



**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 2128A-**

**ANNO: 2017**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Tilloca Daniele**

**MATERIA: Fondamenti di Meccanica del volo (teoria + esercitazioni) - Prof. Gili**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Lezione n°1

29/02/2016

- L'atmosfera reale in quiete. - \*

L'aria secca è composta da vari elementi, sui tutti: l'ossigeno, l'azoto, l'argon, ecc...

Costituente	Formula	Peso Molecolare	% in Volume	% in peso
AZOTO	N <sub>2</sub>	28,016	78,1	75,5
OSSIGENO	O <sub>2</sub>	32,000	20,95	23,1
ARGON	A	39,944	0,93	1,28
ANIDRIDE CARB.	CO <sub>2</sub>	44,010	0,03	-
NEON	Ne	20,183	1,8 × 10 <sup>-3</sup>	-
ELIO	He	4,003	5,24 × 10 <sup>-4</sup>	-
KRIPTON	Kr	83,7	1,0 × 10 <sup>-4</sup>	-
IDROGENO	H <sub>2</sub>	2,016	5,0 × 10 <sup>-5</sup>	-
XENON	Xe	131,3	8,0 × 10 <sup>-6</sup>	-
OZONO	O <sub>3</sub>	48,000	1,0 × 10 <sup>-6</sup>	-
RADON	Rn	222	6,0 × 10 <sup>-18</sup>	-

L'aria secca rappresenta tuttavia una approssimazione, dal momento che in realtà l'aria comune sulla terra sempre una certa percentuale di **Vapore acqueo**, e l'aria sarà quindi umida.

Il peso ~~molare~~ **molare** dell'aria secca è: (limitando agli elementi più importanti):

$$M = (\% \text{ peso } N_2)(\text{Peso mol } N_2) + (\% \text{ peso } O_2)(\text{Peso mol } O_2) + (\% \text{ peso } A)(\text{Peso mol } A) = (0,755 \cdot 28) + (0,231 \cdot 32) + (0,0128 \cdot 39) = 29 \text{ kg/mole}$$

$$M = 29 \text{ kg/mole}$$

Le condizioni standard per noi saranno:  $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} \\ 0^\circ\text{C} \end{array} \right.$

Un'altra assunzione fondamentale che facciamo è quella di considerare l'aria come un **gas perfetto**. In questo modo sarà possibile l'utilizzo e l'applicazione di leggi riguardanti i gas perfetti, come:

- Eq. di stato dei gas perfetti:

$$T = T_m = \frac{T_n + T_{n+1}}{2}$$

● Integriamo ancora:

$$\int_1^2 dz = -\frac{R}{\rho} T_m \int_1^2 \frac{dp}{p} \Rightarrow z_2 - z_1 = \Delta z = -\frac{R}{\rho} T_m \ln \frac{p_2}{p_1}$$

quindi  $\Delta z = \frac{R}{\rho} T_m \ln \frac{p_1}{p_2}$ , dove  $z = z_0 + \sum_n \Delta z_n$

È fondamentale specificare come VERE queste quote, poiché generalmente si ha a che fare con differenti tipologie di quote.

l'equazione di stato dei gas perfetti può essere riscritta come:

$$\bullet \frac{p}{\rho} = \frac{R}{\rho} T \Rightarrow \frac{p}{\rho} = g \frac{R}{g} T = RT$$

dove  $R = 287 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \text{K}}$  è la costante specifica per l'aria secca.

$$R = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{10330 \cdot 22,415}{273,16} = 847,8 \frac{\text{kg m}}{\text{Mole} \cdot \text{K}}$$

lezione n°2

01/03/2016

la legge di Stevino ci dice che la pressione diminuisce all'aumentare della quota ( $dp = -\gamma dz$ ).

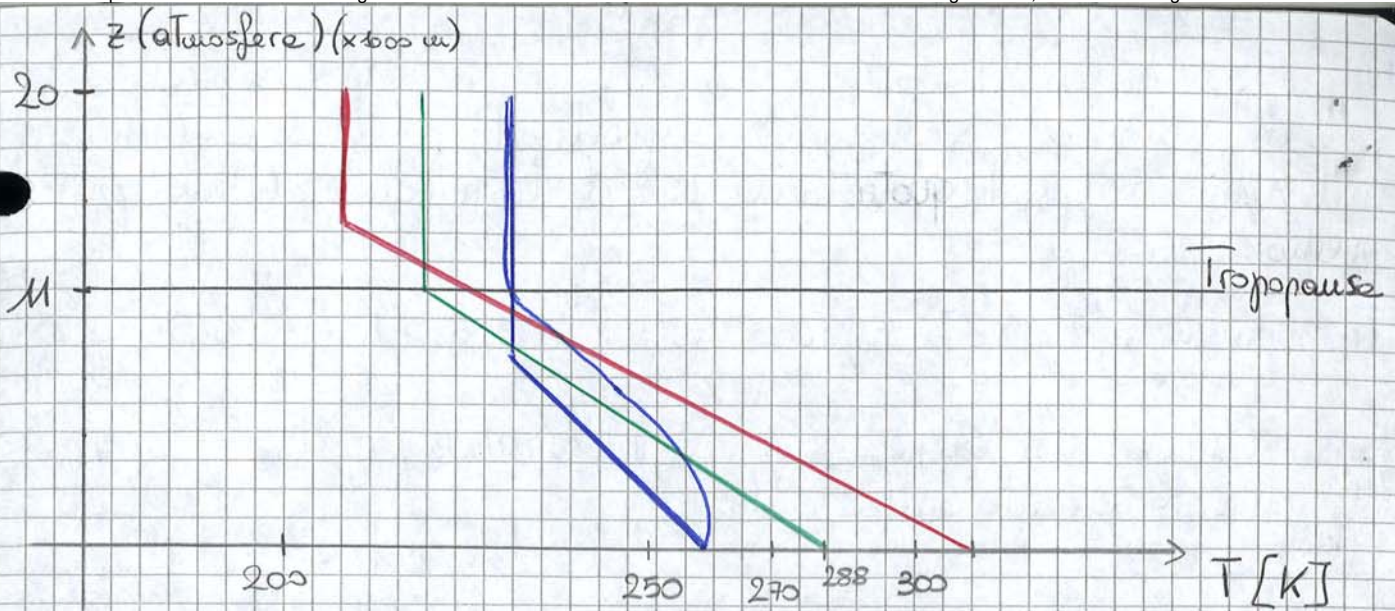
● Le quote vere (o altezze, altitudini) sono distanze dal suolo rispetto al punto di partenza: da non confondere con le quote vere sono le quote barometriche (o altitude in inglese), le quali dipendono unicamente dalla pressione.

Ricordando le formule di misurazione della quota vera:

$$\Delta z = \frac{R}{\rho} T_m \ln \frac{p_1}{p_2}$$

● notiamo che tanto più sono ravvicinati i rilievi di  $T$  e  $p$ , tanto più precise sarà la misurazione della quota vera.  $T_m$  è un' approssimazione in particolare una media tra i valori rilevati, che si rende necessaria visto l'aumento non lineare di  $T$  nell'atmosfera.

Ricordiamo di seguito alcuni parametri e relazioni fondamentali:



- invernale
- estive
- primaverile / autunnale

La curva invernale presenta una biforcazione dovuta al fenomeno dell'inversione termica: l'irraggiamento terrestre causa un aumento delle temperature anziché una diminuzione. È un fenomeno puramente invernale.

La curva primaverile/autunnale è quella che rappresenta la migliore mediazione tra i vari accadimenti possibili: da questa ricaviamo l'ISA, International Standard Atmosphere, ossia l'atmosfera standard di riferimento per tutti i velivoli.

- Atmosfera standard. -

$$z = 0 \text{ m (s.l. sea level)} \rightarrow p_0 = 760 \text{ mmHg} = 1 \text{ atm} = 10330 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = 101325 \text{ Pa} = 1013,25 \text{ mb} = 14,696 \text{ psi.}$$

$$T_0 = 15^\circ \text{C} = 288 \text{ K}$$

il suo gradiente di temperatura sarà:

$$\frac{dT}{dz} = -h = -0,0065 \frac{\text{K}}{\text{m}} \quad (1^\circ \text{C ogni } 156 \text{ m})$$

$$\ln \frac{P}{P_0} = \kappa \ln \frac{(T_0 - hz)}{T_0} \Rightarrow \frac{P}{P_0} = \left( \frac{T_0 - hz}{T_0} \right)^\kappa$$

l'aria, gas biatomico, evolve in funzione della quota secondo una trasformazione politropica di esponente  $n$ .

$$n = \frac{\kappa}{\kappa - 1} = 1,235 \Rightarrow \text{politropica: } pV^n = p_0 V_0^n$$

$$\Rightarrow \frac{P}{P_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{n}{n-1}} ; \quad \kappa = \frac{C_p}{C_v}$$

Esprimendo  $z$ :

$$\left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = 1 - \frac{hz}{T_0} \Rightarrow z = \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \right] \frac{T_0}{h}$$

↳ Legge di quota barometrica

Se a bordo di un velivolo abbiamo un barometro (altimetro), misuriamo la pressione esterna ed otteniamo una quota barometrica, grazie alla legge appena ricavata. La quota barometrica differisce dalla quota vera, e possiamo dire che una quota barometrica è anche quota vera se e solo se l'atmosfera reale rispetta l'atmosfera standard e se al suolo effettivamente si ha  $p = p_0$ .

- Legge di variazione della densità in Troposfera -

Facendo riferimento alle relazioni viste in precedenza:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T}{T_0} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T} = \frac{\rho}{\rho_0} = \delta = \sigma$$

ma anche

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^\kappa \cdot \frac{T_0}{T} = \left( \frac{T_0 - hz}{T_0} \right)^{\kappa-1} \quad \kappa-1 = 4,2561$$

Per la tropopausa (\*) troviamo:

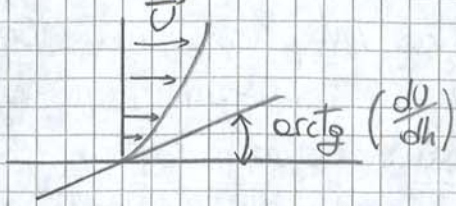
$$\frac{T^*}{T_0} = 0,7517 ; \quad \frac{P^*}{P_0} = 0,2232 ; \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \frac{P^*}{P_0} = \delta^* = 0,2808$$

$$P^* = 168,6 \text{ mm Hg} = 22632 \text{ Pa}$$

$$\rho^* = 3,57 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} ; \quad \rho^* = 0,3637 \frac{\text{N s}^2}{\text{m}^4} = \frac{\text{kg m}}{\text{m}^3}$$

valore del numero di Reynolds:

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu} \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \tau = \mu \frac{dV}{dh}$$



$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 C_D S$$

otteniamo i seguenti rapporti rispetto alle condizioni standard:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{0,75} ; \quad \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1,75}$$

Da dati sperimentali risulta che all'aumentare della quota  $\nu$  aumenta, fino a decuplicare il proprio valore iniziale a quota  $z=0$ : a parità di  $V$  il  $Re$  si riduce quindi fino a  $1/10$  del suo valore a quota zero.

Il numero di Reynolds varia considerevolmente con la quota.

Lezione n°3

03/03/2016

Nella troposfera la relazione temperatura - quota è espressa dal gradiente  $dT/dz = -h = -0,0065 \text{ K/m}$ . Inoltre le variazioni relative di pressione e la densità relativa hanno le seguenti espressioni:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T_0 - hz}{T_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \rightarrow z_{QNE} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T_0 - hz}{T_0}\right)^{\frac{1}{\alpha} - 1} \rightarrow z_{ISA}$$

NB: differiscono solo per l'esponente.

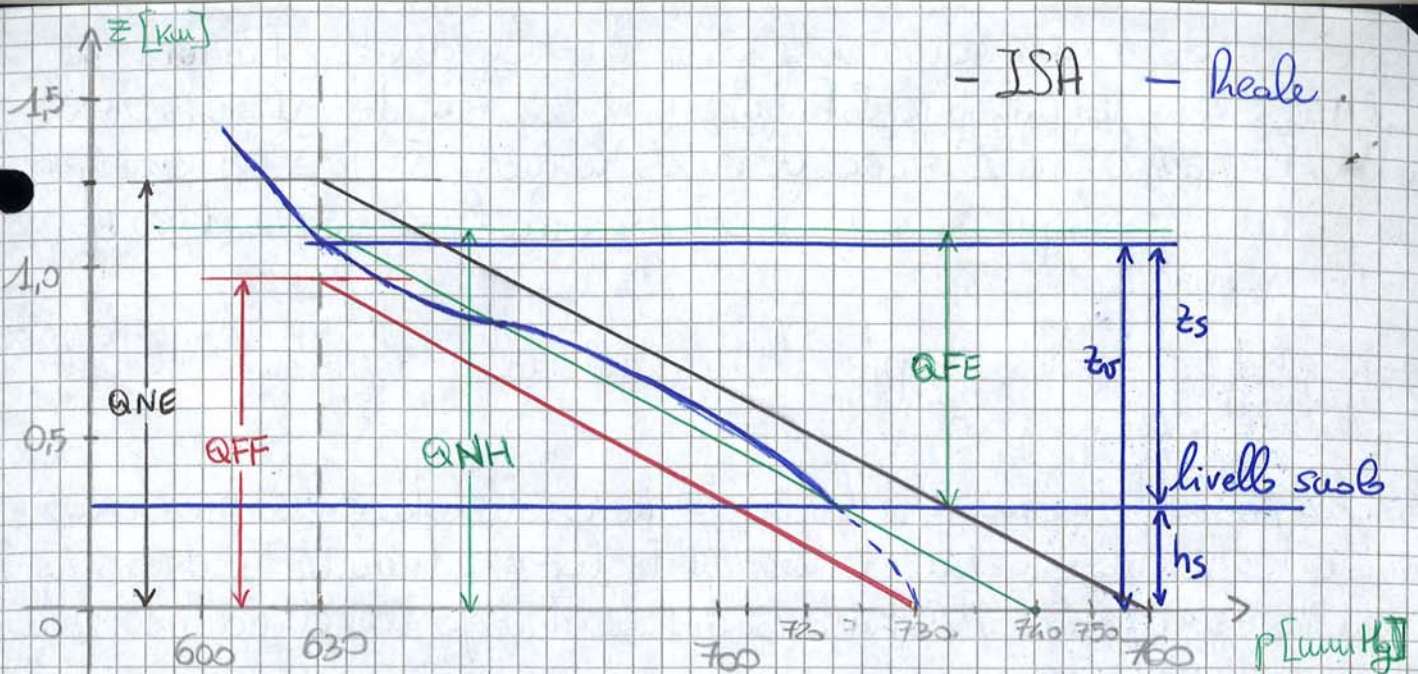
Un altimetro, misurando la pressione  $p$ , ottiene la quota mediante la relazione

$$z = \left[ 1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \frac{T_0}{h}$$

la quale sarà dunque non una quota vera, bensì una quota barometrica.

- Altimetro -

L'altimetro altro non è che un barometro. È costituito da una cassa a



- ISA - reale

● Il riferimento che si prende dipende dalla fase di volo: gli aerei volano seguendo l'aumento delle isobare come se si trovassero su un barometro di pressione atmosferica costante.

- Regoleggio rispetto alla pressione misurata al suolo (QFE) -

È la quota riferita alla pressione al suolo fornita al velivolo da un'apposita stazione di rilevamento nei pressi (normalmente) di un aeroporto. Un altimetro impostato sul QFE indicherà l'altezza assoluta del velivolo rispetto alla stazione di riferimento: se l'aereo si trova sulla pista di atterraggio, l'altimetro indicherà altezza zero.

● - Regoleggio rispetto alla pressione misurata al suolo traslata al livello medio del mare (QNH) -

Il riferimento è alla pressione atmosferica ultima misurata (QFE) e successivamente traslata al livello medio del mare. Inserendo questo valore nell'altimetro di bordo questo indicherà come minima approssimazione zero al livello del mare, l'elevazione dell'aeroporto in questione quando l'aereo è sulla pista e l'altitudine dell'aeromobile quando questo è in volo.

● - Regoleggio rispetto alla pressione standard (QNE)

Si utilizza quando si vola a quote tali per cui gli ostacoli a terra non rappresentano un problema, e la necessità diventa invece quella di

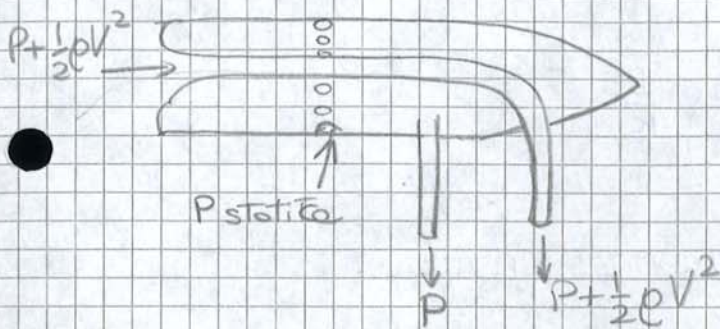


Ossia  $p_{stat} + p_{din} = p_{tot} \Rightarrow p_{tot} - p_a = p_{din} = q$

otteniamo la **velocità vera**:  $V = \sqrt{\frac{2q}{\rho}}$

Tutto ciò è vero se l'arresto dell'aria nel TdP è **isotropico** e **adiabatico** e se  $p_{tot}$ ,  $p_a$ ,  $\rho$  sono vere: quest'ultimo caso è molto difficile da avvenire. **Non è banale ottenere una velocità vera.** Sono ad esempio critiche le misurazioni delle pressioni statiche.

**- Tubo di Pitot -**



È un dispositivo dotato di due prese di pressione: una presa di pressione totale  $p_t$  ed una serie di prese per il rilievo della pressione statica  $p$ .

Tramite un manometro differenziale risulta possibile misurare la differenza tra pressione totale e pressione statica, ovvero la pressione dinamica  $q_{oo}$ .

Per una buona misurazione è fondamentale il posizionamento del TdP sulla fusoliera.

(Vedere slide mat didattica 1, figura 2.3)

La distribuzione di pressione lungo l'asse dell'aereo è variabile, così che una infelice disposizione del TdP può originare misurazioni completamente errate. Si misura questa variazione mediante l'indice  $\Delta p/q_c$ , che indica l'errore di misurazione delle  $p_{oo}$  rispetto alle  $q_c$ . Ad esempio, sulle piane avremo una pressione statica che diventa totale.

I punti ideali di misurazione per le prese delle  $p_a$  si trovano in corrispondenza di un indice  $\Delta p/q_c = 0$ .

Una taratura del TdP è possibile in fase di progettazione prendendo in considerazione i dati del "nose boom" o del cuneo posteriore dell'aeromobile.

• Otterremo una:  $V_t = TAS = \sqrt{\frac{2q}{\rho_0}}$   $\rho_0 = \rho$  densità di riferimento.

$V_t = \sqrt{\frac{2q}{\rho_0 \rho_0}} = \sqrt{\frac{2q}{\rho_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}}$  dove  $S = \sigma = \rho_a / \rho_0$  (13)

## - Numero di Mach -

Si tratta di un indice fondamentale per i coefficienti aerodinamici, dato dal rapporto delle velocità di volo rispetto alla velocità di propagazione del suono.

$$M = \frac{V_t}{c} \quad c = \sqrt{k R T_a} = c_0 \sqrt{\frac{T_0}{T_a}} \quad c_0 = 340,5 \frac{m}{s}$$

↑  
esponente dell'adiabatica

Si evince quindi che la velocità di propagazione del suono dipende dalla temperatura.

$$M = \frac{V_t}{c_0} \sqrt{\frac{T_0}{T_a}} = b \frac{V_t}{\sqrt{T_a}} = 0,05 \cdot \frac{V_t}{\sqrt{T_a}} \quad b = \frac{\sqrt{T_0}}{c_0} = 0,05$$

$$M = \frac{V_t}{\sqrt{k R T_a}} \quad \text{Effetti compressibilità per } M > 0,342$$

Secondo lo standard ISA, le nostre temperatura e pressione di riferimento saranno:

$$z_{ISA} = 0 \text{ m} \Rightarrow T_a = T_0 = 288 \text{ K} ; p_a = p_0 = 760 \text{ mmHg}$$

Otteniamo che la pressione dinamica  $q_c$  è funzione della velocità. ~~Sulle altitudini~~ Dalle misurazioni del TdP otteniamo:

$$q_c = f(V) \Rightarrow V_i = IAS \text{ (Indicated Air Speed)}$$

Correggendo gli errori di imprecisione della strumentazione e di posizionamento dello strumento di rilievo ( $\Delta p / q_c$ ) troviamo:

$$V_i \rightarrow V_c = CAS \text{ (Calibrated Air Speed)}$$

$$V_t = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ \left( \frac{q_c}{p_0} + 1 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} \quad (4) \quad \text{velocità vere}$$

La  $V_c$  è invece data dai valori standard di pressione e densità.

$$V_c = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ \left( \frac{q_c}{p_0} + 1 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} \quad (4')$$

$V_t$  True Airspeed (speed of the air relative to a body immersed in the air) TAS  $V_t = V_e \left( \frac{1}{\sigma} \right)$   
 $\sigma = \text{density ratio} = \frac{\rho}{\rho_0}$

Per completezza di argomento, si veda il diagramma quota - Mach slide 3 uot didatt 1.



## - Richiami di Aerodinamica - \*

Il metodo più semplice ed efficace per valutare la resistenza totale di un velivolo consiste nell'applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti, sommando quindi i contributi alla resistenza delle varie parti e componenti del velivolo. A questi vanno poi sommati gli effetti di interferenza i quali non si avrebbero considerando un elemento per volta. Si ha:

$$D_{TOT} = D_{ala} + D_{fus} + D_{motori} + \dots + D_{interferenza}$$

↳ funzione degli effetti dei vari elementi.

Il Fattore di interferenza  $F$  si può semplificare nella seguente forma

$$F \approx \frac{V_{locale}^2}{V_{os}^2} \rightarrow V_{locale} \text{ va pesata in maniera opportuna, poiché questa varia con il punto di rilevamento.}$$

Il coefficiente di resistenza dalla superficie di riferimento (superficie alare) è dato da:

$$C_{os} = \sum_i C_{oi} \frac{S_i}{S} F_i \Rightarrow C_{os} = 0,025 \rightarrow \text{è un coeff di resistenza minimo.}$$

↳ superficie alare.

Si noti che il valore  $C_{os} = 0,025$  è un ordine di grandezza, non si tratta di un valore universale.

Lezione n°4

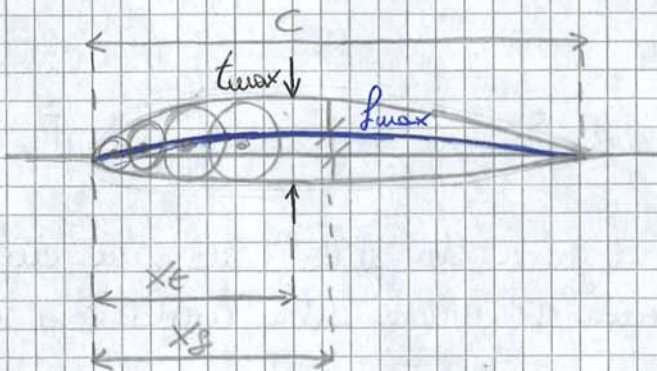
07/03/2016

- Costruzione del profilo alare reale -

Il coefficiente angolare di portanza dell'ala è funzione di  $C_{L'00}$ , coefficiente angolare di portanza del profilo. La relazione è la seguente:

$$C_L' = \frac{C_{L'00}}{1 + \frac{C_{L'00}}{\pi \lambda}} \quad \text{dove } C_{L'00} \approx 5,7$$

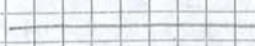


Vediamo il profilo alare come una sovrapposizione di circonferenze di differente raggio (per approssimare il differente spessore del profilo lungo la corda):



- Linea media  
 $t_{max} = s_{max}$

Dove  $f$  è la freccia della linea ad asse,  $f_{max}$  è quindi la massima distanza tra corda del profilo e linea media, la quale quest'ultima segue ed è indice dell'incrocamento del profilo.

La più semplice approssimazione per comporre un generico profilo è data dalla sovrapposizione di tre differenti semplificazioni dello stesso:

- Lamina piana  (incidenza)
- Lamina curva  (incrocamento)
- Profilo simmetrico  (spessore)

- Profili NACA -

I profili alari sono identificati da codici, detti codici NACA, i quali riportano alcune delle caratteristiche fondamentali del profilo. Si hanno profili NACA a 4, 5 e 6 cifre, oltre ad altri che però tralasciamo.

15:  $\frac{t}{c} = 15\%$  : spessore massimo del profilo in percentuale rispetto alla corda.

NACA 65<sub>2</sub>-413 → 6 cifre

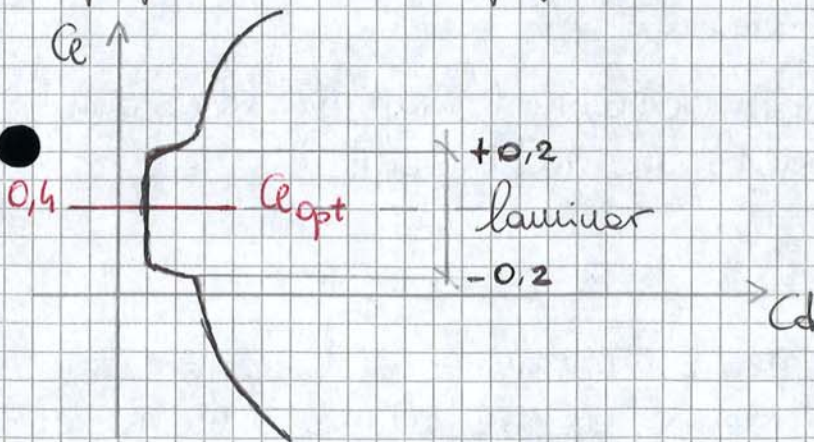
I profil. NACA a 6 cifre sono detti profil. laminari, ossia profil. generati solo scopo di mantenere il flusso laminare per una percentuale di corda maggiore possibile.

6: la prima cifra indica la famiglia (tipo di linea d'asse)

13:  $100 \frac{t_{max}}{c}$  : lo spessore massimo è il 13% della corda

5:  $5 = \frac{10 \cdot x_{min}}{c} \Rightarrow 5 \approx 0,5c = x_{min}$  : cifra che dà la distanza del punto di minima pressione, espresso come percentuale della corda ed in multipli di 10.

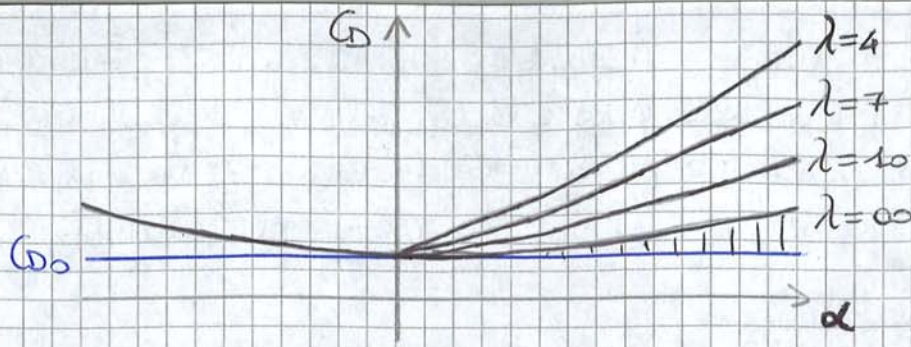
4: 10  $C_{l,opt}$  (design lift coeff.) cifra che indica il coefficiente di portanza di progetto in multipli di 10. Tratta si di un coefficiente di portanza, per il quale il profilo è dotato di deviate caratteristiche generali e che ne garantisce il corretto utilizzo. Al di fuori di un certo intervallo (laminar bucket) le caratteristiche peggiorano al punto che il profilo risulta meno performante di un profilo classico.



2: (pedice):  $10 \cdot \Delta C_{l,lam}$  : le cifre in pedice forniscono, in multipli di 10, l'intervallo del coefficiente di portanza sopra e sotto il coefficiente di portanza di progetto in cui esistono gradienti di pressione favorevoli su entrambe le superfici.

- **Lueramento e spessore** -

Vediamo come le caratteristiche geometriche si ripercuotono sulle caratteristiche aerodinamiche:



Graficamente si vede come, anche in questo caso, grandi allungamenti, o altri limitano la crescita di  $C_D$  al crescere di  $\alpha$ . Il coefficiente di resistenza sarà dato da:

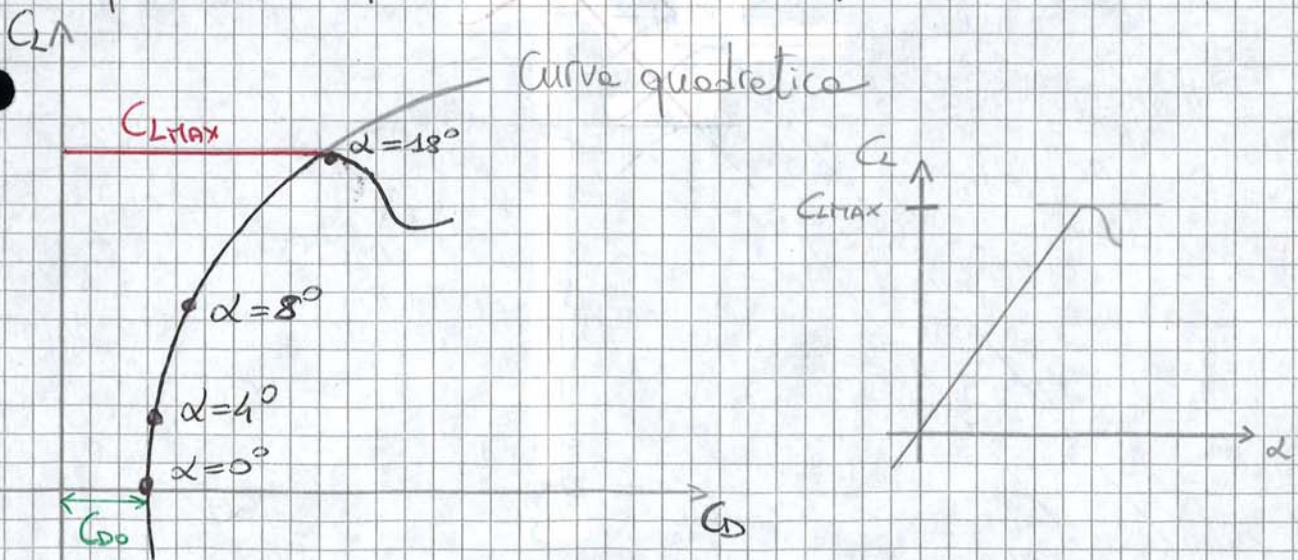
$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi \lambda} i + K C_L^2$$

dove  $i$  è un fattore maggiore di 1 solo per ali non ellittiche,

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi \lambda} (i + \pi \lambda K) = C_{D0} + \frac{C_L^2}{e \pi \lambda} \quad \text{Ala non ellittica}$$

dove  $e = \frac{1}{i + \pi \lambda K}$  = Fattore di Oswald, generalmente compreso tra un valore di 0,75 e 0,95.

Dunque, in funzione dell'allungamento alare avremo un andamento di  $C_D$  quadratico, il quale sarà realistico solo fino al valore di  $C_{LMAX}$ .

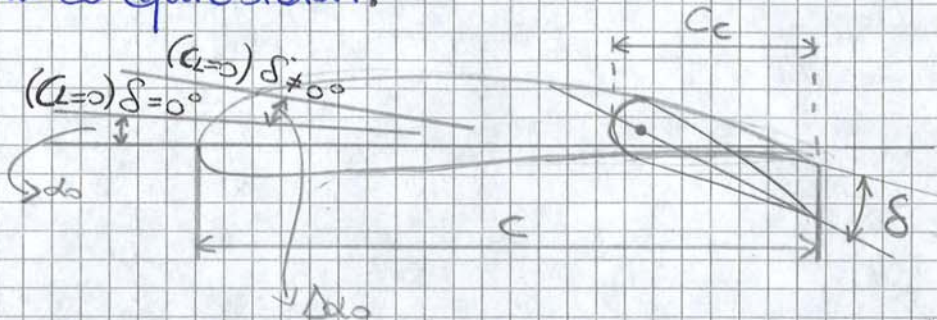


Questa è la polare del velivolo, ossia la curva che descrive il coefficiente di resistenza (o la resistenza stessa) in funzione del coefficiente di portanza (o della portanza stessa).

Sommando gli effetti di slot e flap su un prof. b. otteniamo che l'iper-sostentazione può quasi raddoppiare il coefficiente di portanza.

La fessura (slot) tra ipersostentatori e prof. b. base fa sì che il fluido che passa attraverso di esso venga "energizzato".  
Il flap aumenta l'incrocamento del prof. b. e la superficie in pianta.

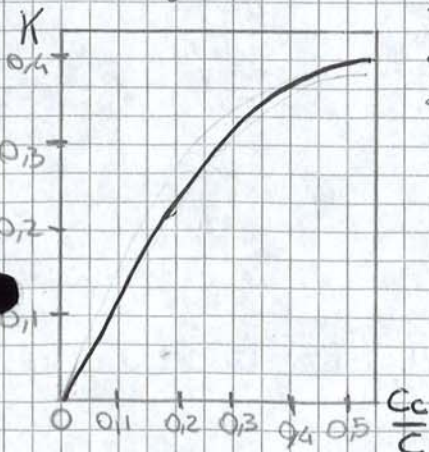
Fondamentalmente il principio dell'ipersostentazione è lo stesso utilizzato nel controllo dell'aereo mediante le superfici primarie di controllo, allettini ed equilibratori.



Ruotando l'allettone si evince come cambi l'angolo di incidenza con portanza nulla e cresce quindi il  $C_L$ , così come accade con il flap. Il generico  $\vec{V}$  ha quindi un'incidenza che si è notevolmente incrementata. Per quanto riguarda gli allettini, la rotazione è discorde, affinché si generi un momento che permetta il rollio. La rotazione degli equilibratori è invece concorde per permettere la cessata di momenti di beccheggio variando la portanza in  $C_{da}$ .

Abbiamo visto quindi che  $C_{da}$  è funzione dell'angolo  $\delta$ , in particolare:

$C_{da} = K \sin \delta \approx K \delta \rightarrow$  generalmente la superficie mobile si ruota di pochi gradi, e così  $\sin \delta \approx \delta$ .



Il parametro  $K$  è una funzione del rapporto tra la corda della superficie mobile e la corda totale del prof. b. In particolare

$$K = 0,40 \left( 1 + e^{-8 \frac{c_f}{c}} \right)$$

La curva  $C_D - C_L$  ha lo stallò ( $C_{Dmax}$ ) a  $20^\circ$  (curva vera), mentre la curva gialla è la relazione quadratica vista precedentemente. La distanza del generico punto sarà  $C_F$ , coefficiente di forza, e sarà dato da  $C_L$  e  $C_D$ : in particolare  $C_F = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}$ .  
 L'efficienza, curva rossa grande, è legata all'angolo  $\epsilon'$ , secondo la relazione:

$$\tan \epsilon' = \frac{C_L}{C_D} = E$$

Dunque  $E = \frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D0} + \frac{C_L^2}{e\pi A}}$ , ma solo finché la parabola quadratica interseca la parabola effettiva.

Suoi che il valore di massima efficienza  $E_{max}$  si ha ben sotto all'angolo di stallò, ed una volta superato l'angolo di efficienza massima  $C_D$  aumenta maggiormente rispetto a  $C_L$ , e quindi  $E$  diminuisce. Dopo il  $C_{Lmax}$  anche lo stesso  $C_L$  diminuisce, mentre  $C_D$  continua sempre ad aumentare: a conseguenza di tutto ciò vi è un crollo dell'efficienza oltre il  $C_{Lmax}$  (compatibile con lo stallò).

### Lezione n°5

10/03/2016

Parlando di zero dinamica effettiva e reale, sappiamo che il coefficiente di resistenza non è costante ma cambia nei vari punti del velivolo.

**Resistenza indotta:** Resistenza dovuta agli effetti di bordo riscontrabili sulle ali ed allungamento finito: è dunque una componente della resistenza totale che in natura è sempre presente.

Quando studiamo una polare, notiamo che la variazione dell'angolo di incidenza  $\alpha$  è compresa nel  $C_D$ : il  $C_D$  dunque varia anche esso con  $\alpha$ . Capire questo è fondamentale per comprendere il significato dell'efficienza.

Riprendendo il grafico della **polare del velivolo** si può notare che l'approssimazione della parabola quadratica può essere imprecisa. Inoltre ricordiamo che una polare è detta tale poiché gode della proprietà polare, ossia

$$C_F = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}$$



ricavato:

$$C_{L\text{MAX}} = \sqrt{e\pi\lambda C_D} \quad (1)$$

Di conseguenza il  $C_{D\text{MAX}}$  sarà:

$$C_{D\text{MAX}} = C_D + \frac{C_{L\text{MAX}}^2}{e\pi\lambda} = C_D + \frac{C_D e\pi\lambda}{e\pi\lambda} = 2C_D \quad (2)$$

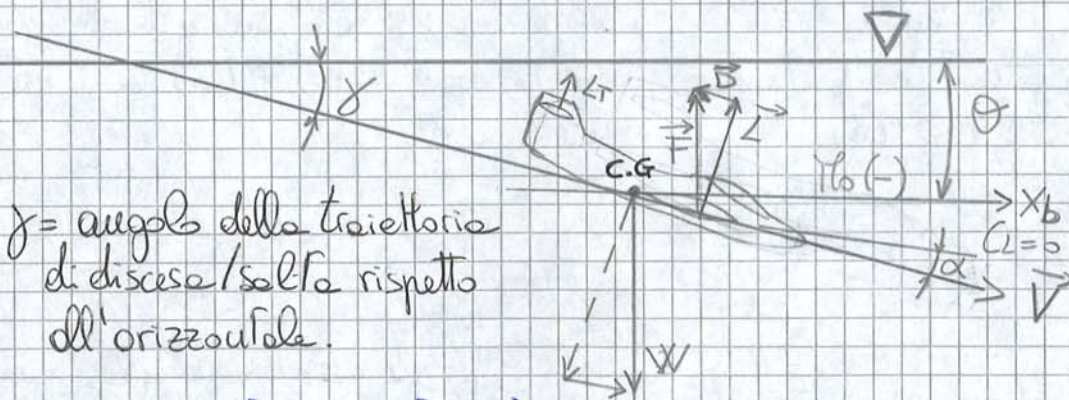
E l'efficienza massima:

$$E_{\text{MAX}} = \frac{C_{L\text{MAX}}}{C_{D\text{MAX}}} = \frac{\sqrt{C_D e\pi\lambda}}{2C_D} = \sqrt{\frac{C_D e\pi\lambda}{4C_D^2}} = \sqrt{\frac{e\pi\lambda}{4C_D}} = E_{\text{MAX}}$$

Di conseguenza l'angolo di massima efficienza e dell'angolo di massima portanza coincidono. Si noti che se la portanza quadratica approssimava bene la portanza effettiva, ci basta conoscere la geometria e l'aerodinamica del velivolo per ricavare i valori di efficienza massima ed i relativi coefficienti.

|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

- Volò libero (alianti) in aria calma - \*



Si noti che:  $\vec{L} \perp \vec{V}$ ;  $\vec{D} \parallel \vec{V}$

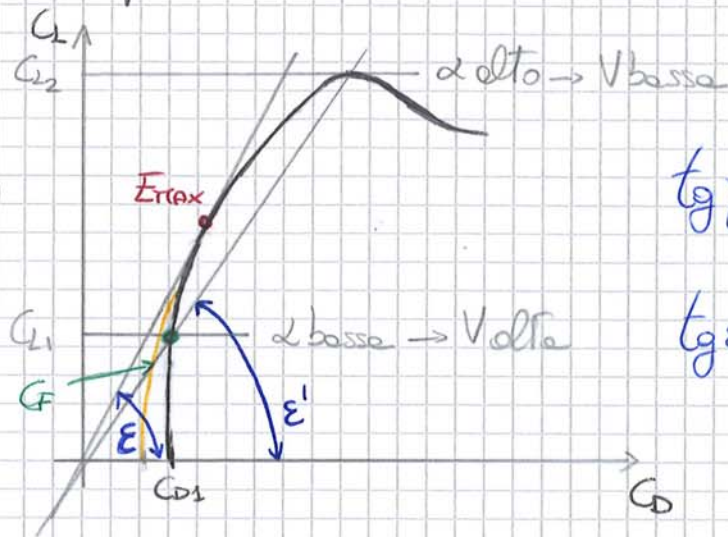
Gli assi riferiti all'aerodinamica sono detti ass. vento.

Il fuoco dell'ala, "air dynamics center", è posto sul quarto anteriore dell'ala (o meglio della sua corda): immaginiamo ivi concentrate le forze aerodinamiche globali agenti sul velivolo, basando opportunamente il fatto che si tratta di risultanti di forze su punto di applicazione differenti (causa del momento locale).

Si noti che generalmente  $\vec{F}_{aer}$  è verticale, e che  $\theta_0$  è negativo (inclinazione).

all'orizzontale.  $\theta$  dipende dunque da  $X_b$  e varia con esso.

Per quanto riguarda il coeff. ciente di portanza, si noti che  $C_L=0$  sull'intero velivolo è prossimo ma non uguale alle  $C_L=0$  della sola ala, poiché la portanza totale del velivolo non è data solo dall'ala. A parità di condizione  $C_L=0$  è una direzione body: Considero dunque l'angolo tra  $C_L$  e  $X_b$  costante. L'angolo  $\alpha$  serve per la determinazione dei coeff. cienti aerodinamici, ed è un angolo correlato alla velocità da questioni puramente fisiche: se  $\alpha$  ridotto, la velocità di volo dev'essere sostenuta per garantire sustentazione; per lo stesso motivo, se  $\alpha$  è elevato la velocità sarà ridotta.



$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{E} = \frac{C_{D1}}{C_{L1}} = \frac{C_{D2}}{C_{L2}}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = E = \frac{C_{L1}}{C_{D1}} = \frac{C_{L2}}{C_{D2}}$$

Come detto in precedenza, nelle condizioni di tangenza tra la retta uscente dall'origine e la polare si ha  $E_{max}$ , mentre per qualsiasi altra  $E < E_{max}$  vi sarà l'intersezione della retta con la polare in 2 punti di eguale efficienza, seppur questa sia data da valori dei parametri differenti. Avremmo inoltre trovato che:

$$E_{max} = \frac{C_{Lmax}}{C_{Dmax}} = \sqrt{\frac{e \pi \lambda}{4 C_{D0}}}$$

Trovandoci in condizione di vol librotto, analizziamo i dati relativi ad un B747 e ad un alianté, ed andiamo a studiare due concetti fondamentali, da non confondere tra loro: spazio percorso e tempo di volo.

**BOEING 747**

$$\lambda = 7$$

$$C_{D0} = 0,016$$

approssima  $e = 0,85$

base la polare  $\gamma_{min} = 3,33^\circ$   
effettiva

**Alianté**

$$\lambda = 30$$

$$C_{D0} = 0,012$$

$$e = 0,82$$

$$\gamma_{min} = 1,35^\circ$$

Il coefficiente di portanza del prodotto  $(E\sqrt{C_L})_{max}$  sarà:

$$C_L (E\sqrt{C_L})_{max} = \sqrt{3\epsilon\pi\lambda C_{D0}} = \sqrt{3} C_{E_{MAX}} \leftarrow \text{incidenza maggiore di quella di } E_{MAX}$$

e poi:

$$C_D (E\sqrt{C_L})_{max} = C_{D0} + \frac{3\epsilon\pi\lambda C_{D0}}{\epsilon\pi\lambda} = 4C_{D0}$$

$$(E\sqrt{C_L})_{max} = \frac{C_L^{3/2}}{C_D} = \frac{(\sqrt{3\epsilon\pi\lambda C_{D0}})^{3/2}}{4C_{D0}}$$

Trovo  $C_D$  i seguenti risultati fondamentali:

$\gamma_{min} \Rightarrow E_{MAX} = \text{massima percorrenza (orizzontale)}$

$W_{min} \Rightarrow (E\sqrt{C_L})_{max} = \text{massima permanenza in volo (tempo)}$

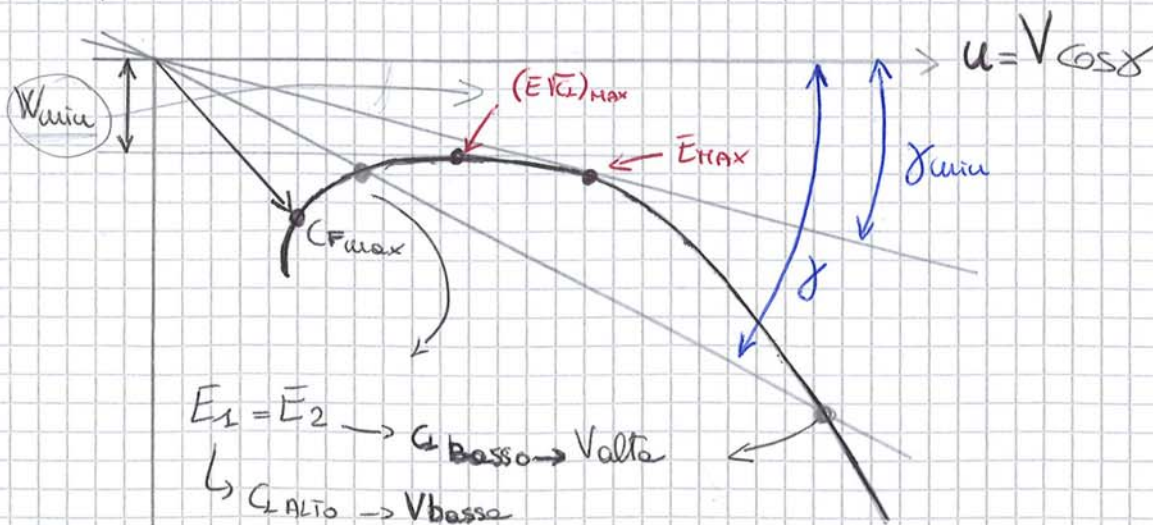
In conclusione, in condizione di volo libero il B747 percorre 17,1 m in orizzontale ogni metro di quota perso, mentre un alibate percorre 42,5 m in orizzontale ogni metro di quota perso.



### - Odografe del moto (volo libero) -

L'odografe del moto altro non è che la proiezione della velocità: questa curva gode perciò della proprietà polare.

Date  $L$  e  $D$  come condizioni, è possibile trovare  $W$  in funzione della proprietà polare:



$$W = V \sin \gamma \text{ (velocità di discesa)}$$

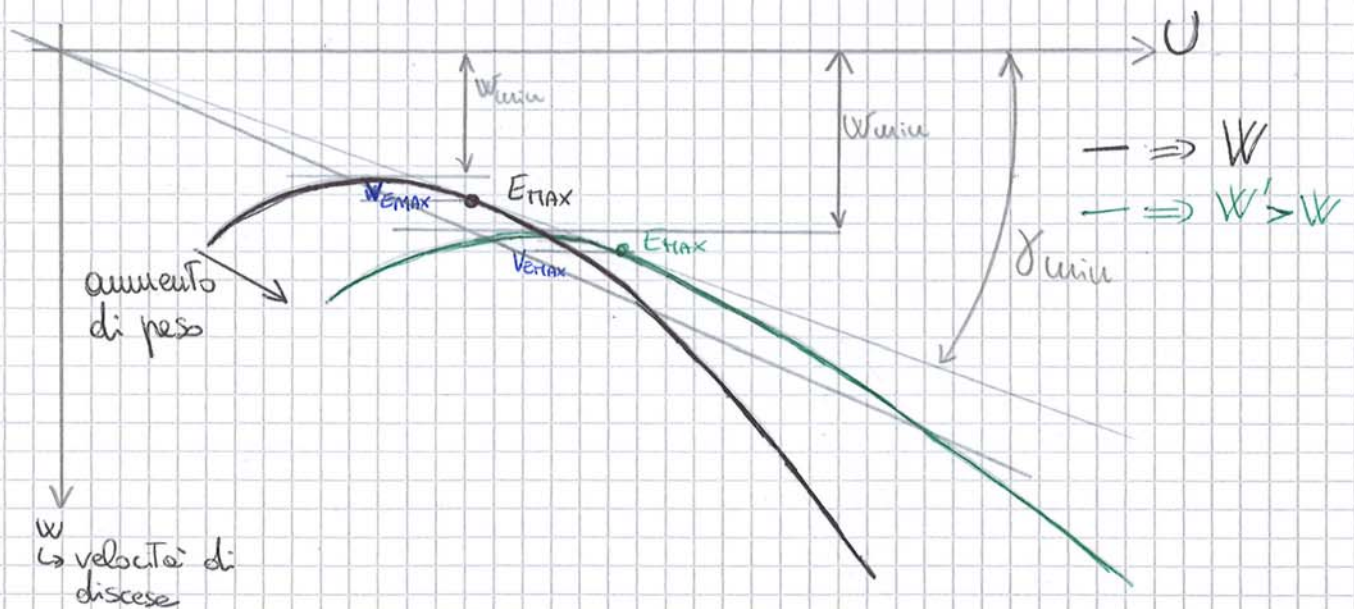
## Lezione n° 6

16/03/2016

Vediamo qual è l'effetto del peso, ossia come si ripercuote una variazione del peso del velivolo sui parametri di volo:

$$V = \sqrt{\frac{W/S \cos \gamma}{\frac{1}{2} \rho C_L}} \cdot \sqrt{\frac{1}{g}} \rightarrow \text{velocità } V \propto \sqrt{W}$$

La velocità è direttamente proporzionale alla radice del peso, dunque una variazione del peso del velivolo ha effetto sulla velocità di volo. Il suo cambiare in base al peso è minimo, in quanto questo è legato direttamente all'efficienza massima e tratta perciò di un parametro aerodinamico, non di tipo inerziale.

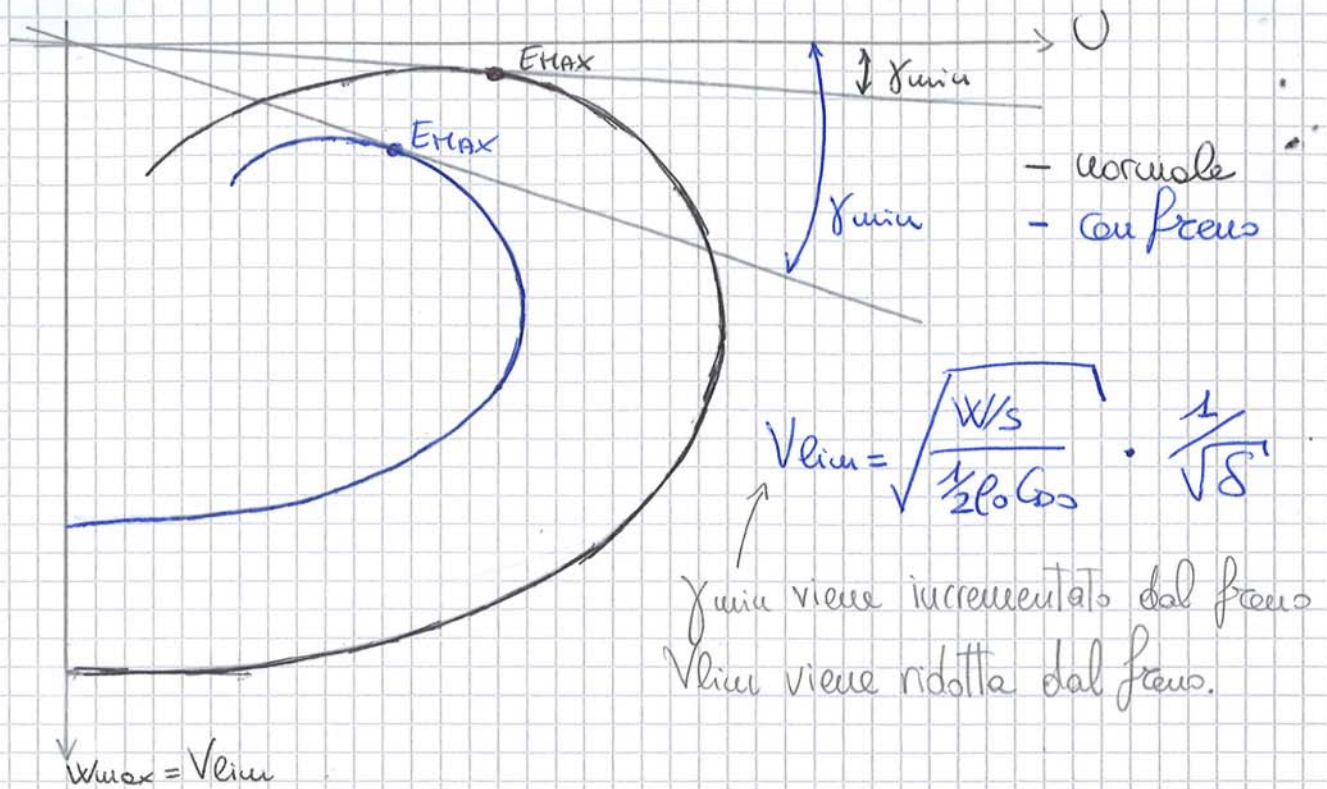


Si faccia attenzione al fatto che l'odografo si modifica al variare del peso. Mantiene le stesse tangente (quindi  $\gamma_{min}$ ) ma non si tratta di una traslazione pura sul diagramma.

Si noti inoltre che varia la velocità minima di discesa  $W_{min}$ , che aumenta in modulo con l'aumentare del peso: più il velivolo è pesante, più scenderà velocemente. In conclusione, un aumento di peso non pregiudica e non ha effetto sulle percorrenze, ma peggiora le permanenze in volo in termini di tempo.

### - Effetto dei freni aerodinamici -

Il punto di applicazione di un freno aerodinamico dove questo risulta



L'aliante diventerebbe "troppo pesante" se dovesse reggere la velocità limite, quindi con l'azionamento del freno aerodinamico diminuisce la velocità limite (si vede graficamente) ed evita la torsione dell'ala. Un altro effetto significativo del freno aerodinamico si apprezza valutando il valore  $E_{max}$  nel caso normale e nel caso con freno: cambia fortemente  $\alpha_{lim}$  che aumenta considerevolmente: quando il pilota ha necessità di effettuare una discesa ripida, aprendo i freni riesce a percorrere una traiettoria più ripida senza cambiare la velocità.

### - Vento -

Generalmente non ci si trova in una situazione di aria perfettamente calma, ed anzi per un aliante è essenziale sfruttare venti e correnti ascensionali. Se  $\vec{v}$  è il vettore velocità del vento:



Distinguiamo quindi le componenti del vento, in quanto hanno differenti influenze sul moto del velivolo.

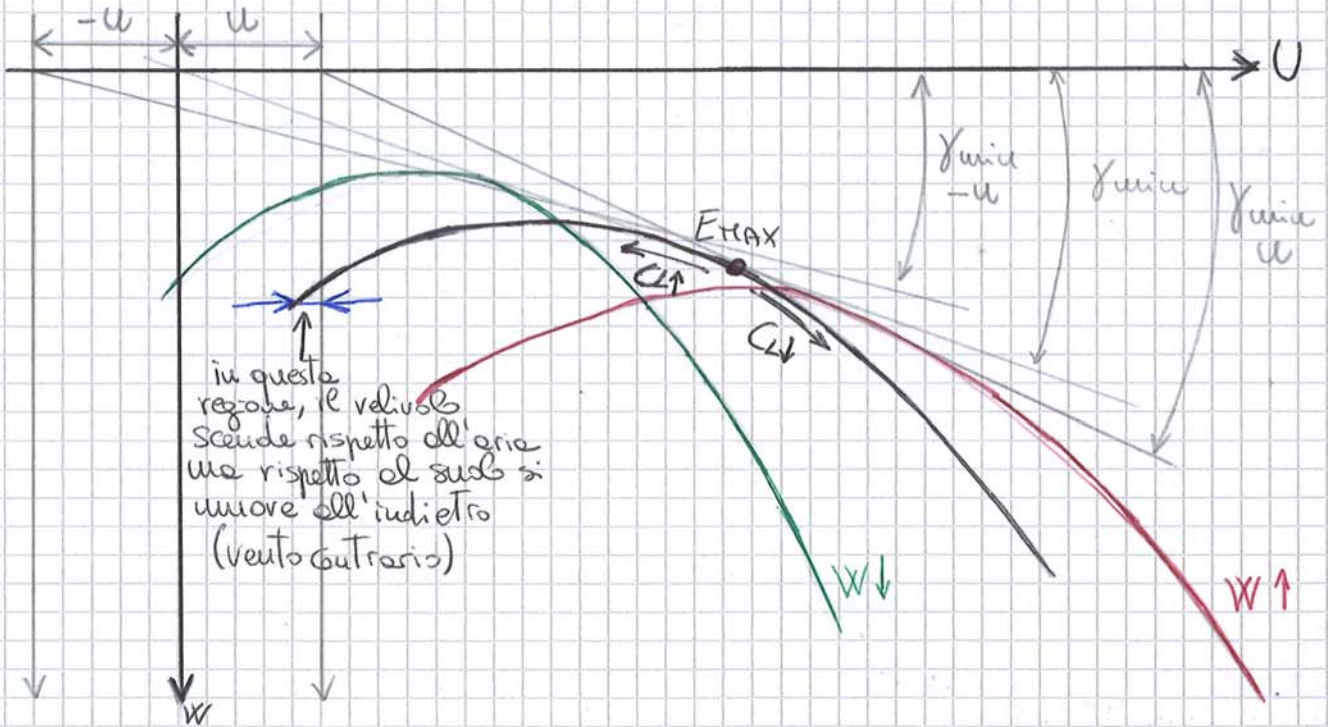
In presenza di vento trasl gli assi e l'odografo del moto dello stesso vettore  $\vec{v}$ :

Lezione n°7

15/03/2016

Ricapitolando uno dei discorsi fondamentali fatti sul vento, questi sposta il velivolo, ma nel momento in cui lo stesso velivolo entra in una massa d'aria non cambia nulla dal punto di vista aerodinamico, ossia la TAS è sempre velocità vera rispetto all'aria. Sicuramente però avrà in questo caso  $TAS \neq GS$ .  
 Studiamo le componenti orizzontale e verticale del vento e vediamo singolarmente gli effetti sul velivolo.

- Vento orizzontale -



- u: vento in poppa (favore); u: vento in prora (contrario)

$E_{MAX}$  rimane la stessa al variare del peso, non cambiando  $\gamma_{min}$ , ma ovviamente cambia il  $C_{L_{MAX}}$  che cresce al diminuire del peso e ciò all'aumentare di questo.

Per quanto riguarda l'effetto del vento,  $\gamma_{min}$  diminuisce con il vento in poppa: si può quindi volare ad un  $\gamma_{min}$  minore e dunque incrementare la percorrenza, sebbene si vede tuttavia che non è più lo stesso il punto di efficienza massima (si è spostato cambiando  $C_{L_{MAX}}$ ). Viceversa, se il vento è contrario  $\gamma_{min}$  aumenta.

$$-u \begin{cases} \gamma_{min} \downarrow \text{ con } W \downarrow \\ \gamma_{min} \uparrow \text{ con } W \uparrow \end{cases}$$

$$u \begin{cases} \gamma_{min} \uparrow \text{ con } W \downarrow \\ \gamma_{min} \downarrow \text{ con } W \uparrow \end{cases}$$

la velocità di moto  $\vec{V}$  è allineata con l'orizzontale, dunque tra  $\vec{V}$  e  $C_{L=0}$  si trova l'angolo di incidenza  $\alpha$ , il quale determina le forze aerodinamiche ( $L$ ,  $L_t$ ,  $D$ ): queste le poniamo (sotto forma di risultante) nel fuoco delle corde di riferimento dell'ala, aggiungendo un momento di trasporto  $l_0$ , detto **momento focale**.  $l_0$ , per le proprietà focali, è costante al variare di  $\alpha$  se posto in modo tale che il suo polo di riferimento sia nel fuoco. I coefficienti  $C_L$  e  $C_D$  invece variano con  $\alpha$ .

NB: Il fuoco è al 25% della corda e  $l_0 = c_{st}$  nel fuoco sono approssimazioni.

Fissando gli assi venti di questa parte oltre condizione di volo sul velivolo come se fossero assi body, al variare dell'assetto questi si muovono con il velivolo stesso restando fissi rispetto ad esso: chiamiamo questi assi **ASSI DI STABILITÀ** ( $x_s, z_s$ ). L'angolo tra  $\vec{V}$  e  $x_s$  nel caso l'assetto e la direzione di moto cambiano è  $\theta$  **angolo di assetto (pitch)**. In volo rettilineo uniforme orizzontale  $\theta = 0$ .

$\alpha_T$  è l'**angolo di allettamento dello spunto**, e dipende dall'angolazione data al propulsore in fase di montaggio. Poiché in inglese "allettamento" = "incidence" e "incidenza" = "angle of attack", per questo stesso angolo le diciture  $\alpha_T$  o  $\alpha_i$  sono entrambe corrette.

Scriviamo l'equilibrio delle forze: per farlo abbiamo bisogno di prendere come riferimento gli assi venti. La condizione di moto rettilineo uniforme orizzontale impone che:

$$L = W$$

Nel dettaglio: (trascurando Drag Tail):

$$1) L + T \sin \alpha_T + L_t = W$$

$$2) T \cos \alpha_T = D \Rightarrow \text{generalmente } T \approx D$$

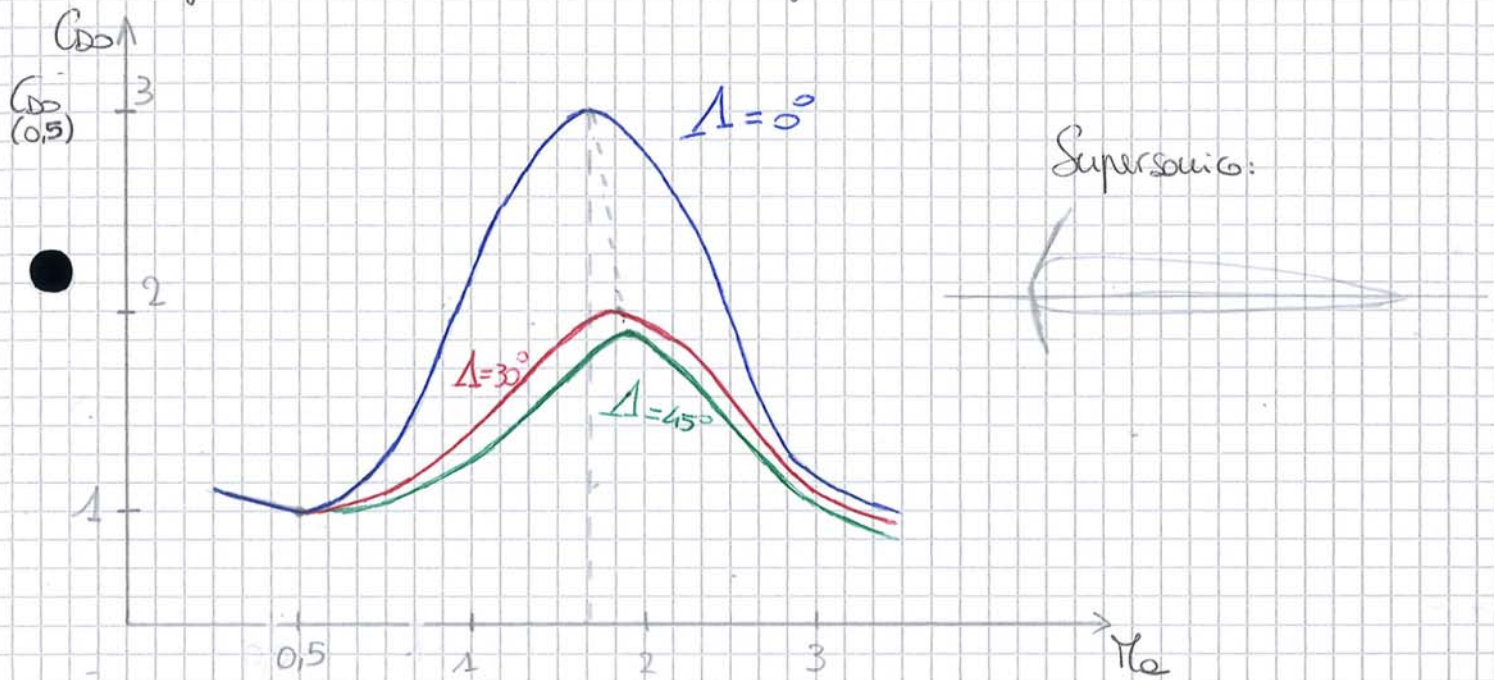
Mentre l'equilibrio dei momenti:

$$3) C_A + (L \cdot x - L_t \cdot x_t - l_0 = 0) \Rightarrow \alpha = 0$$

Trascurando ( $T \cdot \text{semit-braccio}$ ) e ( $T \cos \alpha_T \cdot \text{braccio}$ ).

Il Mach critico, i cui effetti si hanno per  $M < 1$ , sottintende un'onda d'urto localizzata sul dorso del profilo, la quale aumenta la resistenza. Al crescere del Mach aumenta perciò  $C_D$  e diminuisce il  $C_{Dmax}$ . Per valori di  $M$  di sotto di  $M_{cr} < 0,5$  vi sono in genere degli incrementi di  $C_D$  dovuti al  $Re$ : per  $M_{cr} = 0,5$  il  $C_D$  ha valore minimo. Oltre  $V_{cr}$  aumentano sia  $C_D$  che  $C_D$ .

L'angolo di freccia  $\Delta$  smorza l'effetto della resistenza dovuta al Mach:



L'andamento delle resistenze con le velocità ha l'andamento delle curve. Si ha poi un'interruzione delle curve per limiti di spinta propulsiva.

lezione n°8

21/03/2016

Abbiamo visto come costruire la curva delle resistenze necessarie in funzione delle velocità, con peso e quota fissati. Oltre ad una certa velocità si evidenziano gli effetti di Mach critico, che portano ad un aumento delle resistenze totali. Il punto di minimo della curva delle resistenze necessarie si trova in corrispondenza della velocità di efficienza massima  $V_{E_{max}}$ : indica quindi l'efficienza massima.

La resistenza totale ha quindi un minimo per una certa velocità che non è la velocità minima:  $D$  cresce sia per  $V > V_{E_{max}}$  che per  $V < V_{E_{max}}$ . Come fare allora per volare ad una generica  $V \neq V_{E_{max}}$ ?



## - Spinta necessaria e spinta disponibile -

Si definisce come **spinta necessaria** il termine  $T_n = D$ : la spinta necessaria al volo deve quindi essere uguale in modulo alla resistenza imposta dal moto. La **spinta disponibile**  $T_d$ , per esempio di un velivolo con sistemazione a getto, è una funzione  $T_d = f(V, z, n)$  dipendente dalla velocità di volo, dalla quota e dal numero di giri del motore. Essa rappresenta il surplus disponibile di spinta rispetto ad alcuni parametri e condizioni di volo.  $T_d$  dipende dal propulsore in questione, così come la generica spinta  $T$  dipende in parte anche dalle modalità di montaggio del propulsore. Vediamo nel dettaglio  $T_d$ :

$$T_d = f(V, z, n) = T_{s0} \varphi_1(n) \chi_1(V, z) \psi_1(z)$$

È quindi fatto del prodotto di 3 diverse funzioni dipendenti da  $n, V, z$ .  $T_{s0}$  è un dato di laboratorio, detto **spinta statica**, che corrisponde alla spinta statica offerta a  $z_{isa} = 0m$ . Se  $n_0$  è il numero di giri di progetto,  $n = n_0$  corrisponde ad una spinta massima e quindi ad una **manetta di 1**. Definiamo delle ulteriori 3 funzioni da associare a  $T_d$  che definiranno il consumo specifico:

$$K = K_{s0} \varphi_2(n) \chi_2(V, z) \psi_2(z) \quad K_{s0} = \text{consumo specifico a } n = n_0 \text{ e } z_{isa} = 0m$$

↳ consumo specifico

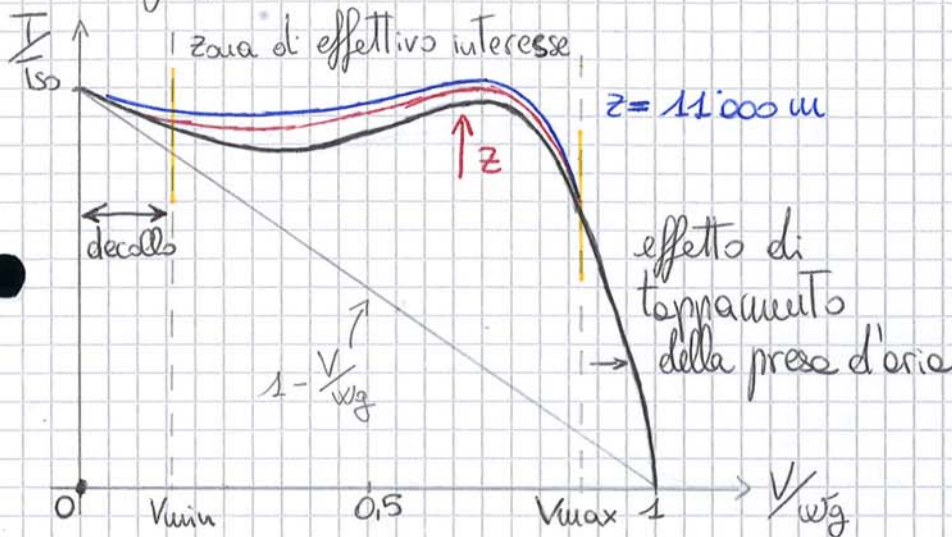
$$K = \left[ \begin{array}{l} N_{combustibile} \\ \hline N_{spinta \cdot ora} \end{array} \right]$$

Lo scopo di definire queste due funzioni deriva dal fatto che, mettendole in relazione, riportano al calcolo del valore delle prestazioni al variare del peso o al consumo del carburante a bordo.

## - Dipendenze da $n$ della spinta -

Detto che la funzione  $\varphi_1(n)$  è la manetta e che questa esprime la percentuale di possibilità del motore richiesta ( $\varphi_1(n) = 0,3$  significa volare al 30% delle possibilità di spinta del propulsore), vediamo matematicamente come la spinta varia es: relazione al numero di giri del propulsore:

l'effetto benefico della massa d'aria che investe il propulsore: tale effetto è benefico solo per un certo intervallo di velocità e pressioni dinamiche, ed è controbilanciato da un effetto controproducente di tappamento espresso dal termine  $[1 - (\frac{V}{w_g})^4]$ , che come si vede cresce negativamente all'aumentare della velocità:  $\frac{1/2 \rho V^2}{\rho p_e} = c^2$  altro non è che il quadrato della velocità del suono, poiché  $p_e = \rho T \Rightarrow c = \sqrt{KRT} = \sqrt{K p_e}$ . Vediamo graficamente l'andamento:



Riducendo  $x_1$  alla sola componente  $(1 - \frac{V}{w_g})$  otterrei l'andamento lineare decrescente in matita: con gli effetti di tappamento e pressione dinamica le cose cambiano drasticamente, gli andamenti reali risultano quindi fortemente diversi ed influenzati dalla velocità di volo. Si noti che le curve mantengono valori di spinta relative più alti al crescere della quota: Questo perché:

$$x_1(V, z) = 1 - \frac{V}{w_g} + \frac{1}{2} K \rho a^2 \left[ 1 - \left( \frac{V}{w_g} \right)^4 \right]$$

Quel che è chiaro quindi è che, definite  $w_g$ , si ha la funzione della spinta disponibile al variare della velocità.  $x_1$  varia con la quota poiché dipende dal  $\rho a^2$ , a sua volta dipendente dalla temperatura: fin tanto che il  $\rho a^2$  varia, al variare della temperatura (e della quota), varierà anche  $x_1$ . Raggiunta la tropopausa a  $z = 11000$  m l'effetto del  $\rho a^2$  non è più presente visto che per quote superiori la temperatura resta costante. La funzione  $x_2$  ci fornisce invece il consumo specifico in funzione di  $V$ :

$$x_2(V) = 1 + \frac{V}{w_g} \rightarrow \text{il consumo specifico aumenta con } V.$$

velocità: essendo in questo caso in fase di salita,  $C_L \Rightarrow$  impare, variando, che  $\vec{x}_s \neq \vec{v}$ .

- Assumendo per ipotesi che  $\gamma < 25^\circ$ , dunque  $\gamma$  sia di ampiezza contenuta, valutiamo le velocità e le spinte ( $\cos 25^\circ = 0,91 \neq 1$  ma vicino)

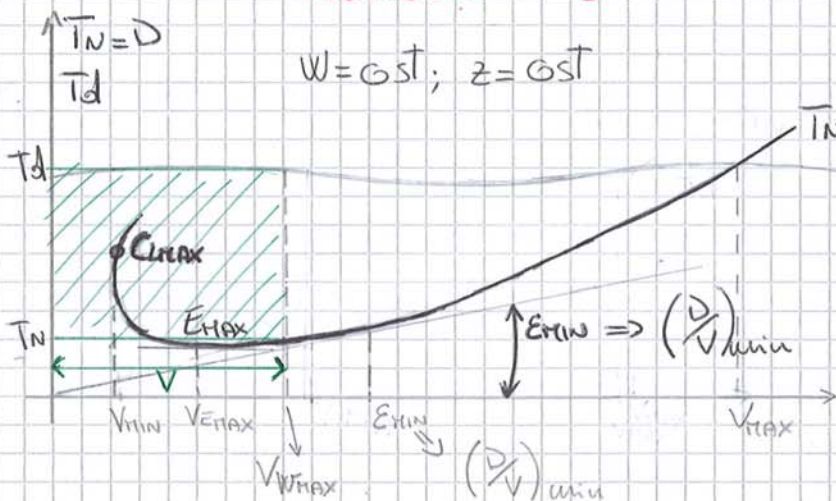
$$VW \sin \gamma = (T-D)V \Rightarrow V \sin \gamma = w = \text{velocità di salita}$$

$$\Rightarrow w = \frac{(T_d - D)V}{W} = \frac{(T_d - T_n)V}{W}$$

Graficamente tutto questo può essere riportato sul diagramma delle  $T_d - T_n$  e la  $w$  sarà data dall'area di un rettangolo che avrà  $V$  come base e come altezza la differenza  $T_d - T_n$ . la  $w_{max}$  sarà quindi per il valore massimo dell'area in questione.

### Lezione n° 3

22/03/2016



$$W = \text{cost}; z = \text{cost}$$

$$\phi_1 = \text{cost}$$

$\epsilon =$  energia nell'unità di spazio

$$\text{tg } \epsilon_{min} = \left(\frac{D}{V}\right)_{min} \Rightarrow \left(\frac{V}{D}\right)_{max}$$

Ricerchiamo matematicamente i parametri per cui è possibile ottenere la situazione con minore energia  $\epsilon$ :

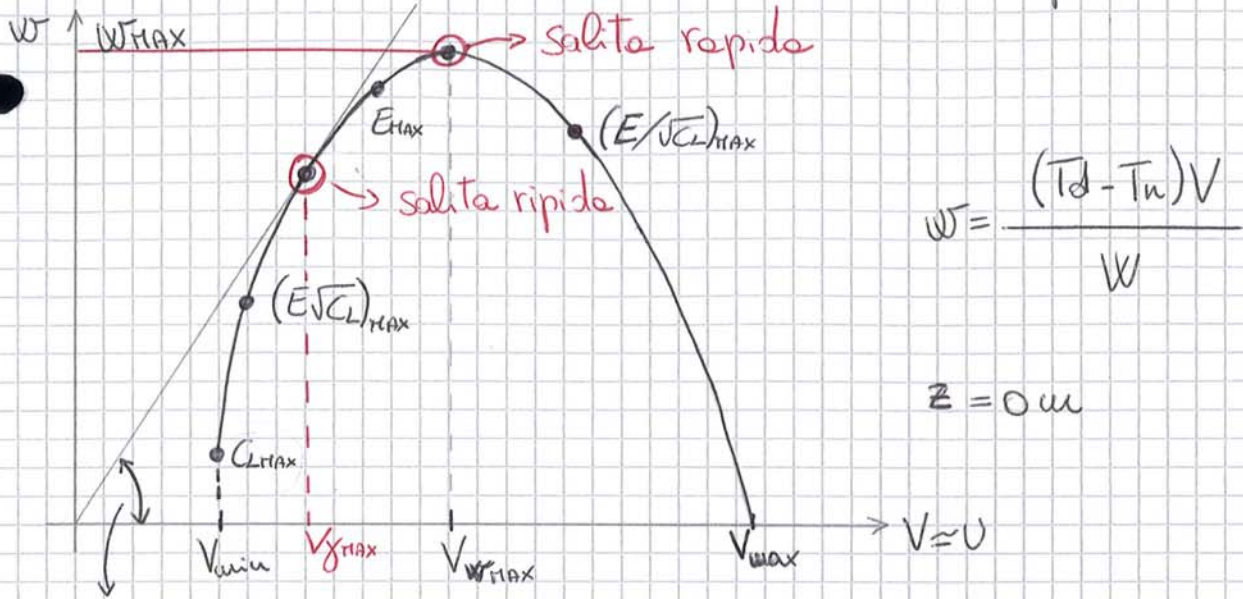
$$\left(\frac{D}{V}\right)_{min} = \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 C_D}{W} = \frac{1}{2} \rho \sqrt{\frac{W/S}{\frac{1}{2} \rho C_L}} C_D = \text{cost.} \frac{C_D}{\sqrt{C_L}}$$

$\hookrightarrow C_D \approx 1, \text{ derivata da } L = W$

dove  $\text{cost} = \sqrt{\frac{1}{2} \rho} \cdot \sqrt{\frac{W/S}{\frac{1}{2} \rho C_L}} \cdot S \rightarrow \text{cost.} \left(\frac{\sqrt{C_D}}{E}\right)_{min}$

La condizione fondamentale affinché sia  $\epsilon = \epsilon_{min}$  è che il rapporto  $\frac{E}{\sqrt{C_D}}$  sia massimo:

Vediamo ora l'andamento delle velocità di salita rispetto a  $V$ :

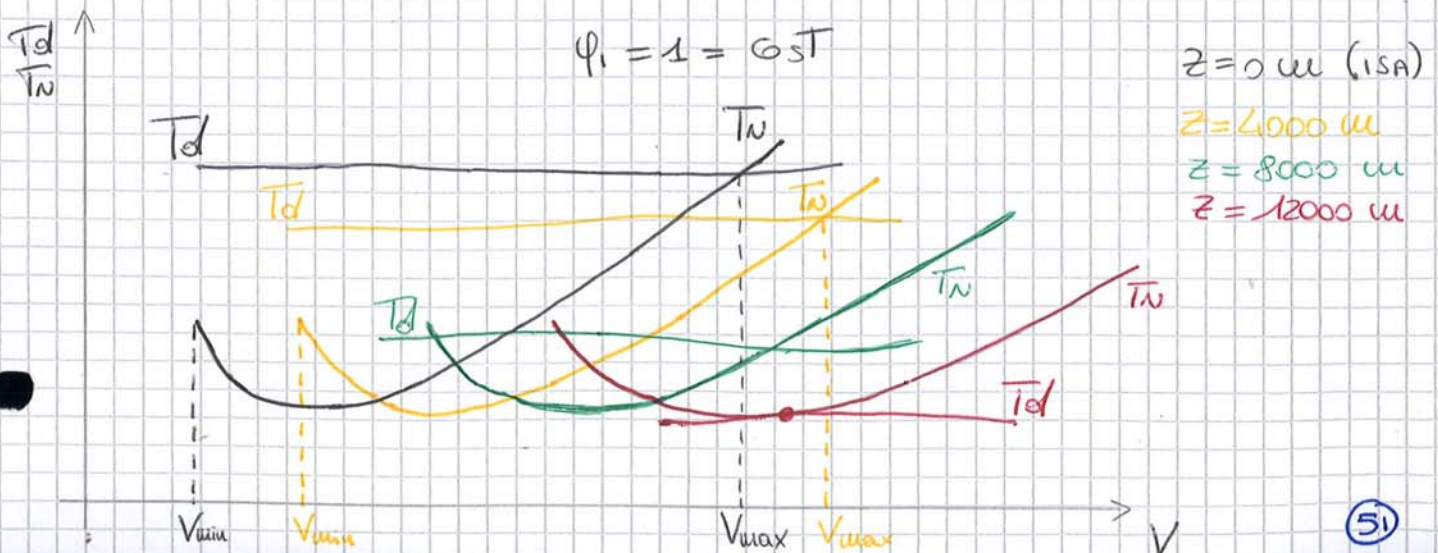


$\gamma_{max}$

Il punto di massimo della curva coincide con la situazione di massima velocità di salita  $W_{MAX}$ , ossia la condizione detta di **salita rapida**: se la necessità è quella di raggiungere una quota il più velocemente possibile, si vola a  $W_{MAX}$ . In questo caso la retta tangente alla curva esprime un angolo che è l'angolo di salita  $\gamma$ : quando la tangenza è ridotta ad un solo punto si ha  $\gamma = \gamma_{max}$ , e nel punto in questione si trova la condizione detta di **salita rapida**, ossia di massimo angolo di salita, ideale per il superamento di ostacoli sul terreno.

Si noti che il punto di  $(E/\sqrt{C_L})_{MAX}$  si ha quando  $w$  cala per  $V > V_{WMAX}$ , ed anche che a  $V_{max}$  la velocità di salita si annulla: a  $V_{MAX}$  il volo è possibile solo in orizzontale.

Estendiamo il discorso delle spinte disponibili al variare della quota:



Si usi comporre un diagramma anche un tempo, ossia il tempo di salita alla quota  $z$ : Si ricava come segue:

●  $dz = w dt$ ;  $t_z = \int_0^z \frac{dz}{w} \Rightarrow t_z = \sum_{i=1}^m \frac{\Delta z_i}{w_{min}}$

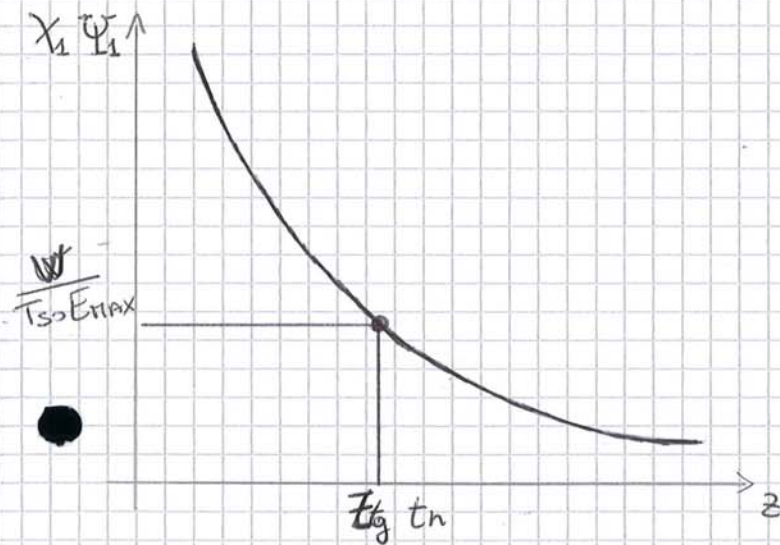
Ma come si ricava analiticamente la quota di tangenza teorica? Mediante due considerazioni:

1)  $w=0$ ; 2)  $E \approx E_{max}$  ( $\approx$  non è detto che tangenza  $T_d - T_v$  sia esattamente nel punto di massimo.)

$\frac{T}{w} = \frac{D}{w} = \frac{D}{L} = \frac{1}{E} \Rightarrow T = \frac{w}{E_{max}}$

●  $w=0 \Rightarrow \frac{TV}{w} = \frac{DV}{w} = \frac{V}{E} \Rightarrow \frac{w}{D} = E$

Le funzioni  $\chi_1, \psi_1$  servono proprio al calcolo della quota di tangenza.



$\varphi_1 = 1$ ;  
 $T = T_{s0} \chi_1 \psi_1 = \frac{w}{E_{max}}$ ;

$\chi_1 \psi_1 = \frac{w}{T_{s0} E_{max}}$

$f(z, V) \rightarrow E_{max}$   $\uparrow w_0$  (noto)

Il diagramma  $\chi_1 - \psi_1 - z$ , data una quota, riporta la funzione dipendente da  $z$  stesso. Il procedimento è:

$z \rightarrow \psi_1 \xrightarrow{E_{max}, z} V \rightarrow \chi_1 \rightarrow \chi_1 \psi_1$

Il calcolo della quota di tangenza teorica risulta perciò semplificato e più veloce mediante questo diagramma, il quale però non può sostituire il diagramma precedente per ricavare la quota di tangenza pratica. Chiediamo dicendo che, in via del tutto teorica, la quota di tangenza teorica non sarebbe quella massima raggiungibile: sarebbe possibile

$$\Pi_n = D \cdot V = G_{st} \frac{C_0}{Q^{3/2}} = G_{st} \frac{1}{\frac{C_0}{Q} \sqrt{Q}} = G_{st} \frac{1}{E_{TQ}}, \text{ dove:}$$

$$G_{st} = \left( \frac{W/s}{\frac{1}{2}e} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2}eS = \frac{W^{3/2}}{\sqrt{\frac{1}{2}eS}}$$

Quindi:  $\Pi_n = G_{st} \cdot \frac{1}{E_{TQ}}$ : dunque avrò il valore di  $\Pi_{n \min}$  minimo potenza necessaria in corrispondenza del punto in cui sarà massimo il valore di  $E_{TQ}$ , ossia:  $\Pi_{n \min} \Leftrightarrow (E_{TQ})_{\max}$ .

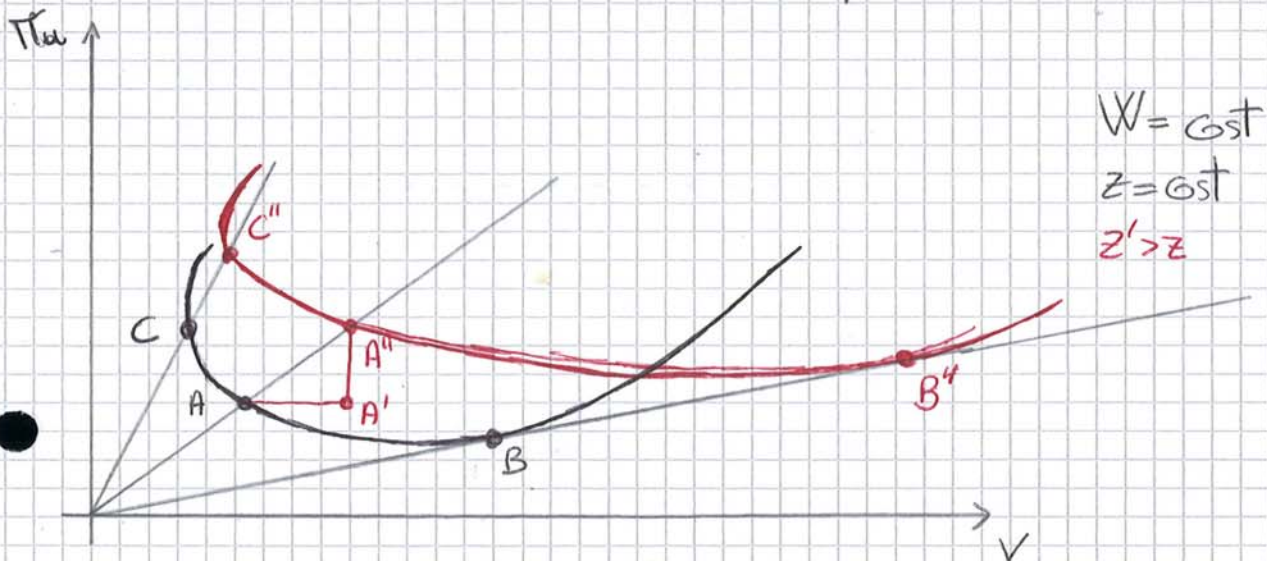
Mentre per quanto concerne la efficienza ed il suo angob  $\epsilon$ :

$$\epsilon_g = \frac{\Pi_n}{V} = \frac{\frac{1}{2}eV^3 G_{st}}{V} = \frac{1}{2}e \frac{W/s}{\frac{1}{2}eQ} G_{st} S = W \frac{C_0}{Q}$$

Otteniamo perciò:

$$\epsilon_{g \min} = W \frac{1}{E_{TQ \max}}$$

Vediamo ora come  $\Pi_n$  dipende dalle quote  $z$ :



Definendo  $C_0$  come:  $C_0 = \frac{W/s}{\frac{1}{2}eQV_i^2}$ , supponiamo di avere una  $V_i$  costante e che questa non sia affetta da errori di strumentazione e posizionamento. Allora  $V = V_i \cdot \frac{1}{\sqrt{S}}$ . Se  $C_0 = G_{st} \Rightarrow C_0 = \text{cost} \Rightarrow D = G_{st}$ . Con  $\Pi_n = D \cdot V \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{S}}$  ( $A \rightarrow A' \rightarrow A''$ ).

Analizziamo ora l'aumento delle potenze disponibili  $\Pi_d$ : la potenza sviluppata dal motore ha espressione:

$$\Pi_{m} = C \cdot \omega \quad \text{dove } C \text{ è la coppia ed } \omega \text{ è la velocità di rotazione.}$$

$\Pi_{m0}$  = potenza motore a quota zero

(55)

Supponiamo un velivolo monoelica, con quattro pale che ruotano in senso antiorario rispetto al pilota. (Nel caso di velivolo bi-elica le rotazioni avverrebbero in senso relativamente opposto).

Vediamo la pala tagliata ad un raggio  $r$ : si nota subito che l'elica è caratterizzata da diversi profili che variano lungo il raggio e che questa deve possedere un certo angolo di svergamento (Twist angle) che varia in base ad una legge di svergamento: se la pala è **trattiva** l'angolo di cassetamento delle sezioni diminuisce; se la pala è **generativa** allora l'angolo di cassetamento aumenta.

Si nota che la direzione  $C=0$  non coincide con la corda del disco d'elica, che seziona simmetricamente l'elica stessa.

Si può considerare un piano circolare di raggio  $r$  contenente l'elica, che chiamo **piano disco dell'elica**: al generico raggio  $r$  si avrà una velocità  $\omega r$ .

Definiamo:

$P$  = **passo geometrico assoluto**: è la distanza teoricamente percorsa da un'elica in un giro trascurando la cedevolezza del fluido e perciò corrispondente alle distanze che l'elica percorrerebbe se si muovesse all'interno di un corpo solido.

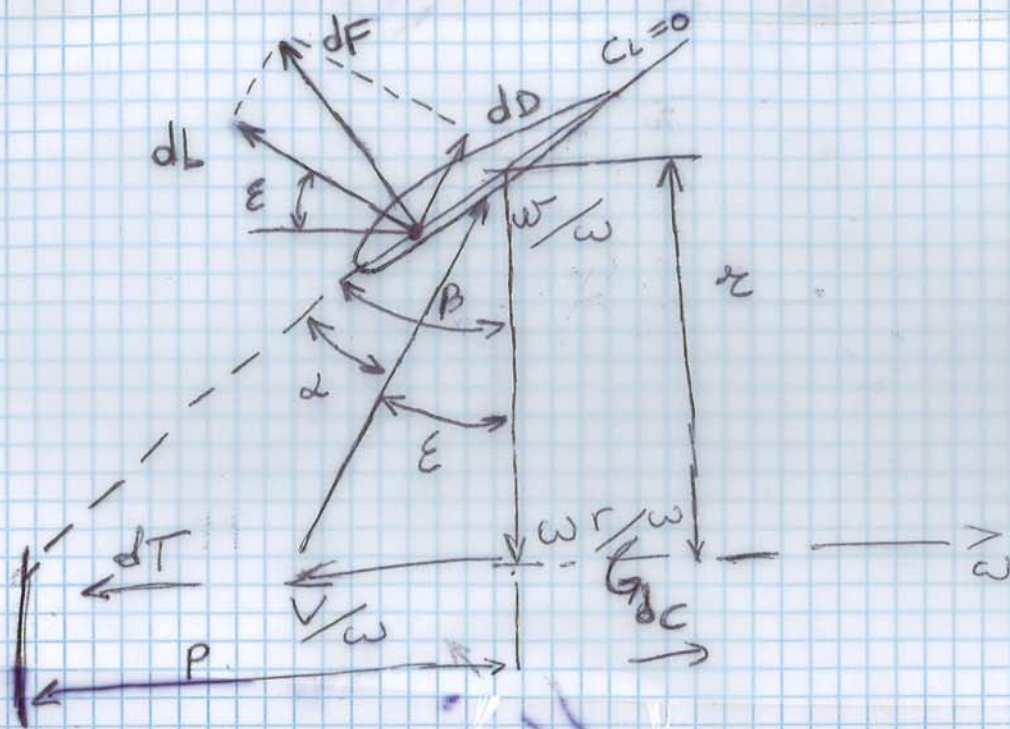
$\beta$  = **passo geometrico relativo**:  $\tan \beta = P / 2\pi r$

$\epsilon$  = **passo aerodinamico relativo**:  $\tan \epsilon = V / \omega r$  è l'avanzamento effettivo dell'elica dopo un giro in condizioni normali ed è sempre inferiore al passo geometrico assoluto. Dipende dalle velocità di avanzamento.

$h$  = **avanzamento per giro**:  $h = \tan \epsilon \cdot 2\pi r$

Si noti che aumentando la velocità orizzontale  $V$  porta il vettore  $\omega r$  a diventare parallelo a  $C=0$ : aumentando  $V$  fino ad un certo valore annulla la portanza dell'elica.

La pala viene dotata di un passo variabile in modo da avere lungo tutto il raggio delle incidenze delle sezioni che siano presso di ottimali: al cambiare delle condizioni di volo cambia il passo ottimale.



la sezione seguente.

Consideriamo una sezione rotante con coppie  $dC$  infinitesime. Si ha:

$$\begin{cases} dT = dL \cos \epsilon - dD \sin \epsilon \\ dC = r(dL \sin \epsilon + dD \cos \epsilon) \end{cases}$$

su una superficie infinitesima  $dS = c dr$  dove  $c$  è la corda. Si ha che  $dL$  e  $dD$  hanno espressione:

$$dL = \frac{1}{2} \rho_0 \delta w^2 C_L c dr \quad dD = \frac{1}{2} \rho_0 \delta w^2 C_D c dr$$

Serve ricavare  $C_L$  e  $C_D$  relativi alla nostra sezione. Sostituendo:

$$dT = \frac{1}{2} \rho_0 \delta w^2 (C_L \cos \epsilon - C_D \sin \epsilon) c dr$$

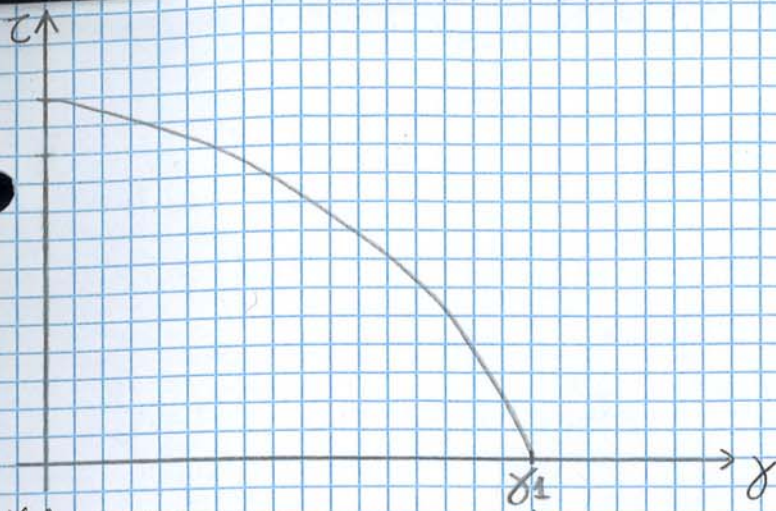
$$dC = \frac{1}{2} \rho_0 \delta w^2 (C_L \sin \epsilon + C_D \cos \epsilon) c r dr$$

dove:  $w = \frac{\omega r_e}{\cos \epsilon}$ . Tenendo conto anche del numero di pale  $z$ :

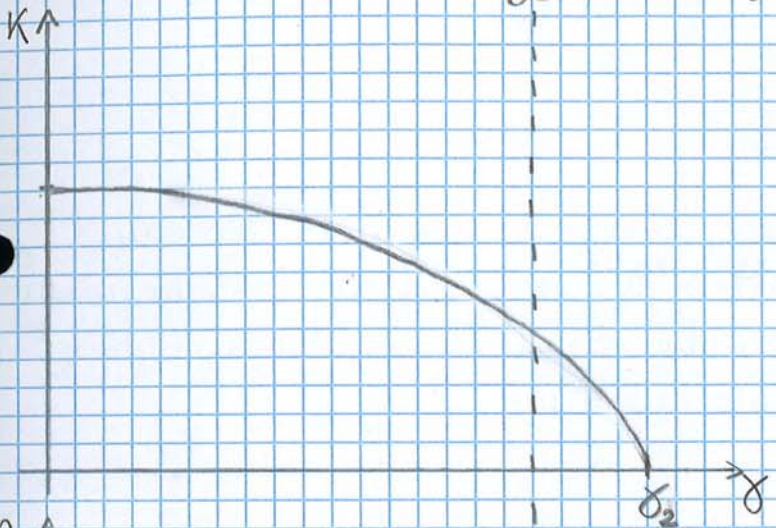
$$T = z \int_0^{r_e} dT = \frac{1}{2} \rho z \omega^2 r_e^4 \int_0^1 \frac{C_L \cos \epsilon - C_D \sin \epsilon}{\cos^2 \epsilon} \frac{c}{r_e} \frac{r}{r_e} d\left(\frac{r}{r_e}\right)$$

$$C = z \int_0^{r_e} dC = \frac{1}{2} \rho z \omega^2 r_e^5 \int_0^1 \frac{C_L \sin \epsilon + C_D \cos \epsilon}{\cos^2 \epsilon} \frac{c}{r_e} \frac{r^3}{r_e^3} d\left(\frac{r}{r_e}\right) \quad (59)$$

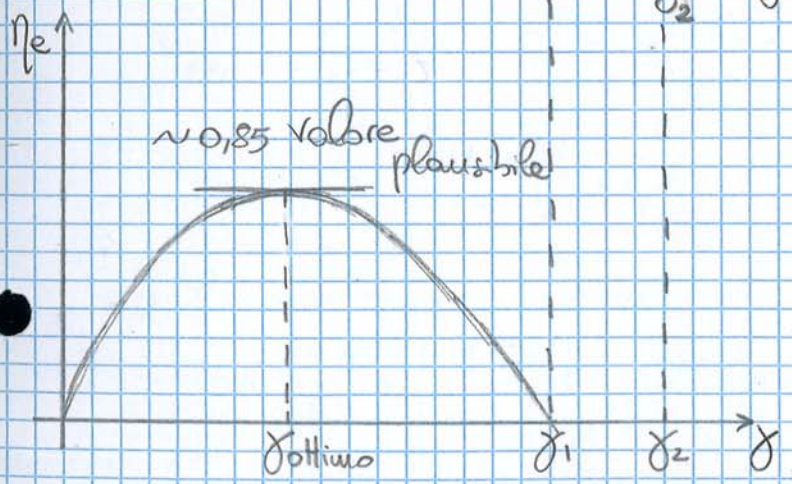




Si ha annullamento del  $\tau$  per un certo  $\gamma = \gamma_1$ , che si ottiene aumentando la velocità  $V$  tenendo  $\omega r$  costante. Per  $V=0$  si ottiene perciò  $\tau_{max}$  (situazione di elica fermo con l'elica che ruota).



Come  $\tau$  anche  $K$  si annulla, ma per un rapporto di funzionamento  $\gamma_2 > \gamma_1$ .



Si ottiene un rendimento di questo tipo.

Condizione per trovare  $\gamma_1$

Studiando tali caratteristiche per  $\alpha$  piccoli, si ha:

$$dL \cos \epsilon = dD \sin \epsilon \quad \text{①} \quad (\tau = 0) \quad (\gamma_1)$$

Quindi, nella cosiddetta condizione di punto f-ss (velocità ferma), ho  $\tau_{max}$ ,  $\epsilon = 0$  e  $\alpha_{max}$ . Aumentando la velocità  $V$  posso per la condizione ① per arrivare a  $dL \sin \epsilon = dD \cos \epsilon$  per  $\alpha$  negativi dove si annulla la coppia  $K=0$  e l'elica ferma\*. Aumentando ancora  $V$ ,  $\alpha$  diventa molto negativo, l'elica fuge da un livello ed ha  $K < 0$ , oltre  $\gamma_2$ .

\* Solo in  $\gamma_2$  e  $T < 0$ .

Il rendimento ottimo di ogni singola curva è inferiore rispetto a quello di  $\beta = 25^\circ$ , tuttavia rimanendo sull'involupto avrò  $\eta > \eta_{\beta=25^\circ}$

- Abbiamo quindi ricavato le formule di Reuord di I specie. Possiamo modificarle per renderle analoghe a quelle che esprimono le relazioni aerodinamiche di una superficie:

$$T = \rho \omega^2 r e^4 \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 \pi}{\frac{1}{2} \rho V^2 \pi} \quad C = k \rho \omega^2 r e^5 \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 \pi}{\frac{1}{2} \rho V^2 \pi}$$

Tenendo conto che  $\gamma^2 = \frac{V^2}{\omega^2 r e^2}$  ed introducendo i coefficienti di spinta e coppia con proprietà analoghe a quelli di portanza e resistenza si trovano le Formule di Reuord di II specie.

### - Formule di Reuord di II specie -

- Formule che riportano una differente costruzione per la determinazione del rendimento dell'elica. Riportano l'andamento di spinta e coppia in base a parametri aerodinamici, e possono essere utilizzate in fase di progetto.

$$T = \rho \omega^2 r e^4 \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 \pi}{\frac{1}{2} \rho V^2 \pi} \quad ; \quad C = k \rho \omega^2 r e^5 \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 \pi}{\frac{1}{2} \rho V^2 \pi}$$

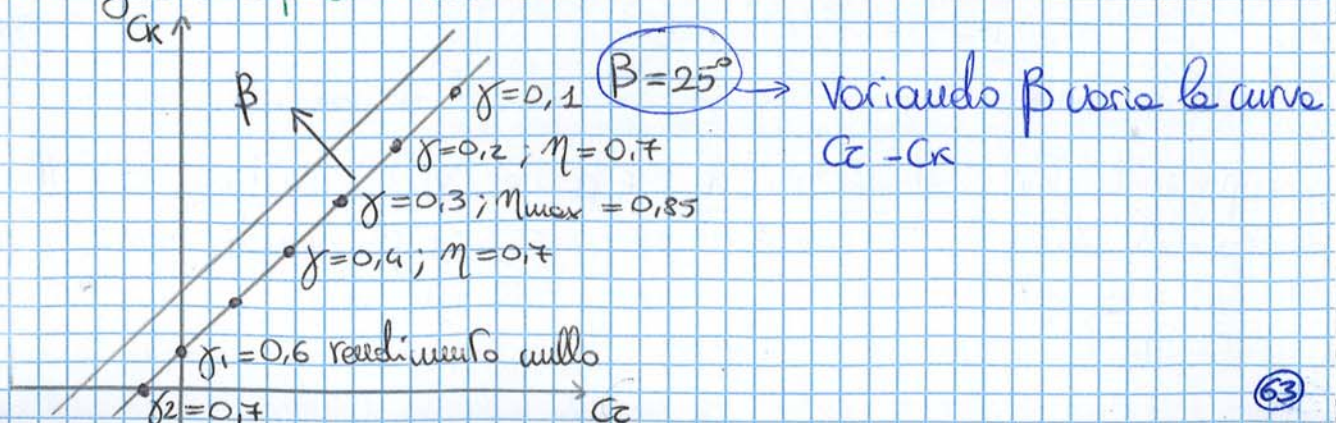
$$\gamma^2 = \frac{V^2}{\omega^2 r e^2} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \rho V^2 \pi (\rho \omega^2 r e^2 r e^2 / \frac{1}{2} \rho V^2 \pi)$$

- Estrapoliamo due coefficienti, di spinta e di coppia:

$$T = \frac{1}{2} \rho V^2 C_T r e r e^2 = \frac{1}{2} \rho V^2 C_T \text{Sup} \quad \text{dove } C_T = \frac{2T}{\rho \gamma^2}$$

$$C = \frac{1}{2} \rho V^2 C_K r e r e^2 = \frac{1}{2} \rho V^2 C_K \text{Sup} r e \quad \text{dove } C_K = \frac{2K}{\rho \gamma^2}$$

e dove Sup = superficie del disco d'elica. Servendoci di  $C_T$  e  $C_K$  disegno una *polare dell'elica*:



$$T = A (V + u_0) \rho [(V + u_0) - V] = A (V + u_0) \rho u_0$$

Se studio la variazione di Energia Cinetica e di Lavoro Compilato nel tempo dall'elica trovo:

$$\frac{\text{Variazione Energia Cinetica}}{t} = \frac{\Delta E}{t} = \frac{1}{2} A \cdot (V + u_0) \rho [(V + u_0)^2 - V^2]$$

$$\frac{\text{Lavoro Compilato Elica}}{t} = \frac{\Delta L}{t} = T (V + u_0) > P_{lu} = T \cdot V$$

Uguagliando  $\Delta E = \Delta L$  trovo:

$$T (V + u_0) = \frac{1}{2} A (V + u_0) \rho (V^2 + 2Vu_0 + u_0^2 - V^2)$$

$$\underbrace{A (V + u_0) \rho u_0}_{T} (V + u_0) = \frac{1}{2} A (V + u_0) \rho (2Vu_0 + u_0^2)$$

$$\cancel{Vu_0} + u_0 u_0 = \cancel{Vu_0} + \frac{1}{2} u_0 u_0 \Rightarrow u_0 = \frac{1}{2} u_0$$

L'incremento di velocità al disco  $u_0$  è la metà dell'incremento di velocità a valle.

Applicando ancora Fraude per il gale:

$$T = 2A (V + u_0) \rho u_0 = 2A \rho V u_0 + 2A \rho u_0^2$$

Trovo che:

$$u_0^2 + Vu_0 - \frac{T}{2A\rho} = 0 \Rightarrow u_0 = -\frac{V}{2} \pm \sqrt{\frac{V^2}{4} + \frac{T}{2A\rho}}$$

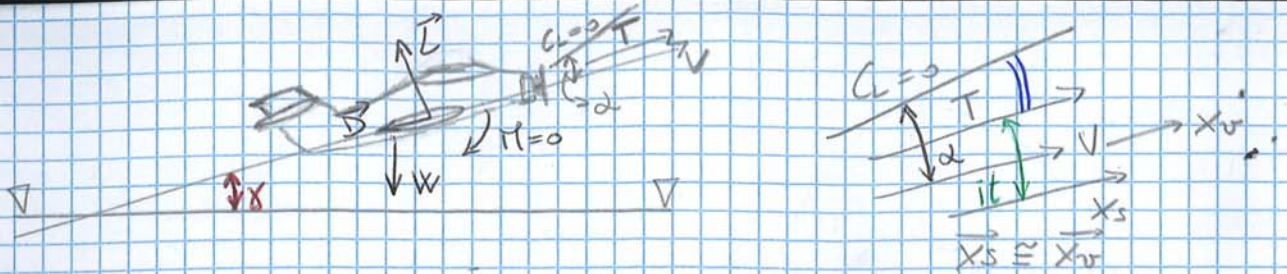
Potendo ammettere come unica soluzione reale l'espressione con il segno +, ottengo l'espressione dell'incremento  $u_0$ :

$$u_0 = -\frac{V}{2} + \sqrt{\frac{V^2}{4} + \frac{T}{2A\rho}}$$

Diunque data la trazione abbiamo  $u_0$  e conseguentemente  $u_{0s}$ . Se mi pongo nelle condizioni di punto fisso:

$$V=0 \Rightarrow u_{0f} = \sqrt{\frac{T_f}{2A\rho}} \quad \text{con} \quad T_f = 2A\rho u_{0f}^2 \quad \text{trazione a punto fisso.}$$

$u_{0f}$  e  $u_{0sf}$  sono i massimi incrementi di velocità possibili.  
In conclusione, notiamo che a punto fisso ho  $\omega r$ , ma anche  $u_0$ :



Scriviamo le equazioni di equilibrio rispetto agli assi vento (y limitato)

$$\begin{cases} T \cos(\alpha - \beta) - D = W \sin \gamma \\ L = W \cos \gamma \end{cases} \quad \alpha - \beta \approx \beta \Rightarrow C_L \sin \beta \approx 1$$

Se prendiamo la prima equazione e la moltiplichiamo ad ogni membro V, troviamo:

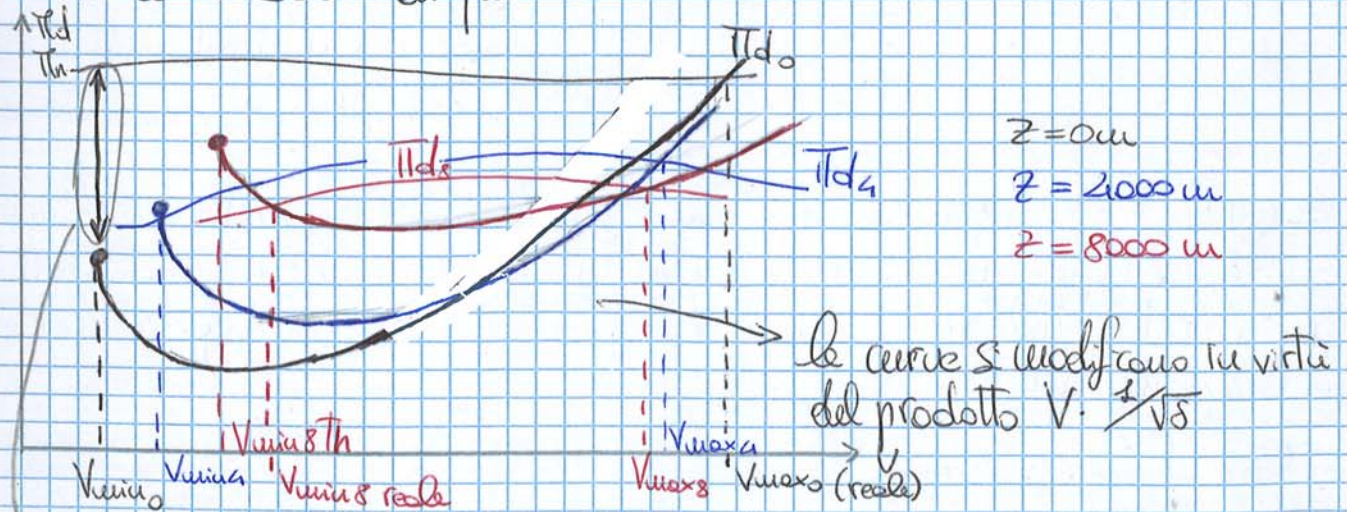
$$TV - DV = W V \sin \gamma \quad \text{ma } V \sin \gamma = w \text{ velocità di salita,}$$

$$TV = \Pi d ; \quad DV = \Pi n$$

$$\Rightarrow \Pi d - \Pi n = W w \quad \text{e la velocità di salita sarà data da:}$$

$$w = \frac{\Pi d - \Pi n}{W}$$

La velocità di salita sarà massima per  $(\Pi d - \Pi n)_{max}$  a peso costante. Dal grafico delle  $\Pi d - \Pi n$ : V ricavo che questa condizione si verifica per un coefficiente di portanza  $C_L = C_{L(E/C_L)_{max}}$ . Aggiungiamo al grafico in queste le variazioni di quota:



a  $z = 0 \text{ m}$  riesco a salire anche con  $V_{min}$ .

Di conseguenza grafichiamo le prestazioni di salita.  $\Rightarrow w = f(V)$

Alle tangenze ho:

$$W=0 \Rightarrow \frac{T_d}{W} = \frac{T_u}{W} \Rightarrow \frac{m_e \Psi \xi T_{mus}}{W} = \frac{DV}{W} = \frac{V}{E}$$

Pongo  $\xi = 1$  la manetta e sostituendo  $V$  dall'espressione precedente:



$$\psi \sqrt{S} = \frac{\sqrt{2} W^{3/2}}{\sqrt{g} m_e T_{mus} (E/C_2) \sqrt{S}}$$

dove  $\Psi$  e  $\sqrt{S}$  sono funzioni della quota e  $E/C_2$  è massimo se la tangenza tra  $T_u$  e  $T_d$  è nel punto di minimo  $T_u$ .

dezione n°13

11/04/2016

### - Autonomie in crociera \*

Come "crociera" si intende sempre una condizione di volo rettilineo uniforme orizzontale o suborizzontale.

Esistono 2 tipi di autonomie:

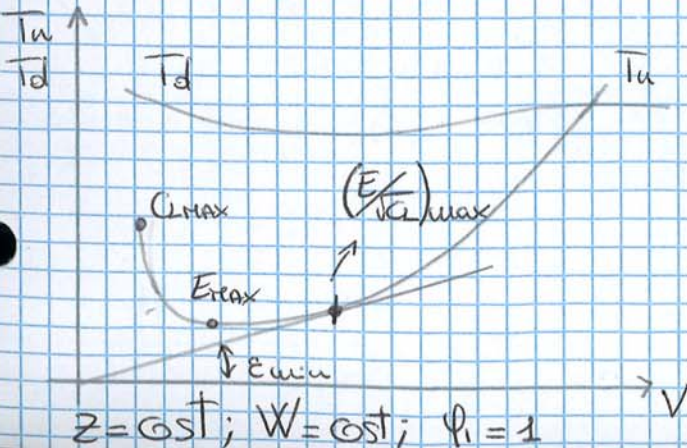
- **Autonomia Chibometrica** - indicata spesso anche solo come "autonomia".  
Definisce qual è il massimo spazio percorribile con un certo quantitativo di carburante.

- **Autonomia Oraria, Durata** - definisce il tempo massimo di permanenza in volo con un certo quantitativo di carburante.

Si noti che le condizioni di massima autonomia e massima durata non sono equivalenti.

Si considerano separatamente getto ed elica.

### - Autonomie e durata: velivolo a getto -



$$T_d = T_{s0} \chi_1 \rho_1 \Psi_2$$

$E_{max} \Rightarrow$  Massima Durata

$E/C_2 \Rightarrow$  Massima Autonomia

Se  $G = G_{max}$  e  $J = J_{max}$  allora:

$$W_{To} = W_{EW} + G_{max} + J_{max} = W_{max}$$

- Strategia 2:  $C_L = cost$ ,  $z = cost$  -

Assumendo in questo caso  $C_L = cost$  e  $z = cost$  facciamo variare la velocità e la manetta.  $K$  non sarà costante, perciò scriviamo un consumo specifico medio. La velocità varia con legge:

$$V = \sqrt{\frac{W/S}{\frac{1}{2} \rho \sigma S}}$$

diunque sostituiamo quest'espressione in  $ds$  ottenendo:

$$ds = - \frac{E}{K \sqrt{C_L}} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} \rho \sigma S}} \frac{\sqrt{W}}{W} dW$$

se prendiamo il parametro  $\frac{E}{K \sqrt{C_L} \sqrt{S}}$  costante (ovvero  $K$  variabile in funzione di  $V$  e  $\phi$ ), allora integrando otteniamo:

$$S = - \frac{E}{K \sqrt{C_L}} \frac{\sqrt{2/\rho \sigma}}{\sqrt{S}_{sup}} 2 \sqrt{W} \Big|_i^f =$$

$$S = \frac{3600}{1000} \cdot 2 \sqrt{2/\rho \sigma} \frac{E}{K \sqrt{C_L}} \frac{1}{\sqrt{S}} \sqrt{\frac{W}{S}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{G}{W_i} \right)^{1/2} \right] \quad [km]$$

Nella realtà  $K$  non è costante: allora possiamo dire che avremo lo spazio massimo percorso solo in condizioni di  $(E/\sqrt{C_L})_{max} \Rightarrow S_{max}$

Definiamo il fattore precedentemente assunto costante come:

$$\frac{E}{\sqrt{C_L}} \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} = \sigma \quad \text{Fattore di Economia di Percorso}$$

Questo definisce il fatto che per avere  $S_{max}$ , durante la crociera non dovrei solo curarmi di rotolare a  $(E/\sqrt{C_L})_{max}$ , ma mantenere costante e massimo il termine  $\sigma = \sigma_{max} = cost$ .

Ma quale sarebbe la strategia di rotte corretta per consumare il minimo ed ottenere  $S_{max}$ ?

Definiamo la quota iniziale di crociera  $z_i$  ed il peso iniziale di crociera  $W_i$ , dopodiché partendo da un  $C_L$  di tentativo calcoliamo in sequenza:

$$C_L \rightarrow E \rightarrow E/\sqrt{C_L} \rightarrow V_i \rightarrow V \rightarrow X_1 \rightarrow \psi_1 \rightarrow \phi_1 = \frac{D}{1.5 X_1 \psi_1}$$

$$\text{ossia manetta iniziale necessaria} \rightarrow n \rightarrow \phi_2 \rightarrow \psi_2 \rightarrow X_2 \rightarrow K \rightarrow \sigma$$

dezione n° 14

12/04/2016

- Parlando di autonomie chilometriche, abbiamo visto che volando al  $C_L (E/\sigma)_{max}$  avremmo ottenuto la massima autonomia chilometrica. Ciò è "abbastanza vero" perché tenendo conto della  $K$  consumo specifico e della quota, se questi fossero costanti, sarebbe proprio corretto: considerando il tutto in maniera più approfondita, andiamo a considerare al variare del  $C_L$  il valore:

$$\sigma = \frac{E}{\sqrt{C_L}} \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} = \text{Fattore di economia di percorso}$$

- E per affiorare ancor meglio i conti sulla condotta ottimale di volo al fine della ottimizzazione dello spazio percorso, si considera la fase di crociera suddivisa a tratti: conosciamo la quota iniziale di partenza (aeroporto), e dopo decollo e salite raggiunghiamo una certa quota da cui la crociera inizia. Non essendo obbligatorio fare la crociera a quota costante (ma anche a quota costante avremmo dei parametri che variano, come  $K$ ), quando si vuole fare una programmazione precisa della condotta di volo da tenere durante la crociera si fa una valutazione per tratti. Nella nostra considerazione, la cosa più semplice è partire dal consumo: ad esempio, considero dei tratti dove vedo a consumare un certo quantitativo (1000 kg) di kerosene. Dopo aver consumato tale quantità, quello che è il peso iniziale alla fine dell'intervallo mi dà il peso finale (una volta sottratta la tonnellata di carburante consumato): in questo modo posso considerare un valore medio dei parametri variabili in un intervallo molto più ridotto affiorando sensibilmente l'approssimazione. In conclusione, volare ad un  $C_L (E/\sigma)_{max}$  rappresenta sì un'approssimazione delle condizioni ottimali, ma la migliore (o quasi) approssimazione possibile. Un'approssimazione secondaria è quella rappresentata dal surplus di carburante necessario all'affrontare un aumento di quota, dovuto all'aumento dell'energia potenziale. Conoscendo il rendimento di volo posso calcolare il consumo in più che ho avuto per l'incremento di energia potenziale.

- $W_f = W_i - G - G_s$  ;  $G_s = \frac{W_{in} \Delta z}{H_i m_{vol}}$

dove  $m_{vol}$  è dato da:

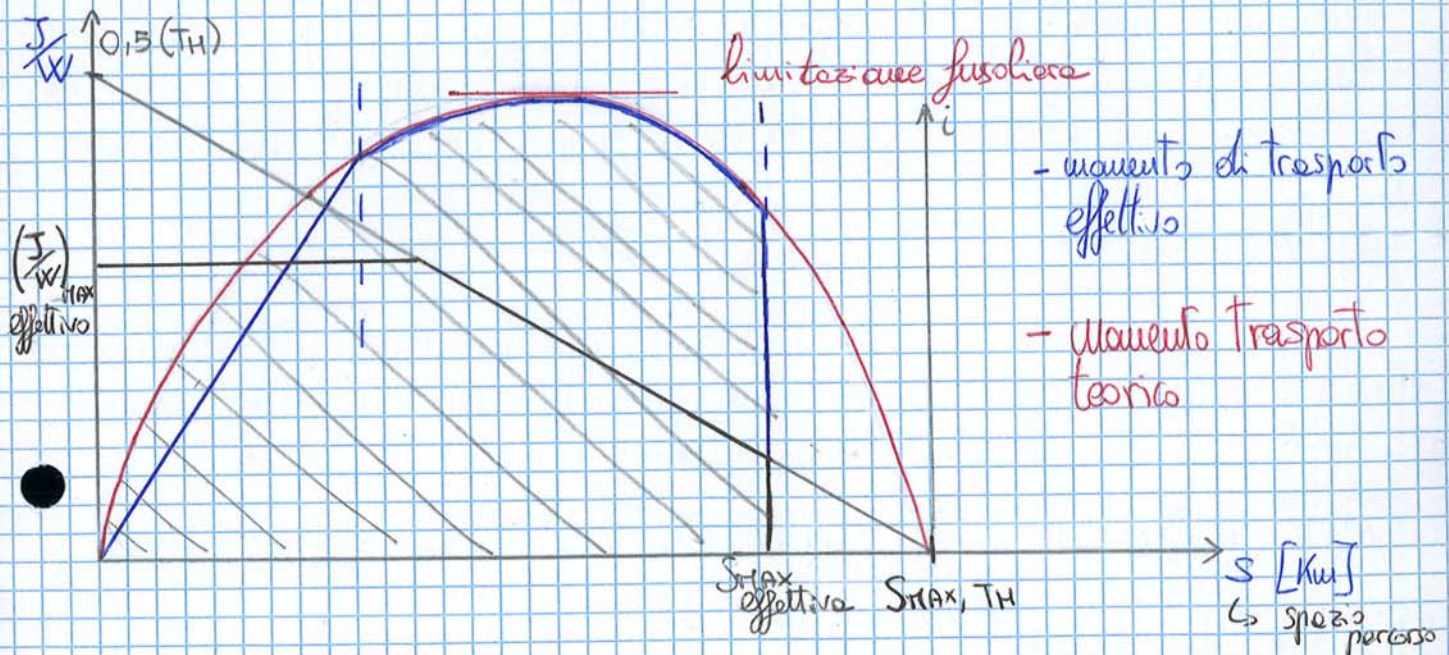
In tal caso dobbiamo spostarci da  $G$  di efficienza massima verso  $G_{max}$ , ma ben prima di arrivare al  $G (E/K)_{max}$  troviamo effettivamente quel  $G$  per cui  $E/K$  è massimo. Tuttavia  $G (E/K)_{max}$  e  $G_{E_{max}}$  sono molto prossimi.

### - Diagramma di utilizzo -

$W_{ew}$  è il peso "empty weight", ed il peso complessivo del velivolo è dato da  $W = W_{ew} + J + G$ : questo potrebbe essere il peso massimo,  $W_{max}$ . Quando si costruisce il diagramma di utilizzo si prende un peso  $W_{max}$ .

In  $G$  è considerato non solo il carburante per la crociera ma anche quello per decollare e salire, scendere ed atterrare.

Costruiamo questo diagramma secondo il principio per cui la differenza tra peso massimo e peso minimo  $W_{ew}$  viene ad essere "giocata" tra i due parametri payload e carburante.



$$\frac{J}{W_{max}} = 1 - \frac{W_{ew}}{W_{max}} - \frac{G}{W_{max}} \Rightarrow \text{il payload riferito al peso massimo.}$$

Mediante queste visioni matematiche costruiamo meglio dei parametri fondamentali nella progettazione del velivolo. Un parametro è  $\frac{W_{ew}}{W_{max}}$ : un buon rapporto è 0,5 per un velivolo da trasporto.

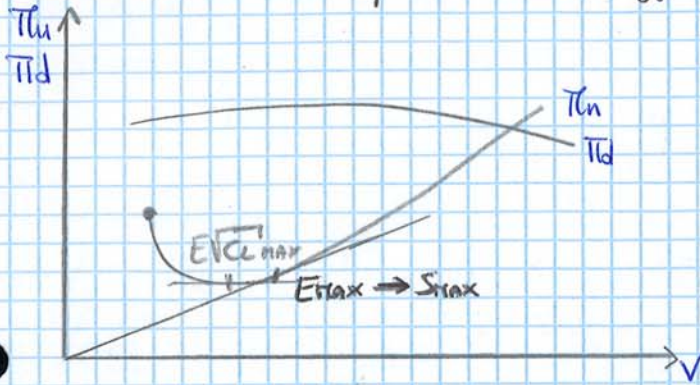
Quando mitrovo in assenza di carburante (zero autonomia) corro a bordo solo payload ed ottengo  $(J/W)_{max}$  teorico. Situazione opposta quando  $J/W = 0$  e corro solo carburante fino a raggiungere  $W_{max}$ , ottenendo quindi il punto di  $S_{max}$  teorico.



Integrando considero costanti  $\eta_e, E$  e  $c$ , dove  $\eta_e = f(\frac{V}{w_{re}})$ . Ottengo:

$$S = \frac{\eta_e E}{c} \ln \frac{1}{1 - \frac{V}{w_{re}}}$$

dove sono inclusi i parametri  $C_2, V, z, \beta$ . La relazione è analoga a quella trovata per il rinvolo a getto. Da qui si nota bene che ottengo l'autonomia massima in corrispondenza dell'efficienza massima.



Supponendo  $C_2$  e  $\beta$  costanti, variano velocità e quota. La quota finale si ricava dalla relazione:

$$\eta_e \cdot \Psi \cdot \eta_{uso} \cdot \beta = \frac{1}{2} \rho_0 V_i^2 C_0 S V_i \frac{1}{\sqrt{S}}$$

Si porta al primo membro ciò che dipende dalla quota:

$$\Psi(z) \sqrt{S} = \frac{\frac{1}{2} \rho_0 V_i^3 C_0 S}{\eta_e \eta_{uso} \beta} \quad \text{da cui } V_i = \sqrt{\frac{W \beta / S}{\frac{1}{2} \rho_0 C_{LMAX}}}$$

questi parametri possono considerarsi costanti.

N.B: La manetta non è data a priori, sebbene siamo certamente nell'intervallo del massimo.

Lezione n° 15

18/04/2016

### - Durata (El-co) -

La potenza del motore è sempre  $\Pi_{in} = \Pi_{uso} \Psi \beta$ . Per ricavare l'espressione del tempo da integrare successivamente scriviamo:

$$\frac{\eta_e \Pi_{in}}{W} c dt = \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \frac{\sqrt{W/S}}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{S}} E c dt \quad \text{e troviamo:}$$

$$dt = - \frac{\eta_e}{c} \frac{E \sqrt{C_2} \sqrt{S} \sqrt{S}}{\sqrt{2 \rho_0}} \frac{dW}{W^{3/2}}$$

Il peso del velivolo non è costante: questo cambierà a seconda delle distanze percorse di crociera. Se la crociera è molto lunga il velivolo parte con un peso maggiore, mentre avrà un peso minore per una crociera più corta.

Il C<sub>DP</sub>, infunzione dello spazio, ha un andamento tale che quando lo spazio tende a zero il consumo chilometrico tende ad infinito.

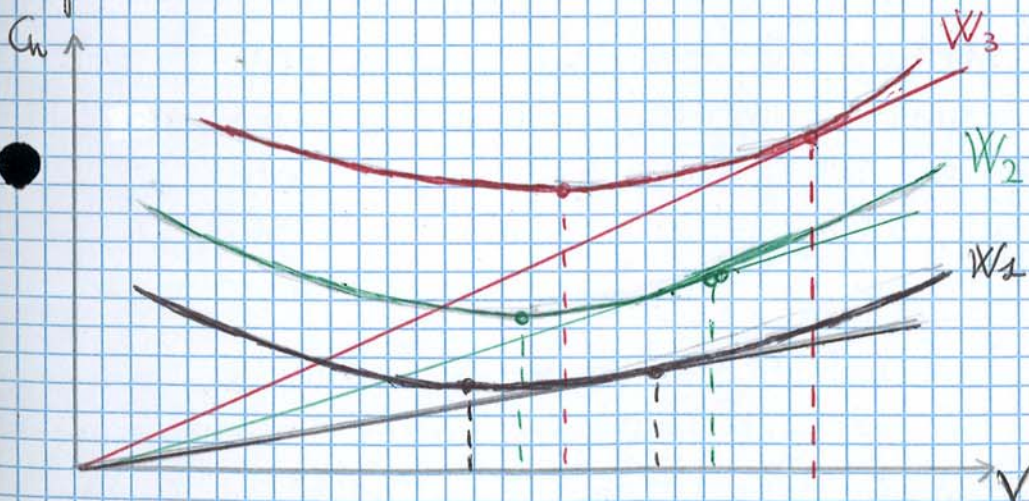
Per quanto riguarda C<sub>CR</sub> si nota un andamento che potrebbe apparire strano: il consumo chilometrico per queste fasi di crociera aumenta all'aumentare dello spazio: questo per via della necessità di dover portare con molto peso a bordo dovuto al carburante. Il maggior peso richiede perciò un consumo maggiore.

### - Consumo orario -

È la quantità di carburante consumata nel tempo: dunque posso vederla anche come un consumo chilometrico per una velocità.

$$C_h = \frac{\text{Carburante consumato}}{\text{tempo}} = C_k \cdot V \left[ \frac{N}{h} \right]$$

Riportiamo il consumo orario in rapporto alle velocità, considerando tre pesi diversi: ( $Z \approx \text{cost}$ ).

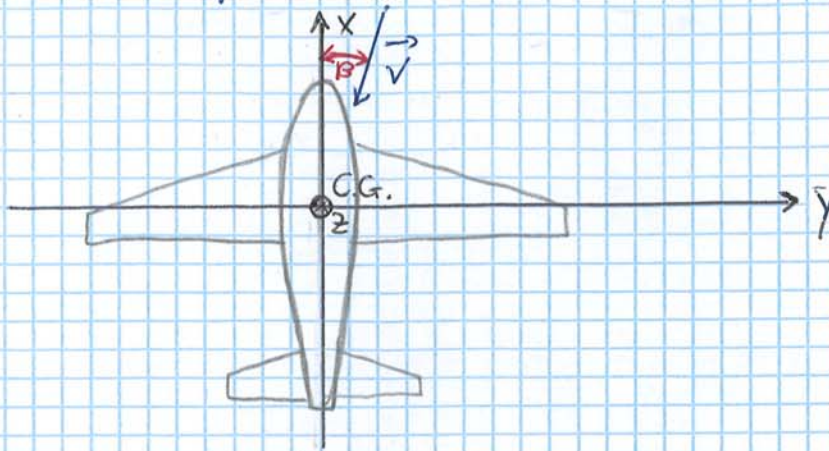


Se lo spazio aumenta, il peso aumenta:

Nel disegno troviamo i seguenti andamenti, i quali sono "confermati" da un ulteriore modo di vedere il consumo orario, cioè:  $C_h = T_u \cdot K$ . Tale relazione disegna curve dello stesso tipo.

Prendiamo in considerazione i punti di minimo al variare del peso: ne facciamo l'inverso e riportiamo il diagramma:

- ② Le condizioni iniziali a velocità costante a regime
- ③ Il vettore velocità  $\vec{V}$  contenuto nel piano di simmetria  $xz$ , cioè non si ha angolo di derapata,  $\beta = 0$ .



- ④ l'angolo di traiettoria iniziale è circa quello,  $\gamma = 0$ .
- ⑤ la struttura è rigida, non vi sono deformazioni.

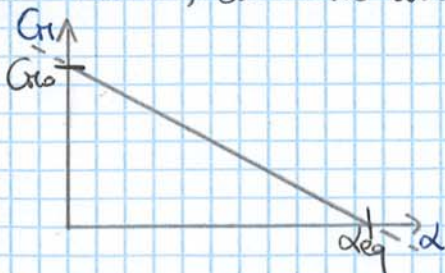
Possiamo con queste condizioni scrivere:

$$W = L = \frac{1}{2} \rho V^2 C_L S; \quad T = D = \frac{1}{2} \rho V^2 C_D S; \quad \Pi = \frac{1}{2} \rho V^2 C_m S c = 0$$

Quindi se  $\Pi = 0 \Rightarrow C_m = 0$

Quindi perché c'è equilibrio dovrà fare in modo che il momento sia  $\Pi = 0$ .  
Volendo avere anche la condizione di stabilità del veicolo, quindi  $C_m = 0$  e

- $C_{m\alpha} < 0$ , dovremo avere una curva  $C_m - \alpha$  la quale, se è una retta, deve essere minore di zero e con una pendenza imposta dall' $\alpha$  di equilibrio. Tale retta andrà ad incrociare l'asse delle ordinate nel punto  $C_{m0} > 0$ .



Perché equilibrio e stabilità siano provate deve per forza esserci una retta con queste pendenze ed un  $C_{m0}$  maggiore di zero.

Per calcolare il  $C_{m0}$  partiamo dall'ala isolata.

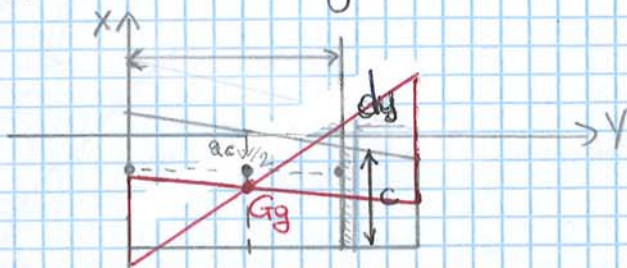
### - Ala isolata -

Di seguito è disegnata un'ala in pianta trapezica in cui si trova un angolo di freccia:

si discostano da un andamento costante. Noi comunque ipotizziamo che sia valida la **proprietà locale**: questa ci dice che tale coefficiente è costante al variare di  $x$ .

Torniamo al prof.  $\vec{V}$  incide con un angolo  $\alpha$  da aerodinamico rispetto alla retta  $C_1=0$  e con un angolo  $\alpha_g$  geometrico rispetto alla corda media. Si crea una distribuzione di pressioni che influisce sulla portanza. La risultante di tale distribuzione determina in un certo punto una **forza risultante aerodinamica** che si può scomporre rispetto a  $\vec{V}$  ( $\vec{L} \perp \vec{V}$ ;  $\vec{D} \parallel \vec{V}$ ). Trasportiamo  $\vec{F}$  nell'**aerodynamic center** (quarto anteriore) aggiungendo un momento di trasporto.

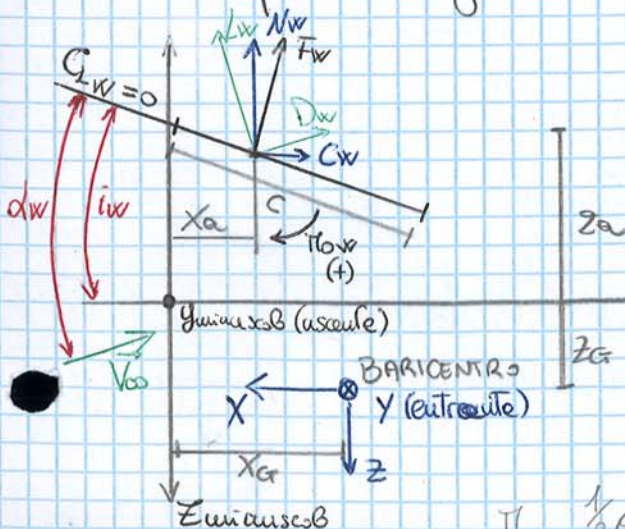
Per un'ala non rettangolare come si calcola il fuoco?



Per ali trapeziche e pluri trapeziche la corda baricentrica coincide con la corda media aerodinamica. Ci stiamo riferendo al baricentro geometrico  $G_g$ . La corda dove c'è il baricentro geometrico è la corda media aerodinamica.

Per ali trapeziche, pluri trapeziche ed ellittiche l'aerodynamic center della semi-ala giace al quarto anteriore della corda baricentrica:

Possiamo quindi disegnare il seguente schema:



$N_w$  = Componente secondo  $x$   
 $C_w$  = Componente secondo  $z$

$\Pi_0$  = momento di beccheggio dell'ala in condizioni di portanza nulla

- assi body

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} \rho V^2 \int_0^{c/2} c^2 dy ; \quad \Pi_0 = \frac{1}{2} \rho V^2 S c G_g$$

2) Quando  $C_{Dw} \approx 0$

3) Quando  $(\alpha_w - i_w) \approx 0$

Trascuriamo il wing drag term e consideriamo solo il contributo della portanza:

$$C_{LGW} = C_{Lw} \frac{x_G - x_a}{c} + C_{D0w}$$

È interessante notare che se si considera il wing drag term si ha una relazione del  $C_{D0w}$  in funzione di  $\alpha_w$  che non è lineare, in quanto  $C_{Dw}$  in funzione di  $\alpha$  è lineare,  $C_{D0w}$  è costante, il termine tra parentesi non è lineare, risultando come minimo essere un termine quadratico.

Con il wing drag term non si ha più la linearità di  $C_{LGW}$  in funzione di  $\alpha_w$ .

$C_{Lw} = \frac{\partial C_{Lw}}{\partial \alpha_w} \cdot \alpha_w = a_w \alpha_w$  dove  $a_w = \frac{\partial C_{Lw}}{\partial \alpha_w} = \text{costante}$ , visto che al di fuori della zona di stallo la curva  $C_L - \alpha$  è lineare.

$C_{LGW} = C_{D0w} + a_w \alpha_w \frac{x_G - x_a}{c}$ , la quale è la relazione di una retta.

Quindi per il velivolo tutt'ala:

Equilibrio:  $C_{LG} = 0 \Rightarrow C_{Lw} = - \frac{C_{D0w}}{\frac{x_G - x_a}{c}}$

Stabilità:  $C_{LG} < 0 \Rightarrow C_{LG} = \frac{\partial C_{LG}}{\partial \alpha} = a_w \frac{x_G - x_a}{c} < 0$

Per avere stabilità dell'equilibrio dovrà avere  $x_G < x_a$ , ossia il baricentro dev'essere anteriore al fuoco.

Ritornando all'equazione di equilibrio. A questo punto, sapendo che dev'essere  $x_G - x_a < 0$ , devo per forza avere il  $C_{Lw} > 0$ : questa è la condizione necessaria per avere equilibrio e stabilità del velivolo tutt'ala.

$$C_{LG} = 0 : C_{Lw} = \frac{-C_{D0w}}{\frac{x_G - x_a}{c}} > 0 \Rightarrow C_{D0w} > 0$$

Dunque affinché ciò sia possibile dovrà avere  $C_{D0w} > 0$ .

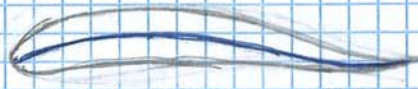
Vediamo come varia  $C_{LG}$  in funzione di  $\alpha$ :

coincidere con la presenza di un momento focale negativo,  $\tilde{l}_0 < 0$ .  $\tilde{l}_0$  è negativo poiché i prof. hanno normalmente una concavità positiva (rivolta verso il basso) ed hanno un  $C_{r0} < 0$ . Per il profilo simmetrico ricordiamo che  $C_{r0} = 0$ .

La concavità del profilo porta enormi benefici: un  $C$  maggiore, un'incidenza di stallo maggiore, ecc...: è un profilo che funziona meglio rovesciando il velivolo avremmo  $C_{r0} > 0$  ma perderemmo l'efficacia generale del velivolo.

Vi sono 3 modi per ottenere, con un profilo a concavità positiva, un  $C_{r0} > 0$ :

### 1) Prof. Autostabile:



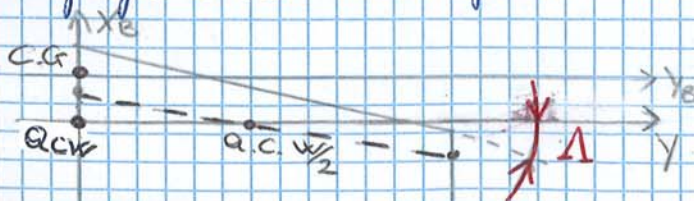
È un profilo con la linea d'asse a S, ossia ha concavità positiva nella parte anteriore e negativa verso il bordo di fuga. In questo modo il profilo auto-stabile ha un  $C_{r0} > 0$  pur mantenendo abbastanza buone le caratteristiche  $C_{L-\alpha}$ .

### 2) Prof. con Elevone:



Si può approssimare una linea d'asse a S dotando il profilo di un elevone, cioè una superficie mobile al bordo di fuga che dovrà essere sempre rettilinea negativamente, ossia avere sempre un  $S_e(-) < 0$  (poiché la rotazione è a picchiore). Variando l'angolo, pur mantenendo sempre  $C_{r0} > 0$ , è come se muovessimo la retta  $C_{r0} - \alpha$  intersecando l'asse delle ascisse a diversi  $\alpha$  (con diverse velocità) e quindi ottenendo sempre l'equilibrio in diverse condizioni (e diverse velocità).

### 3) Ala con profilo classico con: freccia + svergolamento.



Prendiamo una generica sezione, dovendo considerare differenti tutte le sezioni lungo l'apertura.  $Y_{acw}$  è detto **asse focale**. Dovendo considerare il momento focale dell'ala devo considerare due contributi: il contributo di coefficiente di momento focale di ciascuna sezione ed il contributo focale del coefficiente di portanza. Ottengo:

$$I_{f0} = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot 2 \left[ \int_0^{b/2} c_{m0} c^2 dy + \int_0^{b/2} c c dy \times x_{acw} \right]$$

Si noti che moltiplico il tutto per 2, ossia per le due semiali. Tutto ciò si ha in condizione di portanza sull'ala nulla, cioè nella situazione in cui  $V$  incide secondo la direzione tale per cui  $C_{LW} = 0 \parallel V$ . Ciò significa che in queste situazioni sarà nulla la risultante ma avrà portanza nella regione dell'ala del piano di simmetria e deportanza alle estremità. In queste situazioni  $\alpha_w = 0^\circ$  e  $C_{LG} = C_{L0}$ .

Nella regione portante dell'ala il contributo del momento focale sarà **cabrate**, dato dalla forza verticale diretta verso l'alto ed il braccio (distanza dalla  $C_{ue}$ ); nella regione deportante cambiano verso sia braccio che forza aerodinamica (deportanza), ed il contributo risultante di questa porzione è anch'esso **cabrate**. Dunque ho ottenuto, mediante opportuno angolo di freccia ed opportuno angolo di svergolamento, un'ala con  $C_{L0} < 0$  ma con  $I_{f0}$  positivo (cabrate).

Aumentando le incidenze aumenta la portanza su tutta l'ala, e la curva si sposta verso l'alto. Cresce la porzione portante e diminuisce la porzione deportante, fino ad arrivare ad un'ala completamente portante. Il momento focale è cambiato perché al crescere di  $\alpha_w$  cambiano i contributi delle varie sezioni, ma cambiano nel senso di annullarsi reciprocamente: nelle sezioni portanti per  $\alpha_w = 0^\circ$ , per  $\alpha_w > 0^\circ$  cresce la portanza e dunque il contributo ad  $I_{f0}$ , ma questo viene equilibrato da quelle sezioni le quali diventando portanti danno però (a causa del braccio opposto rispetto a  $C_{ue}$ ) un contributo picchiante. **La proprietà focale vale anche sull'ala.**

Se non ci fosse svergolamento e  $c$  fosse solo angolo di freccia non ci sarebbe questa distribuzione di portanza - deportanza per  $\alpha_w = 0^\circ$ : non ci sarebbe il contributo di  $c$  nell'espressione di  $I_{f0}$ . Se ci fosse svergolamento e non ci fosse angolo di freccia avremmo una distribuzione di portanza - deportanza di questo genere, ma non

Il coefficiente di momento focale sarà

$$C_{Mf} = \frac{\tau_f}{\frac{1}{2} \rho V^2 (1-\delta) Vol \cdot sec^2}$$

Nel momento in cui all'ala si aggiunge la fusolera, si aggiunge un contributo positivo all'equazione di equilibrio (cioè  $C_{Mf} > 0$ ). Compilando questa operazione risulterà in totale 4 parametri che cambiano.

1) posizione del fuoco:  $x_{a'} < x_a$  ad esempio  $x_{a'} \approx 0,22 \cdot c$

2) momento focale:  $|C_{Mwb}| > |C_{Mw}|$

Togliendo il valore assoluto e considerando il  $C_{Mw} > 0$  (ad esempio profilo auto stabile) aggiungiamo la fusolera: questo sappiamo dare un contributo positivo e quindi  $C_{Mwb} > C_{Mw} > 0$ . Se invece  $C_{Mw} < 0$ , aggiungendo il fusolero che  $C_{Mwb} < C_{Mw} < 0$ : l'interferenza ala-fusolera supera l'effetto del sub body + ala separatamente (senza interferenza) e  $C_{Mwb}$  diventa ancor più negativo del  $C_{Mw}$ .

3) coefficiente angolare di portanza:  $a_{wb} > a_w$

Questo poiché aggiungo all'ala un corpo che è comunque portante.

4) incidenza:  $\alpha_{wb} < \alpha_w$

Questo poiché l'ala è allettata e cobrasi rispetto alla direzione  $C_f = 0$ :



Dunque  $C_{Lwb} = 0$  sarà tra le due, ad un'incidenza inferiore rispetto  $C_{Lw} = 0$ .

Questi 4 effetti, prendendo la relazione del  $C_{Mf}$  trovata in precedenza, ne variano il contenuto e riscriviamo l'equazione per ala + fusolera:

$$C_{Mwb} = C_{Mw} + C_{Lwb} \cdot \frac{x_G - x_{a'}}{c}$$

Sviluppo ulteriormente il  $C_{Mwb}$  nell'  $C_{a_{wb}}$  (coefficiente angolare di portanza  $w_b$  per incidenza  $w_b$ ) e ritrovo tutti e 4 gli effetti:

$$C_{Mwb} = \underbrace{C_{Mw}}_{2^\circ} + \underbrace{a_{wb}}_{3^\circ} \underbrace{\alpha_{wb}}_{4^\circ} \cdot \frac{x_G - x_{a'}}{c} \quad 1^\circ$$



Questo è un termine importante ai fini dell'equilibrio dell'intero velivolo non tanto per  $L_T$  quanto per il braccio l'è molto esteso: ciò rende  $M_{Tt}$  un termine trascurabile qualora non sia nullo.

Da  $\vec{V}_{eff}$  è ciò che arriva della  $\vec{V}_{\infty}$  sul tail. Prendiamo in considerazione il rapporto di velocità:

$$\eta_t = \frac{V_{eff}^2}{V_{\infty}^2} \gtrless 1$$

Questo viene in genere preso con un valore di  $\eta_t = 1$ , ma può essere  $\eta_t \gtrless 1$ .  $\eta_t > 1$  ad esempio se c'è un flusso d'aria che investe il tail (flusso accelerato).  $\eta_t < 1$  ad esempio se il tail è nella scia dell'ala o si trova in una zona di flusso rallentato.

In effetti: il tail collegato direttamente alla fusoliera è, almeno in parte, investito da un flusso rallentato (nel punto di collegamento tail-fusoliera è rallentato dallo strato limite della fusoliera).

Ricorriamo il  $C_{RGt}$ :

$$C_{RGt} = \frac{l_{Gt}}{\frac{1}{2} \rho V^2 S_c} = - \frac{C_{L_{Tis}} \ell \epsilon S_t (\cancel{\frac{1}{2} \rho V^2}) \eta_t}{(\cancel{\frac{1}{2} \rho V^2}) S_c}$$

dove  $C_{L_{Tis}}$  è il coefficiente di portanza del tail nel caso questo fosse isolato e non subisse le interferenze wing-body;  $S_t$  è la superficie in pianta del tail.

$$C_{RGt} = - \frac{C_{L_{Tis}} \ell \epsilon \eta_t S_t}{S_c} = - C_{L_{Tis}} \eta_t \bar{V}'$$

dove  $\bar{V}'$  è il rapporto volumetrico di coda (rispetto l'è):

$$\bar{V}' = \frac{S_t \ell \epsilon}{S_c}$$

Ulteriore il rapporto volumetrico di coda (rispetto l'è):

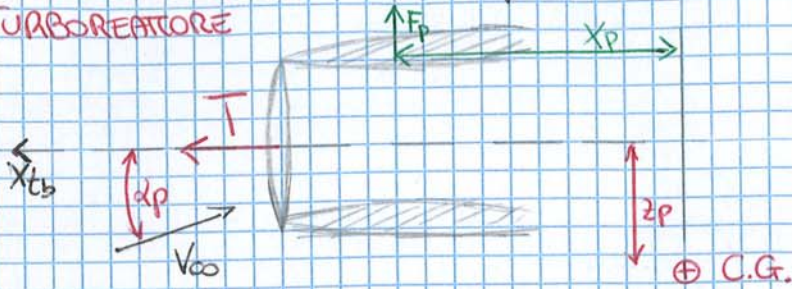
$$\bar{V} = \frac{S_t \ell \epsilon}{S_c}$$

Con questa definizione scriviamo il contributo del tail facendo la considerazione di definire un  $C_{L_{Tis}}$ :

$$C_{L_{Tis}} = a_{Tis} \alpha_t \quad ; \quad C_{L_t} = a_t \alpha_t$$

tante braccia  $x_p$  tra disco d'elica e C.G. fa sì che anche tale contributo al momento di beccheggio sia da considerare nell'equilibrio totale. Dev'essere chiaro che  $F_p = \int \rho \omega^2 r dr$  per le pale (lucernamente).

TURBOREATTORE



Nel caso del turboreattore il fenomeno si ripete in maniera pressoché identica:  $T$  è diretta secondo l'asse di rotazione del turboreattore e dona un contributo a  $C_{MG}$  dovuto al braccio  $z_p$ . Con  $V_{\infty}$  diretta secondo una direzione non coincidente con l'asse  $x_{tb}$  nasce una forza  $F_p$  che mediante il braccio  $x_p$  rappresenta un contributo non trascurabile a  $C_{MG}$ .  $F_p$  si pare all'interno rispetto alla sezione della presa d'aria del propulsore. Questa componente trasversale la possiamo esprimere anche come una derivata, scrivendo così:

$$C_{MGp} = C_{MGp0} + \frac{\partial C_{MGp}}{\partial \alpha} \cdot \alpha_p$$

contributo totale del propulsore a  $C_{MG}$       contributo di  $T$       derivata che esprime un valore costante per  $\alpha$  (contributo di  $F_p$ )

Siccome per elica che per turboreattore avremo un contributo a  $C_{MG}$  del propulsore da suddividere tra la  $T$  ed  $F_p$  (quest'ultima considerabile anche sotto forma di derivata).

### - Veli volo completo -

Con l'aggiunta dell'ultima componente nuovamente riscriviamo l'espressione del momento di beccheggio:

$$C_{MG} = C_{MGwb} + C_{wb} \frac{x_G - x_a'}{c} - C_{Lt} \bar{V} + \frac{x_G - x_a'}{c} C_{Lt} \frac{St}{S} + C_{MGp}$$

Raccogli i termini moltiplicati per  $\frac{x_G - x_a'}{c}$  per evidenziare un termine rilevante:

$$C_{MG} = C_{MGwb} + \underbrace{\left( C_{wb} + C_{Lt} \frac{St}{S} \right)}_{C_L} \frac{x_G - x_a'}{c} - C_{Lt} \bar{V} + C_{MGp}$$