



**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 2124A-**

**ANNO: 2017**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Canobbio**

**MATERIA: Instabilità statica e dinamica delle strutture  
(Carpineri) - Prof. Tomalino**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

4 ottobre 2016

collassi di vari tipi che possono interagire tra loro

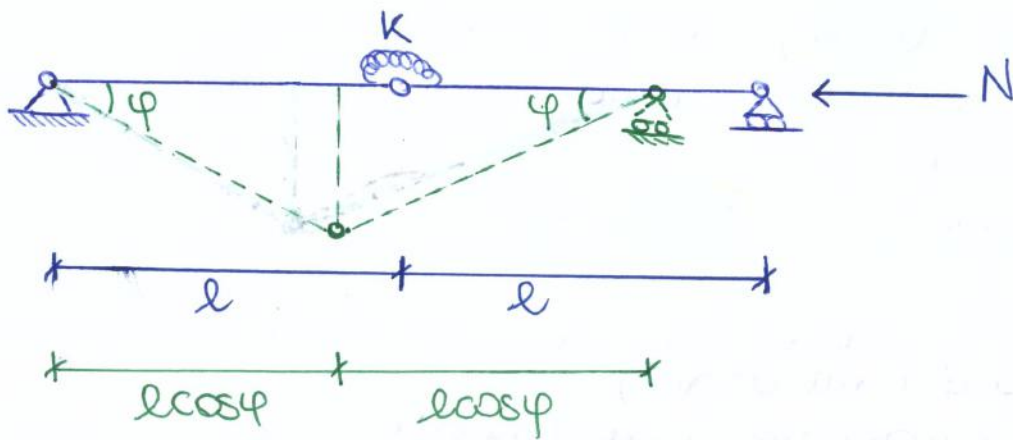
carico di punta (INSTABILITÀ STATICA) - risonanza (DINAMICA) → possono interagire e dare un collasso combinato

27.2

# SISTEMI DISCRETI CAP. 17 (L1)

Sistema che ha un'elasticità concentrata, non diffusa nel senso che ci sono delle CERNIERE ELASTICHE. servono per introdurre l'analisi numerica delle strutture.

- ⊕ trave rettilinea, composta da due bracci rigidi collegati da una cerniera elastica o molla rotazionale → molla elastica con rigidità rotazionale (proporzione tra momento e rotazione).



si mostra la deformata dovuta al carico di punta. l'elasticità è concentrata nella molla centrata.

C'è un carico di punta  $N$ , se non ci fossero perturbazioni laterali il carico verrebbe equilibrato da un carico uguale e contrario nella cerniera a sinistra (sistema in equilibrio). Se  $N$  fosse di trazione → equilibrio stabile

Questo è un caso di EQUILIBRIO INSTABILE.

⊕ Perturbazione = deformazione rispetto alla rettilinearità. si utilizza il metodo ENERGETICO → si calcola l'energia potenziale totale.

È una parabola con concavità verso l'alto, quindi ha un punto di minimo.

ci sono due rami, uno a sinistra e uno a destra simmetrici.

Aumento  $N$ :

1)  $N < \frac{2k}{l}$   $\Rightarrow$  mi muovo sulla verticale e non c'è spostamento  $\Rightarrow$  andamento di tipo rigido

2)  $N = \frac{2k}{l}$   $\Rightarrow$  incontro punto di biforcazione

3)  $N > \frac{2k}{l}$   $\Rightarrow$  ramo post-critico  $\Rightarrow$  lo si percorre dopo aver raggiunto il punto critico  $\frac{2k}{l}$ .  
È un tratto incudente, aumenta rigidezza.

Se si fa l'ipotesi di non avere alcuna perturbazione il moto continua sul tratto rettilineo.

Nel tratto rettilineo se si ha una perturbazione si passa al ramo post-critico - o curva metastabile.

La curva metastabile divide in due settori il piano  $N-\varphi$   $\Rightarrow$  area superiore instabile, quella inferiore stabile.

Applicando forza  $N$  crescente  $\Rightarrow$  aumenta anche  $\varphi$   $\Rightarrow$  il punto  $N-\varphi$  è dato dalla curva.

Studio della funzione:

$$W'(0) = W''(0) = W'''(0) = 0$$

$$W''(0) = 4k > 0$$

prima derivata non nulla nell'origine, questo vuol dire che c'è un punto di minimo e quindi tratto incudente.

### METODO DEL EQUILIBRIO DIRETTO

Eguaglia un momento instabilizzante e un momento stabilizzante.

$$M_i = M_s$$

$$\begin{cases} M_i = Nl \sin \varphi \cong Nl \varphi \\ M_s = 2K\varphi \end{cases}$$

forza  $N \times$  braccio

$k \times$  angolo rotaz. relativa  $2\varphi$

Ho una parabola con concavità verso il basso, il ramo post-critico non è più incedente, ma è un ramo di softening.

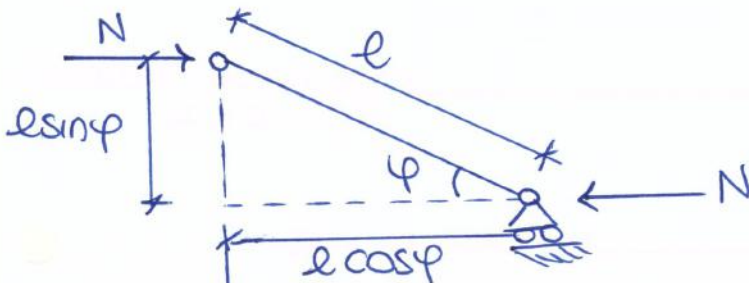
Curva metastabile divide sempre il piano in un'area stabile e una instabile

Prima si percorre tratto rettilineo (comportamento rigido) fino al punto di criticità o di biforcazione, poi il comportamento della struttura diventa di softening. Il softening è un collasso ancora più grave.

$W^{IV} = -3Kl^2 < 0$  È un massimo, non un minimo e poi softening.

### METODO DEL EQUILIBRIO DIRETTO

$$\begin{cases} M_i = Nl \sin \varphi \\ M_s = \frac{1}{2} Kl^2 \sin \varphi \cos \varphi \end{cases} \rightarrow M_i = M_s$$



$\frac{1}{2} Kl \sin \varphi$  elouazione  
 ↳ Ho mezza struttura → pseudo meta forza  
 ↳ È la forza della molla, è stabilizzante

Otengo gli stessi risultati di prima.

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = x_1 \left( \frac{5K}{l^2} - \frac{2N}{l} \right) - x_2 \left( \frac{4K}{l^2} - \frac{N}{l} \right) = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_2} = -x_1 \left( \frac{4K}{l^2} - \frac{N}{l} \right) + x_2 \left( \frac{5K}{l^2} - \frac{2N}{l} \right) = 0$$

ottingo un sistema di due equazioni lineari omogenee  
 È un problema agli autovalori  $\rightarrow N$  critico è l'autovalore.

I coefficienti sono composti da 2 parti: (matrice dei coeff. aenti)  
 1) rigidità molla  $\rightarrow$  matrice di rigidità del sistema elastica  
 2)  $l, N$ , non lineari  
 $\hookrightarrow$  matrice di rigidità geometrica

Il sistema è omogeneo, non ci interessa la soluzione ovvia (molla si sposta), per cercare soluzione dopo il determinante uguale a zero.

$$\begin{vmatrix} \left( \frac{5K}{l^2} - \frac{2N}{l} \right) & - \left( \frac{4K}{l^2} - \frac{N}{l} \right) \\ - \left( \frac{4K}{l^2} - \frac{N}{l} \right) & \left( \frac{5K}{l^2} - \frac{2N}{l} \right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\left( \frac{5K}{l^2} - \frac{2N}{l} \right)^2 - \left( \frac{4K}{l^2} - \frac{N}{l} \right)^2 = 0$$

ottingo eq. del secondo ordine:

$$N^2 - \frac{4K}{l}N + 3\frac{K^2}{l^2} = 0$$

autovalori:

$$\begin{cases} N_{c1} = \frac{K}{l} \\ N_{c2} = 3\frac{K}{l} \end{cases}$$

carichi critici

## METODO DELL'EQUILIBRIO DIRETTO

Ho due molle, quindi devo scrivere due volte l'equilibrio. (Equilibrio rispetto alla cerniera)

$$\begin{cases} Nx_1 = k \left( \frac{x_1}{l} - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) \\ Nx_2 = k \left( \frac{x_2}{l} + \frac{x_2 - x_1}{l} \right) \end{cases}$$

raccolgo  $x_1$  e  $x_2$ :

$$\begin{cases} x_1 \left( N - \frac{2k}{l} \right) + \frac{k}{l} x_2 = 0 \\ \frac{k}{l} x_1 + x_2 \left( N - \frac{2k}{l} \right) = 0 \end{cases}$$

otengo sistema omogeneo di due equazioni in due incognite. Le equazioni non sono le stesse di prima.

Annullo il determinante:

$$\begin{vmatrix} \left( N - \frac{2k}{l} \right) & \frac{k}{l} \\ \frac{k}{l} & \left( N - \frac{2k}{l} \right) \end{vmatrix} = 0$$

$$N^2 - \frac{4k}{l} N + 3 \frac{k^2}{l^2} = 0$$

Equazione caratteristica è la stessa di prima.

Trovo i 2 autovalori e autovettori di prima.

I primi addendi dei coefficienti rappresentano la matrice di rigidità elastica.

I secondi addendi si trovano moltiplicando  $-N \times$  matrice  $2 \times 2$ . Non entra la rigidità, per questo si chiama geometrica.

$$-N \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & -\frac{1}{2l} \\ -\frac{1}{2l} & \frac{2}{3l} \end{bmatrix}$$

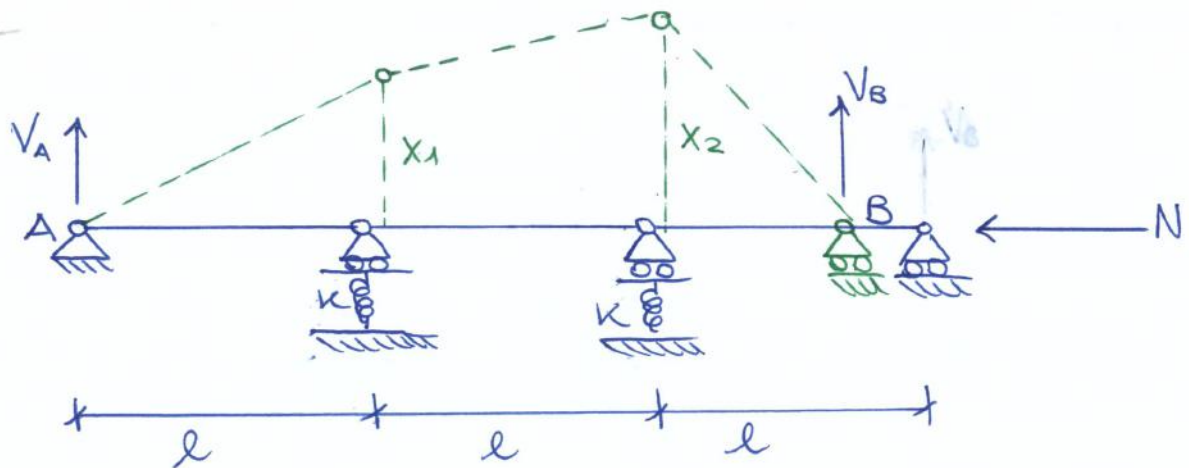
La matrice:

$$\begin{vmatrix} \left(N - \frac{2K}{l}\right) & \frac{K}{l} \\ \frac{K}{l} & \left(N - \frac{2K}{l}\right) \end{vmatrix} = 0$$

non ha un vero e proprio significato fisico.

Se si pone  $N=0$  si ottiene una matrice diagonale  $\rightarrow$  sono i due momenti reattivi delle molle.

### EF) APPOGGI ELASTICI



Due appoggi elastici intermedi, simula caso dell'instabilità di una trave su suolo elastico.

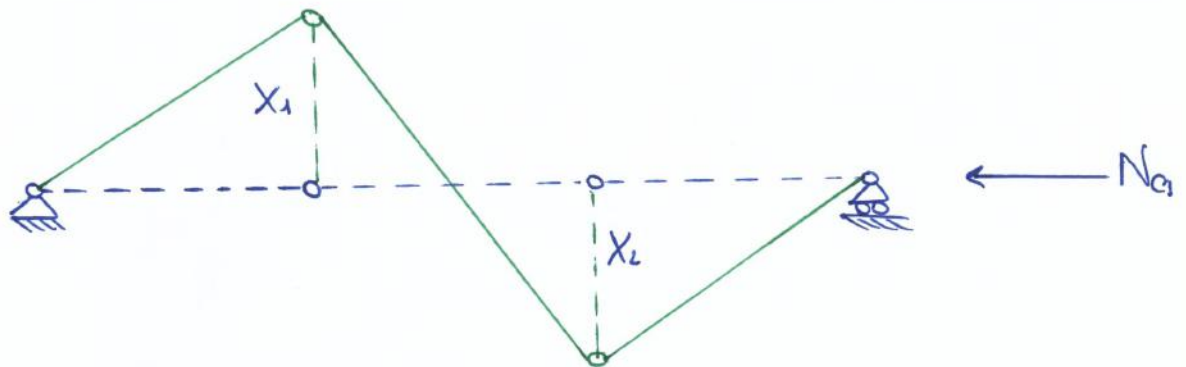


AUTOVETTORI:

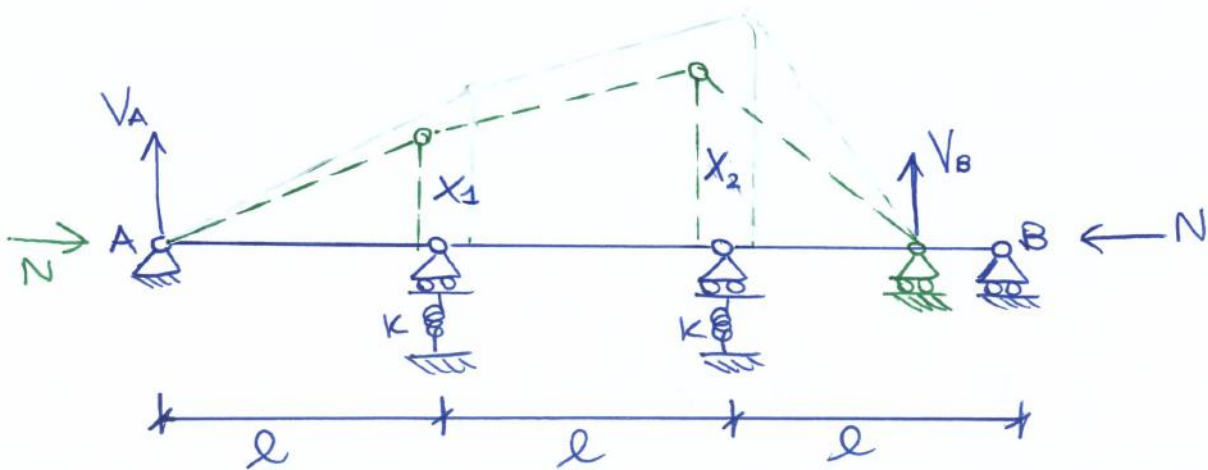
$$\begin{cases} X_1 \left( k - \frac{2N}{l} \right) + \frac{N}{l} X_2 = 0 \\ \frac{N}{l} X_1 + X_2 \left( k - \frac{2N}{l} \right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = -X_2 \\ X_1 = X_2 \end{cases}$$

Il primo autovettore è quello che mi interessa, è l'opposto dell'esempio precedente.

DEFORMATA:



METODO DIRETTO:



Scrivo equilibrio delle due aste estreme rispetto alle cerniere intermedie:

$$\textcircled{*} \begin{cases} N x_1 = V_A l \\ N x_2 = V_B l \\ M_f = M_i \end{cases}$$

Devo ricavare  $x_1$  e  $x_2$

## GENERALIZZAZIONE.

Il problema può porsi nella forma seguente:

$$([K] - \lambda[K_g])\{\delta\} = \{0\}$$

$[K]$  = matr. di RIGIDEZZA ELASTICA

$[K_g]$  = matr. di RIGIDEZZA GEOMETRICA

$\{\delta\}$  = vettore degli spostamenti nodali

$\lambda$  = moltiplicatore dei carichi.

matrice  $[K]$ , 3 operazioni:

- 1) Rotazione
- 2) Espansione
- 3) Assemblaggio

Problema: sistema di equazioni lineari ed omogenee, per scartare la soluzione ovvia, bisogna annullare ~~la~~ il determinante della matrice dei coefficienti.

$$\text{Det}([K] - \lambda[K_g]) = 0$$

La mia incognita è  $\lambda$ .  $\rightarrow$  autovalore.

Il minimo autovalore è detto moltiplicatore critico dei carichi.

La matrice geometrica è uguale nei due casi precedenti:

$$[K_g] = \begin{bmatrix} \frac{2}{l} & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{2}{l} \end{bmatrix}$$

È solo funzione della geometria, ma c'è  $(k)$ .

$$\frac{M^2}{EI} = M \chi \quad \chi = \frac{M}{EI} \text{ curvatura}$$

1° addendo = potenziale elastico

2° e 3° addendo = potenziale legato ai carichi (ho 2 carichi quindi 2 termini)

-  $Nw$  = lavoro è avvolgimento integrale

↳  $N$  = carico concentrato

↳  $w$  = spostamento, è l'avvicinamento della cerniera di destra a quella di sinistra.

↳ È un termine che non può essere trascurato perché è la causa dell'instabilità.

↳ È una grandezza integrale

$$-\int_0^e q(z) v(z) dz = \text{forze distribuite per gli spostamenti}$$

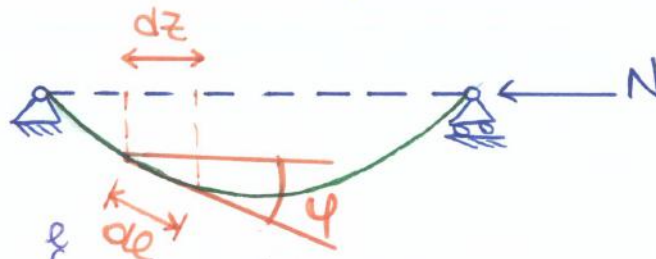
( $q(z)$ )

( $v(z)$ )

↳ perturbazione, funzione spostamento

### • CALCOLO (w)

Non ho una deformata tipica.



$$w = \int_0^e (de - dz) = \int_0^e (1 - \cos \phi) de$$

de = lunghezza segmento infinitesimo

dz = proiezione del segmento

$\phi$  = rotazione non costante, è una funzione puntuale

↳ è la derivata di (1).

Applico la regola di variazione (= a quella di derivazione del prodotto di due funzioni):

$$\hookrightarrow d(g \cdot f) = dg \cdot f + df \cdot g$$

$$\hookrightarrow \delta(g \cdot f) = g \cdot \delta f + \delta g \cdot f$$

$$\delta W = \int_0^l (EI \delta v'' \delta v'' - N \delta v' \delta v' - q \delta v) dz = 0$$

$\hookrightarrow$  impiego stazionarietà

$$[\delta v''^2 \rightarrow \delta(\delta v''^2) = 2 \delta v'' \delta v'']$$

$\hookrightarrow$  mi elide  $\frac{1}{2}$

Faccio una doppia integrazione per parti:

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

$$\delta W = \left[ EI \delta v'' \delta v' \right]_0^l - \int_0^l EI \delta v'' \delta v' dz + \left[ -N \delta v' \delta v \right]_0^l + \int_0^l N \delta v'' \delta v dz + \int_0^l -q \delta v dz$$

$$- \left[ (EI \delta v'' + N \delta v') \delta v \right]_0^l + \left[ EI \delta v'' \delta v' \right]_0^l + \int_0^l (EI \delta v'' + N \delta v'' - q) \delta v dz = 0$$

I<sup>a</sup> INTEGRANDI

II<sup>a</sup> INT:

L'annullamento dell'integrale deve valere per qualsiasi variazione  $\Rightarrow$  devo essere nulli sia i due termini finiti che quelli integrali

$\hookrightarrow$  Annullo la parte tra parentesi tonda:

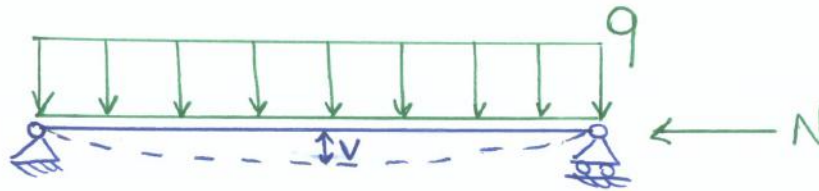
$$EI \delta v'' + N \delta v'' - q = 0$$

[ se pongo  $N=0$  ritrovo eq. della linea elastica  
 $\hookrightarrow$  Eq. della linea elastica con i termini del II° ordine  
 termini finiti sono nulli basta che sia nullo agli estremi:

$$\underbrace{(EI \delta v'' + N \delta v')}_{\text{taglio}} \delta v = 0 \quad \text{per } z=0, l$$

$$\underbrace{(EI \delta v'')}_{\text{momento costante}} \delta v' = 0 \quad \text{per } z=0, l$$

## CARICO TRASVERSALE UNIFORME



$$q = \text{cost}$$

Ho un'eq. non omogenea:  $EI \lambda^4 + N \lambda^2 = 0$  2 radici eq. integrale generale

$$v(z) = \underbrace{A \cos \alpha z + B \sin \alpha z + Cz + D}_{\text{Int. generale}} + \underbrace{\frac{qz^2}{2N}}_{\text{Integrale particolare}}$$

con  $\alpha^2 = \frac{N}{EI}$   $\frac{\text{autov. (o)z}}{\text{rigidità}}$   $[\alpha] = [L^{-1}]$

Ho 4 costanti e 4 equazioni al contorno  $\rightarrow$  ho eq. elast. ca del quarto ordine.

Condizioni al contorno:

$$v(0) = v(l) = EI v''(0) = EI v''(l) = 0$$

$\hookrightarrow$  due di tipo cinematico e due di tipo statico

Ricavo:

$$\begin{cases} A = -D = \frac{q}{\alpha^2 N} \\ B = \frac{q}{\alpha^2 N} \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l} \\ C = -\frac{q l}{2N} \end{cases}$$

Sostituisco le costanti ed ottengo:

$$v(z) = \frac{q}{N} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \left[ (1 - \cos \alpha l) \frac{\sin \alpha z}{\sin \alpha l} - (1 - \cos \alpha z) \right] - \frac{z(l-z)}{2} \right\}$$

al denominatore ho  $\sin \alpha l \rightarrow$  quando  $\alpha l = \pi \Rightarrow \sin \pi = 0$

$\rightarrow v$  tende all'infinito

$$\alpha l \rightarrow \pi \quad N \Rightarrow N_c = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

scarto la soluzione ovvia e quindi accetto la soluzione a meno di un fattore.

Annullo il determinante della matrice e trovo la soluzione:

$$\sin \alpha l = 0 \rightarrow \alpha l = n\pi \rightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{l}$$

$$\alpha^2 = \frac{N}{EI} \rightarrow N_{cr} = \alpha^2 EI = n^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

METODO DELL'EQUILIBRIO DIRETTO

$$M_i = M_f$$

$$\begin{cases} M_i = N\sigma \\ M_f = -EI \frac{d^2 \sigma}{dz^2} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \sigma \text{ varia sezione per sezione} \\ \Rightarrow \text{momento di richiamo elastico} \end{array}$$

↳ solo da calcolare sezione per sezione:

ottengo:

$$\sigma'' + \alpha^2 \sigma = 0 \quad \alpha^2 = \frac{N}{EI}$$

se la derivo due volte coincide con l'eq. della linea elastica: con effetti del II° ordine.

$$\sigma^{IV} + \alpha^2 \sigma'' = EI \sigma^{IV} + N \sigma'' = 0$$

l'eq. del II° ordine vale solo quando  $q=0$ .

$$\sigma'' + \alpha^2 \sigma = 0 \rightarrow \text{omogenea associata: } \lambda^2 + \alpha^2 \lambda = 0$$

$$\lambda = -\alpha^2$$

$$\sigma(z) = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z$$

uso solo 2 condizioni al contorno:

$$\sigma(0) = \sigma(l) = 0$$

snellezza limite:

$$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

↳ per gli acciai  $\lambda_{lim} \approx 100 \left[ \frac{E}{\sigma_p} \cdot 10^3 \right]$

Guardo slides 24 ÷ 29 - 32 - 33

CARICO TERMICO:

trave 2 appoggi:  $\Delta T_c = \frac{\pi^2}{\alpha \lambda^2}$        $\alpha = \text{coeff. dilatazione termica}$

trave 2 incastrati:  $\Delta T_c = \frac{4\pi^2}{\alpha \lambda^2}$

## INSTABILITÀ DEI TELAI 17.5

Devo usare concetti del calcolo automatico dei telai  
 → concetto di matrice di rigidezza elastica

↓  
 matrice locale 4x4, esclusa deformabilità assiale.

Devo passare dalla dimensione 4 alla dimensione globale

① dare  $n$  è il n° di gradi di libertà del telaio. Lo

faccio con 3 operazioni:

- 1) rotazione
- 2) espansione
- 3) somma, assemblaggio

$$U_i(z) = \{ \eta_i \}^T \{ \delta_i \}$$

(1x4)    (4x1)

funzioni di forma  $\{ \eta_i \} \Rightarrow$  sono delle cubiche

$\{ \delta_i \} =$  vettore degli spostamenti nodali

$U_i(z) =$  spostamento trasversale.

vettore delle forze nodali equivalenti:

$$\{F_i\} = \int_0^L q_i \{\eta_i\} dx$$

↳ sono tutte matrici locali  $\Rightarrow$  devo ruotarle, espanderle per poi sommarle tutte per ottenere matrice globale

Problema agli autovalori:

$$\text{Det}([K] - \lambda [K_g]) = 0$$

$[K]$  e  $[K_g]$  sono matrici globali

$\lambda$  è il moltiplicatore dei carichi.



$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \rightarrow \underline{\underline{\sigma''}}$$

ho tre termini della derivata seconda

C'è un'analogia formale tra le due trattazioni.

L'equazione di Sophie-Germain si ricava imponendo la stazionarietà del potenziale totale

Nell'equazione ho 3 parametri, quindi almeno 2 autogradi di libertà → problema di interazione tra autogradi:  
(I calcoli seguenti non sono richiesti)

Si parte dal potenziale elastico:

$$\Phi = -\frac{1}{2} \left( M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

↓ momenti flettenti
 ↓ momento torcente

Il potenziale elastico è ottenuto moltiplicando ciascun momento per la sua caratteristica deformativa duale.

Uso le equazioni costitutive:

$$\begin{cases} M_x = D(\chi_x + \nu \chi_y) \\ M_y = D(\chi_y + \nu \chi_x) \\ M_{xy} = \frac{D(1-\nu)}{2} \chi_{xy} \end{cases}$$

le inserisco nell'equazione di  $\Phi$  ed esprimo le caratteristiche come derivate seconde dello spostamento  $w$ :

$$\Phi = \frac{1}{2} D \left[ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \right] + D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2$$

Energia potenziale dovuta ai carichi:

$$\Phi_N = \frac{1}{2} \left[ N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \right]$$

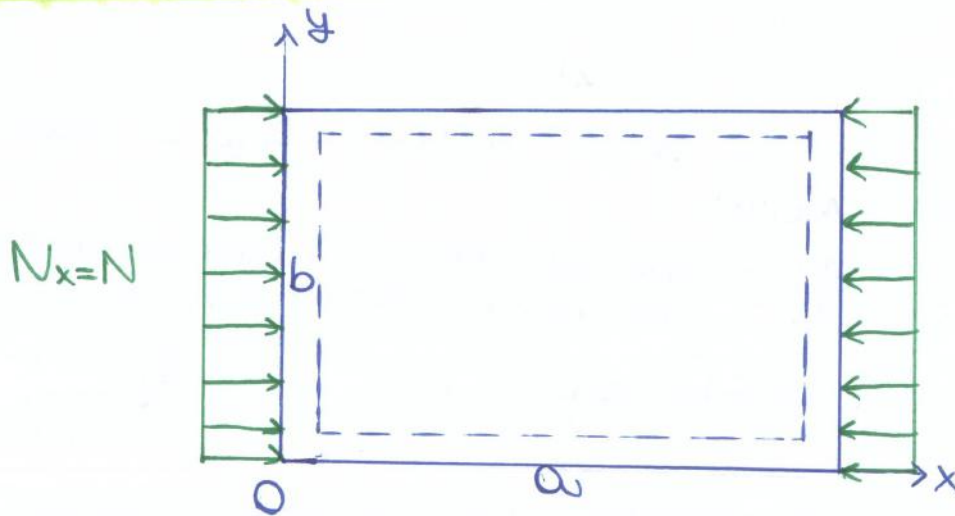
rappresenta uno scorrimento apparente

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{1}{2} D \int_A \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y^2} \right) - 2 \left( \frac{\partial w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y^2} \right) + \right. \\
 & + 2 \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2 \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \left. \right] dx dy + \\
 & + \frac{1}{2} \int_A \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 N_{xy} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy
 \end{aligned}$$

Imponendo la stazionarietà di  $W$  si ottiene:

$$\begin{aligned}
 D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \\
 = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}$$

CASO: LASTRA RETTANGOLARE COMPRESSA ( $N_y = N_{xy} = 0$ )



dati di appoggio  $\Rightarrow$  vincola lo spostamento, ma non la rotazione.

Lastre caricate solo lungo una direzione

Ho appoggi sia sui lati corti ( $b$ ) che sui lati lunghi ( $a$ ) quindi non è assimilabile ad una trave.

Dall' equazione precedente ottengo:

$$N_c^{nm} = \pi^2 D \frac{a^2}{n^2} \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^2 = \pi^2 D \frac{a^2}{n^2} \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)$$

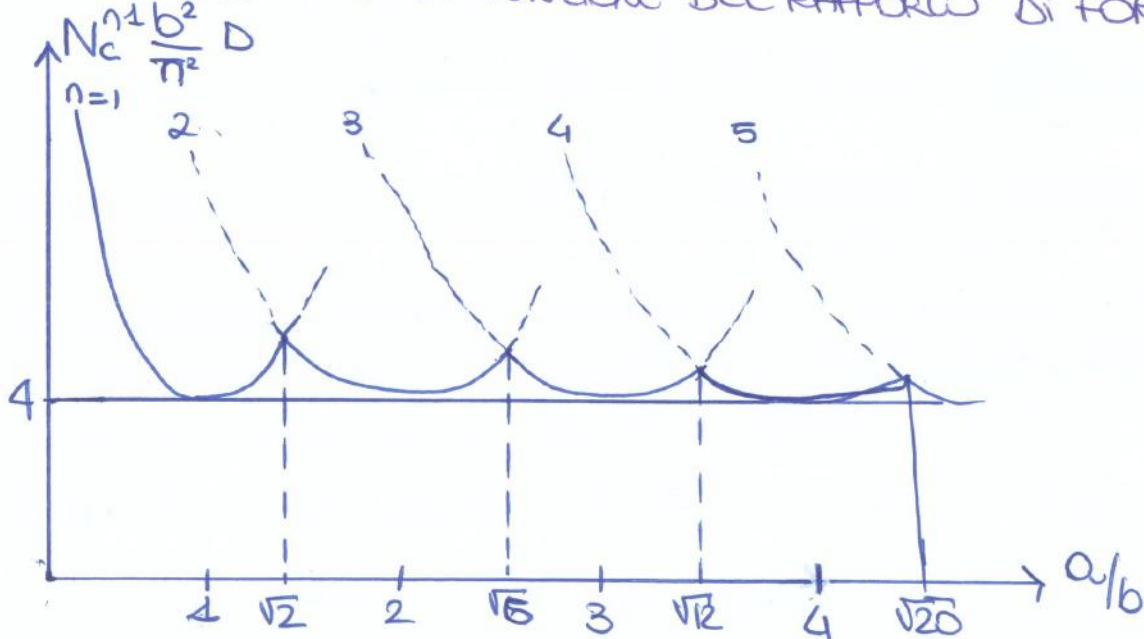
$m$  ed  $n$  non hanno simmetria  $\rightarrow$   $(n)$  è la direzione del carico ed  $(m)$  è ortogonale ad  $(n)$ .

Prendo la soluzione con  $m=1$  perché compare solo al numeratore ( $n$  c'è anche al denominatore, non posso prenderlo uguale a 1). Se  $m$  aumenta, aumenta  $N_c$ , con  $n$ , se aumenta  $N_c$  diminuisce quindi non posso farlo pari a 1.

$$N_c^{n1} = \pi^2 \frac{D}{b^2} \left( n \frac{b}{a} + \frac{1}{n} \frac{a}{b} \right)^2$$

Il carico critico dipende da  $(n)$  e dal rapporto  $\left(\frac{a}{b}\right)$ .  
Corrisponde ad una deformata con una sola semionda lungo il lato  $(b)$  ed  $(n)$  semionde lungo il lato  $(a)$ .

CARICO CRITICO  $N_c^{n1}$  IN FUNZIONE DEL RAPPORTO DI FORMA  $a/b$



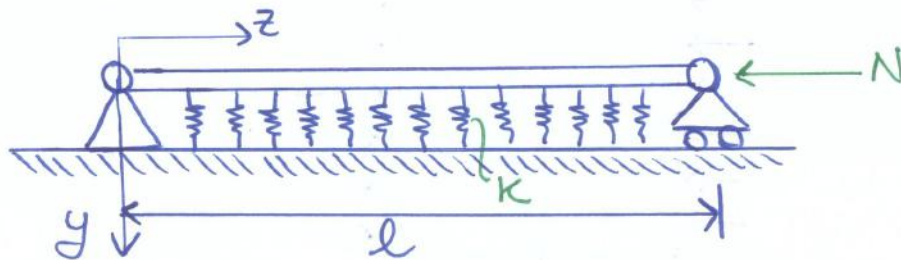
• per  $a/b > \sqrt{6}$  l'ho più di 3 semionde lungo  $x$ .

se  $a/b$  aumenta, aumenta il numero di semionde lungo  $x$ .

Il comportamento della lastra è analogo a quello di una trave su suolo elastico.

## TRAVE SU SUOLO ELASTICO 14.8

Suolo elastico alla Winkler con rigidità  $k$ .



Energia potenziale totale di una trave su suolo elastico:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l (EI v''^2 - N v'^2 + k v^2) dz$$

Al posto di  $-N v'^2$  ho  $-k v^2$  → il carico  $W$  è attivo, ma è reattivo ottengo  $k v^2$

METODO DI RITZ-GALERKIN → sviluppo in serie di funzioni sinusoidali (e  $v(z)$ ), l'abbassamento.

$$v(z) = \sum_n A_n \sin n\pi \frac{z}{l}$$

La funzione seno e coseno sono ortogonali → facendo variare  $n, m$  moltiplicando seno, se  $n \neq m$  l'integrale è zero.

Sostituire  $v(z)$  in  $W$ :

$$\int_0^l \sin n\pi \frac{z}{l} \sin m\pi \frac{z}{l} dz = \int_0^l \cos n\pi \frac{z}{l} \cos m\pi \frac{z}{l} dz = \frac{l}{2} \delta_{nm}$$

C'è analogia sia fisica che matematica, con lastra e trave.

Nella trave ho una serie continua di molle, nella lastra non ho le molle, ma i bordi lunghi orizzontali lavorano come un letto di molle, c'è la stessa costituzione lungo l'asse x.

I minimi delle curve si ottengono per:

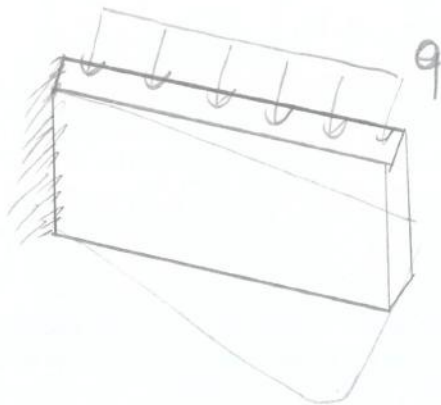
$$l = n\pi \sqrt[4]{\frac{EI}{k}}$$

ed il minimo carico critico vale:

$$N_{cn} = 2\sqrt{kEI}$$

17.4

## INSTABILITÀ FLESSO-TORSIONALE



Trave a sezione sottile con incastro.

Ho carico distribuito costante e sfrutto la rigidità maggiore.

La trave si inflette

È un caso di equilibrio elastico con possibile problema di instabilità torsionale.

Il carico  $q$  determina se l'equilibrio è stabile o instabile.

Può essere vista come una lastra.

La perturbazione può essere di due tipi:

1) flessione fuori dal piano

2) torsione

METODO DEL TRIANGOLO DIRETTO

$$\begin{cases} M_{zi} = m \frac{du}{dz} & = m \times \sin(\text{angolo}) = m \times \text{angolo} \\ & \text{momento torcente rispetto alla} \\ & \text{deformata (cateto piccolo)} \\ \\ M_{yi} = -m \varphi_z & = \sin \varphi_z \approx \varphi_z \\ & \text{segno } \ominus \text{ perché } \varphi \text{ verso il basso} \end{cases}$$

Seo entrambe momenti instabilizzanti  
 sollecitazioni stabilizzanti:

$$\begin{cases} M_{zf} = G I_t \frac{d\varphi_z}{dz} \\ M_{ys} = E I_y \frac{d^2 u}{dz^2} \end{cases}$$

Eguaglio due a due:

$$\begin{cases} M_{zf} = M_{zi} \\ M_{ys} = M_{yi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G I_t \frac{d\varphi_z}{dz} = m \frac{du}{dz} \\ E I_y \frac{d^2 u}{dz^2} = -m \varphi_z \end{cases}$$

Ipotizzo equilibrio  
 metastabile in  
 tutte le sezioni

Derivo la prima equazione e la sostituisco nella seconda:

$$\frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} + \frac{m^2}{E G I_y I_t} \varphi_z = 0$$

$m$  è l'autovalore.

Rispo:  $\alpha^2 = \frac{m^2}{E G I_y I_t}$

ottenpo:

$$\varphi_z'' + \alpha^2 \varphi_z = 0$$

ha la stessa forma dell'equazione di Eulero (carico di punta).

Vale anche per travi a sezione compatta, posso rimuovere l'ipotesi di sezione sottile.

Se ho  $I_x$  e  $I_y$  fissati  $\rightarrow m \downarrow$  se  $l \uparrow$

Se  $l$  è fissata e non è troppo grande giochiamo un ruolo importante  $I_x$  e  $I_y$ .

Sostituendo le espressioni di  $I_x$  e  $I_y$ :

$$M_c \propto \frac{1}{l} \sqrt{\left(\frac{b\delta^3}{12}\right) \left(\frac{1}{3}b\delta^3\right)} \propto \delta^3 \frac{b}{l}$$

$b = h$  altezza trave

$\delta =$  spessore

$b$  snellezza

Se  $h$  o  $\delta$  molto piccolo  $\rightarrow \delta \rightarrow 0$ ,  $\delta^3$  è ancora più piccolo e va ad abbattere il valore di  $M_c$ .

## TRAVI AD ASSE CURVILINEO: ARCHI E ANELLI

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & -\frac{1}{r} & 1 \\ \frac{1}{r} & \frac{d}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{bmatrix}$$

- sulla diagonale ho le derivate
- termine  $1$  legato alla definizione di  $(dw)$
- $-\frac{1}{r}$   $\rightarrow$  angolo che toglie dalla rotazione totale  $\varphi$
- $\frac{1}{r}$   $\rightarrow$  dilatazione appunto dovuta alla traslazione radiale

↓  
3 componenti della deformazione su due trave piana.

- $\sigma$  = scozzimento circolare medio
- $\varepsilon$  = dilatazione circonferenziale
- $\kappa$  = variazione di curvatura  
 $\hookrightarrow$  c'è una curvatura intrinseca a cui viene sommata una curvatura elastica.

- $u$  = spostamento radiale
- $w$  = spostamento circonferenziale
- $\varphi$  = rotazione

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = -\frac{dw}{ds} + \frac{u}{r} \\ \frac{dw}{ds} = -\frac{u}{r} \\ \kappa = \frac{d\varphi}{ds} \end{array} \right.$$

Le relazioni sono ottenute tramite le seguenti ipotesi semplificative: si esclude sia la deformabilità assiale ( $\varepsilon=0$ ) che quella di taglio ( $\gamma=0$ )





$$\overline{A'B'} \cos \omega = \overline{A'C}$$

$$\overline{B'O}^2 = \overline{A'O}^2 + \overline{A'B'}^2 - 2 \overline{A'O} \overline{A'C}$$

$$\overline{A'O} \overline{A'C} = \frac{1}{2} (\overline{A'O}^2 + \overline{A'B'}^2 - \overline{B'O}^2)$$

Introduco in  $M_{B'}$ :

$$M_{B'} = M_{A'} - \frac{1}{2} q \underbrace{(\overline{A'O}^2 - \overline{B'O}^2)}_{\text{raggi deformati}}$$

Poiché si ha:

$$\begin{cases} \overline{A'O} = R + \sigma_0 & \rightarrow \text{positivo} \\ \overline{B'O} = R + \sigma & \rightarrow \text{negativo} \end{cases}$$

$\sigma_0$  = fattore con cui viene moltiplicata la deformata  
 $\sigma$  = l'entità dell'auto-deformata.  
 $\sigma$  = variabile perturbata, v.a.

Inserisco in  $M_{B'}$  e trascuro infinitesimi di ordine superiore  $\rightarrow \sigma^2, \sigma_0^2$

$$M_{B'} = M_{A'} + qR(\sigma - \sigma_0)$$

↳ tutto negativo, anche  $M_{B'}$  diventa negativo

Inserisco  $M_{B'}$  nell'eq. della linea elastica e considero  $ds = R d\theta$

$$\frac{d^2 \sigma}{d\theta^2} + \sigma = - \frac{R^2}{EI} \underbrace{\left[ M_{A'} + qR(\sigma - \sigma_0) \right]}_{\rightarrow \frac{M_{B'}}{EI}}$$

$v(\theta)$  è un'autofunzione che descrive l'analisi, ma in termini ingegneristici si vuole conoscere l'autovalore, ovvero il carico critico.

Impongo le condizioni al contorno, non sono dovute ai vincoli ma alla simmetria:

$$\frac{dv}{d\theta} = \alpha A \cos \alpha \theta - \alpha B \sin \alpha \theta = 0 \quad \text{per } \theta = 0, \frac{\pi}{2}$$

ottenso:

$$\begin{cases} \alpha A = 0 \\ \alpha B \sin \frac{\alpha \pi}{2} = 0 \end{cases} \quad B \neq 0 \Rightarrow \text{costante arbitraria}$$

$$\begin{cases} \downarrow \\ A = 0 \\ \alpha \frac{\pi}{2} = n\pi \quad n = \text{numero naturale} \end{cases}$$

$$\underline{\alpha_n = 2n} \quad (\pi \text{ si elide})$$

Primo autovalore:

$$\alpha_1 = 2 \quad (n=1)$$

$$\alpha^2 = 4 \quad \alpha^2 = \frac{qR^3}{EI} + 1 = 4 \rightarrow q_c = \frac{3EI}{R^3} \quad \underline{\text{CARICO CRITICO}}$$

• Voglio trovare l'autofunzione  $v(\theta)$  e  $v_0$ .

Impongo la condizione:

$$v(\theta=0) = v_0$$

non è una condizione al contorno.

e dall'equazione di  $v(\theta)$  ricavo:

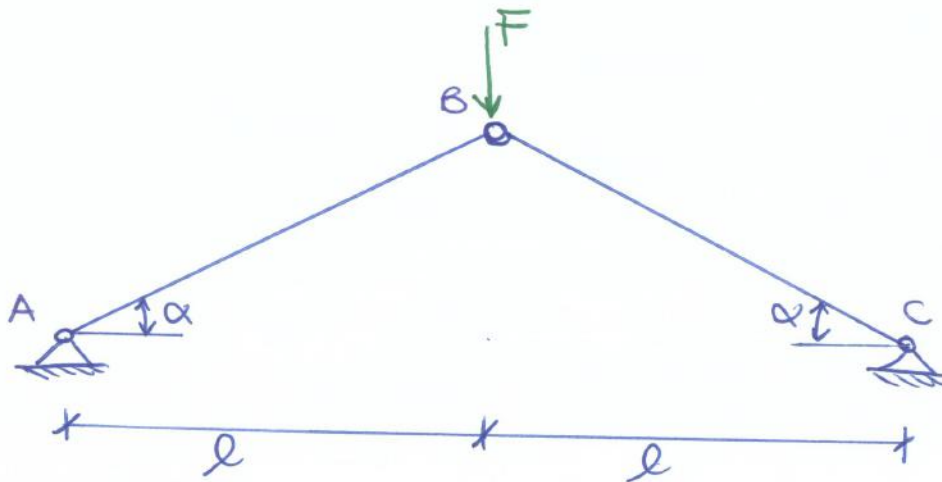
$$\begin{cases} B = \frac{M_A R^2 + v_0 EI}{qR^3 + EI} \\ A = 0 \end{cases}$$

$M_A, v_0 \Rightarrow$  sono incogniti

# ARCHI E GUSCI RIBASSATI SOGGETTI ALLA FORZA PESO 14.9

## • ARCHI RIBASSATI

cambia il tipo di collasso, è sempre un'instabilità dell'equilibrio elastico, ma cambiano le poteri, ovvero teno conto solo della deformazione ASSIALE e trascuro quella flessionale.



Cavalletto ribassato con forza concentrata in chiave  
Sono due travi, non hanno una propria curvatura, ma la curvatura viene vista come l'angolo tra le due parti inclinate.

Ribassamento è inteso come la frazione tra l'altezza dell'arco (freccia) diviso la luce (o meglio al contrario)

$$\frac{\text{luce}}{\text{freccia}} \approx 10 \text{ per essere pronunciato}$$

Si passa da un'instabilità di tipo Euleriana (arco non ribassato) al caso dello snap through (arco ribassato).  
Da un meccanismo di crisi in cui si attivavano le deformabilità flessionali ad uno in cui diventano più importanti le deformabilità assiali/membranali.

ENERGIA POTENZIALE LOCALE:

$$W(\varphi) = \phi(\varphi) - F\eta(\varphi)$$

$$W(\varphi) = \frac{1}{4} k l^2 \varphi^2 (2\alpha - \varphi)^2 - F l \varphi$$

Per trovare le condizioni di metastabilità derivo  $W(\varphi)$ :

$$W'(\varphi) = k l^2 \varphi (2\alpha^2 + \varphi^2 - 3\alpha\varphi) - F l = 0$$

ho un'equazione del 3° ordine

Se esplicito l'equazione rispetto ad  $F$ :

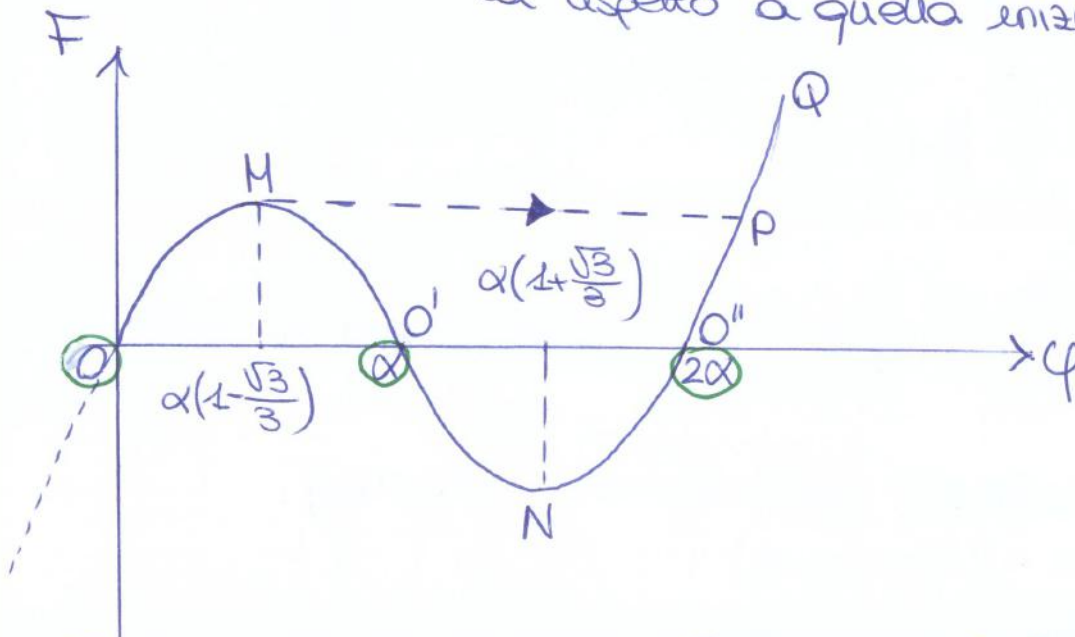
$$F = k l \varphi (\varphi - \alpha)(\varphi - 2\alpha)$$

l'espressione è una cubica, ha 3 zeri; incontra l'asse delle  $\varphi$  in 3 punti:

1) origine

2)  $\varphi = \alpha \Rightarrow$  ho le due balle allineate

3)  $\varphi = 2\alpha \Rightarrow$  ho una configurazione che è una rotazione rispetto a quella iniziale.



È una cubica, ha due punti stazionari, è polarsimmetrico attorno al punto  $\varphi = \alpha$  (non è l'origine).

La curva segue percorsi tutti metastabili

È possibile distinguere la prova a carico controllato o a deformazione controllata.

### A DEFORMAZIONE CONTROLLATA

Impiego deformazione e doppio valore forza come reazione vincolare  
 Parto da zero, arriva ad  $H$  (massimo), il sistema si è abbassato circa di  $\frac{\alpha}{2}$ , vado oltre impiego uno spostamento e la forza cala fino allo zero nel punto  $O'$  (bielle allungate e compresse  $\Rightarrow$  equilibrio INSTABILE)

Oltre ad  $O'$  la reazione vincolare diventa diretta verso l'alto ( $F < 0$ ) attivo al punto di minimo ( $\varphi \approx -\frac{\alpha}{2}$ )

dopo la  $F$  si spegne fino allo zero con  $\varphi = 2\alpha = -\alpha$  ( $O''$ )

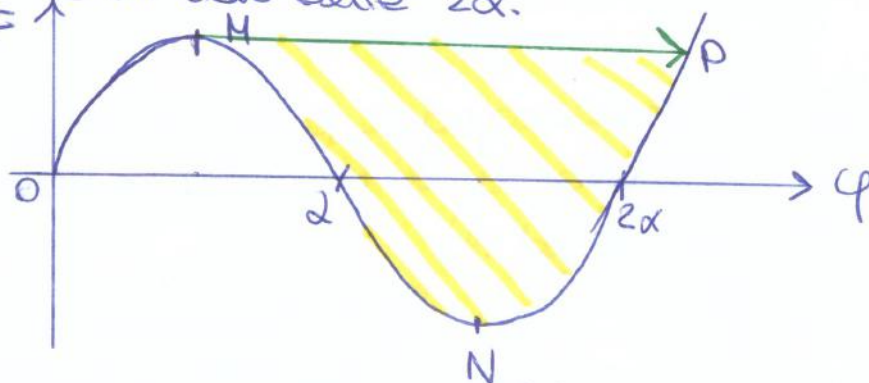
Oltre ad  $O''$  ho ramo STIFFENING dovuto alla sua linea zero geometrica  $\Rightarrow$  ramo verso l'alto indefinito.

### A CARICO CONTROLLATO

Impiego il carico.

Parto sempre dall'origine, da 0 ad  $H$  il carico aumenta linearmente fino al picco  $H$ , se continuo ad aumentare il carico avviene un salto della funzione ovvero il carico circa costante (aumento di un infinitesimo) ritorna l'equilibrio sul ramo opposto ad  $H$ , salto tutto il tratto

Tra  $H$  e  $P$  e mi trovo oltre  $2\alpha$ .



### SNAP THROUGH $\Rightarrow$ fenomeno di instabilità elastica

Quando c'è questo fenomeno si ha una grande discontinuità di spostamento (da uno spostamento piccolo ad uno relativamente grande) e si ha quindi un cedimento di energia d'area in giallo, moltiplicata per  $L$  trova l'energia liberata

2)

8 Novembre 2016

# • COPERTURE DI GRANDE LUCE: ASPETTI STORICI E FENOMENO DELLO SNAP-THROUGH

## → ASPETTI STORICI

Fine '800 - primi del '900 le strutture erano piuttosto massicce, mentre nel '900 si ha una visione più moderna delle coperture e si passa alla tendenza di coperture sottili e talmente sottili da resistere solo a sforzi membranali e adde flessionali. Sopportavano i carichi ~~fra~~ grazie alla loro forma.

Questa tendenza durò fino agli anni '70, quando per problemi di manutenzione, di invecchiamento dei materiali e per la semplicità di montaggio di strutture diverse si cambia tipologia e si passa a strutture reticolari.

La tendenza a strutture più sottili o snelle si ha per la resistenza dei materiali e si va incontro al collasso dovuto all'instabilità dell'equilibrio.

## • PANTHEON (Roma, 124 A.D.)

↳ Già di grande luce : 43,5 m

↳ struttura massiccia (storica, ma ancora in piedi)

↳ costruita con alcuni accorgimenti:

① Nervature

② foro centrale → possibilità di scaricare le tensioni, soprattutto quelle lungo i meridiani

↳ Il record di 43,5 m di luce viene battuto nel 1913 (1800 anni dopo!) dalla scuola tedesca con il Breslau Dome (Germania)

↳ I tentativi italiani furono:

① Santa Maria del Fiore

→ arrivava vicino, ma non riusciva a superarlo.

② San Pietro

## ◦ Francia francese

↳ Freyssinet - Hangar aeroporto Parigi - 1921

↳ struttura ad archi

↳ per primo propose il cemento armato pre-compresso negli anni '40

## ◦ Svizzera

↳ Mailart - 1939 Zurigo

↳ struttura a guscio molto sottile

## ◦ Italia

↳ Nezri, non seguiva alla lettera la tendenza delle strutture sottili, ma puntava solo alla sottigliezza, ma realizzava strutture nervate seguendo schema del Pantheon.

↳ Hangar di Orbetello (1942)

↳ Nervatura diagonale in parte pre-fabbricata

↳ luce di 60 m

↳ Palazzi dello Sport → sono due

↳ Doppia nervatura e foro centrale

↳ luce di 60 m per il primo, il secondo 100 m luce.

## ◦ Svizzera → Isler

↳ migliora alcune caratteristiche

↳ struttura su quattro appoggi

↳ usa le membrane pesanti come Gaudi per lo studio della forma

aperture con sottili hanno problemi di manutenzione (rete metallica coperta da strato sottile di c.e.f.).



## ② GUSCI SOTTILI DI ANBUSSIONE E MEMBRANE

↳ ci sono solo sforzi membranali, per l'essatezza sono due, chiamati  $N_s$  e  $N_\theta$ . Guscio caricato simmetricamente

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{d}{ds} + \frac{\sin\alpha}{r} \right) & -\frac{\sin\alpha}{r} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_s \\ f_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} N_s = \text{sforzamento membranale lungo il meridiano} \\ N_\theta = \text{sforzamento membranale lungo il parallelo} \end{cases}$   
 ↳ sono le incognite.

Se dato delle distribuzioni di  $f_s$  e  $f_\theta$  generiche ( $f_s$  deve essere funzione di  $s$ , come  $p$  per le travi e  $f_\theta$  è come  $q$ ) la membrana è risolvibile ovvero si mette in equilibrio (la fune no) e non ha sollecitazioni flessionali.

### • FUNE

Per trattare il caso della fune devo annullare il taglio e il momento nelle equazioni dell'arco.

Resta solo  $N \neq 0$ . Fune non ha rigidità flessionale.

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & -\frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{d}{ds} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si ricavano due equazioni nell'unica incognita  $N$ .

- grigliato piano a doppio strato (o triplo)
  - ↳ tanti tetraedri affiancati
  - ↳ rigidità notevole ⇒ grandi luci
  - ↳ Elementi restano snelli (si rischia instabilità)
- volte cilindriche reticolari
  - ↳ 2 o più vie
  - ↳ cilindriche ma fessate, multiple...
- calotte sferiche reticolari
  - ↳ curvatura da già più rigidità
  - ↳ più vie con diverse disposizioni

Il guscio, qualsiasi forma abbia, si mette in equilibrio  
si trova una combinazione di sforzi membranali in equilibrio

In generale, se non si ha simmetria di rivoluzione (non è un guscio di rivoluzione) ci possono essere sforzi di trazione.

La cupola lavora tutta in stato membranale, ma non tutta in compressione, alla base lavora in trazione.

N<sub>s</sub> sono di compressione, nascono alla base della compressione dei vincoli.

N<sub>t</sub> in alto sono di compressione, nella parte bassa sono di trazione e se ho struttura in materiale incoerente si hanno fessure (non sempre negative, è un nido di terrore), per evitarle si fanno cerchiature.

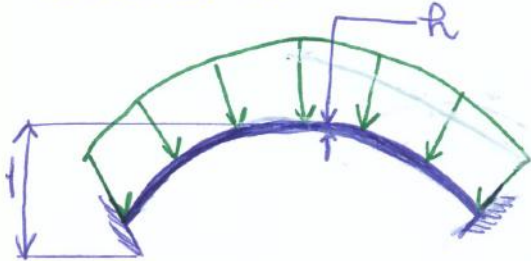
### SNAP-THROUGH PROGRESSIVO

È un'instabilità di tipo elastico, come il buckling (instabilità euleriana). Nello snap-through tengo conto degli sforzi membranali, mentre nel buckling solo i termini flessionali.

È un'instabilità che si verifica per alcune geometrie anche per le strutture ribassate.

# TRANSIZIONI AL VARIARE DELLA SNEVEZZA E DEL GRADO DI RIBASSAMENTO

Il grado di ribassamento ( $\frac{\text{luce}}{\text{freccia}}$ ) è il più importante, ma bisogna tenere conto anche della snellezza ( $\frac{\text{spessore}}{\text{luce}}$ ) snellezza di una sezione di una calotta sferica



viene considerato un carico di tipo radiale (non considero la forza peso).

R = raggio sfera a cui appartiene la calotta

$$\frac{R}{t} = \text{SNEVEZZA}$$

$$\frac{R}{H} = \text{GRADO DI RIBASSAMENTO}$$

} parametri adimensionali

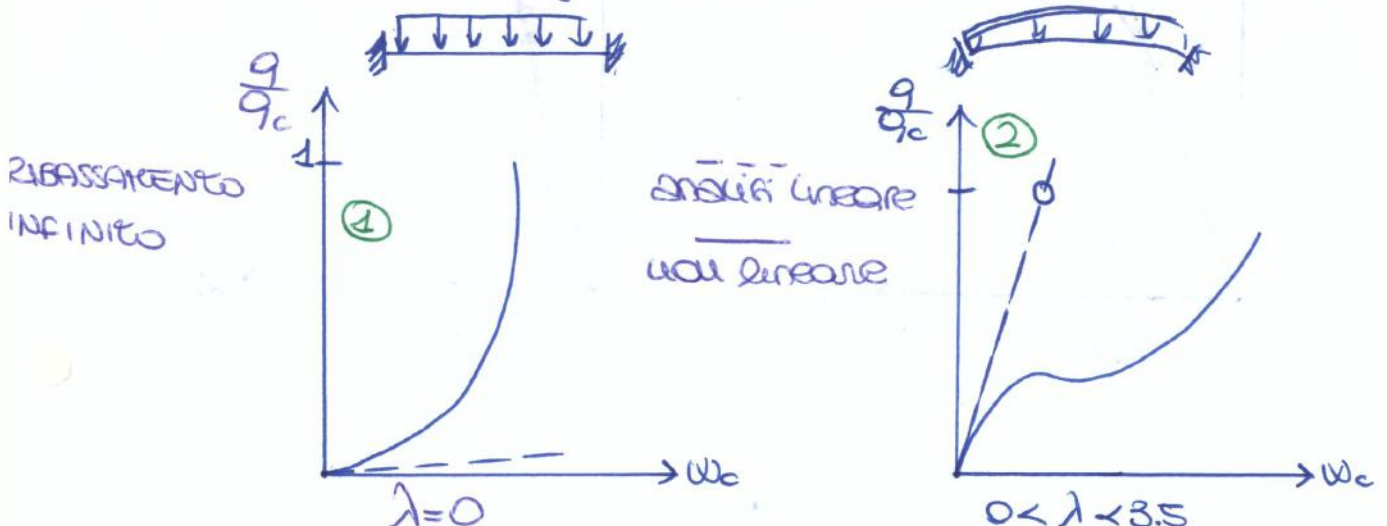
parametro misto  $\frac{H}{t}$

$$\lambda = 2 \left[ 3(1-\nu^2) \right]^{1/4} (H/t)^{1/2}$$

tiene conto di entrambe i parametri

Strutture ribassate tendono a subire fenomeni dello snap-through mentre quelle snelle il fenomeno del buckling.

H piccolo  $\rightarrow$  snap-through  
 t piccolo  $\rightarrow$  buckling  
 I due collassi interagiscono, c'è una transizione.



Nasce lo snap-back  $\Rightarrow$  è una forte instabilità

snap-back è dovuto all'instabilità della matrice  
mentre lo snap-through dallo sfilamento delle fibre

La fune tesa con l'impalcato da tute trasmette una forza di compressione ai piloni che risultano quindi compressi. Il peso dell'impalcato viene scaricato sui piloni e sulla fune.

### LUCE LIMITE TEORICA

$$L_c = \frac{\sigma_a}{\alpha \gamma}$$

- $\sigma_a$  = tensione ammissibile
- $\gamma$  = peso specifico materiale
- $\alpha$  = coeff. che dipende dallo schema strutturale.

### PONTI AD ARCO IN CALCESTRUZZO ARMATO

Superano luci non molto superiori ai 200 m.

È la tipologia più usata (viadotti)

Il vantaggio del calcestruzzo è il costo, inferiore a quello dell'acciaio.

Francia - Hennebique = 50 m luce, arco abbastanza ribassato e piano stradale in alto. Siamo nel 1899. Hennebique è il primo a proporre il cemento armato, "inventa" il cemento armato.

In Francia nasce quindi l'idea di armare.

Svizzera - Maillart → arco ribassato, è ricoperto da muratura per senso estetico. Negli anni successivi diventa più moderno (1901), 38 m luce, non c'è la facciata/copertura in muratura.

↳ 1933 → 37 m → piano stradale curvo (irregolare la struttura), str. molto leggera, arco sottilissimo lo sostiene con dei setti o lastre di forma trapezoidale che trasmettono gli sforzi.

↳ 1930, opera più importante, 90 m di luce

Brunel → stesso artista della stazione di Fiddlypton  
↳ 2 campate, 2 archi ribassati a sezione circolare  
e oltre all'arco c'è anche la fine, permette  
luce di 139 m

con la cui derivata non è possibile usare le equazioni del metodo diretto, ma è necessario ricorrendo alle equazioni di Lagrange che contengono il caso della stazionarietà del potenziale.

ENERGIA POTENZIALE TOTALE

$$W(\varphi) = \frac{1}{2} k (2\varphi)^2 - 2NL(1 - \cos\varphi)$$

En. potenziale elastica della molla.      En. potenziale dei cavi

ENERGIA CINETICA DEL SISTEMA

$$T(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \left[ \frac{d}{dt} (l \sin\varphi) \right]^2 + \frac{1}{2} m \left[ \frac{d}{dt} (l - l \cos\varphi) \right]^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

$\varphi$  molto piccolo  $\rightarrow \sin\varphi \approx \varphi$ ,  $\cos\varphi \approx 1 \rightarrow l - l \cos\varphi \approx 0$

Ho componente del moto sia orizzontale che verticale e per  $\varphi$  piccoli si mette in risalto solo quella verticale.

Applico le equazioni di Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial W}{\partial \varphi}$$

Se fossimo nel caso statico  $T$  non ci sarebbe e quindi avrei trovato la stazionarietà del potenziale:

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0$$

$\rightarrow$  considero un minimo dell'energia potenziale totale, è un caso particolare dell'eq. di Lagrange

Si ottiene:

$$\frac{1}{2} m l^2 \ddot{\varphi} = -2k\varphi + Nl\varphi$$

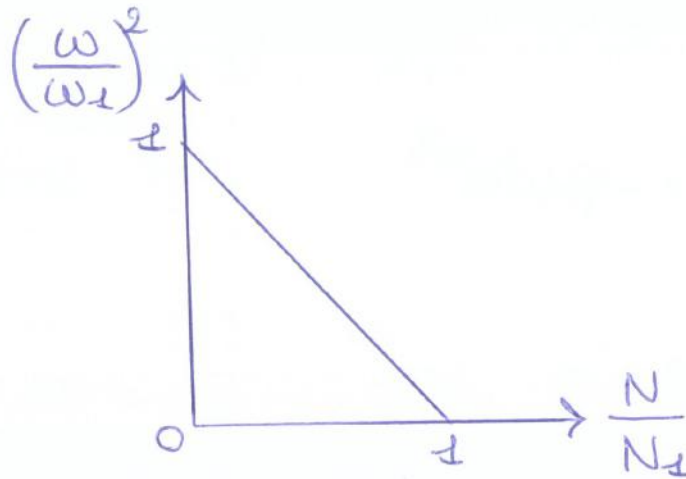
2° termine è la parte statica

$\frac{1}{2} m l^2$  dato dalla simmetria

rigidità / rotazione

momento di inerzia della massa rispetto ad uno dei due estremi

## PIANO DEGLI AUTOVALORI

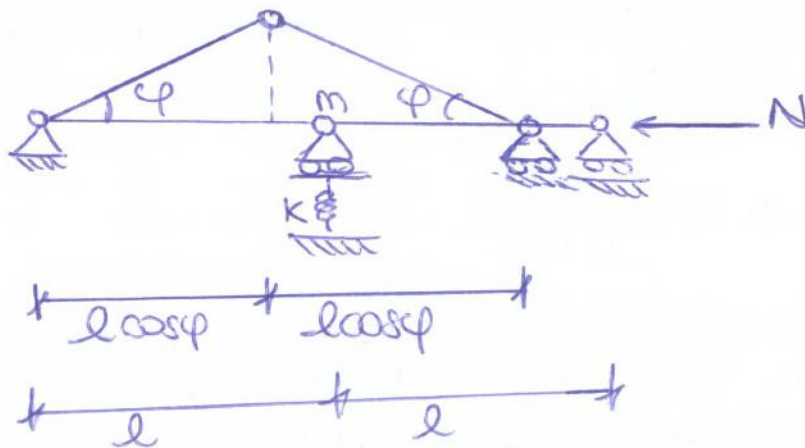


Il grafico mostra i due casi limite ovvero i due punti di estremo.

Per  $0 < N < N_1$  (intermedio)  $\rightarrow 0 < \omega < \omega_1$  la frequenza è sempre più piccola ( $N \rightarrow N_1, \omega \rightarrow 0$ )

Non sempre questi diagrammi sono lineari, solo nei casi più semplici.

### MOHA ESTENSIONALE O VINCOLO ELASTICO



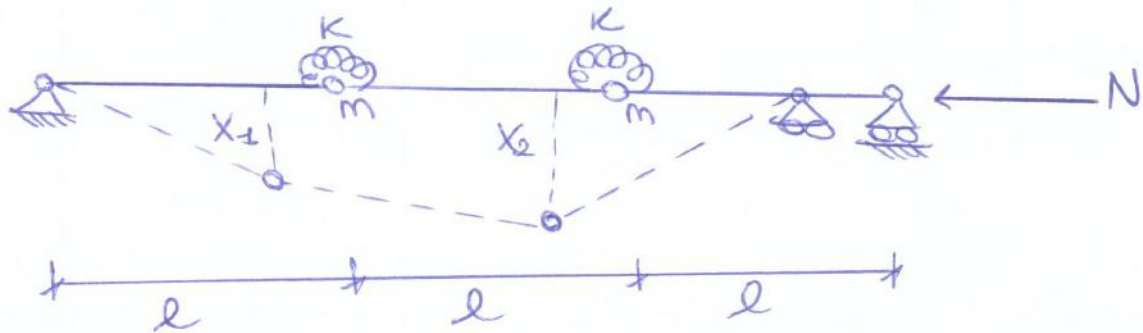
$$W(\varphi) = \frac{1}{2} k (2l \sin \varphi)^2 - 2Nl(1 - \cos \varphi)$$

$$T(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$



## Sistemi discreti a più gradi di libertà

### ◦ MOLLA ROTAZIONALE



Generalizzato a due gradi di libertà.

Ho due coordinate generalizzate  $x_1$  e  $x_2$ .

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{2} k \left[ \left( \arcsin \frac{x_1}{l} - \arcsin \frac{x_2 - x_1}{l} \right)^2 + \left( \arcsin \frac{x_2}{l} + \arcsin \frac{x_2 - x_1}{l} \right)^2 \right] +$$

$$- N l \left[ 3 - \cos \left( \arcsin \frac{x_1}{l} \right) - \cos \left( \arcsin \frac{x_2}{l} \right) - \cos \left( \arcsin \frac{x_2 - x_1}{l} \right) \right]$$

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 x_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{2x_1 \dot{x}_1}{l} + \frac{x_2 \dot{x}_2}{l} + \frac{x_2 \dot{x}_1}{l} + \frac{x_1 \dot{x}_2}{l} \right)^2$$

semplifico con le serie di Taylor:

$$W(x_1, x_2) \approx \frac{k}{2l^2} (5x_1^2 + 5x_2^2 - 8x_1x_2) - \frac{N}{l} (x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2)$$

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2) \approx \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

Applico due equazioni di Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial W}{\partial x_i} \quad i = 1, 2$$

ultimi:

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{k}{ml^2} - \frac{N}{ml} \\ \omega^2 = 9 \frac{k}{ml^2} - \frac{3N}{ml} \end{cases}$$

Devo fissare uno dei due autovaleori (in questo caso N)

Casi limite:

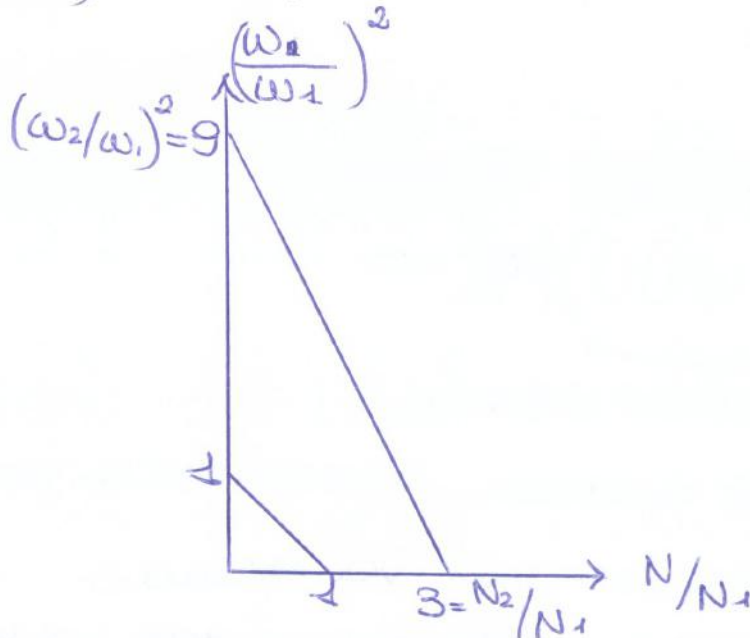
①  $N=0 \rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

②  $m=0 (\omega=0) \rightarrow N_1 = \frac{kl}{3} \quad N_2 = kl$

In forma adimensionale ho:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{N}{N_1}\right) = 1$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 + \left(\frac{N}{N_2}\right) = 1$$



de deformate di ordine superiore si intersecano per particolari casi, se no c'è la prima (prima equazione) de due rette non sono parallele e disgiunte.

Considero la prima retta, la seconda entra in casi particolari.

Applico Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial W}{\partial x_i} \quad i=1,2$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} - N \begin{bmatrix} \frac{2}{l} & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{2}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

cambia la matrice delle rigidezze, è più semplice perché le due molle oscillano in modo indipendente.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} - N[K_g]\{q\} = \{0\}$$

Cerco soluzione del tipo:

$$\{q\} = \{q_0\} e^{i\omega t}$$

Sostituisco:

$$([K] - N[K_g] - \omega^2 [M])\{q_0\} = \{0\} \quad \text{Eq. agli autovalori}$$

Annullo il determinante:

$$\det([K] - N[K_g] - \omega^2 [M]) = 0$$

e ricavo:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{k}{m} - 3 \frac{N}{ml} \\ \omega_2^2 = \frac{k}{m} - \frac{N}{ml} \end{cases}$$

casi limite:

$$\textcircled{1} N=0 \longrightarrow \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\textcircled{2} m=0 \longrightarrow N_1 = \frac{k l}{3} \quad N_2 = k l$$

Ho due equazioni differenziali:

① termini solo con ②

② linea elastica dinamica

↳ q diventano carichi energetici → oscillazioni libere.

Non siamo più in termini discreti, ma si ha trave con elasticità diffusa. Arrivo all'eq. differenziale:

$$EI \frac{\partial^4 \sigma}{\partial z^4} + N \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = - \mu \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}$$

termine di richiamo elastico      forze esterne      forza inerziale  
 parte statica      parte dinamica

$\mu$  = densità lineare, per unità di lunghezza.

Coesistenza entrambe le variabili  $z$  e  $t$ .

Riscrivo equazione:

↳ divido tutto per  $EI$  e sostituisco con  $\alpha^2 = \frac{N}{EI}$

$$\frac{\partial^4 \sigma}{\partial z^4} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = - \frac{\mu}{EI} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}$$

↳ accelerazione

È un'equazione agli autovalori.

Procedo con la separazione delle variabili ipotizzando che la funzione  $\sigma(z,t)$  sia un prodotto di due funzioni, una dipendente solo da  $z$  e una solo da  $t$ .

$$\sigma(z,t) = \eta(z) \cdot f(t)$$

Sostituisco nell'eq. differenziale:

$$\frac{d^4 \eta(z)}{dz^4} f(t) + \alpha^2 \frac{d^2 \eta(z)}{dz^2} f(t) + \frac{\mu}{EI} \eta(z) \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$$

divido per  $\eta(z) \cdot f(t)$ :

$\psi$  = parte temporale

$\eta$  = parte spaziale

Ho bisogno di condizioni al contorno e condizioni iniziali.

Restano indeterminati C, D, E, F (ipotesi di cercare  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ).

La soluzione generale si ottiene come sovrapposizione degli effetti:

$$\psi(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(x) f_i(t)$$

$$f_i(t) = A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t$$

$$\eta_i(x) = C_i e^{\lambda_1 i x} + D_i e^{\lambda_2 i x} + E_i e^{-\lambda_1 i x} + F_i e^{-\lambda_2 i x}$$

$i$  = ordine del modo che considero

Noi stiamo cercando gli autovalori.

condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \eta(0) = 0 \\ \eta''(0) = 0 \\ \eta(l) = 0 \\ \eta''(l) = 0 \end{cases}$$

Spostamenti e derivate seconde nulli agli estremi.

Applico le condizioni a  $\eta$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \\ e^{\lambda_1 l} & e^{\lambda_2 l} & e^{-\lambda_1 l} & e^{-\lambda_2 l} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 l} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 l} & \lambda_1^2 e^{-\lambda_1 l} & \lambda_2^2 e^{-\lambda_2 l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \\ E \\ F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

CASO STATICO:

$$① EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = -m \varphi_z$$

→ Equazione momento stabilizzata ad un momento instabilizzante

$$② GI_t \frac{d\varphi_z}{dz} = m \frac{du}{dz}$$

Derivo due volte la prima equazione (anziché al caso dinamico con cui sopranne) e aggiungo parte dinamica.

$$EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial z^2} = \underbrace{-\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{\text{termine inerziale}}$$

Derivo una volta la seconda:

$$-GI_t \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \underbrace{-\mu \rho^2 \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial t^2}}_{\text{raggio di inerzia polare}}$$

Non c'è separazione delle variabili.

Risolvo separando le variabili, soluzione concentrata sul tempo.

$$\begin{cases} u(z,t) = U(t) \underbrace{\eta(z)}_{\text{sinusoidale}} \\ \varphi_z(z,t) = \Phi(t) \psi(z) \end{cases}$$

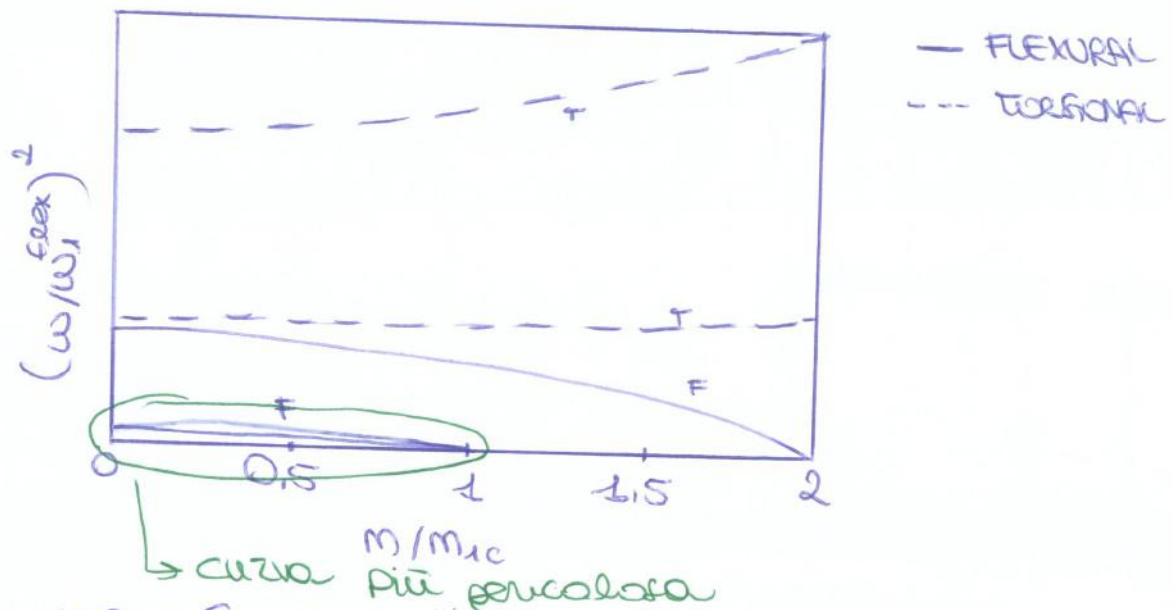
Condizioni al contorno per fissare  $\eta$  e  $\psi$ :

$$\eta(0) = \eta(l) = \eta''(0) = \eta''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$$

si assume:

$$\eta(z) = \psi(z) = \sin \frac{n\pi z}{l} \quad n = n^\circ \text{ naturale}$$

fisso la parte con  $z$ ,  $U$  e  $\Phi$  incognite.



Due infinite numerabili di curve: flessionali e torsionali

Flexionali:

- non sono lineari
- fanno andamento simile
- $\uparrow m, \downarrow \omega \rightarrow$  caratteristica: diminuisce rigidità

Torsionali

- crepe, buca diminuiscono
- fenomeni torsionali rendono la str. più rigida a torsione

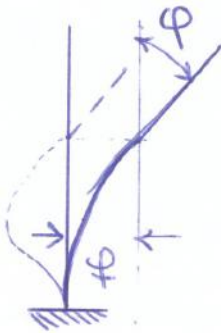
In questo caso il lavoro dipende dal percorso di carico per questo è definita come forza non conservativa.

Lo stato finale è determinato da due parametri:

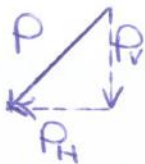
1) deflessione orizzontale ( $\phi$ )

2) rotazione ( $\psi$ )

### 1) LAVORO < 0

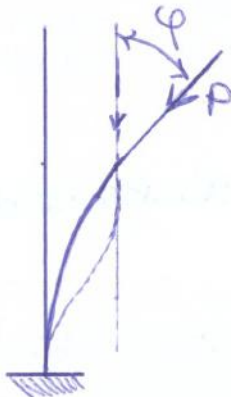


- prima si ha una rotazione oraria  $\psi$ , poi traslazione.
- la forza quando ruota di  $\psi$  non compie lavoro, lo compie quando trasla.
- la forza  $P$  ha due componenti, una orizzontale e una verticale. Solo la forza orizzontale compie lavoro (ho solo traslazione orizzontale).



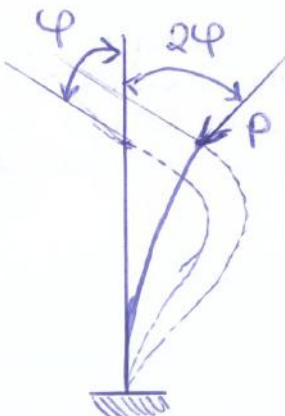
$P_H$  è verso sinistra, mentre lo spostamento è verso destra, quindi il lavoro è negativo.

### 2) LAVORO = 0



- si ha prima la traslazione, poi la rotazione  $\psi$ .
- Nella traslazione  $P$  è verticale, quindi non compie lavoro e neanche nella rotazione.
- Ho lavoro nullo.

### 3) LAVORO > 0



- rotazione  $\psi$  antioraria, la forza non compie lavoro.
- traslazione di  $\phi$ ,  $P_V$  non compie lavoro,  $P_H$  compie lavoro positivo.
- rotazione  $2\psi$  oraria, la forza non compie lavoro.
- Ho lavoro positivo.



Se le forze sono conservative, anche  $[K_g]$  sarà reale e simmetrica e quindi anche  $[K]$  lo sarà e gli autovalori saranno numeri reali.

Se le forze non sono conservative,  $[K_g]$  sarà reale, ma non simmetrica (l'indicatore di forze non conservative), gli autovalori possono essere di tipo complesso e non necessariamente reali.

Cerco una soluzione col metodo della separazione delle variabili:

$$\{s\} = \underbrace{\{s_0\}}_{\text{parte spaziale}} e^{\underbrace{i\omega t}}_{\text{parte temporale}}$$

$\omega$  in generale è vista come numero complesso:

$$\omega = \omega_r + i\omega_i$$

Se il sistema è conservativo:  $\omega_i = 0$ ,  $\omega = \omega_r$

Sostituisco  $\{s\}$  nell'equazione:

$$([K] - \omega^2 [M])\{s_0\} = \{0\}$$

È il problema agli autovalori. Si cercano gli autovalori annullando il determinante:

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

Ottengo un'equazione scalare di grado  $n$  con  $n$  uguale al numero di gradi di libertà.

Risolvendo ottengo gli  $n$  autovalori  $\omega_j$  (dipendono dal moltiplicatore dei carichi  $\lambda$ ).

C'è un valore critico del moltiplicatore dei carichi  $\lambda_c$  che dà l'instabilità.

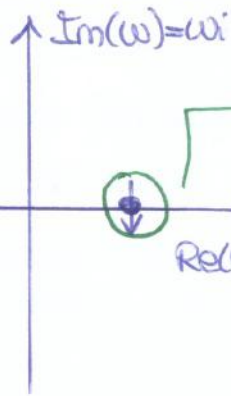
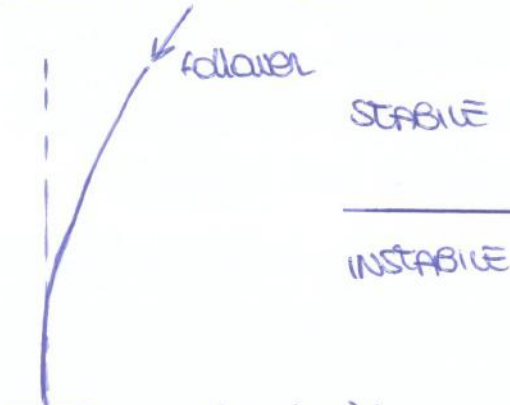
Scrivo  $\{s\}$  per il modo  $j$  di vibrare:

$$\{s_j\} = \{s_{0j}\} e^{i\omega_j t}$$

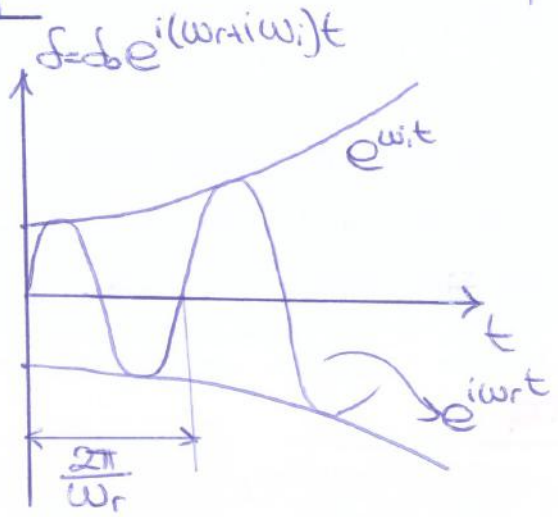
Introduco parte reale e parte immaginaria di  $\omega_j$

$$\{s_j\} = \{s_{0j}\} e^{i(\omega_r + i\omega_i)t} = \{s_{0j}\} e^{i\omega_r t} e^{-\omega_i t}$$

## ② INSTABILITÀ DINAMICA PER FLUTTER



passaggio stabile - instabile per  $w_r > 0$ , non perde tutta la rigidità  $z_{01}$  (come per Euler) ma perde stabilità mentre  $z_{02}$  affonda



Ho due funzioni, una oscillatoria e una divergente. Quella oscillatoria affonda con frequenza  $\omega_r$  mentre le ampiezze divergono (per  $\omega_i < 0$ )

Se  $\omega_i > 0$ , le ampiezze



Raggruppamento configurazione di equilibrio instabile per forze non conservative.

Se il carico è conservativo si può avere solo instabilità statica, mentre se il sistema è non conservativo si può avere sia un'instabilità statica che dinamica, a seconda del carico. La divergenza statica avviene dopo quella di flutter, per carichi maggiori.

## INSTABILITÀ AEROELASTICA DI PONTE SOSPESO

Può essere studiata in ambito statico perché simile a quella di Euler e si ha quando il momento torcente dovuto al vento supera la resistenza dell'impalcato. Non si tiene conto della turbolenza, ma il vento viene ipotizzato come laminare e si vogliono individuare le forze che si generano sull'impalcato. Se l'impalcato è fermo, le forze possono essere viste come