



Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2127A-

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Faraci Alessio

MATERIA: Scienze delle Costruzioni - Prof. Chiaia

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

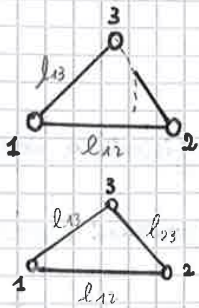
1	CINEMATICA E STATICA DEI SISTEMI RIGIDI	1
	• gradi di libertà di un sistema di punti materiali	1
	• equazioni cardinali della statica	8
	• statica grafica - operazioni sulle forze	10
	• vincoli esterni ed interni	17
	• dualità statico cinematica	33
	• catene cinematiche	36
	• calcolo reazioni tramite P.L.V.	38
2	CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE	42
	• equazioni indefinite di equilibrio per trave piana ad asse rettilineo	45
	• osservazioni sul tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione	51
3	CURVA DELLE PRESSIONI	55
4	STRUTTURE ISOSTATICHE	60
	• travi Gerber	60
	• strutture reticolari	61
	• strutture a maglie chiuse	65
	• cedimenti vincolati e variazioni termiche	69
5	GEOMETRIA DELLE MASSE	71
	• momenti di inerzia assiale e polare	72
	• teorema di trasposizione di Huygens	73
	• leggi di trasposizione dei vettori di posizione, dei momenti statici, dei momenti d'inerzia	74
	• momenti principali di inerzia	78
	• ellisse centrale di inerzia	83
	• nocciolo centrale di inerzia	84
6	ANALISI DELLA DEFORMAZIONE	85
	• tensore di deformazione	87
	• <u>direzioni principali della deformazione e dilatazioni principali</u>	<u>92</u>
	• equazioni di compatibilità	97

11	SOIIDO DI SAINT-VENANT	152
	• ipotesi e principio fondamentale di S.V	152
	• sforzo normale centrato	154
	• flessione retta	158
	• flessione deviata	163
	• sforzo normale eccentrico	165
	• materiali non reagenti a trazione	175
	• lavoro di deformazione per N_z , M_x , M_y e sforzo normale eccentrico	177
	• torsione delle travi a sezione piena	179
	• <u>torsione delle travi a sezione sottile chiusa e aperta</u>	<u>188</u>
	• taglio retto	197
	• dimostrazione formula di Jourawsky	199
	• stato tensione biasciare derivante dal taglio	202
	• delimitazione	203
	• taglio deviato	205
	• taglio nelle azioni sottili	207
	• lavoro di deformazione per M_z , T_x , T_y	214
12	VERIFICHE DI SICUREZZA	216
	• tensione ammissibile e ideale	216
	• verifica a momento torcente	218
	• verifica a flessione retta e taglio	219
	• modulo di resistenza e momento limite elastico	221
	• verifica a flessione deviata	224
	• verifica a stato tensione biasciare	226
13	PROBLEMA ELASTICO PER TRAVI RETTILINEE	227
	• teoria e tecnica della trave - problema elastico lineare	227
	• equazioni cinematiche	230
	• dualità statico cinematica	233
	• equazioni di Lamè per la trave rettilinea	233
14	EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA	235
	• spostamenti dovuti a carichi assiali	235

FARACI ALESSIO ~ INGEGNERIA CIVILE ~ POLITECNICO DI TORINO

◇ SISTEMA DI 3 PUNTI MATERIALI

Immaginiamo avere 3 punti materiali 1, 2, 3 vincolati tramite bielle come in figura.

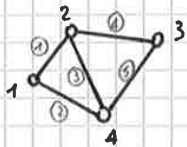


Finché non vincoliamo il punto 3 col punto 2, esiste ancora una possibilità di moto, quindi abbiamo 6 g.d.l. (2 per ogni punto).

Se uniamo il punto 2 col 3 tramite una biella di lunghezza l_{23} , adesso nel sistema abbiamo introdotto 3 vincoli e passeremo da 6 g.d.l. a 3 g.d.l.. Il sistema costituito rappresenta un corpo rigido, quindi le distanze mutue tra i 3 punti non possono variare e quindi globalmente il corpo potrà subire traslazioni lungo il piano e rotazioni lungo l'asse z (considerando come piano x, y e z l'asse ortogonale ad esso).

Quindi la posizione del corpo risulta nota se assegnamo 3 valori (ad esempio le coordinate di un punto e l'angolo di rotazione)

◇ SISTEMA A 4 PUNTI MATERIALI



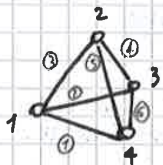
(lungo un piano)

In questo caso stiamo aggiungendo un altro punto, quindi altri 2 g.d.l., ma anche 2 bielle in più quindi avremo:

- 8 g.d.l. (2 per ogni punto)
 - 5 v. (vincoli \rightarrow 5 bielle)
- \Rightarrow g.d.l. - v. = 8 - 5 = 3

\Rightarrow quindi si hanno 3 g.d.l. residui, ovvero il sistema costituito da questi 4 punti materiali continua ad essere un corpo rigido e dunque le distanze mutue tra questi 4 punti non cambiano

Mentre nello spazio avremo



- 12 g.d.l. (3 per ogni punto)
 - v. = 6. (6 bielle)
- \Rightarrow 12 - 6 = 6

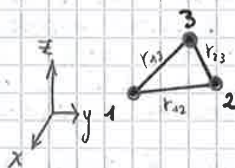
Quindi nello spazio un corpo rigido ha 6 g.d.l. residui che corrispondono a 3 traslazioni lungo i 3 assi coordinati e le 3 rotazioni intorno ai 3 assi.

Mentre nel piano un corpo rigido ha 3 g.d.l., e traslazioni lungo i 2 assi coordinati e la rotazione del corpo stesso

Quindi si definisce vincolo di rigidità così: dati 2 punti materiali P_i, P_j , il vincolo di rigidità impone che le distanze tra i punti non varino \Rightarrow dist $(P_i, P_j) = \text{cost.}$

Si ha infatti nel caso di un sistema di 3 punti materiali

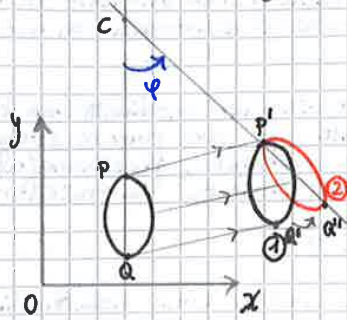
$$\begin{cases} \text{dist}(1, 2) = r_{12} \\ \text{dist}(2, 3) = r_{23} \\ \text{dist}(1, 3) = r_{13} \end{cases}$$



con r_{ij} = lunghezza cost

3 equazioni di vincolo \Rightarrow ogni punto ha nello spazio 3 g.d.l. per 3 punti \Rightarrow 9 g.d.l. meno le 3 equazioni di vincolo \Rightarrow 9 - 3 = 6 g.d.l.

Il generico atto di rotazione rispetto ad un punto C, può essere visto come somma di una rotazione rigida che fa traslare semplicemente il corpo, più una rotazione intorno ad un punto di un angolo φ .

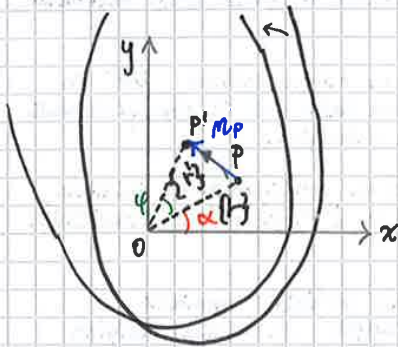


ATTO DI PURA TRASLAZIONE + 1 ROTAZIONE RIGIDA

Nel caso di traslazione rigida siamo in presenza di uno spostamento uniforme di tutti i punti, e avremo:

$$\begin{aligned} \{P' - P\} &= \{m_p\} \\ \{Q' - Q\} &= \{m_q\} \\ \{m_p\} &= \{m_q\} \leftarrow \text{uniformità del campo degli spostamenti} \end{aligned}$$

Nel caso di rotazione rigida piana avremo



$$\{r\} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \cos \alpha \\ r_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{con } r_0 = \text{modulo vettore posizione } \{r\}$$

Facendo ruotare il corpo rispetto ad O di un angolo φ

$$\{r'\} = \begin{pmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \cos(\alpha + \varphi) \\ r_0 \sin(\alpha + \varphi) \end{pmatrix} =$$

sviluppando si ottiene

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi (r_0 \cos \alpha) & -\sin \varphi (r_0 \sin \alpha) \\ \sin \varphi (r_0 \cos \alpha) & \cos \varphi (r_0 \sin \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

VETTORE POSIZIONE
↓
MATRICE DI ROTAZIONE

È così possibile introdurre il TENSORE DI ROTAZIONE $[N]^T$:

$$[N]^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$[N]$ si usa se ruota il sistema di riferimento e non il corpo

$[N]^T$ si usa se ruota il corpo e non il S.R.

aventi le seguenti proprietà:

(1) $[N]^T [N] = [I]$

(2) $\det [N]^T = 1$

Quindi $\{r'\} = [N]^T \{r\}$

Passando ora al vettore spostamento:

$$\begin{aligned} \{m_p\} &= \{r'\} - \{r\} = [N]^T \{r\} - \{r\} = ([N]^T - [I]) \{r\} = \\ \text{in componenti} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi - 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mettendo $\{r\}$ in evidenza

La matrice $[\varphi]$ costituisce il termine lineare dello sviluppo in serie di $([N]^T - [I])$

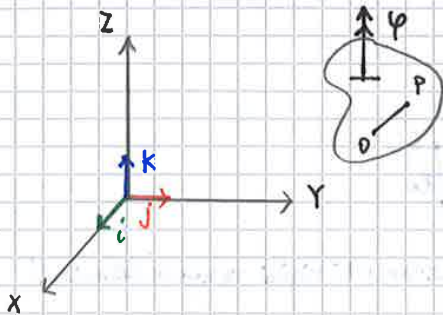
OSSERVAZIONE: Nell'ipotesi di piccoli spostamenti, il campo di spostamento non soddisfa la condizione di rigidità.

Cio' significa che, se questa è la configurazione iniziale (in nero)



e prendiamo un possibile cinematismo (in verde) affinché questo cinematismo sia possibile le bielle 1 e 2 devono allungarsi. Questo porta a dire che gli spostamenti non sono veri e propri spostamenti ma atti di moto rigido cioè la tendenza che ha il corpo a subire uno spostamento (infatti la lunghezza delle bielle non può cambiare)

◇ ATTO DI MOTO DI ROTOTRASLAZIONE NELLO SPAZIO



matrice di rotazione deriva da $\{d\varphi\} \wedge \{P-O\}$

$$\{d\eta_P\} - \{d\eta_0\} = [\varphi] \{P-O\}$$

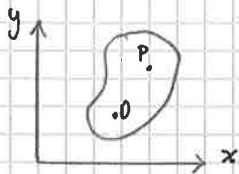
in componenti

$$\begin{vmatrix} u_P - u_0 \\ v_P - v_0 \\ w_P - w_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\phi_z & -\phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_P - x_0 \\ y_P - y_0 \\ z_P - z_0 \end{vmatrix}$$

$(x_P - x_0)(y_P - y_0)(z_P - z_0)$

$\phi_x, \phi_y, \phi_z = 3$ angoli di rotazione rispetto ai 3 assi coordinati (x, y, z)

◇ ATTO DI MOTO DI ROTOTRASLAZIONE NEL PIANO



Con asse di rotazione uscente dal quaderno

$$\begin{cases} d\eta_P \\ d\eta_0 \\ d\varphi \end{cases} = \begin{cases} u_P \\ v_P \\ w_P \end{cases} = \begin{cases} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \varphi_z \end{cases}$$

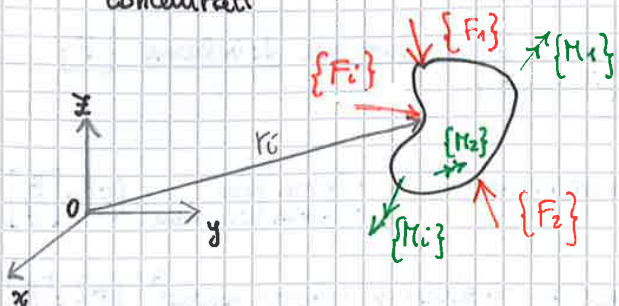
$$\begin{Bmatrix} u_P \\ v_P \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\varphi_z & 0 \\ \varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} x_P - x_0 \\ y_P - y_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$u_P = u_0 - \varphi_z (y_P - y_0)$$

$$v_P = v_0 + \varphi_z (x_P - x_0)$$

◆ EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

Consideriamo il nostro C.R., considerando direttamente forze concentrate e momenti concentrati



$\{r_i\}$ = generico vettore posizione del punto di applicazione della generica forza $\{F_i\}$ applicata al C.R. rispetto all'origine del S.R.

Condizione necessaria e sufficiente affinché il corpo sia in equilibrio è che il sistema delle azioni applicate soddisfi le equazioni cardinali della statica:

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA	1)	$\{R\} = \{0\}$	→	RISULTANTE NULLA	}	equazioni vettoriali
	2)	$\{M(O)\} = \{0\}$	→	MOMENTO RISULTANTE NULLA		

OSSERVAZIONE: Stiamo facendo un'analisi globale del sistema di forze. Le forze attive (che sono quelle effettivamente applicate alla struttura) sono annullate dalle forze reattive esplicitate dai vincoli. Quindi il sistema di forze attive, caratterizzato da un certo risultante e un certo momento risultante dovrà essere uguale e opposto al risultante e al momento risultante delle forze reattive, cosicché globalmente il sistema abbia risultante nulla e momento risultante nulla.

$$1) \quad \{R\} = \{0\} \Rightarrow \begin{vmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

↑ componenti lungo gli assi delle n forze

$$2) \quad \{M(O)\} = \{0\} \Rightarrow \sum_{i=1}^m \{M_i(O)\} + \sum_{i=1}^n (\{r_i\} \wedge \{F_i\}) = \{0\}$$

↑ momento globale rispetto un polo o arbitrario ↑ m momenti concentrati ↑ braccio n forze applicate

OSSERVAZIONE: L'arbitrarietà del polo è permessa dalla condizione di annullamento del risultante → $\{R\} = \{0\}$

Infatti il momento risultante rispetto ad un diverso polo O' è legato al precedente da questa relazione:

$$\{M(O')\} = \{M(O)\} + \{O - O'\} \wedge \{R\}$$

← poiché nulla

$$\Rightarrow \{M(O')\} = \{M(O)\}$$

OPERAZIONI SULLE FORZE

Si definisce forza una qualunque causa atta a produrre una variazione dello stato di quiete o di moto di un corpo oppure a deformarlo. La forza è un particolare vettore libero o applicato, cioè un ente caratterizzato da:

- intensità o modulo
- direzione
- verso
- punto di applicazione (per i vettori applicati)

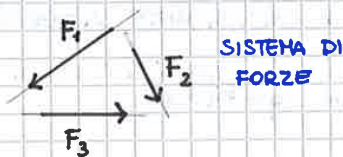
La forza è un vettore retta o vettore assiale poiché il segmento orientato che la rappresenta appartiene ad una retta ben definita detta: retta d'azione



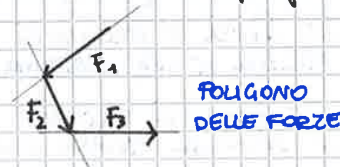
Più forze costituiscono un sistema di forze Σ , il quale può essere piano se le rette di azione delle forze appartengono tutte ad 1 piano.

Per caratterizzare l'effetto meccanico di 1 forza è necessario conoscere la natura del corpo su cui essa agisce, quindi è fondamentale la distinzione tra CORPI RIGIDI e CORPI DEFORMABILI. Un corpo è rigido quando considerati 2 suoi punti qualunque, la loro distanza rimane costante prima e dopo l'intervento delle forze; deformabile quando la distanza tra i punti varia al variare delle forze. Le forze agenti su corpi o sistemi pensati rigidi si possono spostare comunque lungo la retta d'azione, invece le forze agenti su corpi elastici (deformabili) producono effetti differenti se si cambia il punto di applicazione lungo la retta d'azione.

Un sistema di forze agenti in un piano si rappresenta tracciando le rette d'azione e disponendo i segmenti che le misurano secondo una poligonale che si chiama POLIGONO DELLE FORZE



SISTEMA DI FORZE



POLIGONO DELLE FORZE

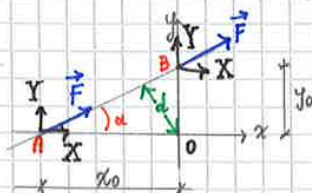
Un sistema di forze in un piano ammette sempre una risultante. Essa si può definire come quella forza che agendo sullo stesso corpo rigido produce gli stessi effetti che producono le forze date. Si noti che se le forze invece agiscono su di un corpo elastico, la risultante non produce in generale gli stessi effetti delle componenti.

Se si aggiunge ad un sistema di forze la forza uguale e contraria alla risultante, si ottiene un sistema equilibrato.

TEOREMA N
Condizione necessaria (ma in generale non sufficiente) affinché un sistema costituito da 3 sole forze sia equivalente a zero è che la retta di azione di tali forze siano complanari e concorrenti in uno stesso punto proprio o improprio. (in quanto delle 3 forze concorrenti due possono sempre combinarsi secondo una risultante contraria alla 3^a, originando 2 forze uguali e contrarie)

OSSERVAZIONE: Nel caso che non si voglia effettuare la riduzione a 2 o 3 forze allo scopo di controllare che un sistema piano di forze sia in equilibrio, basta verificare che il loro poligono sia chiuso e che dette forze, rispetto ad un qualsiasi punto interno al poligono abbiano lo stesso verso di rotazione, cioè, come si suol dire, si inseguano.

ANALITICAMENTE: Una forza può essere rappresentata mediante i suoi parametri, che nel caso di una forza piana sono le componenti X e Y secondo 2 assi ortogonali x e y e il suo momento M rispetto l'origine O degli assi.



$$\begin{cases} x_0 = -\frac{M}{Y} \\ y_0 = \frac{M}{X} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{distanze da O} \\ \text{origine di (x,y)} \\ \text{dei suoi punti d'intersezione} \\ \text{A e B con gli assi} \end{array}$$

$$|F| = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

modulo della forza

$$\text{tg } \alpha = \frac{Y}{X}$$

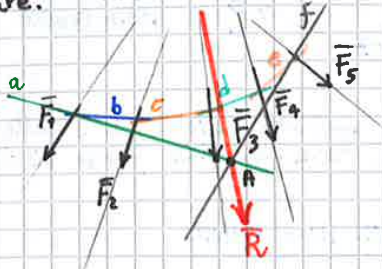
angolo

$$d = \frac{M}{|F|}$$

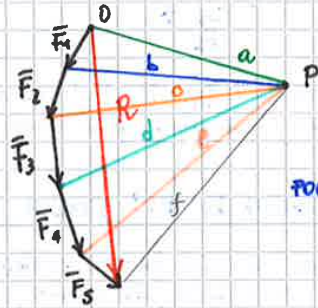
distanza da O

4 COMPOSIZIONE DI PIU' FORZE COMPLANARI QUALSIASI (POLIGONO FUNICOLARE)

Assunto un polo P che non sia sui lati del poligono delle forze, nè sul lato di chiusura, si proiettano da P i vertici delle forze (o del poligono). Quindi si costruisce un poligono detto **POLIGONO FUNICOLARE** avente i lati paralleli alle dette proiettanti sulle rette d'azione delle forze. Il lato di chiusura (R) del poligono delle forze dà la direzione, il senso, la grandezza della risultante mentre la retta d'azione passa per il punto A di incontro del primo e dell'ultimo lato del poligono funicolare.



POLIGONO FUNICOLARE



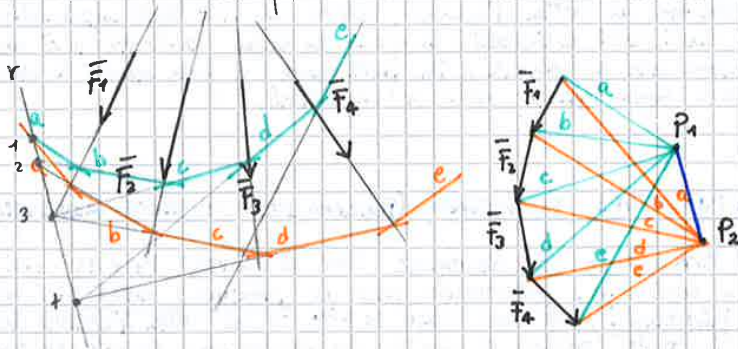
POLIGONO DELLE FORZE

4 TEOREMA DI CULMANN

Il poligono funicolare che collega un dato sistema di forze si può modificare:

- 1) variando l'ordine delle forze
- 2) spostando il primo lato
- 3) variando il polo

Se si varia il polo vale il teorema di Culmann: "I lati corrispondenti di 2 poligoni funicolari costruiti con i poli P1 e P2 si incontrano in punti situati sopra una retta // alla congiungente P1P2"

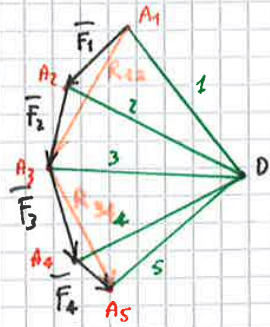
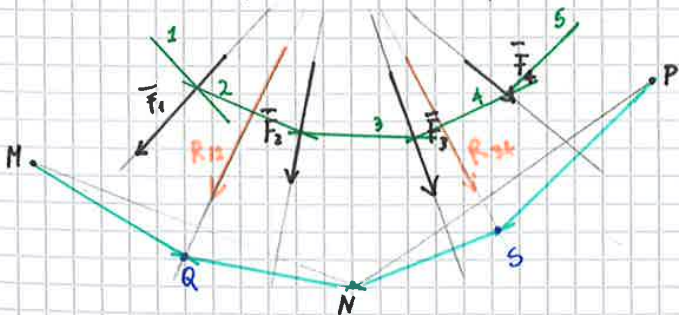


$r // P_1P_2$

4 POLIGONO FUNICOLARE PER 3 PUNTI

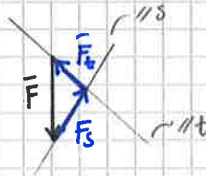
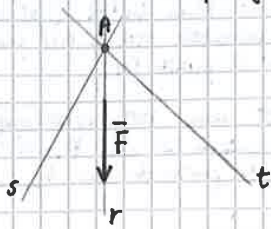
Il caso più interessante per le applicazioni (archi a 3 cerniere) è quello del tracciamento del poligono funicolare collegante un dato sistema di forze e avente 3 lati determinati passanti per 3 punti assegnati. Il poligono che si ottiene è unico.

Sia dato il sistema di 4 forze F_1, F_2, F_3, F_4 . Il 1° lato del poligono deve passare per M, il 3° per N e il 5° per P. Si traccia il poligono funicolare ausiliario 1-2-3-4-5 considerando un polo O' qualsiasi.

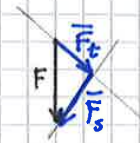


4 LA DECOMPOSIZIONE DI UNA FORZA IN DUE DI ASSEGNATE RETTE D'AZIONE

La soluzione del problema è possibile solo se il punto A comune alle 2 rette (proprio o improprio) appartiene anche alla retta di azione della forza. Si procede con la costruzione del poligono delle forze partendo dalla forza F nota e tracciando le parallele alle rette.

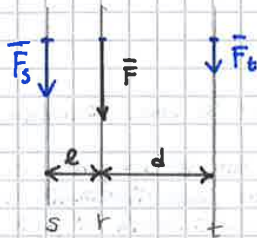


EQUILIBRIO

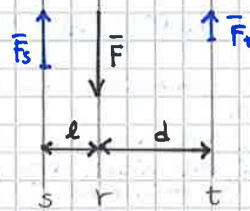


EQUIVALENZA

Se il punto A è improprio ed appartiene alla retta r, cioè se le rette t ed s sono parallele alla retta di azione r della forza F si ha:



EQUIVALENZA

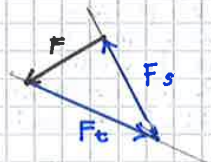
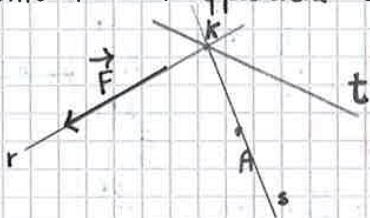


EQUILIBRIO

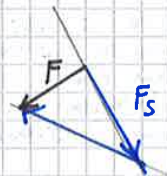
$$\begin{cases} F_s + F_t = F \\ F_s \cdot l = F_t \cdot d \end{cases}$$

4 LA DECOMPOSIZIONE DI UNA FORZA IN DUE DI CUI UNA AGENTE SECONDO UNA RETTA t E L'ALTRA PASSANTE PER UN PUNTO A

Se il punto A non appartiene a t, la soluzione esiste ed è unica. Indicato con K l'intersezione della retta d'azione di F con t e detta s la congiungente AK, si ci riconduce al poligono delle forze



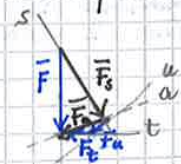
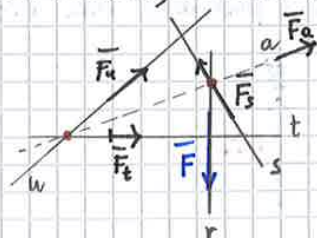
EQUILIBRIO



EQUIVALENZA

4 DECOMPOSIZIONE DI UNA FORZA IN 3

Siano r, s, t, u le rette d'azione rispettivamente della forza F e delle 3 componenti incognite F_s, F_t, F_u. Se le 4 rette concorrono tutte in uno stesso punto, il problema è indeterminato. Se le 3 rette s, t, u concorrono in un punto e r, il problema è impossibile. Se invece la forza F passa per il punto comune a 2 rette di azione (esempio ad s, t) la restante forza F_u deve essere nulla affinché il problema esista. Infine se le 4 rette si incontrano a 2 a 2 in punti distinti, la soluzione è 1. La decomposizione può essere effettuata con il metodo di Culmann. Si può decomporre F secondo la retta s e la retta AD (dotta RETTA AUSILIARIA) ottenendo il sistema equivalente {F_s, F_a}. Decomponendo poi F_a secondo le rette u e t, si determina {F_u, F_t}. Il poligono delle forze F_s, F_u, F_t rappresenta il sistema equivalente alla forza F; il sistema equilibrante invece è costituito dalle stesse forze ma con versi opposti.



◇ DEFINIZIONE CINEMATICA E STATICA DEI VINCOLI ESTERNI

I vincoli esterni legano la trave al sistema di riferimento fisso. Essi impongono particolari condizioni ai movimenti elementari dei punti vincolati. Essi, inoltre, una volta applicati, definiscono i centri di rotazione assoluta.

CENTRI DI ROTAZIONE ASSOLUTA = sono dei punti rispetto al quale il nostro corpo si muove di moto puramente rotatorio.

I vincoli si suppongono **LISI**, ovvero privi di attrito e del tutto incapaci di esercitare delle reazioni nella direzione degli spostamenti consentiti.

Inoltre i vincoli si suppongono **BILATERALI**, ovvero possono esercitare la loro azione in uno dei due versi possibili lungo la corrispondente direzione efficace; cioè consentono solo spostamenti virtuali (infinitesimi e compatibili con i vincoli) irretroabili, nel senso che ogni componente di movimento è impedita lo è in entrambi i sensi.

Dal punto di vista cinematico i vincoli esterni vengono classificati in base al n° di g.d.l. che ciascuno sopprime al sistema a cui è applicato. Pertanto nel piano si possono avere solo 3 specie di vincolo: semplice, doppio, triplo a seconda che impedisca 1, 2, o 3 movimenti di cui il sistema è capace. ←

• VINCOLI SEMPLICI :

↓
definiscono la retta su cui si trova il centro di rotazione assoluta.

Eliminano soltanto 1 g.d.l. al punto a cui sono applicati e quindi esprimono solo 1 equazione di vincolo. $v = 1$
Ad ogni movimento impedito, nascerà una forza esercitata dal vincolo.

• VINCOLI DOPPI :

↓
definiscono univocamente il centro di rotazione assoluta.

Eliminano 2 g.d.l. al punto a cui sono applicati introducendo 2 equazioni di vincolo. $v = 2$
Nascerà 2 forze esercitate dal vincolo.

• VINCOLI TRIPLI :

↓
non permettono spostamenti, per cui il centro di rotazione assoluta.

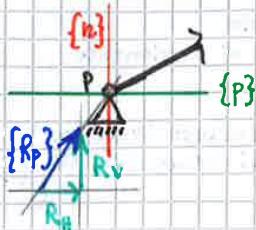
Eliminano 3 g.d.l. al punto a cui sono applicati imponendo 3 equazioni di vincolo. $v = 3$
Nascerà 1 forza esercitata dal vincolo.

2 traslazioni
 U_p e V_p
1 rotazione elementare
 φ_p

⚡ VINCOLI ESTERNI DOPPI

Sono vincoli che eliminano 2 g.d.l. In questo caso pure potranno essere di 2 tipi: o vincoli che eliminano le 2 traslazioni; o vincoli che eliminano 1 traslazione e 1 rotazione. Quindi sono imposte 2 equazioni di vincolo.

① CERNIERA



Vincolo che elimina le 2 traslazioni, quindi P non può (traslare) muoversi, ma può ruotare

DEFINIZIONE CINEMATICA

$$\begin{cases} \{d\eta_p\}^T \{n\} = 0 \\ \{d\eta_p\}^T \{p\} = 0 \end{cases} \leftarrow \text{2 EQUAZIONI DI VINCOLO}$$

$$\varphi \neq 0$$

DEFINIZIONE STATICA

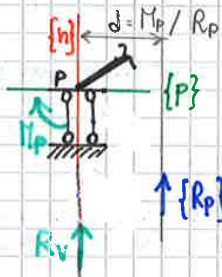
$$\begin{cases} \{R_p\}^T \{n\} \neq 0 \\ \{R_p\}^T \{p\} \neq 0 \\ M_p = 0 \end{cases}$$

Poiché il M_p momento è nullo, la reazione R_p deve passare per il vincolo

Il centro di rotazione assoluta, essendo un vincolo doppio, coincide con P

OSSERVAZIONE: aumentando il grado di vincolo, aumentano le informazioni da un punto di vista cinematico, ma di contro aumenta la difficoltà nel determinare questa reazione R_p perché necessitano 2 parametri per la sua determinazione \rightarrow 2 componenti (R_H, R_V)

② DOPPIO PENDOLO O BIPENDOLO



Vincolo che elimina 1 traslazione sia una rotazione. Quindi P non può né traslare lungo $\{n\}$ né ruotare. L'otto di moto rigido è una traslazione in direzione $\{p\}$

DEFINIZIONE CINEMATICA

$$\begin{cases} \{d\eta_p\}^T \{n\} = 0 \\ \{d\eta_p\}^T \{p\} \neq 0 \end{cases} \leftarrow \text{2 EQUAZIONI DI VINCOLO}$$

$$\varphi = 0$$

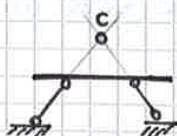
DEFINIZIONE STATICA

$$\begin{cases} \{R_p\}^T \{n\} \neq 0 \\ \{R_p\}^T \{p\} = 0 \\ M_p \neq 0 \end{cases}$$

La reazione R_p avrà direzione $\{n\}$, ma poiché $M_p \neq 0$ non passa per il vincolo, ma si trova ad una distanza d da esso. Oppure la stessa R_p potrà essere rappresentata dal momento M_p e dalla reazione verticale R_v (componente di R_p) passante per $\{n\}$.

Il centro di rotazione assoluta, essendo un vincolo doppio, coincide col punto all'oo in direzione $\{n\}$ (perché è permessa solo una traslazione = rotazione con centro all'oo)

③ 2 BIELLE NON PARALLELE



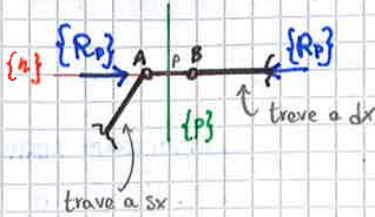
Vincolo doppio immaginato come somma di 2 vincoli semplici. Costituiscono una cerniera ideale in C, punto di intersezione degli assi delle 2 bielle.

C è il centro di istantanea rotazione

(Se le 2 bielle sono parallele si ricade nel caso del doppio pendolo e il centro di istantanea rotazione ricade all'oo)

⇨ VINCOLI SEMPLICI INTERNI

① PENDOLO O BIELLA INTERNA



Impedisce la discontinuità di spostamento in direzione del suo asse ($\{n\}$ asse pendolino, tra A e B lungo l'asse non vi sono movimenti)

Rispetto ai vincoli esterni dobbiamo adesso considerare gli spostamenti relativi tra le 2 travi, quindi la differenza tra lo spostamento di A e di B.

DEFINIZIONE CINEMATICA

$$\begin{cases} d\eta_A - d\eta_B \\ d\eta_A - d\eta_B \end{cases}^T \{h\} = 0 \rightarrow \text{1 equazione di vincolo}$$

$$\begin{cases} d\eta_A - d\eta_B \\ d\eta_A - d\eta_B \end{cases}^T \{p\} \neq 0$$

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B \neq 0$$

DEFINIZIONE STATICA

$$\{R_p\}^T \{h\} \neq 0$$

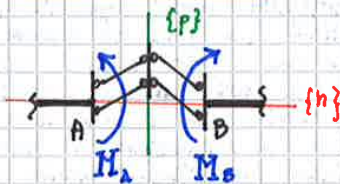
$$\{R_p\}^T \{p\} = 0$$

$$M_A = M_B = 0$$

La reazione $\{R_p\}$ pone per il vincolo stesso e ha direzione $\{h\}$.
Essendo vincoli interni i 2 tratti reagiranno con 2 forze uguali e opposte
Il centro di rotazione relativa dovrà appartenere alla retta $\{n\}$ (asse pendolo)

Svincolamento doppio $S = (3 - g) = 3 - 1 = 2$
↑ gradi di libertà soppressi

② DOPPIO BIPENDOLO



Impedisce la rotazione relativa delle sezioni di trave a cui esso è applicato

DEFINIZIONE CINEMATICA

$$\begin{cases} d\eta_A - d\eta_B \\ d\eta_A - d\eta_B \end{cases}^T \{h\} \neq 0$$

$$\begin{cases} d\eta_A - d\eta_B \\ d\eta_A - d\eta_B \end{cases}^T \{p\} \neq 0$$

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B = 0 \rightarrow \text{1 EQUAZIONE DI VINCOLO}$$

DEFINIZIONE STATICA

$$\{R_p\}^T \{h\} = 0$$

$$\{R_p\}^T \{p\} = 0$$

$$M_A = M_B \neq 0$$

Questo vincolo reagisce con 1 coppia non permettendo la rotazione

Il centro di rotazione relativa è un punto qualunque della retta impropria

Svincolamento doppio $S = 3 - 1 = 2$

↳ INCASTRO INTERNO DI PIÙ ASTE



Confluenza su uno stesso nodo di 4 aste.

Quindi generalizzando, consideriamo n travi. Immaginandolo una trave fissa, questo sistema può essere visto come $(n-1)$ connessioni mutue.

In questo caso $n = 4 \Rightarrow g.d.l. = 4 \cdot 3 = 12$
 $\Rightarrow V = (4-1) \cdot 3 = 9 \Rightarrow g.d.l.r. = 12 - 9 = 3$
(residui) 3 perché sono in castri interni

gradi di libertà soppressi

↳ $3(n-1) = V$

g.d.l. soppressi $\rightarrow 3(n-1) = 9$

↳ NODO CON UNA CERNIERA INTERNA



$(n-1)$ connessioni mutue

$n = 4 =$ aste collegate

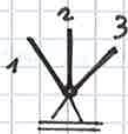
$12 - 6 = 6 \leftarrow \begin{cases} g.d.l. = 4 \cdot 3 = 12 & (n \cdot 3) \\ V = (4-1) \cdot 2 = 6 \end{cases}$

gradi di libertà residui

↑ perché cerniera è un vincolo doppio

gradi di libertà soppressi $\rightarrow 2(n-1) = V$

↳ CARRELO A CUI AFFLUISCONO PIÙ ELEMENTI / CERNIERA



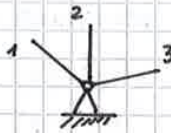
$n = 3$ aste

g.d.l. originari $\rightarrow 3 \cdot n = 9$

$V = 2(n-1) = 4$

g.d.l. eliminato dal carrellino $\rightarrow 1$

$\Rightarrow g.d.l. \text{ residui} = 9 - \underbrace{4 - 1}_{g.d.l. \text{ soppressi} = 5} = 4$



$n = 3$

g.d.l. originari $\rightarrow 3 \cdot n = 9$

$V = 2(n-1) = 4$

g.d.l. eliminati dalla cerniera 2

$\rightarrow g.d.l. \text{ residui} = 9 - \underbrace{4 - 2}_{g.d.l. \text{ soppressi} = 6} = 3$

⚡ SCHEMA RIASSUNTIVO SUI VINCOLI INTERNI ED ESTERNI

	VINCOLO	CENTRO DI ROTAZIONE ASSOLUTO	SPOSTAMENTI CONSENTITI
SEMPlici	<p>$V=1$</p> <p>CARRELLO</p>	<p>È un punto e alla retta $\{n\}$</p> <p>$C \in \{n\}$</p>	
	<p>DOPPIO BIPENDOLO</p>	<p>È un punto e alla retta impropria</p> <p>(si trova all'infinito ma non sappiamo la retta in cui si trova)</p>	
DOPPI	<p>$V=2$</p> <p>CERNIERA</p>	<p>Coincide con il vincolo stesso</p>	
	<p>DOPPIO PENDOLO</p>	<p>Coincide col punto all'infinito ponendo per $\{n\}$</p> <p>(retta parallela agli assi dei pendolini)</p>	
	<p>2 BIELLE NON //</p>	<p>Punto di intersezione degli assi delle 2 bielle</p>	
TRIPLI	<p>$V=3$</p> <p>INCASTRO</p>	<p>∄ centro di assoluta rotazione</p>	<p>Nessuno</p>

LEGENDA:

- in blu le reazioni vincolari
- in azzurro le componenti di una unica reazione quella in blu.

IL NUMERO DI VINCOLI IN UN CORPO

Un corpo libero nello spazio ha 6 libertà di movimento: 3 traslazioni secondo 3 assi ortogonali, e 3 rotazioni intorno agli assi stessi.

Se invece il corpo è mobile soltanto parallelamente a un dato piano, ha 3 libertà di movimento: 2 traslazioni secondo gli assi ortogonali contenuti nel piano, e 1 rotazione intorno ad 1 asse normale al piano.

Per impedire ogni movimento rigido del corpo occorrono almeno tanti vincoli quante sono le sue libertà di movimento: quindi almeno 6 per un C.R. nello spazio, e almeno 3 per un C.R. nel piano.

Quando i vincoli sono in numero strettamente sufficiente per impedire ogni movimento, si dice che il sistema è **ISOSTATICO**.

Quando esistono dei vincoli sovrabbondanti (cioè che si possono togliere senza che si renda possibile alcun movimento) il sistema si dice **IPERSTATICO**.

Quando i vincoli sono insufficienti resterebbe possibile qualche movimento e il sistema si dice **LABILE**.

OSSERVAZIONE: per impedire ogni movimento del sistema, non sempre basta che i vincoli siano in numero sufficiente. Occorre anche accettarsi che siano **efficaci**, cioè che non presentino singolarità atte a consentire piccoli movimenti (**maldisposizione dei vincoli**).

ERUIBRO TRA CARICHI E REAZIONI DEI VINCOLI

Per calcolare le reazioni dei vincoli si utilizza la loro proprietà di mantenere la struttura in equilibrio quando si pensino sostituite ai vincoli, cioè di fare equilibrio ai carichi esterni agenti sulla struttura.

Tuttavia questa proprietà in certi casi è sufficiente per rendere determinato il problema, mentre in altri casi non basta, quindi occorre stabilire dei criteri per decidere anzitutto a quale dei 2 casi appartiene la trave che si studia.

L'equilibrio tra i carichi noti agenti sulla struttura e le reazioni incognite vincolari si traduce in un certo numero di equazioni che legano queste quantità.

Se il numero dei parametri incogniti che caratterizzano le reazioni è uguale al numero delle equazioni di equilibrio, il problema è **possibile e determinato** (cioè esiste un completo di reazioni che fanno equilibrio, ed è unico).

Se è maggiore, il problema è **indeterminato**.

Se è minore, il problema è **generalmente impossibile**.

numero parametri incogniti che caratterizzano le reazioni

=

numero equazioni di equilibrio

↓

PROBLEMA DETERMINATO

⇓

STRUTTURA STATICAMENTE DETERMINATA

numero parametri incogniti che caratterizzano le reazioni

>

numero equazioni di equilibrio

↓

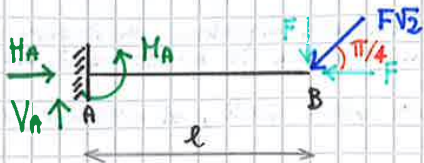
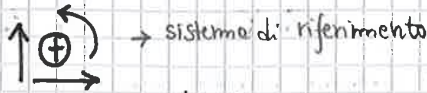
PROBLEMA INDETERMINATO

⇓

STRUTTURA STATICAMENTE INDETERMINATA

◇ CALCOLO REAZIONI VINCOLARI PER SCHEMI ELEMENTARI

① MENSOLA

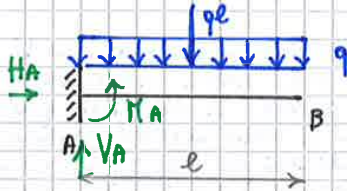
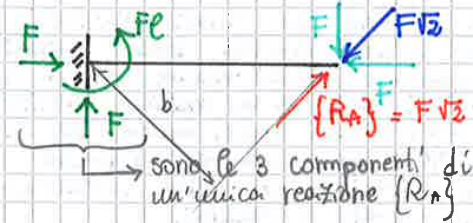


La trave essendo un C.R. ha 3 g.d.l.
L'incastro elimina 3 g.d.l.

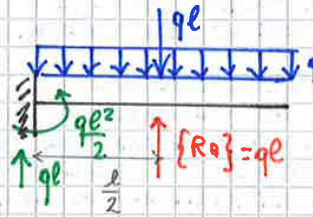
⇒ $g - v = 3 - 3 = 0$ ⇒ STRUTTURA ISOSTATICA

- scompongo la forza $F\sqrt{2}$ lungo le direzioni orizzontale e verticale
- ipotizzo un verso per le reazioni vincolari
- uso le equazioni cardinali della statica per ricavarne i valori

$(\uparrow) \quad V_A - F = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = F$
 $(\rightarrow) \quad H_A - F = 0 \quad \rightarrow \quad H_A = F$
 polo \rightarrow $(\curvearrowright) \quad M_A - Fl = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = Fl$



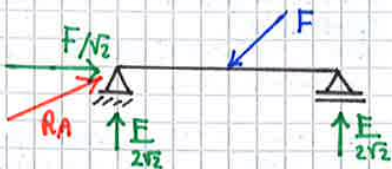
$(\uparrow) \quad V_A - ql = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = ql$
 $(\rightarrow) \quad H_A = 0$
 polo \rightarrow $(\curvearrowright) \quad M_A - \frac{ql^2}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = \frac{ql^2}{2}$



② TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA



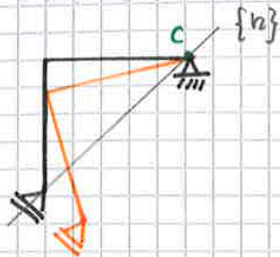
$(\uparrow) \quad V_A - F/\sqrt{2} + V_B = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = \frac{F}{\sqrt{2}} - \frac{F}{2\sqrt{2}} = \frac{F}{2\sqrt{2}}$
 $(\rightarrow) \quad H_A - F/\sqrt{2} = 0 \quad \rightarrow \quad H_A = \frac{F}{\sqrt{2}}$
 polo \rightarrow $(\curvearrowright) \quad -\frac{F}{\sqrt{2}} \frac{l}{2} + V_B l = 0 \quad \rightarrow \quad V_B = \frac{F}{2\sqrt{2}}$



$\det [C] = -(l \sin \alpha - h \cos \alpha)$ in generale $\neq 0$ eccetto quando:

$$\alpha = \arctg \left(\frac{h}{l} \right) \Rightarrow \det [C] = 0$$

ovvero la normale $\{n\}$ è tale per cui passa proprio per la cerniera B, la struttura è labile e si ha un cinematismo.



C = centro di rotazione assoluto
possibile cinematismo

▶ TRAVE APPOGGIATA APPOGGIATA

ANALISI CINEMATICA



EQVAZIONI DI VINCOLO

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \{d_{m_B}\}^T \{h\} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \{d_{m_B}\}^T \{h\} = 0 \\ \{d_{m_B}\}^T = \begin{bmatrix} u_B & v_B \end{bmatrix} \\ \{h\} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} \end{cases}$$

⇒ particularizzando tutto rispetto al polo 0

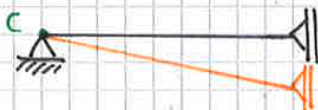
$$\begin{cases} u_B = u_0 - \varphi_0 (y_B - y_0) = u_0 \\ v_B = v_0 + \varphi_0 (x_B - x_0) = v_0 + \varphi_0 l \end{cases}$$

→ equazioni di rototraslazione

$$\Rightarrow \begin{cases} u_B = u_0 = 0 \\ v_B = v_0 = 0 \\ u_0 \cos \alpha - (v_0 + l \varphi_0) \sin \alpha = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & -l \sin \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \varphi_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\det [C] = -l \sin \alpha \rightarrow \det [C] = 0 \text{ se } \alpha = 0$$

la struttura diventa labile avendo una maldisposizione dei vincoli



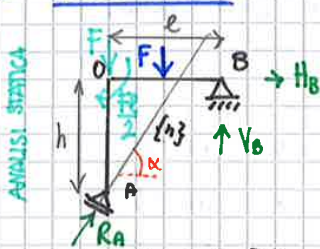
C = centro di assoluta rotazione
possibile cinematismo

TEOREMA DI ROUCHE-CAPELLI: C.N.S. affinché un sistema di m equazioni lineari con n incognite ammetta soluzione è che la matrice dei coefficienti $[A]$ e la matrice orlata abbiano la stessa caratteristica.

Nel caso della mensola la matrice dei coefficienti $[A]$ ha rango (caratteristica) = 3, la matrice orlata ha rango 3, essendo uguali: esiste una soluzione. Infatti il $\det[A] \neq 0$ ed avendo rango uguale per il Teo di Rouché-Capelli il sistema ammette una sola soluzione ovvero un insieme ordinato di 3 valori (quelli delle reazioni ricavate in precedenza). In questo caso il sistema meccanico si dice **STATICAMENTE DETERMINATO** o **ISOSTATICO**.

In caso il $\det[A]$ si annullasse e quindi i 2 ranghi sarebbero diversi, il sistema algebrico risulta impossibile e non ammette alcuna soluzione, mentre il sistema meccanico risulta **LABILE** e caricato da forze esterne che non possono essere equilibrate in alcun modo, (impossibile il calcolo delle reazioni) perché vi è una **maldisposizione dei vincoli**.

▶ **TRAVE AD L**



$$\begin{aligned} (1) & R_A \sin \alpha + V_B - F = 0 \\ (2) & R_A \cos \alpha + H_B = 0 \\ (3) & (R_A \cos \alpha)h + V_B l - Fl/2 = 0 \end{aligned}$$

matrice $[A]$

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & 0 & 1 \\ \cos \alpha & 1 & 0 \\ h \cos \alpha & 0 & l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_B \\ R_A \\ V_B \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -F \\ 0 \\ -Fl/2 \end{vmatrix}$$

→ coppia di trasporto

matrice orlata

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & 0 & 1 & -F \\ \cos \alpha & 1 & 0 & 0 \\ h \cos \alpha & 0 & l & -Fl/2 \end{vmatrix}$$

VECTORE DELLE FORZE ESTERNE RIDOTTE AL POLO

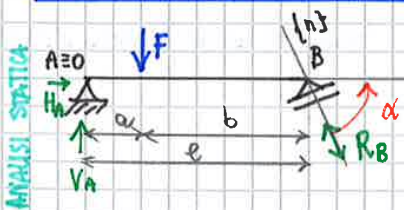
rango = 3
V α

$\det[A] = -l \sin \alpha - h \cos \alpha$

se $\det[A] = 0$ per $\alpha = \arctg(h/l) \Rightarrow$ ha rango 2 \Rightarrow diverso dal rango dell'orlata, il sistema allora non ammette soluzione.

Il sistema ha i vincoli maldisposti \Rightarrow **LABILITÀ**

▶ **TRAVE APPOGGIATA APPOGGIATA**



$$\begin{aligned} (1) & -F + V_A - R_B \sin \alpha = 0 \\ (2) & H_A + R_B \cos \alpha = 0 \\ (3) & -R_B l \sin \alpha - F a = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 1 & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & -l \sin \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_A \\ V_A \\ R_B \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 \\ -F \\ -F a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\sin \alpha & -F \\ 0 & 0 & -l \sin \alpha & -F a \end{vmatrix}$$

$\det[A] = 0$ solo se $\alpha = 0$
 \Rightarrow il rango 3 diventa 2 \Rightarrow sistema labile

rango 3

$$-\{S_0\}^T [A] \{x\} + \underbrace{\{S_0\}^T [C]^T}_{\text{trasposta del prodotto}} \{x\} = 0$$

ovvero mettendo a fattore comune:

$$\{S_0\}^T ([A] - [C]^T) \{x\} = 0$$

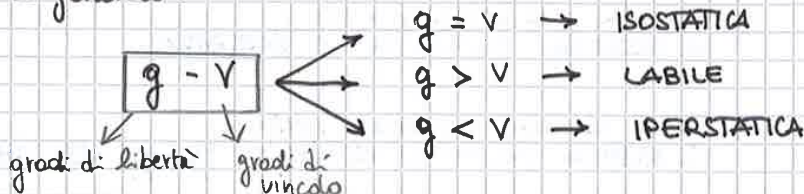
soddisfatta per qualunque $\{S_0\}$ e $\{x\}$ ci porta a dire che:

$$[A] - [C]^T = 0$$

$$\Rightarrow [A] = [C]^T$$

✦ COMPUTO DEI VINCOLI

Per determinare se la struttura è isostatica o meno si utilizza questa espressione generale:



Inoltre $g - v = \underbrace{l}_{\text{grado di libertà}} - \underbrace{i}_{\text{grado di iperstaticità}}$

OSSERVAZIONE: $g - v = 0 \rightarrow$ è una condizione necessaria per l'isostaticità di una struttura ma non sufficiente, in quanto pur essendo soddisfatta questa condizione una mala disposizione dei vincoli rende il sistema labile (es: $g - v = 3 - 3 = 0 \rightarrow$ ma labile)

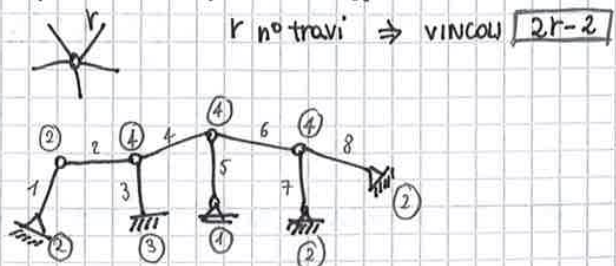
inoltre essendo $g - v = 0$ risulta anche che $l - i = 0 \Rightarrow l = i$
 (iperstatica per carichi verticali)

Quando abbiamo n travi concorrenti in un nodo, essendo che ognuna di essa presenta 3 g.d.l. si hanno in totale $3n$ g.d.l. che bisogna impedire con altrettanti vincoli. Il computo dei vincoli esterni è immediato, resta da vedere come si computano quelli interni.

Una cerniera interna collegante due travi toglie a ciascuna delle 2 2 libertà di movimento, ma essa stessa ne conserva 2, quindi sopprime 2 libertà. Generalizzando se si hanno i incastri, c cerniere, a appoggi semplici: il sistema è isostatico se:

$$3i + 2c + a = 3h$$

Se $e >$ è iperstatico
 Se $e <$ è labile



STUDIO GRAFICO DELLA CINEMATICA DEI SISTEMI LABILI (CATENE CINEMATICHE)

Lo studio grafico delle catene cinematiche si fonda su due teoremi fondamentali:

1° TEOREMA DELLE CATENE CINEMATICHE

(Valido quando abbiamo almeno 2 C.R.)

C.N.S. affinché il sistema sia una volta labile, è che, per ciascuna coppia di corpi i e j , i centri assoluti di rotazione C_i e C_j e quello relativo C_{ij} siano allineati.

$$C_i, C_j, C_{ij} \rightarrow \text{allineati} \Rightarrow \text{LABILITÀ}$$

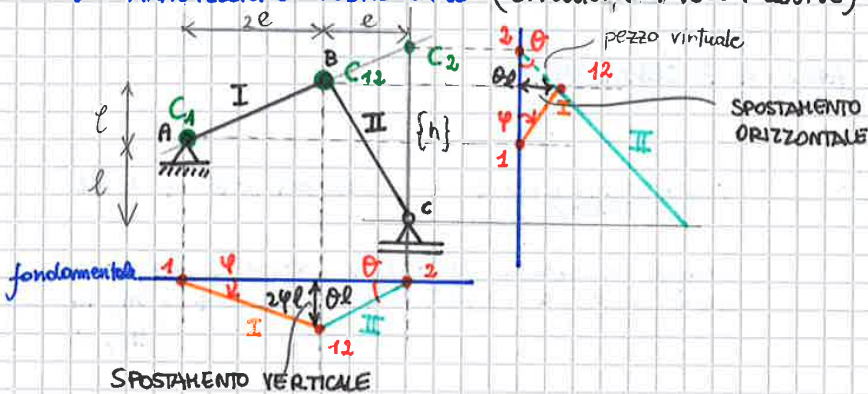
2° TEOREMA DELLE CATENE CINEMATICHE

(Valido quando abbiamo almeno 3 C.R.)

C.N.S. affinché il sistema sia una volta labile è che per ciascuna terna di corpi i, j, k , i centri relativi di rotazione C_{ij}, C_{jk}, C_{ik} risultino allineati.

$$C_{ij}, C_{jk}, C_{ik} \rightarrow \text{allineati} \Rightarrow \text{LABILITÀ}$$

MANOVELLISMO ELEMENTARE (struttura 1 volta labile)



Abbiamo 2 travi $\rightarrow g = 3 \cdot h$
 quindi $g \cdot d \cdot l = 5$
 $v = 2 + 0 + 1 + 2 = 5$
 1 labilità

- C_1 lo conosco
- C_{12} lo conosco
- Applicando il 1° TED allineo i 3 centri per trovare il cinemotismo

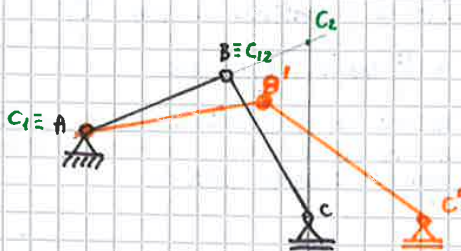
Determinati i centri è possibile adesso determinare una possibile configurazione cinematica, ovvero quali sono gli spostamenti elementari rispetto alla configurazione iniziale. Per fare ciò tracciamo 2 fondamentali: 1 per il diagramma degli spostamenti verticali, 1 per il diagramma degli spostamenti orizzontali.

Sulle fondamentali (in blu) proietto i centri trovati. In corrispondenza dei centri assoluti, poiché lo spostamento è nullo, \equiv con la fondamentale.

Dal momento che la struttura risulta 1 volta labile ci sarà un unico parametro che determina la configurazione deformata. Essendo arbitraria scegliamo che il corpo 1 ruoti rispetto C_1 di un certo angolo φ orario.

$$\theta l = \varphi 2e \rightarrow \varphi = \frac{\theta l}{2}$$

Componendo gli spostamenti verticali e orizzontali otteniamo il cinemotismo a cui è soggetta la struttura:



Cinemotismo

- B si sposta orizzontalmente di $\theta \cdot l$ e verticalmente di $\theta \cdot l$
- C si sposta solo orizzontalmente $3\theta \cdot e$

◇ CALCOLO DELLE REAZIONI ATTRAVERSO IL P.L.V. E IL PROCEDIMENTO DELLE CATENE CINEMATICHE

Il principio dei lavori virtuali rappresenta la più generale formulazione del problema dell'equilibrio. Il P.L.V. applicato ai C.R. viene utilizzato sia per la determinazione delle caratteristiche della sollecitazione sia per il calcolo delle reazioni.

Intendiamo con **SPOSTAMENTO VIRTUALE** uno spostamento infinitesimo compatibile con i vincoli.

ENUNCIATO DEL P.L.V.: "C.N.S affinché una configurazione C_0 di un sistema di travi soggetto a vincoli bilateri e lisci sia di equilibrio è che il lavoro della sollecitazione attiva sia nullo per ogni spostamento virtuale consentito al sistema."

$$\delta L^{ext} = 0$$

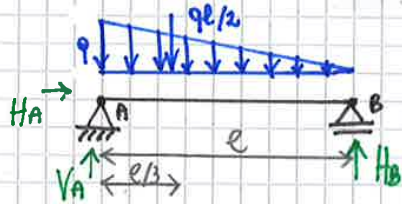
EQUAZIONE SIMBOLICA DELLA STATICA

Nell'ipotesi di vincoli bilateri lisci il lavoro della sollecitazione reattiva è nullo. (conseguenza della dualità statica - cinematica).

Come si determinano le reazioni col P.L.V.? È un metodo semi-grafico quindi dobbiamo passare per le catene cinematiche

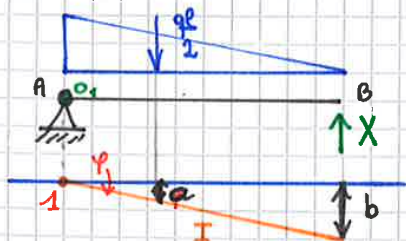
- 1) Si sopprime il vincolo di cui si vuole determinare la reazione e si sostituisce ad esso la reazione incognita con un verso arbitrario. (Se la reazione vincolare esterna/interna che si cerca viene esplicata da un vincolo con molteplicità $v > 1$, allora il vincolo deve essere sostituito con un altro, di molteplicità $v-1$, che non trasmetta la componente di reazione cercata). Il sistema diviene così una volta labile. → determinato attraverso le catene cinematiche
- 2) Si imprime poi alla struttura uno spostamento virtuale qualsiasi eseguito a partire dalla configurazione iniziale di equilibrio e si egualizza a zero il lavoro delle Forze esterne e della reazione vincolare. Si ottiene 1 equazione in funzione della reazione incognita.

▶ **TRAVE APPOGGIATA APPOGGIATA**



$H_B = ?$

1) Sopprimi il carrellino



2) cinematicismo

3) $\delta L^{ext} = 0$

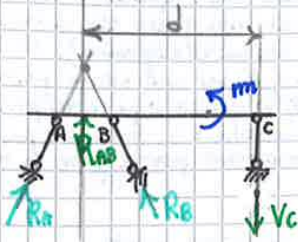
$$L^{ext}) \quad \frac{q l}{2} \cdot \left(\frac{l}{3} \varphi \right) - R_B \cdot (l \varphi) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$R_B = \frac{q l}{6}$$

{ Se F e spostamento concordi ⊕, se discordi ⊖ }
 { Se M concorde con l'angolo di rotazione ⊕, se discordi ⊖ }

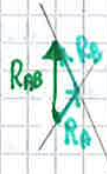
► TRAVE CON 3 BIELLE



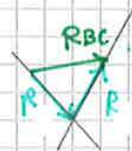
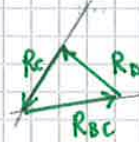
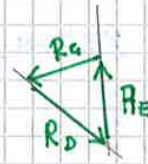
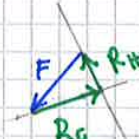
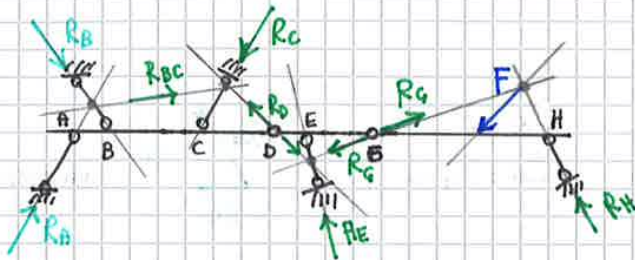
La retta di azione di R_{AB} dovrà essere // alla retta d'azione di V_c poiché il risultante tra le 2 forze deve esser nullo

$$R_{AB} = V_c$$

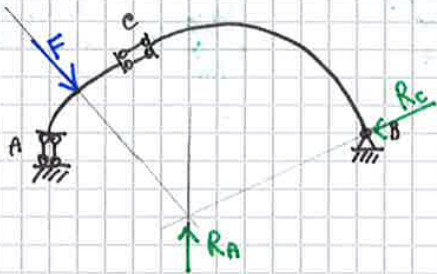
formano una coppia
C oraria che si oppone al momento m



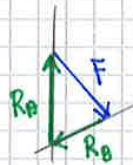
► SISTEMA DI TRAVI CON 5 BIELLE



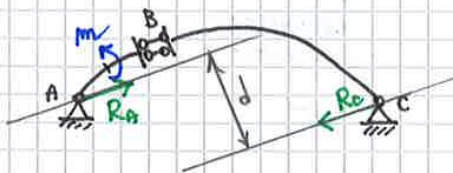
► ARCO A 3 CERNIERE



Conviene partire dal tratto scarico



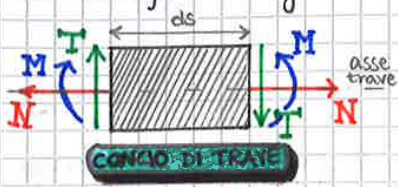
► ARCO A 3 CERNIERE (1 IMPROPRIA)



CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE

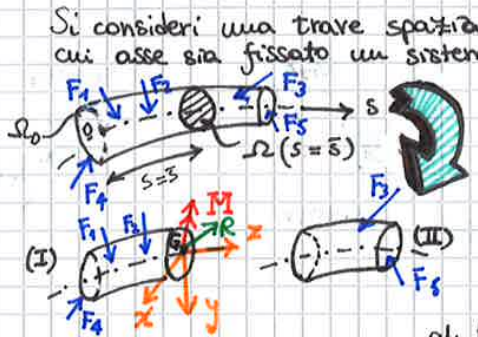
♦ EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO PER LE TRAVI PIANE - LE CARATTERISTICHE DELLE SOLLECITAZIONE

Le caratteristiche della sollecitazione interna relative alla sezione di una trave sono le reazioni interne elementari trasmesse dalla sezione. Già si è detto come l'elemento trave può essere pensato come l'infinita successione di incastri interni. Ogni concio elementare di trave è infatti collegato al precedente ed al successivo dei 2 incastri. Pertanto, asportato un concio da una generica struttura, affinché esso rimanga in equilibrio, occorre e basta sostituire su di esso le azioni che prima dell'asportazione la parte di destra e di sinistra esercitavano su di esso. Sia a destra che a sinistra si avrà una coppia che indicheremo **momento M** uno sforzo perpendicolare all'asse del concio che indicheremo come **taglio T**, e uno sforzo assiale che indicheremo come **sforzo normale N**.

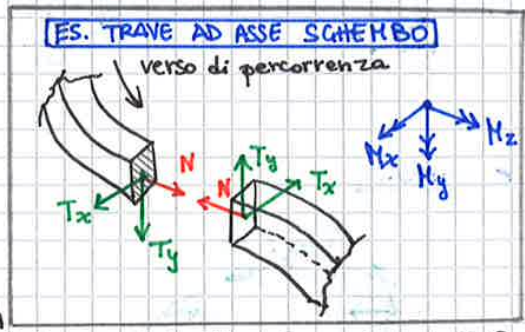


Queste 3 grandezze prendono il nome di **CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE INTERNA**. Le caratteristiche rappresentano sforzi interni generati dalle sollecitazioni esterne e continuamente in equilibrio con esse.

Si consideri una trave spaziale soggetta ad un sistema di forze in equilibrio e sul cui asse sia fissato un sistema di ascisse curvilinee avente l'origine nella sezione di estremità Ω_0 e orientato da s_x a dx . (Nel caso di trave ad asse sghembo, si dovrà fissare un verso di percorrenza all'ine della trave e per ciascuna sezione una terna di riferimento intrinseca costituita dalla tangente, della normale e della binormale alla curva). Si supponga, inoltre, di dividere la trave in 2 tratti mediante un taglio effettuato in corrispondenza della sezione $s = \bar{s}$. Si ottengono così due tronchi. La sezione retta risultante dal taglio appartenente al tronco (I) si dice **sezione di normale positiva**, quella appartenente al tronco (II) si dice **sezione di normale negativa**. La trave era inizialmente in equilibrio (per ipotesi), ma dopo aver effettuato il taglio in 2 tronchi (I) e (II) non lo saranno più. Affinché il tronco (I) resti in equilibrio, basta applicare sulla sua sezione di taglio di ascissa $s = \bar{s}$ le azioni che la parte (II) esercitava sulla parte (I) attraverso la sezione stessa di taglio prima di effettuare il taglio. Siano **R** ed **M** la risultante ed il momento risultante di tali azioni che si chiamano insieme **AZIONE INTERNA NELLA SEZIONE Ω** .



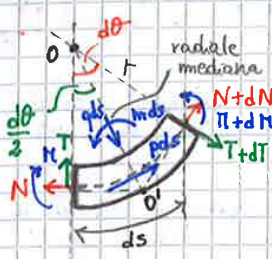
Sia **R** che **M** possono considerarsi applicati al baricentro **G** della sezione. Per ragioni di equilibrio, **R** ed **M** sono uguali e contrari rispettivamente alla risultante e al momento risultante delle forze agenti sulla parte (I) e coincidenti con la risultante ed il momento risultante delle forze agenti sulla parte (II). Cioè **R** ed **M** costituiscono il sistema equilibrante delle forze agenti su (I) ed il sistema equivalente delle forze agenti su (II). Considerando una terna ortogonale ($Gxyz$), solidale con la sezione corrente, con gli assi x e y coincidenti con gli assi principali di inerzia della sezione e con z tangente all'ine della trave e orientato come questo, le proiezioni di **R** ed **M** sugli assi di tale terna forniscono le seguenti 6 caratteristiche della sollecitazione interna o componenti dell'azione interna:



azioni interne nella sezione

- $N_z \rightarrow$ SFORZO NORMALE (R_z)
- $T_x \rightarrow$ TAGLIO SECONDO x (R_x)
- $T_y \rightarrow$ TAGLIO SECONDO y (R_y)
- $M_x \rightarrow$ MOMENTO FLETENTE SECONDO x
- $M_y \rightarrow$ MOMENTO FLETENTE SECONDO y
- $M_z \rightarrow$ MOMENTO TORCENTE

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO PER TRAVE PIANA AD ASSE CURVILINEO



Consideriamo un concio infinitesimo ad asse curvilineo nel quale sia

- $O \rightarrow$ centro di curvatura
- $r \rightarrow$ raggio di curvatura

Quindi la lunghezza del concio è pari: $ds = r d\theta$

A questo concio sono applicate delle forze esterne:

- $p ds$ risultante delle azioni esterne applicate nella direzione della tg mediana
- $q ds$ risultante delle azioni esterne applicate nella direzione radiale mediana
- $m ds$ momento risultante

Il concio sarà in equilibrio sotto l'azione delle 3 forze esterne (p, q, m) più le reazioni interne sulle sezioni di s_x e sulla sezione di s_x' ($N, M, T, N+dN, T+dT, M+dM$). Per determinare come sono legati questi incrementi con le forze applicate, scriviamo delle equazioni di equilibrio:

EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE NELLA DIREZIONE TANGENTE MEDIANA

$$\Leftrightarrow p ds - N \cos \frac{d\theta}{2} + (N + dN) \cos \frac{d\theta}{2} + T \sin \frac{d\theta}{2} + (T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} = 0$$

$\frac{dT \cdot d\theta}{2}$ semplificato xke' infinitesimo di 2° ordine

Poichè il concio è infinitesimo e quindi anche l'angolo $d\theta$ si possono confondere:

$$\begin{cases} \sin \frac{d\theta}{2} \cong \frac{d\theta}{2} \\ \cos \frac{d\theta}{2} \cong 1 \end{cases}$$

EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE NELLA DIREZIONE RADIALE MEDIANA

$$\Uparrow q ds - N \sin \frac{d\theta}{2} - (N + dN) \sin \frac{d\theta}{2} - T \cos \frac{d\theta}{2} + (T + dT) \cos \frac{d\theta}{2} = 0$$

EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE RISPETTO O' (punto rispetto al quale si vanno ad unire le 2 tangenti mediane $\rightarrow N$ non ha momento perchè ha braccio nullo)

$$\circlearrowleft m ds + dM - M + M - p ds \left(\frac{r}{\cos \frac{d\theta}{2}} - r \right) - T r \tan \frac{d\theta}{2} - (T + dT) r \tan \frac{d\theta}{2} = 0$$

Possiamo confondere:

$$\begin{cases} \tan \frac{d\theta}{2} \cong \frac{d\theta}{2} \\ \cos \frac{d\theta}{2} \cong 1 \end{cases}$$

Quindi avremo queste 3 equazioni:

$$\begin{cases} p ds + dN + T d\theta = 0 \\ q ds - N d\theta + dT = 0 \\ m ds + dM - T r d\theta = 0 \end{cases}$$

ricordando che

$$\begin{cases} ds = r d\theta \\ r = \frac{ds}{d\theta} \end{cases}$$

dividiamo le 3 equazioni per ds

$$\begin{cases} \frac{dN}{ds} + \frac{T}{r} + p = 0 \\ \frac{dT}{ds} - \frac{N}{r} + q = 0 \\ \frac{dM}{ds} - T + m = 0 \end{cases}$$

EQUAZIONI STATICHE

Una volta noto il tipo di carico applicato su una trave, queste equazioni ci permettono di capire come sarà l'andamento delle caratteristiche della sollecitazione.

$q(z)$	$T(z)$	$M(z)$
nullo	costante	lineare
costante	lineare	quadratico
lineare	quadratico	cubico
polinomio di grado n ← n	$n+1$	$n+2$

Per quanto riguarda lo sforzo normale esso risulta essere indipendente dagli altri 2 (T, M) e legato solamente al carico assiale diretto lungo l'asse della trave.

$$\left\{ \begin{array}{l} p \rightarrow \text{nullo} \Rightarrow N \text{ costante} \\ p \rightarrow \text{costante} \Rightarrow N \text{ lineare} \end{array} \right\}$$

Anche in questo caso possiamo riscrivere le equazioni [2.1] in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ N \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ p \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in forma compatta

$$[D] \cdot \{Q\} + \{F\} = \{0\}$$

OSSERVAZIONE: Nelle sezioni in cui siano applicate forze F o coppie M concentrate valgono le seguenti condizioni:

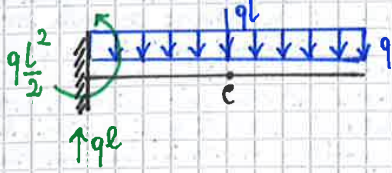
$$\Delta T + F = 0$$

$$\Delta M + M = 0$$

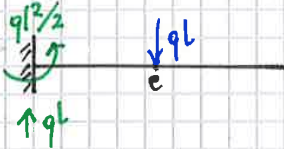
ovvero nelle sezioni sedi di forze concentrate, la variazione del taglio è pari al valore della forza concentrata, mentre nelle sezioni sedi di coppie concentrate la variazione di momento uguaglia il valore della coppia esterna. Le relazioni differenziali susritte, associate con le condizioni ai limiti che tengono conto della presenza dei vincoli, permettono di determinare nelle strutture isostatiche le funzioni:

$$T = T(s) \quad \text{e} \quad M = M(s)$$

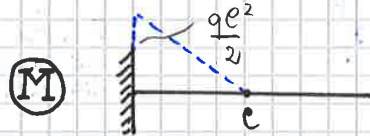
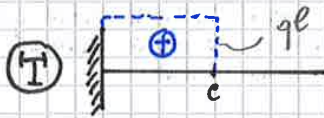
In caso di carico distribuito, per tracciare il diagramma del taglio e del momento procederemo con il metodo grafico:



1) Immaginiamo che il carico non sia distribuito costante ma sia una forza concentrata corrispondente alla risultante, allora avremo:

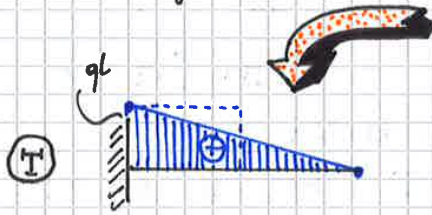


E possiamo procedere a tracciare il diagramma come se fosse costante

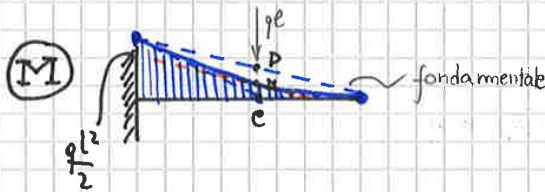


2) Ma poiché noi dobbiamo tracciare il diagramma per il carico distribuito dobbiamo ricordarci che il taglio è lineare. Sia nel caso di carico puntuale che nel caso di carico distribuito le condizioni al bordo risultano uguali ovvero:

$$\begin{cases} T_A = ql \\ T_B = 0 \end{cases}$$



3) Per ricavare invece il momento (parabolico) si procede con la costruzione della parabola.



- calcolo il diagramma considerando la forza puntuale (come fatto in 1))

- agli estremi A e B avranno stesso valore ovvero: $\begin{cases} M_A = \frac{ql^2}{2} \\ M_B = 0 \end{cases}$

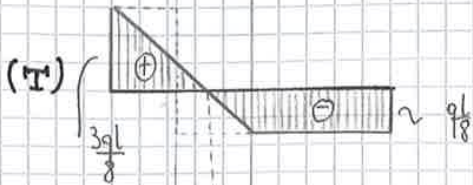
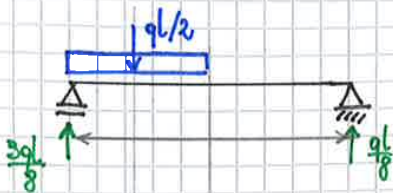
- unisco i due punti con una linea detta fondamentale (punti di estrema)

- traccio una terza tangente parallela alla fondamentale passante per il punto medio del segmento DC (segmento sotto dove agisce la forza)

OSSERVAZIONE: Le tangenti al diagramma del momento flettente sono i tagli.

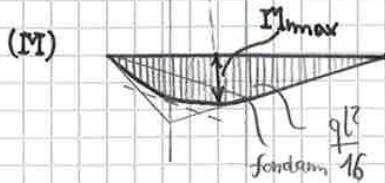
OSSERVAZIONE: Quando abbiamo delle forze concentrate o dei momenti concentrati ci saranno dei punti di discontinuità dove avremo dei cambiamenti (anche salti) nei diagrammi.

► CARICO NON SIMMETRICO



$$T(z_1) = \frac{3ql}{8} - qz$$

$$T(z_2) = -\frac{ql}{8}$$



$$M(z) = \frac{3ql}{8}z - \frac{qz^2}{2}$$

Come calcolo il momento massimo?

→ $\frac{dM}{dz} = 0$

→ $\frac{dM}{dz} = T = \frac{3ql}{8} - qz = 0 \Rightarrow$ per $z = \frac{3}{8}l$

ascissa rispetto a quale si annulla il momento flettente

Sostituisco alla funzione il valore $z = \frac{3}{8}l$ e ottengo

⇒ $M(z = \frac{3}{8}l) = \frac{9}{128}ql^2$

► IN CORRISPONDENZA DI UNA CERNIERA PROPRIA



Se non è applicata alcuna forza concentrata, l'inclinazione del diagramma del momento flettente è la stessa (poiché il $T = \text{cost}$).



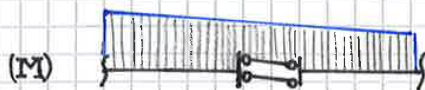
Se in corrispondenza della cerniera vi è una forza concentrata il diagramma ha inclinazioni diverse.

Comunque il momento in una cerniera è sempre nullo in quanto trasmette taglio e sforzo normale ma non momento.

► IN CORRISPONDENZA DI UN DOPPIO PENDOLO

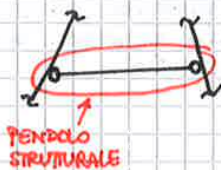


In caso avesse le bielle disposte parallelamente all'asse della struttura, il diagramma di momento nei tratti scarichi ha andamento costante.



Nel caso in cui le bielle non fossero parallele, il diagramma non è costante ma lineare.

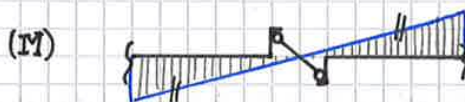
► PENDOLI STRUTTURALI



Lungo i pendoli, considerati come elementi strutturali, il diagramma di momento e taglio sono nulli poiché la reazione è diretta secondo l'asse del pendolo.

$$M = T = 0$$

► IN CASO DI PENDOLO O BIELLA INTERNA



Il momento è nullo nel punto in cui l'asse della biella incontra l'asse della trave. L'inclinazione del diagramma è la stessa poiché non vi è discontinuità nel taglio.

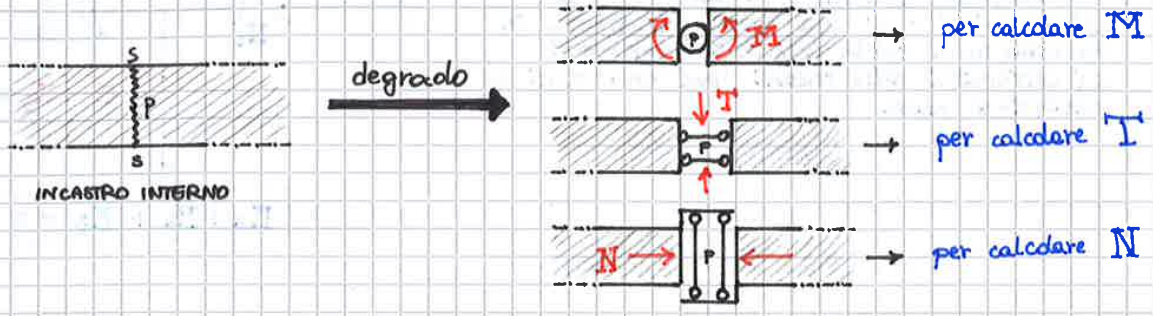
► IN CASO DI PENDOLO IMPROPRIO (DOPPIO BIPENDOLO)



Il pendolo improprio reagisce a momento ma non trasmette T e N . Pertanto in corrispondenza di tale vincolo nei tratti scarichi immediatamente a dx e a sx di esso, i diagrammi T e N sono sempre nulli. Il diagramma di M ha andamento costante.

♦ DETERMINAZIONE DELLE CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE INTERNA MEDIANTE IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

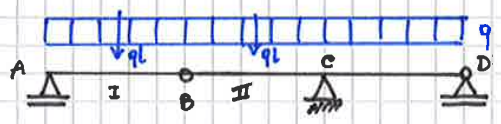
Come le reazioni esterne si possono calcolare mediante il P.L.V. degradando opportunamente i vincoli, così le caratteristiche della sollecitazione interna in una sezione si possono ottenere trasformando il vincolo interno di incastro in un vincolo doppio: la cerniera per ottenere il momento flettente, il doppio pendolo per ottenere il taglio o lo sforzo normale.



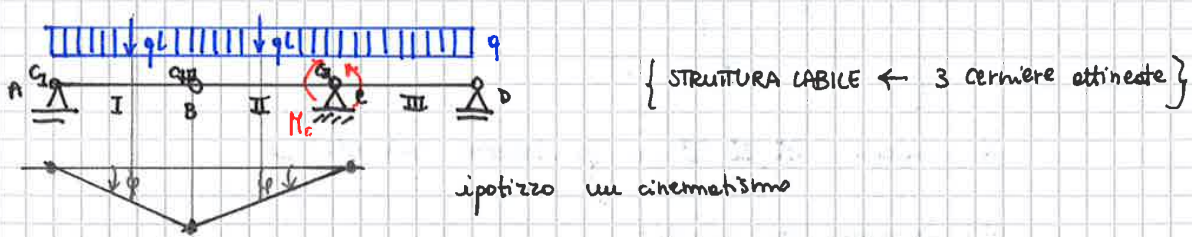
Quindi, a tale scopo, si supponga di effettuare un taglio in corrispondenza della sezione 's' in cui si vuole determinare la caratteristica di sollecitazione e di introdurre poi un vincolo che non trasmetta la caratteristica cercata. La struttura diventa così labile e affinché sussista l'equilibrio, è necessario applicare immediatamente a dx e a sx del vincolo introdotto, quella caratteristica che non viene trasmessa (ovvero quella cercata) con un verso arbitrario. Ciò fatto si imporrà alla struttura uno spostamento virtuale eseguito a partire dalla configurazione di equilibrio. Per tale sistema di spostamento lavorano sia le forze esterne che la caratteristica della sollecitazione, la quale comparando come unica incognita nell'equazione risultante dall'applicazione del P.L.V. può essere così determinata.

OSSERVAZIONE: Si può determinare una caratteristica della sollecitazione in una sezione senza dover risolvere preventivamente la struttura.

Calcolare M in c col P.L.V.:



(1) Svincolo c → degradando la struttura e applico una coppia M_c



$$PLV \rightarrow q l \cdot \frac{l}{2} \varphi + q l \cdot \frac{l}{2} \varphi - M_c \varphi = 0$$

$$M_c = q l^2$$

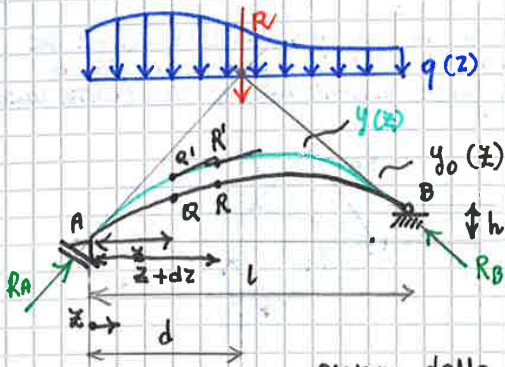
◇ REGOLE GENERALI PER IL TRACCIAMENTO DELLA C.D.P.

1. La retta d'azione della reazione relativa ad una qualsiasi sezione di trave è tangente al grafico della c.d.p. nel punto di applicazione della reazione.
2. In ciascun vincolo la c.d.p. è la retta d'azione della rispettiva reazione vincolare.
3. La c.d.p. interseca l'asse della struttura nei punti in cui il momento flettente è nullo $\rightarrow M=0$
4. In assenza di carichi distribuiti, ma in presenza di forze concentrate la curva delle pressioni è una linea spezzata.
5. Se il carico è uniformemente distribuito ($q = \text{cost}$) la c.d.p. è una parabola con asse parallelo al carico.
6. La c.d.p. ha la stessa forma di diagramma di momento flettente, ovvero il diagramma di momento flettente è proporzionale alla distanza tra la c.d.p. e la linea d'asse della trave.
7. In assenza di q distribuito la c.d.p. non è determinata se:
 - $M \neq 0$
 - $N = T = 0$

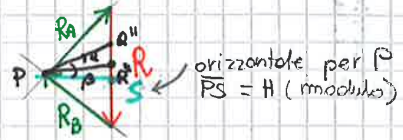
perché manca una risultante \Rightarrow la direzione non può essere determinata
8. La c.d.p. **non esiste** se $N = M = T = 0$ (struttura scarica)
9. La c.d.p. è disegnata dalla stessa parte del diagramma di momento se N è di trazione (+)
10. Nei tratti rettilinei, la c.d.p. ha la stessa forma del diagramma di momento flettente se $N \neq 0$.
11. In presenza di q distribuito, $N = 0$, la c.d.p. è rappresentata da un **fascio di rette parallele** alla direzione del carico.

✧ C.D.P. COME RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE CON CARICO DISTRIBUITO

Consideriamo un arco isostatico soggetto a un sistema continuo di forze equiverse applicate.



Sia $y_0(z)$ l'asse della struttura definita dalla $y_0(z)$ funzione analitica. Mediante l'integrazione è possibile calcolare la risultante del carico. Mediante il poligono delle forze ricaviamo R_A e R_B .



Fatto questo ipotizziamo di conoscere a priori la curva delle pressioni, avente un'equazione analitica descrivibile tramite $y(z)$ (in azzurro). Scegliamo un punto Q sull'arco posto a distanza z da A . È sia Q' il rispettivo punto sulla c.d.p. Ipotizziamo di scegliere un secondo punto posto a distanza infinitesima rispetto a Q e lo indichiamo con R , con R' il punto rispettivo sulla c.d.p.

Quindi la risultante interna in Q e la retta tg alla curva delle pressioni in Q' così come in R in R' , la tg in Q' avrà inclinazione α mentre quella in R' di β . Se ci riportiamo nel poligono delle forze e tracciamo per P una retta parallela alla tg in Q' individuiamo su R il punto Q'' . Facendo lo stesso per R' otteniamo R'' .

In questo caso il poligono si riduce ad un triangolo, e questo triangolo può essere visto come un'infinità di spicchietti man mano che ci spostiamo lungo la nostra sezione.

Quindi possiamo esprimere la c.d.p. analiticamente

$$[3.1] \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{-q(z)}{H} \quad \rightarrow \quad \text{EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA CURVA DELLE PRESSIONI PER CARICHI DISTRIBUITI EQUIVERSI}$$

con H modulo della componente orizzontale delle reazioni esterne.

Per determinare la soluzione di [3.1] sono necessarie 2 condizioni al contorno

OSSERVAZIONE: la c.d.p. $y(z)$ rappresenta, a meno di un fattore l'andamento del momento flettente.

$$M = H (y - y_0)$$

Momento flettente (green), cdp (blue), asse trave (red)

- OSSERVAZIONE:**
- ▶ Se $q = \text{cost}$ → c.d.p. è una parabola con asse parallelo al carico
 - ▶ Se $H = 0$ → c.d.p. degenera in un fascio di rette (per $N=0$)

STRUTTURE ISOSTATICHE

Le sollecitazioni interne indotte dai carichi meccanici sono superiori nelle strutture vincolate isostaticamente piuttosto che in quelle vincolate iperstaticamente. D'altra parte, le sollecitazioni interne indotte dai carichi termici sono nulle nelle strutture isostatiche, mentre rilevanti nelle iperstatiche. Gli schemi maggiormente utilizzati per la realizzazione di strutture di grande luce e prive di ingombro verticale sono:

- (1) **TRAVI GERBER**: costituite da 1 trave rettilinea con più appoggi e con un numero adeguato di sconnessioni.
- (2) **TRAVATURE RETICOLARI**: Composte da elementi la cui struttura più fine è costituita da bielle mutuamente incernierate.

Per costruzioni di minor luce o con un ingombro verticale si usano tradizionalmente strutture ad arco ove prevale la sollecitazione di compressione mentre quella flessiva tende ad essere ridotta. Si impiegano sostanzialmente i seguenti schemi strutturali:

- (3) **ARCHI A 3 CERNIERE** (già viste in precedenza)
- (4) **STRUTTURE CHIUSE**: costituite da elementi strutturali che si richiudono su se stessi e possono essere in alcuni casi anche internamente iperstatici.

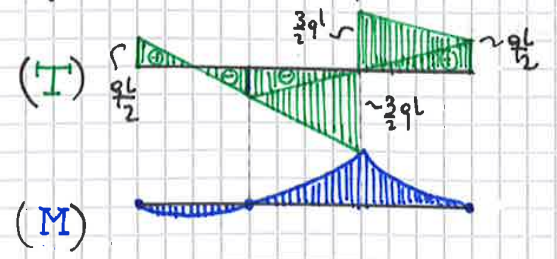
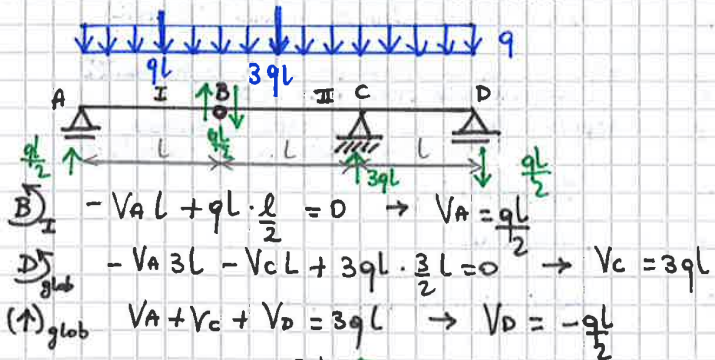
✦ TRAVI GERBER

Sono travi rettilinee con un numero $(2+s)$ di appoggi, in cui la linea d'asse presenta s sconnessioni semplici, così da rendere isostatica la struttura.

Per avere isostaticità rispetto forze orizzontali, gli appoggi devono essere tutti carrelli tranne uno incernierato a terra. Le s sconnessioni semplici (cerniere o doppi pendoli) devono essere disposte bene così da non creare tratti labili o iperstatici. In linea di massima si tratta di non disporre 3 cerniere allineate o 3 appoggi consecutivi. (rispettivamente tratto labile e tratto iperstatico). Lo studio di queste strutture risulta semplificato in quanto si fa l'ipotesi che i carichi siano esclusivamente situati in direzione verticale o meglio normale all'asse della trave. Ciò comporta che l'equilibrio alla traslazione orizzontale può essere trascurato.

Per il calcolo dell'isostaticità si considera l'equazione: $V_e = V_i + 2$

\uparrow vincoli esterni
 \uparrow vincoli interni



▶ TRAVATURE TRIANGOLATE

Strutture costituite da una successione di triangoli articolati, ciascuno posto in serie con un lato comune con uno e uno solo di quelli che lo precedono e lo seguono (ovvero triangoli di aste con lati adiacenti).

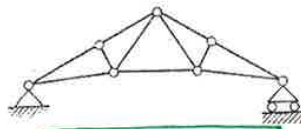
triangoli ben disposti

STRUTTURE ISOSTATICHE

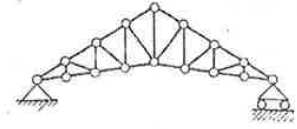
sistemi internamente determinati

SCHEMI STRUTURALI

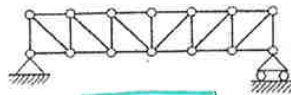
OSSERVAZIONE: Se il numero di vincoli esterni $V_e > 3 \Rightarrow$ esiste un numero pari a $V_e - 3$ di scnessioni interne. Per determinare le reazioni vincolari bisogna ricorrere alle equazioni ausiliarie in quanto la struttura non è un unico corpo rigido.



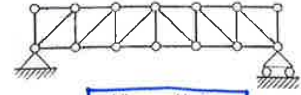
(a) Capriata francese o Polonceau



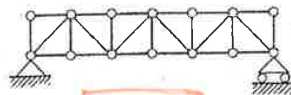
(b) Capriata inglese



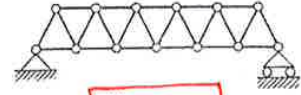
(c) Trave Mohnié



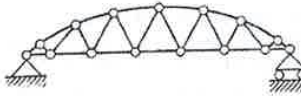
(d) Trave Howe



(e) Trave Pratt



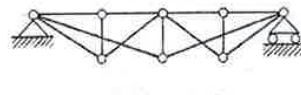
(f) Trave Neville



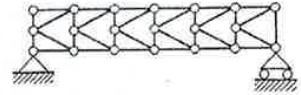
(g) Trave parabolica Nielsen



(h) Trave parabolica rovescia

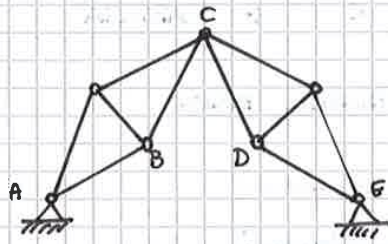


(i) Trave Fink



(l) Trave a K

esempio: ARCO RETICOLARE A 3 CERNIERE



← struttura internamente 1 volta labile esternamente isostatica (nel complesso)

METODI DI RISOLUZIONE DELLE TRAVATURE RETICOLARI

METODO DEI NODI

METODO DELLE SEZIONI PI RITER

IL METODO DELLE SEZIONI DI RITTER

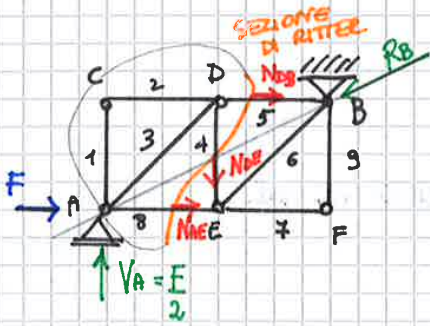
Si definisce sezione di Ritter (o canonica) la sezione che suddivide la travatura in 2 parti: interrompendo 3 sole aste.

Il vantaggio è che si può fare una risoluzione asta per asta e quindi si ottengono tante equazioni quante sono le aste, ma soprattutto possiamo valutare lo sforzo in ogni asta isolatamente.

Una sezione di Ritter taglia oltre l'asta in esame, altre aste convergenti in uno stesso punto (polo)

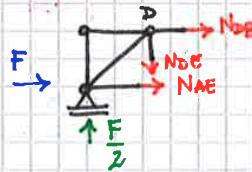
PROPRIO
 le altre aste si intersecano tutte in un unico polo
 ↓
 EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE ATTORNO AL POLO

IMPROPRIO
 le altre aste sono parallele
 ↓
 EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE ORTOGONALE ALLA DIREZIONE DI PARALLELISMO



Sezioni di Ritter per l'asta DB, DE, AE

- (1) Si ipotizzano inizialmente tutti gli sforzi uscenti
- (2) Si fa l'equilibrio alla traslazione della parte di struttura cerchiata



$$\rightarrow N_{DB} + F + N_{AE} = 0$$

$$\uparrow -N_{DE} + \frac{E}{2} = 0$$

↓
 tirante $N_{DE} = + \frac{E}{2}$

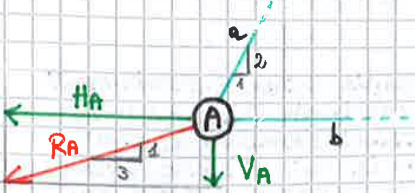
$$\curvearrowright -\frac{E}{2} \cdot \ell + F \cdot \ell + N_{AE} \cdot \ell = 0$$

$$N_{AE} = - \frac{E}{2} \text{ puntone (verso opposto)}$$

$$\Rightarrow N_{DB} = - \frac{E}{2} \text{ puntone (verso opposto)}$$

ASTA	N	
1	\emptyset	
2	\emptyset	
3	$-\frac{\sqrt{2}E}{2}$	Puntone
4	$+\frac{E}{2}$	Tirante
5	$-\frac{E}{2}$	Puntone
6	$+\frac{\sqrt{2}E}{2}$	Tirante
7	\emptyset	
8	$-\frac{E}{2}$	Puntone
9	\emptyset	

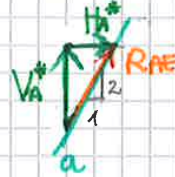
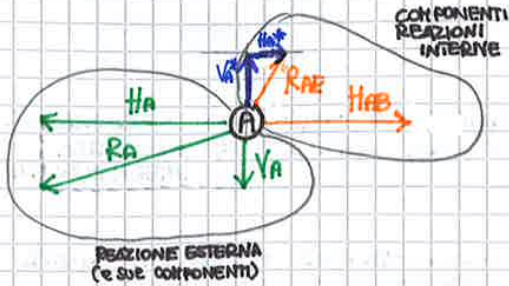
→ Equilibrio del nodo A



La R_A (reazione esterna) deve essere equilibrata dalle reazioni interne di cui sono note (come abbiamo visto prima) le direzioni delle rette d'azione.

Quindi la componente orizzontale di R_A andrà a scaricarsi tutta sulla retta b mentre la componente verticale V_A dovrà scaricarsi sulla retta a.

Quindi nota la componente verticale $V_A^* = V_A$ sul tratto AE è possibile determinare la relativa componente orizzontale visto che conosciamo la pendenza:



$$V_A^* = \frac{2}{3} ql$$

↓ pendenza 1:2

$$H_A^* = \frac{1}{3} ql$$

$$H_A = H_A^* + H_{AB}$$

$$H_{AB} = H_A - H_A^* = 2ql - \frac{1}{3} ql = \frac{5}{3} ql$$

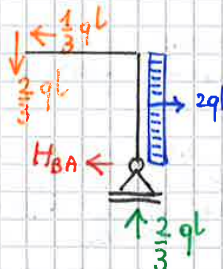
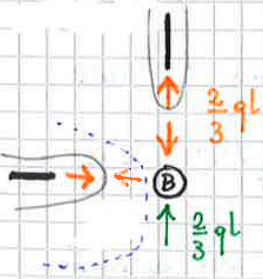
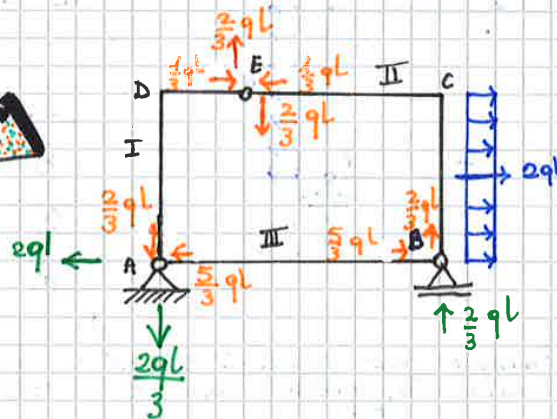
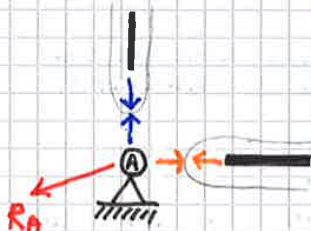
Dalla composizione di H_A^* e V_A possiamo ottenere infine la risultante che poggia per la retta a:

$$R_{AE} = \sqrt{H_A^{*2} + V_A^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} ql$$

OSSERVAZIONE: In sostanza si tratta di ripartire le forze esterne (reazioni esterne) sulle rette d'azione dei vincoli interni (se il tratto è scarico) e fare l'equilibrio del nodo.

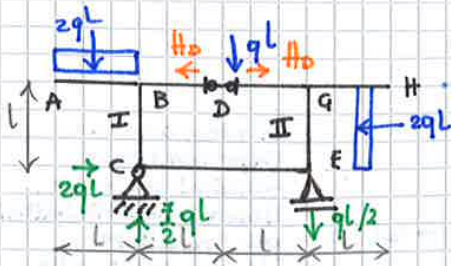
IMPORTANTE →

Così come abbiamo fatto, il verso delle reazioni è da considerare come quello agente sui nodi interni; mentre sulle aste opposte in verso.



$$\Rightarrow -H_{BA} - \frac{1}{3} ql + 2ql = 0$$

$$H_{BA} = 2ql - \frac{1}{3} ql = \frac{5}{3} ql$$



EQ. GLOBALE

$$\uparrow - 2ql - ql + V_C + V_E = 0$$

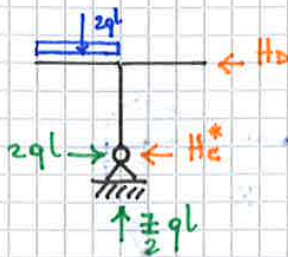
$$\rightarrow H_C = 2ql$$

$$\curvearrowright + 2ql \frac{L}{2} - ql \cdot L + V_E \frac{L}{2} + 2ql \frac{L}{2} = 0$$

$$V_E = - \frac{ql}{2}$$

$$V_C = 3ql + \frac{ql}{2} = \frac{7}{2} ql$$

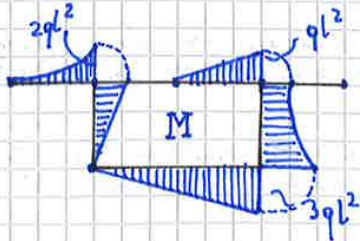
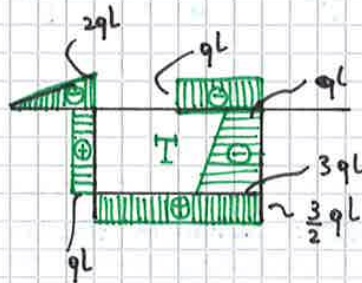
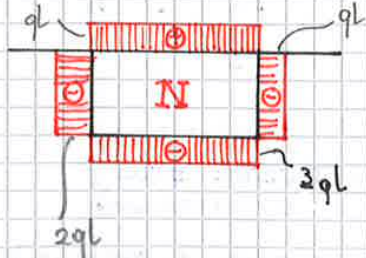
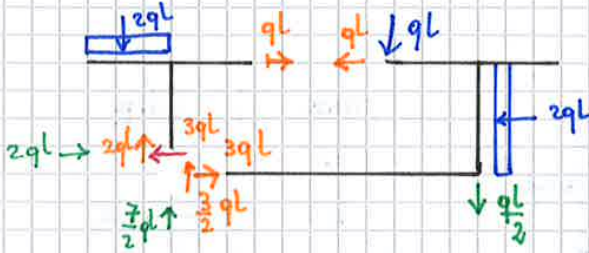
EQ. CORPO I



$$\curvearrowright_I \quad 2ql \frac{L}{2} + H_D L = 0 \rightarrow H_D = -ql$$

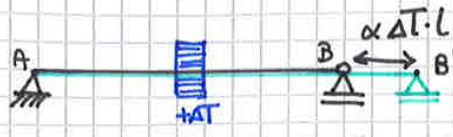
$$\rightarrow -H_D - H_C^* + 2ql = 0$$

$$H_C^* = 3ql$$



Le strutture isostatiche sono in grado di assecondare le distorsioni termiche senza che si generino sollecitazioni o deformazioni elastiche aggiuntive.

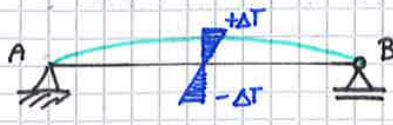
TRAVE APOGGIATA APOGGIATA



trave soggetta a variazione termica ΔT costante

ALLUNGAMENTO TRAVE

La trave subisce un allungamento, che è assecondato dal vincolo. Il carrello in B scorre lungo il proprio piano di scorrimento e la struttura si allunga restando rettilinea.



trave soggetta a variazione termica a fasce

CURVATURA TRAVE

accorcia quelle soggette a $-\Delta T$

allunga fibre soggette a $+\Delta T$

Le strutture iperstatiche sono tali per cui le distorsioni termiche comportano l'insorgere di uno stato di sollecitazione e di deformazione elastica aggiuntiva, quella creata dalla stessa distorsione termica.



la sezione in A non è più libera di ruotare ed ecco che nascerà una deformata soggetta a stato tensionale.

BARICENTRI DI ALCUNE FIGURE SEMPLICI

- **RETANGOLO E PARALLELOGRAMMA:** Il baricentro si trova nel punto di incontro delle diagonali
- **TRIANGOLO:** G si trova posto nel punto di incontro delle mediane. Tale punto verrà a trovarsi ad $h_i/3$ da ogni lato bisecante, essendo h_i la lunghezza della generica mediana.
- **TRAPEZIO:** G si trova sulla congiungente i centri delle basi. Per individuarlo esattamente basta prolungare la base maggiore di una quantità pari alla base minore e la base minore di una quantità pari alla base maggiore (in direzione opposta) e congiungere i segmenti così ottenuti.

✦ **MOMENTI DI INERZIA**

► **MOMENTO DI INERZIA ASSIALE**

Con riferimento alla figura alla pagina precedente i momenti di inerzia I_x ed I_y della figura rispetto agli assi x e y ed il momento centrifugo I_{xy} rispetto alla coppia di assi x, y , sono forniti dalle relazioni seguenti:

← sempre positivi

MOMENTI DI INERZIA

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

MOMENTI 2° ORDINE

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

[L⁴]

↓ MOMENTO CENTRIFUGO

può risultare positivo, negativo, o nullo (se $x \equiv y$ si ottiene il momento di inerzia assiale)

(altrondeazione è I_x, I_y, I_{xy} al posto di I_x, I_y, I_{xy})

Si definisce **raggio di inerzia** rispetto l'asse x la quantità:

$$\rho_x^2 = \frac{I_x}{A}$$

{ per sistemi discreti $I_x = \sum m_i y_i^2$, $I_y = \sum m_i x_i^2$, $\frac{I_x}{\sum m_i} = \rho_x^2 \rightarrow I_x = \rho_x^2 \sum m_i$ }

► **MOMENTO DI INERZIA POLARE**

Si definisce momento di inerzia polare I_p del sistema continuo in figura a pagina precedente, rispetto al polo P la quantità:

$$I_p = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_y + I_x$$

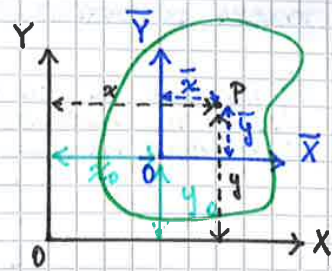
Sviluppando l'integrale si nota che I_p è la somma dei momenti di inerzia assiali rispetto ad una qualsiasi coppia di rette ortogonali passanti per A. (nota non si può calcolare $I_y = I_p - I_x$). La somma $I_x + I_y$ è costante per qualsiasi coppia di rette ortogonali passanti per lo stesso punto.

Il momento I_p , essendo riferito ad un punto non dipende dall'inclinazione degli assi passanti per quel punto.

↳ LEGGI DI TRASFORMAZIONE DEL VETTORE DI POSIZIONE

- Le coordinate (x, y) di un punto del piano (X, Y) sono legate alle coordinate (\bar{x}, \bar{y}) dello stesso punto nel sistema traslato (\bar{X}, \bar{Y}) mediante:

$$\begin{cases} \bar{x} = x - x_0 \\ \bar{y} = y - y_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{con } (x_0, y_0) \\ \rightarrow \text{coordinate dell'origine} \\ \bar{O} \text{ del sistema traslato} \\ \text{rispetto } (X, Y) \end{array}$$



Le stesse relazioni possono essere riscritte in forma vettoriale come segue:

$$\{r\} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{vettore posizione di P in } (X, Y)$$

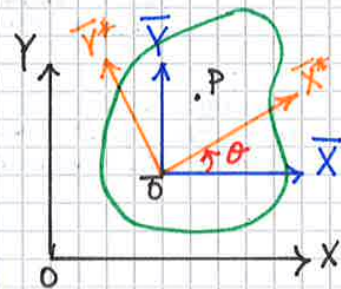
$$\{\bar{r}\} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{vettore posizione di P in } (\bar{X}, \bar{Y})$$

$$\{r_0\} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{vettore posizione di } \bar{O} \text{ in } (X, Y)$$

quindi si ha: $\boxed{\{\bar{r}\} = \{r\} - \{r_0\}} \quad [5.1]$

- Le coordinate (\bar{x}, \bar{y}) di un punto del piano (\bar{X}, \bar{Y}) sono legate alle coordinate (x^*, y^*) dello stesso punto nel sistema ruotato (X^*, Y^*) mediante:

$$\theta = \text{angolo di rotazione} \quad \begin{cases} x^* = \bar{x} \cos \theta + \bar{y} \sin \theta \\ y^* = -\bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta \end{cases} \quad (\oplus \text{ se } \curvearrowright)$$



In forma matriciale si ha indicandolo con $[N]$ la matrice ortogonale di rotazione così fatta:

$$\boxed{[N] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\{\bar{r}^*\} = [N] \{\bar{r}\}}$$

Si può formulare la legge generale della trasformazione del vettore dei momenti statici per rototraslazioni del sistema di riferimento:

FORMULA DI ROTOTRASLAZIONE

$$\{\bar{S}^*\} = [N] (\{S\} - A \{r_0\})$$

$$\{S\} = [N]^T \{\bar{S}^*\} + A \{r_0\}$$

FORMULA DI ROTOTRASLAZIONE INVERSA

◇ LEGGI DI TRASFORMAZIONE DEL TENSORE DEI MOMENTI DI INERZIA

Si definisce tensore dei momenti di inerzia relativo all'area A e calcolato nel sistema di riferimento (X,Y) il seguente tensore simmetrico (2x2):

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{yy} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A x^2 dA & \int_A xy dA \\ \int_A yx dA & \int_A y^2 dA \end{bmatrix}$$

Si dice prodotto diadico il seguente prodotto metricale:

$$\{r\} \{r\}^T = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ yx & y^2 \end{bmatrix}$$

Tenendo conto del prodotto diadico possiamo riscrivere il tensore dei momenti di inerzia come segue:

$$[I] = \int_A \{r\} \{r\}^T dA$$

TENSORE MOMENTI DI INERZIA NEL S.R. INIZIALE

⇒ il tensore dei momenti di inerzia calcolato nel sistema traslato (\bar{X}, \bar{Y}) è:

$$[\bar{I}] = \int_A \{\bar{r}\} \{\bar{r}\}^T dA$$

$$[\bar{I}] = \int_A (\{r\} - \{r_0\}) (\{r\} - \{r_0\})^T dA$$

poiché la somma di 2 matrici è uguale alla somma delle trasposte si ha:

$$\begin{aligned} [\bar{I}] &= \int_A (\{r\} - \{r_0\}) (\{r\}^T - \{r_0\}^T) dA = \\ &= \int_A \{r\} \{r\}^T dA - \int_A \{r\} dA \{r_0\}^T - \{r_0\} \int_A \{r\}^T dA + \\ &+ \{r_0\} \{r_0\}^T \int_A dA \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [\bar{I}] = [I] + A \{r_0\} \{r_0\}^T - \{r_0\} \{S\}^T - \{S\} \{r_0\}^T$$

TENSORE MOMENTI DI INERZIA NEL S.R. TRASLATO

↳ in forma scalare:

$$I_{\bar{x}x} = I_{xx} + A y_0^2 - 2 y_0 S_x$$

$$I_{\bar{y}y} = I_{yy} + A x_0^2 - 2 x_0 S_y$$

$$I_{\bar{x}y} = I_{\bar{y}x} = I_{xy} + A x_0 y_0 - x_0 S_x - y_0 S_y$$

❖ MOMENTI E ASSI PRINCIPALI DI INERZIA

Definito il baricentro G del sistema, si fissi un sistema cartesiano ortogonale (G, x_0, y_0) . Calcolati i momenti di inerzia I_{x_0} , I_{y_0} e quello centrifugo $I_{x_0 y_0}$ per determinare i momenti principali di inerzia I_ξ e I_η e gli assi principali (ξ, η) si possono impiegare 2 procedimenti: uno analitico ed uno grafico.

▶ PROCEDIMENTO ANALITICO

$$\left. \begin{matrix} I_\xi \\ I_\eta \end{matrix} \right\} = \frac{I_{x_0} + I_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_0} - I_{y_0})^2 + 4 I_{x_0 y_0}^2}$$

MOMENTI PRINCIPALI DI INERZIA

N.B. Se $I_{y_0} > I_{x_0}$ allora $I_\xi < I_\eta \Rightarrow$ in I_ξ uso \ominus e in I_η uso \oplus
 Se $I_{y_0} < I_{x_0}$ allora $I_\xi > I_\eta \Rightarrow$ in I_ξ uso \oplus e in I_η uso \ominus

Nel sistema principale risulta $I_{\xi\eta} = 0$

mentre l'inclinazione θ_0 degli assi principali (ξ, η) rispetto agli assi baricentrici (x_0, y_0) risulta:

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2 I_{x_0 y_0}}{I_{y_0} - I_{x_0}} \right)$$

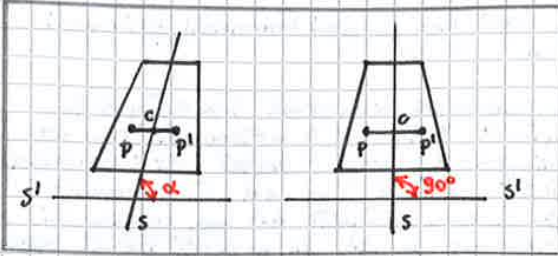
↓
 è da intendersi \oplus se antiorario ↻

Si può dimostrare come i momenti principali di inerzia siano l'uno il minimo e l'altro il massimo tra tutti i momenti di inerzia I_{xx^*} e I_{yy^*} che si hanno al variare dell'angolo di rotazione θ .

Quando gli assi, oltre che principali sono anche baricentrici, si dicono **centrali**, così come anche i relativi momenti di inerzia.

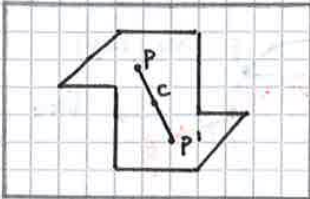
Quando $I_{x_0} = I_{y_0}$ e $I_{x_0 y_0} = 0$ tutti i sistemi di riferimento ruotati $x^* y^*$ risultano principali per qualsiasi angolo di rotazione θ_0 . Le aree che soddisfano tali condizioni si dicono **girascoliche**.

◆ AREE PROVISTE DI SIMMETRIA



Si dice che un'area presenta simmetria assiale obliqua quando esiste una retta s che taglia in 2 parti l'area, e una direzione s' coniugata a questa retta, tali che se si considera un generico punto P appartenente all'area e alla retta PC parallela alla direzione s' , e si riporta il segmento $CP' = CP$ dalla parte opposta a P rispetto ad s , il punto P' appartiene ancora all'area. Quando l'angolo α

comprende tra le direzioni delle rette s' ed s è pari a 90° , allora si ha simmetria assiale retta. È semplice verificare che il baricentro G di una sezione a simmetria assiale giace sul relativo asse di simmetria. Nel caso di area a simmetria retta, l'asse di simmetria è pure asse centrale di inerzia. Infatti è baricentrale e, rispetto ad esso ed a qualsivoglia asse ortogonale si annulla per simmetria il momento centrifugo I_{xy} . Nel caso di doppia simmetria retta sono pure assi centrali di inerzia. Si dice che un'area presenta simmetria polare quando esiste



un punto C tale che, se si considera un generico punto P appartenente all'area e la congiungente PC , e si riporta su tale segmento $CP' = CP$ dalla parte opposta di P rispetto a C , il punto P' è ancora all'area. Il baricentro di una sezione a simmetria polare coincide con il suo centro geometrico C .

◆ AREE A GEOMETRIA ELEMENTARE

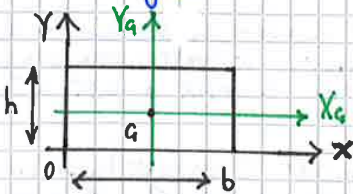
Per i momenti statici e d'inerzia valgono le proprietà distributive

$$S \left(\bigcup_i A_i \right) = \sum_i S(A_i)$$

$$I \left(\bigcup_i A_i \right) = \sum_i I(A_i)$$

→ ovvero, di una sezione composta da figure elementari più semplici: S e I possono calcolarsi come la somma degli S_i e I_i degli elementi più semplici.

• rettangolo



$$S_x = A y_G = \frac{1}{2} b h^2$$

$$S_y = A x_G = \frac{1}{2} h b^2$$

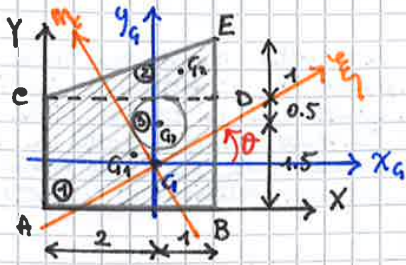
$$I_{x_c x_c} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dx dy = \frac{b h^3}{12}$$

$$I_{xx} = I_{x_c x_c} + A y_G^2 = \frac{b h^3}{12} + \frac{b h^3}{4} = \frac{b h^3}{3}$$

$$I_{yy} = I_{y_c y_c} + A x_G^2 = \frac{h b^3}{12} + \frac{h b^3}{4} = \frac{h b^3}{3}$$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + A x_G y_G = 0 + b h \left(-\frac{b}{2}\right) \left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{b^2 h^2}{4}$$

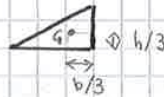
► ESEMPIO DI CALCOLO (ALGORITMO)



Sezione piena (eccetto per il cerchio)

- (1) Fisso un sistema di riferimento arbitrario (X, Y)
- (2) Scompongo la figura in parti elementari:
 - rettangolo ABCD
 - cerchio
 - triangolo CDE
- (3) Calcolo il baricentro delle figure scomposte.

- $G_1 (1.5 ; 1)$
- △ $G_2 (2 ; 2.333)$
- $G_3 (2 ; 1.5)$



(4) Calcolo la tabella con le caratteristiche geometriche della sezione

	[mm ²]	[mm ²]	[mm ²]	[mm ³]	[mm ³]	[mm ⁴]	[mm ⁴]	[mm ⁴]
SEZIONE	$x_{G,i}$	$y_{G,i}$	A_i	$S_{x,i}$	$S_{y,i}$	$I_{x_{G,i}}$	$I_{y_{G,i}}$	$I_{x_{G,i}y_{G,i}}$
①	$x_{G,1}$	$y_{G,1}$	⊕ (piena)	+	+	+	+	+
②	$x_{G,2}$	$y_{G,2}$	⊕	+	+	+	+	+
③	$x_{G,3}$	$y_{G,3}$	⊖ (vuota)	-	-	-	-	-
TOT.	x_G	y_G	ΣA_{TOT}	ΣS_x	ΣS_y	ΣI_{x_G}	ΣI_{y_G}	$\Sigma I_{x_G y_G}$

$$\begin{cases} S_{x,i} = A_i y_{G,i} \\ S_{y,i} = A_i x_{G,i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{S_y}{A_{TOT}} \\ y_G = \frac{S_x}{A_{TOT}} \end{cases}$$

INERZIE PROPRIE (da formulario)

INERZIE TRASPORTE

$$\begin{cases} I_{x_G,i} = I_{x_G x_{G,i}} + A_i (y_G - y_{G,i})^2 \\ I_{y_G,i} = I_{y_G y_{G,i}} + A_i (x_G - x_{G,i})^2 \\ I_{x_G y_G,i} = I_{x_G y_G,i} + A_i (x_G - x_{G,i})(y_G - y_{G,i}) \end{cases}$$

sempre ⊕ ma nella tab può venire negativo se devo togliere un'area vuota

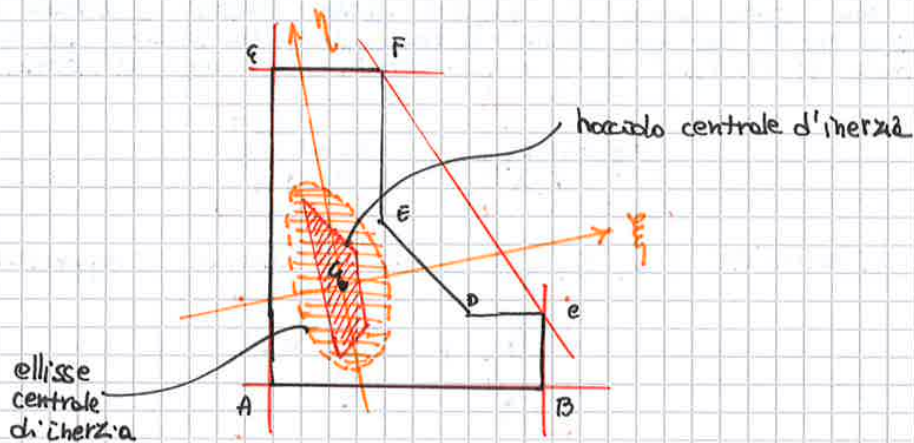
può venire anche negativo

▷ NOCCILO CENTRALE DI INERZIA

Si definisce nocciolo centrale di inerzia \mathcal{I} di una figura piana σ il luogo dei centri relativi delle rette del piano che non tagliano la figura.

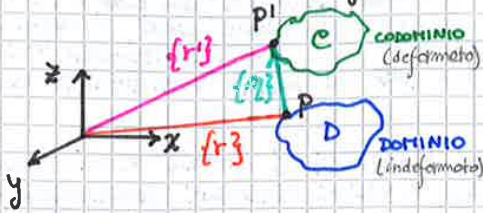
- il baricentro di σ è sulla figura
- il contorno del nocciolo è il luogo degli antipoli delle rette tangenti alla frontiera della figura senza tagliarla.
- qualunque sia la forma della figura, concava o convessa, il nocciolo è sempre una figura convessa.

Se la frontiera della figura ha un punto angoloso, il contorno del nocciolo ha un tratto rettilineo. Se la frontiera ha un tratto rettilineo, il contorno del nocciolo ha per tanto un punto angoloso.



✧ MISURA DELLE DEFORMAZIONI

Per la misura delle deformazioni dobbiamo introdurre le quantità di tipo infinitesimale. Consideriamo un corpo nello spazio tridimensionale, avendo definito una terna di assi (x, y, z) descritto da un dominio D di punti nello spazio. A deformazione avvenuta per effetto delle sollecitazioni esterne, il corpo si è trasformato nella configurazione C (codominio) attraverso una generica trasformazione di spostamento.



Il generico punto P nella configurazione indeformata si è portato nella configurazione deformata P' . Il punto P è individuato dal raggio vettore $\{r\}$ il quale si è trasformato in $\{r'\}$ corrispondente al punto P' .

$$\{\eta_p\} = \{r'\} - \{r\}$$

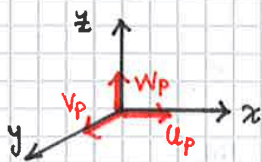
$$\overline{PP'} = \{\eta\} = \text{vettore spostamento} = \{P' - P\}$$

Più in generale vogliamo trovare una **funzione spostamento** f tale che ci porti dal dominio D al codominio C attraverso una trasformazione nello spazio tridimensionale (in \mathbb{R}^3) ovvero:

modi equivalenti per esprimere la funzione spostamento

$$\left\{ \begin{array}{l} f: D \rightarrow C \\ f: \{r\} \rightarrow \{r'\} \\ f: P \rightarrow \{\eta_p\} \end{array} \right. \quad \text{con} \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Definiamo adesso le componenti spaziali del vettore spostamento η che collega P a P' :



$$\{\eta_p\} = \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x_p, y_p, z_p) \\ v(x_p, y_p, z_p) \\ w(x_p, y_p, z_p) \end{Bmatrix}$$

La funzione f è una funzione che al suo interno ha sia la **deformazione**, e sia il **moto rigido** (traslazione e rotazione). Ma noi dobbiamo **eliminare** la parte rototraslativa (escludendo quindi i moti rigidi) per descrivere la deformazione.

La funzione spostamento è: ↙ invertibile

- CONTINUA E BIUNIVUCA $\rightarrow f$ e f^{-1}
- DERIVABILE n volte \Rightarrow no punti singolari
- INVERTIBILE

Devono essere degli omeomorfismi (ovvero valgono tutte queste proprietà)

Inoltre non devono esistere né fratture né penetrazioni.

Adesso dobbiamo scomporre J_p nella componente di rotazione rigida e nella componente di deformazione.

Se ci fosse solo rotazione la matrice $[J_p] \equiv [\varphi]$

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{MATRICE DI ROTAZIONE} \\ \text{RIGIDA ANTISIMMETRICA} \\ (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) \rightarrow 3 \text{ rotazioni} \\ \text{rispetto i 3} \\ \text{assi coordinati} \end{array}$$

La matrice $[J_p]$ è una matrice quadrata, posso scriverla dunque come somma di una parte simmetrica ed una antisimmetrica: in questo modo posso deporre la parte antisimmetrica e lasciare solo la deformazione.

- ↳ COMPONENTE DI MOTO RIGIDO (matrice antisimmetrica nota)
- ↳ COMPONENTE DI DEFORMAZIONE (simmetrica)

$$[J_p] = \frac{1}{2} ([J_p] + [J_p]^T) + \frac{1}{2} ([J_p] - [J_p]^T)$$

(simmetrica) MATRICE DI DEFORMAZIONE $\rightarrow [\epsilon_p]$

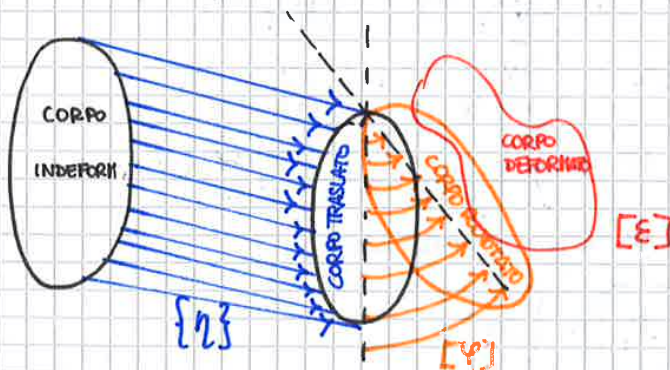
$[\varphi_p] \leftarrow$ MATRICE DI ROTAZIONE (antisimmetrica)

$$\Rightarrow [J_p] = [\epsilon_p] + [\varphi_p]$$

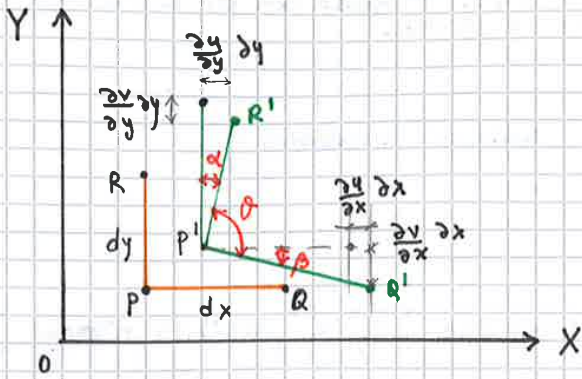
↳ contiene solo variazione di forma e variazione di volume

Ritornando al vettore spostamento $\{u_a\}$ può essere riscritto come somma di 3 contributi:

$$\{u_a\} = \underbrace{[u_p]}_{\text{TRASLAZIONE}} + \underbrace{[\varphi_p] \{dr\}}_{\text{ROTAZIONE}} + \underbrace{[\epsilon_p] \{dr\}}_{\text{DEFORMAZIONE}}$$



→ Significato geometrico - fisico delle componenti di $[E_p]$



In questo grafico leggiamo sia il moto rigido sia la deformazione.
 Caso piano, 2 fibre PR e una fibra PA (configurazione indeformata)
 In configurazione deformata $P \rightarrow P'$, $R \rightarrow R'$
 $\alpha \rightarrow \alpha'$. Le fibre "si accorciano" e si allungano

Se $\alpha = \beta \rightarrow$ rotazione rigida $\Rightarrow \gamma = 0$
 ($\theta = 90^\circ$)

Ma $\alpha \neq \beta \Rightarrow$ distorsione angolare $\gamma \neq 0$
 ($\theta \neq 90^\circ$)

◇ DEFORMAZIONI ASSIALI

$$\epsilon_x = \frac{L_{finale} - L_{iniziale}}{L_{iniziale}} = \frac{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

→ DILATAZIONI SPECIFICHE LUNGO GLI ASSI COORDINATI

◇ SORRIMENTI ANGOLARI

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta = \alpha + \beta \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

↓ scorrimento tra le fibre x, y

CONVENZIONI DI SEGNO

$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon \oplus \rightarrow \text{ALLUNGAMENTO} \Rightarrow \text{fibre in TRAZIONE} \\ \epsilon \ominus \rightarrow \text{ACCORCIAMENTO} \Rightarrow \text{fibre in CONTRAZIONE} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \oplus \rightarrow \text{diminuzione angolo} \Rightarrow < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{fibre si restringono} \\ \gamma \ominus \rightarrow \text{aumenta l'angolo} \Rightarrow > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{fibre si allargano} \end{array} \right.$

$$\alpha = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \beta = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \alpha + \beta = \gamma_{xy}$$

↳ CINEMATICA LINEARIZZATA: rapporto tra cateti \rightarrow tangente, ma poiché α e β piccoli posso confondere la tg con gli angoli stessi