



Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2130A-

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Uffreduzzi Francesco

MATERIA: Aerodinamica - Prof. Arina

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

AERODINAMICA - INTRODUZIONE

Nello studio delle materie occorre definire preliminarmente un MODELLO DI FLUIDO da adottare.

Un fluido ha le seguenti caratteristiche:

- SI ADEGUA A QUALUNQUE FORMA STATICA SENZA TENSIONI INTERNE
- NON OPPONE RESISTENZA ALLA DEFORMAZIONE MA LA OPPONE AL MOVIMENTO
- CONTINUA A FLUIRE PER TUTTO IL TEMPO IN CUI AGISCONO AZIONI DINAMICHE (FORZE, PRESSIONI, ...)
- PUÒ TRASMETTERE AL SUO INTERNO PRESSIONI DA UN PUNTO A UN ALTRO
- PUÒ SVILUPPARE AL SUO INTERNO SFORZI VISCOSI
- È TERMICAMENTE CONDUCIBILE
- SOTTO OPPORTUNE CONDIZIONI PUÒ DIVENIRE COMPRESSIBILE

Non prendiamo in considerazione fluidi estremamente rarefatti, tali per cui la distanza media tra le molecole (libero cammino medio) è paragonabile alla dimensione caratteristica del fenomeno in esame.

In genere quindi, nei fluidi considerati, $Km = \frac{l}{L} \ll 1$

\leftarrow libero cammino medio
 \leftarrow dim. caratteristica fenomeno

$Km = m^\circ$ di Knudsen

Definiamo PARTICELLA FLUIDA un volume elementare di fluido avente dimensioni:

- Sufficientemente grandi da contenere al suo interno un n° di molecole tali per cui è possibile definire QUANTITÀ MEDIE STATISTICHE. (pressione, temperatura, densità...)
- Sufficientemente piccole da poter assumere tali proprietà medie COSTANTI entro di esso.

Le forze a cui è sottoposta la particella fluida sono:

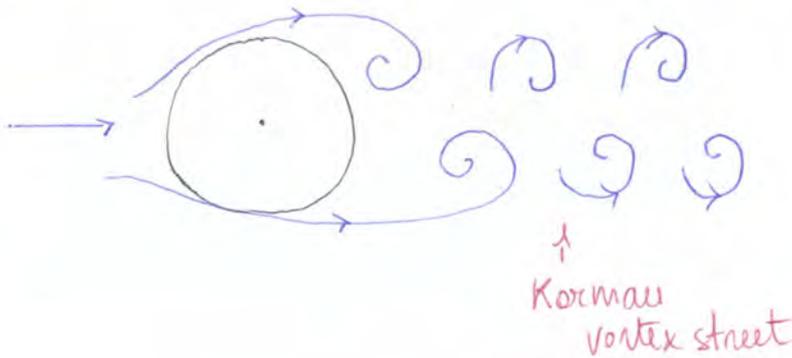
- FORZE DI PRESSIONE: esistono sia se la particella è in moto sia se è ferma
- FORZE DI ATRITO: esistono solo se c'è moto relativo
- FORZE DI GRAVITÀ: derivanti dalla presenza di un campo gravitazionale

Re ≤ 40



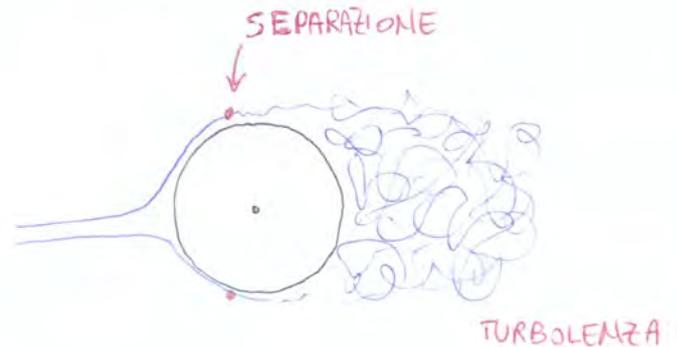
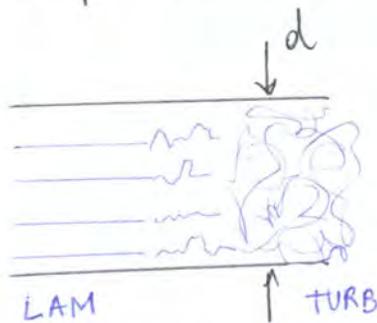
Si creano due zone di ricambio caratterizzate da due vortici controrotanti che hanno una posizione fissa nel tempo. Al crescere del Re i vortici si allungano per molti diametri a valle e cominciano ad oscillare alle minime perturbazioni.

Re > 40



Si genera una serie non stazionaria nota come SCIA DI VON KÁRMÁN.

Al crescere del Re, si giunge a un Re critico per cui si ha il passaggio da moto laminare a moto turbolento. Ciò è facilmente osservabile nel caso di fluido in un condotto, ma vale anche per il caso del cilindro.

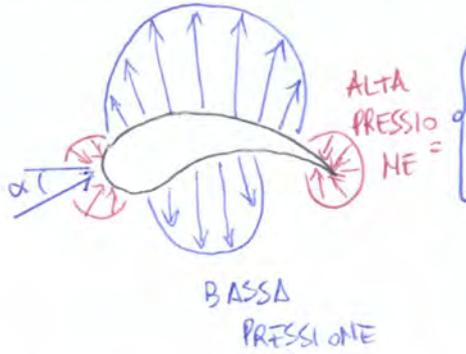


Re aumenta →

Nel caso di un profilo alare rivestito da un fluido con una determinata viscosità, le particelle seguono e contornano bene il corpo anche ad elevati Re.



Nel caso del cilindro abbiamo una grandissima resistenza di forma. Vediamo come succede nel caso di un profilo alare:



- RESISTENZA DI FORMA RIDOTTA AL MINIMO
- SBILANCIAMENTO VERTICALE FORZE DI PRESSIONE
↳ PORTANZA

Come succede cambiando l'incidenza del profilo?



All'aumentare dell'incidenza aumenta la portanza, ma le correnti si separano sempre più e più in avanti. Quando la separazione interesserà quasi la totalità del dorso del corpo si genera un fenomeno di STALLO, caratterizzato da fenomeni non stazionari.

PARADOSSO DI D'ALEMBERT

Perché avviene e che fare con Re molto alti e $Re = \frac{F_{im}}{F_{visc}}$, si potrebbe pensare di trascurare le forze viscosse, e fatto che la velocità si potrà soddisfare la condizione che le particelle non penetrino nel corpo → VELOCITÀ TANGENTE AL CORPO



Per base a queste ipotesi si può affermare che SU QUALUNQUE CORPO NON AGISCONO SCAMBI DI FORZE, NÉ PORTANZA, NÉ RESISTENZA, poiché non ci sono equilibri di pressione in direzione verticale e orizzontale.
(PARADOSSO DI D'ALEMBERT)

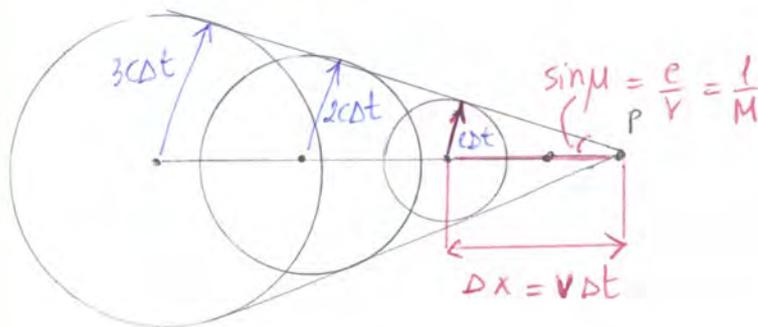
Per $v < c$ le sfere non si intersecano, e la perturbazione si propaga, dopo un opportuno tempo di percorrenza, ogni punto dello spazio.



CASO $v > c$ REGIME SUPERSONICO $\rightarrow M > 1$

Nel caso in cui la sorgente si muova con velocità $v > c$, le sfere si intersecano e la perturbazione si propaga solo ai punti che giacciono all'interno del cono con vertice in P, con parallelo alla velocità v e angolo 2μ , con

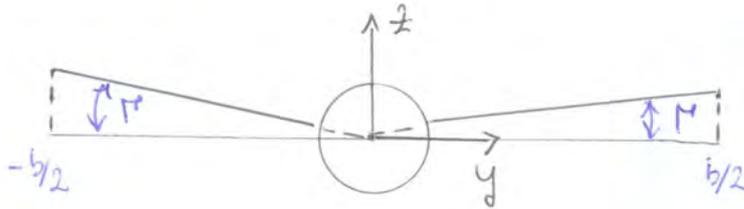
$\sin \mu = \frac{c}{v} = \frac{1}{M}$. L'angolo μ è detto ANGOLO DI MACH e la regione compresa tra le superfici tangenti alle sfere è detta CONO DI MACH



Da queste analisi è evidente che un flusso supersonico ha un comportamento fisico completamente diverso da quello di un flusso subsonico. Tale fatto si ritrova nelle equazioni che governano il moto del fluido e che il valore del numero di Mach, maggiore o minore di 1, cambia le forme matematiche

Osservando l'ala di fronte, si vede che le semiali non giacciono sul piano $z=0$, ma sono leggermente inclinate di un angolo Γ .

l'angolo Γ è detto ANGOLO DIEDRO.



Prendendo come riferimento la corda l_0 , l'asse x è parallelo ad essa.

È lungo l'apertura alare le corde delle altre sezioni risultano ruotate rispetto a l_0 , l'ala è SVERGOLATA.

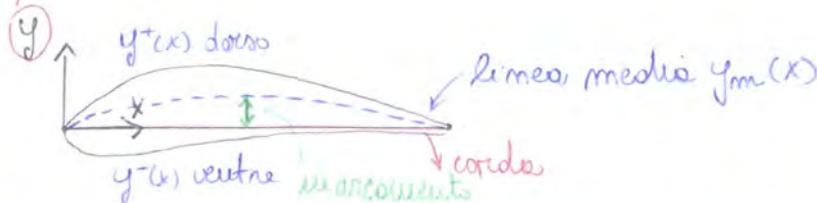


l'angolo formato tra la corda e la direzione del moto V_∞ è l'incidenza geometrica α .

nel caso di ala svergolata, l'incidenza geometrica è variabile lungo l'apertura alare: $\alpha = \alpha(y)$.

Analizziamo ora il profilo alare:

→ sarebbe z , ma in $2D$ sostituiamo con y .



la CORDA è il segmento che unisce i centri dei cerchi di curvatura ai bordi di attacco e di fuga.

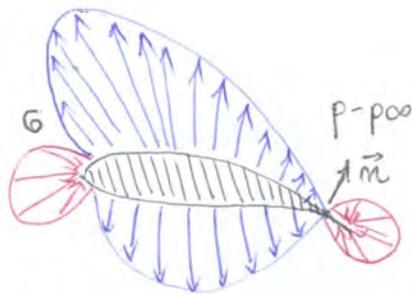
la forma del profilo è determinata fornendo, in funzione delle coordinate x lungo la corda, le coordinate del dorso $y+(x)$ e del ventre $y-(x)$.

la LINEA MEDIA del profilo è definita come: $y_m(x) = \frac{1}{2} (y+(x) + y-(x))$

l'altezza massima della linea media rispetto alla corda è detto INARCAMENTO DEL PROFILO. Nel caso di inarcamento nullo, la linea media coincide con la corda e si ha un profilo simmetrico.

CALCOLO PORTANZA, RESISTENZA, MOMENTO DI BECCHEGGIO NOTA LA DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE

Setta p_{∞} la pressione della corrente indisturbata, un tipico andamento della pressione relativa $p - p_{\infty}$ su un profilo alare è riportato in figura:



G = superficie, per unità di profondità, che delimita il profilo alare

\vec{m} = normale uscente delle superfici

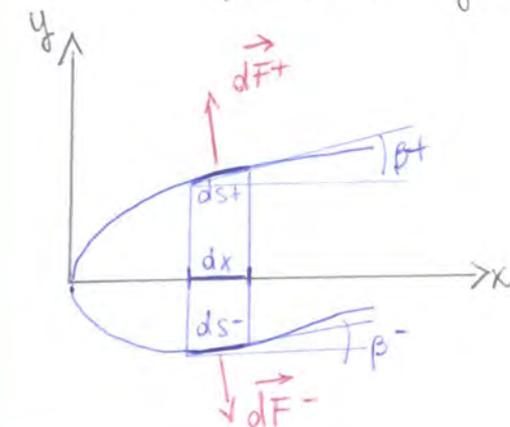
Nota la distribuzione di pressione sul dorso e sul ventre, è possibile calcolare la forza R che agisce su un tratto di ala di profondità unitaria:

$$\vec{R} = \oint_G p \cdot \vec{n} dG = - \oint_G (p - p_{\infty}) \cdot \vec{m} dG - \oint_G p_{\infty} \cdot \vec{m} dG$$

$\rightarrow = 0$

la pressione è positiva se preme

Entriamo più in dettaglio:



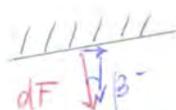
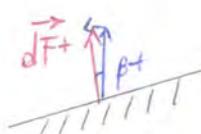
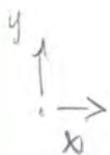
Sugli elementini ds^+ , ds^- , agisce una forza $d\vec{F}$ pari a:

$$d\vec{F}^{\pm} = -(p^{\pm} - p_{\infty}) \cdot \vec{m} ds^{\pm}$$

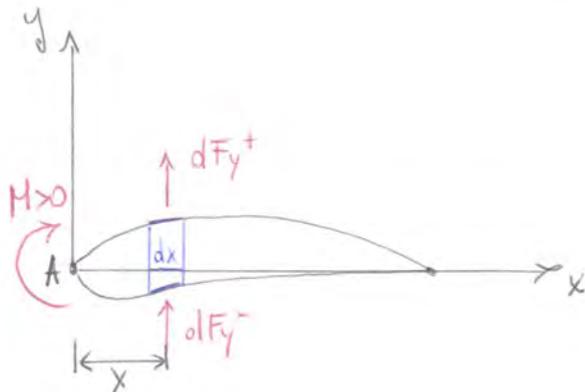
Proiettiamo lungo gli assi le componenti della forza $d\vec{F}^+$, $d\vec{F}^-$:

$$\begin{cases} dF_x^+ = -dF^+ \sin \beta^+ = (p^+ - p_{\infty}) \sin \beta^+ ds^+ \\ dF_y^+ = dF^+ \cos \beta^+ = -(p^+ - p_{\infty}) \cos \beta^+ ds^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} dF_x^- = dF^- \sin \beta^- = -(p^- - p_{\infty}) \sin \beta^- ds^- \\ dF_y^- = -dF^- \cos \beta^- = (p^- - p_{\infty}) \cos \beta^- ds^- \end{cases}$$



Indolemente, è possibile calcolare il momento risultante rispetto a un punto della corda, dovuto alle forze dF^\pm agenti sugli elementini ds^\pm .
 In base alle considerazioni precedenti e osservando che lo spessore del profilo alare è molto inferiore alla lunghezza della corda, possiamo trascurare il contributo delle componenti dF_x^\pm , in quanto sia i moduli che i bracci sono di gran lunga inferiori rispetto a quelli lungo y .



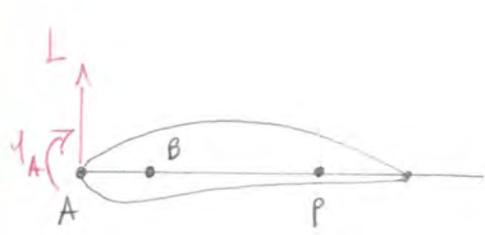
$$dM_A = -(dF_y^+ + dF_y^-)x =$$

$$= [(p^+ - p^\infty) - (p^- - p^\infty)]x$$

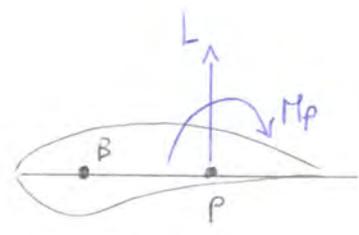
Quindi:

$$M_A = \int_0^l [(p^+ - p^\infty) - (p^- - p^\infty)]x dx$$

osserviamo che la risultante di un sistema piano di forze può essere ridotta parallelamente e se stesso ed essere applicata ad un generico punto, purché si consideri anche il corrispondente momento aggiuntivo
ad esempio:



$$M_B = M_A + L \cdot x_B \quad \text{TRASPOSIZIONE MOMENTI}$$



$$M_B = M_P - L(x_P - x_B)$$

ciò che $M_B = M_A + L x_B = M_P - L(x_P - x_B)$, segue che:

$$M_P = M_A + L x_P$$

FORMA ADIMENSIONALE DI FORZE E MOMENTI

cerchiamo di ragionare in termini "adimensionali".
 Per questo ricordiamo il TEOREMA DI BUCKINGHAM:

"Una funzione di n variabili fisiche, che descrive un determinato fenomeno, può essere riformulata in $(n-p)$ parametri adimensionali $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p$, dove p è il numero di dimensioni fondamentali".

Nel nostro caso:

$p = 4 =$ massa, lunghezza, tempo, temperatura

$\rightarrow n - 4$ parametri adimensionali

supponiamo allora che la forza su di un corpo dipende dai seguenti fattori:

$$F = f(\text{geom}, l, v, \rho, T, P, \epsilon, \mu, k, T_w, g)$$

\downarrow
 sia forma dell'ala
 sia α , incidenza
 sia β , angolo di
 subordato

\downarrow
 energia
 interna

possiamo affermare che, per una geometria fissa, investita da una corrente a una data incidenza, la dipendenza funzionale può essere espressa in una forma polinomiale del tipo:

$$F \sim l^a v^b \rho^c T^d p^e \epsilon^f \mu^g k^h T_w^i g^j$$

nel punto di vista dimensionale, deve essere:

$$[kg \cdot m \cdot s^{-2}] = [m]^a [ms^{-1}]^b [kg \cdot m^{-3}]^c [K]^d [kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}]^e [ms^{-2}]^f [kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]^g$$

$$[kg \cdot m \cdot K^{-1} \cdot s^{-3}]^h [K]^i [ms^{-2}]^j$$

Per omogeneità dimensionale, otteniamo 4 equazioni in 10 incognite:

(M) $1 = a + b + \dots$

(T) $0 = d - h + i$

(g) $1 = c + e + \dots$

(S) $-2 = -b - 2e + \dots$

In campo aerodinamico, per un dato corpo e gas, i numeri fissati α e Pr , trascurando gli effetti della gravità e considerando $T - T_w$ molto piccola, dalle lezioni precedenti è possibile definire:

• COEFFICIENTE di PORTANZA: $C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S} = f_L(\alpha, \beta, Re, M)$
 $\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S \rightarrow$ superficie dove

• COEFFICIENTE di RESISTENZA: $C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S} = f_D(\alpha, \beta, Re, M)$

• COEFFICIENTE di MOMENTO FOCALE: $C_{M_0} = \frac{M_0}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S l} = f_{M_0}(\alpha, \beta, Re, M)$

nel caso di un profilo dove, in geometria bidimensionale, la superficie di riferimento può essere espressa come $S = l \times 1$.

Le relazioni precedenti diventano allora:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 l} = f_L(\alpha, \beta, Re, M)$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 l} = f_D(\alpha, \beta, Re, M)$$

$$C_{M_0} = \frac{M_0}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 l^2} = f_{M_0}(\alpha, \beta, Re, M)$$

nel nostro studio di fluidi a bassa velocità, supponiamo $\rho = \text{cost.}$ come comporta ciò?

ovvero $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$, se $\rho = \text{cost} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial s} = 0$
 $c \rightarrow \infty$
 $M \rightarrow 0$

Inoltre, nel fluido ideale
 inviscido

$\mu \rightarrow 0$

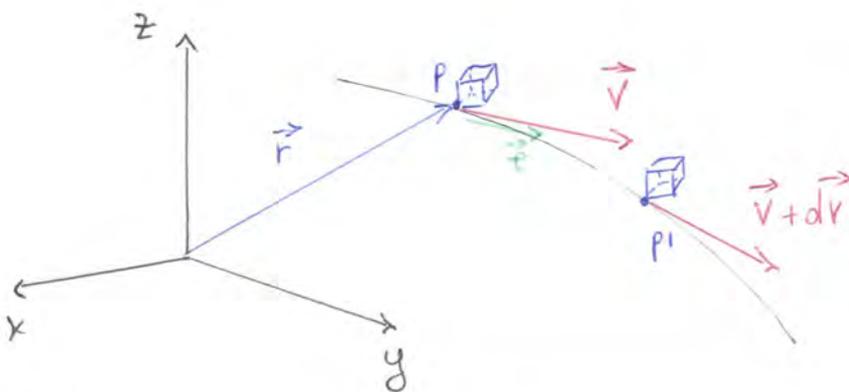
DESCRIZIONE DEL MOTO FLUIDO

Lo scopo dell'Aerodinamica è quello di determinare i campi scalari e vettoriali che descrivono il comportamento degli elementi fluidi come soluzione delle equazioni del moto fluido, mediante di equazioni differenziali ottenute applicando i principi di conservazione della massa, delle quantità di moto e dell'energia totale.

Per la descrizione del moto e la relativa formulazione delle equazioni del moto, si hanno due possibili metodi:

- ① METODO LAGRANGIANO → descrive l'evoluzione di ogni singola particella fluida
- ② METODO EULERIANO → descrive l'andamento dei campi di velocità, pressione, temperatura, densità e le altre variabili come funzioni (x, t) .

Entriamo più nel dettaglio:



Per definire completamente il movimento di una particella fluida, si consideri il vettore velocità:

$$\vec{v}(\vec{r}) = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$$

Pomponolo:

$d\vec{s} = ds \vec{e} = \vec{v} dt$ l'incremento infinitesimo di \vec{r} lungo la direzione \vec{e} , la variazione del vettore \vec{v} lungo la direzione \vec{e} è espressa da:

$$d\vec{v} = du \vec{i} + dv \vec{j} + dw \vec{k}$$

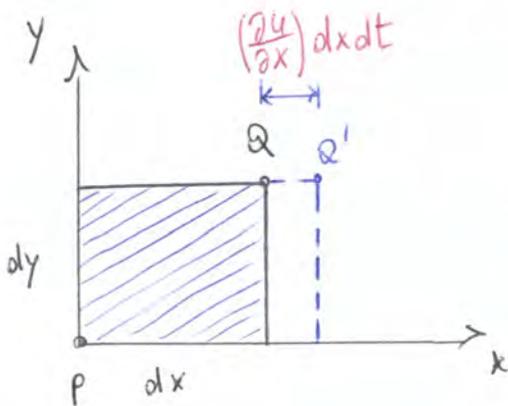
$$\nabla \vec{V} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}}_D + \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}}_B$$

Analizziamo il tenore D:

Esso è simmetrico, quindi si hanno 6 termini indipendenti che rappresentano le velocità di deformazione dell'elemento fluido.

TERMINI SULLA DIAGONALE

Consideriamo l'elemento fluido individuato dal parallelepipedo con P e Q come vertici:



Supponiamo di prendere $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$.

Il parallelepipedo viene distorto in estensione e il termine $\frac{\partial u}{\partial x}$ rappresenta la VELOCITÀ di ALLUNGAMENTO PER UNITÀ di LUNGHEZZA, nella direzione dell'asse x.

Analogamente, i termini $\frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial w}{\partial z}$ rappresentano le velocità di deformazione lungo le direzioni y e z.

L'azione simultanea dei tre termini in diagonale causa una variazione del volume $d\Omega = dx dy dz$ a una velocità relativa:

$$\Delta \dot{\Omega} = \frac{1}{dt} \left[\left(dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt \right) \left(dy + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) dy dt \right) \left(dz + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) dz dt \right) - d\Omega \right] =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\Omega + \dots \text{termini di ordine superiore}$$

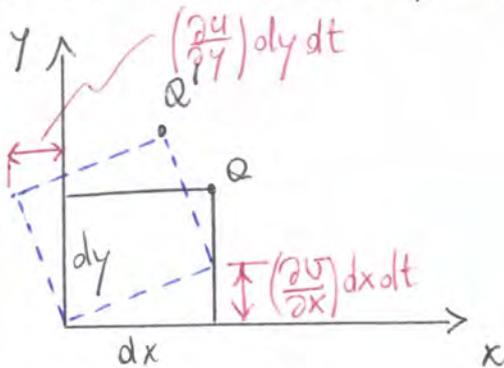
La somma dei termini in diagonale, la TRACCIA di D, rappresenta la DIVERGENZA di \vec{V}

Analizziamo il tenore B:

In questo caso, gli elementi del tenore rappresentano delle rotazioni rigide attorno agli assi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, (se) $-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$, $-\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$,

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Considerando per esempio il caso in cui $-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$, l'elemento è soggetto a rotazione rigida attorno all'asse \vec{k} , con velocità angolare $(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})$, senza variazione di forma.



$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} > 0 \right)$$

Come è possibile osservare, il tenore B ha solamente tre componenti indipendenti che possiamo essere interpretate come componenti di un vettore \vec{b} tale che:

$$\left. \begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \vec{j} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \vec{k} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\vec{b} = \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{v})} \quad (\vec{b} = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{v}))$$

Da tali considerazioni, risulta che il vettore \vec{b} , e quindi il tenore B, è una misura delle velocità di rotazione dell'elemento.

Consideriamo l'elemento fluido come un corpo rigido in rotazione attorno all'asse z , ad esempio, con velocità angolare ω . Considerando un punto P dell'elemento, esso si muoverà con velocità $\vec{v} = v\vec{e}$ descrivendo una traiettoria circolare in un piano perpendicolare all'asse di rotazione, con centro nell'

LINEE DI CORRENTE, TRAIETTORIE

- TRAIETTORIA: curva descritta dall'elemento fluido durante il suo movimento che si ottiene specificando la posizione e la velocità dell'elemento fluido in funzione del tempo.

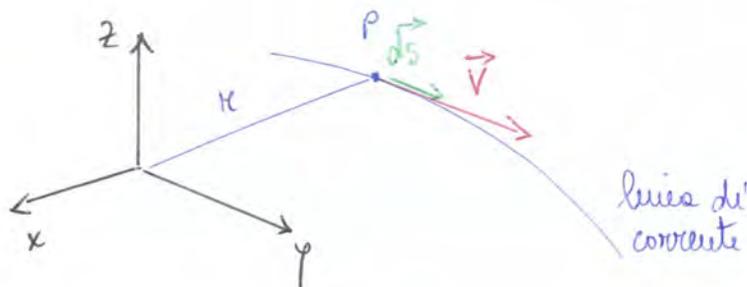
$$\frac{d\vec{x}_p}{dt} = \vec{u}(\vec{x}_p, t), \text{ con } \vec{x}_p(t_0) = \vec{x}_{p_0} \text{ (posizione iniziale)}$$
- LINEA di CORRENTE: curva che ad un certo istante risulta tangente in ogni suo punto al vettore velocità in quel punto e in quell'istante.

Le linee di corrente è definite da:

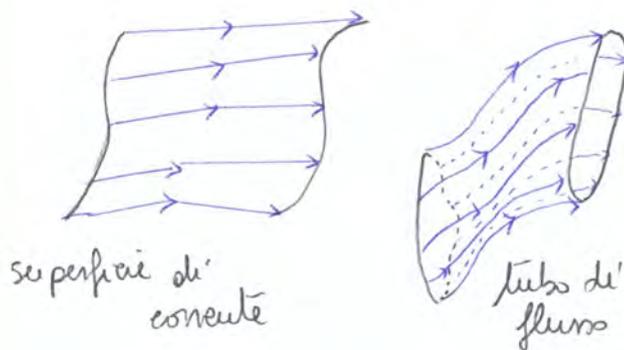
$$\vec{ds}(\vec{r}, t) \wedge \vec{v}(\vec{r}, t) = 0$$

con $ds = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$
 $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

$$\hookrightarrow ds \parallel \text{al vettore } \vec{v}(\vec{r}, t)$$



Nel caso di moto stazionario, le linee di corrente coincidono con le traiettorie mentre ciò non è vero nel caso non stazionario. Le linee di corrente variano nel tempo e le particelle si trovano e seguono, istante per istante, le linee di corrente presenti in un certo istante temporale, una linea nello spazio e disegnano le linee di corrente passanti per tale linea, si individua la SUPERFICIE di CORRENTE e, se la linea è chiusa, si individua un TUBO di FLUSSO.



Le traiettorie e le linee di corrente NON SONO INVARIANTI rispetto al sistema di riferimento scelto.

Per capire questo concetto, serviamoci di un esempio.

l'accelerazione e le altre variabili fluidodinamiche α , come pressione e densità,

$$Q = Q[\vec{r}(\vec{r}_p, t), t].$$

L'applicazione di tale descrizione risulta però spesso molto complessa.

La descrizione EULERIANA analizza invece l'evoluzione temporale delle variabili fluidodinamiche, quali velocità, pressione, densità, in ogni punto del dominio interessato dal moto del fluido.

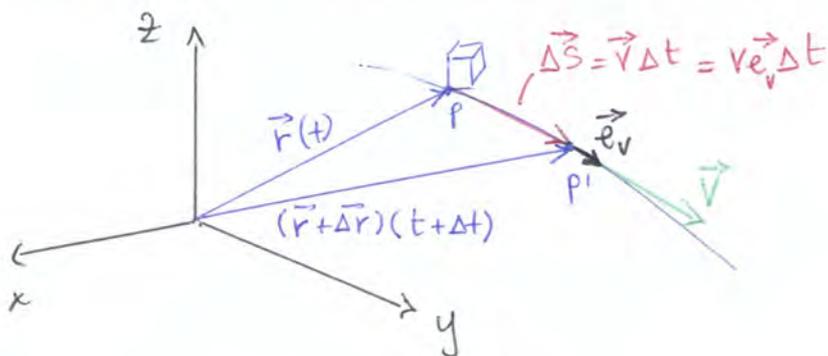
La variabile dipendente Q è scritta in funzione delle variabili indipendenti tempo t e posizione \vec{r} :

$$Q = Q(\vec{r}, t).$$

In questo caso, Q rappresenta un campo scalare o vettoriale.

Le due descrizioni non sono scorrelate. Nella descrizione euleriana, ad un certo istante, le variabili in ogni punto sono implicitamente associate con quelle corrispondenti alle particelle che si trovano nelle corrispondenti posizioni per quel dato istante.

Determiniamo il legame tra le due descrizioni:



Sia $Q(\vec{r}, t)$ una variabile indipendente fluidodinamica associata alla posizione \vec{r} all'istante t .

Dopo un tempo Δt , l'elemento si sarà spostato di uno spazio $\Delta \vec{S} = \vec{v} \Delta t$ lungo la sua traiettoria. La variabile Q prenderà il valore relativo alla nuova posizione $Q(\vec{r} + \vec{v} \Delta t, t + \Delta t)$.

La variazione di Q per l'elemento fluido sarà:

$$\Delta Q = Q(\vec{r} + \vec{v} \Delta t, t + \Delta t) - Q(\vec{r}, t)$$

Per $\Delta t \rightarrow 0$ si ha:

SFORZI NEL FLUIDO

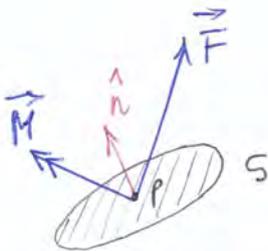
Il fluido è sottoposto a forze che agiscono attraverso di esso, dette forze di campo, come la gravità, la forza elettromagnetica, ecc...

Esse sono dovute ad azioni esterne al fluido e sono forze con campo di azione lungo.

Ad esse, occorre aggiungere le forze interne o superficiali, che hanno campo di azione corto e agiscono attraverso una superficie che è immaginata separare internamente il fluido.

Supponiamo di isolare un volume τ di fluido, racchiuso da una superficie σ , e di considerare le azioni delle parti di fluido rimanenti su tale porzione.

Sia S una superficie piana passante per il punto P , che identifica la faccia positiva della porzione di fluido considerata, da cui esce il vettore normale \hat{n} .



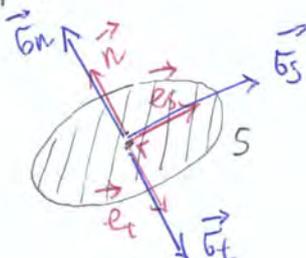
Il resto del fluido sulle facce positive, esercita una forza \vec{F} e un momento \vec{M} sulla superficie stessa.

Per $S \rightarrow 0$, sia $\vec{F} \rightarrow 0$ che $\vec{M} \rightarrow 0$, ma poiché \vec{F} è proporzionale all'area otteniamo che:

$$\vec{\sigma} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{S}$$

SFORZO NEL PUNTO P

Essendo un vettore, esso può essere scomposto in una componente normale alla superficie e in due componenti mutuamente ortogonali, tangenti alla superficie S .



$$\vec{\sigma} = \sigma_n \vec{n} + \sigma_s \vec{e}_s + \sigma_t \vec{e}_t$$

FLUIDO IN QUIETE

È possibile verificare, sia teoricamente che sperimentalmente, che in un fluido in quiete non si hanno sforzi tangenziali.

In ogni punto di un fluido in quiete, il vettore degli sforzi è sempre perpendicolare ad ogni superficie:

$$\vec{\sigma} = \sigma \vec{n}$$

Il tensore degli sforzi, quindi, diventerà:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \Pi_{ij} = \sigma_{ii} \delta_{ij}, \text{ con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Le considerazioni di equilibrio statico ne conseguono che, quando $\vec{\sigma}$ è sempre ortogonale a qualunque direzione, la sua intensità è la stessa su tutte le superfici elementari passanti per il punto P:

$$\vec{\sigma} = \sigma \vec{n} \Rightarrow \sigma = \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$$

Poiché in un fluido gli sforzi normali possono essere solamente di carattere compressivo:

$$\vec{\sigma} = -p \vec{n} \quad \text{dove } -p \rightarrow \text{PRESSIONE IDROSTATICA, coincide con la pressione termodinamica, poiché in esse si considerano solo casi in cui il fluido è in equilibrio e quindi necessariamente in quiete.}$$

Allora:

$$\Pi = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \Rightarrow \Pi_{ij} = -p \delta_{ij}$$

Perché si dimostra inoltre che τ è funzione lineare del gradiente di velocità $\nabla \vec{v}$, la relazione precedente può essere espressa nella forma:

$$\tau_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}$$

con A_{ijkl} tensore di ordine 4 delle viscosità che dipende dallo stato locale del fluido

Nel caso di un materiale isotropo, tale relazione diventa:

$$\tau = 2\mu D + \lambda (\nabla \cdot \vec{v}) \mathbf{I}$$

$$\Rightarrow \tau_{ij} = 2\mu D_{ij} + \lambda D_{kk} \delta_{ij}$$

↓
valore per fluidi Newtoniani

dove $D_{kk} =$ somma termini diag. del tensore D , la traccia $\text{tr } D$.

$$\begin{aligned} \text{tr } D = \nabla \cdot \vec{v} &\Rightarrow D_{kk} = \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

I coefficienti λ e μ dipendono dallo stato locale del fluido.

La relazione scritta sopra, in componenti cartesiane, diviene:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

↓
coeff. di viscosità

, con μ, λ dipendenti dallo stato locale del fluido

Analizziamo il coefficiente λ :

esso non interviene nei FLUIDI INCOMPRESSIBILI, per i quali $\nabla \cdot \vec{v} = 0$
 È importante invece per i FLUIDI COMPRESSIBILI ($\nabla \cdot \vec{v} \neq 0$)

Dalla definizione della parte non isotropa del tensore degli sforzi, abbiamo che:

$$\begin{aligned} \sum_i \tau_{ii} = 0 &\rightarrow 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ &+ 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \rightarrow \boxed{(2\mu + 3\lambda) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)} \end{aligned}$$

Da ciò si ricava che:

$$2\mu + 3\lambda = 0$$

o

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

IPOTESI DI STOKES

In questo modo, si correla il coefficiente λ al coefficiente μ .

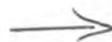
Prima di procedere oltre, cercando di comprendere il significato di λ , ricapitoliamo alcuni concetti:

FLUIDO IN QUIETE



solo sforzo normale
isotropo e omogeneo
con la pressione

FLUIDO IN MOTO (non rigido)

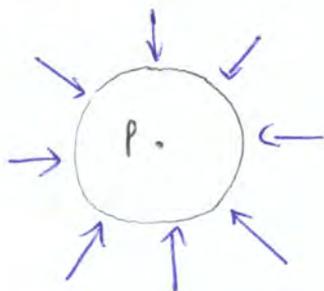


pressione + sforzi
viscosi normali e
tangenziali

Come si applica quindi l'ipotesi di Stokes?

Per esempio, consideriamo un caso in cui non sono coinvolti flussi viscosi di taglio.

Consideriamo una sfera centrata nel punto P soggetta a uno sforzo normale uniforme.



• ASSENZA MOVIMENTO

→ sforzo medio coincidente con pressione termodinamica.

$$\Pi = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\sigma} = -p$$

• PRESENZA DI MOTO

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(-p + \\ &+ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \cdot \nabla \cdot \vec{v} - p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \cdot \nabla \cdot \vec{v} - p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \cdot \nabla \cdot \vec{v}) = \\ &= -p + \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right) \nabla \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

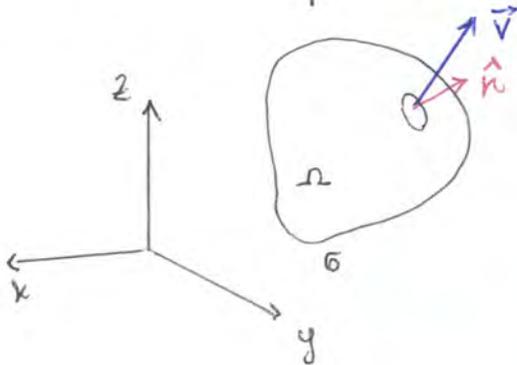
LEGGI DI CONSERVAZIONE

Conservazione significa che la variazione di una proprietà intensiva del fluido, cioè associata alle singole particelle, all'interno di un volume specificato, è dovuta al contributo delle sorgenti della quantità, interne al volume di controllo e al bilancio netto tra flusso in ingresso e quello in uscita della quantità, imputabili al movimento del fluido stesso.

Le leggi di conservazione definiscono quindi il tasso di variazione di una quantità conservativa durante l'evoluzione delle correnti.

Legge di conservazione scalare

Sia Q una variabile scalare per cui vale il principio di Conservazione. Indichiamo con q la variabile Q per unità di volume.



Per un volume Ω fisso nello spazio, la variazione nell'unità di tempo di Q è:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} q \, d\Omega.$$

Il FLUSSO $\underline{f}(q, \underline{v})$ è la quantità di q che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo, per effetto delle velocità del fluido \underline{v} .

$$\ominus \int_{\sigma} \underline{f}(q, \underline{v}) \cdot \underline{n} \, d\sigma = - \int_{\sigma} \underline{f}(q, \underline{v}) \cdot \underline{n} \, d\sigma$$

↳ definisce il flusso positivo quando esso è entrante in Ω .

Il bilancio netto di flusso si ottiene integrando su tutta la superficie σ :

$$- \oint_{\sigma} \underline{f}(q, \underline{v}) \cdot \underline{n} \, d\sigma.$$

Il contributo delle sorgenti si divide in due parti:

- le sorgenti volumiche q_v , all'interno del volume di controllo
- le sorgenti superficiali q_s distribuite sulla superficie σ .

CONSERVAZIONE DELLA MASSA → la massa non si crea e non si distrugge

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = - \oint_{\partial\Omega} \rho \underline{v} \cdot \underline{n} d\sigma \quad \text{formula integrale}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \underline{v}) d\Omega$$

prendo Ω arbitrario:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad \text{equazione di continuità}$$

Svolgendo le divergenze del prodotto: $\nabla \cdot (f \underline{A}) = \nabla f \cdot \underline{A} + f \nabla \cdot \underline{A}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{ma} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \rho = \frac{D\rho}{Dt}, \text{ allora}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \underline{v} \quad \text{equazione di continuità in forma lagrangiana}$$

Se il secondo membro è $\neq 0$, dovendosi conservare la massa, *varia la densità*.

- se il volume aumenta ($\nabla \cdot \underline{v} > 0$) $\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} < 0$, la densità diminuisce
- se il volume diminuisce ($\nabla \cdot \underline{v} < 0$) $\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} > 0$, la densità aumenta

CONSERVAZIONE QUANTITÀ DI MOTO

forze di campo per unità di volume

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \underline{v} d\Omega = - \oint_{\partial\Omega} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma + \oint_{\partial\Omega} \underline{\Pi} \cdot \underline{n} d\sigma + \int_{\Omega} \rho \underline{f} d\Omega \quad \text{formula integrale}$$

"Le variazioni delle quantità di moto è uguale alle risultanti delle forze applicate."

forze superficiali rappresentate dal tensore degli sforzi.

EQUAZIONE ENERGIA MECCANICA

Moltiplichiamo scalarmente per \underline{v} l'equazione di conservazione della quantità di moto:

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}} + \rho \underline{f}$$

$$\rho \underline{v} \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}) = -\nabla p \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) + \rho \underline{f} \cdot \underline{v}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \rho \underline{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\nabla p \cdot \underline{v} + \underbrace{\underline{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}})}_{\substack{\text{diff. sforzi viscosi su dati opposti} \\ \text{elemento}}} + \rho \underline{f} \cdot \underline{v}$$

il lavoro di energia cinetica per unità di massa

La variazione temporale e convettiva, di energia cinetica, è dovuta al lavoro nell'unità di tempo delle forze di pressione $-\nabla p \cdot \underline{v}$, degli sforzi viscosi $\underline{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}})$ e delle forze di campo $\rho \underline{f} \cdot \underline{v}$.

CONSERVAZIONE ENERGIA → l'energia non si crea né si distrugge

Definiamo energia totale per unità di massa la quantità:

$$E = \underbrace{(\mathcal{E})}_{\substack{\downarrow \\ \text{energia} \\ \text{interna}}} + \frac{v^2}{2}$$

Allora:

flusso di energia
lavoro forze di superficie per u.d.t
lavoro forze di volume per unità di tempo

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho E d\Omega = - \oint_{\sigma} \rho E (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma + \oint_{\sigma} (\underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{n} d\sigma + \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega +$$

$$- \oint_{\sigma} \underline{q} \cdot \underline{n} d\sigma + \int_{\Omega} Q_v d\Omega$$

flussi superficiali calore
 Sorgenti di calore volumiche

Im forma differenziale:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \underline{v}) = \nabla \cdot (\underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{v}) + \rho \underline{f} \cdot \underline{v} - \nabla \cdot (\underline{q}) + Q_v$$

- il lavoro delle forze di pressione $[-\nabla \cdot (p \underline{v})]$ può essere scomposto in due contributi:

$$-\nabla \cdot (p \underline{v}) = \underbrace{-\underline{v} \cdot \nabla p}_{(1)} - \underbrace{p (\nabla \cdot \underline{v})}_{(2)}$$

- ① $-\underline{v} \cdot \nabla p$ è il lavoro meccanico del gradiente delle pressioni che accelera/decelera il fluido senza variarne il volume.
- ② $-p (\nabla \cdot \underline{v})$ è dovuto all'azione della pressione durante una variazione di volume, lavoro reversibile di compressione/espansione che contribuisce a variare l'energia interna del fluido senza variare la velocità.

- il contributo degli sforzi viscosi è dovuto a due azioni:

$$\nabla \cdot (\underline{\tau} \cdot \underline{v}) = \underbrace{\underline{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\tau})}_{(1)} + \underbrace{(\underline{\tau} \cdot \nabla) \cdot \underline{v}}_{(2)}$$

- ① $\underline{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\tau})$ è associato alle differenze degli sforzi viscosi su lati opposti dell'elemento e contribuisce alla variazione di energia cinetica.
- ② $(\underline{\tau} \cdot \nabla) \cdot \underline{v}$ è associato alle differenze di velocità sulle facce dell'elemento e rappresenta il lavoro fatto per deformare l'elemento senza variare la velocità.

Il termine $\phi = \int (\underline{\tau} \cdot \nabla) \cdot \underline{v}$ è denominato FUNZIONE DI DISSIPAZIONE e rappresenta la dissipazione di energia meccanica per unità di massa per effetto delle viscosità.

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\underline{w}}{\rho} \right) = \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\underline{w}}{\rho} \right) + \underline{v} \cdot \nabla \left(\frac{\underline{w}}{\rho} \right) \right] = \underline{w} \cdot \nabla \underline{v} - \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \left(\frac{\nabla \cdot \underline{\tau}}{\rho} \right) + \nabla \times \underline{f}$$

EQUAZIONE DEL TRASPORTO DELLA VORTICITÀ

① il termine $\underline{w} \cdot \nabla \underline{v}$ è detto "VORTEX STRETCHING" ed è responsabile dell'azione di stiramento dei vortici.

Se moto bidimensionale $\Rightarrow \underline{w}$ perpendicolare al piano del moto $\Rightarrow \underline{w} \cdot \nabla \underline{v} = 0$

② il termine $-\frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}$ crea o distrugge vorticità. È un termine importante in meteorologia.

• Se $\rho = \text{cost} \Rightarrow \nabla \rho = 0$ e il termine si annulla

• Se il flusso è BAROTROPICO, $p = p(\rho) \Rightarrow \nabla p$ e $\nabla \rho$ allineati, il prodotto vettoriale è nullo e il termine si annulla

③ il termine $\nabla \times \left(\frac{\nabla \cdot \underline{\tau}}{\rho} \right)$ diffonde vorticità per effetto degli sforzi viscosi

④ il termine $\nabla \times \underline{f}$ indica la produzione di vorticità per effetto di un campo di forze.

Se \underline{f} conservativo $\Rightarrow \underline{f} = \nabla \phi \Rightarrow \nabla \times (\nabla \phi) = 0$ per definizione

$$* \frac{\partial \underline{w}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{w} = \underline{w} \cdot \nabla \underline{v} + \frac{\underline{w}}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \rho \right) - \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \left(\frac{\nabla \cdot \underline{\tau}}{\rho} \right) + \nabla \times \underline{f}$$

$$\frac{\partial \underline{w}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{w} - \frac{\underline{w}}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \rho \right) = \underline{w} \cdot \nabla \underline{v} - \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \left(\frac{\nabla \cdot \underline{\tau}}{\rho} \right) + \nabla \times \underline{f}$$

$$\frac{\partial \underline{w}}{\partial t} - \frac{\underline{w}}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{w} - \frac{\underline{w}}{\rho} \underline{v} \cdot \nabla \rho = \dots$$

$$\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{w}}{\partial t} - \frac{\underline{w}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} (\underline{v} \cdot \nabla \underline{w}) - \frac{\underline{w}}{\rho^2} \underline{v} \cdot \nabla \rho \right) = \dots$$

$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\underline{w}}{\rho} \right)$

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\underline{w}}{\rho} \right) + \underline{v} \cdot \nabla \left(\frac{\underline{w}}{\rho} \right) \right] = \dots \Rightarrow \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\underline{w}}{\rho} \right) + \underline{v} \cdot \nabla \left(\frac{\underline{w}}{\rho} \right) \right] = \dots$$

Per brevità di scrittura e per effettuare più comodamente i calcoli, è meglio utilizzare la notazione indiciale. Vediamo con qualche esempio come usarla:

• Per prima cosa, poiché lavoriamo in tre dimensioni, si sottointende che gli indici numerano i valori 1, 2 e 3.

Gli indici ripetuti indicano sommatorie

Un indice non ripetuto si dice libero

Vediamo alcuni esempi:

$$\bullet a_i b_i = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\bullet a_{4k} b_{ik} = a_{41} b_{i1} + a_{42} b_{i2} + a_{43} b_{i3} = a_{41} b_{i1} + a_{42} b_{i2} + a_{43} b_{i3} + a_{41} b_{21} + a_{42} b_{22} + a_{43} b_{23} + a_{41} b_{31} + a_{42} b_{32} + a_{43} b_{33}$$

$$\bullet \nabla = e_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\bullet \underline{v} \cdot \underline{w} = v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

Le equazioni di NAVER-STOKES, in notazione indiciale, diventano:

$$\bullet \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0$$

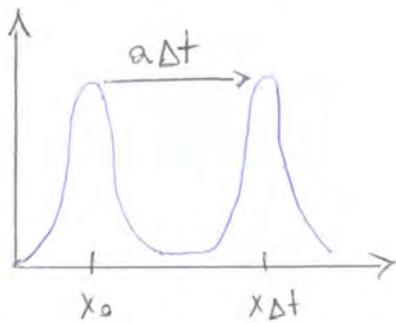
$$\bullet \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right]$$

$$\bullet \rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} + u_j \frac{\partial E}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) + \rho \Phi + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + Q_V$$

Nel caso di fluidi INVISIDI, i termini evidenziati in rosso non compaiono, poiché $\mu, \nu = 0$.

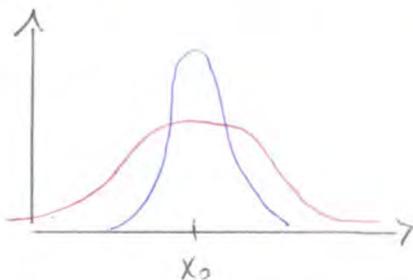
↳ si giunge allora alle EQUAZIONI DI EULERO

- Nel caso in cui $\mu = 0 \rightarrow$ lavora SOLO OPERATORE CONVETTIVO



Il segnale si mantiene uguale e se stesso. Subisce solo una traslazione rigida

- Nel caso in cui $a = b = 0 \rightarrow$ lavora SOLO OPERATORE DIFFUSIVO



Dopo un tempo Δt il segnale si è diluito, sottraendolo sempre lo stesso area

Sommando i due effetti:



In generale, le derivate disperse sono legate alla convezione, quelle pari alla diffusione

La forma in cui è riconducibile l'equazione di conservazione della quantità in moto presenta due non linearità:

- 1) non linearità legata al termine convettivo, poiché i coefficienti accanto alle derivate dipendono dalla soluzione.

Nel nostro caso:

$$\begin{aligned} a &= u \\ b &= v \end{aligned} \Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{tale non linearità è lieve}$$

- 2) non linearità legata al termine diffusivo, poiché ci sono delle derivate seconde. Tale non linearità diventa importante solo ad alte velocità, quando l'effetto non può essere trascurato. Mai possiamo trascurare tale termine

3) DEFINIRE LE CONDIZIONI AL CONTORNO LUNGO LE FRONTIERE DEL DOMINIO DI CALCOLO. In relazione al tipo di frontiera, si hanno diversi tipi di condizione al contorno:

i) CONDIZIONE IN CAMPO LONTANO: nel caso di una corrente uniforme che investe uno o più corpi, lungo una frontiera posta distante dai corpi, la soluzione deve rappresentare la corrente indisturbata ad una distanza infinita e la condizione deve specificare i valori della velocità e della pressione della corrente indisturbata



ii) CONDIZIONE LUNGO LA PARETE SOLIDA: in questo caso la corrente è delimitata dalla presenza di una parete impermeabile, senza portata di fluido attraverso di essa. Allora in ogni punto della parete e ad ogni istante, deve essere rispettata la condizione di tangenza.



$$\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$$

EQUAZIONE DI BERNOULLI

In quanto visto ad ora detto:

- $\nabla \cdot \underline{v} = 0$
- $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \underline{v} \times \underline{\omega} = -\nabla \frac{p}{\rho}$

Ipotezzando:

- FLUIDO STAZIONARIO ($\partial/\partial t = 0$)
- FLUIDO INVISCIDO
- $\rho = \text{cost}$

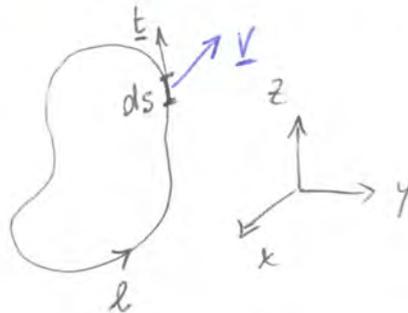
l'eq. delle quantità di moto sarà:

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - \underline{v} \times \underline{\omega} = 0$$

CIRCUITAZIONE, TEOREMI DI HELMHOLTZ E KELVIN

Definiamo circuizione del campo di velocità l'integrale lungo la linea chiusa l , con ds un elemento infinitesimo della curva.

$$\Gamma = \oint_l \underline{v} \cdot \underline{ds} = \oint_l \underline{v} \cdot \underline{t} ds$$



Per il teorema di Stokes:

$$\Gamma = \oint_l \underline{v} \cdot \underline{t} ds = \int_{\sigma} (\nabla \times \underline{v}) \cdot \underline{n} d\sigma = \int_{\sigma} \underline{\omega} \cdot \underline{n} d\sigma$$

La circuizione attorno ad una curva chiusa l , è uguale al flusso di vorticità attraverso ogni superficie che ha la linea l come contorno. Tale linea deve essere orientata in modo che, percorrendo idealmente l nella faccia di σ da cui esce il versore normale, si vedano i punti di σ nella propria sinistra.

Considerando una superficie infinitesima $d\sigma$ in un generico punto P , delimitata dalla linea chiusa dl , vale la relazione puntuale:

$$d\Gamma = \oint_{dl} \underline{v} \cdot \underline{t} ds = \underline{\omega} \cdot \underline{n} d\sigma$$



TEOREMA DI HELMHOLTZ

Analizziamo e studiamo l'evoluzione della circuizione, considerando una linea materiale chiusa, cioè una linea costituita sempre dalle stesse particelle anche nel tempo.

Se l la linea all'istante t e Γ la circuizione associata ad essa, dopo un intervallo di tempo Δt , la linea si sposta e assume una nuova forma l_1 , con circuizione Γ_1 .

Perciò:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_L \frac{D}{Dt} (\underline{v} \cdot d\underline{s}) = \oint_L \frac{D\underline{v}}{Dt} \cdot d\underline{s} = - \oint_L \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\underline{s}$$

- Se $\rho = \text{cost}$ (fluido incompressibile) $\Rightarrow \oint_L \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\underline{s} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = 0}$
- Se $p = p(\rho)$ (fluido barotropico) $\Rightarrow \oint_L \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\underline{s} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = 0}$

In entrambi i casi, otteniamo:

$$\boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = 0}$$

nel caso di correnti fluide ideali, la variazione lagrangiana della circolazione attorno a ogni curva materiale è nulla e, in assenza di forze di campo, il fluido è BAROTROPICO.
 Il fluido incompressibile, infatti, è un caso particolare di fluido barotropico.

poiché $\Gamma = \oint_L \underline{v} \cdot d\underline{s} = \oint_G (\nabla \times \underline{v}) \cdot \underline{n} d\sigma = \int_G \underline{\omega} \cdot \underline{n} d\sigma$

Allora:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \iff \boxed{\frac{D}{Dt} \left(\int_G \underline{\omega} \cdot \underline{n} d\sigma \right) = 0}$$

il flusso di vorticità attraverso ogni superficie limitata da una linea chiusa materiale, rimane costante nel tempo durante il moto della linea.

In un fluido in quiete o in moto uniforme la circolazione attorno ad ogni circuito è nulla.

→ OGNI CORRENTE DI UN FLUIDO BAROTROPICO ORIGINATA DA UNO STATO DI QUIETE O DA UNA CORRENTE UNIFORME È IRROTAZIONALE

La soluzione di tale equazione dipende solo dalle condizioni al contorno istantanee, che per il caso di una corrente irrotazionale, in termini della funzione potenziale, sono:

1) Condizione in campo lontano: nel caso di una corrente stazionaria uniforme che investe un corpo solido, la velocità in campo lontano deve essere uguale alla velocità della corrente uniforme:

$$\nabla\phi = \underline{v}_\infty$$

2) Condizione lungo la parete solida: la condizione di tangenza si esprime come:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi \cdot \underline{n} = \underline{v}_{\text{parete}} \cdot \underline{n} = 0 \rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$$

PROBLEMA DI NEUMANN

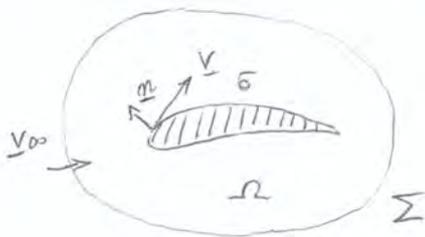
Il problema della corrente irrotazionale di un fluido ideale è ricondotto alla soluzione dell'equazione di Laplace $\nabla^2\phi = 0$, in un dominio Ω esterno a una superficie chiusa σ , con una condizione al tipo:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = f(r, t) \text{ sulla superficie } \sigma.$$

all'infinito, considerando una sfera Σ di raggio r ,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial\phi}{\partial r} \sim \frac{1}{r^m}, \text{ con } m=3 \text{ per correnti tridimensionali}$$

$$m=2 \text{ per correnti bidimensionali}$$



Tale problema è detto problema esterno di Neumann per l'equazione di Laplace.

La funzione potenziale ϕ , in questa soluzione dell'eq. di Laplace, è una funzione armonica e lo sono anche le sue derivate spaziali, cioè le componenti delle velocità.

equazione di Laplace sono i massimi nel bordo del dominio (anche i minimi).

poiché $\nabla\phi = \underline{v}$, allora, applicando la relazione pnc. ad ogni componente di \underline{v} :

$$\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial v^2}{\partial n} d\sigma = \oint_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot \underline{\frac{\partial v}{\partial n}} d\sigma = \int_{\partial\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |\nabla w|^2] d\sigma > 0$$

Il massimo della velocità è localizzato sul contorno ∂ del dominio

Inoltre, dal teorema di Bernoulli:

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial n} d\sigma = \oint_{\partial\Omega} \nabla p \cdot \underline{n} d\sigma = - \frac{\rho}{2} \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial v^2}{\partial n} d\sigma < 0$$

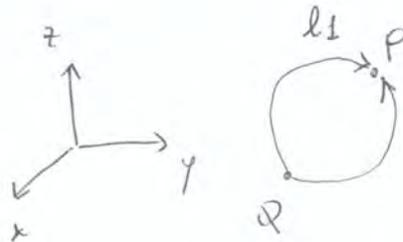
$$p = -\frac{1}{2} \rho v^2$$

minimi di p saranno sul contorno ∂ del dominio e, per un massimo di \underline{v} avrà un minimo di p e viceversa.

ovviamente inoltre che:

$$\gamma = \oint_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot \underline{n} d\sigma = 0$$

Qui ogni punto



allora:

$$\gamma = \oint_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_{\mathcal{R}_{l_1}}^P \underline{v} \cdot d\underline{s} - \int_{\mathcal{R}_{l_2}}^P \underline{v} \cdot d\underline{s} = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{R}_{l_1}}^P \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_{\mathcal{R}_{l_2}}^P \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

poiché $\underline{v} \cdot d\underline{s} = \nabla\phi \cdot d\underline{s} = d\phi$,

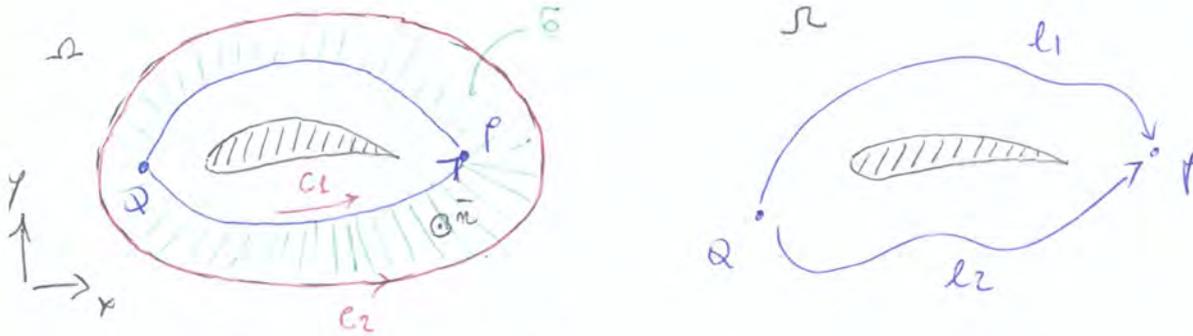
$$\int_{\mathcal{R}_{l_1}}^P d\phi = \int_{\mathcal{R}_{l_2}}^P d\phi \Rightarrow [\phi(P) - \phi(Q)]_{l_1} = [\phi(P) - \phi(Q)]_{l_2}$$

e $\phi(Q)_{l_1} = \phi(Q)_{l_2} \Rightarrow \phi(P)_{l_1} = \phi(P)_{l_2}$

ella corrente irrotazionale, in una regione SEMPLICEMENTE CONNESSA, la funzione potenziale e il valore singolo e l'integrale $\int_{\mathcal{R}}^P \underline{v} \cdot d\underline{s} = \phi_P - \phi_Q$

DOMINIO DOPPIAMENTE CONNESSO

In una regione Ω doppiamente connessa vi sono due traiettorie non riconducibili, cioè che non possono essere fatte coincidere mediante una variazione continua senza uscire dal dominio, ed un circuito riconducibile.



Inoltre nel caso di domini doppiamente connessi, la funzione ϕ , e le sue derivate, non presentano massimi o minimi all'interno del dominio Ω , ed il massimo delle velocità e il minimo della pressione vengono raggiunti sul contorno Γ del dominio.

e il circuito c_1 non è riducibile, non è possibile trovare una superficie delimitata solo dal circuito c_1 e non è possibile applicare il teorema di Stokes.

Però, individuando un altro circuito, anch'esso riconducibile, c_2 , è possibile affermare che:

$$\Gamma = \oint_{c_1} \underline{v} \cdot d\underline{s} - \oint_{c_2} \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_{\Gamma} \underline{\omega} \cdot \underline{n} d\sigma = 0 \quad \text{con } \underline{m} \text{ positiva se uscente dal piano } xy$$

non è orientata positivamente

allora:

$$\boxed{\oint_{c_1} \underline{v} \cdot d\underline{s} = \oint_{c_2} \underline{v} \cdot d\underline{s} = \Gamma}$$

la circolazione attorno a due circuiti riconducibili assume lo stesso valore

precisò, siano $P, Q \in \Omega$ e l_1, l_2 due traiettorie non riducibili:

$$\Gamma = \int_{Q, l_2}^P d\phi - \int_{Q, l_1}^P d\phi = [\phi(P) - \phi(Q)]_{l_2} - [\phi(P) - \phi(Q)]_{l_1}$$

Dell'identità di Green:

$$\int_{\Omega} |\nabla(\phi_1 - \phi_2)|^2 d\Omega = \int_{\Sigma} (\phi_1 - \phi_2) \frac{\partial}{\partial n} (\phi_1 - \phi_2) dS - \int_{BC} (\phi_1 - \phi_2) \frac{\partial}{\partial n_1} (\phi_1 - \phi_2) dS +$$

$$- \int_{\Sigma_0} (\phi_1 - \phi_2) \frac{\partial}{\partial n} (\phi_1 - \phi_2) dS + \int_{DA} (\phi_1 - \phi_2) \frac{\partial}{\partial n_1} (\phi_1 - \phi_2) dS$$

Allora, poiché sulla bocciera $(\phi_1 - \phi_2)_{BC} \neq (\phi_1 - \phi_2)_{DA}$ $\left[\frac{\partial}{\partial n_1} (\phi_1 - \phi_2) \right]_{BC} = \left[\frac{\partial}{\partial n_1} (\phi_1 - \phi_2) \right]_{DA}$

$$\int_{\Omega} |\nabla(\phi_1 - \phi_2)|^2 d\Omega = \int_{\text{bocciera}} \left\{ [(\phi_1)_{DA} - (\phi_1)_{BC}] - [(\phi_2)_{DA} - (\phi_2)_{BC}] \right\} \frac{\partial}{\partial n_1} (\phi_1 - \phi_2) dS$$

Il salto di potenziale attraverso la bocciera è uguale alle circuitazione attorno ad un circuito irriducibile.

Possiamo allora:

$$\begin{aligned} (\phi_1)_{DA} - (\phi_1)_{BC} &= \Gamma_1^1 \\ (\phi_2)_{DA} - (\phi_2)_{BC} &= \Gamma_2^1 \end{aligned} \Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla(\phi_1 - \phi_2)|^2 d\Omega = (\Gamma_1^1 - \Gamma_2^1) \int_{\text{bocciera}} \frac{\partial}{\partial n_1} (\phi_1 - \phi_2) dS$$

In questo caso, le due soluzioni ϕ_1 e ϕ_2 sono uguali; e meno di una costante, solo se $\Gamma_1^1 = \Gamma_2^1$. La soluzione del problema esterno di Neumann è univocamente determinato solo se si specifica la circuitazione Γ^1 o valori differenti di Γ^1 si hanno soluzioni differenti.

La soluzione è quindi unica solo se la circuitazione Γ^1 attorno ad un circuito irriducibile è specificata.

ENERGIA CINETICA

Considerate le correnti indotte da un corpo in movimento attraverso un fluido in quiete in un volume illimitato, l'energia cinetica T_{K_0} del fluido sarà:

$$T_{K_0} = \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} (\nabla \phi)^2 d\Omega, \text{ poiché } v = \nabla \phi$$

Punti importanti del capitolo:

• BERNOULLI

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \cdot \underline{t} - \underbrace{(\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{t}}_0 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = 0 \rightarrow \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{cost} = H_B$$

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = \nabla H_B = \underline{v} \times \underline{w}$$

La quantità $p + \frac{\rho v^2}{2}$ è costante lungo una linea di corrente e il valore delle costanti varia da linea di corrente a linea di corrente. Se $\underline{w} = 0$ oppure $\underline{w} \parallel \underline{v} \Rightarrow \underline{v} \times \underline{w} = 0$ e $\nabla H_B = 0$.
 In tale caso, il valore delle costanti è lo stesso per ogni linea di corrente e vale che $p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p^0$

• TEOREMA DI HELMHOLTZ

La variazione lagrangiana di un'incitazione lungo una linea chiusa materiale è nulla se il fluido è barotropico, poiché $\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) \cdot d\underline{s} = 0$
 Il fluido incomprimibile è un caso particolare di fluido barotropico $\Rightarrow \frac{d\Gamma}{dt} = 0$.
 Ciò implica che $\frac{d}{dt} \int_S \underline{w} \cdot \underline{n} \, dS = 0 \Rightarrow$ Il flusso di vorticità attraverso ogni superficie che ha per bordo una linea chiusa materiale rimane costante nel tempo durante il moto della linea.

Perché in un fluido in quiete o in moto uniforme la circolazione attraverso qualunque circuito è nulla, ciò implica che ogni corrente di un fluido irrotazionale originata da uno stato di quiete o di moto uniforme è irrotazionale e ogni vortice

• SOLUZIONE DEL PROBLEMA ESTERNO DI NEUMANN

La soluzione del problema esterno di Neumann per l'equazione di Laplace in una regione semplicemente connessa è unica, a meno di una costante. Nel caso di regione doppiamente connessa, per le stesse condizioni al contorno nella superficie σ e all'infinito, valgono differenti di Γ implicando una differente soluzione di ϕ . La soluzione è unica, a meno di una costante, solo se la circolazione attraverso un circuito irriducibile è specificata. Il criterio per definire il valore di Γ , per una regione doppiamente connessa, come nel caso di un corpo con esterne infinite lungo una direzione, deve basarsi su considerazioni derivate da un'analisi fisica del fenomeno in questione \rightarrow CONDIZIONE DI RUITA

ENERGIA CINETICA

$$T_k = \frac{1}{2} \rho \int_V \phi v_m \, dV$$

Se il corpo viene improvvisamente arrestato, $v_m = 0$ e T_k si annulla istantaneamente. Ciò deriva dal fatto che considerando $p = \text{cost}$ $r \equiv |z| \rightarrow \infty$ e dal fatto di aver trascurato le viscosità

Il differenziale di ψ sarà:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$$

La variazione di ψ lungo la linea vale:

$$\psi(P) - \psi(Q) = \int_Q^P d\psi = \int_Q^P -v dx + u dy = \int_Q^P \underline{v} \cdot \underline{n} ds = \int_Q^P v_m ds$$

La variazione di ψ è uguale alla portata in volume attraverso la superficie, di profondità unitaria, individuata dalla linea QP .

Ponendo $\psi(Q) = 0$:

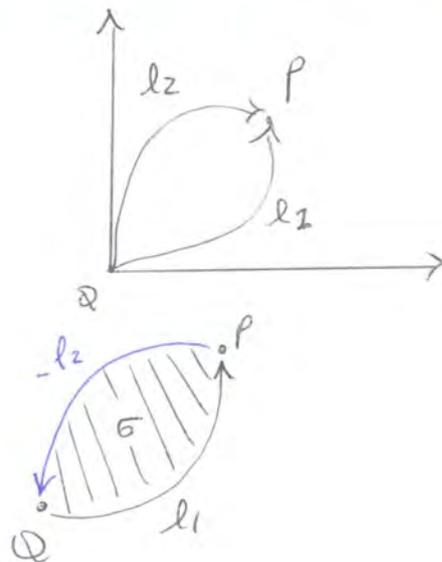
$$\psi(P) = \int_Q^P (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds \quad \psi \text{ dipende sia dalla posizione di } P \text{ che dalla linea di integrazione}$$

Ma deve essere soddisfatto affinché ψ non dipenda dal percorso di integrazione?

$$\psi(P) = \int_{\alpha_{l1}}^P (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds = \int_{\alpha_{l2}}^P (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds$$

$$\int_{\alpha_{l1}}^P (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds - \int_{\alpha_{l2}}^P (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds = 0$$

$$\int_{\alpha_{l1}}^P (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds + \int_P^{\alpha_{l2}} (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds = 0$$



$$\oint_{l1+(-l2)} (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds = \int_{\sigma} (\nabla \cdot \underline{v}) d\sigma = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \underline{v} = 0}$$

Inoltre il caso bidimensionale e incompressibile $\nabla \cdot \underline{v} = 0$

un altro modo di vedere le cose è:

In assenza di sorgenti di massa, $\nabla \cdot \underline{v} = 0$, ψ è un valore singolo

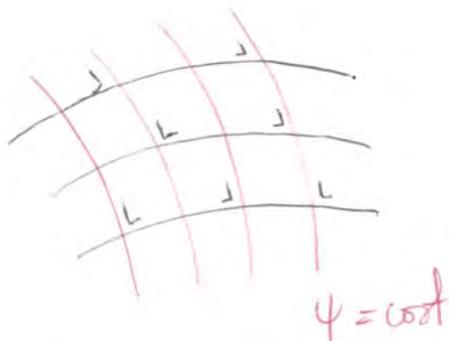
ultima osservazione:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = + \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

Condizioni di
Cauchy - Riemann
FUNZIONI ARMONICHE
CONIUGATE

Tali condizioni implicano che le linee ψ costante e le linee ϕ costante formano due famiglie di linee mutuamente ortogonali.



lungo le linee equipotenziali, la velocità \underline{v} risulterà ortogonale.

In coordinate polari (r, θ) le relazioni tra ψ e \underline{v} sono:

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = - \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

L'equazione di Laplace per la funzione ψ ha la forma:

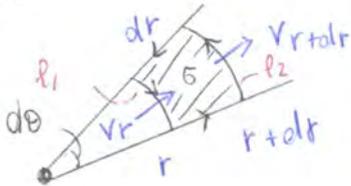
$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = 0$$

Assumiamo che, considerando una circonferenza di raggio $\epsilon \rightarrow 0$:

$$Q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{C_\epsilon} v_r ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma_\epsilon} (\nabla \cdot \underline{v}) d\sigma$$

per avere un valore finito di Q , con $d\sigma \rightarrow 0$, $\nabla \cdot \underline{v}$ deve tendere a infinito

Inoltre, la portata netta attraverso ogni anello che non richiede la sorgente risulta nulla.



$$Q = \oint_{\sigma} \underline{v} \cdot \underline{e}_r d\sigma = \int_{\ell_2} \underline{v} \cdot \underline{e}_r d\sigma + \int_{\ell_1} \underline{v} \cdot \underline{e}_r d\sigma =$$

$$= \int_{\ell_2} v_r (r+dr) d\theta - \int_{\ell_1} v_r r d\theta = k\theta - k\theta = 0$$

Determiniamo la funzione di corrente ψ :

$$\underline{v} = \frac{Q}{2\pi r} \underline{e}_r$$

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r} \Rightarrow \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \\ v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

con $0 \leq \theta < 2\pi$
 $\psi(r, 0) = 0$

Per la funzione potenziale ϕ :

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r} \Rightarrow \phi = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

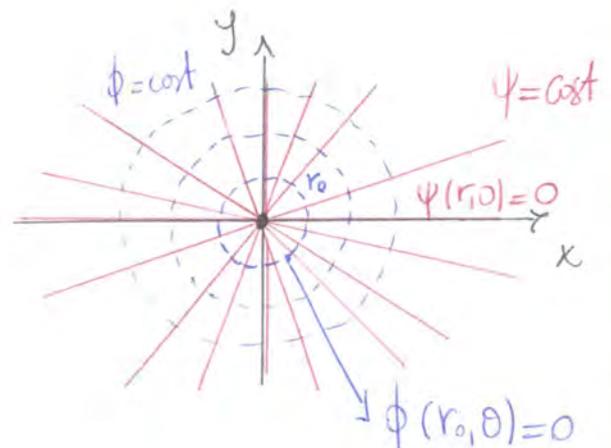
con $\phi(r_0, \theta) = 0$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$$

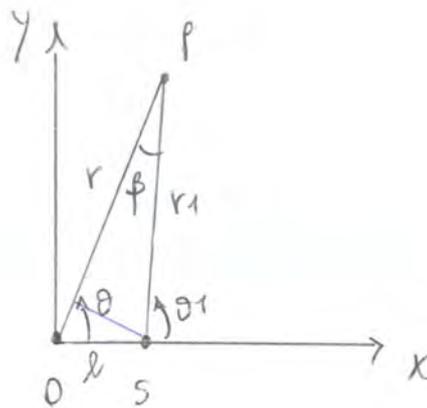
In coordinate cartesiane:

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta = \frac{Q}{2\pi} \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \frac{Q}{4\pi} \ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x_0^2 + y_0^2}\right)$$



$$\psi(P) = \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} \frac{Q}{2\pi} (\theta_1 - \theta)$$



$$\beta = \theta_1 - \theta \approx \frac{l \sin \theta}{r - l \cos \theta}$$

Allora:

$$\psi(r, \theta) = \frac{\mu}{2\pi r} \sin \theta$$

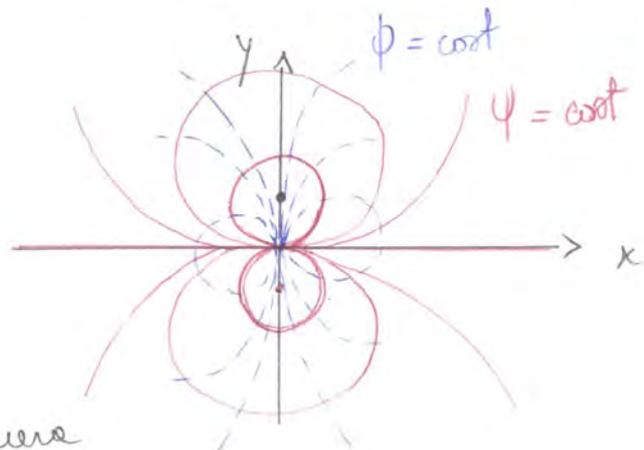
In coordinate cartesiane:

$$\psi(x, y) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\psi(x, y) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Allora, da tale espressione, una linea di corrente $\psi = \text{cost. non } 0$:

$$x^2 + y^2 - \frac{\mu}{2\pi\psi} y = 0$$



circonferenza di centro

$$C = (0, \frac{\mu}{4\pi\psi})$$

Per $\psi \rightarrow 0$ la circonferenza degenera in una retta coincidente con l'asse x

Il potenziale delle doppie si ottiene dalle relazioni di Cauchy - Riemann:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\mu}{2\pi r} \cos \theta = \frac{\mu}{2\pi r^2} \cos \theta \quad \rightarrow \quad \phi = -\frac{\mu}{2\pi r} \cos \theta$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = +\frac{\mu}{2\pi r^2} \sin \theta$$

$$\phi(x, y) = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\psi(r, \theta) = v_{\infty} r \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \sin \theta \quad \text{con } a^2 = \frac{\mu}{2\pi v_{\infty}}$$

Determiniamo le componenti della velocità:

$$v_r(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_{\infty} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \cos \theta$$

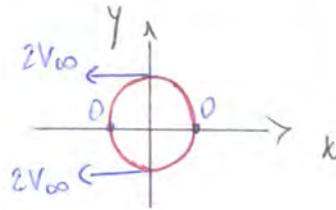
$$v_{\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = +v_{\infty} \frac{a^2}{r^2} \sin \theta + v_{\infty} \sin \theta = v_{\infty} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right) \sin \theta$$

1° cosa succede sulla superficie del cilindro:

Per $r = a$:

$$v_{\theta} = 2v_{\infty} \sin \theta$$

$$v_r = 0$$



2° come sono le distribuzioni di pressione?

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2}$$

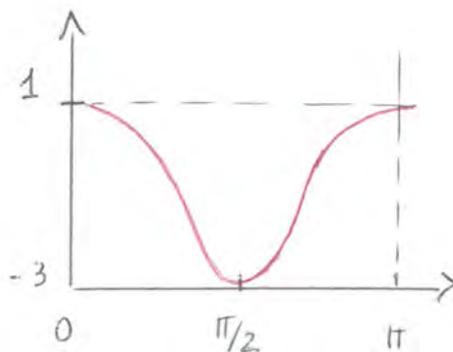
$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p = \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 + p_{\infty}$$

$$p - p_{\infty} = \frac{1}{2} \rho (v_{\infty}^2 - v^2)$$

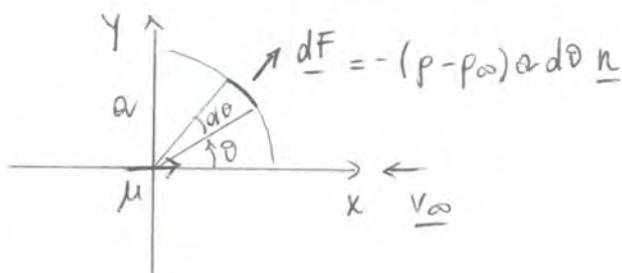
$$C_p = 1 - \left(\frac{v}{v_{\infty}} \right)^2$$

per $r = a$:

$$C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta$$



Calcoliamo le forze risultanti:



$$dF = -(p - p_{\infty}) a d\theta = -\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 C_p a d\theta = -\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) a d\theta$$

sulle superfici libere, che introduce un meccanismo di rimozione dell'energia cinetica all'infinito

3) CORPO IN MOTO STAZIONARIO

Mel caso di moto non stazionario, la teoria irrotazionale prevede l'insorgere di una resistenza legata all'accelerazione

i) MOTO IRROTAZIONALE

Mel caso di fluido rotazionale, il paradosso d'Alembert non avrebbe significato.

ii) CIRCUITAZIONE NULLA LUNGO OGNI PERCORSO CHIUSO, QUINDI FUNZIONE POTENZIALE A VALORE SINGOLO

L'assenza di forze sul corpo è imputabile ad assenza di circuitazione Γ per ogni circuito chiuso.

Allora, la presenza di circuitazione attorno ad un circuito chiuso che avvolge un corpo, risulta essenziale per ottenere una forza.

In un dominio doppiamente connesso, una circuitazione $\Gamma \neq 0$ implica che la funzione potenziale ha valori multipli e le soluzioni del problema di Neumann non è unica, ogni soluzione particolare è caratterizzata da un valore di circuitazione Γ .

VORTICE IRROTAZIONALE

Un possibile campo elementare con $\Gamma = \oint \underline{v} \cdot d\underline{s} \neq 0$ deve presentare delle linee di corrente chiuse. In questo modo, la direzione delle linee in ogni punto è concorde al vettore velocità e il prodotto $\underline{v} \cdot d\underline{s}$ risulta non nullo lungo tutte le linee, e la circuitazione può risultare e non nulla.

Si implica che vi è una regione di fluido con linee di corrente chiuse vorticate non nulle.

Per ogni circuito che non contiene il centro del vortice, la circolazione è nulla, poiché $\oint_{\ell_1} \underline{v} \cdot \underline{n} ds = \int_{\sigma} \underline{\omega} \cdot \underline{n} d\sigma = 0$

Identificando la circolazione lungo una linea che contenga il centro del vortice, essa vale Γ e rappresenta l'intensità del vortice.

Il vortice ha intensità positiva quando le particelle traslano in SENSO ANTIORARIO.

Osserviamo che, per $\kappa \rightarrow 0$, $V \rightarrow \infty$.

Considerando un circuito nell'intorno dell'origine, che racchiude l'origine stessa, si ha:

$$\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{C_\epsilon} \underline{v} \cdot \underline{ds} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma_\epsilon} (\nabla \times \underline{v}) \cdot \underline{n} d\sigma$$

Per $d\sigma \rightarrow 0$, affinché Γ abbia un valore finito, $\nabla \times \underline{v} \rightarrow \infty$

Tale campo di moto è detto VORTICE IRROTAZIONALE, poiché $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{v} = 0$ ovunque, tranne che in $\kappa = 0$, dove essa è infinita.

$$\underline{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \underline{e}_\theta$$

Allora:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \Rightarrow$$

FUNZIONE POTENZIALE

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

Le linee a ϕ costante sono le linee a θ costante, cioè dei raggi.

ϕ ha un valore univoco se $0 \leq \theta < 2\pi$ e risulta che:

$$\phi(2\pi) - \phi(0) = \Gamma$$

la singolarità del vortice rende il dominio non connesso e multiplo, poiché occorre escluderlo dal campo di moto introducendo una regione piccola e piacere che lo contenga.

Ricaviamo la funzione di corrente:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \Rightarrow$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

FUNZIONE DI CORRENTE

Perciò, per $r = a$:

$$\left. \begin{aligned} v_r(a, \theta) &= 0 \\ v_\theta(a, \theta) &= 2V_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_\theta(a, \theta) = 0 \rightarrow \sin\theta = -\frac{\Gamma}{4\pi a V_\infty}$$

PUNTI DI ARRESTO:

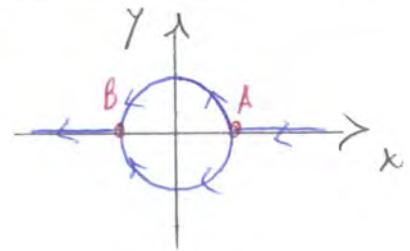
Analizziamo come procede al variare di Γ :

① $\Gamma = 0 \rightarrow \psi(r, \theta) = V_\infty r \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \sin\theta$

CASO GIÀ ANALIZZATO

$\psi = 0$ per $\theta = 0, \theta = \pi$

per $r = a = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi V_\infty}}$



PUNTI DI ARRESTO:

$v_\theta(r, \theta) = 0 \rightarrow \theta_A = 0, \theta_B = \pi$

$r = a, r = -a$

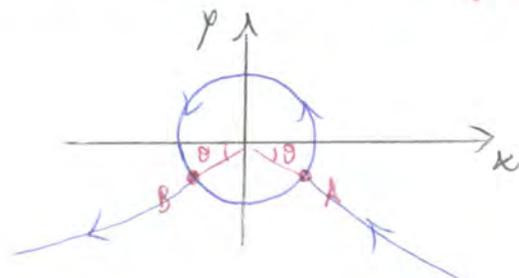
② $\Gamma > 0 \rightarrow \psi(r, \theta) = V_\infty r \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$

Le linee $\psi = 0$ è ancora una parte della circonferenza di raggio $r = a$, ma non dell'asse x

PUNTI DI ARRESTO:

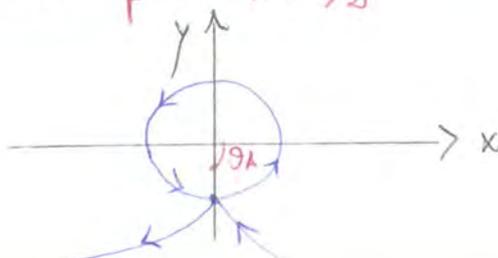
$\sin\theta = -\frac{\Gamma}{4\pi a V_\infty} < 0$

i punti di arresto si spostano verso il basso di un angolo θ .



③ $\Gamma = 4\pi a V_\infty$

In questo caso, si ha un solo punto di arresto per $\theta_A = -\pi/2$

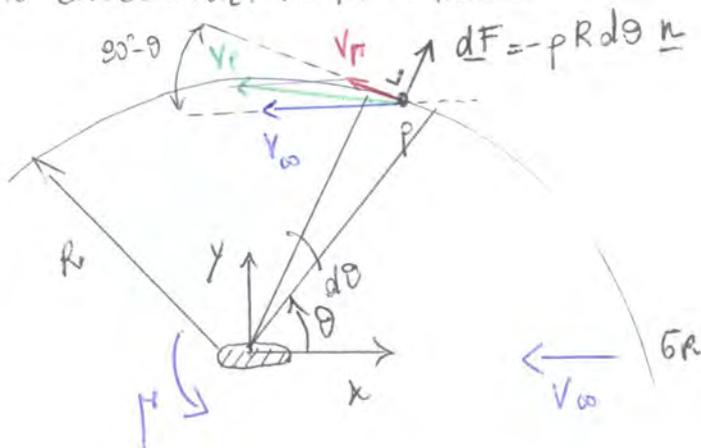


La presenza di circolazione genera una portanza L per unità di profondità. Essa provoca una distribuzione di pressione tra parte superiore e inferiore non uniforme con conseguente aumento di velocità sulla parte superiore e diminuzione delle stesse nella parte inferiore.

→ PORTANZA NEL CASO DI UN CILINDRO CIRCOLARE ROTANTE → EFFETTO MAGNUS

TEOREMA DI KUTTA - JOUKOWSKI

Dimostriamo che il risultato trovato è valido per qualunque cilindro di sezione arbitraria, quando alla corrente uniforme si sovrappone un moto con circolazione non nulla.



Supponiamo $R \gg$ delle dimensioni caratteristiche del cilindro. La velocità del vortice nel punto P sarà:

$$V_\gamma = \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

Dalle cond. delle quantità di moto, considerando MOTO STAZIONARIO, CORRENTE INVISCIDA e assenza di forze esterne, abbiamo:

$$\oint_{\sigma} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma = - \oint_{\sigma} \rho \underline{m} d\sigma$$

$\sigma = \sigma_w + \sigma_R$

con σ_w superficie cilindrica del corpo

σ_R superficie cilindrica di raggio R

Per le cond. di tang. $\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$ su σ_w

su σ_R , il flusso $\underline{v} \cdot \underline{n}$ è dovuto solo a V_∞ , poiché $\underline{V}_\gamma \perp \underline{n}$.

$$\Rightarrow \text{su } \sigma_R, V_n = -V_\infty \cos\theta \quad (V_\infty \cos(180^\circ - \theta))$$

$$\begin{aligned}
 F_y &= \int_0^{2\pi} (\rho \infty - \rho V_\infty V_\Gamma \sin \theta) R \sin \theta \, d\theta - \int_0^{2\pi} \rho R V_\infty V_\Gamma \cos^2 \theta \, d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} \cancel{\rho \infty R \sin \theta} \, d\theta - \int_0^{2\pi} \rho V_\infty V_\Gamma R \sin^2 \theta \, d\theta - \int_0^{2\pi} \rho V_\infty V_\Gamma R \cos^2 \theta \, d\theta = \\
 &= - \int_0^{2\pi} \rho V_\infty V_\Gamma R \, d\theta = -\rho V_\infty V_\Gamma R \cdot 2\pi
 \end{aligned}$$

Quindi, le forze agenti sul cilindro saranno:

$$D = -F_x = 0 \quad \text{PARADOSSO D'ALEMBERT}$$

$$L = -F_y = \rho 2\pi V_\infty V_\Gamma R$$

Poiché $V_\Gamma = \frac{\Gamma}{2\pi R} \Rightarrow L = \rho V_\infty \Gamma$

Su ogni corpo cilindrico, attorno al quale agisce una circolazione Γ , immerso in una corrente uniforme V_∞ all'infinito, si ha una PORTANZA L PER UNITÀ DI PROFONDITÀ PARI A:

$$\underline{L} = \rho \underline{V_\infty} \times \Gamma \hat{k} \quad \text{con } \hat{k} \text{ verso lungo la direzione dell'asse del cilindro}$$

CONDIZIONE DI KUTTA

Il teorema di Kutta, garantisce la presenza di portanza in caso di circolazione non nulla, ma non permette la sua determinazione.

È necessario allora individuare le condizioni affinché una corrente irrotazionale attorno ad un corpo cilindrico presenti una circolazione non nulla e definire il criterio per calcolarne l'intensità.

Sperimentalmente, si osserva che la corrente e la portanza sono univocamente determinate SE IL CORPO PRESENTA UN PROFILO CON BORDO DI FUGA

PPUNTITO

Un profilo che rispetta tale condizione, allora, può essere portante. Il problema è che matematicamente si è visto che la corrente attorno

La determinazione delle correnti attorno a un corpo portante, immerso in una corrente uniforme \underline{V}_∞ , si riconduce alla funzione potenziale ϕ , può essere ricondotto al seguente problema matematico:

Determinare la funzione ϕ soluzione dell'eq. di Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0, \text{ con le condizioni al contorno:}$$

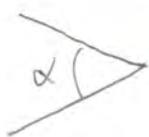
$$\nabla \phi \cdot \underline{n} = 0 \text{ sul corpo}$$

$$\nabla \phi = \underline{V}_\infty \text{ all'infinito}$$

Tra le infinite soluzioni, derivanti dal fatto che il dominio è in connessione multipla, occorre definire il valore di Γ lungo un circuito che cingeva il corpo, tale da soddisfare la condizione di Kutta

L'interpretazione di tale condizione dipende dalla forma del profilo alare, in particolare dalla forma del bordo di fuga.

• BORDO DI FUGA CON ANGOLO ($\alpha > 0$)



CONDIZIONE DI KUTTA: bordo di fuga \equiv punto di stacco

Se così non fosse, la velocità sul dorso avrebbe una componente perpendicolare alle corde opposta a quella delle velocità sul ventre.

Tale situazione non è ammissibile, poiché non è possibile avere una discontinuità sulla componente normale.

• BORDO DI FUGA A CUSPIDE ($\alpha = 0$)



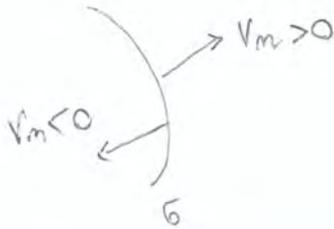
CONDIZIONE DI KUTTA: velocità sul dorso e sul ventre, che sono parallele, devono essere finite. Inoltre, da Bernoulli:

$$\frac{1}{2} \rho V_+^2 + p_+ = \frac{1}{2} \rho V_-^2 + p_- \Rightarrow \boxed{V_+ = V_-}$$

Dopo un tempo sufficientemente lungo, il vortice iniziale si è allontanato dal profilo e una distanza tale da poter essere trascurato.
A questo punto, il ruolo della viscosità ^{presso l'angolo} che determina l'origine del vortice solente diventa irrilevante nello studio delle portanze, perciò possiamo utilizzare il modello irrotazionale per l'ala portante.

$$R_x = \int_{\sigma} \rho u \underline{v} \cdot \underline{m} d\sigma$$

Immaginiamo $\underline{v} \cdot \underline{m} = v_m$, la componente di velocità normale alla superficie σ ($v_m < 0$ se verso entrante nella superficie, $v_m > 0$ se uscente)



Quindi:

$$R_x = \int_{\sigma} \rho u v_m d\sigma$$

$$R_y = \int_{\sigma} \rho v v_m d\sigma$$

$$R_z = \int_{\sigma} \rho w v_m d\sigma$$

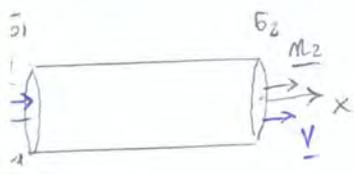
nelle altre direzioni

In forma vettoriale:

$$\underline{R} = \int_{\sigma} \rho \underline{v} v_m d\sigma$$

Equazione di continuità per flusso tridimensionale e stazionario:

supponiamo lungo la direzione x:



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \rightarrow \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \underline{v}) d\Omega = \int_{\sigma} \rho \underline{v} \cdot \underline{m} d\sigma = 0$$

$$\int_{\sigma} \rho \underline{v} \cdot \underline{m} d\sigma = \int_{\sigma_1} \rho v_1 \cdot \underline{m} d\sigma + \int_{\sigma_2} \rho v_2 \cdot \underline{m} d\sigma + \int_{\sigma_2} \rho v_1 \cdot \underline{m} d\sigma = 0 \Rightarrow \rho u_1 A_1 = \rho u_2 A_2$$

$$\text{Se } \rho = \text{cost} \Rightarrow u_1 A_1 = u_2 A_2$$

poiché sulle superfici solide, per le cond. di tangenza
 $v_m = 0$, avviene solo il contributo delle due pareti fluide:

◦ SEZIONE i-i

$$\begin{cases} u = v_1 \\ v_m = -v_1 \end{cases}$$

◦ SEZIONE f-f

$$\begin{cases} u = v_2 \\ v_m = v_2 \end{cases}$$

Allora:

$$p_1 A_1 + F - p_2 A_2 = - \int_{A_1} \rho v_1^2 dA_1 + \int_{A_2} \rho v_2^2 dA_2$$

Quindi:

$$F = p_2 A_2 - p_1 A_1 - \rho v_1^2 A_1 + \rho v_2^2 A_2 = A_2 (p_2 + \rho v_2^2) - A_1 (p_1 + \rho v_1^2) = -34165 \text{ N}$$

con $\rho A v^2$ indice di q.d.m.

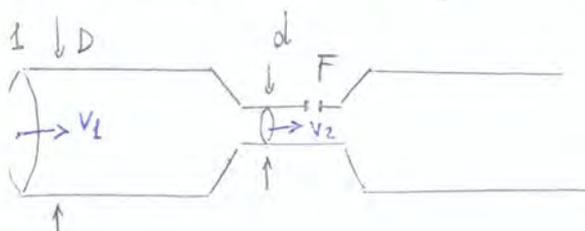
$$F' = -F = 34165 \text{ N (forza che il fluido applica alla sezione)}$$

ESERCIZIO 2 (Tubo di venturi)

Un tubo orizzontale di diametro D , presenta una sezione ristretta con diametro $d = 0,5 D$ ed è percorso internamente da acqua ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) con velocità $v_1 = 3 \text{ m/s}$ e pressione $p_1 = 1.2 \text{ bar} = 120000 \text{ Pa}$

Il tubo è immerso in acqua stagnante.

Supponiamo che nella sezione 2 ci sia un piccolo foro F .
 Che succede in corrispondenza di F ?



Supponiamo il flusso unidimensionale e stazionario.

Le 2 rami del manometro sono perfettamente verticali:

$$p^{\circ} = p_A; \quad p_{\infty} = p_B$$

Prendiamo come origine degli assi xz il punto A.

Applichiamo Bernoulli alle sezioni A e B ($v_A = v_B = 0$)

$$p_A + \rho_m g h_A = p_B + \rho_m g h_B \rightarrow p_A - p_B = \rho_m g h_B = p^{\circ} - p_{\infty}$$

$h_A = 0$ perché
origine in A

Applichiamo Bernoulli alle prese di pressione totale e statiche:

$$h_{p_{\infty}} \sim h_{p^{\circ}} \rightarrow p^{\circ} + \frac{1}{2} \rho v^{\circ 2} = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho_s v_{\infty}^2$$

Perché le prese di pressione totale è un punto di arresto per la corrente,
 $v^{\circ} = 0$.

Quindi:

$$p^{\circ} - p_{\infty} = \frac{1}{2} \rho_s v_{\infty}^2$$

stituendo nell'espressione precedente:

$$\rho_m g h_B = \frac{1}{2} \rho_s v_{\infty}^2 \rightarrow v_{\infty} = \sqrt{\frac{2 \rho_m g h_B}{\rho_s}} = 33 \text{ m/s}$$

allora:

$$p^{\circ} - p_{\infty} = \frac{1}{2} \rho_s v_{\infty}^2 = 931,61 \text{ Pa} \rightarrow \text{Pressione dinamica}$$

OSSERVAZIONI

1) Quando ρ_s è alta (liquidi), di solito si ha un dislivello h_B di diversi metri \rightarrow è bene che ρ_m sia elevata (mercurio o alcool denso), per ridurre h_B : $h_B = \frac{1/2 \rho_s v_{\infty}^2}{\rho_m g}$

2) Quando invece h_B è molto piccola per evitare lo letargo di solito si:

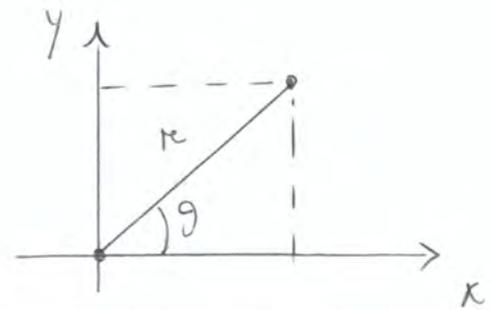
ESERCITAZIONE 27-10-2015

Campi di moto composti:

- SORGENTE / POZZO (nell'origine 0)

$$\psi_P = \frac{Q}{2\pi} \theta = \frac{Q}{2\pi} \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\phi_P = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \frac{Q}{4\pi} \ln\left(\frac{x^2+y^2}{x_0^2+y_0^2}\right)$$



$Q > 0$ SORGENTE
 $Q < 0$ POZZO

- CORRENTE UNIFORME

$$\psi_P = -N x + u y$$

$$\phi_P = u x + N y$$

$$\underline{v} = u \hat{i} + N \hat{j}$$

- DOPPIETTA

$$\psi = \frac{\mu}{2\pi r} \sin\theta = \frac{\mu}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\phi = -\frac{\mu}{2\pi r} \cos\theta = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2}$$

- VORTICE (nell'origine 0)

$$\psi_P = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

con $\Gamma =$ intensità del vortice

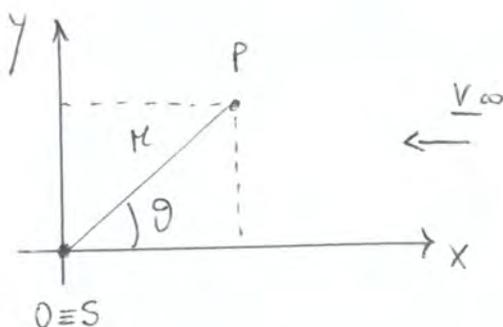
$$\phi_P = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

($\Gamma > 0$ in verso antiorario)

① PRVA DI FUHRMANN

- Sorgente di portata Q in 0

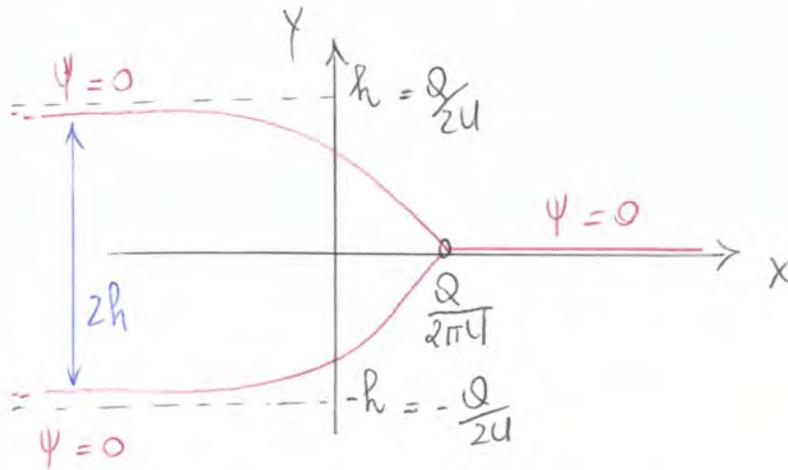
- Corrente uniforme // e disorde rispetto all'asse x , $\underline{v}_\infty = -u \hat{i}$



$$\psi_P = \frac{Q}{2\pi} \theta - u y = \frac{Q}{2\pi} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) - u y$$

con $0 \leq \theta < 2\pi$

Simmetricamente, estendiamo i risultati al semipiano delle $y < 0$:



La piuma si estende all'infinito a valle della sorgente, senza richiudersi. Per $x \rightarrow -\infty$, la piuma tende a due asintoti orizzontali distanti $2h$.

Per $x \rightarrow -\infty$, il campo di velocità coincide con quello della corrente uniforme:

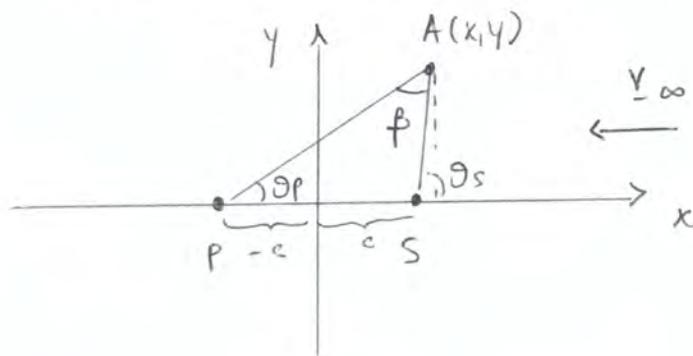
$$\begin{cases} u \rightarrow -U \\ v \rightarrow 0 \end{cases}$$

Determiniamo l'altezza dell'asintoto della piuma:

$$\psi = 0, \theta = \pi \rightarrow \frac{Q}{2\pi} \cdot \pi - U \cdot y = 0 \rightarrow \boxed{y = h = \frac{Q}{2U}}$$

OVALE DI RANKINE

Campo composto da una sorgente S posta lungo l'asse x ad un'ascissa $x = +c$, e un pozzo P posto sull'asse x ad un'ascissa $x = -c$; corrente uniforme \parallel e discorde all'asse x .



Osserviamo che:

$$\theta_p + \beta + \pi - \theta_s = \pi$$

$$\bullet \beta = \theta_s - \theta_p$$

$$\bullet \operatorname{tg} \theta_s = \frac{y}{x-c}$$

$$\bullet \operatorname{tg} \theta_p = \frac{y}{x+c}$$

Determiniamo i punti di stacco, che coincidono con i punti di diramazione:

$\begin{cases} (x_0, 0) \\ (-x_0, 0) \end{cases}$ essi sono leggermente spostati rispetto alla sorgente e al pozzo

Componenti di velocità:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4c^2y^2}{(x^2+y^2-c^2)^2}} \cdot \frac{2c(x^2+y^2-c^2) - 2cy(2y)}{(x^2+y^2-c^2)^2} - u =$$

$$= \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{2c(x^2-y^2-c^2)}{(x^2+y^2-c^2)^2 + 4c^2y^2} - u$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4c^2y^2}{(x^2+y^2-c^2)^2}} \cdot \frac{2cy(2x)}{(x^2+y^2-c^2)^2} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{4cxy}{(x^2+y^2-c^2)^2 + 4c^2y^2}$$

Punti di stacco:

$v=0 \rightarrow y=0$ (v risulta sempre nulla sull'asse x)

$$u(x_0, y=0) = 0 \rightarrow \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{2c(x_0^2-c^2)}{(x_0^2-c^2)^2} - u = 0$$

$$\frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{2c}{x_0^2-c^2} - u = 0 \rightarrow$$

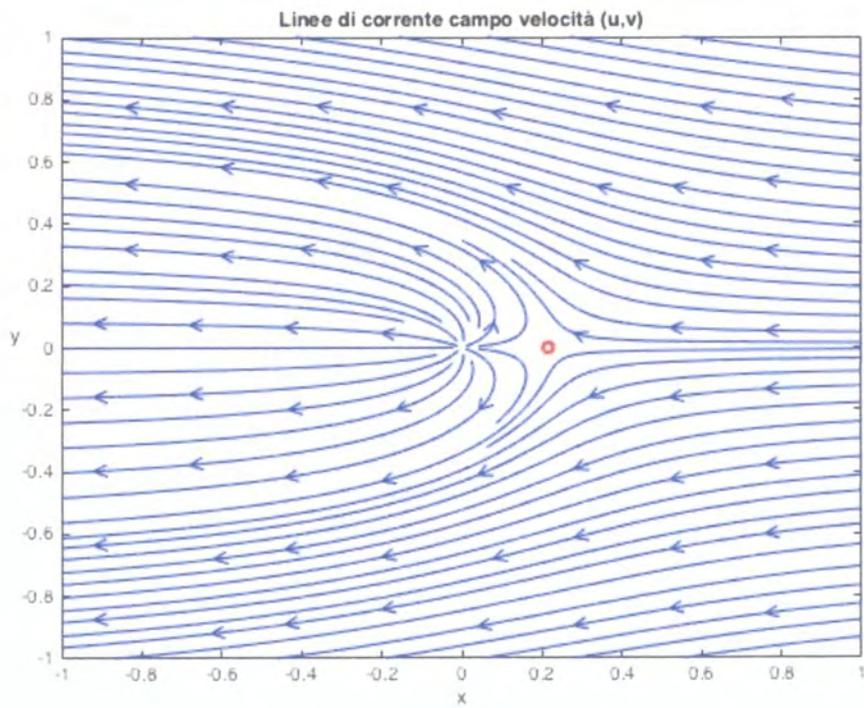
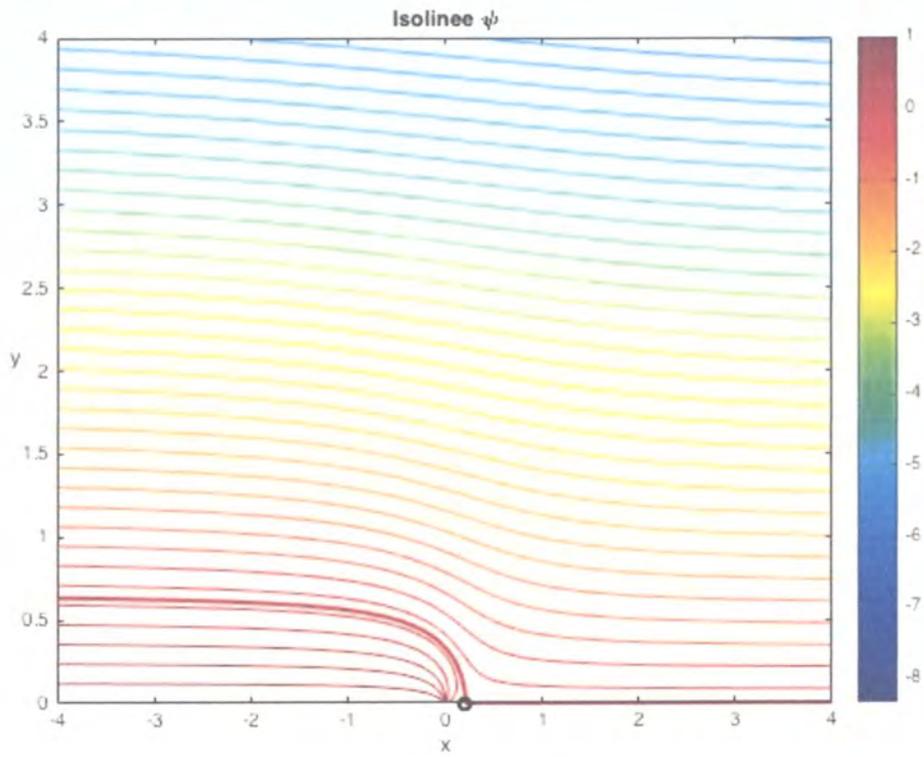
$$x_0 = \sqrt{\frac{Q}{2\pi u} \cdot 2c + c^2}$$

Abbiamo allora ottenuto un ovale simmetrico rispetto a x e y , delimitato da $\psi=0$.

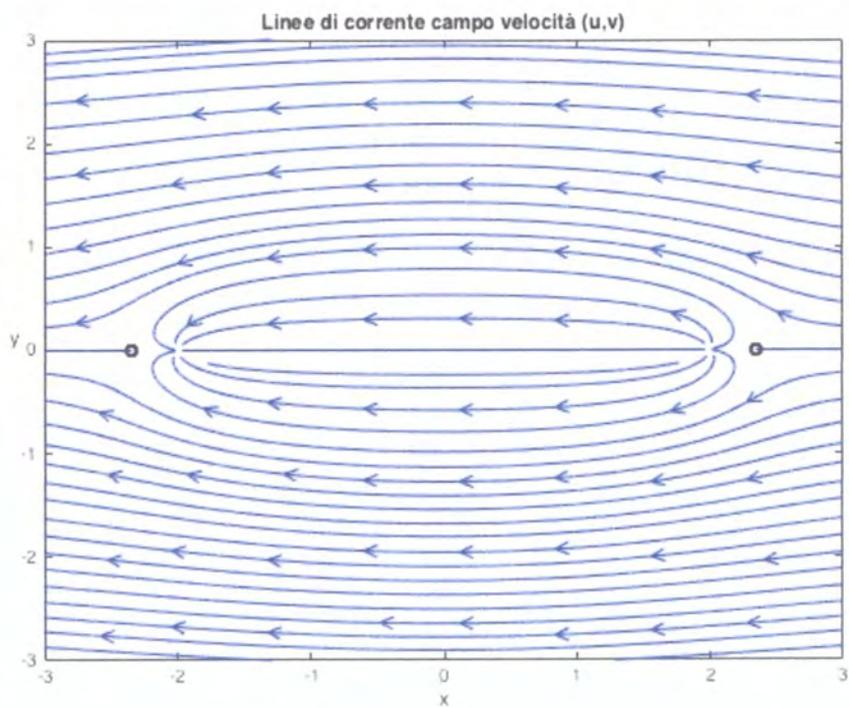
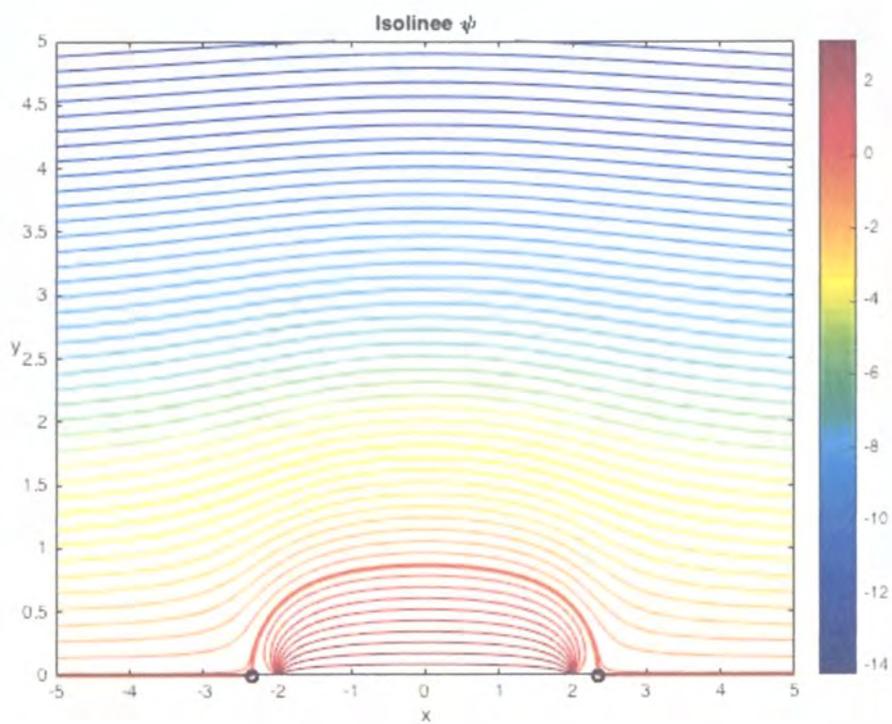
L'altezza b dell'ovale si ricava sostituendo in $\psi=0, x=0$:

$$b = \frac{Q}{2\pi u} \arctg\left(\frac{2cb}{b^2-c^2}\right)$$

PRUA FUHRMANN



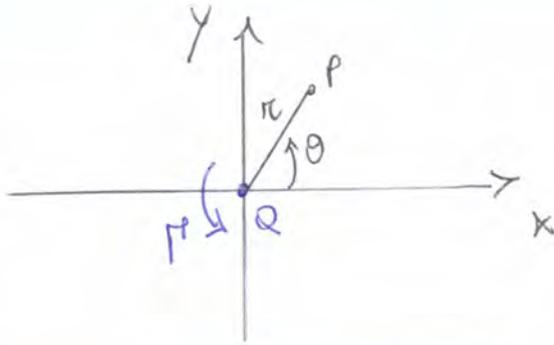
OVALE RANKINE



POZZO E VORTICE

Consideriamo un campo composto da un pozzo di portata Q e un vortice in senso antiorario di intensità Γ .

Calcolare e graficare ψ e graficare il campo di velocità, calcolare e graficare ϕ



$$\psi(r, \theta) = -\frac{Q}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

sia $r_0 = 1$, allora:

$$\psi(r, \theta) = -\frac{Q}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

$$\phi(r, \theta) = -\frac{Q}{2\pi} \ln r + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

Perché per un vortice:

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \rightarrow \phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \rightarrow \psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

Componenti di velocità:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-\frac{Q}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \right] = -\frac{Q}{2\pi r}$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{Q}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \right] = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

POZZO E VORTICE

```

clear variables
close all
%definizione coordinate polari%

theta=0:0.02:2*pi;
r=1e-2:0.02:5;

[R,Theta]=meshgrid(r,theta);

%definizione coordinate cartesiane%

x=R.*cos(Theta);
y=R.*sin(Theta);

%defizione sorgente e vortice e r0%

Q=2;
Gamma=3;
r0=1;

%definizione funzione di corrente%

psi=-Q/(2*pi).*Theta-Gamma/(2*pi).*log(R/r0);
phi=-Q/(2*pi).*log(R/r0)+(Gamma./(2*pi)).*Theta;

%linee iso-psi e iso-phi%
figure
[~,C]=contour(x,y,psi,50,'LineWidth',1);
hold on
[h,C]=contour(x,y,phi,50,'k:','LineWidth',1);
colorbar
colormap jet
title('Pozzo e vortice','FontSize',18);
legend('iso-psi','iso-phi')

%Definizione linee di corrente velocita%

clear r theta x y
[x,y]=meshgrid(-3:0.01:3,-3:0.01:3);
r=sqrt(x.^2+y.^2);
theta=atan2(y,x);

%velocita tangenziale e radiale%

v_r=-Q./(2*pi*r);
v_theta=Gamma./(2*pi*r);

%rotazione assi%
u = v_r.*cos(theta)-v_theta.*sin(theta);
v = v_r.*sin(theta)+v_theta.*cos(theta);

figure
streamslice(x,y,u,v,1.5);
xlabel('x','FontSize',18);
ylabel('y','FontSize',18,'Rotation',0);
title('Linee di corrente campo velocita','FontSize',18);

```

Altro modo:

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(x^2+y^2)$$

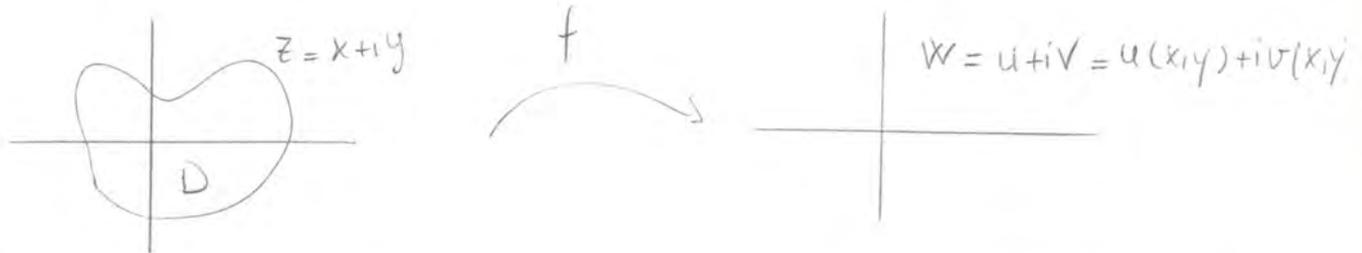
$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u = -\frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = v = -\frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2}$$

↳ streamslice (x,y,u,v,1.5);

FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA - FUNZIONI ANALITICHE

Una funzione di variabile complessa $w = f(z)$, associa un numero complesso $w = u + iv$ per ogni punto del dominio D rappresentato dal numero complesso $z = x + iy$.



È utile introdurre tale tipo di funzioni, perché le derivate di $f(z)$ in un punto del dominio D si definisce in maniera formalmente analoga al caso di funzioni di una variabile reale:

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

con h numero complesso arbitrario.

tale relazione implica che il limite è lo stesso ed esiste INDIPENDENTEMENTE DALLA DIREZIONE LUNGO LA QUALE SI TENDE A z_0 .

La funzione e valore singolo in D di variabile complessa la cui derivata (def. come sopra) esiste, è detta FUNZIONE ANALITICA.

Se una funzione non è analitica in un punto z_0 , dove la derivata non esiste, ma lo è nell'intorno di z_0 , allora z_0 è un punto singolare di $f(z)$.

Se $f(z), g(z)$ analitiche in $D \Rightarrow af(z) + bg(z)$ è analitica in D ,
e la derivata è $af'(z) + bg'(z)$,
con $a, b \in \mathbb{R}$.
Analogamente per il prodotto $f(z)g(z)$.

Perciò, CONDIZIONE NECESSARIA e SUFFICIENTE affinché $f(z)$ sia analitica in Δ , è che le funzioni u e v siano FUNZIONI ARMONICHE e CONIUGATE in Δ .

PROPRIETÀ FUNZIONI ANALITICHE

① Se $f(z)$ è analitica in $z_0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(z) \\ \vdots \\ f^{(n)}(z) \end{array} \right\}$ analitiche in z_0 .

② $\oint_{\gamma} f(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{se analitica in tutto } \Delta \\ \neq 0 & \text{se presente punti singolari, cioè punti in cui } f'(z) \nexists \end{cases}$

POTENZIALE COMPLESSO DELLE VELOCITÀ

Abbiamo precedentemente dimostrato che ϕ e ψ sono FUNZIONI ARMONICHE CONIUGATE, infatti:

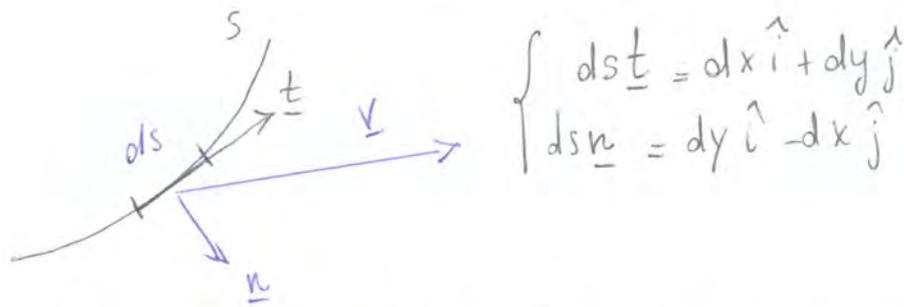
$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \nabla^2 \psi = 0 \\ \nabla^2 \phi = 0 \end{cases}$$

Risulta allora naturale combinare ϕ e ψ come parte reale e immaginaria di una funzione analitica.

Identificando i punti del piano (x, y) con i punti del piano complesso $z = x + iy$, si definisce POTENZIALE COMPLESSO DELLE VELOCITÀ la funzione analitica:

$$W(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Consideriamo un tratto di linea ds :



Integriamo le velocità complesse lungo un circuito C :

$$\oint_C \frac{dW}{dz} dz = \oint_C (u - iv)(dx + idy) = \oint_C (u dx + v dy) + i \oint_C (u dy - v dx) =$$

$$= \oint_C (\underline{V} \cdot \underline{t}) ds + i \oint_C (\underline{V} \cdot \underline{n}) ds = \Gamma + iQ$$

La portata Q è la somma algebrica delle intensità delle sorgenti / pozzi contenuti nella regione delimitata da C , e la circolazione Γ è la somma algebrica delle intensità dei vortici all'interno di C .

io è in accordo con quanto esposto riguardo alle proprietà delle funzioni analitiche.

$$\oint_C \frac{dW}{dz} dz \neq 0 \text{ poiché sono presenti dei punti singolari}$$

TEOREMA DI BLASIUS

$$\left\{ \begin{array}{l} X - iY = i \frac{\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz \\ M = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left\{ \oint_C \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 z dz \right\} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{bilancio q.d.m. su f. delle velocità complesse} \\ \text{momento delle forze che agiscono su un} \\ \text{corpo su f. delle velocità complesse} \end{array}$$

VORTICE IRROTAZIONALE ($\Gamma_0 = 1$, positivo nel senso antiorario)

$$W(z) = \underbrace{\frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta}_{\phi} - i \underbrace{\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r}_{\psi} = \frac{\Gamma}{2\pi} (\vartheta - i \ln r) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

Per un vortice posizionato in $z_0 = x_0 + iy_0$:

$$W(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

DOPPIETTA (asintote di α rispetto a x)

$$\phi = -\frac{\mu}{2\pi r} \cos(\theta - \alpha)$$

$$\psi = \frac{\mu}{2\pi r} \sin(\theta - \alpha)$$

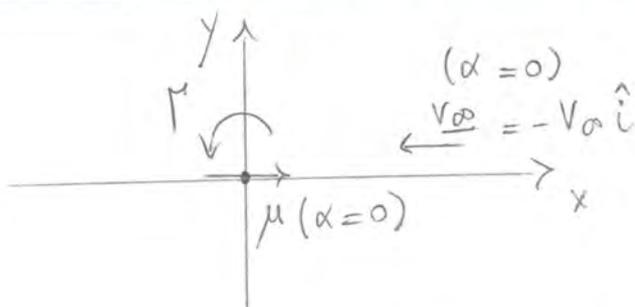
Allora:

$$W(z) = \frac{\mu}{2\pi r} [-\cos(\theta - \alpha) + i \sin(\theta - \alpha)] = \frac{\mu}{2\pi r} e^{-i(\theta - \alpha)} = -\frac{\mu e^{i\alpha}}{2\pi r e^{i\theta}} = -\frac{\mu}{2\pi z} e^{i\alpha}$$

Per un generico punto $z_0 = x_0 + iy_0$ come centro della doppietta:

$$W(z) = \frac{-\mu}{2\pi(z - z_0)} e^{i\alpha}$$

POTENZIALE COMPLESSO CILINDRO SEZIONE ARBITRARIA



Il potenziale complesso del cilindro si ottiene come somma dei potenziali complessi dei singoli campi semplici:

$$W(z) = -V_\infty z - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z - \frac{\mu}{2\pi z} = -V_\infty r e^{i\theta} - \frac{\mu}{2\pi r} e^{-i\theta} - i \frac{\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\theta)$$

$$\frac{dW}{dz} = -V_\infty - i \frac{\Gamma}{2\pi z} + \frac{\mu}{2\pi z^2}$$

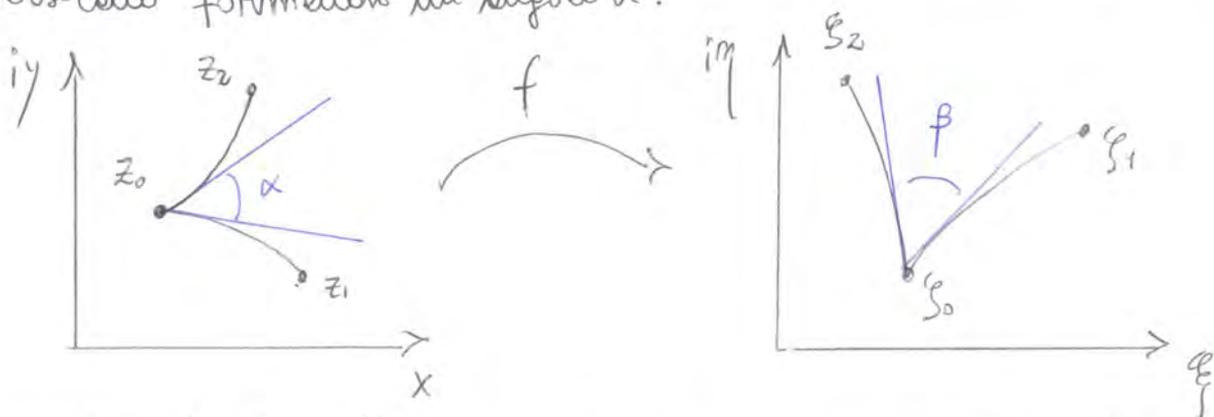
TRASFORMAZIONI CONFORMI

Geometricamente, la funzione $\zeta = f(z)$ può essere interpretata come la trasformazione dei punti del dominio D sul piano complesso z , nei punti del dominio D^* nel piano complesso ζ .

Con $z = x + iy$, $\zeta = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ e sia $\zeta = f(z)$ analitica, risulta che l'immagine di un arco $(x(s), y(s))$, con $s_0 \leq s \leq s_1$, è definita dalle relazioni $\xi = \xi(x(s), y(s))$, $\eta = \eta(x(s), y(s))$, che hanno le stesse proprietà di continuità e differenziabilità delle funzioni $x(s), y(s)$.

Se $f(z)$ è a valore singolo, l'immagine di una curva che non si interseca o anche non intersecante.

Consideriamo un punto z_0 estremo di due archi $z_1(s), z_2(s)$, che si intersecano formando un angolo α .



Assumiamo $f(z_0)$ analitica in z_0 e in un suo intorno e $f'(z_0) \neq 0$. Siano z_1, z_2 due punti sulle curve a distanza r da z_0 . Allora:

$$\left. \begin{aligned} z_1 - z_0 &= r e^{i\theta_1} \\ z_2 - z_0 &= r e^{i\theta_2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = e^{i(\theta_2 - \theta_1)}$$

$(\theta_2 - \theta_1)$ è l'angolo formato dai segmenti che uniscono i punti z_1 e z_2 con z_0 . Per $r \rightarrow 0$:

$$\alpha = \lim_{r \rightarrow 0} (\theta_2 - \theta_1) = \lim_{r \rightarrow 0} \arg \left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \right)$$

Nel punto ζ_0 , immagine di z_0 , si intersecano le immagini dei due archi formando l'angolo β , con ζ_1, ζ_2 immagini di z_1 e z_2

Attraverso una trasformazione conforme $(\xi(x,y), \eta(x,y))$, la regione D del piano z , e la sua frontiera, sono trasformati nel piano $\xi = \xi + i\eta$ in una regione D^* di forma desiderata.

Ad una trasformazione conforme è associabile una funzione analitica $\xi = f(z)$: nei punti REGOLARI, in cui esiste la derivata e $f'(z) = \frac{d\xi}{dz} \neq 0$, l'angolo formato tra due archi è preservato in valore e verso, la trasformazione è invertibile ed esiste la funzione inversa $z(\xi)$ con derivata:

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{1}{\frac{d\xi}{dz}} = \frac{1}{f'(z)}$$

I punti dove $f'(z)$ ha uno zero di ordine $m-1$ ($f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$) sono i PUNTI CRITICI della trasformazione e l'angolo tra due archi è moltiplicato di m volte.

Il problema di Neumann esterno è trasformato esattamente e la sua soluzione è proiettata sul piano ξ : le funzioni armoniche ed analitiche definite sul piano z , diventano:

$$\left. \begin{aligned} \phi^*(\xi) &= \phi[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \\ \psi^*(\xi) &= \psi[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \\ W^*(\xi) &= \phi^*(\xi, \eta) + i\psi^*(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{funzioni armoniche e analitiche} \\ \text{sul piano } z \text{ rimangono armoniche} \\ \text{e analitiche sul piano } \xi. \end{array}$$

Le due soluzioni sono una l'immagine dell'altra in tutti i punti in cui $\xi = f(z)$ è analitica e $f'(z) \neq 0$

derivando $W^*[f(z)]$, si ottiene la velocità complessa:

$$\frac{dW^*}{d\xi} = \frac{dW}{dz} \cdot \frac{dz}{d\xi} = \frac{dW}{dz} \cdot \frac{1}{\frac{d\xi}{dz}} = \frac{dW}{dz} \cdot \frac{1}{f'(z)} \quad (\text{perché } W^*(\xi) = W(z(\xi)))$$

Alora:
$$V^* = |u^* - i v^*| = \frac{V}{|f'(z)|}$$
 Nei punti critici della trasformazione la velocità V^* diventa infinita.

Poiché $v^* = \frac{V}{|f'(z)|} \Rightarrow$ il modulo della velocità rimane costante se $|f'(z)| = 1$ per $z \rightarrow \infty$, cioè se per $z \rightarrow \infty$ la trasformazione coincide con la funzione identità $\zeta = z$.

Analizzando la trasformazione di un profilo piano in un cerchio, se z_T sul cerchio è l'immagine del bordo di fuga del profilo ζ_T .

L'angolo formato da due elementi tangenti al cerchio vale $\beta = \pi$.

Le immagini dei due elementi, di ζ_1 e di ζ_2 , invece formano un angolo $\beta^* > \pi \Rightarrow$ la trasformazione deve avere un punto critico (uno zero di ordine $(m-1)$ in corrispondenza del punto z_T , in modo da soddisfare $\beta^* = m\beta = m\pi$.

Il profilo piano, dunque, avrà un bordo di fuga con angolo $\zeta = (2-m)\pi$.
 Nel punto critico, la velocità $v^*(\zeta_T)$ risulta infinita.

Per rendere la corrente attorno al bordo di fuga regolare e quindi rispettare la condizione di Kutta, occorre imporre un opportuno valore di circolazione Γ attorno al cerchio, e di conseguenza attorno al profilo piano, in modo che la $v(z)$ sia nulla, quindi z_T sia un punto di stacco.

Caratteristiche:

La funzione di trasformazione $\zeta = f(z)$,

- deve coincidere con la funzione identità $\zeta = z$, per $z \rightarrow \infty$
- uno dei suoi punti critici deve coincidere con un punto del cerchio, mentre i restanti devono essere confinati all'interno di esso, in modo che l'esterno del cerchio e del profilo siano immagini conformi.

Si sceglie come punto Z_T l'intersezione del cerchio con la parte negativa dell'asse reale $x = -b$, si ha $Z_T = -b$, costante reale e si ottiene la TRASFORMAZIONE DI KUTTA-JOUKOWSKI:

$$\xi(z) = z + \frac{b^2}{z}$$

i due punti critici $Z = \pm b$ generano i punti di estremità $\xi = \pm 2b$

poiché $\frac{d\xi}{dz} = 1 - \frac{b^2}{z^2} \Rightarrow z = \pm b$ PUNTI CRITICI

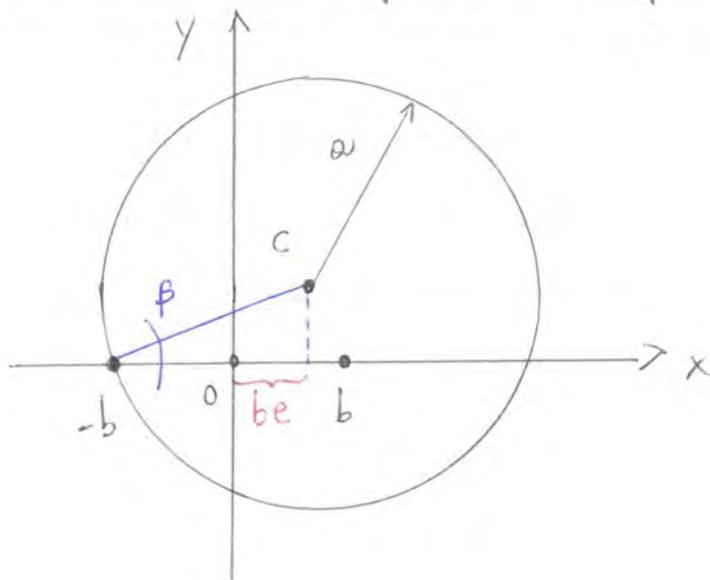
poiché nei punti critici si ha uno zero di ordine $m=2$, allora:

$$\gamma = (2-m)\pi = 0$$

↳ si ha uno zero di ordine 2, e poiché $f'(z=\pm b) = 0$, $f''(z=\pm b) \neq 0$.

→ i profili generati dalla trasformazione di Kutta-Joukowski hanno BORDO DI FUGA A CUSPIDE

Definiamo alcuni parametri importanti:



e : eccentricità (< 1).

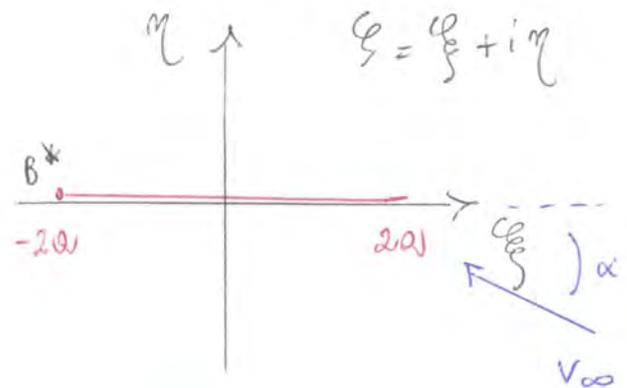
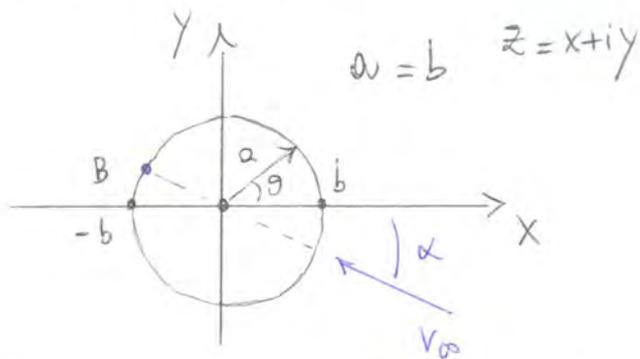
b e indica quanto il centro del cerchio è spostato lungo l'asse x . Misura l'apertura del profilo.

β : angolo che indica lo spostamento del centro del cerchio lungo l'asse y . Misura l'innalzamento del profilo.

Andiamo a studiare come si modifica la trasformazione di Kutta-Joukowski al variare dei parametri β ed e .

POTANZA E VELOCITÀ SU UN PROFILO DI KUTTA - JOUKOWSKI

Studiamo il caso in cui il cerchio è centrato nell'origine:



$$\zeta = z + \frac{b^2}{\bar{z}} \rightarrow \frac{d\zeta}{dz} = 1 - \frac{b^2}{z^2}$$

Nel caso di un cerchio centrato nell'origine, i punti del cerchio sono individuati dall'espressione:

$$\bar{z} = a e^{i\theta}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \zeta &= a e^{i\theta} + \left(\frac{b^2}{a}\right) e^{-i\theta} = a (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = a [\cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta] = \\ &= 2a \cos\theta \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \xi = 2a \cos\theta \\ \eta = 0 \end{cases} \rightarrow \text{linea reale di corda } 4a.$$

In un cilindro rivestito da una corrente uniforme con incidenza α , modificando la relazione ottenuta nel caso a incidenza nulla, abbiamo:

$$V_B(\alpha, \theta) = 2V_\infty \sin(\theta + \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

$$V_B = 2V_\infty \sin(\pi + \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi a} = -2V_\infty \sin\alpha + \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

In la condizione di Kutta, $V_B = 0$ affinché la corrente sia regolare attorno al bordo di fuga. In questo modo è possibile determinare il giusto valore di Γ

Quindi:

$$V^* = V_\infty \left(1 + \alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

Allora:

$$C_p = 1 - \left(\frac{V^*}{V_\infty} \right)^2 = 1 - \left[1 + \alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right]^2$$

Osservando l'andamento di velocità, si ottiene:

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = 0 \rightarrow \text{si secondo con la condizione di Kutta}$$

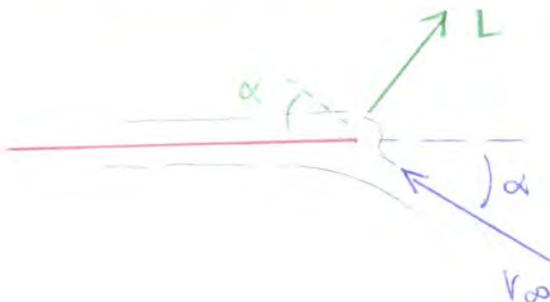
$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = +\infty \rightarrow \text{il BORDO DI ATTACCO è un punto critico della trasformazione in cui } |f'(z)| = 0$$

OSSERVAZIONE:

Le pressioni agiscono perpendicolarmente alle superficie, per cui dovrebbero dare una risultante perpendicolare alla lamina stessa.

La portanza, però, è per definizione perpendicolare alla direzione della corrente, quindi inclinata di α rispetto alla lamina.

Questa contraddizione si spiega considerando che l'infinito di velocità, quindi di pressione, nel bordo d'attacco genera una forza di trazione che riesce a muovere la forza risultante di un angolo α



Esprimendo $\theta' = \theta'(\theta)$, si ottiene:

$$V^* = V_\infty \left(1 + \alpha \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} + \underbrace{2\beta \sin\theta}_{\text{termine in più rispetto alla lamina piana}} \right)$$

considerando $\alpha \ll 1$ e sostituendo $|\sin\theta|$ con $\sin\theta$

termine in più rispetto alla lamina piana

Se $\alpha = 0$, non si ha alcuna singolarità al bordo di attacco, altrimenti:

$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \rightarrow \pm \infty \rightarrow$ se $\alpha \neq 0$ l'area di cerchio presenta un
 infinito di velocità, e quindi anche di pressione, al bordo di attacco.

Scriviamo la velocità complessa in coordinate polari:

$$\frac{dW}{dz} e^{i\theta} = V_r - iV_\theta \quad \text{con } \begin{cases} V_r : \text{componente radiale} \\ V_\theta : \text{componente tangenziale} \end{cases}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} e^{i\theta} &= \frac{d}{dz} (kz^m) e^{i\theta} = kmz^{m-1} e^{i\theta} = mk\pi^{m-1} e^{i(m-1)\theta} e^{i\theta} = \\ &= mk\pi^{m-1} e^{im\theta} = V_r - iV_\theta \end{aligned}$$

Quindi:

$$V_r = mk\pi^{m-1} \cos(m\theta)$$

$$V_\theta = -mk\pi^{m-1} \sin(m\theta)$$

Per capire come è fatto il campo di moto, studiamo le iso linee $\psi = \text{cost}$, in particolare quelle $\psi = 0$

$$-\boxed{\psi = 0} \Rightarrow k\pi^m \sin(m\theta) = 0 \rightarrow \pi = 0 \quad \text{ORIGINE degli ASSI}$$

studiamo le componenti del campo di velocità sulle linee $\psi = 0$:

$$\begin{aligned} &\hookrightarrow \sin(m\theta) = 0 \\ \text{line } x &\rightarrow \begin{cases} \bullet \theta = 0 \\ \bullet \theta = \pi/m \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{RETTE USCENTI} \\ \text{DALL'ORIGINE} \end{array} \end{aligned}$$

$$V_\theta = 0$$

$$V_r = (\pm)mk\pi^{m-1}$$

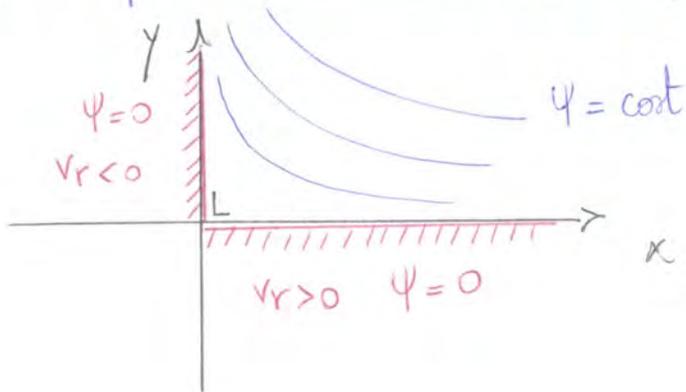
$$\hookrightarrow \begin{cases} + \text{ se } \theta = 0 \\ - \text{ se } \theta = \pi/m \end{cases}$$

studiamo ora come succede al variare di m .

Allora:

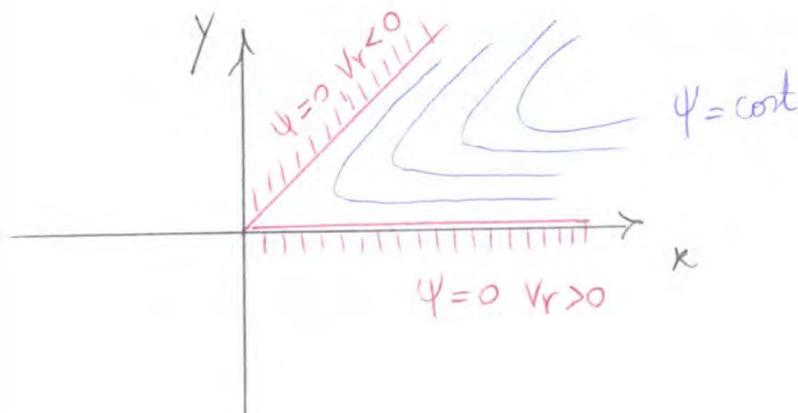
$\psi = 2Kxy \rightarrow$ equazione di un'iperbole

Il campo di moto risultante è quello all'interno dell'angolo retto



• $m > 2$

Campo di moto all'interno dell'angolo $\vartheta < \frac{\pi}{2}$



Ritorniamo al caso $1 < m < 2$, in cui l'origine era un punto di stacco.

Introduciamo l'angolo β , come complemento a π di ϑ :

$$\beta = \pi - \vartheta = \pi \left(\frac{m-1}{m} \right)$$

Consideriamo il diedro di semiapertura β e lo facciamo investire da una corrente uniforme lungo le bisettrici del diedro

ESERCITAZIONE - Trasformazione di Ruffe - Joukowski

Consideriamo un campo di moto composto da:

- i) corrente uniforme di modulo V_∞ , direzione concorde all'asse x e inclinazione α
- ii) doppietta di momento μ , in direzione discorde rispetto all'asse x , con inclinazione α .
- iii) vortice di intensità Γ in senso antiorario

CORRENTE UNIFORME

$$W(z) = V_\infty e^{-i\alpha} \cdot z = V_\infty e^{i(\theta-\alpha)} = V_\infty \pi [\cos(\theta-\alpha) + i \sin(\theta-\alpha)]$$

$$\psi = V_\infty \pi \sin(\theta-\alpha)$$

$$\phi = V_\infty \pi \cos(\theta-\alpha)$$

DOPPIETTA

$$W(z) = \frac{\mu}{2\pi z} e^{i\alpha} = \frac{\mu}{2\pi} e^{-i(\theta-\alpha)} = \frac{\mu}{2\pi\pi} [\cos(\theta-\alpha) - i \sin(\theta-\alpha)]$$

$$\psi = -\frac{\mu}{2\pi} \pi \sin(\theta-\alpha)$$

$$\phi = \frac{\mu}{2\pi} \pi \cos(\theta-\alpha)$$

VORTICE

$$W(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(re^{i\theta}) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} [\ln r + i\theta] = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

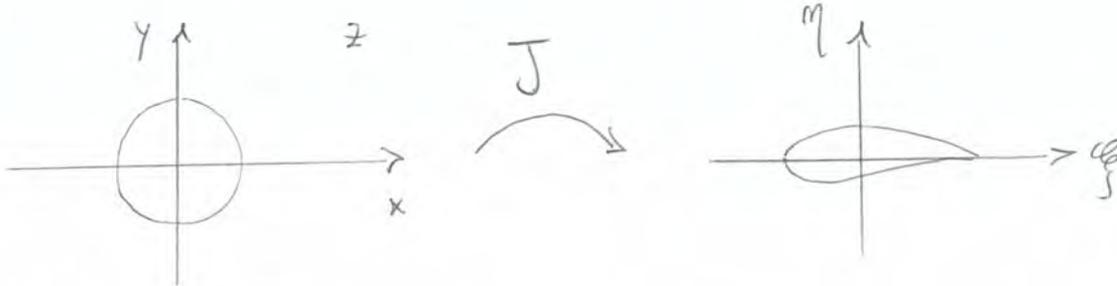
$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

Tutti e tre i campi sono applicati in $O(0,0)$ e dello stesso luogo e un flusso attorno ad un cilindro circolare di raggio r con un'incitazione Γ .

Utilizziamo la trasformazione di Kutta-Joukowski per passare dal piano $z = x+iy$ al piano $\zeta = \xi+i\eta$.

$$f(z) = z + \frac{R^2}{z} = J$$



La velocità complessa sarà:

$$V = \frac{dW}{dz} = u - iv \quad (\text{nel piano complesso } z)$$

Nel piano trasformato:

$$V^* = \frac{dW^*}{d\zeta} = \frac{dW}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} = \frac{V}{f'(z)} = u^* - iv^*$$

$$f'(z) = 1 - \frac{R^2}{z^2}$$

Allora:

$$V = \frac{dW}{dz} = V_\infty \left(e^{-i\alpha} - \frac{(R+\lambda)^2 + S\gamma^2}{(z+\lambda-iS\gamma)^2} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi(z+\lambda-iS\gamma)}$$

$$V^* = \frac{dW^*}{d\zeta} = \frac{V}{f'(z)} = \frac{\left[V_\infty \left(e^{-i\alpha} - \frac{(R+\lambda)^2 + S\gamma^2}{(z+\lambda-iS\gamma)^2} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi(z+\lambda-iS\gamma)} \right]}{1 - \frac{R^2}{z^2}}$$

Quando $z = +R$, la velocità $V^* = u^* - iv^*$ ha una singolarità, cioè $V^* \rightarrow \infty$
 Perciò:

- $z = +R$ si trasformerà nel fondo di fuga e perciò dobbiamo imporre le cond. di Kutta per regolarizzare il flusso
- $z = -R$ in questo caso il punto $z = -R$ ricade proprio all'interno delle linee di corrente e perciò non dà problemi.

Calcoliamo la portanza, dal teorema di Kutta-Joukowski:

$$\underline{L} = \rho \underline{V_\infty} \wedge \Gamma \underline{k}$$

$$\underline{k} = (0, 0, 1)$$

$$\underline{V_\infty} = (V_{\infty x}, V_{\infty y}, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{k} = (0, 0, 1) \\ \underline{V_\infty} = (V_{\infty x}, V_{\infty y}, 0) \end{array} \right\} \rightarrow \underline{V_\infty} \wedge \underline{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ V_{\infty} \cos \alpha & V_{\infty} \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (V_{\infty} \sin \alpha, -V_{\infty} \cos \alpha, 0)$$

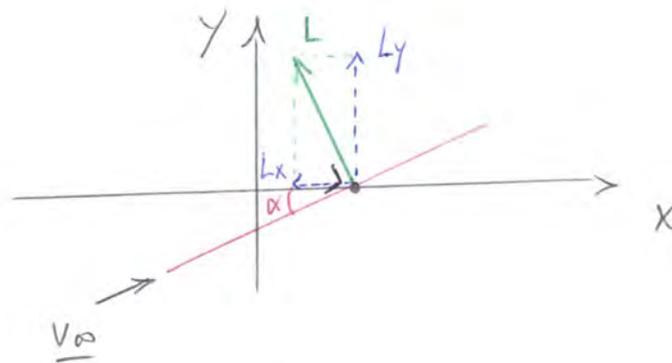
Se $\underline{V_\infty}$ non è allineata con l'asse x , si scrivono dunque due componenti di portanza:

$$\begin{cases} L_x = \rho V_{\infty} \sin \alpha \Gamma \\ L_y = -\rho V_{\infty} \cos \alpha \Gamma \end{cases} \quad (\Gamma < 0) \Rightarrow \underline{L} = L_x \hat{i} + L_y \hat{j}$$

$$|\underline{L}| = \sqrt{\rho^2 V_{\infty}^2 \sin^2 \alpha \Gamma^2 + \rho^2 V_{\infty}^2 \cos^2 \alpha \Gamma^2} = \rho V_{\infty} |\Gamma| = L > 0$$

Allora:

$$\begin{cases} L_x = -L \sin \alpha \\ L_y = +L \cos \alpha \end{cases}$$



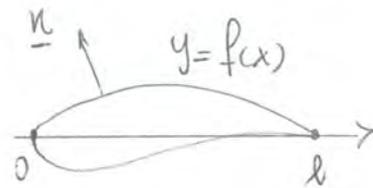
Quindi, per come abbiamo impostato il problema:

- Se $(s_x, s_y) = (0, 0) \rightarrow$ lamina piana tra $-zR$ e zR
- Se $(s_x, s_y) = (x_c, 0), x_c < 0 \rightarrow$ profilo alare simmetrico risp. a $\frac{y}{x}$
- Se $(s_x, s_y) = (0, y_c), y_c > 0 \rightarrow$ arco di cerchio tra $-zR$ e zR
- Se $(s_x, s_y) = (x_c, y_c), x_c < 0, y_c > 0 \rightarrow$ profilo alare generico con curvatura

- Spostarsi lungo x significa agire sulla spessa
- Spostarsi lungo y significa agire sulla curvatura

Esprimiamo la condizione di tangenza in maniera differente:

Sia $y = f(x)$ la linea che rappresenta la parete del corpo.



Definiamo:

$$F(x) = y - f(x) = 0$$

Allora, il vettore normale \underline{n} del profilo, assunto positivo uscente dal corpo, avrà componenti sul dorso e sul ventre:

$$\underline{n} = \pm \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{|\nabla F|} \left(\mp \frac{df}{dx}, \pm 1 \right)$$

La condizione di tangenza diventa:

$$(v_\infty + \nabla\varphi) \cdot \frac{1}{|\nabla F|} \left(\mp \frac{df}{dx}, \pm 1 \right) = 0$$

$$\frac{1}{|\nabla F|} \left[\mp \left(v_\infty \cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \frac{df}{dx} \pm \left(v_\infty \sin\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) \right] = 0$$

$$\left(v_\infty \cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \frac{dy}{dx} - \left(v_\infty \sin\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) = 0$$

Allora:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v' = \left(v_\infty \cos\alpha + u' \right) \frac{dy}{dx} - v_\infty \sin\alpha \quad \text{con } 0 \leq x \leq l$$

Se non ci fosse u' , il problema sarebbe facilmente risolvibile. In questo caso, però, ci siamo di fronte ad un problema non lineare

\Rightarrow Supponiamo che la perturbazione sia piccola rispetto alle correnti uniformi:

$$v' \ll v_\infty \rightarrow \begin{cases} u' \ll v_\infty \\ w' \ll v_\infty \end{cases}$$

Procedo:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \\ v'(x, 0^\pm) = v_\infty \left(\frac{dy^\pm}{dx} - \alpha \right) \text{ sulla corda} \\ \nabla \varphi = 0 \text{ all'infinito} \\ \text{Condizione di Kutta} \end{cases}$$

Tale problema è LINEARE e può essere scomposto in sottoproblemi più semplici, che soddisfanno una parte della condizione di tangenza linearizzata.

$$v' = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$



- $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{x, 0^\pm} = v_\infty \frac{dy^\pm}{dx}$ PROFILO ALARE INVESTITO DA CORRENTE SENZA INCIDENZA
- $\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right)_{x, 0^\pm} = -v_\infty \alpha$ LAMINA PIANA INVESTITA DA CORRENTE CON INCIDENZA

Il primo sottoproblema può a sua volta essere scomposto in due ulteriori problemi, ricordando che:



$$y^\pm(x) = y_m(x) \pm y_s(x), \text{ con}$$

$$y_m(x) = \frac{1}{2} (y^+(x) + y^-(x)) \text{ equazione delle linee medie}$$

$$y_s(x) = \frac{1}{2} (y^+(x) - y^-(x)) \text{ legge di distribuzione degli spessori}$$

Allora:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{x, 0^\pm} = v_\infty \left(\frac{dy_m}{dx} \pm \frac{dy_s}{dx} \right)$$

- $\left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial y} \right)_{x, 0^\pm} = v_\infty \frac{dy_m}{dx}$ PROBLEMA DELLA LINEA MEDIA CON INCIDENZA NULLA
- $\left(\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial y} \right)_{x, 0^\pm} = \pm v_\infty \frac{dy_s}{dx}$ PROBLEMA SIMMETRICO CON INCIDENZA NULLA

Dal teorema di Bernoulli:

$$p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 = p + \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 \left(1 - \frac{V^2}{V_{\infty}^2} \right) = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 \left[1 - \frac{(V_{\infty} \cos \alpha + u')^2 + (V_{\infty} \sin \alpha + v')^2}{V_{\infty}^2} \right] =$$

$$= p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 \left[1 - \frac{V_{\infty}^2 + 2V_{\infty} u' \cos \alpha + u'^2 + v'^2 + 2V_{\infty} \sin \alpha v'}{V_{\infty}^2} \right] =$$

$$= p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 \left[\cancel{1} - 1 - \frac{2V_{\infty}(u' \cos \alpha + v' \sin \alpha) + (u'^2 + v'^2)}{V_{\infty}^2} \right] \quad (*)$$

$$\begin{cases} u' \ll V_{\infty} \\ v' \ll V_{\infty} \\ \sin \alpha \approx \alpha \\ \cos \alpha \approx 1 \end{cases}$$

$$\stackrel{(*)}{\approx} p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 \left[-2 \frac{(u' + v' \alpha)}{V_{\infty}} - \frac{u'^2 + v'^2}{V_{\infty}^2} \right]$$

↑
trascurabile

↳ trascurabile

Allora:

$$p \approx p_{\infty} - \rho V_{\infty} u'$$

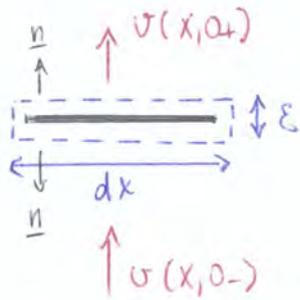
Quindi:

$$c_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2} = -2 \frac{u'}{V_{\infty}}$$

coefficiente di pressione linearizzato

Ognuno dei tre problemi può essere studiato mediante la sovrapposizione degli effetti di distribuzioni di singolarità lungo il segmento $0 \leq x \leq l$ all'asse x coincidente con la corda del profilo.

Per $x \in \mathcal{C}$, calcoliamo la portata attraverso un circuito di lunghezza dx e altezza trascurabile:



$$dQ = q(x)dx = (\underline{v} \cdot \underline{n})ds$$

$$q(x)dx = v(x, 0+)dx - v(x, 0-)dx$$

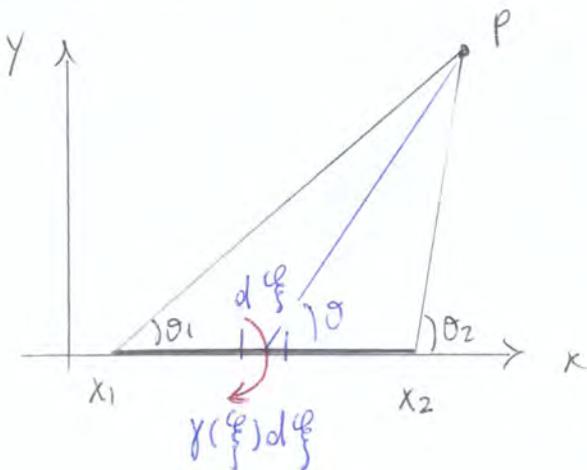
$$q(x) = v(x, 0+) - v(x, 0-)$$

Perché per simmetria $|v(x, 0+)| = |v(x, 0-)|$:

$$v(x, 0+) = -v(x, 0-) = \frac{q(x)}{2}$$

La componente u è continua attraverso la distribuzione di singolarità, mentre la componente v , che nel segmento dipende solo dalle sorgenti locali, è discontinua e il salto vale $q(x)$.

DISTRIBUZIONE LINEARE DI VORTICI



In questo caso, i VORTICI SONO ASSUMTI POSITIVI IN VERSO ORARIO.

$$dW(z) = \frac{i\gamma(\xi)d\xi}{2\pi} \ln(z - \xi)$$

$$du - i dv = \frac{d}{dz}(dW) = i \frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi} \cdot \frac{1}{z - \xi}$$

$$1 - iN = \int_{x_1}^{x_2} \frac{i\gamma(\xi)d\xi}{2\pi} \cdot \frac{1}{(x - \xi) + iy} d\xi = \int_{x_1}^{x_2} \frac{i\gamma(\xi)}{2\pi} \frac{(x - \xi) - iy}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi$$

Allora:

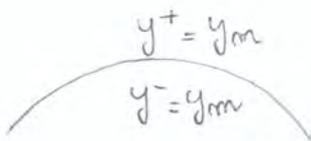
$$N'(x, 0_+) = -N'(x, 0_-)$$

studiaremo tale problema mediante una distribuzione di sorgenti.

Affinchè le forme sia chiusa, occorre ovviamente che:

$$\int_0^l q(x) dx = 0$$

• PROBLEMA DELLA LINEA MEDIA SENZA INCIDENZA



$$\frac{dy^+}{dx} = \frac{dy_m}{dx} = \frac{dy^-}{dx}$$

$$N'_\pm = V_\infty \frac{dy^\pm}{dx}$$

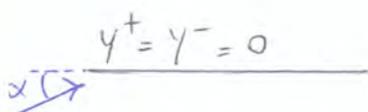
Allora:

$$N'(x, 0_+) = N'(x, 0_-)$$

studiaremo il problema mediante una distribuzione di vortici

$$\Gamma = \int_0^l \gamma_1(x) dx \rightarrow \gamma_1(x)$$

• PROBLEMA DELLA LAMINA PIANA CON INCIDENZA α



$$N'(x, 0_+) = N'(x, 0_-)$$

$$N'_\pm = -V_\infty \alpha$$

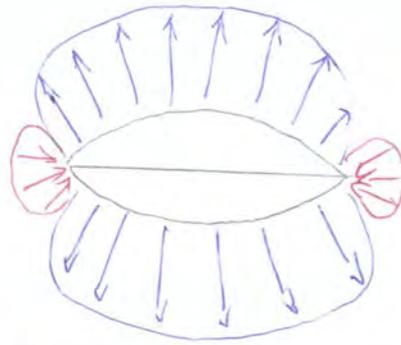
studiaremo il problema mediante una distribuzione di vortici

$$\Gamma = \int_0^l \gamma_2(x) dx \rightarrow \gamma_2(x)$$

In entrambi gli ultimi due casi la portanza e circolazione non nulla, cioè è possibile riunirli in un unico problema: LINEA MEDIA IN UNA CORRENTE CON $\alpha \neq 0$ E COND. DI TANGENZA $u'(x, 0) = V_\infty (\frac{dy_m}{dx} - \alpha)$ $0 \leq x \leq l$

Da tale formula è possibile ricavare che $u'(x,0)$ è finita $\forall 0 < x < l$ e $u'(x,0) \rightarrow \infty$ per $x \rightarrow 0$ e $x \rightarrow l$.

Nota $u'(x,0)$ sappiamo che:



$$c_p^+ = -2 \frac{u'(x,0)}{V_\infty}$$

Poiché $c_p^+ = c_p^- \Rightarrow \Delta c_p = c_p^- - c_p^+ = 0$

Allora:

$$c_l = \int_0^l \Delta c_p \frac{dx}{l} = 0$$

La portanza e anche il momento sono nulli

IL SOLUZIONE DEL PROBLEMA DELLA LINEA MEDIA CON INCIDENZA

Le linee medie porta nelle correnti uniformi o in una perturbazione che è soluzione del problema di Neumann per l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$u'(x,0) = V_\infty \left[\frac{dy_m}{dx}(x) - \alpha \right] \quad 0 \leq x \leq l$$

$$y = y_m(x) = \frac{1}{2} (y^+ + y^-)$$

$$\nabla \varphi = 0 \quad \text{nell' } \infty$$

lavora

Studiando il problema mediante una distribuzione di vortici sappiamo che:

$$u'(x,0_\pm) = \pm \frac{\gamma(x)}{2} \rightarrow \gamma(x) = u'(x,0_+) - u'(x,0_-)$$

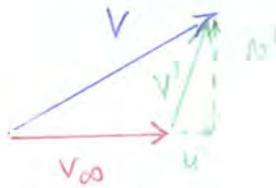
$$u'(x,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{\xi - x} d\xi$$

Inoltre:

$$c_p^\pm = -2 \frac{u'(x,0_\pm)}{V_\infty} = \mp \frac{\gamma(x)}{V_\infty}$$

Conoscendo la funzione $\gamma(x)$, le componenti della velocità di perturbazione e il coefficiente di pressione sono calcolabili mediante tali relazioni.

Tramite alcune osservazioni è possibile legare la funzione $\gamma(\theta)$ con la distribuzione di velocità $V(\theta)$.



È possibile affermare che le componenti u' di V' non contribuiscono praticamente a far variare il modulo di V . Ha il solo scopo di mutare la velocità di un certo punto P .

Per piccole perturbazioni, allora:

$$|V'| = \left| (V_\infty + u') \hat{i} + u' \hat{j} \right| \approx V_\infty + u' \Rightarrow u' \approx V - V_\infty$$

Perciò, poiché $\gamma(\theta) = u'(\theta) - u'(-\theta)$, avremo:

$$\gamma(\theta) = u'(\theta) - u'(-\theta) \approx V(\theta) - V(-\theta), \text{ con } V(\theta) = V_\infty \left[1 + \alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \beta \sin\theta \right]$$

Allora:

$$\begin{aligned} \gamma(\theta) &\approx V_\infty \left[1 + \alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \beta \sin\theta - 1 + \alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \beta \sin\theta \right] = \\ &= 2V_\infty \left[\underbrace{\alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}}_{\text{effetti dell'incidenza (lemina piano)}} + \underbrace{2\beta \sin\theta}_{\text{effetti incrocamento (linea media)}} \right] \end{aligned}$$

Quindi:

$$\gamma(\theta) \approx 2V_\infty \left[\alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + 2\beta \sin\theta \right] \text{ relazione fra distribuzione di velocità e vorticità per l'arco di cerchio}$$

Tale risultato può essere generalizzato, sostituendo α con A_0 , costante che tiene conto delle differenze rispetto alla lemina piana, e rappresenta gli effetti dell'incrocamento mediante una sommatoria di funzioni trigonometriche che soddisfino le stesse condizioni alle estremità della funzione $\sin\theta$.

Risolviamo la relazione come:

$$-\frac{1}{\pi} \left[\pi A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m G_m^* \right] = \frac{d\gamma_m}{dx}(\theta) - \alpha$$

$$+ A_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} A_m G_m^* = \alpha - \frac{d\gamma_m}{dx}(\theta) \quad G_m^* = -\pi \cos(m\theta)$$

$$A_0 - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\theta) = \alpha - \frac{d\gamma_m}{dx}(\theta)$$

Per determinare A_0 , integriamo su θ i membri tra 0 e π :

$$A_0 \int_0^{\pi} d\theta - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^{\pi} \cos(m\theta) d\theta = \alpha \int_0^{\pi} d\theta - \int_0^{\pi} \frac{d\gamma_m}{dx}(\theta) d\theta$$

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\gamma_m}{dx}(\theta) d\theta$$

Il termine $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\gamma_m}{dx}(\theta) d\theta$ è detto

INCIDENZA IDEALE α_{id}

Perciò:

$$A_0 = \alpha - \alpha_{id}$$

Riprendiamo la distribuzione di vorticità:

$$\gamma(\theta) \approx 2V_{\infty} \left[(\alpha - \alpha_{id}) \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\theta) \right]$$

Osserviamo che α_{id} è l'incidenza per la quale non si ha un infinito di vorticità al bordo di attacco, in quanto si annulla il termine $\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$. Per $\alpha = \alpha_{id}$ le correnti, in prossimità del bordo di attacco, si allineano con la pendenza della lamina a $\theta = 0$. Per $\alpha \neq \alpha_{id}$ il disallineamento genera un punto di vortice sul ventre, o in alcuni casi sul dorso, contribuendo a formare le correnti e a contornare il bordo di attacco mantenendo un infinito di vorticità nei punti

CALCOLO DEL COEFFICIENTE DI PORTANZA c_e

$$c_e = \int_0^l \frac{\Delta c_p}{l} \frac{dx}{l} = \frac{l}{V_{\infty}} \int_0^l \gamma(\theta) \frac{dx}{l}$$

Cambio di coordinate:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{l}{2} (1 - \cos\theta) \\ dx &= \frac{l}{2} \sin\theta d\theta \end{aligned} \right\} \rightarrow c_e = \frac{1}{V_{\infty}} \int_0^{\pi} \gamma(\theta) \sin\theta d\theta$$

ma $\gamma(\theta) = 2V_{\infty} \left[\underbrace{(\alpha - \alpha_{id})}_{A_0} \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\theta) \right]$, allora:

$$c_e = 2 \left[A_0 \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta) d\theta + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^{\pi} \underbrace{\sin\theta \sin(m\theta)}_{\substack{m=1 \rightarrow \pi/2 \\ m \neq 1 \rightarrow 0}} d\theta \right] =$$

$$= 2\pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) =$$

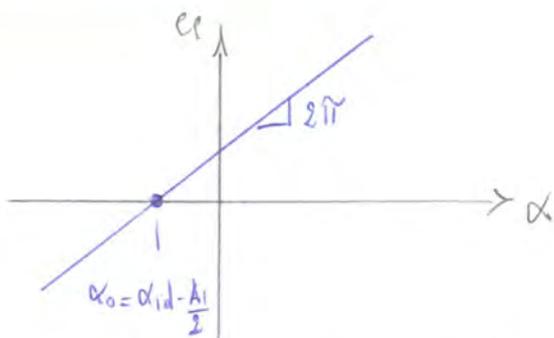
$$= 2\pi \left(\alpha - \left(\alpha_{id} - \frac{A_1}{2} \right) \right)$$

poniamo $\alpha_0 = \alpha_{id} - \frac{A_1}{2}$, allora:

$$c_e = 2\pi (\alpha - \alpha_0)$$

con $\alpha_0 = \alpha_{id} - \frac{A_1}{2}$, $\alpha_{id} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\gamma_m(\theta)}{dx} d\theta$,

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\gamma_m(\theta)}{dx} \cos\theta d\theta$$



si osserva che i valori trovati con la teoria sono leggermente superiori ai valori reali, per cui la circulatoria risulta di poco sovrestimata. Per questo inserisce un coefficiente correttivo k davanti alla pendenza, con $\frac{7}{8} < k < 1$.

$\Rightarrow |c_e = 2\pi k (\alpha - \alpha_0)|$ (per basse incidenze)

$$\frac{\partial C_{m_0}}{\partial \alpha} = 2\pi \left(\frac{x_0}{l} - \frac{1}{4} \right) = 0 \rightarrow \boxed{\frac{x_0}{l} = \frac{1}{4}}$$

Il focus del profilo è posizionato a $\frac{1}{4}$ della corda.

Quindi:

$$C_{m_0} = -\frac{\pi}{4} (A_1 - A_2)$$

CALCOLO DEL COEFFICIENTE DI PRESSIONE

$$C_p^+(\theta) = -\frac{\gamma(\theta)}{v_\infty} = -2 \left[(\alpha - \alpha_{id}) \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\theta) \right] = C_{p_{\alpha - \alpha_{id}}}^+ + C_{p_{\alpha_{id}}}^+$$

$$\begin{aligned} \bullet C_{p_{\alpha_{id}}}^+ &= -2 \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\theta) = -2 \frac{\sin\theta}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(\frac{\pi \sin(m\theta)}{\sin\theta} \right) = \\ &= -2 \frac{\sin\theta}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} A_m G_m = \\ &= -2 \frac{\sin\theta}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\theta')}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' \end{aligned}$$

Perché:

$$\underbrace{A_0}_{-\alpha_{id}} - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\theta) = \alpha - \frac{dy_m(\theta)}{dx} \rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\theta) = \frac{dy_m(\theta)}{dx} - \alpha_{id}$$

Allora:

$$C_{p_{\alpha_{id}}}^+ = -2 \frac{\sin\theta}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\frac{dy_m(\theta')}{dx} - \alpha_{id}}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' = -2 \frac{\sin\theta}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\frac{dy_m(\theta')}{dx}}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' +$$

$$- \alpha_{id} \int_0^{\pi} \frac{d\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta} = -2 \frac{\sin\theta}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\frac{dy_m(\theta')}{dx} + \frac{dy_m(\theta)}{dx}}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta'$$

$G_0 = 0$

si aggiunge perché rende più facile il calcolo e non cambia il valore dell'integrale, perché separabili a trova su G_0 .

lora:

$$C_p^+(\theta) = -2 (\alpha - \alpha_{id}) \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} - 2 \frac{\sin\theta}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\frac{dy_m(\theta')}{dx} - \frac{dy_m(\theta)}{dx}}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta'$$

Allora:

$$\frac{dy(\theta)}{dx} = 4h \cos \theta$$

Calcolo l'incidenza ideale:

$$\alpha_{id} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dy(\theta)}{dx} d\theta = \frac{4h}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta = 0$$

$$\alpha_{id} = 0$$

$\alpha_{id} = 0$ per tutti i profili con asse di mezzeria parallelo all'asse y.

Calcolo l'incidenza di portanza nulla:

$$\alpha_0 = \alpha_{id} - \frac{A_1}{2}$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dy}{dx}(\theta) \cos \theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 4h \cos^2 \theta d\theta = \frac{8h}{\pi} \left[\frac{1}{2} (\theta + \sin \theta \cos \theta) \right]_0^{\pi} = 4h$$

$$\alpha_0 = -\frac{A_1}{2} = -2h = -0,075 \text{ rad} = -4,30^\circ$$

$$\alpha_0 = -0,075 \text{ rad}$$

Calcolo il coefficiente di portanza:

$$C_{e_{id}} = 2\pi (\alpha - \alpha_0) = 2\pi (\alpha - \alpha_{id} + \frac{A_1}{2}) = \pi A_1 = 4\pi h = 0,47$$

$$C_{e_{id}} = 0,47$$

Calcolo il coefficiente di momento flettente:

$$C_{m_0} = -\frac{\pi}{4} (A_1 - A_2)$$

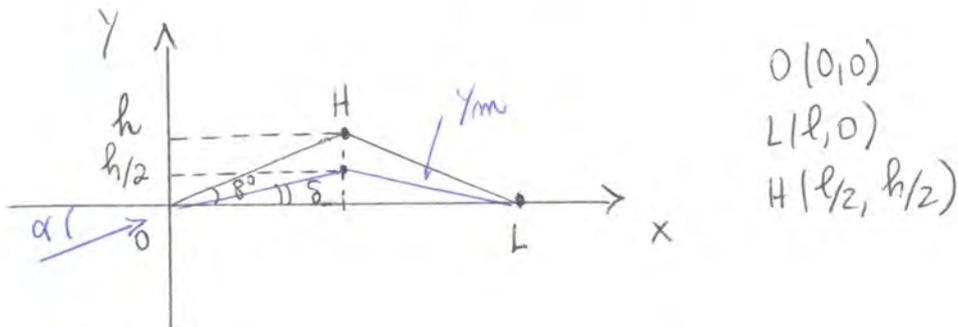
$$A_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dy}{dx}(\theta) \cos(2\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 4h \cos \theta \cos(2\theta) d\theta = \frac{8h}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta = \frac{8h}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta (2\cos^2 \theta - 1) d\theta = \frac{8h}{\pi} \int_0^{\pi} 2\cos^3 \theta d\theta - \frac{8h}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta = 0$$

$$C_{m_0} = -\frac{\pi}{4} \cdot A_1 = -\frac{\pi}{4} \cdot 4h = -\pi h = -0,118$$

$$C_{m_0} = -0,118$$

② PROFILO A TRIANGOLO ISOSCELE

Calcolare il C_e di un profilo a triangolo isoscele con rughe alla base pari a 8° e invertito con incidenza $\alpha = 3^\circ$



Per calcolare il C_e abbiamo bisogno solamente dell'eq. della linea media. Essa è una spezzata che passa per i punti O, L, H .

$$y_m(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\delta) \cdot x & \text{per } 0 < x \leq \frac{l}{2} \\ -\operatorname{tg}(\delta) \cdot x & \text{per } \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}$$

$$\frac{dy_m(x)}{dx} = \begin{cases} \operatorname{tg} \delta & \text{per } 0 < x \leq \frac{l}{2} \\ -\operatorname{tg} \delta & \text{per } \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}$$

Calcoliamo δ :

$$\delta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{h/2}{l/2}\right) \rightarrow \operatorname{tg} \delta = \frac{h}{l} = \frac{l/2 \operatorname{tg}(8^\circ)}{l} = \frac{\operatorname{tg}(8^\circ)}{2} = 0.07$$

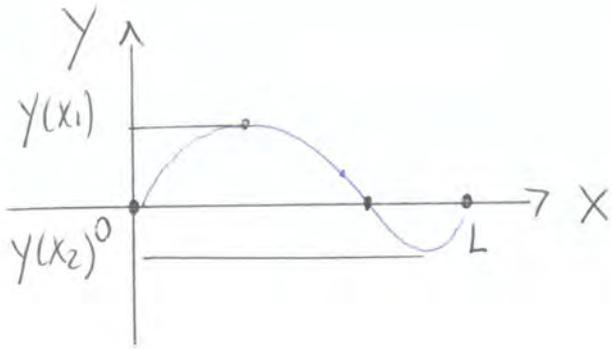
$$C_e = 2\pi(\alpha - \alpha_0) = 2\pi\left(\alpha - \alpha_{id} + \frac{A_1}{2}\right)$$

$\alpha_{id} = 0$ perché l'axe di mezzeria è parallela all'asse x

$$\alpha = 3^\circ = 3 \cdot \frac{\pi}{180} = 0.0523 \text{ rad}$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dy_m(\theta)}{dx} \cos \theta d\theta = \frac{2}{\pi} \operatorname{tg} \delta \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta - \frac{2}{\pi} \operatorname{tg} \delta \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta d\theta = \frac{2}{\pi} \operatorname{tg} \delta + \frac{2}{\pi} \operatorname{tg} \delta$$

$$A_1 = \frac{4}{\pi} \operatorname{tg} \delta = 0.0895 \Rightarrow \boxed{C_e = 2\pi(0.0523 + \frac{0.0895}{2}) = 0.61}$$



$$h = \frac{y_{\max}}{l} = Y_{\max} = y(x_1) = 0.03$$

$$h = 3\%$$

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{1}{4} \left(3x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{7}{8} \right)$$

Cambio di coordinate: $x = \frac{l}{2} (1 - \cos\theta) \rightarrow X = \frac{x}{l} = (1 - \cos\theta)$

$$X = \frac{1}{2} (1 - \cos\theta)$$

$$\hookrightarrow \frac{dy}{dx}(\theta) = \frac{1}{16} \left(-1 + \frac{3}{2} \cos\theta + 3 \cos^2\theta \right)$$

• Calcolo α_{id} :

$$\begin{aligned} \alpha_{id} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dy}{dx}(\theta) d\theta = \frac{1}{16\pi} \int_0^{\pi} \left(-1 + \frac{3}{2} \cos\theta + 3 \cos^2\theta \right) d\theta = -\frac{1}{16} + \frac{1 \cdot 3 \cdot \pi}{16\pi \cdot 2} = \\ &= -\frac{1}{16} + \frac{3}{32} = \frac{1}{32} \text{ rad} = 1.79^\circ \end{aligned}$$

• Calcolo α_0 :

$$\alpha_0 = \alpha_{id} - \frac{A_1}{2}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{16\pi} \int_0^{\pi} \frac{dy}{dx}(\theta) \cos\theta d\theta = \frac{2}{16\pi} \int_0^{\pi} \left(-1 + \frac{3}{2} \cos\theta + 3 \cos^2\theta \right) \cos\theta d\theta = \\ &= \frac{2}{16\pi} \int_0^{\pi} \left(\underbrace{-\cos\theta}_{\text{integr. nullo}} + \frac{3}{2} \cos^2\theta + \underbrace{3 \cos^3\theta}_{\text{integr. nullo}} \right) d\theta = \frac{2}{16\pi} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 0.09375 \end{aligned}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{32} \text{ rad} - \frac{0.09375}{2} \text{ rad} = -0.015 \text{ rad} \approx -0.9^\circ$$

Equazione linea media

• dorso \rightarrow parabola pesante per $0, A, L$.

$$y = ax^2 + bx \rightarrow y^+ = 4h \left(x - \frac{x^2}{l} \right) = 0.2 \left(x - \frac{x^2}{l} \right)$$

• ventre $\rightarrow y^- = 0$

Allora:

$$y_m = \frac{1}{2} (y^+ + y^-) = 0.1 \left(x - \frac{x^2}{l} \right)$$

$$\frac{dy_m}{dx}(x) = 0.1 \left(1 - \frac{2x}{l} \right)$$

ambio di coordinate

$$x = \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) \rightarrow \frac{dy_m}{dx}(\theta) = 0.1 \cos \theta$$

angolo α_{id}

$\alpha_{id} = 0$ perché l'asse di mezzo è parallelo all'asse y

angolo α_0

$$\alpha_0 = \alpha_{id} - \frac{A_1}{2}$$

$$A_1 = \frac{l}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dy_m}{dx}(\theta) \cos \theta d\theta = \frac{l}{\pi} \int_0^{\pi} 0.1 \cos^2 \theta d\theta = \frac{0.2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 0.1$$

$$\alpha_0 = - \frac{A_1}{2} = -0.05 \text{ rad} = -2,8^\circ$$

Calcolo $C_{e id}$

$$C_{e id} = 2\pi \left(\alpha - \alpha_{id} + \frac{A_1}{2} \right) = 2\pi \frac{A_1}{2} = \pi A_1 = 0.314$$

Calcolo C_{m_0}

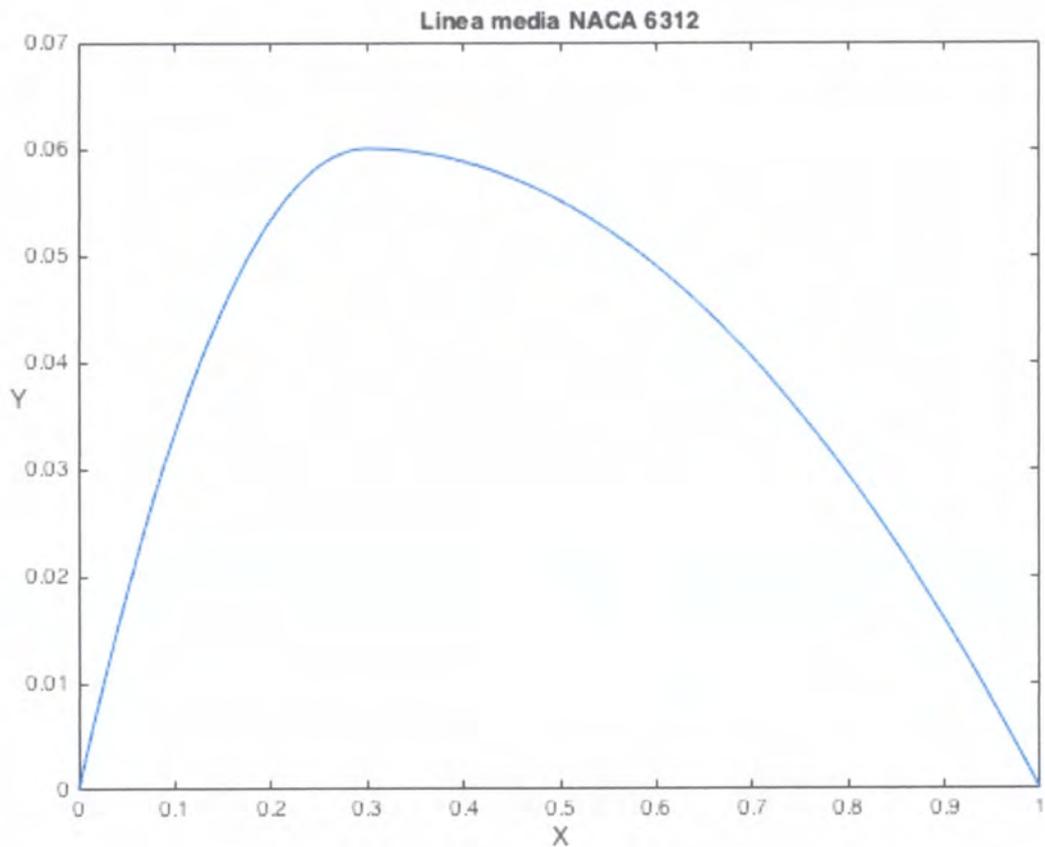
$$C_{m_0} = -\pi \frac{A_1}{2} (A_1 - A_2)$$

$$\int_a^b f(x) dx \rightarrow \text{SINTASSI: trapz}(x, f)$$

utilizzare il comando "acos" (arccoseno) per definire ϑ :

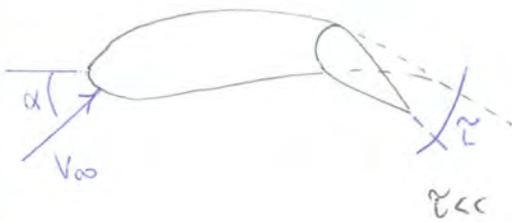
$$\vartheta = \text{acos}(\dots)$$

```
Cl_id=2*pi*A1/2;  
% calcolo Cm0 %  
Cm0=-pi/4*(A1-A2);
```



ESERCIZIO 2

Sia dato il seguente profilo alare con flap. Studiare come scade all'indietro al variare di τ e come varia il c_e .



Scorporiamo il problema in problemi più semplici:



LAMINA CON INCIDENZA α



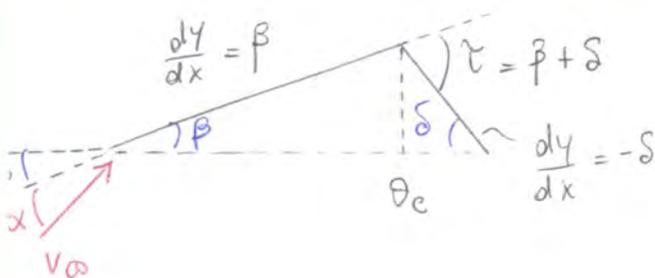
LINEA MEDIA SENZA INCIDENZA



SPESORE SENZA INCIDENZA

studiamo insieme il primo e il secondo problema:

LINEA MEDIA CON $\alpha \neq 0$ E CONDIZIONE DI TANGENZA $v'(x_c, 0) = V_\infty \left(\frac{dy}{dx} - \alpha \right)$



Quindi:

$$\alpha_{id} = \frac{\tau \theta_c}{\pi} - \delta$$

$$\begin{aligned} \alpha_{id} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx}(\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\beta \int_0^{\theta_c} d\theta - \delta \int_{\theta_c}^\pi d\theta \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\beta \theta_c - \delta (\pi - \theta_c) \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\tau \theta_c - \pi \delta \right] \end{aligned}$$

ESERCITAZIONE 24-11-2015 - PICCOLE PERTURBAZIONI

① Una lamina piana di corda $l = 0.8 \text{ m}$ è rivestita da una corrente di aria standard a $v_{\infty} = 20 \text{ m/s}$ con incidenza $\alpha = 4^\circ$.
 calcolare la circolazione Γ intorno alla lamina e il coefficiente di pressione c_p^+ , c_p^- , Δc_p .

Utilizzare:

- teoria piccole perturbazioni
- trasformazioni di Kutta-Joukowski

PICCOLE PERTURBAZIONI

La lamina piana è rappresentabile con una distribuzione di vortici:

$$\gamma(\theta) = 2V_{\infty} \left[A_0 \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\theta) \right] \quad \text{con } \theta \in [0, \pi]$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \alpha - \alpha_{id} \\ \alpha_{id} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\gamma_m(\theta)}{dx} d\theta \end{aligned} \right\} \text{ per le lamine piane } \frac{d\gamma_m}{dx} = 0 \Rightarrow \alpha_{id} = 0$$

$$\Rightarrow A_0 = \alpha = 4^\circ = 0,0698 \text{ rad}$$

$$A_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\gamma_m(\theta)}{dx} \cos(m\theta) d\theta \rightarrow A_m = 0 \quad \forall m \geq 1$$

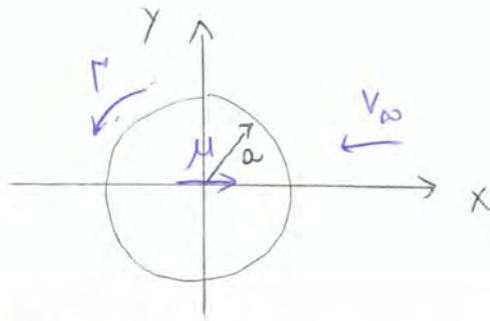
Allora:

$$\gamma(\theta) = 2V_{\infty} \left[\alpha \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \right]$$

La circolazione Γ è data dalla concatenazione dei vortici distribuiti su tutta la corda:

$$\Gamma = \int_0^l \gamma(x) dx \quad \text{cambio di coordinate} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{l}{2} (1 - \cos\theta) \\ dx = \frac{l}{2} \sin\theta d\theta \end{cases}$$

Per un cilindro posto in rotazione e investito da una corrente uniforme parallela all'asse x e discorde ad esso, si ha:



$$\begin{aligned} \psi(r, \theta) &= \frac{\Gamma}{2\pi r} \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - V_\infty y = \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi r} \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right) - V_\infty r \sin\theta \\ \text{dove } r_0 &= a = \sqrt{\frac{\Gamma}{2\pi V_\infty}} \end{aligned}$$

Allora:

$$\psi(r, \theta) = V_\infty r \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

$$v_r(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_\infty \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \cos\theta$$

$$v_\theta(r, \theta) = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = + \left(V_\infty \frac{a^2}{r^2} + V_\infty \right) \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} = V_\infty \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right) \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Sul cilindro, per $r = a$:

$$v_r(a, \theta) = 0$$

$$v_\theta(a, \theta) = 2V_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

Nel caso di corrente con incidenza α :

$$v_\theta(a, \theta) = 2V_\infty \sin(\theta + \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

Per la cond. di Kutta:

$$v_\theta(0, \pi) = 0 \Rightarrow \Gamma = 4\pi a V_\infty \sin\alpha = 3,506 \text{ m}^2/\text{s}$$

Nella teoria delle piccole perturbazioni otteniamo α anziché $\sin\alpha$ nella definizione di Γ . Tale approssimazione è accettabile perché α è piccolo (mentre nelle Hp delle piccole perturbazioni), quindi $\sin\alpha \approx \alpha$

$$\Rightarrow v_\theta(a, \theta) = 2V_\infty [\sin(\theta + \alpha) + \sin\alpha]$$

Osserviamo che:

$c_p^+(\theta)$ si ha per $0 < \theta < \pi$

$c_p^-(\theta)$ si ha per $-\pi < \theta < 0$

$$\text{Poiché } \begin{cases} \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \sin(-\theta) = -\sin\theta \end{cases}$$

Allora, facendo variare θ tra 0 e π :

$$c_p^+(\theta) = -2\alpha \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} - \alpha^2 \left(\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \right)^2$$

$$c_p^-(\theta) = 2\alpha \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} - \alpha^2 \left(\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \right)^2$$

Da cui ricaviamo:

$$\Delta c_p = c_p^- - c_p^+ = 4\alpha \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$$

nel calcolo del Δc_p la differenza tra i due metodi si compie

2) PROBLEMA INVERSO

una laevine curva di corda l , ad una certa incidenza α , ha la seguente distribuzione di coefficiente di pressione:

$$c_p^-(x) = \sqrt{\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}}, \quad c_p^+(x) = -c_p^-(x), \quad \Delta c_p(x) = 2c_p^-(x)$$

Sapendo che $\alpha_0 = -0.125$ rad, determinare il c_e sviluppato all'incidenza α e α stesso.

Determinare l'equazione della linea media $y_m(x)$ e partire da $c_p^-(x)$.

$$c_e = 2\pi(\alpha - \alpha_0) = \int_0^l \frac{\Delta c_p}{l} dx$$

Perché:

$$\frac{dy_m}{dx}(x) = \frac{1}{2\pi V_0} \int_0^l \frac{y(x')}{2\pi(x'-x)} dx' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{c_p^+(x')}{x'-x} dx' = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{c_p^-(x')}{x'-x} dx'$$

Cambio di coordinate:

$$x = \frac{l}{2} (1 - \cos\theta)$$

$$dx = \frac{l}{2} \sin\theta d\theta$$

$$c_p^-(\theta) = \frac{1}{2} \sin\theta$$

Allora:

$$\frac{dy_m}{dx}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\frac{1}{2} \sin\theta'}{\frac{l}{2}(1-\cos\theta') - \frac{l}{2}(1-\cos\theta)} \cdot \frac{l}{2} \sin\theta' d\theta' = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\theta' \cdot \sin\theta'}{-\cos\theta' + \cos\theta} d\theta' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\theta' \cdot \sin\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' = \frac{1}{4} \cos\theta$$

$$G_n = \int_0^\pi \frac{\sin\theta' \cdot \sin(m\theta')}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' = -\pi \cos(m\theta)$$

$$G_1 = -\pi \cos\theta$$

Perché:

$$\frac{dy_m}{dx}(\theta) = \frac{1}{4} \cos\theta \rightarrow \frac{dy_m}{dx}(x) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2x}{l} \right)$$

Allora:

$$y_m(x) = \frac{1}{4} \left(x - \frac{x^2}{l} \right) + C$$

Sapendo che $y_m(x=0) = 0 \Rightarrow C = 0$, perché:

$$y_m(x) = \frac{1}{4} \left(x - \frac{x^2}{l} \right)$$

Sostituendo tali relazioni nelle condizione di tangenza in $x=b$, si ottiene:

$$-\frac{1}{2} \frac{l(\alpha + 2h)}{b-a} = 4h \left(1 - 2\frac{b}{l}\right) - \alpha$$

Affermare tale relazione sia valida $\forall h, \alpha$, occorre che i loro rispettivi coefficienti siano uguali ad uno i membri:

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{l}{b-a} &= -1 &\rightarrow & \frac{2(b-a)}{l} = 1 &\rightarrow & b = \frac{l}{2} + a \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{l}{b-a} &= 4 \left(1 - 2\frac{b}{l}\right) &\rightarrow & -\frac{l}{b-a} = \frac{4l - 8b}{l} &\rightarrow & -l^2 = (4l - 8b) \cdot \frac{l}{2} \\ & & & & & -l^2 = (4l - 8a) \cdot \frac{l}{2} \end{aligned} \right.$$

$$l^2 = \frac{8al}{2} \rightarrow a = \frac{l}{4} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{l} = \frac{1}{4}}$$

$$b = \frac{l}{2} + \frac{l}{4} = \frac{3}{4}l \Rightarrow \boxed{\frac{b}{l} = \frac{3}{4}}$$

allora: $\frac{b-a}{l} = \frac{1}{2}$

Quindi, la velocità indotta da un vortice posizionato al QUARTO ANTERIORE alle corde $x = \frac{l}{4}$, di intensità:

$$\Gamma = \pi v_{\infty} l \left[\alpha - \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=\frac{3}{4}l} \right],$$

è soddisfatta la condizione di tangenza in $x = \frac{3}{4}l$, detto PUNTO DI COLLOCAZIONE.

Inoltre, è soddisfatta la condizione di Kutta, poiché l'intensità del vortice è stata ottenuta in base alla distribuzione di vorticità della serie delle piccole perturbazioni.

La velocità indotta nel punto di collocazione vale:

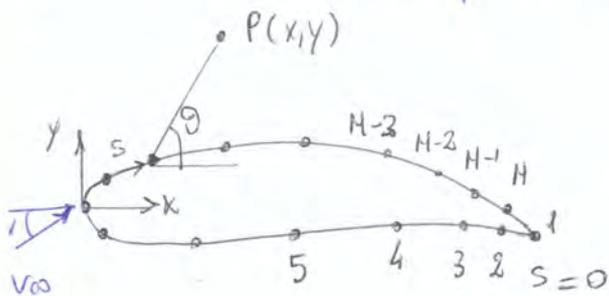
$$v_b = \frac{\Gamma}{\pi l} = v_{\infty} \left[\alpha - \frac{dy}{dx} \right]$$

METODO DEI PANNELLI DI HESS E SMITH

in le teorie delle piccole perturbazioni che il metodo basato sui pannelli è vantaggioso calcolando con buona precisione i coeff. di portanza e momento, ma non fornisce indicazioni sull'effetto della distribuzione della spessa del profilo su questi coefficienti. Inoltre la distribuzione delle pressioni calcolate presenta un andamento anomalo nella regione del bordo di attacco.

Tali problemi sono dovuti alle ipotesi utilizzate nella definizione della teoria delle piccole perturbazioni, in particolare l'ipotesi di soddisfare la condizione di tangenza sulla corda.

In ovviare a tali difficoltà e con l'obiettivo di avere un metodo estendibile alle geometrie tridimensionali, è necessario collocare le distribuzioni di singolarità direttamente lungo la superficie del profilo. Il metodo che rientra in questa categoria sono detti METODI DEI PANNELLI. In funzione del tipo di singolarità utilizzato e della relazione funzionale che descrive la distribuzione, si ha un particolare metodo dei pannelli.



Il potenziale delle velocità in un punto P sarà:

$$\phi = \phi_{\infty} + \varphi^{(s)} + \varphi^{(v)}$$

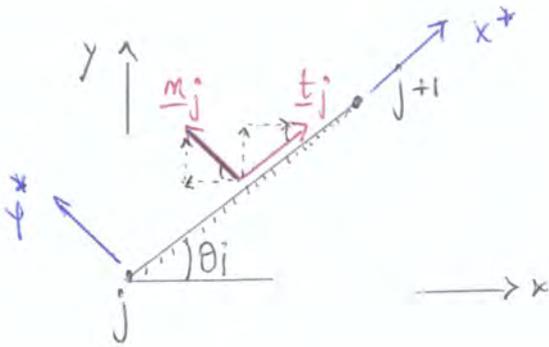
ϕ_{∞} , potenziale corrente uniforme

$$\varphi^{(s)} = \oint \frac{q(s)}{2\pi} \ln r \, ds \quad \text{potenziale nel punto P della sorgente di intensità } q(s)ds$$

$$\varphi^{(v)} = - \oint \frac{\gamma(s)}{2\pi} \theta \, ds \quad \text{potenziale nel punto P del vortice di intensità } \gamma(s)ds$$

si: coordinata curvilinea lungo il contorno σ , che definisce il profilo

per determinare $q(s)$, $\gamma(s)$ occorre imporre la condizione di tangenza e la condizione di Kutta



$$\begin{cases} \underline{m}_j = -\sin\theta_j \hat{i} + \cos\theta_j \hat{j} \\ \underline{t}_j = \cos\theta_j \hat{i} + \sin\theta_j \hat{j} \end{cases}$$

$$\bar{x}_j = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$$

coordinate punti medi

$$\bar{y}_j = \frac{y_j + y_{j+1}}{2}$$

denotiamo con:

$$\left. \begin{aligned} u_j &\equiv u(\bar{x}_j, \bar{y}_j) \\ v_j &\equiv v(\bar{x}_j, \bar{y}_j) \end{aligned} \right\} \text{le componenti di velocità nei punti medi}$$

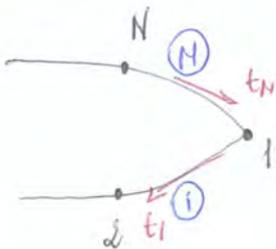
allora:

$$\underline{V}_j = u_j \hat{i} + v_j \hat{j}$$

1) CONDIZIONE DI TANGENZA

$$\underline{V}_j \cdot \underline{m}_j = -u_j \sin\theta_j + v_j \cos\theta_j = 0$$

2) CONDIZIONE DI KUTTA



$$(Nt)_I = (Nt)_N \Rightarrow \underline{V}_I \cdot \underline{t}_I = \underline{V}_N \cdot \underline{t}_N$$

$$u_I \cos\theta_I + v_I \sin\theta_I = - (u_N \cos\theta_N + v_N \sin\theta_N)$$

Il "-" deriva dal fatto che $\underline{t}_N, \underline{t}_I$ hanno verso opposto.

Per la distribuzione di vortici di intensità unitaria, si ha:

$$u_{ij}^{*(v)} = + \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_i} \frac{\bar{y}_i^*}{(\bar{x}_j^* - \xi)^2 + y_j^2} d\xi = \frac{\beta_{ij}}{2\pi}$$

$$v_{ij}^{*(v)} = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_i} \frac{\bar{x}_j^* - \xi}{(\bar{x}_j^* - \xi)^2 + y_j^2} d\xi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_{i+1j}}{r_{ij}}$$

nel caso delle sorgenti, per $i=j$:

$$\begin{cases} u_{ij}^{*(s)} = 0 \\ v_{ij}^{*(s)} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

nel caso dei vortici, per $i=j$:

$$\begin{cases} v_{ij}^{*(v)} = 0 \\ u_{ij}^{*(v)} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

allora, la CONDIZIONE DI TANGENZA DIVENTERÀ:

$$V_j \cdot \underline{m} = -u_j \sin \theta_j + v_j \cos \theta_j = 0$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^N A_{ij} q_i + A_{N+1j} \gamma = V_{\infty} \sin(\theta_j - \alpha) \quad i = 1, \dots, N}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{r_{i+1j}}{r_{ij}} \sin(\theta_j - \theta_i) + \beta_{ij} \cos(\theta_j - \theta_i) \right]$$

$$A_{N+1j} = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{r_{i+1j}}{r_{ij}} \cos(\theta_j - \theta_i) - \beta_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) \right]$$

La CONDIZIONE DI KUTTA DIVENTERÀ:

$$\boxed{\sum_{i=1}^N A_{iN+1} q_i + A_{N+1N+1} \gamma = -V_{\infty} [\cos(\theta_1 - \alpha) + \cos(\theta_N - \alpha)]}$$

ALI AD ALLUNGAMENTO FINITO

Con ala ad allungamento finito si intende un corpo tridimensionale tale che, quando è investito da una corrente uniforme con opportuna incidenza, la componente predominante della forza scambiate² con il fluido è perpendicolare alla direzione della corrente, la portanza è predominantemente rispetto alla resistenza.

La teoria aerodinamica per ali ad allungamento finito consiste nel rappresentare la perturbazione della corrente uniforme mediante una distribuzione spaziale delle vorticità, che esprime il comportamento dell'ala e della relativa scia.

Cenni sulla dinamica delle vorticità

Come visto in precedenza, a un campo di velocità $\underline{v}(\underline{r}, t)$ stazionario si associa il campo vettoriale VORTICITÀ $\underline{\omega} \equiv \nabla \times \underline{v}$, con

$$\underline{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$$

La vorticità è una misura delle velocità angolari $\underline{\Omega}$ di una particella, infatti:

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{v} = 2\underline{\Omega}.$$

La circuitazione lungo un circuito C è definita come:

$$\Gamma \equiv \oint_C \underline{v} \cdot d\underline{s} \quad \text{e, per il teorema di Stokes, è legata alle vorticità,}$$

infatti:

$$\Gamma \equiv \oint_C \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_S (\nabla \times \underline{v}) \cdot \underline{m} \, d\sigma = \int_S \underline{\omega} \cdot \underline{m} \, d\sigma \quad \text{dove } S \text{ è ogni superficie con contorno } C \text{ e } \underline{m} \text{ la sua normale}$$

Si può osservare che:

$$\nabla \cdot \underline{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{v}) = 0 \quad \text{per definizione} \rightarrow \underline{\text{VORTICITÀ SOLENOIDALE}}$$

Nel caso in cui la sezione del tubo vorticoso sia infinitesima, $d\sigma \rightarrow 0$, si ha un FILAMENTO VORTICOSO e, poiché in questo caso $\underline{w} = w \underline{m}$, l'intensità del filamento vorticoso sarà $\Gamma = \underline{w} \cdot \underline{m} d\sigma = w d\sigma$ costante lungo tutto il filamento e finita.

Poiché $d\sigma \rightarrow 0$, affinché Γ sia finita $w \rightarrow \infty$.

In questo caso si parla di filamento vorticoso con vorticità concentrata pari a Γ .

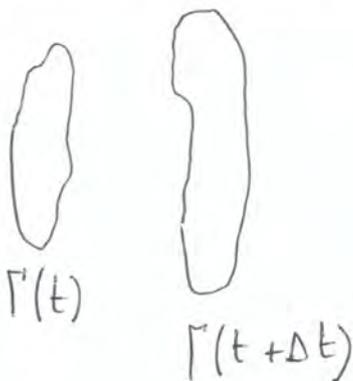
TEOREMI DI HELMHOLTZ PER IL MOTO VORTICOSO

1° TEOREMA DI HELMHOLTZ

Un tubo vorticoso, o un filamento vorticoso, non può iniziare o intere o rompersi improvvisamente nel fluido, ma deve chiudersi su se stesso o provenire e terminare all'infinito. Lo stesso vale per una linea vorticoso.

2° TEOREMA DI HELMHOLTZ

Abbiamo dimostrato, dal teorema di Kelvin-Helmholtz, che:



$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\sigma} \underline{w} \cdot \underline{m} d\sigma = 0$$

Il flusso di vorticità attraverso ogni superficie limitata da una linea chiusa materiale, rimane costante nel tempo durante il moto delle linee.

Per una superficie infinitesima contornata da un circuito $\partial\sigma$:

$$\frac{D\Gamma_{\partial\sigma}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\int_{\partial\sigma} \underline{w} \cdot \underline{m} d\sigma \right) = 0$$

FILAMENTI VORTICOSI - LEGGE DI BIOT-SAVART

Nel caso di corrente con vorticità concentrata, si ha il problema di ottenere il campo di velocità indotto dal campo di vorticità $\underline{\omega}$.

Osserviamo che, nel caso di fluido incomprimibile,

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0$$

Poiché $\nabla \cdot (\nabla \times (\cdot)) = 0$ per definizione, è possibile esprimere il campo di velocità in funzione di un altro campo vettoriale \underline{A} , detto VETTORE POTENZIALE, tale che:

$$\underline{v} = \nabla \times \underline{A}$$

Il vettore potenziale \underline{A} , è definito a meno di un vettore, gradiente di uno scalare arbitrario.

Infatti, per il teorema di decomposizione di Helmholtz - Hodge, un vettore può essere scomposto nella somma di una componente SOLENOIDALE, cioè a divergenza nulla, e di una componente IRROTAZIONALE, esprimibile come gradiente di uno scalare arbitrario.

Imponendo che la componente irrotazionale sia nulla, ne consegue che

$$\nabla \cdot \underline{A} = 0$$

Dalla seguente identità vettoriale:

$$\nabla \times \underline{v} = \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla (\underbrace{\nabla \cdot \underline{A}}_{=0}) - \nabla^2 \underline{A}$$

Si ottiene:

$$\nabla^2 \underline{A} = -\nabla \times \underline{v} = -\underline{\omega}$$

Il vettore potenziale \underline{A} è soluzione dell'equazione di Laplace non omogenea (eq. di Poisson) con il termine $\underline{\omega}$

Allora:

$$\underline{\delta A}(\underline{r}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\underline{l}}{|\underline{r}-\underline{s}|}$$

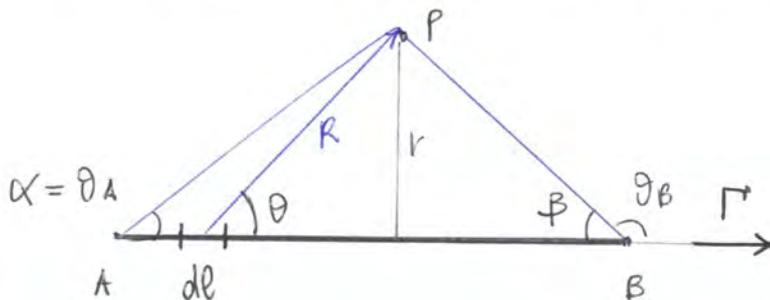
$$\underline{\delta V}(\underline{r}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\underline{l} \times (\underline{r}-\underline{s})}{|\underline{r}-\underline{s}|^3}$$

Per un tratto di filamento di lunghezza finita l , la velocità indotta è data da:

$$\underline{V}(\underline{r}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_l \frac{d\underline{l} \times (\underline{r}-\underline{s})}{|\underline{r}-\underline{s}|^3}$$

VELOCITÀ INDOTTA DA UN FILAMENTO RETTILINEO

Consideriamo un tratto di filamento vorticoso rettilineo. Introduciamo le coordinate $\underline{R} = \underline{r}-\underline{s}$ e θ .



$$|d\underline{l} \times \underline{R}| = dl R \sin\theta$$

$$\underline{\delta V}(\underline{R}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\underline{l} \times \underline{R}}{R^3}$$

Il modulo della velocità vale:

$$\delta V(\underline{R}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin\theta}{R^2} dl$$

il verso e la direzione della velocità si ottengono con la regola della mano destra, perciò la velocità indotta è su un piano perpendicolare al filamento, cioè il campo di velocità indotta è bidimensionale

SUPERFICIE VORTICOSE - TEOREMA DI KUTTA-JOUKOWSKI

Una superficie formata da infiniti filamenti vorticosi con vorticità concentrata è una superficie vorticoso con vorticità concentrata, detta anche foglio vorticoso, di intensità γ , vorticità per unità di superficie.

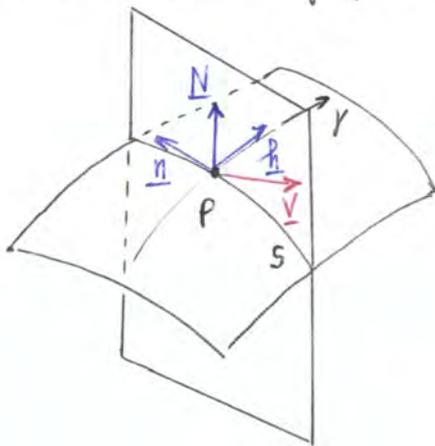
Come per una distribuzione lineare di vortici, si cui avevamo che:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{-x + \xi} d\xi$$

$$u^\pm(x) = \pm \frac{\gamma(x)}{2} \rightarrow u^+ - u^- = \gamma$$

anche in questo caso attraverso la superficie si ha una discontinuità della velocità. La discontinuità riguarda solo le componenti tangenziali della velocità e il valore di essa è pari all'intensità locale γ . Le componenti normali rimangono continue.

Consideriamo ora una superficie vorticoso che sia anche superficie di corrente, cioè in ogni punto di essa i vettori \underline{w} e \underline{V} sono tangenti. Sezioniamo tale superficie con un piano.



Introduciamo in un punto P sulla sezione S un sistema di riferimento locale, ortogonale, formato dal vettore \underline{m} , tangente alla linea S, il vettore \underline{h} , tangente alla linea vorticoso passante per il punto P e $\underline{N} = \underline{h} \times \underline{n}$, il vettore localmente ortogonale alla superficie.

Allora:

$$\underline{\gamma} = \gamma \underline{h}$$

$$\underline{V} = V_h \underline{h} + V_n \underline{m}$$

Consideriamo l'elemento ds di lunghezza ds e altezza ε :

Se la superficie è vorticosa e di corrente, se di essa agisce una forza.

Se la superficie è solidale con la superficie del corpo, essa è in grado di sostenere un $\Delta p \neq 0$

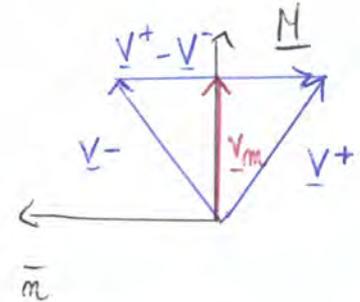
Se la superficie è LIBERA, per esempio una superficie fluida, la presenza di un $\Delta p \neq 0$ non è compatibile con la condizione di stazionarietà della corrente.

Deve quindi essere $\Delta p = 0$, allora:

$$\Delta p = p^- - p^+ = \rho V_m \gamma(s) \sin \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin \theta = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}$$

La velocità media deve essere allineata al vettore vorticità $\gamma(s) \underline{h}$.

I filamenti vorticosi sono allineati con il vettore \underline{v}_m

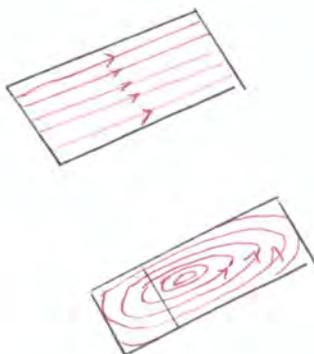


TEORIA PORTANTE PER ALI AD ALLUNGAMENTO FINITO

Come abbiamo visto, il profilo alare, per gli aspetti legati alla portanza, può essere rappresentato da una distribuzione lineare di vorticità, nel caso della teoria dei profili sottili, o mediante un vortice equivalente nel caso di modelli a vorticità concentrate e delle trasformazioni conformi.

Nel caso tridimensionale, la distribuzione lineare di vortici corrisponde a una superficie vorticosa di larghezza uguale alla corda e lunghezza infinita. Il vortice equivalente è un filamento rettilineo infinito.

Come studiamo il problema per ali ad allungamento finito?



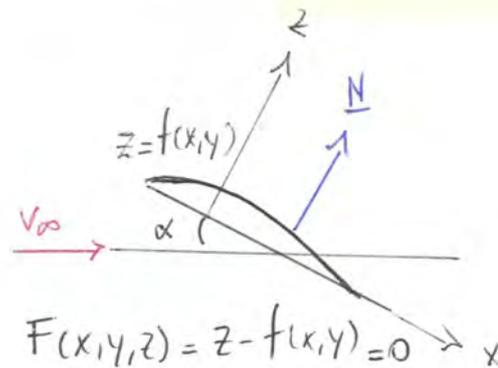
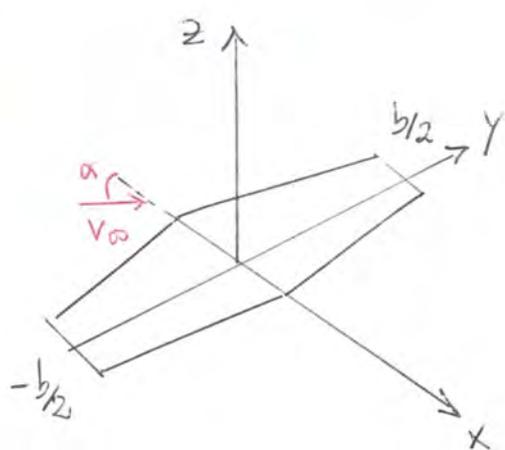
- Non è rigorosamente possibile tracciare la superficie vorticosa, poiché si contravverrebbe al 1° teorema di Helmholtz.
- Chiusure su se stessi i filamenti vorticosi porterebbe a un flusso di vorticità netto nullo attraverso ogni sezione e quindi portanza nulla.

TEORIA DELLE PICCOLE PERTURBAZIONI PER UN'ALA AD ALLUNGAMENTO FINITO

FINITO

Mel caso di ali ad allungamento finito, con piccoli spessori ed imbracciamento, per basse velocità, è possibile introdurre la teoria delle piccole perturbazioni.

Considereremo il caso di una corrente uniforme senza componente lungo y .



SISTEMA
RIFERIMENTO
SOLIDALE ALA

Se $\phi = V_{\infty}(x \cos \alpha + z \sin \alpha) + \varphi$ con $u' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v' = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $w' = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

Le condizioni di tangenza sono:

$$\nabla \phi \cdot \underline{N} = 0$$

$$\underline{N} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{|\nabla F|} \cdot \left(\mp \frac{\partial f}{\partial x}, \mp \frac{\partial f}{\partial y}, \pm 1 \right)$$

Allora:

$$\nabla \phi \cdot \underline{N} = \frac{1}{|\nabla F|} \left[\mp (V_{\infty} \cos \alpha + \overset{u'}{=} \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \frac{\partial f}{\partial x} \mp \overset{v'}{=} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \pm (V_{\infty} \sin \alpha + \overset{w'}{=} \frac{\partial \varphi}{\partial z}) \right] = 0$$

$$w'(x,y,z) = (V_{\infty} \cos \alpha + u') \frac{\partial f}{\partial x} + v' \frac{\partial f}{\partial y} - V_{\infty} \sin \alpha$$

• Per $\alpha \ll 1 \rightarrow u', v', w' \ll V_{\infty}$, $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$

• $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| \ll \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right| \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \ll 1$

- Il problema (1) può essere risolto introducendo una distribuzione di sorgenti sulle proiezioni in pianta dell'ala.
- Il problema (2) può essere risolto introducendo una distribuzione di vortici.

Preoccupiamoci di risolvere il secondo problema:

La superficie aderente S , proiezione in pianta dell'ala sul piano $z=0$, è una superficie vorticoso con distribuzione di vorticità:

$$\gamma_{ad}(x,y) = (\gamma_{ad})_x \hat{i} + (\gamma_{ad})_y \hat{j}.$$

Non solo, per le condizioni di tangenza è anche superficie di corrente. Localmente, in un punto della superficie, il filamento vorticoso induce una discontinuità nelle componenti tangenziali delle velocità attraverso la superficie vorticoso, ed i salti saranno:

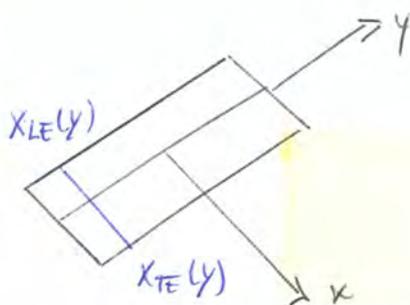
$$\begin{cases} (\gamma_{ad})_y = u'^+ - u'^- \\ (\gamma_{ad})_x = v'^- - v'^+ \end{cases} \rightarrow u'^+ = -u'^- = \frac{(\gamma_{ad})_y}{2} \Rightarrow \begin{cases} u'^+ = \frac{(\gamma_{ad})_y}{2} \\ u'^- = -\frac{(\gamma_{ad})_y}{2} \end{cases}$$

Osserviamo che:

$$\Delta c_p = c_p^- - c_p^+ = -2 \frac{u'^-}{V_\infty} + 2 \frac{u'^+}{V_\infty} = +2 \frac{(\gamma_{ad})_y}{2V_\infty} + 2 \frac{(\gamma_{ad})_y}{2V_\infty} = 2 \frac{(\gamma_{ad})_y}{V_\infty}$$

$$\Delta c_p = 2 \frac{(\gamma_{ad})_y}{V_\infty}$$

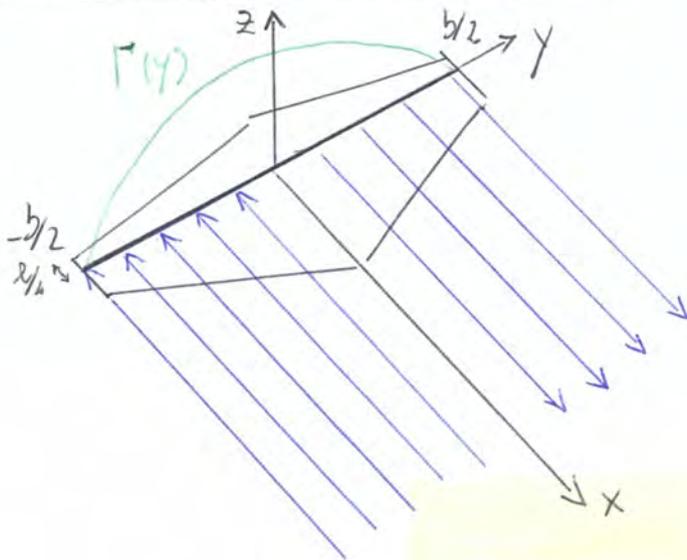
Le componenti della vorticità $(\gamma_{ad})_y$ lungo l'apertura alare contribuisce alla portanza.



$$\Gamma(y) = \int_{x_{LE}(y)}^{x_{TE}(y)} (\gamma_{ad})_y(x,y) dx$$

DI STRIBUZIONE
DI PORTANZA

TEORIA DELLA LINEA PORTANTE



L'ipotesi che le linee dei fuochi
 sia rettilinee comporta che la teoria
 delle linee portante sia valida per
 piccoli angoli di freccia $\alpha \leq 5^\circ$

Concentrare una distribuzione di vorticità lungo una corda in un
 unico vortice, posizionato nel quarto posteriore della corda, significa,
 come abbiamo visto nel caso bidimensionale, soddisfare le cond. di tang.
 in un solo punto di collocazione x^* della corda.

nel caso di linea media piana $x^* = \frac{3}{4}l$ e in questo modo le condizioni
 di Kutta è automaticamente soddisfatte.

Le cond. di tangenza, come conseguenza con il modello a vorticità concentrata,
 è soddisfatta in ogni sezione nel punto di collocazione, nel quarto
 posteriore della corda.

Ciò implica che:

$$w'(x, y, 0) = V_\infty \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} - \alpha \right)$$

↑
linea media piana

→

velocità indotte
 dal vortice aderente

$$w_b(y) + w_i(y) = -V_\infty \alpha$$

↑
 velocità
 indotte dal
 vortice di scia

Il modello più semplice
 per risolvere il problema
 portante di un'ala ad allunga-
 mento finito fu proposto
 da Prandtl e consiste nel
 sostituire la superficie correa
 te con un unico vortice
 aderente rettilineo, di intensità

$$\Gamma(y) = \int_{x \in \Gamma(y)} \gamma_{ad}(x, y) dx$$

POSIZIONATO LUNGO LA LINEA DEI FUOCHI

Dalla condizione di tangenza, otteniamo allora:

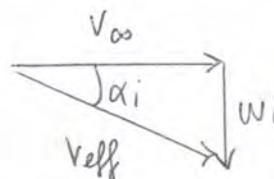
$$-\frac{\Gamma'(y)}{\pi l(y)} + \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\frac{d\Gamma'(y')}{dy'}}{y'-y} dy' = -V_{\infty} \alpha$$

EQUAZIONE INTEGRO-DIFFERENZIALE DI PRANDTL

Dividendo per V_{∞} :

$$\underbrace{-\frac{\Gamma'(y)}{\pi V_{\infty} l(y)}}_{-\alpha_{eff}} + \frac{1}{4\pi V_{\infty}} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\frac{d\Gamma'(y')}{dy'}}{y'-y} dy' = -\alpha$$

$-\alpha_i$



l'equazione può essere vista come una relazione tra angoli:

$$\alpha_i(y) = \tan^{-1} \left(-\frac{w_i(y)}{V_{\infty}} \right) = \frac{1}{4\pi V_{\infty}} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\frac{d\Gamma'(y')}{dy'}}{y'-y} dy'$$

$$\tan^{-1} \left(-\frac{w_i(y)}{V_{\infty}} \right) \approx -\frac{w_i(y)}{V_{\infty}} = \alpha_i$$

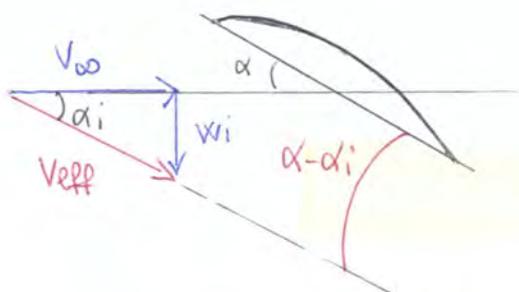
$$-\alpha_{eff} - \alpha_i = -\alpha$$

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$$

↓
incidenza indotta

La sezione alare si comporta come se fosse un profilo alare investito da una corrente con incidenza $\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$ e velocità $\underline{V_{eff}} = \underline{V_{\infty}} + \underline{w_i}$

È possibile generalizzare l'equazione integro-differenziale di Prandtl, introducendo l'effetto dell'incrocamento e dello svergolamento.



Proiettando dF lungo la dir. della corrente uniforme e perpendicolarmente ad essa, ponendo $v_{eff} \approx v_{\infty}$ per α piccoli, si ha:

$$dL = dF \cos \alpha \approx \rho v_{\infty} \Gamma(y) dy$$

$$dD_i = dF \sin \alpha \approx \alpha dy dL$$

Integrando lungo l'apertura si ha:

$$L = \rho v_{\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy$$

$$D_i = \rho v_{\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \alpha(y) \Gamma(y) dy$$

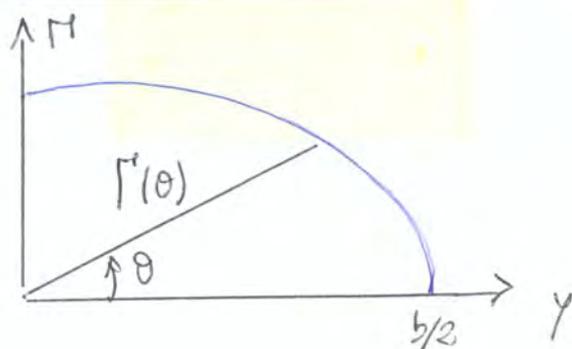
RESISTENZA INDOTTA della presenza delle scie
 Tiene conto dell'energia cinetica fornita alle scie sotto forma di vortici di estremità

DISTRIBUZIONE ELLITTICA DI PORTANZA

Mel caso in cui la distribuzione di portanza abbia una forma nota e piana, è possibile calcolare l'incidenza involute, la portanza e la resistenza involute.

Supponiamo che $\Gamma(y)$ sia una distribuzione ellittica di portanza:

$$\frac{\Gamma^2}{\Gamma_0^2} + \frac{y^2}{(b/2)^2} = 1 \rightarrow \Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{(b/2)^2}}$$



Introduciamo la trasformazione di coordinate $y = \frac{b}{2} \cos \theta$, allora:

$$\begin{cases} \Gamma(\theta) = \Gamma_0 \sin \theta \\ d\Gamma(\theta) = \Gamma_0 \cos \theta d\theta \end{cases}$$

Calcolo della resistenza indotta:

$$D_i = \rho V_\infty \alpha_i \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \alpha_i L \rightarrow \boxed{D_i = \alpha_i L}$$

Calcolo il coeff. di resistenza indotta:

$$C_{Di} = \frac{D_i}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} = \alpha_i \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} = \alpha_i C_L = \frac{C_L^2}{\pi \lambda}$$

$$\boxed{C_{Di} = \alpha_i C_L = \frac{C_L^2}{\pi \lambda}}$$

A parità di portanza, maggiore è λ , minore sarà la resistenza indotta.

Per questo motivo, i WINGLETS aumentano λ in modo fittizio, riducendo C_{Di} .



L'equazione integro-differenziale di Prandtl avrà la forma:

$$\boxed{\Gamma(y) = k \pi V_\infty l(y) [\alpha_a(y) - \alpha_i]}$$

Riconosciamo che $\alpha_a(y) = \alpha(y) - \alpha_0$

Nel caso in cui non sia presente svergolamento geometrico e aerodinamico

$$[\alpha_a - \alpha_i] = \text{costante}$$

⇒ Per ottenere una distribuzione ellittica di $\Gamma(y)$ occorre realizzare un'ala ellittica in pianta (* funzione ellittica)

se $l(y)$ non è una funzione ellittica, occorre che il prodotto $l(y) [\alpha_a(y) - \alpha_i]$ sia ellittico e ciò si ottiene agendo sulle leggi di svergolamento geometrico e aerodinamico

* $l(y)$ distribuzione delle corde

Per un profilo sottile, inoltre:

$$C_e = 2\pi k \alpha_w = 2\pi k (\alpha - \alpha_0) = C_e' (\alpha - \alpha_0)$$

con $C_e' = 2\pi k$ pendenza della curva $C_e(\alpha)$

Allora:

$$2k = \frac{C_e'}{\pi} \rightarrow \Gamma_0 = \frac{2bV_\infty}{1 + \frac{\pi\lambda}{C_e'}} (\alpha - \alpha_0)$$

La portanza sarà:

$$L = \rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \rho V_\infty^2 \pi k (\alpha_w - \alpha_i) \int_{-b/2}^{b/2} g(y) dy = \rho V_\infty^2 \pi k S (\alpha_w - \alpha_i)$$

$$L = \pi k \rho V_\infty^2 S (\alpha_w - \alpha_i)$$

Allora:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} = 2\pi k \left(\alpha_w - \frac{C_L}{\pi\lambda} \right)$$

poiché $\alpha_i = \frac{C_L}{\pi\lambda}$

Poiché $\alpha_w = \alpha - \alpha_0$:

$$C_L = 2\pi k \left(\alpha - \alpha_0 - \frac{C_L}{\pi\lambda} \right) \rightarrow C_L \left(1 + \frac{2k}{\lambda} \right) = 2\pi k (\alpha - \alpha_0)$$

$$C_L = \frac{2\pi k (\alpha - \alpha_0)}{1 + \frac{2k}{\lambda}}$$

→ un'ala ad allungamento finito, per via della perdita di portanza sulle estremità d'ala, ha una pendenza del coeff. di portanza, minore di quella del profilo alare. All'aumentare di λ , esse aumentano e tendono al valore del profilo bidim. $\lambda \rightarrow \infty \Rightarrow C_L' \rightarrow C_e'$

Per un profilo sottile, $C_e' = 2\pi k \rightarrow C_L = \frac{C_e'}{1 + \frac{2k}{\pi\lambda}} (\alpha - \alpha_0)$

La resistenza indotta D_i vale:

$$D_i = \rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \alpha_i(y) \Gamma(y) dy = -\rho V_\infty \frac{b}{2} \int_{\pi}^0 \alpha_i(\theta) \Gamma(\theta) \sin \theta d\theta =$$

$$= \rho V_\infty^2 b^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m A_m A_m \int_0^{\pi} \sin(m\theta) \sin(m\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \rho V_\infty^2 b^2 \sum_{m=1}^{\infty} m A_m^2$$

$$D_i = \frac{\pi}{2} \rho V_\infty^2 b^2 \sum_{m=1}^{\infty} m A_m^2$$

$m=n \rightarrow \pi/2$
 $m \neq n \rightarrow 0$

I relativi coefficienti adimensionali sono:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} = \pi \frac{b^2}{S} A_1 = \pi \lambda A_1 \rightarrow C_L = \pi \lambda A_1$$

$$C_{Di} = \frac{D_i}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} = \pi \frac{b^2}{S} \sum_{m=1}^{\infty} m A_m^2 = \pi \lambda \sum_{m=1}^{\infty} m A_m^2$$

$$C_{Di} = \pi \lambda A_1^2 + \pi \lambda \sum_{m=3}^{\infty} m A_m^2 = \frac{C_L^2}{\lambda \pi} \left(1 + \frac{(\pi \lambda)^2 \sum_{m=3}^{\infty} m A_m^2}{C_L^2} \right) =$$

$$= \frac{C_L^2}{\lambda \pi} \left(1 + \sum_{m=3}^{\infty} m \frac{A_m^2}{A_1^2} \right)$$

Quindi:

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi \lambda} \left(1 + \sum_{m=3}^{\infty} m \frac{A_m^2}{A_1^2} \right)$$

A parità di allungamento e coeff. di portanza, l'ala con distribuzione ellittica presenta la MINIMA resistenza indotta.

OSSERVAZIONE

Per calcolare la esatta distribuzione di portanza e dell'incidenza indotta, occorre determinare gli infiniti coeff. A_m . Come fare ?? *

$$\textcircled{*} \Gamma(y) = \pi k l(y) V_{\infty} \left[\alpha_a(y) - \frac{1}{4\pi V_{\infty}} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{dl(y')}{y-y'} dy' \right]$$

$$\Gamma(\theta) = 2b V_{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\theta)$$

$$\alpha_i(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} m A_m \frac{\sin(m\theta)}{\sin\theta}$$

Riconoscendo che $c_e' = 2k\pi$, otteniamo:

$$2b V_{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\theta) = \frac{c_e' l(\theta)}{2} V_{\infty} \left[\alpha_a(\theta) - \sum_{m=1}^{\infty} m A_m \frac{\sin(m\theta)}{\sin\theta} \right]$$

$$2b V_{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\theta) + \frac{c_e' l(\theta)}{2} V_{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m A_m \frac{\sin(m\theta)}{\sin\theta} = \frac{c_e' l(\theta)}{2} V_{\infty} [\alpha(\theta) - \alpha_0(\theta)]$$

$$\frac{4b}{c_e' l(\theta)} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} m A_m \frac{\sin(m\theta)}{\sin\theta} = \alpha(\theta) - \alpha_0(\theta)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\theta) \left[\frac{4b}{c_e' l(\theta)} + \frac{m}{\sin\theta} \right] = \alpha(\theta) - \alpha_0(\theta)$$

Occorre risolvere tale equazione; si ha un numero infinito di incognite A_m che devono soddisfare l'equazione $\forall \theta \in [0, \pi]$

Nel caso generale non è possibile ottenere una soluzione esatta e occorre ricercare una soluzione numerica.

Supponendo che solo i primi N coefficienti siano suff. a descrivere con la precisione voluta la soluzione, si ha che:

$$\sum_{m=1}^N A_m \sin(m\theta) \left[\frac{4b}{c_e' l(\theta)} + \frac{m}{\sin\theta} \right] = \alpha(\theta) - \alpha_0(\theta)$$

in N punti di collocazione individuati dalla partizione dell'intervallo $0 < \theta < \pi$ in intervalli equispaziati: $\theta_m = m \frac{\pi}{N+1}$, $m = 1, \dots, N$
 Nei punti $\theta = 0, \theta = \pi$ l'eq. è automaticamente soddisfatta.

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\lambda \pi}$$

$$D_i = \rho V_\infty \alpha_i \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = L \alpha_i$$

$$C_{Di} = \alpha_i C_L = \frac{C_L^2}{\pi \lambda}$$

ALA ELLIPTICA IN PIANTA → distribuzione ellittica di portanza
se $\alpha_a = \cos t$, $\alpha_i = \cos t$

$$\Gamma(y) = \pi k V_\infty l(y) [\alpha_a - \alpha_i]$$

$$S = \pi \frac{l_0}{2} \frac{b}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{b^2}{S} = \frac{4}{\pi} \frac{b}{l_0}$$

$$l(y) = l_0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{(b/2)^2}}$$

$$\alpha_i = \frac{\Gamma_0}{2bV_\infty} \Rightarrow \Gamma(y) = \pi k V_\infty l(y) \left[\alpha_a - \frac{\Gamma_0}{2bV_\infty} \right]$$

$$\Rightarrow \Gamma_0 = \pi k V_\infty l_0 \left[\alpha_a - \frac{\Gamma_0}{2bV_\infty} \right]$$

$$\Gamma_0 \left(1 + \frac{\pi k V_\infty l_0}{2bV_\infty} \right) = \pi k V_\infty l_0 \alpha_a$$

$$\Gamma_0 = \frac{\pi k V_\infty l_0}{2bV_\infty + \pi k V_\infty l_0} \alpha_a = \frac{2\pi b k l_0 V_\infty^2}{2bV_\infty + \pi k V_\infty l_0} \alpha_a = \frac{2bV_\infty}{1 + \frac{2bV_\infty \cdot \pi}{\pi k V_\infty l_0}} \alpha_a = \frac{2bV_\infty}{1 + \frac{\lambda}{2k}} \alpha_a$$

$$\Gamma_0 = \frac{2bV_\infty}{1 + \frac{\lambda}{2k}} \alpha_a \quad \text{ma } C_e = 2\pi k (\alpha - \alpha_0) \quad \text{e } 2\pi k = C_e'$$

$$\Gamma_0 = \frac{2bV_\infty}{1 + \frac{\pi \lambda}{2k}} (\alpha - \alpha_0)$$

$$L = \rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \rho V_\infty^2 \pi k (\alpha_a - \alpha_i) \int_{-b/2}^{b/2} l(y) dy = \rho V_\infty^2 \pi k S (\alpha_a - \alpha_i)$$

$$C_L = 0.78$$

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\lambda \pi} = 0.028 \text{ rad} = 1.623^\circ$$

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\lambda \pi} = 0.022$$

② INFLUENZA DI λ SU C_L E C_{Di}

Sia data un'ala ellittica in pianta a profilo costante ($\alpha_o = \text{cost}$), con $K = 0.92$ e non svergolata ($\alpha = \text{cost} \Rightarrow \alpha_a = \text{cost}$)

- CONFIGURAZIONE 1

$$\lambda_1 = 8 \rightarrow C_{L1} = 0.6$$

+ parità di tutti gli altri parametri:

- CONFIGURAZIONE 2

$$\lambda_2 = 10$$

Calcolare C_{L2} , C_{Di2} .

$$\bullet C_{L2} = \frac{2K\pi}{1 + \frac{2K}{\lambda_2}} \alpha_a \quad \bullet C_{Di2} = \frac{C_{L2}^2}{\pi \lambda_2}$$

Determiniamo α_a della configurazione 1:

$$C_{L1} = 0.6 = \frac{2\pi K_1}{1 + \frac{2K_1}{8}} \alpha_a \rightarrow \alpha_a = \frac{0.6}{2\pi K_1} \left(1 + \frac{K_1}{4}\right) = 0.1277 \text{ rad}$$

$$C_{Di1} = \frac{C_{L1}^2}{\pi \lambda_1} = 0.0143$$

allora: $C_{L2} = \frac{2K\pi}{1 + \frac{2K}{10}} \alpha_a = 0.6235$

$$C_{Di2} = \frac{C_{L2}^2}{\pi \lambda_2} = 0.01235$$

Pocois:

$$\alpha_a(y) = \frac{C_L}{\pi\lambda} + \frac{2C_L}{k\pi^2} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2/4}}$$

L'incidenza geometrica sarà:

$$\alpha(y) = \alpha_a(y) + \alpha_0 = -0.0253 + \frac{C_L}{\pi\lambda} \left[1 + \frac{2\lambda}{k\pi} \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2/4}} \right]$$

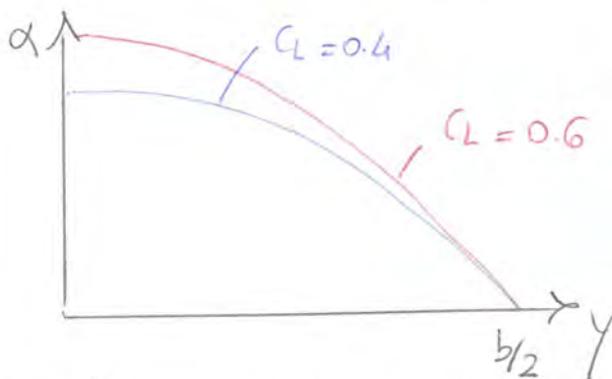
Allora:

$$\alpha(y=0.6 \cdot b/2) = 0.0817 \text{ rad} = 3.23^\circ \text{ per } C_L = 0.4$$

$$\alpha(y=0.6 \cdot b/2) = 0.097214 \text{ rad} = 5.57^\circ \text{ per } C_L = 0.6$$

OSSERVAZIONI

La legge di svergolamento $\alpha(y)$ non è lineare. Graficandola si ottiene una curva con andamento simile a quella in figura:



In particolare, si osserva che

$$\Delta\alpha = \alpha(y)_{C_L=0.6} - \alpha(y)_{C_L=0.4}$$

non è costante lungo y .

Se partiamo dalla configurazione di ala con $C_L = 0.4$ e vogliamo ottenere una configurazione di ala con $C_L = 0.6$, occorre incrementare l'incidenza geometrica di $\Delta\alpha$, però:

- config. $C_L = 0.4 \rightarrow$ distribuzione ellittica di portanza
- config. $C_L = 0.6 \rightarrow$ No distribuzione ellittica di portanza

quindi, data una distribuzione ellittica di portanza, se:

- ala ellittica in pianta $\Rightarrow \Gamma(y)$ è ellittica e tutte le incidenze
- ala svergolata (pianta non ellittica) $\rightarrow \Gamma(y)$ è ellittica solo per una determinata incidenza

Per ciò:

$$\alpha_a(y) = \frac{C_L}{\pi \lambda} \left[1 + \frac{5}{3} \frac{\lambda}{\pi k} \frac{\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2/4}}}{1 - \frac{2}{3} \frac{y}{b}} \right]$$

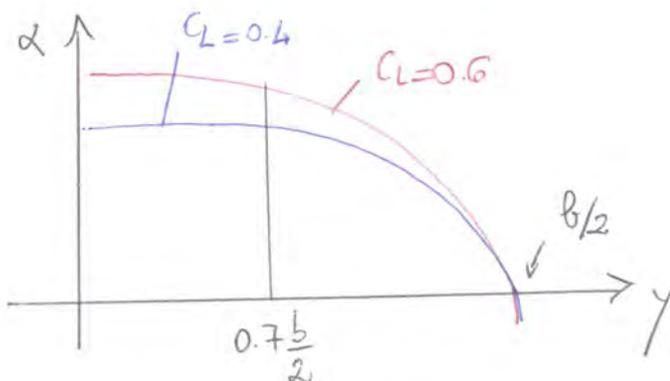
$$\text{e } \alpha(y) = \alpha_a(y) + \alpha_0 = -0.0253 + \frac{C_L}{\pi \lambda} \left[1 + \frac{5}{3} \frac{\lambda}{\pi} \frac{\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2/4}}}{1 - \frac{2}{3} \frac{y}{b}} \right]$$

Analogamente al caso precedente:

per $C_L = 0.4 \rightarrow \alpha(y = 0.6 \frac{b}{2}) = 3.39^\circ$

per $C_L = 0.6 \rightarrow \alpha(y = 0.6 \frac{b}{2}) = 5.81^\circ$

Sintetizzando i risultati ottenuti:



$\Delta \alpha$ è pressoché costante fino ad una certa apertura alare, poiché ci si avvicina al meglio al caso di un'ala ellittica in pianta.

5) TEMA ESAME - ALA CON DISTRIBUZIONE NOTA DI CIRCVITAZIONE

sia data un'ala con $b = 11 \text{ m}$ che, investita da una corrente uniforme $V_\infty = 55 \text{ m/s}$, sviluppa la seguente distribuzione di Γ :

$$\Gamma(y) = 20 \left[1 - \left(\frac{y}{b/2} \right)^4 \right]$$

calcolare l'incidenza ridotta in mezz'ala (α_i per $y=0$).

$$\alpha_i = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y')}{dy'} dy' \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow \alpha_i(y) = \frac{-80}{4\pi V_\infty} \frac{1}{(b/2)^4} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{y'^3}{y-y'} dy'$$

$$\frac{d\Gamma}{dy} = -4 \cdot 20 \left(\frac{y}{b/2} \right)^3 \cdot \frac{1}{b/2} = -\frac{80y^3}{(b/2)^4}$$

ESERCIZIO MATLAB - ALI ALLUMONEMIO FINITO

un'ala non svergolata con allungamento $\lambda = 10$, pianta rettangolare, $C_{l'} = 6.12$.

sapendo che ad una certa incidenza aerodinamica costante ($\alpha_a = 5^\circ$), i coefficienti della distribuzione di circolazione $\Gamma(\theta)$ sono:

$$A_1 = 0.0137$$

$$A_3 = 0.0022$$

$$A_5 = 5.8359 \cdot 10^{-4}$$

Determinare C_L , C_{Di} e disegnare in Matlab la distribuzione $\Gamma(\theta)$, sapendo che $b = 9 \text{ m}$, $V_\infty = 3 \text{ m/s}$.

Ricondurre che:

$$C_L = \pi \lambda A_1$$

$$C_{Di} = \pi \lambda \sum_{m=1,3,5}^{\infty} m A_m^2$$

$$\Gamma(\theta) = 2bV_\infty \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\theta)$$

Soluzione in Matlab:

clear variables

theta = linspace(0, pi, 200);

A_1 = 0.0137;

A_3 = 0.0022;

A_5 = 5.8359 * 10^4;

b = 9;

V_inf = 3;

C_l' = 6.12;

lambda = 10;

figure

plot(theta ./ (pi * 180), Gamma)

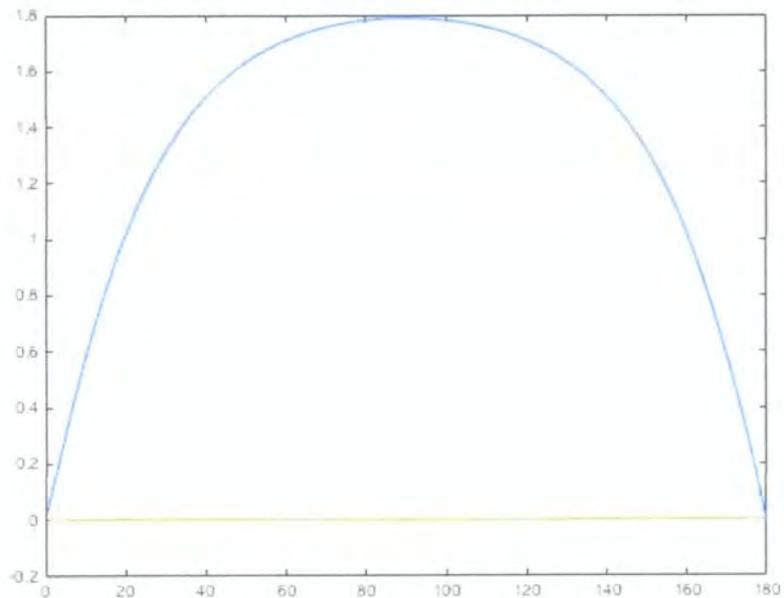
C_L = pi * lambda * A_1;

C_Di = pi * lambda * (A_1^2 + 3 * A_3^2 + 5 * A_5^2);

Gamma = 2 * b * V_inf * (A_1 * sin(theta) + A_3 * sin(3 * theta) + A_5 * sin(5 * theta));



```
end  
  
figure  
  
plot(theta./pi*180,Gamma);
```



• ESPANSIONE TERMICA: il termine è trascurabile se

- $\frac{DT}{Dt} = 0$ temp. press. che costanti lungo la traiettoria

• COMPRESSIONE:

- $\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_p$ COEFF. DI ESPANSIONE TERMICA è trascurabile o nullo, come nel caso di un fluido barotropico per il quale $p = p(\rho)$.

- Liquidi: $\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \sim 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
 TRASCURABILE

- gas: $\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \sim 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$

$\frac{D\rho}{Dt}$ TRASCURABILE se

$$\begin{cases} - M \ll 1 \\ - \frac{M^2}{Re} \ll 1 \end{cases}$$

Mel caso di flusso ISENTROPICO

$\rightarrow \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_p = 0$

ocean:

- LIQUIDI \rightarrow possono essere considerati incompressibili se le variazioni di temperatura sono piccole

- GAS \rightarrow possono essere considerati incompressibili se, oltre a differenze piccole di temperatura, anche il numero di Mach è molto inferiore all'unità

EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES PER FLUIDI INCOMPRESSIBILI

• $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \cdot \nabla \cdot \underline{v}$

• $\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \left[\mu (\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \underline{v}) \underline{I} \right] + \rho \underline{f}$

• $\rho \frac{DE}{Dt} = -p \nabla \cdot \underline{v} + \rho \Phi + \nabla \cdot (k \nabla T) + Q_v$

om $\Phi = \frac{1}{\rho} (\underline{\underline{v}} \cdot \nabla) \cdot \underline{v}$ FUNZIONE DI DISSIPAZIONE

rappresenta la dissipazione di en. meccanica per unità di massa per effetto delle forze viscose

I termini $\rho \underline{f}$ e $\rho \underline{v}$ rappresentano le sorgenti volumetriche di quantità di moto e di calore.

Il caso in cui la forza di volume rappresenta una forza di galleggiamento dovuta a gradienti di temperatura, si hanno variazioni di densità che rivestono un ruolo determinante per le azioni di galleggiamento.

In questo caso, si introduce l'APPROSSIMAZIONE DI BOUSSINESQ: le variazioni di densità sono trascurate, tranne nel termine delle forze di volume, che è espresso nella forma:

$$\rho \underline{f} = \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0)] \underline{g}$$

$\rho_0 = \rho(T_0)$ coeff. espansione volumetrica

PROPRIETÀ DELLE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES PER FLUIDI INCOMPRESSIBILI

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad \nabla \cdot \underline{v} = 0 \\ \bullet \rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v} + \rho \underline{f} \\ \bullet \rho c \frac{DT}{Dt} = \rho \Phi + K \nabla^2 T \end{array} \right.$$

$\hookrightarrow \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla T$

Il campo di velocità non dipende dal campo di temperatura, mentre non è vero il contrario. Calcolata dunque il campo di velocità, è possibile determinare il campo di temperatura.

Nel caso di fluido incomprimibile: $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = 0, \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = 0$

Non esiste dunque un'equazione di stato del tipo $\rho = \rho(p, T)$ e quindi $p = p(\rho, T)$. La pressione non è più correlata alle altre variabili termodinamiche e assume il ruolo di una quantità caratteristica del fluido che, dettandosi istantaneamente, permette di risolvere l'equilibrio dinamico e l' bilancio delle quantità di moto.

CONDIZIONI INIZIALI E AL CONTORNO

Consideriamo il caso di una corrente incomprimita, di un fluido omogeneo e a proprietà costanti, in una regione delimitata da pareti rigide e che può estendersi all'infinito in una o più direzioni.

Il problema è descritto dalle equazioni:

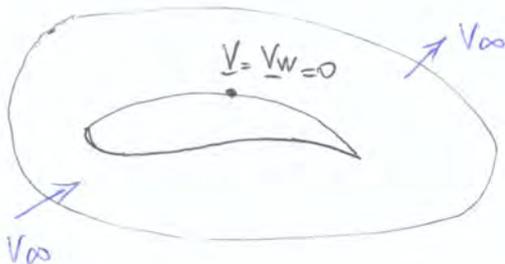
$$\begin{aligned} & \bullet \nabla \cdot \underline{v} = 0 \\ & \bullet \rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v} + \rho \underline{f} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Sono soggette a condizioni iniziali per} \\ \text{definire l'evoluzione temporale e a} \\ \text{condizioni al contorno} \end{array} \right\}$$

Non occorre specificare condizioni per la pressione, in quanto essa può essere ottenuta da:

$$\nabla^2 p = -\rho \nabla \cdot (\underline{v} \cdot \nabla \underline{v})$$

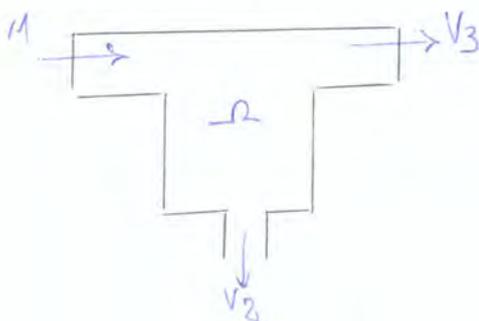
Le condizioni al contorno sono:

- CONDIZIONE DI ADERENZA $\rightarrow \underline{v} = \underline{v}_w$, dove \underline{v}_w è la velocità della parete rigida
- CONDIZIONE IN CAMPO LONTANO $\rightarrow \underline{v} = \underline{v}_\infty$



se la velocità è specificata lungo l'intera frontiera $\partial\Omega$ che delimita il dominio di calcolo:

$$\oint_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \underline{v}) \, d\Omega = 0$$



Tutto ciò permette di definire il problema BEN POSTO e, se la soluzione esiste, è unica e dipende in maniera continua dalle condizioni iniziali e al contorno

È possibile osservare che le due equazioni del moto scritte in incoerenza, oltre che dalle variabili indipendenti x_i e t , dipendono unicamente dal numero di Reynolds e da ulteriori parametri adimensionali necessari a specificare le condizioni iniziali e al contorno e la geometria del dominio.

TALE IL PRINCIPIO DI SIMILITUDINE DINAMICA: tutti i flussi che soddisfano le stesse condizioni iniziali e al contorno, quando espresse in termini adimensionali e pur avendo valori differenti di ρ, μ, V, L , ma tali che la combinazione $\frac{\rho V L}{\mu}$ è la stessa, sono descritti dalla stessa soluzione adimensionale.

una conclusione simile si ottiene anche per il campo delle temperature. Introducendo una temperatura di riferimento T_r , ad esempio la temperatura corrente indisturbata $T_r = T_\infty$, è possibile formare il seguente gruppo adimensionale:

$\tilde{T} = \frac{T - T_r}{\Delta T}$, dove ΔT rappresenta una diff. tra la T_r e una seconda temperatura caratteristica del problema, ad esempio la temperatura di parete.

ricordando che:

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla T \right) = \rho \underline{\Phi} + k \nabla^2 T \quad \text{con } \rho \underline{\Phi} = (\underline{c} \cdot \nabla) \cdot \underline{v}$$

si forma in indice:

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2}$$

allora:

$$\rho c \frac{V}{L} \Delta T \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j} \right) = \mu \frac{V^2}{L^2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right] + \frac{k}{L^2} \Delta T \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j^2}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j} \right) = \frac{Ec}{Re} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right] + \frac{1}{Re Pr} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j^2}$$

Poiché $p = p(x)$ e $u = u(y)$, l'uguaglianza tra i due termini si verifica solamente se essi sono costanti:

$$\begin{cases} \bullet \frac{dp}{dx} = -G \\ \bullet \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = -G \end{cases} \quad \text{con } G = \underline{\text{costante comune}}$$

Allora: $= 0$

$$p = -Gx + C_1$$

$$\mu \frac{du}{dy} = -Gy + C_1 \rightarrow u(y) = -\frac{G}{\mu} \frac{y^2}{2} + \frac{C_1}{\mu} y + C_2$$

La pressione è definita se meno di una costante arbitraria, poiché il bilancio di quantità di moto esse entra in gioco come gradiente. Possiamo perciò porre $C = 0$

$$\Rightarrow G = -\frac{dp}{dx}$$

$$u(y) = -\frac{G}{\mu} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Imponendo le condizioni al contorno:

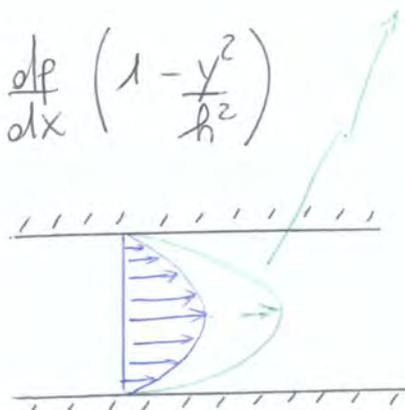
$$u(h) = u(-h) \rightarrow C_1 = 0 \quad \text{per la simmetria}$$

$$u(h) = 0 \rightarrow C_2 = \frac{Gh^2}{2\mu}$$

Quindi:

$$u(y) = \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2\mu} - \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2\mu} = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

$$u(y) = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$



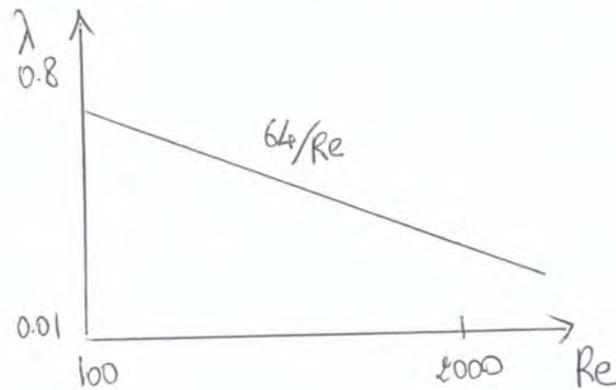
Il $\frac{du}{dy}$ maggiore è u_{max} più perdite per attrito la curva \Rightarrow occorre aumentare $\frac{dp}{dx}$

FLUSSO DI POISEUILLE PIANO

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dp}{dz} &= \frac{8\mu}{R^2} u_{media} \\ -\frac{dp}{dz} &= \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{1}{2} \rho u_{media}^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{8\mu}{R^2} = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{1}{2} \rho u_{media} \quad R = \frac{d}{2}$$

$$\lambda = 64 \frac{\mu}{\rho u_{media} d} = \frac{64}{Re}$$

Tale relazione è valida sperimentalmente fino a $Re \approx 2300$



SOLUZIONI APPROSSIMATE - CORRENTI CON BASSO NUMERO DI RE

• $\nabla \cdot \underline{v} = 0$

• $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{v}$

Riprendiamo le equazioni di NS, dove per semplicità si è omessa la notazione (\cdot) per indicare che esse sono adimensionali.

Se $Re \rightarrow 0$, allora possiamo arrivare (supponendo moto stazionario $\partial/\partial t = 0$):

• $\nabla \cdot \underline{v} = 0$

• $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{v}$

termine inerziale forze viscoso e di pressione

→ il termine inerziale è piccolo rispetto alle forze viscoso e di pressione, perciò può essere trascurato.

allora:

$\left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \underline{v} &= 0 \\ \nabla p &= \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{v} \end{aligned} \right.$	forma dimensionale	$\left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \underline{v} &= 0 \\ \nabla p &= \mu \nabla^2 \underline{v} \end{aligned} \right.$	<u>FLUSSI DI STOKES</u>

In questo modo, le equazioni di NS si riducono alle equazioni di Eulero:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{v} = 0 \\ \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p \end{cases}$$

Per $Re \rightarrow \infty$, il sistema costituisce un PROBLEMA PERTURBATIVO SINGOLARE.

Trascurare il termine $\mu \nabla^2 \underline{v}$ e considerare il sistema ridotto rappresenta l'equazione di Eulero, significa sopprimere le derivate di ordine superiore e ridurre l'ordine del sistema di equazioni.

ciò implica che non è più possibile soddisfare simultaneamente tutte le condizioni al contorno del problema.

Non è più possibile imporre la condizione di aderenza a parete.

Per capire che cosa succede, prendiamo un'equazione modello che rappresenta il nostro problema:

$$\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{v}$$

$$\boxed{\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - a = 0}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &\rightarrow \frac{1}{Re} \\ a &\rightarrow \nabla p \end{aligned}$$

sia $0 < a < 1$ e siamo:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(1) &= 1 \end{aligned} \quad \text{CONDIZIONI AL CONTORNO}$$

La soluzione esatta del problema è: $u(x, \varepsilon) = ax + (1-a) \frac{1 - e^{-x/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}}$

Cosa succede considerando il problema ridotto, trascurando cioè ε ?

EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE

Nel 1904 Prandtl introdusse uno dei concetti più importanti per lo studio delle correnti fluide caratterizzate da un numero di Reynolds elevato, la teoria dello strato limite.

Per alti numeri di Reynolds, il flusso lungo un corpo è caratterizzato da:

- linee di corrente e velocità che si discostano di poco da quelle ottenute con un esodo del flusso potenziale di un fluido ideale, inviscido;
- a differenza del flusso potenziale, il fluido non scivola lungo le pareti, ma ADERISCE SU DI ESSE.

La transizione da velocità nulle sulla parete ad un valore vicino a quello predetto dalla teoria potenziale avviene in un sottile strato. Quindi una corrente lungo una parete, nel caso di alto numero di Reynolds, può essere scomposta in due regioni, considerando un sistema di coordinate (x, y) allineato con la parete:

- uno strato sottile lungo la parete, denominato STRATO LIMITE, nel quale il gradiente $\frac{\partial u}{\partial y}$ è molto grande. In questa regione la viscosità, seppur piccola, esercita un ruolo essenziale e gli sforzi viscosi sono importanti. Lo spessore dello strato limite $\delta \ll L$, dove L indica una grandezza caratteristica del corpo, e diminuisce al crescere del Reynolds.
- una regione esterna dove non si hanno gradienti di velocità elevati, e l'influenza della viscosità diventa trascurabile. In questa regione si applica l'approssimazione di corrente (potenziale) di un fluido inviscido.

Indichiamo perciò e ricavare le equazioni che governano lo strato limite.

Affermare il termine dominante delle forze viscosi sia dello stesso ordine di grandezza dei termini convettivi, ovvero che:

$$\frac{1}{\sqrt{Re}} = \delta$$

Tale relazione conferma che al crescere del Re si sottilisce lo strato limite

Dalla componente lungo y dell'eq. di NS, trascurando i termini viscosi, otteniamo che:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = O(\delta)$$

→ la pressione, nella direzione perpendicolare alla parete è praticamente costante

$$p = p(x) = p_e(x) \leftarrow \text{NOTA DAL CALCOLO INVISCIDO}$$

Dall'equazione di continuità e la componente lungo x dell'eq. della quantità di moto, trascurando i termini viscosi, formiamo le equazioni dello strato limite.

in forma DIMENSIONALE:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

- Nel caso stazionario, lungo una parete impermeabile, si ha la condizione di aderenza:

$$u(x,0) = v(x,0) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{y=0} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

- All'estremo opposto, lo strato limite deve raccordarsi ai valori della corrente esterna:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x,y) = U_e(x)$$

Studiare le implicazioni di ciò?

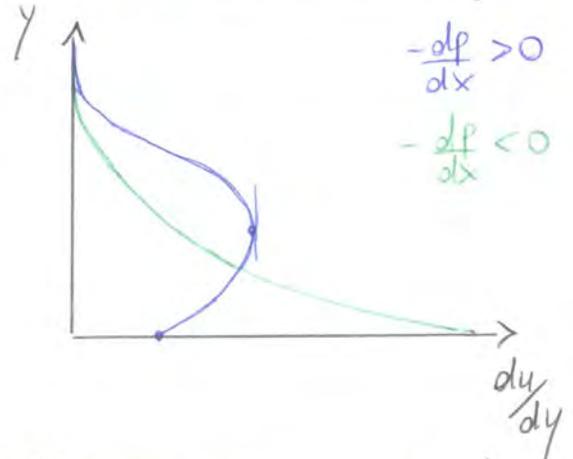
$$\frac{dp_2}{dx} \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{y=0} \geq 0$$

Nel caso di corrente esterna accelerata, $\frac{dp_e}{dx} < 0$ e la derivata seconda è ovunque negativa.

Nel caso di corrente esterna decelerata, $\frac{dp_e}{dx} > 0$, in prossimità delle pareti, perciò la derivata seconda dovrà risultare positiva; poiché verso il limite esterno dello strato limite, la derivata seconda deve essere negativa, risulta che il profilo di velocità ha un punto di flesso.

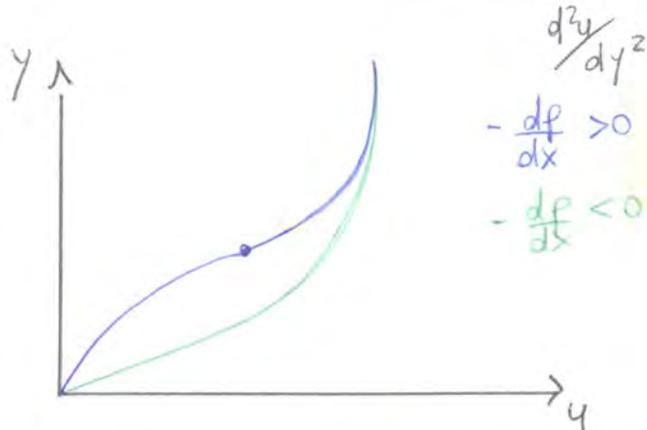


$$-\frac{df}{dx} < 0 \quad -\frac{df}{dx} > 0$$



$$-\frac{df}{dx} > 0$$

$$-\frac{df}{dx} < 0$$

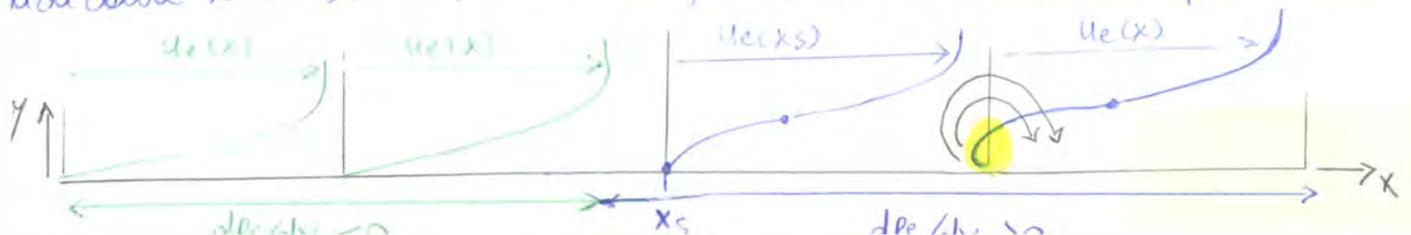


$$-\frac{df}{dx} > 0$$

$$-\frac{df}{dx} < 0$$

Nelle zone con gradiente di pressione positivo, il profilo di velocità presenta un flesso

Quando anche la derivata prima, per $y=0$, si annulla, la stazione corrispondente x_s individua il punto di separazione sulla parete. I profili alle stazioni successive, oltre a presentare un punto di flesso, saranno caratterizzati da una regione con velocità negativa, indicante una bolle di ricambio, e lo strato limite è separato.



Nell'integrale, abbiamo sostituito $u_e(x, y)$ con $U_e(x)$, valore della corrente esterna calcolato lungo la parete, perché espandendo in serie di Taylor il valore di $u_e(x, y)$ mi ha: \rightarrow IN ASSENZA DI STRATO LIMITE

$$u_e(x, y) = U_e(x) + \left(\frac{\partial u_e}{\partial y}\right)_{y=0} y + O(y^2)$$

Per la condizione di irrotazionalità:

$$\omega = \frac{\partial u_e}{\partial y} - \frac{\partial v_e}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u_e}{\partial y} = \frac{\partial v_e}{\partial x}}$$

Per la condizione di tangenza, $\left(\frac{\partial v_e}{\partial x}\right)_{y=0} = 0$, perché $v_e(x, 0) = 0$, allora:

$$\left(\frac{\partial u_e}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial v_e}{\partial x}\right)_{y=0} = 0 \Rightarrow \boxed{u_e(x, y) = U_e(x) + O(y^2)}$$

Si dimostra che la quantità $U_e(x) - u$ è positiva e il termine $\frac{d}{dx} \int_0^\infty [U_e(x) - u] dy$ è una funzione crescente di $x \Rightarrow v - v_e > 0$.

La relazione trovata indica che lo strato limite ha un effetto di portamento sul flusso esterno.

Definendo:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (v - v_e) = v_E \quad \underline{\text{VELOCITÀ DI SPSTAMENTO}}$$

Allora:

$$v_E = \frac{d}{dx} \left[U_e \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \right] = \frac{d}{dx} (U_e \delta^*)$$

La lunghezza $\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$ è lo SPESORE DI SPSTAMENTO e rappresenta la distanza della parete di cui è spostata la corrente esterna in seguito alla diminuzione di velocità nello strato limite.

Introduciamo la variabile :

$$\eta = \frac{y}{\delta} = \gamma \sqrt{\frac{u_{\infty}}{2\nu x}}$$

↳ inserito per comodità di calcolo

poiché $\frac{\delta}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \rightarrow \delta \sim \frac{x}{\sqrt{Re_x}} = \sqrt{\frac{\nu x}{u_{\infty}}}$

$$Re_x = \rho \frac{u_{\infty} x}{\mu} = \frac{u_{\infty} x}{\nu}$$

e la funzione di corrente in forma adimensionale:

$$f(\eta) = \frac{\psi(x, y)}{\sqrt{2\nu u_{\infty} x}}$$

perché $[\psi] = \frac{L}{T} \cdot L \Rightarrow$ dobbiamo dividere per una velocità e una lunghezza
 $\frac{\psi}{u_{\infty} \delta} = \frac{\psi}{u_{\infty} \sqrt{\frac{\nu x}{u_{\infty}}}} = \frac{\psi}{\sqrt{u_{\infty} \nu x}}$

Allora:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sqrt{2\nu u_{\infty} x} \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = u_{\infty} \frac{\partial f}{\partial \eta} = u_{\infty} f'(\eta)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_{\infty}}{2\nu x^2} \right) \sqrt{\frac{2\nu x}{u_{\infty}}}$$

$$\uparrow$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\eta}{x}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{2\nu u_{\infty} x} f(\eta) \right) = - \left[\frac{2\nu u_{\infty}}{2\sqrt{2\nu u_{\infty} x}} f(\eta) + \sqrt{2\nu u_{\infty} x} \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] =$$

$$= - \left[\frac{2\nu u_{\infty}}{2\sqrt{2\nu u_{\infty} x}} f(\eta) + \frac{\partial f}{\partial \eta} \sqrt{2\nu u_{\infty} x} \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{x} \right) \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\nu u_{\infty}}{x}} (\eta f' - f)$$

L'equazione:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

diventa un'equazione differenziale

ordinaria per la funzione $f(\eta)$:

$$f''' + ff'' = 0$$

con condizioni al contorno:

$$\eta = 0 \rightarrow f = f' = 0 \quad \text{e} \quad \eta = \infty \rightarrow f' = 1$$

• distribuzione dello sforzo di attrito lungo la lamina:

$$\tau_w(x) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}} \underbrace{f''(0)}_{0.4696} = 0.332 \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$$

$$u = U_\infty f'$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{\partial f'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\tau_w(x) = 0.332 \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$$

• Coefficiente di attrito:

$$C_f(x) = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = 0.664 \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$

$$C_f(x) = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$

• Nel caso di una parete di lunghezza L e PROFONDITÀ UNITARIA, la resistenza si ottiene integrando lo sforzo di attrito:

$$D_f = \int_0^L \tau_w(x) dx = 0.332 \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0.664 \sqrt{\rho \mu L U_\infty^3}$$

$$D_f = 0.664 \sqrt{\rho \mu L U_\infty^3}$$



Nel caso in cui la lamina sia totalmente immersa nella corrente fluida, lo strato limite si sviluppa sia sul dorso che sul ventre \rightarrow forza di attrito totale esercitata sulla lamina $\equiv 2D_f$

• Analogamente, si definisce lo spessore della quantità di moto θ , che tiene conto della diminuzione di flusso di quantità di moto nello strato limite rispetto al flusso potenziale:

$$\rho u_{\infty}^2 \theta \equiv \rho \int_0^{\infty} u (u_{\infty} - u) dy$$

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}}\right) dy = \sqrt{\frac{2\nu x}{u_{\infty}}} \int_0^{\infty} f' (1 - f') d\eta = 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{u_{\infty}}}$$

Definiamo infine, FATTORE DI FORMA la quantità:

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2.59$$

SOLUZIONI SIMILARI DELLO STRATO LIMITE

Le soluzioni di Blasius per lo strato limite piano può essere generalizzate ricercando le condizioni che devono essere soddisfatte dalla corrente potenziale affinché lo strato limite possiede soluzioni similari. Le soluzioni self similar sono caratterizzate dalla proprietà che i profili di velocità $u(x, y)$ a due differenti posizioni di x differiscono solo di un fattore di scala in u e in y .

Quindi, i profili di velocità possono essere rappresentati, per tutti i valori di x , da una funzione del tipo:

$$\frac{u}{u_e(x)} = \Phi\left(\frac{y}{g(x)}\right)$$

dove $g(x)$ è il fattore di scala per le coordinate y , proporzionale allo spessore dello strato limite nella stazione x e la velocità del flusso potenziale $u_e(x)$ rappresenta il fattore di scala per la velocità u .

Riprendendo la funzione di corrente:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{d\rho e}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

Introduciamo la funzione di corrente in forma adimensionale:

$$f(\xi, \eta) = \frac{\psi(x, y)}{L U_e(x)} \frac{\sqrt{Re^1}}{g(x)}$$

In funzione delle nuove variabili, le componenti della velocità sono espresse dalle relazioni:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{L U_e f}{\sqrt{Re^1}} g \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{L U_e f}{\sqrt{Re^1}} g \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} =$$

$$= \frac{L U_e g(x) \partial f}{\sqrt{Re^1} \partial \eta} \cdot \left(\frac{1}{L} \frac{\sqrt{Re^1}}{g(x)} \right) = U_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \eta} = f' = \frac{u}{U_e}$$

$$- \sqrt{Re^1} v = \sqrt{Re^1} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \dots$$

La funzione di corrente introdotta diventa allora:

$$f''' + \alpha f f'' + \beta (1 - f'^2) = \frac{U_e(x)}{U_\infty} g^2(x) \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)$$

$$\text{con } \begin{cases} \alpha = \frac{L g}{U_\infty} \frac{d}{dx} (U_e(x) g(x)) \\ \beta = \frac{L}{U_\infty} g^2(x) \frac{dU_e(x)}{dx} \end{cases} \text{ sono adimensionali}$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \eta = 0 \rightarrow f = f' = 0 \\ \eta \rightarrow \infty \Rightarrow f' = 1 \end{cases}$$

FLUSSO SU UN CUNEO

Una classe importante di flussi autosimiliari si ottiene ponendo:

$$\int \cdot \alpha = 1$$

$$\int \cdot \beta = \frac{2m}{m+1} \rightarrow m = \frac{\beta}{2-\beta} \Rightarrow 2\alpha - \beta = \frac{2}{m+1}$$

Allora:

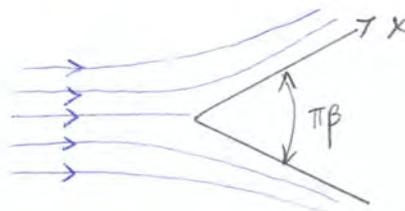
$$\frac{Ue(x)}{U_\infty} = k^{m+1} \left(\frac{2}{m+1} \frac{x}{L} \right)^m = c \left(\frac{x}{L} \right)^m \quad \text{con } c = k^{m+1} \left(\frac{2}{m+1} \right)^m$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{m+1} \frac{U_\infty}{Ue} \frac{x}{L}} = \sqrt{\frac{2}{c(m+1)}} \left(\frac{x}{L} \right)^{\frac{1-m}{2}}$$

La legge:

$$\frac{Ue(x)}{U_\infty} = c \left(\frac{x}{L} \right)^m$$

Corrisponde al flusso potenziale su un cuneo con apertura angolare $\pi\beta$ e la coordinata x rappresenta la lunghezza della parete nel iniziare dallo spigolo dove si ha un punto di ristagno



Quindi, nel caso di tratto limite su una parete con flusso potenziale, ponendo $C=1, L=1 \Rightarrow Ue(x) = U_\infty x^m$ e, per un particolare valore di β (e di m), si ottiene la funzione $f(\eta)$ come soluzione dell'eq. di Falkner - Skan.

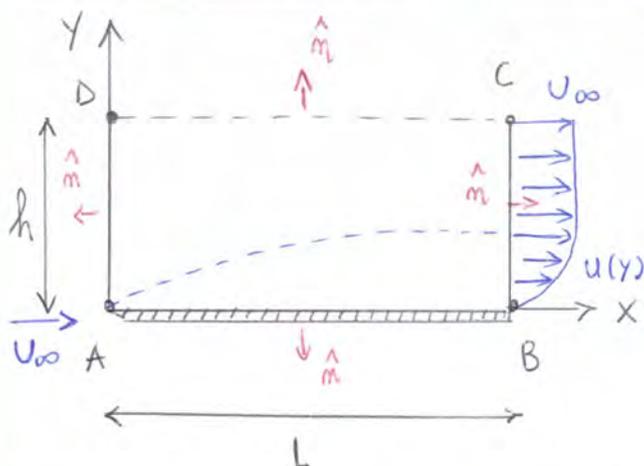
In questo caso, abbiamo che:

Allora, in presenza di un gradiente inverso, lo strato limite non separa solo se la decelerazione è molto debole

• $\beta = 1 (m=1) \rightarrow$ FLUSSO DI STAGNAZIONE

flusso nell'intorno di un punto di arresto bidimensionale.

EQUAZIONI INTEGRALI DELLO STRATO LIMITE



Consideriamo una lamina di profondità unitaria $H=1$.
Come possiamo calcolare Δ ?

Riprendiamo le equazioni di conservazione in forma integrale:

• $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \rightarrow \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \underline{v}) d\Omega = \oint_{\sigma} \rho (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma = 0$ (caso stazionario)

$\oint_{\sigma} \rho (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma = 0$ conservazione della massa in forma integrale

• $\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{v} \cdot \underline{v}) \right) = \nabla \cdot \underline{\pi} \rightarrow \int_{\Omega} \rho \nabla \cdot (\underline{v} \cdot \underline{v}) d\Omega = \int_{\sigma} \nabla \cdot \underline{\pi} d\sigma$

$\oint_{\sigma} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma = \oint_{\sigma} \underline{\pi} \cdot \underline{n} d\sigma$ conservazione q.d.m. in forma integrale

$-D_i - \sigma_j$, forza che la lamina esercita sul fluido

EQUAZIONE INTEGRALE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Riprendiamo le equazioni dello strato limite:

$$\begin{cases} \bullet \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \bullet u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dpe}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

Ossevando che:

$$\begin{cases} u_e \frac{du_e}{dx} = - \frac{dpe}{dx} \\ \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{cases}$$

Allora:

$$\bullet \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\bullet u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (2)$$

Moltiplichiamo la (1) per u e sommiamo la (2):

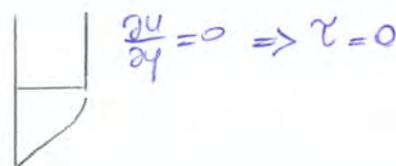
$$u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

$$2u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (uv) = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

Integrando attraverso lo strato limite, dalla parete fino a una distanza $h > \delta$:

$$\bullet \frac{1}{\rho} \int_0^h \frac{\partial \tau}{\partial y} dy = - \frac{\tau_w}{\rho}$$



L'eq. di Von Korman può anche essere riscritta come:

$$2Ue\theta \frac{dUe}{dx} + Ue^2 \frac{d\theta}{dx} + Ue S^* \frac{dUe}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}$$

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{Ue} \frac{dUe}{dx} (2\theta + S^*) = \frac{\tau_w}{\rho Ue^2}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{Ue} (2 + H) \frac{dUe}{dx} = \frac{C_f}{2}}$$

con $H = \frac{S^*}{\theta}$ FATTORE DI FORMA

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho Ue^2}$$

SOLUZIONE APPROSSIMATA DELLE EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE

La soluzione analitica delle equazioni dello strato limite risulta possibile solo per alcuni casi, con particolari gradienti di pressione del flusso potenziale. Il calcolo dello strato limite con un gradiente di pressione qualunque risulta possibile solo se si ricorre alla soluzione numerica delle eq. dello strato limite.

Quando non è necessario determinare il campo di moto in ogni punto dello strato limite ma può essere sufficiente valutare le caratteristiche medie o integrali, è possibile risolvere le equazioni mediante un metodo integrale.

Prendiamo l'eq. di Von Korman:

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{Ue} \frac{dUe}{dx} (2\theta + S^*) = \frac{\tau_w}{\rho Ue^2}}$$

Essa può essere interpretata come

un'equazione differenziale ordinaria per lo spessore di spostamento $S^*(x)$, lo spessore di quantità di moto $\theta(x)$ e lo sforzo di attrito e parete $\tau_w(x)$.

L'equazione contiene più incognite e non è dunque sufficiente per risolvere il problema; affinché esso lo sia occorre introdurre una approssimazione.

Si ipotizza dunque che il profilo di velocità $u(y)$ appartenga ad una

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= \int_0^{\infty} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy = \delta \int_0^1 (2\eta - \eta^2) (1 - 2\eta + \eta^2) d\eta = \\ &= \delta \int_0^1 (2\eta - 4\eta^2 + 2\eta^3 - \eta^2 + 2\eta^3 - \eta^4) d\eta = \delta \int_0^1 (2\eta - 5\eta^2 + 4\eta^3 - \eta^4) d\eta. \\ &= \delta \left(\eta^2 - \frac{5}{3}\eta^3 + \eta^4 - \frac{\eta^5}{5} \right)_0^1 = \frac{2}{15} \delta(x) \end{aligned}$$

$$C_f(x) = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2} = \frac{2\mu}{\rho U_{\infty}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{U_{\infty}} \right) \Big|_{y=0} \stackrel{\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}}{=} \frac{2\nu}{U_{\infty} \delta} \frac{\partial}{\partial \eta} (2\eta - \eta^2) \Big|_{\eta=0} = \frac{2\nu}{U_{\infty} \delta} \cdot 2 = \frac{4\nu}{U_{\infty} \delta}$$

Il parametro $\delta(x)$ può essere ottenuto dall'equazione di Von Karman

$$\frac{dU_{\infty}}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{u_e} (2 + H) \frac{du_e}{dx} = \frac{C_f}{2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} \Rightarrow \frac{\delta d\delta(x)}{15 dx} = \frac{4\nu}{2\delta(x)U_{\infty}}$$

$$\boxed{\delta(x) \frac{d\delta(x)}{dx} = 15 \frac{\nu}{U_{\infty}}}$$

$$\sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \cdot \frac{x}{x} = \frac{x}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}}$$

Allora:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\delta^2(x)}{2} \right) = 15 \frac{\nu}{U_{\infty}} \Rightarrow \delta(x) = \sqrt{30} \cdot \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \approx 5.477 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} = \frac{5.477 x}{\sqrt{Re_x}}$$

Perciò:

$$\delta(x) = 5.477 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \rightarrow \delta^*(x) = 1.8257 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \quad \left(1.7208 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \right)$$

↓

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2.5 \quad (2.59) \quad \theta(x) = 0.73 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \quad \left(0.664 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \right)$$

$$C_f = 0.730 \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \quad \left(0.664 \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \right)$$

Poiché $p = p(x)$, $u = u(y)$, l'uguaglianza tra i due termini si ha solo se essi sono costanti:

$$\frac{dp}{dx} = -G \rightarrow p = -Gx + C_1 = 0, \text{ costante arbitraria}$$

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = -G \rightarrow u(y) = -\frac{Gy^2}{2\mu} + C_1 y + C_2$$

Condizioni al contorno:

$$u(\pm b) = 0 \rightarrow \begin{cases} -\frac{G}{\mu} \frac{b^2}{2} + C_1 b + C_2 = 0 \\ -\frac{G}{\mu} \frac{b^2}{2} - C_1 b + C_2 = 0 \end{cases} +$$

$$-\frac{G}{\mu} b^2 + 2C_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{G b^2}{2\mu} \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

Velocità:

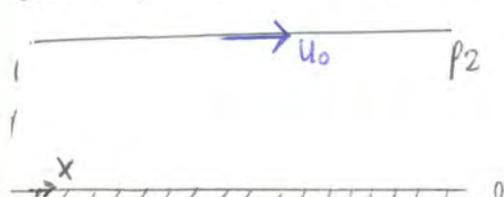
$$u(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (b^2 - y^2)$$

Il profilo di velocità parabolico lungo y . L'unica causa che genera il moto nel canale è la differenza di pressione tra l'imbocco del canale (p_1) e l'uscita (p_2).

La soluzione trovata vale in regime laminare, cioè per $Re < Re_{cr} \approx 1300 \div 1800$
 con $Re = \frac{\bar{u} \cdot 2b}{\nu}$

FLUSSO DI COUETTE

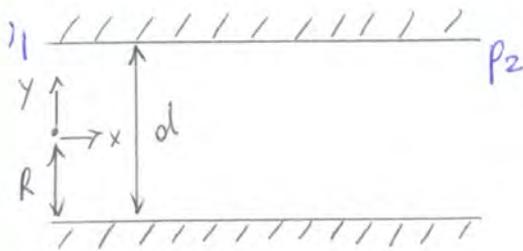
Flusso stazionario tra due piastre infinitamente estese, distanti h , una fissa e l'altra in movimento. $l \gg h$



Supponiamo che \bar{u} sia la variazione di pressione lungo il canale ($p_1 \neq p_2$)

FLUSSO IN UN CONDOTTO CIRCOLARE (flusso di Hagen-Poiseuille)

Flusso stazionario in un condotto circolare di raggio R , diametro d .



$$\begin{cases} \gamma: \text{COORDINATA RADIALE} \\ \phi: \text{COORDINATA AZIMUTALE} \\ v = w = 0 \end{cases}$$

- $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow u = u(\gamma, \phi, t) \rightarrow u = u(\gamma)$ per simmetria
 - $\frac{\partial p}{\partial \gamma} = 0$
 - $\frac{\partial p}{\partial \phi} = 0$
- $$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial \gamma} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \phi} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow p = p(x)$$

Flusso:

Poiché in coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} \text{e per noi } r &\equiv \gamma \\ x &\equiv z \\ \phi &\equiv \theta \end{aligned}$$

$$\nabla(\cdot) = \frac{\partial}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \underline{e}_z$$

$$\nabla \cdot \underline{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\nabla^2(\cdot) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Avremo che:

$$\rho \left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + v \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}} + \frac{w}{y} \cancel{\frac{\partial u}{\partial \phi}} + u \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial \gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \right)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right) = \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

Condizioni al contorno:

- $u(R) = 0$
- $u(0)$ FINITO

Poiché il termine a sinistra è funzione di γ e quello a destra di x , affinché siano uguali i termini devono essere uguali e costanti

$$Q = \int_A u(y) dA = \text{PORTATA IN VOLUME} = 2\pi \int_0^R y u(y) dy = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx}\right)$$

Osserviamo che: $Q = \bar{u} A = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx}\right)$

ESERCIZIO 1

Condotta a sezione circolare ($D = 1 \text{ cm}$) e lunghezza $L = 30 \text{ m}$. La caduta di pressione lungo il tubo è 2 kPa

Portata volumica di flusso: $Q = \bar{u} A = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx}\right)$

In tutta la trattazione $Re < Re_{CR}$

Ammonendo flusso laminare si segue ($\mu = 10^{-3} \text{ kg/ms}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$), determinare:

• VELOCITÀ MAX NEL CONDOTTO

• PORTATA IN MASSA

• VELOCITÀ MEDIA NEL CONDOTTO

$$\left| \frac{dp}{dx} \right| = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta p}{L}$$

$$\bar{u} = \frac{R^2}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx}\right) = \frac{R^2}{8\mu} \cdot \frac{2 \text{ kPa}}{30 \text{ m}} \approx 0.2083 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$u_{\text{max}} = \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dx}\right) = 2\bar{u} = 0.4166667 \text{ m/s}$$

$$Q_m = Q\rho = \rho A \bar{u} = \rho \pi \frac{D^2}{4} \bar{u} = 0.016359 \text{ kg/s}$$

ESERCIZIO 2

Condotta a sezione circolare di diametro d . Calcolare d per avere una portata Q pari a $12 \text{ m}^3/\text{min}$ di olio a 20°C ($\rho = 917 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$),

$$Re = 2000$$

Calcolare la variazione di pressione per unità di lunghezza.

$$Q = 0.2 \text{ m}^3/\text{s}$$

ESERCIZIO 4

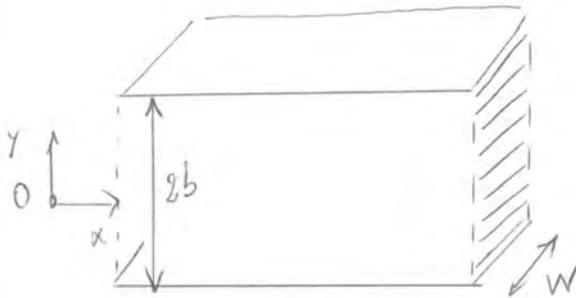
Flusso in un canale pieno: calcolare il rapporto $\frac{\bar{u}}{u_{max}}$

Altezza: $2b$

Profondità lungo z : w

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (b^2 - y^2)$$

$$u_{max} = u(0) = \frac{1}{2\mu} b^2 \left(-\frac{dp}{dx}\right)$$



$$\bar{u} = \frac{\int_A u(y) dA}{A} = \frac{w \int_{-b}^b \left(-\frac{1}{2\mu}\right) \frac{dp}{dx} (b^2 - y^2) dy}{w \cdot 2b} = -\frac{1}{2 \cdot 2\mu b} \int_{-b}^b \left[\frac{dp}{dx} b^2 - \frac{dp}{dx} y^2\right] dy =$$

$$= -\frac{1}{4\mu b} \left[\frac{dp}{dx} b^2 y - \frac{dp}{dx} \frac{y^3}{3}\right]_{-b}^b = -\frac{1}{4\mu b} \frac{dp}{dx} \left[b^3 - \frac{b^3}{3} + b^3 - \frac{b^3}{3}\right] = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4\mu b} \frac{dp}{dx} b^3$$

$$\bar{u} = -\frac{1}{3} \frac{b^2}{\mu b} \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{3} \frac{b^2}{\mu b} \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{u}}{u_{max}} = \frac{\frac{1}{3} \left(-\frac{dp}{dx}\right) \cdot \frac{2\mu b^3}{b^2 \left(-\frac{dp}{dx}\right)}}{\frac{1}{2\mu} b^2 \left(-\frac{dp}{dx}\right)} = \frac{2}{3}$$

ESERCIZIO 5

$$Q = 500 \text{ cm}^3/\text{s} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$R = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$$

$$L = 10 \text{ m}$$

le cadute di pressione è 1274 Pa .

calcolare ν, μ ?

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx}\right) \sqrt{\frac{1274 \text{ Pa}}{10 \text{ m}}}$$

$$\mu = \frac{\pi R^4}{8Q} \left(-\frac{dp}{dx}\right) = 0,001 \text{ kg/ms}$$

Il flusso in questione è quindi acqua.

$$\Rightarrow \rho = 1000 \text{ kg/cm}^3 \Rightarrow \nu = \frac{\mu}{\rho} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

FLUSSO DI COUETTE

```

clear all;

%definizione variabili%

h=0.001;
y=0:0.000001:h;
mhu=0.0134;
U0=0.1;
grad_press1=0;
grad_press2=-2680;
grad_press3=2680;

%equazione profilo velocit+%

u1=(U0/h)*y+(1/(2*mhu))*grad_press1*(y.^2-h*y);
u2=(U0/h)*y+(1/(2*mhu))*grad_press2*(y.^2-h*y);
u3=(U0/h)*y+(1/(2*mhu))*grad_press3*(y.^2-h*y);

%equazione sforzo attrito%

tau1=mhu*U0/h+0.5*grad_press1*(2*y-h);
tau2=mhu*U0/h+0.5*grad_press2*(2*y-h);
tau3=mhu*U0/h+0.5*grad_press3*(2*y-h);

%sforzo attrito parete superiore%

tau_w1=tau1(length(tau1));
disp('sforzo attrito parete superiore nel caso 1: (tau_w1)=');
disp(tau_w1)
tau_w2=tau2(length(tau2));
disp('sforzo attrito parete superiore nel caso 2: (tau_w2)=');
disp(tau_w2)
tau_w3=tau3(length(tau3));
disp('sforzo attrito parete superiore nel caso 3: (tau_w3)=');
disp(tau_w3)
figure

plot(y,u1);
hold on
plot(y,u2);
plot(y,u3);

title('Profili di velocit+ al variare del gradiente di pressione');
figure

plot(y,tau1);
hold on
plot(y,tau2);
plot(y,tau3);

title('Sforzo di taglio al variare del gradiente di pressione');

```

ESERCITAZIONE STRATO LIMITE LAMINARE

- ① Calcolare la resistenza di attrito D e lo spessore di strato limite δ , in prossimità del bordo di fuga (mm proprio al bordo di fuga) di un'ala rettangolare di un mini-aeroplano ($l = 6 \text{ mm}$, $b = 30 \text{ mm}$) con una corrente d'aria in condizioni standard ($\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$), con $U_{\infty} = 5 \text{ m/s}$. Su un modello in scala (ingrandito: $l_m = 150 \text{ mm}$, $b_m = 750 \text{ mm}$) sono state effettuate delle prove in acqua ($\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\nu_{H_2O} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) ottenendo $D_m = 0.19 \text{ N}$ e $\delta_m = 3 \text{ mm}$, con $U_m = 0.5 \text{ m/s}$.

Calcoliamo il Re delle due configurazioni:

$$\left. \begin{aligned} Re &= \frac{U_{\infty} l}{\nu_{\text{aria}}} = 2000 \\ Re_m &= \frac{U_{\infty m} l_m}{\nu_{H_2O}} = 75000 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{in entrambi i casi} \\ &Re < Re_{cr} = 5 \cdot 10^5 \Rightarrow \text{teoria strato limite} \\ &\text{laminare di Blasius} \end{aligned}$$

Dall'analisi di strato limite laminare, sappiamo che:

$$\left. \begin{aligned} \delta(x) &= 5.0 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \\ C_D &= \frac{1.328}{\sqrt{Re_l}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Non utilizziamo tale formule perché non sappiamo} \\ &\text{quale } x \text{ sostituire. Utilizziamo le formule proporzio-} \\ &\text{nali, analogamente per il } C_D. \\ &\cdot \frac{\delta}{l} \propto \frac{1}{\sqrt{Re_l}} \quad \cdot C_D \propto \frac{1}{\sqrt{Re_l}} \quad \cdot D = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 S C_D \end{aligned}$$

Allora:

$$S : \delta_m = \frac{l}{\sqrt{Re_l}} : \frac{l_m}{\sqrt{Re_{l,m}}} \rightarrow \delta = \frac{\delta_m l}{l_m} \frac{\sqrt{Re_{l,m}}}{\sqrt{Re_l}} = 7,368 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,7368 \text{ mm}$$

$$D : D_m = \frac{1}{\sqrt{Re_l}} : \frac{1}{\sqrt{Re_{l,m}}} \rightarrow D = \frac{\frac{1}{2} \rho_{\text{aria}} U_{\infty}^2 S \sqrt{Re_{l,m}}}{\frac{1}{2} \rho_{H_2O} U_{\infty m}^2 S_m \sqrt{Re_l}} = 2,28 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

$$\frac{1}{2} \frac{4-\pi}{2\pi} \frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu V_{\infty} \pi}{2 \delta \rho U_{\infty}^2} \rightarrow \delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu V_{\infty} \pi^2}{\rho(4-\pi) U_{\infty}^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\delta^2}{2} \right) = \frac{\mu V_{\infty} \pi^2}{\rho(4-\pi) U_{\infty}^2} \rightarrow \int_0^x \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta^2}{2} \right) dx = \int_0^x \frac{\mu V_{\infty} \pi^2}{\rho(4-\pi) U_{\infty}^2} dx$$

$$\delta^2 = \frac{2\pi^2 \mu U_{\infty}}{\rho(4-\pi) U_{\infty}^2} x + C \rightarrow \delta^2 = \frac{2\pi^2 \nu U_{\infty}}{(4-\pi) U_{\infty}^2} x + C$$

Imponiamo che $\delta(x=0) = 0 \Rightarrow C = 0$

Per cui:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\pi^2 \nu U_{\infty} x}{4-\pi U_{\infty}^2}} = \sqrt{\frac{2\pi^2}{4-\pi}} \sqrt{\frac{\nu U_{\infty} x}{U_{\infty}^2}} = 4.80 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} = 4.80 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$

Allora:

$$C_f(x) = \frac{\pi \nu}{U_{\infty}} \cdot \frac{\sqrt{Re_x}}{x} \cdot \frac{1}{4.80} = 0.6544 \frac{\nu}{U_{\infty} x} \sqrt{\frac{U_{\infty} x}{\nu}} = \frac{0.6544}{\sqrt{Re_x}} \quad \left(\frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \right)$$

$$\theta(x) = \frac{4-\pi}{2\pi} \cdot 4.80 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} = 0.6557 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \quad \left(\frac{0.664 x}{\sqrt{Re_x}} \right)$$

$$\delta^*(x) = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \frac{2}{\pi} \cdot 4.80 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} = 1.744 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \quad \left(\frac{1.7208 x}{\sqrt{Re_x}} \right)$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2.659 \quad (2.59)$$

③ Considerando lo strato limite su una lamina piana di lunghezza L e profondità b , si è trovato mediante l'eq. di q.d.m. in forma integrale che la resistenza di attrito su ENTRAMBE le pareti della lamina piana è:

$$D = 2b\rho U_{\infty}^2 \theta(L)$$

Verificare che la soluzione ottenuta sia consistente con la soluzione di Blasius

Esercizio (Blasius, BL, m)

Consideriamo la soluzione di Blasius per l'equazione

$$\begin{aligned} f''' + ff'' &= 0, \\ f = f' &= 0 \text{ se } \eta = 0, \\ f' &= 1 \text{ se } \eta \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (32)$$

dello strato limite laminare su una lamina piana (lunghezza $L = 4$ m e larghezza $b = 2$ m), investita da una corrente di aria standard ($\rho_{\text{aria}} = 1.164 \text{ kg/m}^3$, $\nu_{\text{aria}} = 1.6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$) con una velocità U_∞ di 2 m/s.

- Visualizzare la componente di velocità $u(\eta) = U_\infty f'(\eta)$, con $\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}}$. Visualizzare anche il profilo $u(y)$ ad alcune stazioni longitudinali (x) della lamina (p. es., in prossimità del bordo d'attacco, a metà lunghezza della lamina, in prossimità del bordo di fuga);
- Valutare la componente di velocità trasversale, v :

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\nu U_\infty}{x}} (\eta f'' - f'), \quad (33)$$

all'estremo dello strato limite ($\eta = 5$) lungo x e verificare che in $x = L$, $v = 0.0024 \text{ m/s}$.

6

- Valutare $\delta^*(x)$ e $\theta(x)$ lungo x tramite integrazione numerica della soluzione tabellare di Blasius. Calcolare il fattore di forma, H .

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = \sqrt{\frac{2\nu x}{U_\infty}} \int_0^\infty (1 - f') d\eta, \quad (34)$$

$$\theta(x) = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = \sqrt{\frac{2\nu x}{U_\infty}} \int_0^\infty f'(1 - f') d\eta. \quad (35)$$

- Graficare lo sforzo di taglio a parete:

$$\tau_w(x) = 0.332\mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}, \quad (36)$$

e calcolarne il valore in $x = L$.

- Approssimare la resistenza d'attrito, D , su un lato della lamina attraverso l'integrazione numerica di τ_w :

$$D = b \int_0^L \tau_w(x) dx, \quad (37)$$

(escludendo il punto $x = 0$) e confrontare il valore ottenuto con il risultato dell'integrazione analitica ($D = 0.0350 \text{ N}$).

- Calcolare la portata in massa attraverso lo strato limite lungo x :

$$Q_m(x) = \rho \int_0^\infty u(x, y) dy = \rho \sqrt{\frac{2\nu x}{U_\infty}} \int_0^\infty u(\eta) d\eta, \quad (38)$$

e in $x = L$.

Suggerimenti

- Far coincidere il bordo d'attacco ($x = 0$) con l'origine degli assi $O(0, 0)$.
- Utilizzare le funzioni Matlab `trapz` oppure `integral` per l'integrazione numerica.

```

plot(u,y_0);
hold on
plot(u,y_mean);
plot(u,y_L);
title('Profilo ad alcune stazioni');
xlabel('u');
ylabel('y');
legend('bordo di attacco','metà corda','bordo di fuga');
%%
% valutare la componente di velocità trasversale v all'estremo dello
% strato limite (eta=5) lungo x e verificare che in x=L v=0.0024 m/s %

indice=find(eta==5);
v_est=0.5*sqrt((2*nu*U_inf)./x).*(eta(indice).*f1(indice)-f(indice));

figure
plot(x,v_est);
xlabel('x');
ylabel('v');
title('velocità trasversale v estremo dello strato limite');

fprintf('velocità trasversale in x=L: %f [m/s] \n',v_est(end));

%%
% Valutazione spessore di spostamento e spessore della quantità di moto%

a=1-f1;
delta=sqrt(((2*nu).*x)/U_inf)*trapz(eta,a);

figure
plot(x,delta);

hold on
c=f1.*(1-f1);
theta=sqrt(((2*nu).*x)/U_inf)*trapz(eta,c);

plot(x,theta);
title('Spessore di spostamento e di quantità di moto');

legend('Spessore di spostamento','Spessore di quantità di moto');

%%

% Sforzo di taglio a parete %

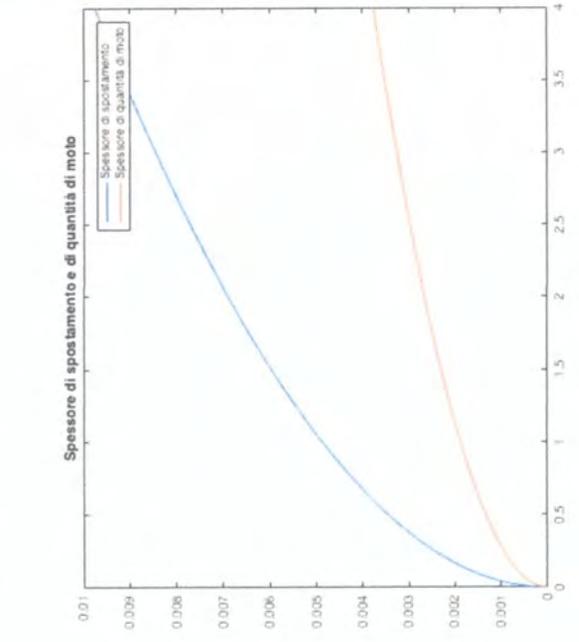
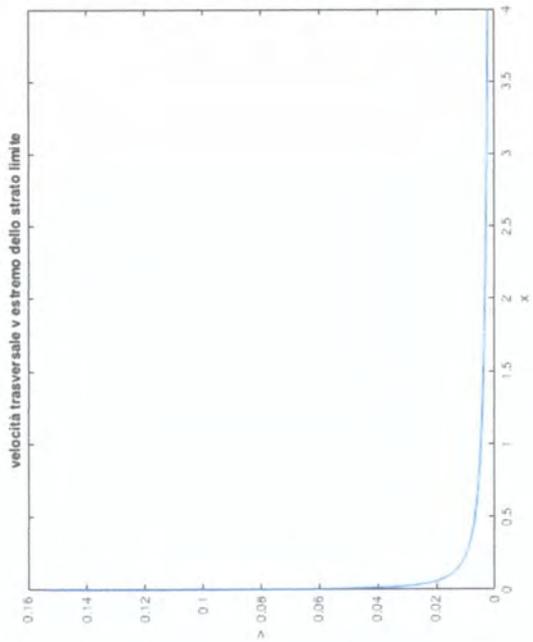
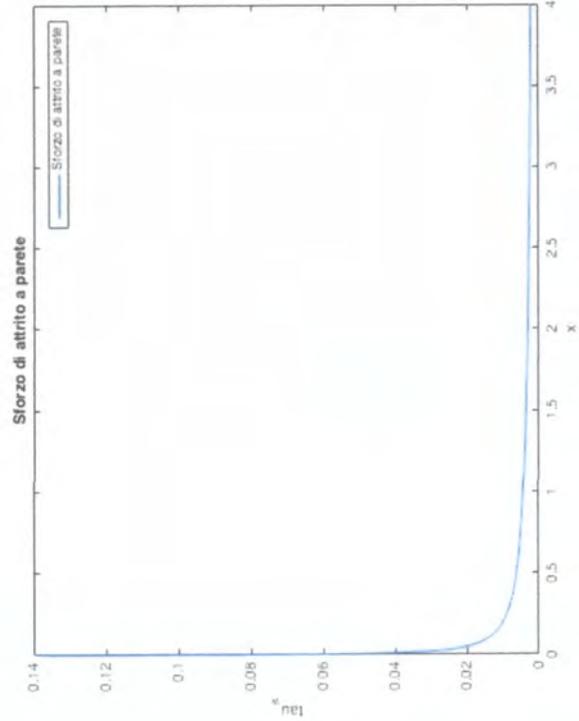
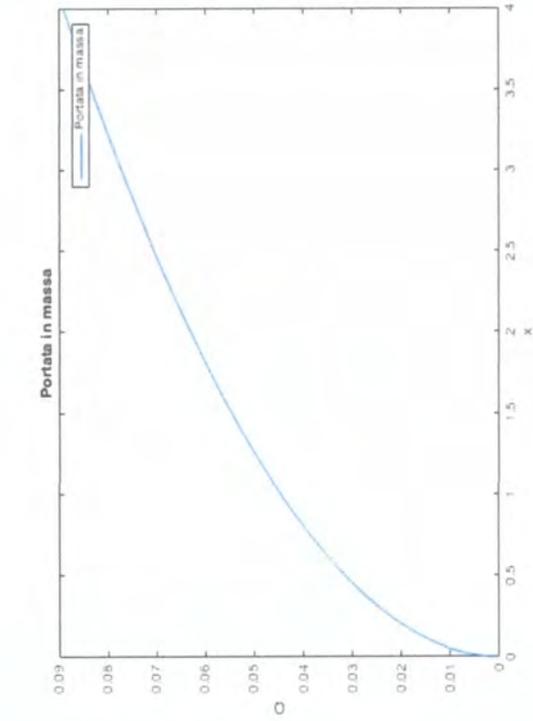
tau_w=0.332*mhu*U_inf*sqrt(U_inf./(x.*nu));

figure
plot(x,tau_w);
legend('Sforzo di attrito a parete');
title('Sforzo di attrito a parete');
xlabel('x');
ylabel('tau_w');

fprintf('Sforzo di taglio a parete in x=L: %f [Pa]\n',tau_w(end));
%%

%approssimare la resistenza di attrito D su UN LATO della lamina
%attraverso l'integrazione numerica di tau_w e confrontarla con il risultato
dell'integrazione analitica D=0.0350%

```



caratterizzati da piccole oscillazioni bidimensionali. L'analisi di stabilità più semplice, dunque, si basa sullo studio bidimensionale di piccole perturbazioni di un profilo di velocità laminare stazionario.

Ipotesizzando perturbazioni ondose, si individua per ogni numero d'onda un corrispondente valore di Re critico, risolvendo un problema lineareizzato agli autovalori.

Nel caso di uno strato limite, uno scivolo o un getto, il numero di Reynolds ha carattere locale, in quanto la lunghezza e la velocità sono i valori presenti a una determinata stazione: ad esempio la spessore dello strato limite e la velocità esterna.

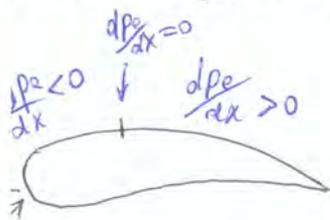
Di conseguenza, uno strato limite subisce la transizione da laminare a turbolento quando raggiunge localmente le condizioni di instabilità nell'analisi linearizzata, per una lamina piana, si trova:

$$Re_{\delta^*,crit} = \frac{U_{\infty} \delta^*}{\nu} = 520$$

Utilizzando le relazioni di Blasius per δ e δ^* , dalla condizione precedente si ottiene $Re_{x,crit} \approx 3 \cdot 10^5$.

In conclusione, lungo una parete un tratto dello strato limite può essere laminare e un tratto turbolento.

L'analisi teorica della transizione nello strato limite ha inoltre evidenziato un aspetto importante: nel limite di fluido inviscido, si rileva che tutti i profili di velocità con un flesso sono sempre instabili.



Poiché i profili di velocità presentano un flesso in presenza di un gradiente di pressione avverso, $\frac{dp}{dx} > 0$, si conclude che, sul dorso di un profilo alare nelle zone di recupero della pressione, i profili sono sempre instabili e quindi la transizione avviene prima che lo strato limite laminare raggiunga le condizioni di separazione.