialmente era coincidente con l'angolo di rotta, ma in entrambi i casi $\beta = 0$, perché non c'è nessun angolo tra il vettore velocità $\vec{V}$ (velocità dell'aria) e l'asse body del velivolo

Torniamo ora alle 3 equazioni:

• $\dot{v} = \frac{Y_v}{m} v + \frac{Y_p}{m} p + \left(\frac{Y_r}{m} - V_{eq}\right) r + g\varphi$

• $L_v v + L_p p + L_r r = I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} \rightarrow \dot{p} = \frac{L_v v}{I_x} + \frac{L_p p}{I_x} + \frac{L_r r}{I_x} + \frac{I_{xz}}{I_x} \dot{r}$

• $N_v v + N_p p + N_r r = I_z \dot{r} - I_{xz} \dot{p} \rightarrow \dot{r} = \frac{N_v v}{I_z} + \frac{N_p p}{I_z} + \frac{N_r r}{I_z} + \frac{I_{xz}}{I_z} \dot{p}$

$$c_{mg} = S/b$$

$$c_{ma} = \frac{2}{S}\int_0^{b/2} c^2\,dy$$

Inoltre:

le velocità angolari si adimensionalizz. con la quantità $b/2V_{eq}$

$$\frac{d\varphi}{d\hat{t}} = \frac{d\varphi}{d(t/t^*)} = \frac{d\varphi}{dt}t^* = p\,\frac{c}{2V_{eq}}\cdot\frac{A}{A} = \frac{1}{A}\left(\frac{p\,b}{2V_{eq}}\right) = \frac{1}{A}\hat{p}\quad,\quad \text{con } A = \frac{b}{c_{ma}} \neq \lambda = \frac{b}{c_{mg}}$$

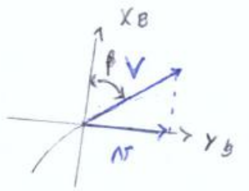
$$\frac{d\psi}{d\hat{t}} = \frac{1}{A}\hat{r}$$

$Y \to C_Y = Y/\tfrac{1}{2}\rho V^2 S$

$L \to C_l = L/\tfrac{1}{2}\rho V^2 S b$ — lunghezza di rif. nel latero direzionale

$N \to C_n = N/\tfrac{1}{2}\rho V^2 S b$

$v \to \hat{v} = v/V_{eq} \simeq \beta$



$v = V\sin\beta \sim V\beta$ se β piccolo

$\dot{\beta} \to \hat{\dot{\beta}} = \dot{\beta}\cdot b/2V_{eq}$

$p \to \hat{p} = p\cdot b/2V_{eq}$

$r \to \hat{r} = r\cdot b/2V_{eq}$

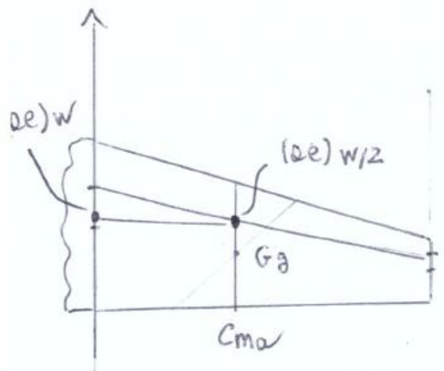
$I_x \to \hat{I}_x = I_x/\rho_{eq} S (b/2)^3$

$I_{xz} \to \hat{I}_{xz} = I_{xz}/\rho_{eq} S (b/2)^3$

$I_z \to \hat{I}_z = I_z/\rho_{eq} S (b/2)^3$

$\rho \to \hat{\rho} = \rho/\rho_{eq}$

Ricordiamo anche che:



- Per ali trapezie, plurtrapezie ed ellittiche (a profilo costante)
  $\Rightarrow (ae)_{w/2}$ giace sulla corda di G_g (baricentro geometrico)
- Per ali trapezie e plurtrapezie
  $\Rightarrow$ la corda di $G_g \equiv$ corda media aerodin. c_{ma}
- Per ali ellittiche $\Rightarrow$ c di $G_g \neq c_{ma}$

DERIVATE AERODINAMICHE NEL LATERO - DIREZIONALE

Derivate	C_Y	C_ℓ	C_n
β	$C_{Y\beta}$ ($C_{L\alpha}$)	$C_{\ell\beta}$ effetto diedro	$C_{n\beta}$ stabilità direzionale ($C_{M\alpha}$)
p	C_{Yp} (C_{Lq})	$C_{\ell p}$ damping derivatives	C_{np} cross derivatives
r	C_{Yr} (C_{Lq})	$C_{\ell r}$ cross derivatives	C_{nr} damping derivatives

- in blu sono evidenziate le correlazioni con il longitudinale
- damping derivatives -> < 0 (C_{Mq})
- cross derivatives: nascita di un momento attorno a un asse per effetto di una velocità angolare attorno a un asse perpendicolare

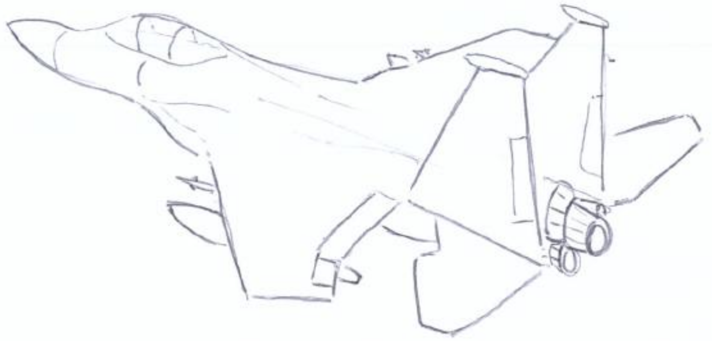
Derivata/nome	causa/effetto	segno	importanza	contributi
$C_{Y\beta}$	angolo β/variaz. di forza secondo y	(-)	medio/bassa	• fusoliera • impennaggio verticale
$C_{\ell\beta}$ EFFETTO DIEDRO	angolo β/variaz. di momento attorno a x	(-)	altissima	• ala: freccia, diedro ala • impennaggio verticale • posizione ala imp. e fusoliera • diversa riduzione delle 2 semiali
$C_{n\beta}$ STABILITÁ DIREZIONALE	angolo β/variaz. di momento attorno a z	(+)	alta	• impennaggio verticale • fusoliera • ala
C_{Yp}	vel. p/variazione di forza secondo y	(-)	bassa	• impennaggio verticale
$C_{\ell p}$ DAMPING DERIVATIVES	vel. p /variazione di momento attorno a x	(-)	media	• ala • imp. verticale • impennaggio orizzontale
C_{np} CROSS DERIVATIVES	vel p /variaz. di momento attorno a z	(-)	media	• ala • impennaggio verticale
C_{Yr}	vel r/variaz. di forza secondo y	(+)	bassa	• impennaggio verticale
$C_{\ell r}$ CROSS DERIVATIVES	vel r/variaz. di momento att. a x	(+)	media	• ala
C_{nr} DAMPING DERIVATIVES	vel r /variaz. di mom. attorno a z	(-)	media	• ala

esempio

IDROCORSA MC-72

$C_{l_{\delta r}} = 0$ perché non c'è braccio rispetto all'asse x_B

F-15 :



$C_{l_{\delta r}}$ molto importante. Togliendo il sistema automatico di controllo dell'F-15, si manovra di più in rollio con il timone rispetto a quanto si ottiene con gli alettoni.

3ª eq) $C_{n_{\delta a}}, C_{n_{\delta r}}$ $\rightarrow$ $C_{n_{\delta r}}$: derivata di manovra del comando direzionale del timone

$C_{n_{\delta a}}$: effetto imbardante (indesiderato) che si ottiene manovrando gli alettoni

In presenza dei comandi, dunque, il sistema dinamico assume la forma :

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} \qquad \text{con } \bar{u} = \begin{Bmatrix} \delta a \\ \delta r \end{Bmatrix}, \quad B \in \mathbb{R}^{5\times 2}$$

In maniera del tutto analoga a quanto visto per la dinamica longitudinale è possibile, per una trasmissione meccanica reversibile, pensare a una dinamica latero-direzionale a comandi liberi.
In tal caso, le variabili $\delta a, \delta r$ non sono imposte dal pilota, ma diventano variabili indipendenti. Allora:

- occorre aggiungere alle equazioni della dinamica scritte i termini contenenti le derivate $C_{Y_{\delta a}}, C_{Y_{\delta r}}, C_{l_{\delta a}}, C_{l_{\delta r}}, C_{n_{\delta a}}, C_{n_{\delta r}}$ moltiplicate per le variazioni angolari delle superfici mobili
- occorre aggiungere 2 nuove equazioni di equilibrio dinamico alla rotazione

Dalla quartica di equazione:

$A_2\lambda^4 + B_2\lambda^3 + C_2\lambda^2 + D_2\lambda + E_2 = 0$
- 4 SOLUZIONI REALI
- $\boxed{\text{2 REALI + 1 COPPIA COMPLESSA CONIUGATA}}$
- 2 COMPL. CONIUGATE

Generalmente, per il latero-direzionale si ottengono 2 soluzioni reali + 1 coppia complessa coniugata

1ª SOLUZIONE REALE - ROLL SUBSIDENCE O ROLL MODE (convergenza di rollio)

- valore negativo e in modulo >> 0 → moto aperiodico molto smorzato
- φ importante
- β, ψ poco importanti

Il vettore velocità V rimane all'incirca nel piano di simmetria e l'asse body x del velivolo rimane sostanzialmente nella direzione del moto indisturbato.

=> Il velivolo sbanda lateralmente e generalmente, poiché il modo è smorzato, la velocità di variazione dell'angolo si annulla rapidamente.
Questo non vuol dire che il velivolo ritorni alle condizioni iniziali, in questo primo momento di risposta dinamica del velivolo esso si porta a un valore di $\varphi \neq 0$.
Il roll-mode può essere studiato mediante una trattazione molto semplificata mediante un'unica equazione di equilibrio dinamico attorno all'asse x

2ª SOLUZIONE REALE - SPIRAL MODE (modo spirale)

- piccolo in modulo e > o < di 0. → moto aperiodico poco smorzato o poco amplificato
- φ, ψ importanti
- β poco importante

Supponendo uno spiral-mode poco instabile, φ continua ad aumentare sovrapponendosi al roll-mode e intanto varia anche ψ, l'angolo tra l'asse body x e la direzione dell'asse body nella situazione iniziale. $\vec{V}$ continua a rimanere all'incirca contenuto nel piano di simmetria.

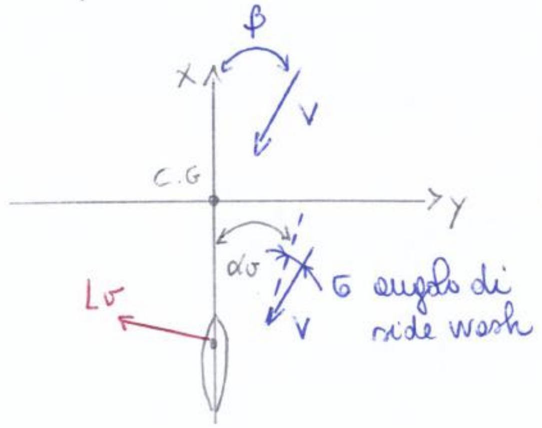
CONTRIBUTO IMPENNAGGIO VERTICALE

$C_v = C_{L_v} \frac{1}{2} \rho V^2 S_v$, con S_v: superficie in pianta impennaggio verticale

$$(C_c)_v = C_{L_v} \frac{S_v}{S}$$

Se si trascura D_v (drag dell'impennaggio verticale) $\Rightarrow (C_y)_v = -C_{L_v} \frac{S_v}{S}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial C_y}{\partial \beta}\right)_v = (C_{y_\beta})_v = -\frac{S_v}{S}\frac{\partial C_{L_v}}{\partial \beta} = -\frac{S_v}{S}\underbrace{\frac{\partial C_{L_v}}{\partial \alpha_v}}_{a_v} \cdot \frac{\partial \alpha_v}{\partial \beta}$$



$\Rightarrow \boxed{\alpha_v = \beta - \sigma}$

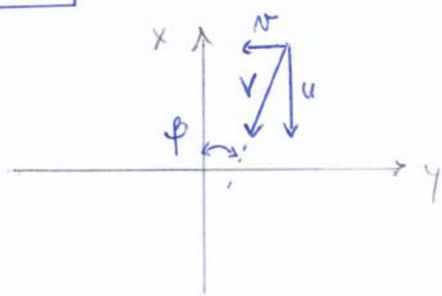
L'angolo di sidewash è generato da vari fenomeni aerodinamici, tra cui la vorticità che si sviluppa attorno all'ala e l'effetto di raddrizzamento dei filetti fluidi imposto dalla fusoliera

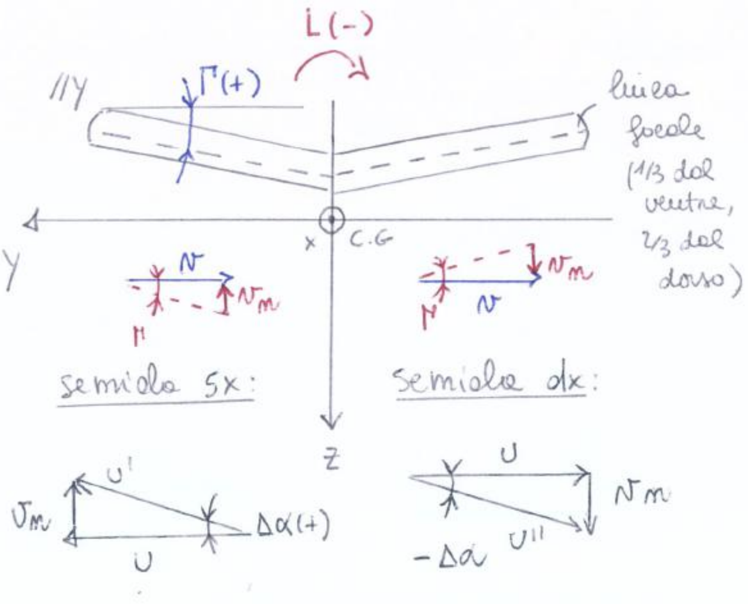
$$\Rightarrow \frac{\partial \alpha_v}{\partial \beta} = 1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} = \text{side wash factor}$$

$\Rightarrow \boxed{(C_{y_\beta})_v = -\frac{S_v}{S} a_v \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right)}$ Per cui, $\boxed{C_{y_\beta} = (C_{y_\beta})_b + (C_{y_\beta})_v} < 0$

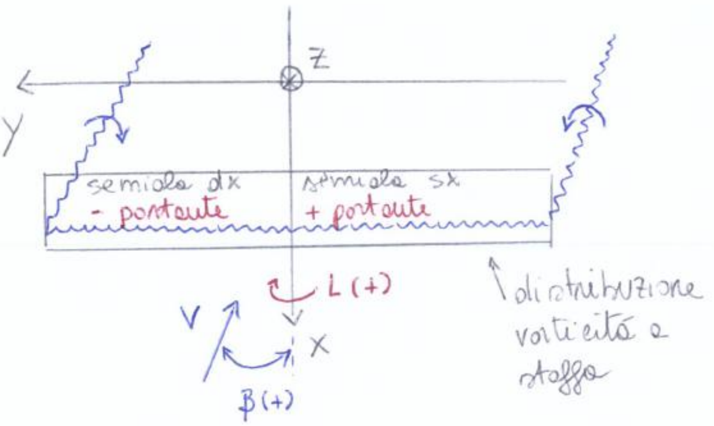
con a_v: coeff. angolare di portanza dell'impennaggio verticale

② $\boxed{C_{l_p}} < 0$ EFFETTO DIEDRO





④ Diversa riduzione delle due semiali

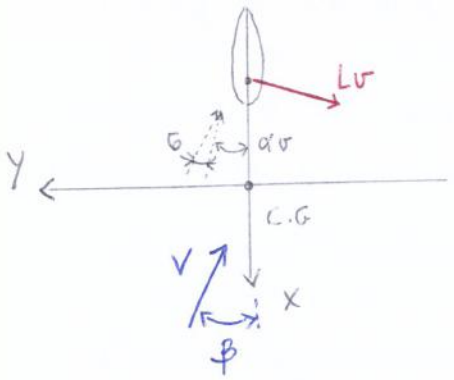


La distribuzione di vorticità e dunque di velocità ridotta farà in modo che su una semiala ci sia un'incidenza inferiore e sull'altra un'incidenza maggiore

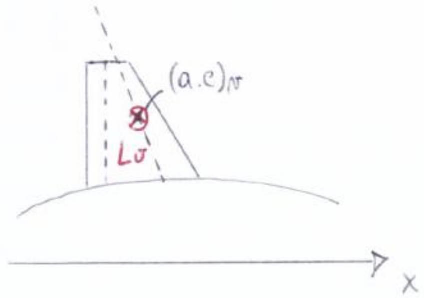
$\Rightarrow L > 0$ (rollio)

$\Rightarrow (C_{\ell_\beta})_4 > 0$ (contributo molto piccolo)

⑤ Impennaggio verticale

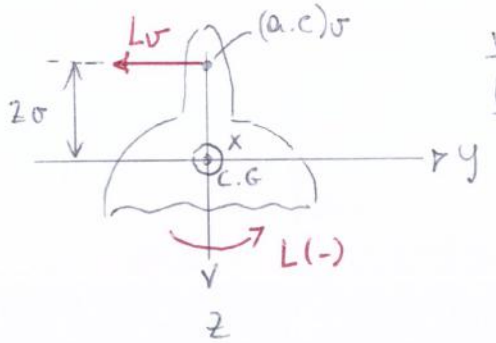


vista in pianta



vista laterale

Se la deriva è trapezoidale, l'(a.c)v giace nel quarto anteriore della corda baricentrica (baricentro geom.)



vista posteriore

↓ roll

$$\Rightarrow \quad L = -L_v \cdot z_v$$

$$L_v = \frac{1}{2}\rho V^2 S_v \, a_v \alpha_v$$

$$\alpha_v = \beta - \sigma \;\rightarrow\; \frac{\partial \alpha_v}{\partial \beta} = 1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}$$

$$\Rightarrow C_\ell = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S b} = -\frac{S_v}{S}\frac{a_v \alpha_v z_v}{b} = -\frac{S_v}{S}\frac{a_v}{b}(\beta - \sigma) z_v$$

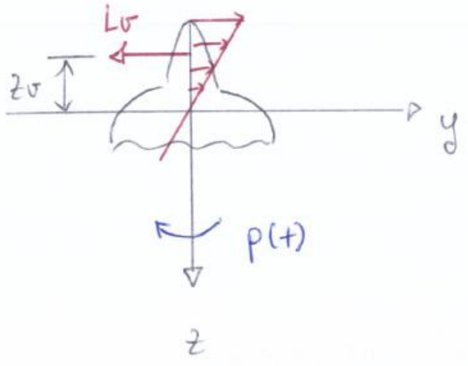
$$\Rightarrow \boxed{(C_{\ell_\beta})_v = -\frac{S_v}{S}\frac{a_v}{b}\left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right) z_v < 0} \quad \Rightarrow \quad < 0 \text{ se } \beta > 0 \,!$$

③ $\boxed{C_{m_\beta}}$ STABILITÀ DIREZIONALE

→ Vogliamo che sia > 0 perché, con un $\beta > 0$, deve svilupparsi un momento imbardante che tende ad annullare il β.

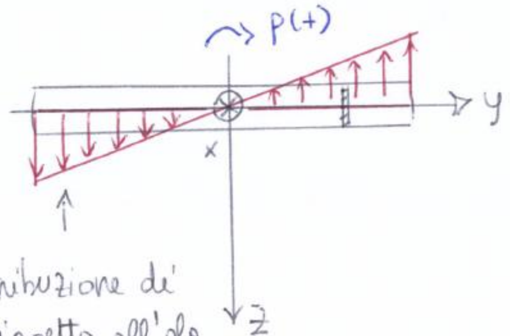
② $\boxed{C_{\ell_p}}$ DERIVATA DI SMORZAMENTO (<0) → per effetto di una velocità di rollio, generalmente si genera un momento di rollio di segno opposto. (non sempre)

① Impennaggio verticale



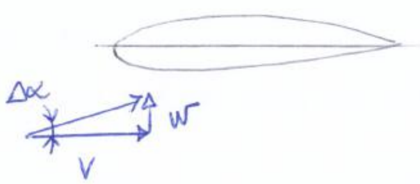
$$\Rightarrow \boxed{L_v \cdot z_v = -\underbrace{(L)_p}_{\text{roll}}}$$

② Contributo dell'ala



distribuzione di w rispetto all'ala per effetto di p

Considerando una generica sezione della semiala di destra, si ha che:



La distribuzione di $\Delta\alpha$ avrà lo stesso andamento della distribuzione di velocità rispetto all'ala.

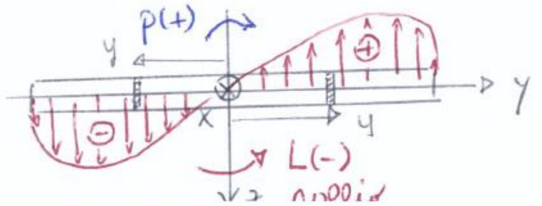
semi-ala dx → si abbassa (con $p>0$)

$\Rightarrow \Delta\alpha > 0 \Rightarrow \Delta L > 0$

Si avrà invece l'opposto nell'altra semi-ala. Possiamo comunque affermare che, alle estremità dell'ala:

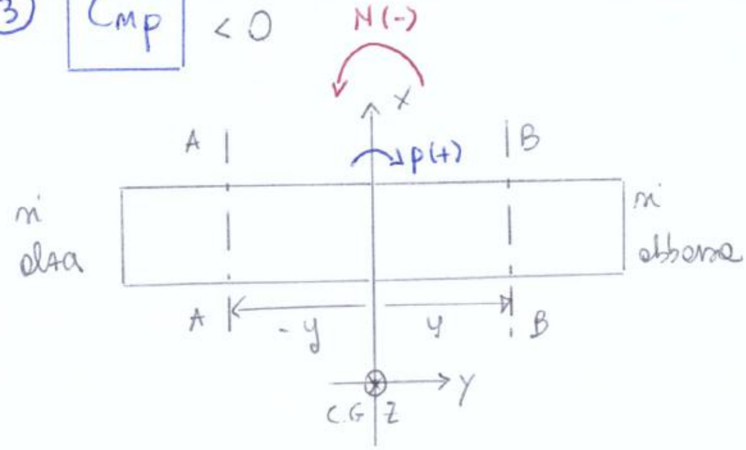
$\Delta\alpha = \pm \frac{pb}{2V}$, dove $w_{estremità} = p\,b/2$ e $\Delta\alpha = w/V$, se $\Delta\alpha$ piccolo

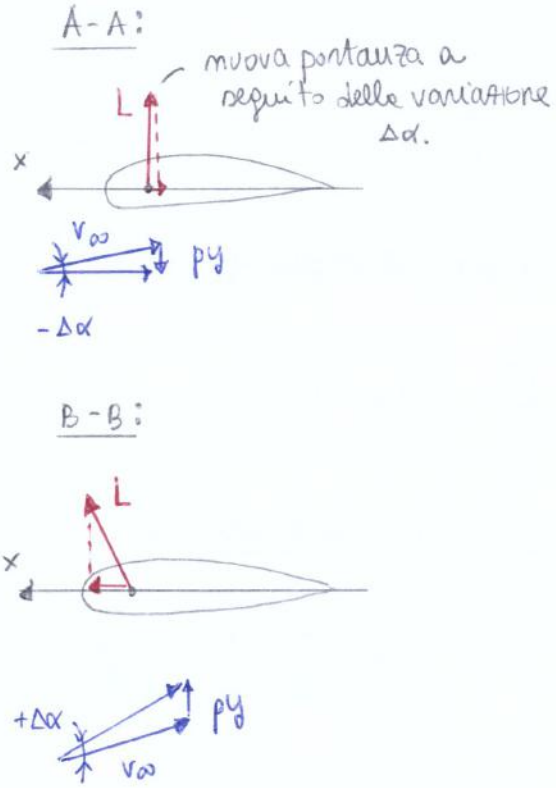
Distribuzione di Lift



Indipendentemente dall'innesco iniziale p, il velivolo accelera angolarmente fino a portarsi a una situazione di equilibrio dinamico in cui p è aumentata.
L'autorotazione può essere l'anticamera della vite. I velivoli che vanno in vite devono presentare caratteristiche di autorotazione.

③ $\boxed{C_{Mp}} < 0$





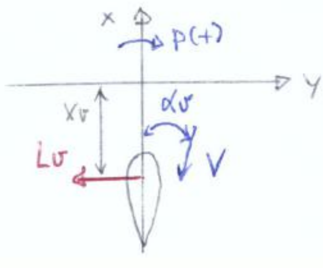
1) Contributo ala

- per L: ↓ N(-) ↑
- per D: ↑ N(+) ↓

Una diminuzione di incidenza comporta una diminuzione di Lift, e dunque di resistenza indotta, e dunque di resistenza.
Tra i due contributi vince di gran lunga quello di L ⇒ $\boxed{C_{Mp} < 0}$

② Contributo impennaggio orizzontale

Per effetto di p(+), nasce sull'impennaggio orizzontale una distribuzione lineare di velocità che, componendosi con la velocità di traslazione, comporta un'inclinazione della velocità di α_v (mediamente) nella vista in pianta.



⇒ L_v in direzione Y negativa — contributo

⇒ $L_v \cdot x_v$ ⇒ $(N_v)_v > 0$ ⇒ $\boxed{(C_{Mp}) > 0}$ — piccolo

Ad esempio, velivolo da trasporto: $\boxed{C_{Mp} = 0.008 - 0.10\, C_{L_{eq}}}$

Sull' impennaggio verticale non si ha solo un $\Delta\alpha_{v1}$, ma:

$$\Delta\alpha_v = \Delta\alpha_{v1} + \Delta\alpha_{v2} = \frac{r\, l_v}{V} + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial r} r\right)_r$$

$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial r} r\right)_r$ -> sidewash factor r, da non confondere con il side wash factor $\left(1-\frac{\partial\sigma}{\partial\beta}\right)$
è dovuto al sistema vorticoso dissimmetrico derivante dalla dissimmetria di portanza per effetto di r

$$\Rightarrow \Delta\alpha_v = \underbrace{\frac{r\, b}{2V}}_{\hat{r}}\left(\frac{2 l_v}{b} + \frac{\partial\sigma}{\partial r}\frac{2V}{b}\right) = \hat{r}\left(\frac{2 l_v}{b} + \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{r}}\right)$$

Per cui, contributo ala + contributo impennaggio verticale => $\boxed{C_{\ell_r} > 0}$

(3) $\boxed{C_{n_r} < 0}$ damping derivatives

(1) Contributo ala -> Drag semiala sx (r+) ↑
Drag semiala dx (r+) ↓ } => $\boxed{(N_r)_{ala} < 0}$

(2) Impennaggio verticale -> $\boxed{L_v \cdot l_v = (N_r) < 0}$

TRATTAZIONE SEMPLIFICATA ROLL-MODE

φ importante

ψ, β non importanti

Possiamo allora immaginare il roll-mode come un moto attorno all' asse di rollio e scrivere dunque un' equazione di equilibrio dinamico attorno ad x:

$$-I_x\dot{p} + L_p p + \underbrace{L_\varphi \varphi}_{=0,\ \text{perché } L_\varphi = 0} = 0 \quad \text{(perché comandi bloccati)}$$

Per il fatto che il velivolo è sbandato, non si generano azioni aerodinamiche e il flusso rimane assial-simmetrico.