NUMERO: 2118A-

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Paglia Lina

MATERIA: Geometria - Prof. Gatto

29/02/2016 1° Lezione: 90 min.

ARGOMENTO: INTRODUZIONE AI CONCETTI BASI GEOMETRIA (CAP 2-3-4)

"$\mathbb{R}$" è il campo dei numeri reali $(+,\cdot)$

"$\mathbb{C}$" è un campo: verifica le proprietà di un campo: $(a+bi)(c+di) =$
$= ac-bd+(ad+bc)i$. Perché $\mathbb{R}$ è un campo $a(b+c) = ab+ac$ $(+,\cdot)$

Gli elementi di un campo si dicono **scalari**.

es: $\mathbb{Z}(+,\cdot)$ $\mathbb{Z}=\{$numeri interi$\}$ non è un campo infatti $3 \in \mathbb{Z}$, ma non esiste in $\mathbb{Z}$ l'inverso di $3 \to \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Gli unici invertibili sono ± 1.

$\mathbb{Q}=\{$campo dei numeri razionali$\}$

es: $\mathbb{Z}=\{0,1\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Nel corso indicheremo $\mathbb{K}$ un campo arbitrario $\to \mathbb{R}$, $\to \mathbb{C}$, $\to \mathbb{Q}$

Sia ora $\mathbb{K}$ un campo:

$$\mathbb{K}^n = \left\{ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{K} \right\}$$

insieme di tutte le coppie ordinate di scalari

$a_i \to$ i-esima entrata o componente.

es: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} 1+2i \\ 3-5i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$

Se $\vec{a} \in \mathbb{K}^n$ utilizzeremo la notazione $\vec{a}(i)$ per indicare la sua i-esima entrata (o componente). Ossia se $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\vec{a}(1) = a_1$

es: Sia $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 3 \\ 1 \\ 5-4i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$ $\vec{a}(3) = 1$
$\vec{a}(1) = 2+i$

Definizione: $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{K}^n$, $\vec{u} = \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u}(i) = \vec{v}(i)$ $\forall\ 1 \leq i \leq n$

Chiameremo **vettori** le colonne di $\mathbb{K}^n$

$+,\cdot$ sono operazioni binarie e le estendiamo a $\mathbb{K}^n$.

Definizione: Siano $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{K}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, si dice **combinazione lineare di $\vec{u}$ e $\vec{v}$** a coefficienti $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K}^n$ è l'unica colonna

Ricordiamo che: $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \mid u_i \in \mathbb{R} \right\}$ rispetto a somma $(\vec{u}+\vec{v})(i) = \vec{u}(i)+\vec{v}(i)$ e "prodotto per uno scalare" $(\lambda \cdot \vec{u})(i) = \lambda \vec{u}(i)$ è uno spazio "vettoriale e" euclideo, ossia esso è dotato di un prodotto scalare.

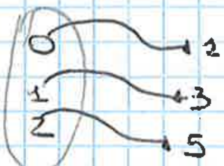
$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum \vec{u}(i)\vec{v}(i)$

es (dall'analisi): somma di funzioni continue $[0,1] \to \mathbb{R}$ è continua e se $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ continua allora $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf è una funzione continua.

Quindi se $f, g \in C^0([0,1])$ $\{h: [0,1] \to \mathbb{R}$ continua$\}$.

$\lambda f + \mu g \in C^0([0,1])$ $(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda f)(x) + \mu g(x) = \lambda f(x) + \mu \cdot g(x)$

es: $\mathbb{R}^3 = \{\vec{v}: \{0,1,2\} \to \mathbb{R}\}$



$\vec{v}(0)=1$
$\vec{v}(1)=3$
$\vec{v}(2)=5$

$\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ è l'ordine.

Gatto osserva che tutti gli spazi vettoriali si possono realizzare come insieme $\{f: X \to \mathbb{K}\}$ dove $\mathbb{K}$ è un campo: $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$.

$\{f: X \to \mathbb{K}\} \stackrel{?}{=} \mathbb{K}^X$, $\{f: A \to B \mid A, B\} = B^A$

01/03/2016 2° Lezione: 3h

ARGOMENTO IL PRODOTTO SCALARE

Proposizione: il prodotto scalare euclideo è una forma bilineare simmetrica definita positiva.

Dimostrazione: siano $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$, polinomio di secondo grado nelle (u_i) e nelle (v_j). Il polinomio è omogeneo (hanno tutti grado 2). Se si fissano le variabili (u_i) (per esempio $u_i = a_i$) $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots a_n v_n$.

$\langle\ \ \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una forma bilineare perché è un polinomio omogeneo di grado 2, lineare nelle componenti di $\vec{u}$ e nelle componenti di $\vec{v}$.

Inoltre: $u_1 v_1 + \dots u_n v_n = v_1 u_1 + \dots + v_n u_n$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ giustifica la simmetria.

Definita positiva significa che $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0 \ \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = 0$.

$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = u_1^2 + \dots + u_n^2 \geq 0$ {semidefinito positivo}.

Supponiamo ora che $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$, allora $u_1^2 + \dots + u_n^2 = 0$.

$= |\vec{u}|^2 + 2\langle \vec{u},\vec{v}\rangle + |\vec{v}|^2 \le |\vec{u}|^2 + 2|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle| + |\vec{v}|^2 \overset{\uparrow}{\le} |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}| + |\vec{v}|^2 =$
$= (|\vec{u}|+|\vec{v}|)^2.$ (Disuguaglianza di Schwarz)

Si è visto che $|\vec{u}+\vec{v}|^2 \le (|\vec{u}|+|\vec{v}|)^2 \Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}|+|\vec{v}|$

La disuguaglianza di Schwarz dice che se $\vec{u}$ o $\vec{v}$ sono nulli, vale l'uguaglianza. Se $\vec{u}\neq 0$, $\vec{v}\neq 0 \Rightarrow \frac{|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle|}{|\vec{u}||\vec{v}|} \le 1$ $\quad \left|\frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|} \le 1$

$\cos(\vec{u},\vec{v}) := \frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$, $\vec{u},\vec{v}\neq 0 \Rightarrow \langle\vec{u},\vec{v}\rangle = |\vec{u}||\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$

Dimostrazione Schwarz: $\vec{u}\neq\vec{0}$, $\vec{v}\neq\vec{0}$ $\quad \Phi_{\vec{u},\vec{v}}(x) = |x\vec{u}+\vec{v}|^2 \ge 0$

$\Phi_{\vec{u},\vec{v}}(x) = |\vec{u}|^2x^2 + 2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle x + |\vec{v}|^2 \ge 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = \langle\vec{u},\vec{v}\rangle^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \le 0$

$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle^2 \le |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \Rightarrow |\langle\vec{u},\vec{v}\rangle| \le |\vec{u}||\vec{v}|$

es: $C^0([0,1])$ $\quad f,g \quad \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

Applicando Schwarz, sappiamo $\left|\int_0^1 f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_0^2 f(x)^2dx}\cdot\sqrt{\int_0^1 g(x)^2dx} \Leftrightarrow$

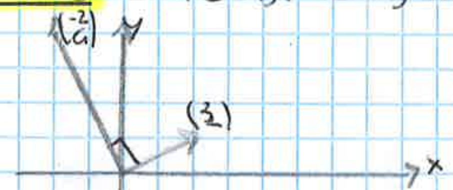
$|f| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int f^2dx}$

Proprietà: il prodotto scalare è non degenere, ossia se $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 0$ $\forall\vec{v}\in\mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{u}=\vec{0}$

Dimostrazione: in particolare vale per $\vec{v}=\vec{u}$ $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle = |\vec{u}|^2 = 0 \Rightarrow \vec{u}=\vec{0}$ (proprietà modulo)

Definizione: Siano $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, essi si dicono ortogonali $\Leftrightarrow \langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 0$

es:



- $\left\langle\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\rangle = -4+4 = 0$
- $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 1\cdot2+2\cdot0+1(-2) = 0$

Due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono collineari se e solo se $\vec{v}=\lambda\vec{u}$ (nel caso $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$): $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ $\quad \vec{u}\perp\vec{v} \to \cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{0}{1\cdot1} = 0$

$\frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{\langle\vec{u},\lambda\vec{u}\rangle}{|\vec{u}||\lambda\vec{u}|} = \frac{\lambda\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}{|\vec{u}|^2|\lambda|} = \frac{\lambda|\vec{u}|^2}{|\lambda||\vec{u}|^2} = \pm1$

Proposizione: $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow \forall\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ $\langle\vec{u},\vec{w}\rangle = \langle\vec{v},\vec{w}\rangle$

Dimostrazione: $\Leftarrow$: $\langle\vec{u},\vec{w}\rangle = \langle\vec{v},\vec{w}\rangle$ $\forall\vec{w}\in\mathbb{R}^n \Rightarrow \langle\vec{u},\vec{w}\rangle - \langle\vec{v},\vec{w}\rangle = 0$
$\Rightarrow \langle\vec{u}-\vec{v},\vec{w}\rangle = 0 \Rightarrow \vec{u}-\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow \vec{u}=\vec{v}$

es: Dati $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$, calcolare $\cos(\vec{u},\vec{v})$;

$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 1\cdot3+2\cdot1+1\cdot4 = 9$ $\quad |\vec{u}| = \sqrt{6}$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{3^2+1^2+4^2} = \sqrt{26}$

$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{9}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{26}} = \frac{9\sqrt{6}\sqrt{26}}{6\cdot26} = \frac{3\sqrt{156}}{52}$

Antisimmetria: $\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{u} = 0 \Rightarrow -\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{u} = 0$ (se [illegible] 0)

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \lambda \vec{u}) \wedge (\vec{w} + \mu \vec{u} + \gamma \vec{v}) = (\vec{u} \wedge \vec{v} + \underset{\lambda(\vec{u} \wedge \vec{u})}{\underbrace{\vec{u} \wedge \lambda \vec{u}}}) \wedge (\vec{w} + \mu \vec{u} + \gamma \vec{v}) =$$

$$= \vec{u} \wedge \vec{v} \wedge (\vec{w} + \mu \vec{u} + \gamma \vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$$

(il prodotto scalare trasforma vettori in numeri)

Definizione: $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{v}$ è l'unico vettore di $\mathbb{R}^3$ tale che $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$ $\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ → PRODOTTO VETTORE

↳ PRODOTTO MISTO

- Come si calcola?

OSSERVAZIONE: Sia $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ Allora $\langle \vec{u}, \vec{i} \rangle = u_1$, $\langle \vec{u}, \vec{j} \rangle = u_2$, $\langle \vec{u}, \vec{k} \rangle = u_3$

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} (\vec{u} \times \vec{v})(1) \\ (\vec{u} \times \vec{v})(2) \\ (\vec{u} \times \vec{v})(3) \end{vmatrix} =$$

$$(\vec{u} \times \vec{v})(1) = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{i} \rangle = \vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{i} = \vec{i} \wedge \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & v_1 \\ 0 & u_2 & v_2 \\ 0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = u_2 v_3 - u_3 v_2$$

$$(\vec{u} \times \vec{v})(2) = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{j} \rangle = \vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{j} = \vec{j} \wedge \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = -(u_1 v_3 - u_3$$

$$(\vec{u} \times \vec{v})(3) = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{k} \rangle = \vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{k} = \vec{k} \wedge \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & v_1 \\ 0 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_2$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_2)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & u_1 & v_1 \\ \vec{j} & u_2 & v_2 \\ \vec{k} & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

Ripetiamo che $\vec{u} \times \vec{v}$ è l'unico vettore di $\mathbb{R}^3$ / $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$

Proprietà ①: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

$$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{v} \wedge \vec{u} \wedge \vec{w} = -\langle \vec{v} \times \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle -\vec{v} \times \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

Conseguenze: $\vec{u} \times \lambda \vec{u} = 0$

$$\vec{u} \times \lambda \vec{u} = \lambda (\vec{u} \times \vec{u}) = 0$$

Proprietà ②: $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u} \Rightarrow \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle = \vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{u} = 0$

$$\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v} \Rightarrow \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{v} = 0$$

es: Dati $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, trovare tutti i vettori ortogonali ad entrambi:

② $A+\vec{v}=A \Rightarrow \vec{v}=\vec{0}$

Dimostrazione: $A=\ast+\vec{u}_A=A+\vec{v}=(\ast+\vec{u}_A)+\vec{v}=\ast+(\vec{u}_A+\vec{v})$
$\ast+\vec{u}_A=\ast+(\vec{u}_A+\vec{v}) \Rightarrow \vec{u}_A=\vec{u}_A+\vec{v} \rightarrow \vec{v}=\vec{0}$

$\ast+\vec{0}\in\mathcal{E}^n \Rightarrow \ast+\vec{0}=\ast\in\mathcal{E}^n$. Si è identificato $\ast$ con un punto "fisso".

Notazione: si è provato che $\forall A,B\in\mathcal{E}^n$, $\exists!\,\vec{v}\,/\,B=A+\vec{v}$. Si indicherà tale vettore con la notazione $\vec{AB}$.

Proposizione: ① $\forall A\in\mathcal{E}^n$, $\vec{AA}=\vec{0}$

② $\forall A,B\in\mathcal{E}^n$ $\vec{AB}=-\vec{BA}$.

③ Relazione di Chasles: $\forall A,B,C\in\mathcal{E}^n$, $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$

Dimostrazione: Si basa sull'osservazione già fatta che $\vec{u}_B-\vec{u}_A$ è l'unico vettore che sposta A in B

$\Rightarrow$ ① $\vec{AA}=\vec{u}_A-\vec{u}_A=\vec{0}$

② $\vec{AB}=\vec{u}_B-\vec{u}_A=-\underbrace{(\vec{u}_A-\vec{u}_B)}_{\text{vettore che trasla B in A}}=-\vec{BA}$

③ $\vec{AB}+\vec{BC}=\cancel{\vec{u}_B}-\vec{u}_A+\vec{u}_C-\cancel{\vec{u}_B}=\vec{u}_C-\vec{u}_A=\vec{AC}$

Proposizione: $\forall O\in\mathcal{E}^n$, $\forall A,B\in\mathcal{E}^n$, $\vec{AB}=\underbrace{\vec{OB}}_{\text{vettore che da O trasla in B}}-\vec{OA}$

Dimostrazione: Infatti $\forall A,B,O$ vale $\vec{AO}+\vec{OB}=\vec{AB} \Rightarrow \underbrace{\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}}_{\text{ogni vettore si può scrivere come la differenza di 2 vettori}}$ (per la ②)

Su $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ si può definire la seguente funzione $d:\mathcal{E}^n\times\mathcal{E}^n\rightarrow\mathbb{R}$, $(P,Q)\mapsto d(P,Q)=|\vec{PQ}|$

Proposizione: d è una DISTANZA, cioè verifica le seguenti:

D1 $d(A,B)\geq 0$ $\forall A,B\in\mathcal{E}^n$ e, se $d(A,B)=0 \Rightarrow A=B$.

D2 $d(A,B)=d(B,A)$ $\forall A,B\in\mathcal{E}^n$

D3 disuguaglianza triangolare: $\forall A,B,C\in\mathcal{E}^n$, $d(A,B)\leq d(A,C)+d(C,B)$

$d(A,B)=|\vec{AB}|$ ... (x D1)

Dimostrazione: D1 $d(A,B)=|\vec{AB}|\geq 0$ (per le proprietà del modulo). Inoltre $d(A,B)=0 \Rightarrow |\vec{AB}|=0$ $\rightarrow \vec{AB}=0$ (x proprietà 6 modulo)

$\Rightarrow \vec{AB}=\vec{0}=\vec{u}_B-\vec{u}_A \Rightarrow \vec{u}_B=\vec{u}_A \Rightarrow A=B$

D2 $d(A,B)=|\vec{AB}|=|-\vec{BA}|=|-1\cdot\vec{BA}|=|-1|\,|\vec{BA}|=d(B,A)$
(x definizione di distanza)

D3 $\forall A,B,C\in\mathcal{E}^n$, $d(A,B)=|\vec{AB}|=\underbrace{|\vec{AC}+\vec{CB}|}_{\text{relazione di Chasles}}\overset{\text{disuguaglianza di Minkowski}}{\leq}\underbrace{|\vec{AC}|+|\vec{CB}|=d(A,C)+d(C,B)}_{\text{definizione di distanza}}$.

Notazione: se $A,B\in\mathcal{E}^n$, indicheremo con $\overline{AB}=d(A,B)$. Inoltre diremo che il triangolo $\overset{\triangle}{ABC}$ è retto in A $\Leftrightarrow\langle\vec{AB},\vec{AC}\rangle=0$

Teorema (Pitagora): il triangolo $\overset{\triangle}{ABC}$ è retto in A $\Leftrightarrow \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

$r_{P_0,\vec{u}} = \{P / P \in P_0 + [\vec{u}]\}$, $P \in P_0 + [\vec{u}] \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} / P = P_0 + \vec{u}t \overset{equivale}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{P_0P} = \vec{u}t$

$r_{P_0,\vec{u}} = P_0 + [\vec{u}] = \{P_0 + \vec{u}t \mid t \in \mathbb{R}\}$

$r_{P_0,\vec{u}} = \{P = P_0 + \vec{u}t \mid t \in \mathbb{R}\}, \{P \in \overset{(P_0,u)}{\mathcal{E}^n} / \overrightarrow{P_0P} = \vec{u}t\}$ <=> il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ appartiene alla direzione individuata da $\vec{u}$

E allora siano $\begin{vmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{vmatrix}$ le componenti di $\vec{u}$, e sono $(x_{1,0}, \dots, x_{n,0})$ le coordinate di P_0

se $(x_1, \dots, x_n)$ indicano le coordinate di un punto P, variabile nella retta =>

(V. pag. 38)

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_{1,0} \\ \vdots \\ x_n - x_{n,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} t \quad \begin{cases} x_1 - x_{1,0} = u_1 t \\ x_2 - x_{2,0} = u_2 t \\ \vdots \\ x_n - x_{n,0} = u_n t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_{1,0} + u_1 t \\ \vdots \\ x_n = x_{n,0} + u_n t \end{cases}$$

, equazioni parametriche retta affine $r_{P_0,\vec{u}}$

Le coordinate di $\mathcal{E}^3$ si indicano con (x, y, z).

es: Sia $P_0(2,1,5)$ e $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, scrivere equazioni parametriche $r_{P_0,\vec{u}}$

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 7t \\ z = 5 - t \end{cases}$$

Una retta è parallela se ha la stessa direzione di un'altra retta: **es**: $\begin{cases} x = 100 + 3t \\ y = 99 + 7t \\ z = 98 - t \end{cases}$

Due rette r_1, r_2 $(P_1 + [\vec{u}], P_2 + [\vec{v}])$ si dicono parallele $(r_1 \parallel r_2)$ se hanno la stessa direzione.

es: Siano $P_1(3,2,5)$ e $P_2(1,2,3)$. Scrivere equazioni parametriche della retta affine r_{P_1,P_2} (passante per P_1 e P_2)

Soluzione: $\overrightarrow{P_2P_1} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-2 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 \\ z = 5 + 2t \end{cases}$

Siano ora $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $[\vec{u}] \neq [\vec{v}]$, $[\vec{u}, \vec{v}] = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ si definisce

PIANO VETTORIALE GENERATO DA $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Definizione: Sia $P_0 \in \mathcal{E}^3$, il piano affine passante per P_0 generato da $\vec{u}, \vec{v}$ è il sottoinsieme di $\mathcal{E}^3$, $P_0 + [\vec{u}, \vec{v}] = \{P_0 + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \in P(x, y, z)$ *

$\pi_{P_0,u,v} = \{P / P \in P_0 + [\vec{u}, \vec{v}]\}$, $\forall P \in \pi_{P_0,\vec{u},\vec{v}}\ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} /$

es: Scrivere equazioni parametriche del piano affine $\pi_{P_0,\vec{u},\vec{v}}$ dove

$\underbrace{P_0(2,1,3),\ \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\text{non hanno la stessa direzione: le coordinate non sono proporzionali}}$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda + 5\mu \\ \lambda - 2\mu \\ 3\lambda + 7\mu \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2\lambda + 5\mu \\ y = 1 + \lambda - 2\mu \\ z = 3 + 3\lambda + 7\mu \end{cases}$$

$* P = P_0 + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \Longleftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

Definizione: Due rette affini $P_1 + [\vec{u}]$ e $P_2 + [\vec{v}]$ si dicono ortogonali <=> $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

Similmente, due piani affini $P_1 + [\vec{u}, \vec{v}]$ e $P_2 + [\vec{u}', \vec{v}']$ si dicono paralleli

$\Longleftrightarrow \underbrace{[\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u}', \vec{v}']}_{\text{i 2 piani vettoriali coincidono}}$

$$\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$P'(1,0,3)$

Dopo aver cambiato le coordinate di P_3 $\begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ y-1 & +1 & -1 \\ z-1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(x-2)+2(y-1)+2(z-1)=0$

$\Downarrow$

$x+y+z-9=0$

↳ la somma delle 3 coordinate di ognuno dei punti è sempre 9 → capisco l'equazione

$(1,-1,-1)$
$(9,-3,-5)$
$(6,2,-19)$
$2x+y+z=0$

In generale, $ax+by+cz+d=0$, con $\underbrace{(a,b,c)\neq(0,0,0)}_{\text{non tutti nulli}}$ è equazione cartesiana di un piano.

$P_1(x_1,y_1,z_1)$ $P_2(x_2,y_2,z_2)$ $P_3(x_3,y_2,z_3)$ $P_1+[\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3}] \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} =$

$= (x-x_0)\begin{vmatrix} y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} \underset{\text{cambio le colonne}}{\oplus} (y-y_0)\begin{vmatrix} x_3-x_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} + (z-z_0)\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} =$

$= \boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$ ⊛ → equazione della stella di piani passanti per P_0

$= ax+by+cz+d=0$ con $d=-ax_0-by_0-cz_0$] a, b, c: componenti di un vettore ortogonale al piano.

Es: $2x-5y+7z-3=0$ $(0,0,\frac{3}{7})\in\pi$

⊛ $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

ESERCIZIO 3

Trovare piano per $P(3,1,50)$ ortogonale a $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix}$;

$3(x-3)+12(y-1)+17(z-50)=0$

15/03/2016 6° LEZIONE: 3h

ARGOMENTO: LE DISTANZE

Ricordiamo che se $P_1,P_2\in\mathcal{E}^n$ $d(P_1,P_2)=|\overrightarrow{P_1P_2}|$

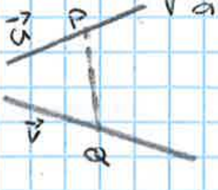
Distanza tra 2 insiemi: se $A,B\subseteq\mathcal{E}^n$ si definisce distanza $d(A,B)=\inf\{d(P,Q)/P\in A, Q\in B\}$.

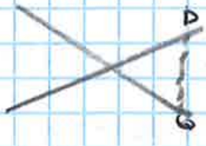
Si è visto come calcolare $d(A,B)$ nei seguenti casi:

a) $A=\{P\}$, $B=\{Q\}\Rightarrow d(A,B)=d(P,Q)$

b) $A=\{P_0\}$, $B=\pi$. Si trova $d(P_0,\pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ dove $P_0(x_0,y_0,z_0)$

c) $d(r_1,r_2)=\frac{|\det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ})|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$





→ sono incidenti: $\det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ})=0$

Ricordiamo ancora che se $(x_1,\dots,x_n)$ sono coordinate del punto P e $(y_1,\dots,y_n)$ sono coordinate del punto Q, allora $d(P,Q)=|\overrightarrow{PQ}|=\left\|\begin{pmatrix} y_1-x_1 \\ y_2-x_2 \\ \vdots \\ y_n-x_n \end{pmatrix}\right\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}$

$C_1(1, -3/2, +5/2)$ $R^2 = 1 + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} + 1 = \frac{21}{2} \rightarrow R = \sqrt{\frac{21}{2}}$

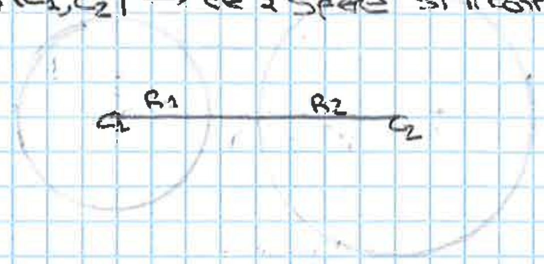
$C_2(1, 2, -1/2)$ $R^2 = 1 + 4 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{25}{4} \rightarrow R = \frac{5}{2}$

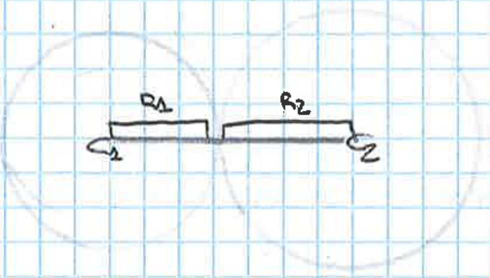
$d(C_1, C_2) = \sqrt{(1-1)^2 + (2+\frac{3}{2})^2 + (-\frac{1}{2} - \frac{5}{2})^2} = \sqrt{0^2 + (\frac{7}{2})^2 + (-3)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + 9} = \frac{\sqrt{85}}{2}$

$R_1 + R_2 = \sqrt{\frac{21}{2}} + \frac{5}{2}$

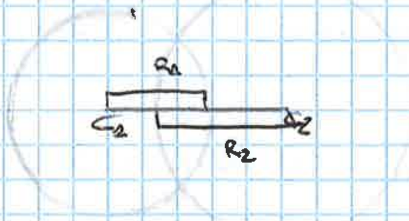
$\Rightarrow R_1 + R_2 > d(C_1, C_2) \rightarrow$ le 2 sfere si incontrano : il sistema ha soluzioni

Riassumendo: $d(C_1, C_2) > R_1 + R_2 \Rightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset$





$R_1 + R_2 = d(C_1, C_2) \rightarrow$ tangenti



$R_1 + R_2 > d(C_1, C_2) \rightarrow$ si intersecano

es: Trovare l'intersezione tra i piani P_1 e P_2:
$$\begin{cases} \pi_1: 2x - y - z - 5 = 0 \\ \pi_2: x - 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$
li metto a sistema

Tornando all'esercizio precedente:
$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 6y - 10z - 2 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 8y + 2z - 2 = 0 \end{cases} -$$
$$// \quad // \quad // \quad // \quad 14y - 12z = 0 \rightarrow \begin{cases} 7y - 6z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 5z - 1 = 0 \end{cases}$$

Definizione: una circonferenza nello spazio di centro P_0 e raggio R è il luogo dei punti di un piano contenente P_0 equidistanti da P_0 con raggio R.

Una sfera intersecata con un piano mi dà una circonferenza.

es: Sia data la circonferenza:
$$\begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 12y - 7z - 4 = 0. \end{cases}$$

(esce spesso all'esame!)

Trovare centro e raggio della circonferenza.

Risoluzione:

$C_{sfera}(-5, 6, 7/2)$ $R^2 = 25 + 36 + \frac{49}{4} + 4 = \frac{309}{4}$

17/03/2016 7° Lezione: 90 min

ARGOMENTO: INTRODUZIONE ALLE MATRICI

Ricordiamo che $\mathbb{K}^n$ denota lo spazio vettoriale di tutte le colonne di n scalari: $\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \, a_i \in \mathbb{K} \right\}$

$(\mathbb{K}^n)^T = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}\}$.

TRASPOSIZIONE (T)

Esiste una biezione tra righe e colonne:
$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\longrightarrow (\mathbb{K}^n)^T \\ \vec{u} &\longmapsto \vec{u}^T = (u_1, \dots, u_n) ; \end{aligned}$$

per abuso di notazione si denota con ^{T} anche l'inversa.

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}^n)^T &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le righe verranno denotate con lettere greche minuscole α, β, γ, ecc...

Proprietà: la trasposizione è lineare, ossia:

$(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v})^T = \lambda \vec{u}^T + \mu \vec{v}^T$

$(\lambda \alpha + \mu \beta)^T = \lambda \alpha^T + \mu \beta^T$

$\vec{u}^{TT} = (\vec{u}^T)^T = \vec{u}$ e $(\alpha^T)^T = \alpha$

"**Dimostrazione**": $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v})^T = \left(\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 \end{pmatrix}^T = (\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2) =$
$= \lambda (u_1, u_2) + \mu (v_1, v_2) = \lambda \vec{u}^T + \mu \vec{v}^T$

OSSERVAZIONE: esiste un'applicazione bilineare $(\mathbb{K}^n)^T \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ detta "PRODOTTO DI RIGHE PER COLONNE", definita da $(\forall \alpha \in (\mathbb{K}^n)^T, \forall \vec{u} \in \mathbb{K}^n)$

$\alpha \cdot \vec{u} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$ dove $a_i = \alpha(i)$ $u_i = \vec{u}(i)$.

La bilinearità implica che $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha \in (\mathbb{K}^n)^T$, $\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u} \in \mathbb{K}^n$

$(\lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2) \vec{u} = \lambda \alpha_1 \cdot \vec{u} + \mu \alpha_2 \cdot \vec{u}$ e $\alpha (\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) = \lambda \alpha \cdot \vec{u}_1 + \mu \alpha \cdot \vec{u}_2)$

es: $(3, 1, 5) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 4 = 27$

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il prodotto scalare $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \vec{u}^T \cdot \vec{v}$

$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \vec{v}^T \vec{u} = \vec{u}^T \cdot \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v}^T \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + \dots + v_n u_n$
$\hookrightarrow = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$

Definizione: una matrice $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ è una tabella in generale: $\begin{pmatrix}2&1&3\\1&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a_1+a_2+3a_3\\a_1+4a_2+5a_3\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}R_1(A)\vec{a}\\R_2(A)\cdot\vec{a}\end{pmatrix}.$

in generale se $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}\Rightarrow A\begin{pmatrix}u_1\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}=u_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+\dots+u_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}a_{11}u_1+\dots+a_{1n}u_n\\a_{21}u_1+\dots+a_{2n}u_n\\a_{m1}u_1+\dots+a_{mn}u_n\end{pmatrix}=A\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}R_1(A)\cdot\vec{a}\\\vdots\\R_m(A)\cdot\vec{a}\end{pmatrix}$

es: $\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\1&2&-1&4\\3&1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1+12-1\\2+2+4+28\\6+1+8+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\36\\22\end{pmatrix}$

passaggio a una coppia ordinata di matrici, una terza matrice

Definizione: siano $(A,B)\in K^{m\cdot p}\times K^{p\times n}$, $(A,B)\longmapsto A\cdot B\in K^{m\times n}$ (v. anche libro)

$A\cdot B=\begin{pmatrix}R_1(A)\\\vdots\\R_n(A)\end{pmatrix}\cdot(C_1(B),\dots,C_n(B))\Rightarrow A(C_1(B),\dots C_n(B))=(A\cdot C_1(B),A\cdot C_2(B),\dots,$

$A\,nC_n(B))=\begin{pmatrix}R_1(A)C_1(B)&R_1(A)C_2(B)&\dots&R_1(A)C_n(B)\\R_2(A)C_1(B)&R_2(A)C_2(B)&\dots&R_2(A)C_n(B)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\R_m(A)C_1(B)&R_m(A)C_2(B)&\dots&R_m(A)C_n(B)\end{pmatrix}$

La matrice A·B è la matrice la cui entrata di posto (i,j) si ottiene moltiplicando la i-esima riga di A per la j-esima colonna di B.

Ossia A·B è l'unica matrice tale che $(A\cdot B)(i,j)=R_i(A)C_j(B)$

es: $\begin{pmatrix}2&1&4\\3&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&1\\1&1\\\cancel{3}&\cancel{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot2+4\cdot1&19\\10&23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&19\\10&23\end{pmatrix}$

↳ è da cancellare

21/03/2016 8° LEZIONE: 90 min

ARGOMENTO: BILINEARITÀ E ASSOCIATIVITÀ DEL PRODOTTO DI MATRICI

Ricordiamo che:

① Se $A\in K^{m\times n}$ e $\vec{u}\in K^n$, $A\cdot\vec{u}=\sum_{i=1}^{n}\vec{u}(i)C_i(A)=\begin{pmatrix}R_1(A)\vec{u}\\\\R_m(A)\vec{u}\end{pmatrix}$ dove se $a\in(K^n)^*=K^{1\times n}$

e $\vec{u}\in K^n=K^{n\times1}\Rightarrow a\cdot\vec{u}=\sum_{i=1}^{n}a(i)\vec{u}(i)$

② Se $(A,B)\in K^{m\times p}\times K^{p\times n}$, $A\cdot B=A(C_1(B),\dots,C_n(B))=(A.C_1(B),\dots A C_n(B))=$

$=\begin{pmatrix}R_1(A)C_1(B)&\dots&R_1(A)C_n(B)\\\vdots&&\\R_m(A)C_1(B)&\dots&R_m(A)C_n(B)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_1(A)\\\vdots\\R_m(A)\end{pmatrix}\cdot B=\begin{pmatrix}R_1(A)\cdot B\\\vdots\\R_m(A)\cdot B\end{pmatrix}$

es: $\begin{pmatrix}1&3\\-2&1\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\4&1&1&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&5&20&30\\2&-3&9&3\\24&13&31&4\cdot3+5\cdot9\end{pmatrix}$

③ Il prodotto di matrici è bilineare: $\forall\lambda,\mu,A,A_1,A_2,B,B_1,B_2\,|$

$A(\lambda B_1+\mu B_2)=\lambda AB_1+\mu AB_2$ $(\lambda A_1+\mu A_2)\cdot B=\lambda A_1B+\mu A_2B.$

Verifica: $-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+1=0 \rightarrow 0=0$ (C'è una soluzione particolare, più la soluzione del sistema omogeneo associato).

$-\frac{8}{3}-\frac{1}{3}+3=0 \rightarrow 0=0$

OSSERVAZIONE (dall'analisi 1): $V=\underset{\substack{+\\ f}}{C^{\infty}}(\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, infinitamente derivabile / $f(x)\in\mathbb{R}\}$

Se $f,g\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $\lambda f+\mu g\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ sono infinitamente derivabili.

$$\frac{d}{dx}=D:C^{\infty}(\mathbb{R})\rightarrow C^{\infty}(\mathbb{R})$$
$$D(\lambda f+\mu g)=\lambda Df+\mu Dg=\lambda f'+\mu g'$$

es: $(D-1)f=Df-f$

$(D-1)^{-1}g(x)=\{y\in C^{\infty}(\mathbb{R})/(D-1)y=x^2\}=\{y\in C^{\infty}(\mathbb{R})/y'-y=x^2\}$ $\quad g(x)=x^2$

$\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=1$ è soluzione.

$(D-1)e^x=De^x-e^x=e^x-e^x=0$

$y=ax^2+bx+c \rightarrow y'=2ax+b$

$2ax+b+ax^2+bx+c=x^2 \rightarrow y=y+ce^x$

- Sia $A\in K^{m\times n}$, $A^{-1}(\vec{b})=\{\vec{x}/A\vec{x}=\vec{b}\}$ dove $\vec{b}\in K^m$; se $\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow A\vec{x}=0$ si dice sistema omogeneo e le soluzioni sono proprio i vettori di $A^{-1}(\vec{0}_{K^m})=\ker(A)$

nucleo della matrice

es: Trovare le soluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{cases}2x-y+z=0\\ x+y+z=0\end{cases}$

Lo stesso esercizio può essere proposto come segue:

ⓐ trovare il nucleo della matrice $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

ⓑ trovare il nucleo dell'applicazione lineare $\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases}2x-y+z=0\\ x+y+z=0\end{cases}=\begin{cases}z-y=-2x\\ z+y=-x\end{cases}=\begin{cases}z=-\frac{3}{2}x\\ y=+\frac{x}{2}\end{cases}=\begin{cases}x=\lambda\\ z=-\frac{3}{2}\lambda\\ y=+\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\ker A=\left\{\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda/2\\ -3/2\lambda\end{pmatrix}\middle|\lambda\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\ 1/2\\ -3/2\end{pmatrix}\middle|\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

- $(2,-1):\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ $\quad \ker(2,-1)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle|(2,-1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle|2x-y=0\right\}$

$y=2x$ $\quad\begin{cases}x=\lambda\\ y=2\lambda\end{cases}$ $\quad \ker(2,-1)=\left\{\begin{pmatrix}\lambda\\2\lambda\end{pmatrix}\middle|\lambda\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\middle|\lambda\in\mathbb{R}\right\}$

$E_3 \cdot A = (0,0,1)\begin{pmatrix}1&2&1&3\\1&9&1&5\\2&1&-1&3\end{pmatrix} = (2,1,-1,3) = R_3(A)$

In conclusione $A(1,3) = R_1(C_3(A)) = E_1 \cdot C_3(A) = \boxed{E_1 A \cdot \vec{e}_3}$

$\langle E_1|A|E_3\rangle$ -> in fisica

Ricapitolando $K^{n\times m}$ è un'algebra associativa con elemento neutro

Valgono inoltre le proprietà distributive, ossia $\forall A_1, A_2, A, B_1, B_2, B \in K^{m\times n}$

$\forall \lambda,\mu \in K \quad (\lambda A_1 + \mu A_2)\cdot B = \lambda A_1 B + \mu A_2 B$

$A(\lambda B_1 + \mu B_2) = \lambda A B_1 + \mu A B_2$

Proprietà: $\forall n \geq 2$, il prodotto di $K^{n\times n}$ non è commutativo.

Dimostrazione: $A = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $A\times B = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$B\times A = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

se il prodotto non è commutativo in $K^{2\times 2} \Rightarrow \exists A,B / A\cdot B \neq B\cdot A \quad \forall n \geq 3$

$$\left(\begin{array}{c|c}A&0\\\hline 0&0\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c}B&0\\\hline 0&0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c}A\times B&0\\\hline 0&0\end{array}\right) \neq \left(\begin{array}{c|c}B\times A&0\\\hline 0&0\end{array}\right)$$

Definizione: Sia $A \in K^{n\times m}$, A si dice invertibile se esiste una matrice

$\overset{B}{\overset{\shortparallel}{A^{-1}}} \in K^{n\times m} / \overset{B}{\overset{\shortparallel}{A^{-1}}} \cdot A = A \cdot A^{-1} = 1_n$ (v anche dopo)

- Matrici (quadrate) invertibili esistono.

es: $\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}$ è invertibile e l'inversa è $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&5\end{pmatrix}$

Esistono matrici non nulle che non sono invertibili. Per esempio:

$A = \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ non è invertibile (verificare).

Più in generale $A = \begin{pmatrix}a&b\\\lambda a&\lambda b\end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$ non è invertibile. Se lo fosse,
esisterebbe

$\exists \begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix} / \begin{pmatrix}a&b\\\lambda a&\lambda b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ $\begin{cases}ax+bz=1\\ax+bz=0\end{cases} \Rightarrow 1 \neq 0$

segue che $(K^{n\times m}, \cdot)$ non è un gruppo moltiplicativo: $K^{n\times m} \setminus \{$non invertibile$\}$

$GL_n(K)$ -> gruppo lineare

$A \in GL_n(K) \Leftrightarrow A$ è invertibile

es: Determinare tutte le matrici invertibili 2x2 e determinare l'inversa di ciascuna

REGOLA DI CRAMER per sistemi di equazioni a 2 incognite:

sia $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a \neq 0 \vee b \neq 0$

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$

Sia $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$ $\quad z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a1_2 + b\mathrm{II}$

dove $\mathrm{II} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{II}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1_2$

Quindi c'è una biezione $\mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ che mantiene le operazioni

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \longmapsto a+bi$

1) $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ $\langle \vec{v}, \mathrm{II}\vec{v} \rangle = 0$ $\quad \langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} \rangle = 0$

$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$

$R_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = R_\alpha \cdot R_\beta$

$R_0 \begin{pmatrix} \cos 0 & -\operatorname{sen} 0 \\ \operatorname{sen} 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R_{\alpha+(-\alpha)} = R_\alpha \cdot R_{-\alpha} = 1$

$R_{-\alpha} = (R_\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & \cos\alpha(-\operatorname{sen}\beta) - \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \\ \cos\beta\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha(-\operatorname{sen}\beta) + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$

Più semplicemente, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, sia $z_\alpha = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$, $z_{\alpha+\beta} = z_\alpha \cdot z_\beta =$

$= (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)$

Definizione: $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, A si dice simmetrica se $A^T = A$.

Es: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S^{3\times3}$, $1_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in S^{3\times3}$, $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \notin S^{2\times2}$.

OSSERVAZIONE: Combinazioni lineari di matrici simmetriche sono simmetriche.

Prova: $A, B \in S^{n\times n}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T = \lambda A + \mu B$

Definizione: Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ si dice antisimmetrica $\iff A^T = -A \iff$

$(A^T)(i,j) = -A(i,j)$, $A(j,i) = -A(i,j) \Rightarrow i = j$.

$\Rightarrow$ A è antisimmetrica; tutti gli elementi della diagonale principale sono nulli.

"+" è associativa, ammette elemento neutro $\vec{0}$, ogni $\vec{v} \in V$ ammette un opposto $(-\vec{v}) / (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ e "+" sia commutativa (v. pag. 226-227)

V si dice **K-spazio vettoriale** se è definita una moltiplicazione $\lambda \cdot \vec{v}$ $(\forall \lambda \in K, \forall \vec{v} \in V)$ tale che ① $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

② $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$

③ $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

④ $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$

OSSERVAZIONE: come detto in $(V, +)$ con il prodotto per elementi di K è possibile considerare combinazioni lineari $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

es: K^n è uno spazio vettoriale

K^2 $\quad \lambda\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \mu v_2 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 \end{pmatrix}$

$$1\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot u_1 \\ 1 \cdot u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$2\left[3\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right] = 2\begin{pmatrix} 3u_1 \\ 3u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6u_1 \\ 6u_2 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

- $K[x] = \{a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n \mid x \in \mathbb{N}, a_i \in K\}$
  Lo spazio vettoriale polinomi rispetto alla nozione di combinazione lineare data da $\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i x^i + \mu \sum_{i=1}^{n} b_i x^i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + \mu b_i) x^i$

  $2 + 3x + 0x^2 + 3(1 + x + 2x^2) = 5 + 6x + 6x^2$

- $\mathbb{R}^{[a,b]} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}$, sia $[a,b]$ intervallo retta reale.

$\mathbb{R}^{[a,b]}$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale rispetto alla nozione di combinazione lineare: $f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$. (v. § 3.5 [illegible])

In generale, se $X \neq \emptyset$ (insieme) $K^X = \{f : X \to K\}$ è un K-spazio vettoriale, rispetto a $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ $\forall x \in X$.

Se $X = \{1, 2, \dots, n^2\}$, $K^X \cong K^n$

Definizione: Sia V un K-spazio vettoriale e $W \neq \emptyset \overset{\text{sottoinsieme}}{\subseteq} V$. Diciamo che W è un **sottospazio vettoriale di V**, se $\forall \vec{w_1}, \vec{w_2} \in W$ e $\forall \lambda, \mu \in K$, $\lambda\vec{w_1} + \mu\vec{w_2} \in W$

Notazione: se V è spazio vettoriale, $G(V) = \{W \subseteq V / W$ è sottospazio vettoriale di $V\}$.

$\{\vec{0}_V\} \in G(V)$. Infatti $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \{\vec{0}_V\}$ $\forall \lambda \mu \in K$: $\lambda\vec{0}_V + \mu\vec{0}_V = \vec{0}_V \in \{\vec{0}_V\}$

$V \in G(V)$ ovvio.

$\{\vec{0}\} V$ si dicono sottospazi banali.

$(a_1, \dots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

$W_a \in G(K^n)$ perché è uguale a $\ker(a_1, \dots, a_n)$.

Es: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix} 2x - y + 5z = 0 \\ x - 3y + 7z = 0 \end{matrix} \right\}$ $\quad \ker(2,-1,5) \cap \ker(1,-3,7)$
$\Downarrow$
L'intersezione X sottospazi vettoriali è un sottospazio

09/03/2016 — 11° Lezione: 90 min.

ARGOMENTO: SOTTOSPAZI VETTORIALI FINITAMENTE GENERATI.

Ricordiamo che uno spazio vettoriale in K è una struttura algebrica nella quale si possono eseguire combinazioni lineari, ossia ha senso scrivere $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$, $\forall \lambda, \mu \in K$.

Si era indicato con $G(V)$ l'insieme di tutti i sotto-spazi vettoriali di V.

$W \in G(V) \Leftrightarrow \forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$, $\forall \lambda, \mu \in K$, $\lambda w_1 + \mu w_2 \in W$ (chiuso rispetto alle combinazioni lineari)

Es: sia $u \neq \vec{0} \in V$, $[\vec{u}] = \{\lambda\vec{u} / \lambda \in K\}$ è direzione di V (o anche "retta vettoriale). $[\vec{u}] \in G(V)$, $\forall \vec{u} \in V^*$.

Infatti, se $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in [\vec{u}] \Rightarrow \exists a, b \in K / \vec{u}_1 = a\vec{u}, \vec{u}_2 = b\vec{u}$.
[anche la combinazione lineare è un multiplo di $\vec{u}$ $\Rightarrow [\vec{u}] \in G(V)$]
$\lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{u}_2 = \lambda a\vec{u} + \mu b\vec{u} = (\lambda a + \mu b)\vec{u} \in [\vec{u}]$.

Siano ora $\vec{u}, \vec{v} \in V / [\vec{u}] \neq [\vec{v}]$, $[\vec{u}, \vec{v}] \{(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} / \lambda, \mu \in K\}$.

Piano vettoriale $[\vec{u}, \vec{v}] \in G(V)$. Infatti se $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in [\vec{u}, \vec{v}]$, infatti se $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in [\vec{u}] \Rightarrow \exists a, b \in K / \vec{u}_1 = a\vec{u}, \vec{u}_2 = b\vec{u}$, $\lambda u_1 + \mu\vec{u}_2 = \lambda a\vec{u} + \mu b\vec{u} =$
$= (\lambda a + \mu b)\vec{u} \in [\vec{u}]$.

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in K / \vec{w}_1 = \lambda_1\vec{u} + \mu_1\vec{v}$, $w_2 = \lambda_2\vec{u} - \mu_2\vec{v}$ $\forall \lambda\mu \in K$

$\lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 = \lambda(\lambda_1\vec{u} + \mu_1\vec{v}) + \mu(\lambda_2\vec{u} + \mu_2\vec{v}) = (\lambda\lambda_1 + \mu\lambda_2)\vec{u} + (\lambda\mu_1 + \mu\mu_2)\vec{v}$

Ciò prova che ogni piano vettoriale $[\vec{u}, \vec{v}] \in G(V)$

Definizione: $W \subseteq V$ si dice sottospazio vettoriale di $V \Leftrightarrow \forall w_1, w_2 \in W$
$[\vec{w}_1, \vec{w}_2] \subseteq W$

Generalizzando, dati $u_1, \dots, u_h$, h vettori di V, si può formare il sottoinsieme di V denotato da $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_h] = \{\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \vec{u}_i / \lambda_i \in K\}$.

Così come nel caso $h = 2$ $[\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_h] \in G(V)$ e si dice "sottospazio vettoriale generato da $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_h$ e $\vec{u}_1, \dots \vec{u}_h$ si dicono "generatori".

Definizione: $W \in G(V)$ si dice finitamente generato se $\exists \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n /$

es: i vettori $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

Proposizione: siano dati $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n \in V$, essi sono linearmente dipendenti <=> almeno uno è combinazione lineare dei rimanenti.

Dimostrazione: =>) Se sono linearmente dipendenti $\Rightarrow \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \dots \lambda_n\vec{u}_n = \vec{0}$ e possiamo supporre che sia $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda_1\vec{u}_1 = -\lambda_2\vec{u}_2 - \dots - \lambda_n\vec{u}_n$

$\vec{u}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\vec{u}_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\vec{u}_n$.

il coefficiente è 1 => è diverso da 0.

Viceversa <=) Se $\vec{u}_1 = \mu_2\vec{u}_2 + \dots \mu_n\vec{u}_n \Rightarrow 1 \cdot \vec{u}_1 - \mu_2\vec{u}_2 - \dots - \mu_n\vec{u}_n = \vec{0}$

Proprietà: Sia $W = [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n]$, allora $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se ogni $\vec{w} \in W$ si scrive come combinazione lineare UNICA di $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$.

Dimostrazione: supponiamo che $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ siano linearmente indipendenti, sia $\vec{w} = \lambda_1\vec{b}_1 + \dots \lambda_n\vec{b}_n$, supponiamo $\vec{w} = \mu_1\vec{b}_1 + \dots \mu_n\vec{b}_n$,

$\lambda_1\vec{b}_1 + \dots \lambda_n\vec{b}_n = \mu_1\vec{b}_1 + \dots \mu_n\vec{b}_n \Rightarrow (\lambda_1 - \mu_1)\vec{b}_1 + \dots (\lambda_n - \mu_n)\vec{b}_n = \vec{0}$.

$\Rightarrow \lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \dots = \lambda_n - \mu_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n$.

Viceversa, supponiamo che ogni vettore di W si scriva in modo unico come combinazione lineare di $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$.

$\lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \dots + \lambda_n\vec{b}_n = \vec{0} = 0\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + \dots 0\vec{b}_n$.

$\lambda = \lambda_1 = \dots \lambda_n = 0$, cioè che $\vec{b}_1, \dots \vec{b}_n$ sono linearmente indipendenti come desiderato.

05/09/2016 12° LEZIONE: 3 h.

ARGOMENTO: BASI E DIMENSIONE

Ricordiamo che:

a) se V è $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n \in V$, $[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$ è il sottospazio di $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ vettoriale di V generato da $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, ossia

$[\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n]_h = \left\{ \sum_{i=1}^{h} \lambda_i\vec{v}_i \,/\, \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$;

b) $W \in G(V)$ si dice finitamente generato se esistono $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k \in W \,/\, W = [\vec{w}_1, \dots \vec{w}_k]$;

c) $\sum_{i=1}^{2} \lambda_i\vec{v}_i = \vec{0}$ si dice combinazione lineare nulla e che dati $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ qualsiasi può formare la combinazione lineare (C.L) nulla: $0 \cdot \vec{v}_1 + \dots 0 \cdot \vec{v}_n$

d) che $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n$ si dicono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{h} \lambda_i\vec{v}_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

vettoriale $V \Rightarrow m=n$,

Dimostrazione: siccome $\{B\}$ è una base e $\left\{ \begin{matrix} \{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n\} \\ \{\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_m\} \end{matrix} \right\}$ sono linearmente
rispetto a $\{B\}$ può essere base
indipendenti $\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} n \leq m \\ m \leq n \text{ (viceversa)} \end{matrix} \right. \Rightarrow m=n$

(V K-spazio vettoriale)

DEFINIZIONE: Sia $W \in G(V)$, $\dim_K W = n \Leftrightarrow W$ possiede una base formata da n elementi.
↳ dipende dal campo che si considera

es: $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n (possiede una base formata da n elementi) perché la base canonica ha n elementi (quindi anche tutte le altre!)

Ricordiamo: $\mathbb{R}[x]$ spazio vettoriale polinomi a coefficienti reali,
$\left\{ \sum_{i=}^{n} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R}, n \geq 0 \right.$ e se $a_n \neq 0$, n si dice il grado$\}$.

$\dim \mathbb{R}[x] = \infty$. ($\nexists$ basi con un n. finito di elementi)

Supponiamo che $\mathbb{R}[x] = [P_1, P_2, \dots, P_n]$ sia $d = \max\{\overset{\text{grado}}{\deg}(P_i)\}$,
$x^{d+1} \in \mathbb{R}[x]$ e $x^{d+1} \notin [P_1, \dots, P_n]$.

Sia $R_a[x] = \{$polinomi di grado a$\}$, $R_a[x] \notin G(\mathbb{R}[x]) \rightarrow R_d[x] \notin G(V)$

es: $P_1 = 3x^9 + 2$ $P_2 = 2 + 3x^9$. se $P_1 - \frac{3}{3}P_2$ perché $\left(\frac{3}{3}\right)x^9 = 3x^9$: si cancella il grado.

Invece, $\forall n \geq 0$ $R_{\leq n}[x] = \{P \in R[x] / \deg(P) \leq n\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$ perché $\lambda(P) + \mu(Q) \leq n$ se $\deg(P), \deg(Q) \leq n$.

es: $R_{\leq 2}[x] \subseteq R[x]$? $\dim_{\mathbb{R}} R_{\leq 2}[x]$

$P \in R_{\leq 2}[x]$ $p = a + bx + cx^2$ $R_{\leq 2}[x] = [1, x, x^2]$.

$R_{\leq 4}[x] = [1, x, x^2, x^3, x^4]$ $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$

$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$

es: $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = [1]$. Infatti $\forall z \in \mathbb{C}$,
$z = z \cdot 1$; $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \cdot z$ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ $\mathbb{C} = [1, i]_{\mathbb{R}}$ $z = a + bi$ $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$ essendo i numeri irrazionali che non posso rappresentare come combinazione lineare dei numeri reali
↳ $\mathbb{C}$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale
↳ dim dei numeri reali sui razionali.

es: $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$ Infatti $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z_1 \vec{e}_1 + z_2 \vec{e}_2$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 i \\ b_2 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 i \end{pmatrix} =$
↳ non posso portare la i fuori perché sono in un R-spazio vettoriale, non C-spazio vettoriale

$= a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$ → dimensione 4 (campo grande, dimensione piccola!)

$\mathbb{C}^2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right]$.

Domanda: sia $W \in G(V)$ finitamente generato: $W = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k]$ (per def.

sione di $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$ e di W_1 e W_2

Risoluzione: sono sottospazi perché sono definiti da sistemi omogenei

Dimensione = n. gradi di libertà - n. vincoli indipendenti (i coefficienti non devono essere multipli uno dell'altro.

Però se: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \Big| \begin{cases} 2x-y+z-t=0 \\ 4x-2y+2z-2t=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} t = 2x-y-z \end{cases} \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \nu \\ t = 2\lambda - \mu - \nu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \nu \\ \lambda - \mu = \mu - \nu \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ \mu \\ \nu \\ \lambda - 2\mu - \nu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \\ 2\lambda - \mu - \nu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

$$W_1 \cap W_2 = \{ \vec{u} \mid \vec{u} \in W_1 \text{ e } \vec{u} \in W_2 \} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Bigg| \begin{cases} x-y-t=0 \\ y-z-t=0 \\ 2x-y-z-t=0 \end{cases} \right\}$$

↳ sistema di 3 equazioni e 4 incognite.

Si considera t costante.

$$\begin{cases} x-y=t \\ y-z=t \\ 2x-y-z=t \end{cases} \quad \begin{cases} x=y+t \\ z=y-t \\ 2(t+y)-y-(y-t)=t \end{cases} \quad \begin{cases} x=y+t \\ z=y-t \\ 2t=0 \to t=0 \end{cases} \Rightarrow x=y, z=y$$

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \\ t=0 \end{cases} \quad \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad W_1 \cap W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$\text{Dim}\, W_1 \cap W_2 = 1 \Rightarrow W_1 + W_2$ non è diretta.

07/11/2016 13° Lezione: 90 min

ARGOMENTO: "OPERAZIONI" CON I SOTTOSPAZI [CAP 7-7].

Ricordiamo che se V è un K-spazio vettoriale e $W \in G(V)$.

L'espressione $\dim_K(W) = n$ significa che $W = [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n]$ e $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ è una n-upla coordinata di vettori linearmente indipendenti, detta Base

Inoltre si è visto che $W_1, W_2 \in G(V) \Rightarrow W_1 \cap W_2 \in G(V)$ e si è costruito il sottospazio $W_1 + W_2 = [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m, \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n]$ dove $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$ è una base di W_1 e $(c_1, \dots, c_n)$ è base di W_2. Tuttavia, non è detto che l'unione di 2 basi sia una base e lo è solo nel caso in cui la somma sia diretta.

Inoltre affermiamo che $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$ (è diretta) $\Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$

Dimostrazione: $\Rightarrow$) se la somma è diretta $\Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$.

$W_1 = [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m]$, $W_2 = [\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n]$, sia $\vec{v} \in W_1 \cap W_2 \begin{matrix} \subset W_1 \\ \subset W_2 \end{matrix}$

Siccome $\vec{v} \in W_1$, esso si scrive in modo unico come: $\lambda_1 \vec{b}_1 + \dots + \lambda_m \vec{b}_m$ per cui

Consideriamo in $\mathbb{R}^4$: $[\vec{e}_1, \vec{e}_2] \oplus [\vec{e}_3, \vec{e}_4] = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_4] = \mathbb{R}^4$.

$\vec{a} \in [\vec{e}_1, \vec{e}_2] \cap [\vec{e}_3, \vec{e}_4]$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} . \quad [\vec{b}_1, \vec{b}_2] \qquad [\vec{c}_1, \vec{c}_2].$$

es: $W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$, $W_2 = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ → anche $W_2 = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ moltiplico per 2, e diminuisco 1

Determinare $W_1 \cap W_2$: sia $\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 = \mu_1 \vec{c}_1 + \mu_2 \vec{c}_2$

$$\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1 \vec{c}_1 + \mu_2 \vec{c}_2 = \mu_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\mu_1 + \mu_2 \\ \mu_1 + \mu_2 \\ 3\mu_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\mu_1 + \mu_2 \\ \mu_1 + \mu_2 \\ 3\mu_1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\mu_1 - \mu_2 = 0 \\ \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 3\mu_1 = 0 \end{cases} = \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\mu_1 = \mu_2 \\ \lambda_2 - \mu_1 = \mu_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 3\mu_1 = 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2\mu_1 - \mu_2 + 2(\mu_1 + \mu_2) - 3\mu_2 = \mu_2 \to \mu_1 = 0 \\ \lambda_2 = \mu_1 + \mu_2 \to \lambda_2 = \mu_2 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 + 3\mu_1 = -(\mu_1 + \mu_2) + 3\mu_1 = -\mu_2 + 2\mu_1 \to \lambda_1 = -\lambda_2 = -\mu_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \mu_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

11/05/2016 16ª LEZIONE: 90 min

ARGOMENTO: APPLICAZIONI LINEARI (CAP. 9).

Ricordiamo che un K-spazio vettoriale V è caratterizzato dalla proprietà di possedere le combinazioni lineari.

Cioè, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ha senso considerare $\mu\vec{u} + \mu\vec{v}$. [illegible]

Se U, V sono un K-spazio vettoriale, ricordiamo che $V^U = \{f: U \to V\}$, V^U è un K-spazio vettoriale rispetto alla seguente nozione di combinazione lineare: $\forall f, g \in V^U$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ è la funzione: $U \longrightarrow V$ tale che $(\lambda f + \mu g)(\vec{u}) = \underset{\underset{V}{\cap}}{\lambda f(\vec{u})} + \underset{\underset{V}{\cap}}{\mu g(\vec{u})}$

Definizione: U, V, K-spazio vettoriale, $f \in V^U$ si dice lineare se "rispetta le combinazioni lineari", ossia: $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$

NOTAZIONE: $\overset{\text{applicazione lineare}}{\operatorname{Hom}_K(U, V)} = \{\underset{f: U \to V}{f \in V^U} \,/\, f \text{ è lineare}\}$.
insieme di tutte le applicazioni lineari

La parola "omomorfismo" è sinonimo di applicazione lineare.

$f(\vec{u}) = f(u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} + \dots u_n\vec{e_n}) = u_1 \underset{\underset{\mathbb{K}^m}{\cap}}{f(\vec{e_1})} + u_2 \underset{\underset{\mathbb{K}^m}{\cap}}{f(\vec{e_2})} + \dots u_n \underset{\underset{\mathbb{K}^m}{\cap}}{f(\vec{e_n})} =$

$= \underbrace{(f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \dots f_n(\vec{e_n}))}_{\text{matrice formata dalle n colonne}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} =$

$= M_f^{e_n, e_n}$ dove E_n indica base canonica di $\mathbb{K}^n$

$\parallel$

M_f

es: Sia $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ x + y + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$f(\vec{e_1}) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Colonne = immagini dei vettori della base canonica

$f(\vec{e_2}) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

OSSERVAZIONE: Sia $f: U \to V$ lineare, $\overset{\text{l'immagine del vettore nullo di U è il vettore nullo di V}}{f(\vec{0_U}) = \vec{0_V}}$. Infatti, $\overset{\text{l'opposto è l'opposto dell'immagine}}{f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})}$

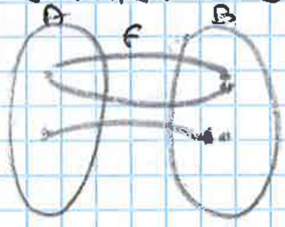
$f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{u}) = 0 \cdot f(\vec{u}) = 0_V$

$f(-\vec{v}) = f(-1\vec{v}) = -1 \cdot f(\vec{v}) = -f(\vec{v})$

Ricordiamo che se $f: A \to B$ è funzione, $Im(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$, e

f si dice **SURIETTIVA** $\Leftrightarrow Im f = B$

f è iniettiva $\Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$



f è suriettiva, ma non iniettiva.

Proposizione: Sia $f \in Hom_{\mathbb{K}}(U, V) \Rightarrow Im(f) \in G(V)$

Dimostrazione: Siano $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in Im(f)$. Per definizione di immagine, esistono $\vec{u_1}, \vec{u_2} \in U \,/\, f(\vec{u_i}) = \vec{v_i}$ $(i = 1, 2)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ $\underbrace{\lambda\vec{v_1} + \mu\vec{v_2}}_{\text{è immagine di un vettore di V} \Rightarrow \in Im(f) = G(V)} = \lambda f(\vec{u_1}) + \mu f(u_2) =$ (linearità) $=$

$= f(\lambda\vec{u_1} + \mu\vec{u_2})$.

Conseguenze: f lineare è suriettiva $\Leftrightarrow$ $(Im f = V) \Leftrightarrow \dim Im(f) = \dim V$.

Definizione: $f \in Hom_{\mathbb{K}}(U, V)$ $Ker f = \{\vec{u} \in U \,/\, f(\vec{u}) = \vec{0_V}\}$, Ker f si dice

NUCLEO Di f.

Proposizione: $Ker f \in G(U)$ [combinazioni lineari di un elemento del nucleo è un elemento del nucleo].

Infatti, siano $\vec{u}, \vec{v} \in Ker(f)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\Rightarrow f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) = \lambda\vec{0} + \mu\vec{0_V} = \vec{0}$.

$\Rightarrow \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in Ker f$, cioè $Ker f \in G(U)$

[Se ho una f con il nucleo che coincide con lo spazio di partenza, allora tutti i vettori vanno a finire nel vettore nullo]

Si prova che f è iniettiva $\Leftrightarrow Ker f = \{\vec{0_U}\}$. ha solo il vettore nullo ↳ è il più piccolo possibile

$\Leftarrow$ Supponiamo che $\dim_K(U)=\dim_K(V)$ e che $B=(\vec{b_1},\dots,\vec{b_n})$ e $C=(\vec{c_1},\dots,\vec{c_n})$ siano 2 basi di U e V rispettivamente. Per "Cordovez", $\exists!\ \varphi: U \to V$, $\varphi(\vec{b_1})=\vec{c_1},\dots,\varphi(\vec{b_n})=\vec{c_n}$

φ è isomorfismo perchè biettivo. Infatti $n=\dim \operatorname{Ker} f+\dim \operatorname{Im} f$,

$v \subseteq \operatorname{Ker} f \Rightarrow \varphi(\lambda_1\vec{b_1}+\dots+\lambda_n\vec{b_n})=\lambda_1\varphi(\vec{b_1})+\dots+\lambda_n\varphi(\vec{b_n})=\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_n\vec{e_n}=$
$=\vec{0_V} \Rightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_n=0$, ossia (perchè C è base), $\vec{v}=0\vec{b_1}+\dots+0\vec{b_n}=\vec{0_V}$
$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f=n=\dim V \Rightarrow f$ è suriettiva.

- Descriviamo esplicitamente tale isomorfismo nel caso $V=\mathbb{K}^n$.

Data una qualsiasi base $B=(\vec{b_1},\dots,\vec{b_n})$ di V, $\overbrace{\varphi_B\ V \to K^n}^{\text{applicazione lineare}}$

$\vec{v} \longmapsto \varphi_B(\vec{v})=(\vec{v})_B$

dove $(\vec{v})_B=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_n\\ \lambda_n\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v}=\lambda_1\vec{b_1}+\dots\lambda_n\vec{b_n}$.

colonna n-edrale degli scalari delle componenti di $\vec{v}$ rispetto alla base B

Osserviamo che $(\vec{b_1})_B=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=\vec{e_1}$. Infatti $\vec{b_1}=\vec{b_1}$, cioè $\vec{b_1}=1\cdot\vec{b_1}+0\vec{b_2}+\dots+0\vec{b_n}$.

Similmente $(\vec{b_2})_B=\vec{e_2}$.

$(\vec{b_i})_B=\vec{e_i}\quad 1\le i\le n.\quad V=\lambda_1\vec{b_1}+\dots+\lambda_n\vec{b_n}$. Sicchè $(\vec{v})_B=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{e_i}$.

In particolare, φ_B è lineare: $V \to \mathbb{K}^n$.

Dire che $V\to\mathbb{K}^n$ definita da $\vec{v}\longmapsto(\vec{v})_B$ è lineare, significa che $(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})_B=\lambda(\vec{u})_B+\mu(\vec{v})_B$.

es: consideriamo $V=\mathbb{R}$ + spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione differenziale $y''-y'=0$.

$V=[1,e^x,e^{-x}]=\{\lambda_0+\lambda_1e^x+\lambda_2e^{-x}]\mid\lambda_i\in\mathbb{K}\}$

$3+4e^x-5e^x \longmapsto \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$

$\lambda(a_0+a_1e^x+a_2e^{-x})+\mu(b_0+b_1e^x+b_2e^{-x})=(\lambda a_0+\mu b_0)+(\lambda a_1+\mu b_1)e^x+$
$+(\lambda a_2+\mu b_2)e^{-x}\longmapsto[\lambda(\ )+\mu(\ )]_B=\begin{pmatrix}\lambda a_0+\mu b_0\\ \lambda a_1+\mu b_1\\ \lambda a_2+\mu b_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}b_0\\b_1\\b_2\end{pmatrix}=$
$=\lambda[a_0+a_1e^x+a_2e^{-x}]_B+\mu[b_0+b_1e^x+b_2e^{-x})_B$.

- Siano ora $B=(\vec{b_1},\dots,\vec{b_n})$ e $C=(\vec{c_1},\dots,\vec{c_n})$ 2 basi di V. $\forall\vec{v}\in V$.

$(\vec{v})_C \overset{?}{\dots}(\vec{v})_B$. Sia $\vec{v}=\lambda_1\vec{b_1}+\dots\lambda_n\vec{b_n}$.

$(\vec{v})_C=(\lambda_1\vec{b_1}+\dots\lambda_n\vec{b_n})_C\overset{\text{linearità}}{=}\lambda_1\underset{K^n}{(\vec{b_1})_C}+\dots+\lambda_n\underset{K^n}{(\vec{b_n})_C}=((\vec{b_1})_C,(\vec{b_2})_C,\dots(\vec{b_n})_C)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$

$P^{CB}=((\vec{b_1})_C,\dots,(\vec{b_n})_C)$: matrice di passaggio (o cambio base da B a C). Essa è definita da $(\vec{v})_C=P^{CB}\cdot(\vec{v})_B$

(v. anche p. 28)

Dimostrazione ①: sia $\vec{a} \in U$, $F(\vec{a})_{C_2} = M_F^{C_2,B_2} \cdot (\vec{a})_{B_2} \Rightarrow F(\vec{a})_{C_2} = M_F^{C_2,B_2} \cdot (\vec{a})_{B_2}$.

$F(\vec{a})_{C_2} = P^{C_2,C_1} \cdot F(\vec{a})_{C_1} = P^{C_2,C_1}\, M_F^{C_1,B_1} \cdot (\vec{a})_{B_1} = P^{C_2,C_1} \cdot M_F^{C_1,B_1} \cdot P^{B_1,B_2} \cdot (\vec{a})_{B_2}$

Dimostrazione ②: sia B base di U, $M^{B,B}_{id_U} = ((id_U(\vec{b}_1))_B, \dots, (id_U(\vec{b}_n))_B) =$
$= ((\vec{b}_1)_B, \dots (\vec{b}_n)_B) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

es: Sia $U = \mathbb{R}_{\le 2}[x]$ e $V = \{$soluzioni $y'' + y = 0\} = [\cos x, \operatorname{sen} x]$

$B_1 = (1, x, x^2)$, $B_2 (1\ 1+x, 1+x+x^2)$ è base di U.

$C_1 = (\cos x, \operatorname{sen} x)$, $C_2 = (\cos(x - \frac{\pi}{4}), \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4}))$ $\to \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$

$F: U \to V$. $F(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0 + a_2)\cos x - a_2 \operatorname{sen} x$

$M_F^{C_1,B_1} = ((F(1))_{C_1}, (F(x))_{C_1}, (F(x^2))_{C_1}) = ((\cos x)_{C_1}, (\cos x)_{C_1}, (-\operatorname{sen} x)_{C_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

cosx = cosx + 0senx → combinazione lineare seno e coseno

sen x = 0·cosx + senx

$M^{C_1,B_2} = (F(1), F(1+x), F(1+x+x^2)) = (\cos x, 2\cos x, 2\cos x - \operatorname{sen} x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{C_1,C_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$M_F^{C_2,B_2} = ((\cos x)_{C_2}, (2\cos x)_{C_2}, (2\cos x - \operatorname{sen} x)_{C_2})$

$$M_F^{C_2,B_2} = P^{C_2,C_1} \cdot \underset{\downarrow \atop \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{M_F^{C_1,B_2}}$$

$P^{C_2,C_1} = (P^{C_1,C_2})^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

$M_F^{C_2,B_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

19/09/2016 — 17° lezione: 3 h

ARGOMENTO: CENNI DI TEORIA DEI SISTEMI LINEARI.

Ricordiamo che se V è un K-spazio vettoriale e $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ è una base di V e $F \in End_K(V)$ (ossia $f: V \to V$ è applicazione lineare, cioè $f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$), si può associare una matrice quadrata $M_F^{B,B} = M_F^B$, $M_F^B = (f(\vec{b}_1)_B, \dots f(\vec{b}_n)_B) \in K^{n \times n}$ è la matrice associata a $f \in End_K(V)$ e alla base B.

Se $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ è un'altra base di V, allo stesso modo si può costruire la matrice $M_F^C = (f(\vec{c}_1)_C, \dots f(\vec{c}_n)_C)$.

matrice che mi fa
B alla base
B alla C

Le 2 matrici così ottenute sono legate dalla relazione $M_F^C = P^{C,B} \cdot M_F^B \cdot P^{B,C} =$

Pertanto, $A^{-1}(\vec b) \neq \emptyset \iff \vec b \in \underbrace{[c_1(A), \dots c_n(A)]}_{\text{immagine: combinazione lineare delle colonne della matrice.}} \iff [c_1(A), \dots c_n(A)\vec b] = [c_1(A), \dots c_n(A)]$.

aggiungo b, ma non cambia nulla

matrice completa

$\dim [c_1(A), \dots c_n(A)\vec b] = rk(A|\vec b)$

$A^{-1}(\vec b) \neq \emptyset \iff rk(A) = rk(A|\vec b)$ e se $\vec a_0 \in A^{-1}(\vec b) \Rightarrow A^{-1}(\vec b) = \vec a_0 + Ker(A) = \vec a_0 + \lambda_1 \vec a_1 + \dots + \lambda_{n-r}\vec a_{n-r}$ dove $[\vec a_1, \dots \vec a_{n-r}] = Ker(A)$

soluzione particolare

il nucleo ha dimensione $n-r$ perché $n = \dim Ker A + \underset{\text{rango} = r}{\dim Im(A)} \Rightarrow$ la $\dim Ker(A) = n-r$, sicché se $\underbrace{A^{-1}(\vec b) \neq \emptyset}_{\text{il sistema ha soluzioni}} \Rightarrow$ vi sono ∞^{n-r} soluzioni

$\dim A^{-1}(\vec b) = \dim Ker(A)$.

Si è detto che $rK(A)$ è il numero di colonne linearmente indipendenti,

somma delle prime 2 righe

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

linearmente indipendenti

Sia dato il sistema $A\vec x = \vec b$, $A \in K^{m \times n}$ cioè m-equazioni, cioè m vincoli su $\underbrace{\text{n gradi di libertà}}_{\text{n. incognite − n. equazioni indipendenti}}$, $\vec x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Quindi abbiamo $A\vec x = \vec 0$, $n = \underset{\text{n − n. righe linearmente indipendenti}}{\dim Ker(A)} + \underset{rk(A)}{\dim Im(A)}$

$\Rightarrow \cancel{n} = \cancel{n} -$ n. righe l.i. $+ rk(A)$

ESERCIZIO 1

Abbiamo dimostrato il teorema di Rouché-Capelli: $A^{-1}(\vec b) \neq \emptyset \iff rk(A) = rk(A|\vec b)$

$A^{-1}\vec b = \vec a_0 + Ker(A)$.

Risolvere il sistema $2x - y + 3z = 5$; $(2,-1,3): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to 2x - y + 3z$

$\overset{(A^{-1})(b)}{(2,-1,3)^{-1}(5)}$

$rk(2,-1,3) \overset{?}{=} rk(2,-1,3|5) = 1$

$Ker(2,-1,3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| 2x - y + 3z = 0 \right\} \to y = 2x + 3z \begin{cases} x = \lambda \\ z = \mu \\ y = 2\lambda + 3\mu \end{cases}$

$Ker(2,-1,3) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda + 3\mu \\ \mu \end{pmatrix} \middle/ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{sono 2 generatori}} \middle/ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

$Ker(2,-1,3) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

Soluzione particolare: $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]}_{\text{vettore del nucleo}} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -5 + 2\lambda + 3\mu \\ \mu \end{pmatrix} \right\}$

1

ESERCIZIO 2

Dire per quali valori $h, k \in \mathbb{R}$ il sistema: $\begin{cases} 2x - y - 3z - 9t = h + 1 \\ x + y + 2z - 5t = 2k - 1 \end{cases}$ ①

Definizione: sia $A \in K^{m \times n}$. A si dice ridotta per $\left\{ \begin{matrix} \text{righe} \\ \text{colonne} \end{matrix} \right\}$ se ogni $\left\{ \begin{matrix} \text{riga} \\ \text{colonna} \end{matrix} \right\}$ non nulla possiede un elemento non nullo $\left\{ \begin{matrix} \text{al di sotto} \\ \text{a destra} \end{matrix} \right\}$ del quale al più vi sono zeri.

↳ all'ultima riga non possono esserci "0" sotto.

es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \textcircled{4} & -1 & 3 \\ 1 & \textcircled{2} & 0 & \textcircled{1} & 1 \\ \textcircled{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{4} \end{pmatrix}$$ è ridotta per righe

(In una matrice ridotta, il rango coincide con il numero di righe non nulle).

$\cancel{\lambda_1 R_1}(A) + \lambda_2 R_2(A) + \lambda_3 R_3(A) + \lambda_4 R_4(A) + \lambda_5 R_5(A) = 0$ -> se la matrice è ridotta per le righe, le righe sono linearmente indipendenti.

$4\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 + 0\lambda_4 = 0 \to 4\lambda_1 = 0 \to \lambda_1 = 0$ (V.P. 105-106)

$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 + 0\lambda_4 = 0 \to \lambda_2 = 0$

$\to\lambda_3=0 \quad \to\lambda_2=0 \quad \to\lambda_1=0 \quad \to\lambda_4=0$

$$\begin{array}{l} (2\lambda_1 \;\; \lambda_1 \;\; 4\lambda_1 \;\; -\lambda_1 \;\; 3\lambda_1) \; + \\ (\lambda_2 \;\; 2\lambda_2 \;\; 0 \;\; \lambda_2 \;\; \lambda_2) \; + \\ (3\lambda_3 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \lambda_3) \; + \\ (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \lambda_4) \\ \hline 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \end{array}$$

$2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 6 \to \frac{8}{3} + x_2 + 4x_3 - x_4 + 6 = 6$

$x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 1 \to \frac{8}{3} + 2x_2 + x_4 + 2 = 1$

$3x_1 + x_5 = 10 \to x_1 = \frac{8}{3}$

$4x_5 = 8 \Rightarrow x_5 = 2$

$$\begin{cases} x_2 + 4x_3 - x_4 = h \\ 2x_2 + x_4 = k \end{cases}$$

26/04/2016 — 13° LEZIONE: 3 h.

ARGOMENTO: LE MATRICI SIMMETRICHE E ANTISIMMETRICHE.

Ricordiamo che una matrice $A \in K^{n \times n}$ si dice quadrata. Ricordiamo che se V è un K-spazio vettoriale e $f \in End_K(V)$, detta B una base di V, a f può associarsi una matrice quadrata $M_f^B = (f(\vec{b_1})_B, \dots, f(\vec{b_n})_B)$.

Se C è un'altra base $\Rightarrow M_f^C = P^{C,B} \cdot M^B \cdot P^{B,C} = (P^{B,C})^{-1} \cdot M_f^B \cdot P^{B,C}$.

Viceversa, sia $M \in K^{n \times n}$ e sia V un K-spazio vettoriale. Sia $B = (\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n})$ base di V, $F_M^B(\vec{v})$ $M^B_{F_M^B} = M$.

es: $\mathbb{R}^2$ $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ $F_M(\vec{u}) = M \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

Salvo avviso contrario, il campo nella discussione che segue sarà $\mathbb{R}$

$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$ (la somma è sempre 101)
$S = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1$

Proposizione: $\mathbb{R}^{n \times n} = S^{n\times n} \oplus A^{n \times n}$

es: Sia $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, affermo che $M = M^S + M^A$. Se così fosse:
$M^T = (M^S)^T + (M^A)^T \to M^T = M^S - M^A$.

Quindi, ogni $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si scrive come $M = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T)$.

Affermo che la somma è diretta, infatti $\underbrace{A^{n \times n} \cap S^{n \times n} = \{0_{n \times n}\}}$
è unica matrice sia simmetrica che antisimmetrica è quella nulla.

Infatti, se $A \in A^{n \times n} \cap S^{n \times n}$, $A^T = -A = A \Rightarrow A = 0_{n \times n}$. Dunque $\mathbb{R}^{n \times n} = S^{n \times n} \oplus A^{n \times n}$.

$\dim A^{n \times n} = n^2 - \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2} n(n-1)$

Definizione: Sia $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, R si dice **ortogonale** $\Leftrightarrow \overbrace{R \cdot R^T = \mathbb{1}_n}^{\text{è invertibile} := = R^T \cdot R = \mathbb{1}_n}$, $R^{-1} = R^T$
↳ matrice a coefficienti reali $n \times n$
è inverso coincide con la trasposta.

es: $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ è ortogonale $\Rightarrow R^\alpha \cdot R_\alpha^T = \mathbb{1}_2$

Proprietà: $O(n) = \{R \in \mathbb{R}^{n \times n} / R \cdot R^T = \mathbb{1}_n\} \to$ insieme matrici ortogonali

ⓐ $R_1, R_2 \in O(n) \Rightarrow R_1 \cdot R_2 \in O(n)$. Infatti: $R_1 \cdot R_2 \cdot (R_1 \cdot R_2)^T = R_1 \cdot R_2 \cdot (R_2^T \cdot R_1^T) =$
$= R_1 \cdot (R_2 \cdot R_2^T) \cdot R_1^T = R_1 \mathbb{1}_n \cdot R_1^T = \mathbb{1}_n$.

ⓑ Inoltre $(R_1 \cdot R_2) \cdot R_3 = R_1 (R_2 \cdot R_3) \to$ vale la proprietà associativa.

ⓒ $\mathbb{1}_n \in O(n)$. Infatti $\mathbb{1}_n \cdot \mathbb{1}_n^T = \mathbb{1}_n \to$ possiede elemento neutro

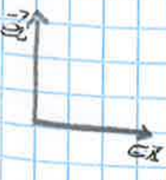
ⓓ $R \in O(n)$. Esiste quindi $R^{-1} \in O(n)$. Infatti: $R^{-1} (R^{-1})^T = R^T \cdot (R^T)^{-1} = \mathbb{1}_n$
$\Rightarrow$ allora $O(n)$ è un **SOTTOGRUPPO** di $\underbrace{GL_n(\mathbb{R})}^{\text{matrici quadrate invertibili } n \times n}$, detto **GRUPPO ORTOGONALE**

es: $R \in O(n) \Rightarrow \det(R) = \pm 1$. Infatti $1 = \det(\mathbb{1}_n) \overset{\uparrow}{=} \det(R \cdot R^T) =$
definizione di matrice ortogonale
$= \det(R) \det(R^T) \overset{\uparrow}{=} \det(R)^2 \to \det(R) = \pm 1$.
$\det(R^T) = \det(R)$

Definizione: $SO(n) = \{R \in O(n) / \det(R) = 1\} \to$ **matrici ortogonali speciali**

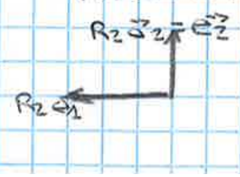
$O(n) = \{R / \det(R) = -1\} \to$ **riflessioni**

es: $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R_1, R_2 \in O(2) \to R_1 \cdot R_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_{2 \times 2}$
↳ rotazione ↳ riflessione



$R_1 \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_2$ (la rotazione non altera angoli e distanze)

$R_1 \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1$



es: $\{\vec{0}\}$ è f-invariante, $f(\vec{0}) = \vec{0} \in \{\vec{0}\}$

ker f è f-invariante.

Ricordiamo che se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $[\vec{u}] = \{\lambda \vec{u} / \lambda \in \mathbb{K}\}$ è un sottospazio vettoriale di V detto direzione o retta vettoriale.

Definizione: $[\vec{v}]$ si dice autodirezione di $f \iff [\vec{v}]$ è f-invariante, cioè se $f([\vec{v}]) \subseteq [\vec{v}]$, cioè $\forall \vec{u} \in [\vec{v}]$, $f(\vec{u}) \in [\vec{v}]$

Se $e \in G(\vec{v})$ è una autodirezione, ogni $\vec{u} \in e$ si dice autovettore di f.

Supponiamo che $B = (\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n})$ sia una base di V tale che $\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n}$ sono autovettori di f, $[\vec{b_1}], \dots, [\vec{b_n}]$ sono autodirezioni. Cioè: $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $f(\vec{b_i}) = \lambda_i b_i$ per qualche $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

es $M_f^B = (f(\vec{b_1})_B, f(\vec{b_2})_B, \dots, f(\vec{b_n})_B) = ((\lambda_1 \vec{b_1})_B, (\lambda_2 \vec{b_2})_B, \dots (\lambda_n \vec{b_n})_B) =$
$= (\lambda_1 (\vec{b_1})_B, \lambda_2 (\vec{b_2})_B, \dots \lambda_n (\vec{b_n})_B) = (\lambda_1 \vec{e_1}, \lambda_2 \vec{e_2}, \dots \lambda_n \vec{e_n}) =$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

28/09/2016 19° LEZIONE: 90 min

ARGOMENTO: MATRICI SEMPLICI E DIAGONALIZZABILI:

insieme direzioni

Sia $f \in End_K(V)$, ricordiamo che una direzione $[\vec{u}] \in P(\vec{V})$ $(\vec{u} \neq 0)$ si dice AUTODIREZIONE di f se è invariante per f, ossia $\iff f([\vec{u}]) \subseteq [\vec{u}]$.

L'ultima inclusione significa che per ogni $\vec{v} \in [\vec{u}]$, $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$.

Siccome $\vec{u} \in [\vec{u}] \Rightarrow f(\vec{u}) = \mu \vec{u}$. Siccome $v \in [\vec{u}]$, $\exists\, a \in \mathbb{K}$, tale che $\vec{v} = a\vec{u}$.

Allora $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v} = f(a\vec{u}) \underset{\text{linearità}}{=} a f(\vec{u}) = a\mu\vec{u} = \mu a \vec{u} = \mu v \Rightarrow \lambda = \mu$

Definizione: tutti i vettori di un'autodireziona si dicono AUTOVETTORI e l'unico scalare $\lambda \in \mathbb{K} / f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ (se $\vec{u}$ è autovettore) si dice "AUTOVALORE"

Pertanto $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di $f \iff \exists\, \vec{v} \neq \vec{0} / f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$.

Ricordiamo che se per avventura, V possedesse una base formata da autovettori $B = (\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n})$, cioè tale che $f(\vec{b_i}) = \lambda_i \vec{b_i}$.

In questo caso, $M_f^B = (f(\vec{b_1})_B, \dots, f(\vec{b_n})_B) = (\lambda_1 \vec{e_1}, \dots, \lambda_n \vec{e_n}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

matrice diagonale associata a f.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x+3y \\ \frac{dy}{dt} = 2x+5y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

ARGOMENTO: RICERCA DI AUTOVALORI E AUTOVETTORI DI UN ENDOMORFISMO

sia f endomorfismo, supponiamo che λ sia autovalore di $f \Rightarrow \exists \vec v \neq 0$ /

$f(\vec v) = \lambda \vec v \Rightarrow (f(\vec v))_B = (\lambda \vec v)_B$ con $B = (\vec b_1, \dots, \vec b_n) \Leftrightarrow M_f^B (\vec v)_B = (\lambda id_V \cdot \vec v)_B$

$M_f^B (\overset{\neq 0}{\vec v})_B = M_{\lambda id_V} (\vec v)_B$, $M_f^B (\vec v)_B = \lambda M^B_{id_V} \cdot (\vec v)_B$; $M_f^B (\vec v)_B = \lambda \mathbb{1}_n (\vec v)_B$

$(\lambda \mathbb{1}_n - M_f^B)\underset{\neq 0}{(\vec v)_B} = \vec 0_K$ ($\vec v_B$ è soluzione non $\overset{\text{non nulla}}{\text{banale}}$ di sistema di Cramer)

$\Leftrightarrow 0 = \det(\lambda \mathbb{1}_n - M_f^B) = \det(M_f^B - \lambda \mathbb{1}_n)$.

es: Diagonalizzare (se possibile) la matrice $A = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

$$\overset{\mathbb{1}_n}{\begin{pmatrix}T & 0\\ 0 & T\end{pmatrix}} - \begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}T-3 & -2\\ -2 & T-6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}T & 0\\ 0 & T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-T & 2\\ 2 & 6-T\end{pmatrix}$$

↳ prendo la matrice e tolgo dalla diagonale principale un "T".

$$\left|\begin{pmatrix}3-T & 2\\ 2 & 6-T\end{pmatrix}\right| = (3-T)(6-T) - 4 = T^2 - 9T + 14$$

$$T^2 - 9T + 14 = 0 \left\langle \begin{matrix} T=2 \\ T=7 \end{matrix} \right. \rightarrow \text{sono gli autovalori}$$

soluzione nulla: $x=0 \wedge y=0$

$$\begin{pmatrix}3-2 & 2\\ 2 & 6-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ \cancel{2x + 4y = 0} \end{cases}$$

↳ posso toglierla perché è multipla della prima.

$\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$ è soluzione.

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ -2\end{pmatrix} = \overset{\text{autovalore}}{2}\underset{\text{autovettore}}{\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}}$$

$\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ è autovettore relativo a 7: $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

(i 2 autovettori sono ortogonali tra loro)

$P = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ $\qquad P^{-1}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}P = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$

03/05/2016 20° lezione: 3 h

ARGOMENTO: RICERCA DI AUTOVALORI E AUTOVETTORI DI $A \in K^{n,n}$ E DIAGONALIZZABILITÀ.

Ricordiamo che se $f \in End_K(\vec V)$ [$\vec v \neq \vec 0$ si dice autovettore di f, $f(\vec v) \in [\vec v]$], ossia $\exists \lambda \in K$ $f(\vec v) = \lambda \vec v$, λ si dice autovalore. Indicheremo con

$Spec(f) = \{\lambda \in K / \lambda$ è autovalore$\}$.

Vantaggi di autovettori: se $(\vec b_1, \dots \vec b_n) = B$ è base di V formata da auto

Un autovettore relativo a λ è tale che $(A-\lambda \mathbb{1}_n)\vec{v}=\vec{0}$, $\ker(A-\lambda \mathbb{1}_n) \subseteq K^n$
sottospazio degli autovettori
relativi all'autovalore $\lambda \in$
$\mathrm{Spec}(A)$, detto AUTOSPAZIO

$\mathrm{Spec}(A) = \{$insieme autovalori$\}$, $\ker(A-\lambda \mathbb{1}_n)$ è autospazio di A relativo a $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$.

Definizione: Sia $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$, $1 \le \underset{\uparrow}{mg}(\lambda) = \dim \ker(A-\lambda \mathbb{1}_n)$
molteplicità geometrica di λ.

Definizione: $P_A(T) = |T\mathbb{1}_n - A|$ si dice polinomio caratteristico (spesso chiamiamo $P_A(T) = |A - T\mathbb{1}_n|$

ESERCIZIO 1

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, determinare il polinomio caratteristico di A.

Risoluzione: $P_A(T) = |A - T\mathbb{1}_n| = \begin{vmatrix} a-T & b \\ c & d-T \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a-T & b \\ c & d-T \end{vmatrix} = (a-T)(d-T) - bc = \underbrace{\boxed{T^2 + (a+d)T + ad - bc = 0}}_{\text{equazione caratteristica.}}$$

Definizione: Sia $A \in K^{n\times n}$, si dice TRACCIA di A, $tr(A) = \sum_{i=1}^{2} A(i,i)$. Quindi $P_A(T) = T^2 - tr(A)T + \det(A)$

ESERCIZIO 2

Trovare autovalori e autospazi della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Risoluzione: $P_A(T) = \begin{vmatrix} 3-T & 2 \\ 1 & 4-T \end{vmatrix} = T^2 - 7T + 10$.

Gli autovalori sono radici di $P_A(T)$: $T^2 - 7T + 10 = 0 \left\langle \begin{array}{l} T=2 \\ T=5 \end{array} \right.$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ -> forma diagonale di A.

L'autospazio relativo a $T=2$ $\ker(A - 2\cdot\mathbb{1}_n) = \ker\begin{pmatrix} 3-2 & 2 \\ 1 & 4-2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\ker\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x+2y=0 \\ x+2y=0 \end{array} \right\}$
↳ 2 incognite, cioè 2 gradi di libertà - 1 equazione

$x+2y=0$ $\ker(A - 2\mathbb{1}_n) = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

Autospazio relativo a $T=5$ è $\ker(A - 5\mathbb{1}_n) = \ker\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x-y=0 \right\}$
$= \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

$\mathbb{R}^2 = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \underset{\text{somma diretta}}{\underset{\downarrow}{\oplus}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

Esperimento: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \overset{\text{autovalore}}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{autovettore.}}$

$\mathrm{Spec}(A)=\{0,4\}$ -> è diagonalizzabile perché ha 2 autovalori distinti e una forma diagonale è $D_A\begin{pmatrix}0&0\\0&4\end{pmatrix}$ o $D_A\begin{pmatrix}4&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\ker(A-0\mathbb{1})=\ker(A)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \middle| A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\begin{cases}x+2y=0\\ \cancel{2x+4y=0}\end{cases}$

$\ker(A)=\left[\begin{pmatrix}-2\\+1\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right]$

$\ker(A-4\mathbb{1}_n)=\ker\begin{pmatrix}-2&+4\\1&-2\end{pmatrix}$ $x-2y=0$ $\Rightarrow\left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]$

$R^2=\left[\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right]\oplus\left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]$

$P=\begin{pmatrix}-2&2\\1&1\end{pmatrix}$ $P^{-1}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&+\frac{2}{4}\\+\frac{1}{4}&+\frac{2}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$P^{-1}\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}0&0\\0&4\end{pmatrix}$

Suggerimenti:
- Se $\det(A)=0$ (non rango massimo) -> 0 è autovalore sicuro.
- La somma di tutti gli autovalori con molteplicità è uguale alla traccia di A: $0+\lambda=4 \to \lambda=4$

ESERCIZIO 3

Dire se $A=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-2\end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

$0\in\mathrm{Spec}(A)$ $0+\lambda=0 \to \lambda=0 \Rightarrow m_a(0)=2$.

$\begin{pmatrix}2-T&4\\-1&-2-T\end{pmatrix}=T^2$ $m_g(0)=2-rk\begin{pmatrix}2&4\\1&-2\end{pmatrix}=2-1=1$ -> non è diagonalizzabile!

$-x-2y=0 \to x+2y=0 \to \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2&4\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ ok!

Provare che A è nilpotente, cioè $A^2=0$.

ESERCIZIO 4

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

Siccome $rk(A)=1 \Rightarrow 0\in\mathrm{Spec}(A)$.

Sappiamo $1\le m_g(0)\le m_a(0)$, $m_g(0)=3-rk(A-0\mathbb{1})=3-rk(A)=3-1=2$

$\Rightarrow m_a(0)\ge 2$ $0+0+\lambda=6 \to \lambda=6$ $m_a(0)=2$ $m_a(6)=1$

La matrice è diagonalizzabile.

ESERCIZIO 5

Sia data la matrice $A=\begin{pmatrix}3&2&3\\2&3&4\\3&3&9\end{pmatrix}$, 2 è autovalore? Proviamo.

$rk(A-2\mathbb{1}_n)=rk\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\\3&3&7\end{pmatrix}\to 2\ne 3 \to$ sì.

$1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$

$mg(3) = 3 - rk\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$ -> è diagonalizzabile

Trovare $Ker(A - 3\mathbb{1}_n) = ker\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle/ 2x + 2y + 5z = 0 \right.$

$\begin{cases} 2x = -2a - 10b \\ y = a \\ z = 2b \end{cases} \quad \begin{cases} x = -a - 5b \\ y = a \\ z = 2b \end{cases}$

$ker(A - 3\mathbb{1}_n) = \left\{ \begin{pmatrix} -a - 5b \\ a \\ 2b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$

$ker(A - 12\mathbb{1}_n) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle/ \begin{pmatrix} -7 & 2 & 5 \\ 2 & -7 & 5 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{cases} 2x - 7y + 5z = 0 \\ 2x + 2y - 6z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 7y = -5z \\ \underline{2x + 2y = 6z} \end{cases} \quad -9y = -\cancel{9z} \to y = z$

$2x + 2z = 6z \to 2z = 2x \to x = z$

↳ 3 gradi di libertà e 2 equazioni

$ker(A - 12\mathbb{1}_n) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$\mathbb{R}^3 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \oplus \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$P = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

ESERCIZIO 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad Spec(A) = \{0, 5\}$

↳ è simmetrica

$Ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle/ x + 2y = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$

$Ker(A - 5\mathbb{1}_n) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$

$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\overset{\text{a}}{\text{divido per il modulo}}$ $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ ~~così~~ è ortogonale

$P^{-1}AP = P^{T}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

TEOREMA SPETTRALE delle matrici simmetriche reali: Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n} / A^{T} = A$ (matrice simmetriche), allora A è diagonalizzabile per mezzo di una matrice ortogonale. In particolare se $\lambda, \mu \in Spec(A) / \lambda \neq \mu$ $Ker(A - \lambda\mathbb{1}) \perp Ker(A - \mu\mathbb{1})$.

ES: Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ Provare che è diagonalizzabile.

$P_A(T) = T^2 - (a+c)T + ac - b^2 = 0 \to T = \dfrac{a + c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac - b^2)}}{2} = \dfrac{a + c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{\ }$

sono reali perché ho Σ radice di 2 numeri al quadrato

$\langle \vec{u}, A\vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \mu\vec{v} \rangle \underset{\text{linearità}}{=} \mu\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \Rightarrow (\lambda - \mu)\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Poiché $\lambda - \mu \neq 0$ (poiché $\lambda \neq \mu$) $\Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

PROVA DEL TEOREMA SPETTRALE NEL CASO DI $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $P_A(r) = r^2 - (a+c)r + ac - b^2$ $\quad r_{1,2} = \dfrac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$

siccome $(a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$, $\forall a, b, c$, gli autovalori di A sono reali (tutti).

Se A avesse autovalore doppio $\Rightarrow (a-c)^2 + 4b^2 = 0 \Rightarrow a = c$ e $b = 0$.

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \mathbb{1}_2^{-1} A \mathbb{1}_2 = A \rightarrow$ la matrice che diagonalizza ortogonalmente diagonale è $\mathbb{1}_2$.

supponiamo ora che $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\ker(A - \lambda_1 \mathbb{1}) = \{ \binom{x}{y} / (A - \lambda_1 \mathbb{1})\binom{x}{y} = \vec{0} \}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a-\lambda_1 & b \\ b & c-\lambda_1 \end{pmatrix}}_{rk = 1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (a-\lambda_1)x + by = 0 \\ \text{~~$bx + (c-\lambda_1)y = 0$~~} \end{cases}$$

$(a - \lambda_1)x + by = 0$

$\ker(A - \lambda_1 \mathbb{1}) = \left[\begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} \right]$

$\ker(A - \lambda_2 \mathbb{1}) = \begin{pmatrix} a-\lambda_2 & b \\ b & c-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left[\begin{pmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix} \right]$

$\tilde{P} = \begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1 - a & \lambda_2 - a \end{pmatrix}$ che diagonalizza.

$\left\langle \begin{pmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} \right\rangle = b^2 + (\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a) = 0$

$b^2 + a^2 - a\overset{(a+c)}{(\lambda_1 + \lambda_2)} + \overset{(ac-b^2)}{\lambda_1\lambda_2} = 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ sono soluzioni dell'equazione caratteristica $r^2 - (a+c)r + ac - b^2 = 0$

$\tilde{P} = \begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1 - a & \lambda_2 - a \end{pmatrix}$ costruisco $P = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{\sqrt{b^2 + (\lambda_1 - a)^2}} & \dfrac{b}{\sqrt{b^2 + (\lambda_2 - a)^2}} \\ \dfrac{\lambda_1 - a}{\sqrt{b^2 + (\lambda_1 - a)^2}} & \dfrac{\lambda_2 - a}{\sqrt{b^2 + (\lambda_2 - a)^2}} \end{pmatrix}$

a meno di scambio di colonne.

ARGOMENTO: LE FORME QUADRATICHE $(ax^2 + 2bxy + cy^2)$

$F(x,y) = 3x^2 - 5xy + 9y^2$

$$\begin{array}{c|cc} & x & y \\ \hline x & 3 & -\frac{5}{2} \\ y & -\frac{5}{2} & 9 \end{array} \qquad F(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

In generale, detta $Q \in S^{n\times n}(\mathbb{R})$ e dette $(x_1, \ldots, x_n)$ dette indeterminate o va

Ricordiamo che una forma quadratica $q(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_2[x_1, \dots, x_n]$ omogenea può scriversi nella forma $q(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) Q \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dove Q è una matrice simmetrica. Se scriviamo $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i,j \le n} b_{ij} x_i x_j = \sum_{1 \le i \le j \le n} (2 - \delta_{ij}) a_{ij} x_i x_j$

$(b_{ij} \in \mathbb{R})$.

Q associata alla forma quadratica è $Q(a_{ij})$

es: $q(x,y,z) = 3x^2 - 2xy + 3xz - 2yz + y^2 - 5z^2$

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3/2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \quad (*) \quad q(x,y,z) = (x,y,z) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3/2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Chiaramente, ogni forma quadratica reale induce una funzione $q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

es: Sia q come in $(*)$, $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(\vec u) =$ valutare q in $\begin{pmatrix} x = u_1 \\ y = u_2 \\ z = u_3 \end{pmatrix}$,

$$q\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 6 - 2 \cdot 3 + 1 - 5 \cdot 9 = 12 - 4 + 18 - 6 + 1 - 45 = -24$$

Definizione: Sia $q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma quadratica definita in $\mathbb{R}^n$. Essa si dice ⓐ **NON DEGENERE** se la matrice simmetrica ad essa associata ha determinante non nullo (cioè è invertibile) [è degenere in caso contrario]

ⓑ Q si dice **SEMIDEFINITA POSITIVA** se $q(\vec v) \ge 0 \quad \forall \vec v \in V$.

ⓒ Q si dice **DEFINITA POSITIVA** se è semidefinita positiva e se $q(\vec v) = 0 \Rightarrow \vec v = \vec 0$.

es: sia $|\ |^2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione modulo quadrato di un vettore $\vec u(i) = u$

$|\vec u|^2 = u_1^2 + \dots + u_n^2 \ge 0$ e se $|\vec u^2| = 0 \Rightarrow \vec u = 0$.

es: $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(x,y,z) Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x,y,z) \begin{pmatrix} x+z \\ y \\ x+z \end{pmatrix} = x(x+z) + y^2 + z(x+z$

$= x^2 + 2xz + z^2 + y^2 =$

$= (x+z)^2 + y^2 \Rightarrow$ è sempre maggiore o uguale a

$q\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (1-1)^2 + 0^2 = 0$, per cui la forma quadratica data è semidefinita positiva, ma non definita.

- $q = x^2 + y^2$

no definita positiva

$q(x,y) = x^2 + y^2 -$

$q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

↳ semidefinita positiva

$q(0,0,1) = 0$

↳ semidef.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ⓓ q è **SEMIDEFINITA NEGATIVA** $\Longleftrightarrow -q$ è semidefinita positiva, ossia $q(\vec v) \le$

$\forall \vec v \in \mathbb{R}^n$

ⓔ Q si dice **DEFINITA NEGATIVA** se è semidefinita negativa e se $q(\vec v) = \vec 0 \Rightarrow \vec v = \vec 0$

Ci saranno 3 soluzioni: 2 soluzioni $\overset{\text{(variazioni)}}{\text{positive}}$, 1 soluzione $\overset{\text{(permanenza)}}{\text{negativa}}$.

ESERCIZIO 2

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 0 è autovalore: $mg(0) = 3 - rk(A-0I_n) = 3 - rk(A) = 1$

$ma(0) = 1$ $\quad 1 \leq mg(0) \leq ma(0)$

$0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 2$

$$\begin{vmatrix} 2-r & 0 & 0 \\ 0 & 0-r & 0 \\ 0 & 1 & 0-r \end{vmatrix} = r^2(2-r)$$

ESERCIZIO 3

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & h & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad mg(1) = 4 - rk\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & h & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{se} \begin{cases} h \neq 0 \rightarrow 1 \\ h = 0 \rightarrow 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 4

$\vec{u} = 3i + j - 4k$, $\vec{v} = 4i + 5k$, $\vec{w} = i + 2\vec{j} - 3k$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

ⓐ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ complanari -> det = 0

ⓑ $\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}$ base di R^3 -> det ≠ 0 -> linearmente indipendenti

ⓒ $\vec{v}\ \vec{w}$ formano angolo ottuso -> prodotto scalare negativo

ⓓ $\vec{u} \perp \vec{v} + \vec{w}$

ESERCIZIO 5

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $A\vec{x} = \vec{0}$ ⓐ non ha soluzioni: FALSO -> questo sistema omogeneo ha almeno la soluzione nulla

ⓑ $\exists B / A\vec{x} = B$ ha una sola soluzione: $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$, $R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

sono uguali $rk(A) = 2$; -> multiplo della 2° e 3°

È falsa: ha una sola soluzione <=> dim Ker(A) = 0 ; qui è 2.

ⓒ 2 colonne qualsiasi formano una base dello spazio delle colonne.

ESERCIZIO 6

non è quadrata -> non è invertibile

$A \in R^{m \times n}$ con $m \neq n$ $B \in R^m$ $AX = B$ abbia soluzione unica; $Ker(A) = \{\vec{0}\}$ $A\vec{x} = \vec{0}$.

$A: R^n \rightarrow R^m$, $n = \underset{rk(A)}{\dim Im(A)} + \underset{0}{\dim Ker(A)} \Rightarrow rk(A) = n$

ESERCIZIO 7

$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile perché è simmetrica. [però non vale il viceversa!]

$1 \notin Spec(A)$, ma $3 \in Spec(A)$ $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow rk = 1$; $mg(3) = 3 - rk = 3 - 1 = 2$, $ma(3) = 2$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ -> trovo il determinante: se è diverso da 0 non è autovalore:

$3 + 3 + \lambda = 12 \rightarrow + \lambda = 6$

$Det(1) = 3(9-1) - 1(3-1) + 1(1-3) = 3\,8 - 1(2) + 1(-2) = 24 - 2 - 2 = 20 \neq 0$ -> non autovalore

$Det(B) = 4(16-1) - 1(4-1) + 1(1-4) = 60 - 3 - 3 = 54$

$Det(3) = 1(1-1) - 1(1-1) + 1(1-1) = 0$ -> 3 è autovalore

Definizione: Sia X spazio metrico, un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice **APERTO**

$\Leftrightarrow \forall P_0 \in A \; \exists \delta > 0 \,/\, B_{P_0}(\delta) \subseteq A$

Proposizione: ogni palla aperta è aperta.

Dimostrazione: Sia $Q \in B_{P_0}(\delta) \Rightarrow$ se $Q = P_0$ la condizione è verificata, ma se $Q \neq P_0$,

il raggio della

$d(P_0, Q) = \overset{\delta_2}{e_2} > 0$, $0 < \overset{\delta_1}{e} \le \min(\overset{\delta_2}{e_2}, \underline{\delta - \overset{\delta_2}{e_2}})$.

distanza che manca per arrivare al bordo.

Affermo che $B_Q(\overset{\delta_1}{e}) \subset B_{P_0}(\delta)$

Scelgo $P \in B_Q(\overset{\delta_1}{e}) \Rightarrow P \in B_{P_0}(\delta)$

Se $P \in B_Q(\overset{\delta_1}{e}) \Rightarrow d(P,Q) < \overset{\delta_2}{e}$

disuguaglianza triangolare $\quad \delta_2 + \delta_1 < \delta - \cancel{\delta_2} + \cancel{\delta_2}$

$d(P, P_0) \le d(P,Q) + d(Q,P_0) < \cancel{e} + \delta - \cancel{e} < \delta$

Proposizione: ogni aperto è unione di palle aperte.

Dimostrazione: siccome A è aperto, $\forall P \in A \; \exists \delta_P > 0 \,/\, B_P(\delta_P) \subseteq A$.

$\bigcup_{P \in A} B_P(\delta_P) \subseteq A$. Inoltre se $P_0 \in A$ $\exists \delta_{P_0} \,/\, B_{P_0}(\delta) \subseteq A$ $P_0 \in B_{P_0}(\delta) \subseteq \bigcup_{P \in A} B_P(\delta_P)$,

Proprietà: Sia X uno spazio e sia $\tau_X \subseteq P(X)$ (la famiglia degli insiemi di aperti).

$\Rightarrow \tau_X$ è una **TOPOLOGIA**, cioè:
- (A1) ϕ e X sono aperti ($\phi, X \in \tau_X$),
- (A2) Se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ è una famiglia qualsiasi di aperti, $\bigcup A_\lambda$ è aperta,
- (A3) Se A_1, A_2 sono aperti $\Rightarrow A_1 \cap A_2$ è aperto ($\in \tau_X$)

Dimostrazione (A3): Sia $Q \in A_1 \cap A_2$. Siccome $Q \in A_1 \Rightarrow \exists \delta_1 \,/\, B_Q(\delta_1) \subseteq A_1$
$Q \in A_2 \Rightarrow \exists \delta_2 \,/\, B_Q(\delta_2) \subseteq A_2$

Allora, scelto $0 < \delta \le \min(\delta_1, \delta_2)$, $B_Q(\delta) \subseteq A_1 \cap A_2$.

Definizione: Sia $C \subseteq X$ un sottoinsieme, C si dice **CHIUSO** se il suo complementare

$\underbrace{X - C}_{\text{complementare}} = \{p \in X \,/\, p \notin C\}$ è aperto.

Proprietà (Assiomi dei chiusi):
1. ϕ e X sono chiusi,
2. Se $\{C_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di chiusi $\Rightarrow \bigcap C_i$ è chiusa,
3. C_1, C_2 sono chiusi $\Rightarrow C_1 \cup C_2$ è chiuso.

Dimostrazione ①: Siccome $X = X - \phi$ e X è aperto, ϕ è chiuso e siccome $\phi = X - X$,

X è chiuso.

Dimostrazione ②: $X - \bigcap_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} (X - C_i)$ è aperta $\rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i$ è chiuso

$C_1 \cup C_2$ è chiusa.

Dimostrazione ③:

$X - (C_1 \cup C_2) = \underbrace{(X - C_1) \cap (X - C_2)}_{\text{intersezione di aperti è aperta}} \rightarrow C_1 \cup C_2$ è chiuso

Sia $y = B_{(0,0)}(1) = \{(x,y) / x^2+y^2 < 1\}$ → è aperto perchè è una palla aperta

$Fr(y) = \{(x,y) / x^2+y^2 = 1\}$ → non è contenuta nell'insieme

Proposizione. $y \subseteq x$ ⓐ $Fr(y)$ è chiusa.
ⓑ $y \cup Fr(y)$ è chiuso
ⓒ y è chiuso $\Leftrightarrow Fr(y) \subseteq y$;

Dimostrazione ⓐ: $x = \underbrace{Int(y) \cup Ext(y)}_{\text{sono aperti: l'unione di aperti è aperta.}} \cup Fr(y)$ ↳ complementare → è chiusa

$Fr(y) = X - Int(y) - Ext(y) \Rightarrow Fr(y)$ è chiusa.

Dimostrazione ⓑ: $y = (y \cap Int(y)) \cup (y \cap Fr(y)) \cup (y \cap Ext(y))$
$Int(y) \cup Fr(y) = \emptyset$

$y \cup Fr(y) = Int(y) \cup (y \cap Fr(y)) \cup Fr(y) = Int(y) \cup Fr(y)$ → è complementare di $Ext(y)$

$\Rightarrow y \cup Fr(y)$ è chiuso.

Definizione: Sia $y \subseteq X$. La CHIUSURA di y, scritta $\bar{y}$ è il minimo chiuso che contiene y.

Proposizione: ⓐ La chiusura di y, $\bar{y}$ è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono y;

ⓑ y è chiuso $\Leftrightarrow y \overset{\text{contiene}}{\supseteq} \bar{y}$

ⓒ $\bar{y} = y \cup Fr(y)$

$\bar{y}$ per definizione è un chiuso / se $C \supseteq y$ è un chiuso $\Rightarrow C \supseteq \bar{y}$

$\mathcal{C}_y = \{C \text{ chiusi} / C \supset y\} \quad \bigcap_{C \in \mathcal{C}_y} C \in \underset{C}{\overset{=}{\mathcal{C}}}$

Se y è chiuso, y è contenuto in ogni C che contiene y. Allora $y \overset{y \text{ contiene chiuso}}{\in} \bar{y}$.

Viceversa $y \subseteq \bar{y} \Rightarrow y$ è chiuso.

Ricordo che se X è spazio metrico e $y \subseteq x$ si dice CHIUSURA, $\bar{y}$ è il minimo chiuso che contiene y. Ossia: $\bar{y}$ è un chiuso, $\bar{y} \supseteq y$ e se C è un chiuso tale che $C \supseteq y \Rightarrow C \supseteq \bar{y}$.

$\bar{y}$ è precisamente l'intersezione di tutti i chiusi che contengono y. Infatti tale intersezione contiene y ed è contenuta in qualsiasi chiuso contenente y

Proposizione: $\bar{y} = y \cup Fr(y)$.

Dimostrazione: Basta mostrare che $\bar{y} \cup Fr(y)$ è chiuso e che se $C \supseteq y$ è chiuso $\Rightarrow C \supseteq y \cup Fr(y)$.

Osserviamo che: $y \neq (y \cap Int(y)) \cup (y \cap Fr(y)) \cup (y \cap \underset{\emptyset}{\underset{\shortparallel}{Ext(y)}})$.

ⓑ $\bar{y} = y \cup y'$

Dimostrazione ⓐ: Sia y chiuso e sia P un punto di accumulazione. Se $P \notin y$ $\Rightarrow P \in X-y$ che è aperto $\Rightarrow \exists \delta > 0 / B_p(\delta) \subseteq X-y \Rightarrow B_p(\delta) \cap y = \emptyset \rightarrow$ assurdo perché p è per ipotesi di accumulazione.

Viceversa, se y contiene tutti i punti di accumulazione $\Rightarrow y$ è chiuso. Infatti, se $p \in \overset{\text{complementare}}{X-y} \Rightarrow$ P non è di accumulazione $\Rightarrow \exists \delta > 0 / B_p(\delta) \cap y = \emptyset \Rightarrow B_p(\delta) \subseteq X-y$ $\Rightarrow X-y$ è aperto e y è chiuso.

Dimostrazione ⓑ: Mostriamo che $\bar{y} = y \cup y'$. Sia C un chiuso / $C \overset{\text{contiene}}{\supseteq} y$ e sia $y \in y'$. Se $y \notin C \Rightarrow y \in X-C$ che è aperto $\Rightarrow \exists \delta > 0 / B_y(\delta) \subseteq X-C$. $B_y(\delta) \cap C = \emptyset \Rightarrow B_y(\delta) \cap y = \emptyset \rightarrow$ assurdo $\Rightarrow y \in C$, $C \supseteq y \cup y' \Rightarrow \bar{y} = y \cup y'$

(un insieme non è chiuso se gli mancano punti di frontiera e/o di accumulazione)

Ricordiamo (dall'analisi) che se: $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ in $f(x) = M(\cos x)$

$\lim_{x \to x_0} M(\cos x) = 1 \neq M(0)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Definizione: sia X = spazio metrico, $y \overset{\text{contenuto}}{\subseteq} X \Rightarrow \text{diam}(y) = \{(y_1, y_2) / y_1, y_2 \in y\}$ contiene tutte le possibile distanze tra coppie

Definizione: Sia $\emptyset \neq y \subseteq X$, y si dice **limitato** $\Leftrightarrow \text{diam}(y) < \infty$ (cioè è finito) $\Leftrightarrow \exists M > 0 / \forall y_1, y_2 \in y$, $d(y_1, y_2) < M$

Definizione: $\emptyset \neq y \subseteq X$ si dice **compatto** $\Leftrightarrow y$ è chiuso e y è limitato.

(*) **Definizione**: $\text{Int}(y)$, ossia l'**interno di y** o l'insieme dei punti interni $= \{y \in Y /$ $\exists$ A aperto che contiene y interamente contenuto in $Y\}$.

$y \in \text{Int}(y) \Leftrightarrow \exists$ aperto $A / y \in A \subseteq Y$.

Siccome gli aperti sono l'unione di palle aperte $\Rightarrow p \in \text{Int}(y) \Leftrightarrow \exists\, \delta > 0 / B_p(\delta) \subseteq y$

Premessa: Sia $\emptyset = y \subseteq X$ e X è spazio metrico, allora y è spazio metrico

Siano ora (X, d_X) e (Y, d_Y) 2 spazi metrici e sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione.

Allora f si dice **continua** se per ogni aperto A di Y, $f^{-1}(A)$ è un aperto di X.

$\overset{\text{controimmagine}}{f^{-1}(A)} = \{x \in X / f(x) \in A\}$

Teorema: la composizione di funzioni continue è continua. Ossia $\underset{d_X}{X} \xrightarrow{f} \underset{d_Y}{Y} \xrightarrow{g} \underset{d_Z}{Z}$

f e g sono continue $\Rightarrow g \circ f$ è continua.

Dimostrazione: Sia $A \subseteq Z$ aperto, $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$. Siccome g è

es: $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}(x^2+y^2+z) \\ \dfrac{x+\cos(y-e^x)+z^3}{x^2+y^2-z^2} \end{pmatrix}$$

es: sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Definizione: Sia $f: D \subseteq X \longrightarrow Y$ e sia $P_0 \in \overline{D}$, si dice che $\lim_{P \to P_0} f(P) = l \in Y \Leftrightarrow$
$\hookrightarrow P_0$ o sta in D o è un punto di accumulazione
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, 0 < d_X(P, P_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(P), l) < \varepsilon$

19/05/2016

25° Lezione: 90 min

ARGOMENTO: FUNZIONI CONTINUE

Ricordiamo che una funzione $f: X \to Y$ (X, Y spazi metrici) si dice continua in $x_0 \in X \Leftrightarrow \forall V_{f(x_0)} \Leftrightarrow f^{-1}(V_{f(x_0)})$ è un aperto che contiene x_0.

Siccome l'aperto di $f(x_0)$ è qualsiasi e ogni aperto è unione di palle aperte, ovviamente f è continua in $x_0 \Leftrightarrow \forall B_{f(x_0)}(\varepsilon)$, $\underbrace{f^{-1}(B_{f(x_0)}(\varepsilon))}_{\text{contemporaneamente}}$ è aperta (e contiene x_0)
$\exists B_{x_0}(\delta) \subseteq f^{-1}(B_{f(x_0)}(\varepsilon)) \overset{\text{equivale}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, f(B_{x_0}(\delta)) \underset{\text{è contenuta}}{\subseteq} B_{f(x_0)}(\varepsilon) \Leftrightarrow \forall x \in B_{x_0}(\delta)$
$\Rightarrow f(x) \in B_{f(x_0)}(\varepsilon)$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, d_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Se $X = \mathbb{R} = Y$ e $d_X(x_1, x_2) = d_Y(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| \to \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ricordiamo che $f: D \subseteq X \to Y$, $x_0 \in D'$ (punto di accumulazione), $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in Y$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, x \in B_{x_0}(\delta) / \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in B_{f(x_0)}(\varepsilon)$ (qualsiasi palla aperta contiene dei punti del dominio)
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, 0 < d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), l) < \varepsilon$.

Paragonando la definizione di limite e continuità si vede che f è continua
$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ricordiamo che grazie al teorema che ci dice che $C^0(X, \mathbb{R})$ ($f: X \to \mathbb{R}$ continua) sono una $\mathbb{R}$-algebra (cioè combinazioni lineari di funzioni continue è continua e $f \cdot g$ è continua se f, g sono continue) e al fatto che le funzioni coordinate
$x_i: \mathcal{E}^n \to \mathbb{R}$
$P \longmapsto x_i(P)$
sono continue $\Rightarrow$ tutte le funzioni polinomiali sono continue

es: $f(x,y,z) = e \cdot \cos(x^2+y^2+3xyz^3)+5$ è continua.

$\lim_{(x,y,z) \to (3,1,5)} f(x,y,z)$

es: $f: \mathcal{E}^2 = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$ Fuori dall'origine è continua perché prodotto e quoziente di funzioni continue.

$\operatorname{Dom}(f) = \mathcal{E}^2$.

23/05/2016 35° LEZIONE: 90 min

ARGOMENTO: LA DIFFERENZIABILITÀ E IL GRADIENTE.

Ricordiamo che $f: D \subseteq \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile in $P_0 \in \mathrm{Int}(D)$, $\exists\, d_{P_0}f \in (\mathbb{R}^n)^\vee \,/\, \lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{h}) - f(P_0)}{t} = d_{P_0}f \cdot \vec{h}$. In tal caso $d_{P_0}f = (d_{P_0}f\, \vec{e}_1, \dots, d_{P_0}f\, \vec{e}_n)$

dove $d_{P_0}f \cdot \vec{e}_1 = \lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{e}_1) - f(P_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0)$

La funzione $D \subseteq \mathbb{E}^n \to (\mathbb{R}^n)^\vee$, $df: P \to d_P f$ si dice campo di differenziale (brevemente differenziale).

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

es: $f(x,y,z) = 3x^2 - x^4 z + x^2yz^2 + 5$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (6x - 4x^3z + 2xyz^2, x^2z^2, -x^4 + 2x^2yz)$$

$$d_{(1,1,1)}f = (6-4+2, 1, -1+2) = (4,2,1)$$

dove $d_{(2,1,4)}f = \begin{pmatrix} x=2 \\ y=1 \\ z=4 \end{pmatrix}$

Chiaramente f differenziabile in $P_0 \Rightarrow$ esistenza $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)$

es: Si consideri la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{E}^2 = \mathbb{R}^2$

Vediamo che $\exists\, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, ma la funzione non è differenziabile in $(0,0)$ con $P_0 = (x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{e}_1) - f(P_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t, y) - f(x,y)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0$$

le derivate parziali nell'origine e sono entrambe nulle, ma la funzione qui non è differenziabile

Se $\exists\, d_{(0,0)}f = (0,0)$, $\lim_{t\to 0} \frac{f\left((0,0) + t\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right) - f(0,0)}{t} = d_{(0,0)}f \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\left(0 + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2}{t^2+t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{2t^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow f \text{ non è differenziabile}$$

TEOREMA: Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ esistono in un aperto contenente P_0 e sono continue in $P_0 \Rightarrow \exists\, d_{P_0}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)\right)$

ESERCIZIO

Provare che la funzione $f(x,y,z) = e^{x^2 + y\cos yz}$ è differenziabile ovunq

Proposizione: la derivata direzionale di $d_{P_0}f\cdot\vec{v}$ $(\vec{v}/|\vec{v}|=1)$ è massima o minima in $\vec{v}=\frac{\nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|}$ e $-\vec{v}=-\frac{\nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|}$.

Disuguaglianza di Schwarz.

Dimostrazione: $\vec{v}/|\vec{v}|=1$, $|d_{P_0}f\cdot\vec{v}|=|\langle\nabla f(P_0),\vec{v}\rangle|\leq|\nabla f(P_0)||\vec{v}|=|\nabla f(P_0)|$

se $\vec{v}=\frac{\nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|}$, $d_{P_0}f\cdot\frac{\nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|}=\frac{1}{|\nabla f(P_0)|}\cdot\langle\nabla f(P_0),\nabla f(P_0)\rangle=\frac{1}{\cancel{|\nabla f(P_0)|}}\cdot|\nabla f(P_0)|^{\cancel{2}}$

$=|\nabla f(P_0)|$

↳ massima se il modulo è positiva, viceversa se negativo.

29/05/2016 — 27° lezione: 3h

APPUNTO:

Ricordiamo che se f è differenziabile $D\subseteq E^n\to\mathbb{R}$ in $P_0\in D$ (D aperto)

se $\vec{v}/|\vec{v}|=1$, $d_{P_0}f\cdot\vec{v}$ è la derivata direzionale lungo $\vec{v}$. Il gradiente di f è per definizione $\langle\nabla f(P_0),\vec{v}\rangle=d_{P_0}f\cdot\vec{v}$.

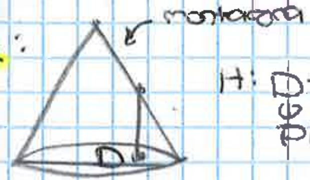
In particolare, in coordinate cartesiane si ha (n=3), $\nabla f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial f}{\partial z}$

$MAX=\{d_{P_0}f\cdot\vec{v}/|\vec{v}|=1\}=|\nabla f(P_0)|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}(P)\right)^2}$

Conseguenza di Schwarz.

Definizione: Sia $f:D\subseteq E^n\to\mathbb{R}$ e sia $c\in\mathbb{R}$. Considero il sottoinsieme di D $S_c=f^{-1}(c)=\{P\in D/f(P)=c\}$. S_c può essere $\emptyset$. Se è diverso da $\emptyset$ si dice IPERSUPERFICIE DI LIVELLO.

es:



$H:D\to\mathbb{R}$
$P\in D$
$P\mapsto H(P)$

altezza montagna è 2.000 m.

$H^{-1}(2.500m)=\{P/H(P)=2500m\}$

$H^{-1}(850m)=\{P/H(P)=850m\}$

Si chiamano CURVE DI LIVELLO perché $f:D\subseteq E^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\longmapsto f(x,y)$

↳ punti che sono alla stessa altezza della montagna.

$f(x,y)=c$ (metto un vincolo: la x posso sceglierla a caso la y no: 1 grado di libertà)

se $D\subseteq E^3$ $f(x,y,z)=c$ si dice SUPERFICIE DI LIVELLO: 2 gradi di libertà.

se $n>3$ $f:D\subseteq E^n\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(c)$ si dice IPERSUPERFICIE DI LIVELLO: n-1 gradi di libertà.

Osserviamo che ogni superficie di livello può scriversi nella forma $F(x,y,z)=0$.

es: $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ $S_{25}=\{(x,y,z)/f(x,y,z)=25\}\Rightarrow\underbrace{x^2+y^2+z^2=25}_{\text{sfera}}$

$F(x,y,z)=f(x,y,z)-25\Rightarrow F(x,y,z)=0$

Definizione: Data una funzione $f:D\subseteq E^n\to\mathbb{R}$, un punto $P_0\in D$ si dice REGOLARE se $d_{P_0}f\neq0\iff\exists\ 1\leq i\leq n/\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\neq0$

Definizione: Sia $f: D \subseteq \mathcal{E}^n \to \mathbb{R}^m$ e $P_0 \in D$; f è differenziabile in $P_0 \iff \exists$
$\underbrace{d_{P_0}f \in \mathbb{R}^{m\times n}}_{\text{matrice}}$ / $\lim_{t\to 0} \frac{f(P_0+t\vec{h})-f(P_0)}{t} = d_{P_0}f\cdot\vec{h}$ se $f: \underset{P}{D} \subseteq \mathcal{E}^n \to \mathbb{R}^m$, $P \longmapsto f(P) = \begin{pmatrix} f_2(P) \\ f_2(P) \\ \vdots \\ f_m(P) \end{pmatrix}$.

$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ xyz \end{pmatrix}$.

Se $f: D \subseteq \mathcal{E}^n \to \mathbb{R}^m$ è data da $f(P) = \begin{pmatrix} f_1(P) \\ \vdots \\ f_m(P) \end{pmatrix}$, $d_{P_0}f = \begin{pmatrix} d_{P_0}f_2 \\ d_{P_0}f_2 \\ \vdots \\ d_{P_0}f_m \end{pmatrix}$

$df = \begin{pmatrix} d(x^2+y^2) \\ d(xyz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$

- Ricordiamo che $f: \underset{P_0}{D} \subseteq \mathcal{E}^n \to \mathbb{R}$, $f(P) = \begin{pmatrix} f_1(P) \\ \vdots \\ f_m(P) \end{pmatrix}$

es: $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + e^{xyz} \\ 2xy + z^3 \\ \cos xy + z^2 \end{pmatrix} \to f(1,1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \cos 1 \end{pmatrix}$

f è differenziabile in $P_0 \iff$ ciascuna f_i è differenziabile in $P_0 \in D$ e in questo caso

$$d_{P_0}f = \begin{pmatrix} d_{P_0}f^1 \\ d_{P_0}f_2 \\ \vdots \\ d_{P_0}f_m \end{pmatrix} \longrightarrow d_{P_0}f = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0), & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(P_0), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(P_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(P_0), & \dots, & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(P_0) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(P_0), & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P_0) \end{pmatrix}}_{\text{MATRICE JACOBIANA}}$$

Nell'esempio dato:

$$df = \begin{pmatrix} \partial(x^2+e^{xyz}) \\ \partial(2xy+z^3) \\ \partial(\cos xy + z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + yz\cdot e^{xyz} & e^{xyz}\cdot xz & xye^{xyz} \\ 2y & 2x & 3z^2 \\ -y\,\text{sen}\,xy & -x\,\text{sen}\,xy & 2z \end{pmatrix}$$

$d(1,0,1) = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to$ matrice ridotta: $rk=3$. Poiché il $rk(d_{(1,0,1)}f) = 3$ cioè è massimo $\Rightarrow (1,0,1)$ è regolare.

P_0 non è regolare $\iff rk\, d_{P_0}f < 3$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\left((1,0,1) + t\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right) - f(1,0,2)}{t} = d_{(1,0,1)}f \cdot \begin{pmatrix} h_2 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h_1 + h_2 \\ 2h_2 + 3h_3 \\ 2h_3 \end{pmatrix}.$$

- Si abbia la seguente situazione: $\underset{P_0}{D} \subseteq \mathcal{E}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$

Per ipotesi, assumiamo che f sia differenziabile in P_0 e g sia differenziabile in $f(P_0)$. $\Rightarrow$ (Regola della catena): $(g \circ f)$ è differenziabile in P_0.

$d_{P_0}(g\circ f) = \overset{\mathbb{R}^{m\times p}}{d_{f(P_0)}g} \cdot \overset{\mathbb{R}^{p\times m}}{d_{P_0}f}$.

es: $n=1$: $\underset{x_0}{\mathbb{R}} \xrightarrow{f} \underset{f(x_0)}{\mathbb{R}} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$D(g\circ f)(x_0) = (Dg)(f(x_0)) \cdot Df(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

$d_{x_0}(g\circ f) = d_{f(x_0)}g \cdot d_{x_0}f$

$df = f'(x) = x$

f è differenziabile in $x_0 \iff \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = \underbrace{d_{x_0}f \cdot 1}_{f'(x_0)}$

Ricordiamo che se $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \longmapsto f(x,y)$

$F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$ in $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$!

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z-f(x_0,y_0))$$

$$-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0)(x_0,y_0) + (z-f(x_0,y_0)) = 0$$

$$z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)(x_0,y_0).$$

Se P_0 fosse STAZIONARIO per $f \Rightarrow d_{P_0}f = (0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right) \Rightarrow z - f(x_0,y_0) = 0$ il piano tangente al grafico è orizzontale.

Definizione: Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Diciamo che $P_0 \in D$ è punto di **minimo relativo o locale** $\Leftrightarrow \exists B_{P_0}(\delta) / \forall P \in B_{P_0}(\delta), f(P) \geq f(P_0)$

P_0 è punto di **massimo** se $\exists B_{P_0}(\delta) / P \in B_{P_0}(\delta) \Rightarrow f(P) \leq f(P_0)$

P_0 si dice **punto di sella** $\Leftrightarrow \forall B_{P_0}(\delta), \exists P / f(P) \geq f(P_0)$ ed $\exists P / f(P) \leq f(P_0)$.

es. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Teorema: Supponiamo che P_0 sia stazionario per f ($d_{P_0}f = 0$). Se la matrice Hessiana è definita positiva P_0 è un punto di minimo relativo; se $H_f(P_0)$ è definita negativa $\Rightarrow P_0$ è punto di massimo relativo, se $H_f(P_0)$ è non degenere e indefinita $\Rightarrow P_0$ è una sella.

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 6+6t \\ z = 8+12t \end{cases}$$

Definizione: $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{E}^3$ si dice regolare in $t = t_0$ $\iff d_{t_0}\gamma \neq 0 \iff \dot{\gamma}(t_0) \neq 0$.

Nell' esempio precedente $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, γ è regolare in tutti i punti, poiché $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ (1 resta sempre 1, non può mai essere 0)

- $\gamma(t) = (2t-1, t+1, 3t-2)$ è regolare in tutti i punti perché $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to$ sempre diversa da 0.

Però $\ddot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: quindi la retta è regolare ma non biregolare.

Una curva si dice BIREGOLARE in $t = t_0 \iff \dot{\gamma}(t_0)$ e $\ddot{\gamma}(t_0)$ sono linearmente indipendenti.

es: Si consideri l'elica di raggio 2 e passo 3,

$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3t)$ [parto da una circonferenza $r=2$ in $(0,0)$, e pian piano si crea un'elica]

$\dot{\gamma}(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 3) \to$ regolare

$\ddot{\gamma}(t) = (-2\cos t, -2\sin t, 0)$.

Sono linearmente indipendenti e la curva è biregolare.

Sia $P_0 = \gamma(t_0)$ e γ biregolare in t_0, allora

il piano affine passante per P_0

$\pi = \{ P \in \mathcal{E}^3 / \overrightarrow{P_0P} \in [\dot{\gamma}(t_0), \ddot{\gamma}(t_0)] \} \iff$

$\det(\overrightarrow{P_0P}, \dot{\gamma}(t_0), \ddot{\gamma}(t_0)) = 0 \iff \langle \overrightarrow{P_0P}, \dot{\gamma}(t_0) \times \ddot{\gamma}(t_0) \rangle = 0$.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \dot{x}(t_0) & \ddot{x}(t_0) \\ y - y_0 & \dot{y}(t_0) & \ddot{y}(t_0) \\ z - z_0 & \dot{z}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix} = 0 \to \text{equazione cartesiana PIANO OSCULATORE}$$

es: Calcolare osculatore all'elica data in $t = \frac{\pi}{2}$.

$\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 2, \frac{3}{2}\pi)$

$x(+6) + 2 - \frac{3}{2}\pi(a) = 0 \quad 6x + 6z - 6\pi = 0$

$$\begin{vmatrix} x & -2 & 0 \\ y-2 & 0 & -2 \\ z - \frac{3}{2}\pi & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2[3x + 2z - 3\pi] = 0 \to 3x + 2z - 3\pi = 0$$

Supponiamo $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{E}^3$ sia regolare in I. In particolare, $\exists t_0 \in I / d_{t_0}\gamma \neq 0$.

Sia $s : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto s(t)$ tale che $\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)| \neq 0$

$\Rightarrow s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\gamma}(u)| \, du$; $s(t)$ è invertibile, ossia per il teorema della funzione inversa $\exists t = t(s) / t(s(t)) = t$

e $s(t(s)) = s$ $\quad [\, I \xrightarrow{s} \mathcal{S} \longrightarrow I \,]$, $t \longrightarrow s(t)$, $s \longrightarrow t(s)$

$\left(y = \arcsin x ;\ x = \sin y \to dx = \cos y \, dy \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \right.$

$\left. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right)$

OSSERVAZIONE: Sia $\gamma = \gamma(s)$ una curva parametrizzata con la lunghezza d'arco. $|\gamma'(s)| = 1$.

$\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$

$|\gamma'(s)| = \left| \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \right| = \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|} = 1 \Rightarrow \gamma''(s) \perp \gamma'(s)$

$0 = \frac{d}{ds}(1) = \frac{d}{ds} \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = \langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle +$

$+ \langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 2 \langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle$.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ $\exists P / P^T A P$ sia diagonale: è simmetrica perché può essere diagonalizzata per mezzo di matrice ortogonale.

Si consideri la superficie in forma cartesiana
$F(x,y,z) = 4x^3 - 3x^2y + z^2 - 5zx + 7y^4 + \boxed{5x - y + 3z} = 0$
$P(0,0)$ fa parte dell'origine = piano tangente: $5x - y + 3z = 0$
è un punto regolare
Se invece $F(x,y,z) = x^4 - x^3y + 3x^2y^2 - z^4 + z^3 - y^3 + x^2 - y^2 = 0$:
non è regolare perché non ci sono termini di 1° grado.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \underbrace{-3x+3y-6z}_{} = 0 \\ x - y + 2z = 0 \quad \text{piano tangente?} \end{cases} \quad d(M,C) = R$$

↳ $d(\pi, C) = R$ perché entrambe le equazioni passano per l'origine

$C\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 3\right)$ $R = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+9} = \sqrt{\frac{27}{2}}$

ESERCIZIO 3

Sia $f(x,y) = 1 + e^{x+2y} - \operatorname{sen} x$. Trovare il polinomio di Taylor di II ordine nell'origine:

$$F(x,y) = f(0,0) + \partial_{0,0} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x\ y) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = 1 + 1 + x + 2y + \frac{(x+2y)^2}{2!} + x = 2 + 2x + 2y + \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 2y^2$$

ESERCIZIO 4

Sia data $f(x,y) = 6x^4 - 3x^2y + 5y^2 + 7xy - a^2 + 2x - 5y + 3$.

Polinomio di Taylor in $(2,1)$ → è già un polinomio dell'ordine 4

ESERCIZIO 5
non è detto che A o B siano nulle

$A, B: 2\times2\ (\in \mathbb{R}^{2\times2})$ e $A \cdot B = 0$

(a) $\det(AB) = 1$ → deve essere 0.
[✓ (b)] $\det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A$
(c) A e B sono invertibili
(d) B·A è invertibile.

ESERCIZIO 6

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(a) $\det A = 1$
(b) $rk(A) = 1$
(c) $\det(A) = 2$
[✓ (d)] $rk(A) = 2$

ESERCIZIO 7

Sia $A \in \mathbb{R}^{4\times3}$ $rk(A) = 3$ $Ax = \vec{b} \in \mathbb{R}^4$ $\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}_{4\times3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times1} = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}_{4\times1}$

Il sistema ha soluzione per ogni vettore di $\vec{b}$: FALSO, perché $rk(A)$ deve essere uguale a $rk(A|\vec{b})$: ora non è combinazione lineare degli altri nella colonna (può essere a)

b è unica sol.: n-incognite - $rk(A) = 3 - 3 = 0$ gradi di libertà.

$\ker A = \{0\}$: VERO → $A\vec{x} = \vec{0}$

$A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ è iniettiva: VERO

Non è suriettiva perché $\dim(\mathrm{Im}) = 3 = rk(A)$ e lo spazio di partenza è 4.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ è base dell'immagine
↳ qualsiasi elemento di $\mathbb{R}^2$ è una base dell'immagine.

ESAME LUGLIO 2.012

Quiz 1

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che: $f(\vec{e}_1) = \vec{0}$, $f(\vec{e}_2) = i$, $f(\vec{e}_3) = 3$ dove $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Quale è vera?

(a) $f(x,y,z) = (x,y)$
(b) $f(x,y,z) = (x,z)$ (Sostituisco a y=1: $f(0,1,0)$ = e vedo cosa viene).
[✓ (c)] $f(x,y,z) = (y,z)$
(d) $f(x,y,z) = (z,y)$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) = x\cancel{f(\vec{e}_1)} + yf(\vec{e}_2) + zf(\vec{e}_3) =$

$y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$

Quiz 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ Non posso fare A×B.

(a) $AB = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $AB = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ (c) $BA = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ [✓ (d)] $BA = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

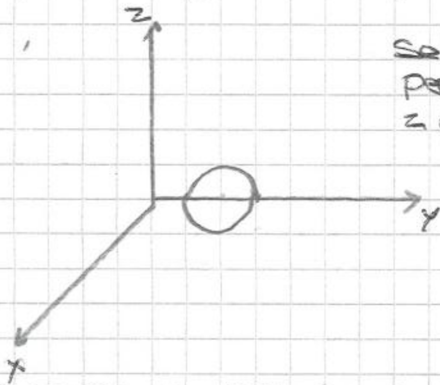
07/06/2016 35° Lezione: 3h

ESERCIZIO

Si consideri la curva $\begin{cases}(y-2)^2+z^2=1\\ x=0\end{cases}$

Questa è una curva piana: è una circonferenza di centro (0,2,0) e raggio 1 nel piano yz.

Se ho $x^2+y^2=1$ -> è un cilindro, perché x e y sono fissi, ma la z è libera di variare.



① Scrivere equazioni parametriche della curva:

$\gamma(\theta)=(0, 2+\cos\theta, \sin\theta)$

$y-2=\cos\theta \wedge z=\sin\theta \rightarrow \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$\gamma'(\theta)=(0, -\sin\theta, \cos\theta)$

$|\gamma'(\theta)|=1$ -> mai nullo -> la curva è regolare

$\gamma''(\theta)=(0, -\cos\theta, -\sin\theta)$

$\angle\, \gamma'(\theta), \gamma''(\theta) >= 0 \Rightarrow \gamma'(\theta)$ e $\gamma''(\theta)$ sono linearmente indipendenti.

② Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della superficie di rotazione ottenuta ruotando γ intorno all'asse z:

↳ le coordinate z restano le stesse

$\forall\, y, R_x(\varphi), R_y(\varphi), R_z(\varphi) \in SO(3)$

$$R_z(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad R_x(\varphi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$X(\theta,\varphi)=R_z(\varphi)\begin{pmatrix}0\\ 2+\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(\theta,\varphi)\\ y(\theta,\varphi)\\ z(\theta,\varphi)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x(\theta,\varphi)\\ y(\theta,\varphi)\\ z(\theta,\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 2+\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\varphi(2+\cos\theta)\\ \cos\varphi(2+\cos\theta)\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

$X(\theta,\varphi)=(-\sin\varphi(2+\cos\theta), \cos\varphi(2+\cos\theta), \sin\theta)$.

↳ equazioni parametriche

↳ devo eliminare φ e θ.

$$\begin{cases}x=-\sin\varphi(2+\cos\theta)\\ y=\cos\varphi(2+\cos\theta)\\ z=\sin\theta\end{cases}$$

-> faccio il quadrato e la somma: $x^2+y^2=(2+\cos\theta)^2$

$$\begin{cases}x^2+y^2=(2+\cos\theta)^2=4+4\cos\theta+\cos^2\theta\\ z^2=\sin^2\theta=1-\cos^2\theta\end{cases}$$

↳ $\cos^2\theta=1-z^2$

$$\begin{cases}x^2+y^2=4+4\cos\theta+1-z^2\\ \cos^2\theta=1-z^2\end{cases} \quad \begin{cases}x^2+y^2+z^2-5=4\cos\theta\\ \cos^2\theta=1-z^2\end{cases}$$

faccio il quadrato a dx e sx

$$\begin{cases}(x^2+y^2+z^2-5)^2=16\cos^2\theta\\ \cos^2\theta=1-z^2\end{cases}$$

$\Rightarrow (x^2+y^2+z^2-5)^2-16(1-z^2)=0$

③ Calcolare il piano tangente in (-3,0,0):

$(9+0-5)^2=16(1)$ -> 16=16 -> appartiene alla curva

$-3=-\sin\varphi(2+\cos\theta) \rightarrow \varphi=\frac{\pi}{2} \wedge \theta=0$

$0=\cos\varphi(2+\cos\theta)$

$0=\sin\theta \rightarrow \theta=0 \wedge \theta=\frac{3}{2}\pi$

↳ non va bene se sostituisco nella prima

In forma parametrica:

$$\begin{vmatrix}x+3 & & \\ y & \vec{X}_\theta(\frac{\pi}{2},0) & \vec{X}_\varphi(\frac{\pi}{2},0)\\ z & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+3 & \sin\varphi\sin\theta & -\cos\varphi(2+\cos\theta)\\ y & -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi(2+\cos\theta)\\ z & \cos\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x+3 & 0 & 0\\ y & 0 & -3\\ z & 1 & 0\end{vmatrix}=0 \rightarrow (x+3)=0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,2)(y-2) = 0$

$(4x - 7y + 4)_{(0,2)}x + (6y - 7x - 7)_{(0,2)}(y-2) = 0$

$-10x + 5(y-2) = 0 \Rightarrow 2x - y + 2 = 0$

Punti di intersezione: $(0,2) \wedge (0,\frac{1}{3})$ | $a=1 \to 2x \cdot x = 2x^2$
$b=3 \to -1 \cdot b = 3$
$ax+by+c$ $2c=2 \to c=1$

$(2x^2+3y^2-7xy+4x-7y+2) = (2x-y+2)(x-3y+1)$

ARGOMENTO: LE QUADRICHE (PARTE 1)

sia $B \in \mathbb{R}^{4\times4}$ $B^T = B$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{array}\right) \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

dimensione 10: $\frac{1}{2}4(5) = 10$

$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ Dicesi quadrica affine associata alla matrice B il luogo dei punti $P(x,y,z)$ /
$q_B(x,y,z) = \vec{x}^T B \vec{x} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = 0$

Definizione: la quadrica si dice a centro se $|A| \neq 0$.

$q_B(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$
+ tutto il resto.

Si dice invece **PARABOLOIDE** se $|A| = 0$.

La quadrica si dice degenere se $|B| = 0$:

- Se $rk(B) = 1$, la quadrica è un piano doppio → unione di 2 piani coincidenti
- se $rk(B) = 2$, la quadrica è riducibile ed è l'unione di 2 piani distinti;
- se $rk(B) = 3$, la quadrica $q_B(x,y,z) = \vec{x}^T B \vec{x} = 0$ è un cono con vertice $(x_0,y_0,z_0) / \partial_{(x_0,y_0,z_0)} q_B = 0$ → tutte e 3 le componenti di x, y e z hanno derivata uguale a 0.

es: $3x^2 - 2xy + xz - 3z^2 - 2yz = 0$

09/06/2016

31° LEZIONE: 2 ore

ARGOMENTO: LE QUADRICHE (PARTE 2)

Ricordiamo che:

se $B = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{matrix} \\ a_{14}\ a_{24}\ a_{34} & a_{44} \end{array}\right)$ con $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

in modo tale che: $q_B(x,y,z) = (x,y,z,1)B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34} + a_{44} = 0$ sia è equazione di una quadrica. essa si dice a centro se $|A| \neq 0$, paraboloide se $|A| = 0$; degenere se $|B| = 0$ e se $rk(B) = 1$, allora Q è un piano doppio; se $rk(B) = 2$ è l'unione di 2 piani e se il $rk(B) = 3$ si tratta di un cono con vertice $(x_0,y_0,z_0) = P_0 /$ $\partial_{P_0} q_B = 0$ $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\right)$.

Ricordiamo che gli assi di una quadrica a centro sono le rette affini passanti per il centro (P_0), generate dalle autodirezioni ortogonali di A.
Le coordinate del centro risolvono il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases}$$

I **VERTICI** della quadrica sono le intersezioni degli assi con la quadrica

Ponendo il vertice nell'origine e facendo coincidere assi della quadrica con gli assi cartesiani si ottengono le equazioni della quadrica in forma canonica: $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - \delta = 0$, $\alpha\beta\gamma \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta \end{pmatrix}$$

$\alpha x + 0 = 0 \to x = 0$
$\beta y = 0$
$\gamma z = 0$

$C(0,0,0)$