NUMERO: 2116A-

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Laface Gianluca

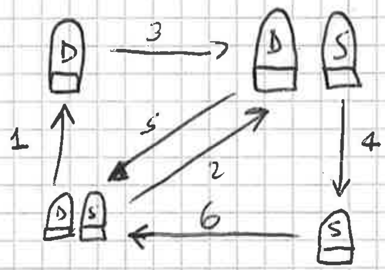
MATERIA: Geometria - Prof. Malaspina

Modalità d'esame:

- 10 QUIZ (2 punti ciascuno) NO PENALITÀ
- 2 ESERCIZI (6 punti ciascuno)

Soglia 5 QUIZ

PASSI DI RUMBA



VETTORI APPLICATI NEL PIANO (IN $\mathbb{R}^2$)

Fissiamo un punto $O \in \mathbb{R}^2$, un vettore applicato in questo punto O è un segmento orientato $\overrightarrow{OP}$ che va da O a P con $P \in \mathbb{R}^2 \neq O$.

$\overrightarrow{OP}$ è individuato da:
1) DIREZIONE (la retta per O e P)
2) VERSO (da O a P)
3) MODULO (lunghezza)

Esiste anche il vettore nullo, il quale ha modulo $= 0$.

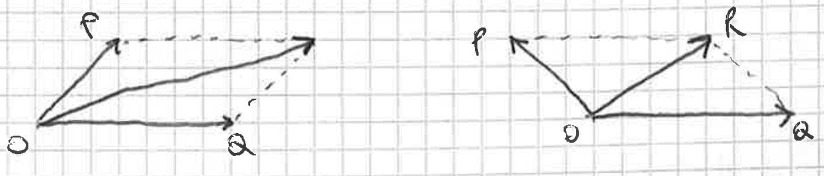
$V_2 = \{ OP \} \cup \{ \vec{0} \} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$ vi è una corrispondenza biunivoca.

SOMMA TRA VETTORI (OPERAZIONE INTERNA)

$+ : V_2 \times V_2 \longrightarrow V_2$

$(OP, OQ) \longrightarrow OP + OQ$

1° CASO: (Se OP e OQ hanno diverse direzioni)



PRODOTTO PER $a \in \mathbb{R}$

- $\mathbb{R} \times V_2 \longrightarrow V_2$

  $(a, v) \longmapsto a \cdot v$

OPERAZIONE ESTERNA: $a \cdot v$
- DIREZIONE DI v
- VERSO DI v SE $a > 0$, OPPOSTO A v SE $a < 0$
- $|a \cdot v| = |a| \cdot |v|$

OSSERVAZIONE: $0 \cdot v = \vec{0} \quad \forall v \in V_2$

$\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot \vec{0} = \vec{0}$ (zero)

PROPIETÁ DEL PRODOTTO

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall v \in V_2$

$(ab) v = a (b \cdot v)$

2) ESISTE UN ELEMENTO NEUTRO:

$1 \cdot v = v$

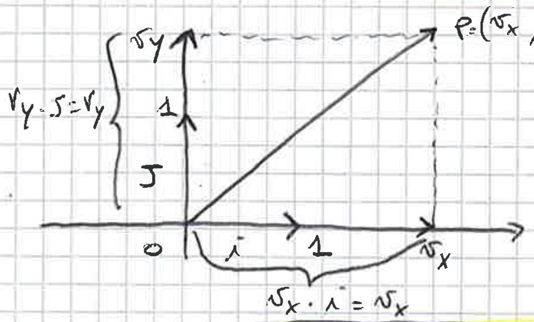
DISTRIBUTIVA:
1) $(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
2) $a(v_1 + v_2) = a v_1 + a v_2$

TEOREMA DI SCOMPOSIZIONE

Siano $OP = \hat{i}$, $OQ = \hat{J}$

$P = (1, 0)$, $Q = (0, 1)$ sono detti "versori fondamentali". Si chiama versore un vettore di modulo 1

$(v_x)^2 + (v_y)^2 = 1$



$OP = v_x \hat{i} + v_y \hat{J} \Rightarrow \boxed{v = v_x i + v_y J}$

CONTINUA →

VETTORI PARALLELI

$v, w \in V_2$ si dicono paralleli se hanno la stessa direzione

$v = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$ $\qquad w = w_x \hat{i} + w_y \hat{j}$

$\boxed{v \parallel w \iff \exists\, t \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ tale che } v = t\,w} \iff (v_x, v_y) = t(w_x, w_y)$

$\iff v_x w_y = v_y w_x$

es. 1 $\quad u = 2i - j \quad , \quad v = i + j$

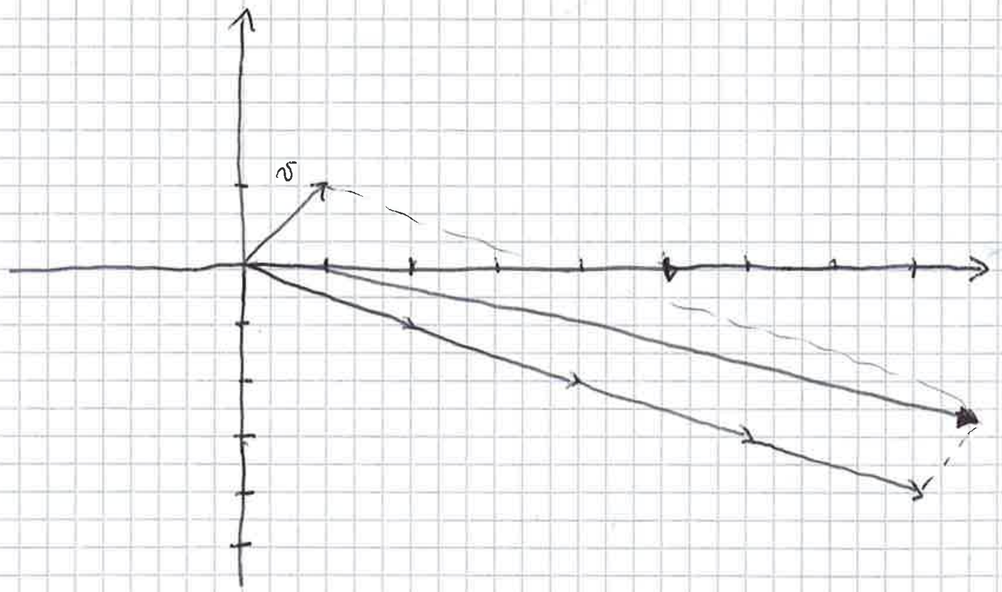
Si trovino $u - 2v$, $4u + v$

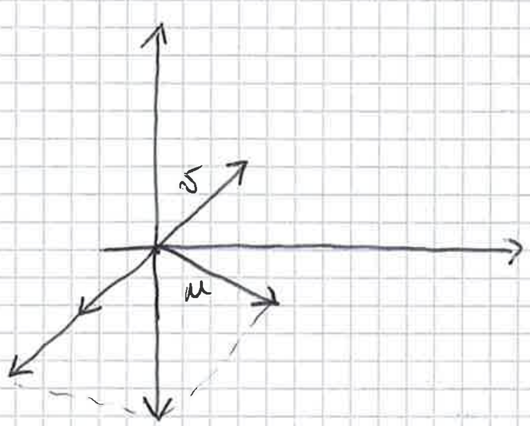
$-2v = -2(i + j) = -2i - 2j$

$u - 2v = (2i - j) + (-2i - 2j) = -3j$

$4u = 4(2i - j) = 8i - 4j$

$4u + v = (8i - 4j) + (i + j) = 9i - 3j$



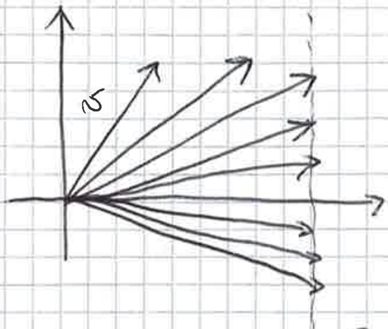


es. 3 Dati $v = 3i + 4j$ $\qquad w = 6i + hj$

Trovare, se esistono, i valori di h in $\mathbb{R}$ tale che $v \parallel w$

Si ha $v_x w_y - v_y w_y = 3h - 4\cdot 6 = 3h - 24 \Rightarrow 3h = 24$

$h = 8$



$v \parallel w \iff 3h = 4\cdot 6 \iff h = \frac{\cancel{24}^{8}}{\cancel{3}_{1}} = 8$ Con $h = 8$, risulta:

$w = 6i + 8j \Rightarrow w = 2v$

PRODOTTO SCALARE

$V_2 \times V_2 \longrightarrow \mathbb{R}$

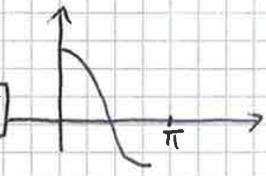
$(v, w) \longrightarrow \boxed{v\cdot w = |v|\cdot|w|\cos \widehat{vw}}$ → PRODOTTO SCALARE

$0 \le \widehat{vw} \le \pi$

OSSERVAZIONE: $v\cdot w < 0 \Rightarrow \widehat{vw}$ ottuso

$v\cdot w = 0 \Rightarrow \widehat{vw} = \frac{\pi}{2}$ $\boxed{v \perp w}$

$v\cdot w > 0 \Rightarrow \widehat{vw}$ acuto



PROPRIETÀ

- $v\cdot w = w\cdot v$ (COMMUTATIVA)
- $a(v\cdot w) = (a\cdot v)\cdot w = v(a\cdot w)$
- $v\cdot(w + z) = v\cdot w + v\cdot z$

OSSERVAZIONE: $i\cdot i = 1$, $j\cdot j = 1$, $i\cdot j = 0$

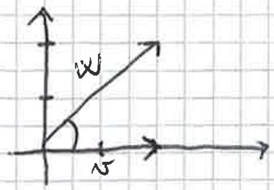
se $v = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$

$w = w_x \hat{i} + w_y \hat{j}$

$v\cdot w = (v_x i + v_y j)\cdot(w_x i + w_y j) = v_x i\cdot w_x i + \overset{0}{v_x i\, w_y j} + \overset{0}{v_y j\, w_x i} + v_y j\cdot w_y j =$

es. 6

Determinare l'angolo formato da $v = 2i$, $w = 2i + 2j$



$v \cdot w = 4 + 0 = 4$

$\cos \widehat{vw} = \dfrac{v \cdot w}{|v| \cdot |w|} =$ $\boxed{|w| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{4}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{vw} = \dfrac{\pi}{4}$

ESERCIZIO IMPORTANTE

Dati: $u = 2i + j$, $v = i + 3j$

Si trovi il vettore: $w = 3i - j$ a partire da u, v usando solo le somme e prodotto per un numero.

Sto cercando due numeri $a, b \in \mathbb{R}$ (anche nulli) tali che

$$\boxed{w = a u + b v}$$

$3i - j = a \cdot (2i + j) + b \cdot (i + 3j)$

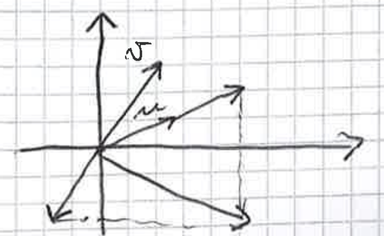
$3i - j = 2ai + aj + bi + 3bj \iff 3i - j = (2a + b)i + (a + 3b)j$

Devo risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ a + 3b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} b = 3 - 2a \\ a + 3(3 - 2a) = -1 \\ a + 9 - 6a = -1 \\ -5a = -10 \\ a = 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} 4 + b = 3 \Rightarrow b = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Dunque $w = 2u - v$



PROPIETÀ:

- ANTICOMMUTATIVA: $v \wedge w = - w \wedge v$
- ASSOCIATIVA NON VALE:

$$(i \wedge j) \wedge j = k \wedge j = -i$$

$$i \wedge \underbrace{(j \wedge j)}_{0} = 0 \quad \neq$$

- DISTRIBUTIVE:

$$a(v \wedge w) = av \wedge w = v \wedge aw$$

$$v \wedge (w+z) = v \wedge w + v \wedge z$$

$$(v+w) \wedge z = v \wedge z + w \wedge z$$

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall v, w, z \in V_3$

es: $v = (1, 2, -1)$ $w(1, 1, 1)$

$$v \wedge w = (i + 2j - k) \wedge (i + j + k) = i \wedge j + i \wedge k + 2 j \wedge i +$$
$$+ 2 j \wedge k - k \wedge i - k \wedge j = k - j - 2k + 2i - j + i =$$
$$= 3i - 2j - k$$

REGOLA DI CALCOLO

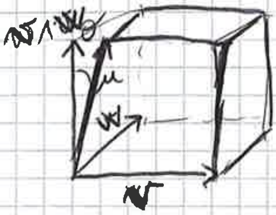
$$v \wedge w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= i\,(2 \cdot 1 - 1(-1)) - j\,(1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) + k\,(1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = 3i - 2j - k$$

es. Sia $u=(1,1,1)$, $v=(0,1,2)$, $w=(1,1,0)$

$$u\cdot(v\wedge w) = \begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&1&0\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} =$$

$$= 1(-2) - 1(-2) + 1(-1) = -\cancel{2}+\cancel{2}-1 = -1$$



$$\underbrace{|u\cdot v\wedge w|}_{\text{valore assoluto} \to \text{VOLUME}} = \underbrace{|v\wedge w|}_{\text{AREA DI BASE}}\underbrace{|u|\cos\theta}_{\text{ALTEZZA}}$$

SPAZI VETTORIALI

Campo (o corpo commutativo) è una struttura algebrica $(K,+,\cdot)$ dove K è un insieme di numeri, $+$, $\cdot$ sono operazioni binarie interne

$+ \; K\times K \longrightarrow K$ $\qquad \cdot \; K\times K \longrightarrow K$

tali che $\forall a,b,c \in K$, valgono le seguenti proprietà:

S1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ ASSOCIATIVA

S2) $a+b = b+a$ COMMUTATIVA

S3) $\exists\, u \in K$ tale che $\forall a \in K$ $\quad u+a = a$ ELEM. NEUTRO

S4) $\forall a \in K-\{u\}$ $\exists\, a' \in K$ tale che $a+a' = 0_a$ OPPOSTO

P1) $(ab)c = a(bc)$

P2) $ab = ba$

P3) $\exists\, 1 \in K$ tale che $\forall a \in K$ $\quad a1 = a$

P4) $\forall a \in K-\{u\}$ $\exists\, a^{-1} \in K$ tale che $a\cdot a^{-1} = 1$

D1) $a(b+c) = ab + ac$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 118

Es. ① V_3 I vettori di $\mathbb{R}^3$ formano uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, con le operazioni di somma e prodotto per $a \in \mathbb{R}$

$(V_3, \mathbb{R}, +, \cdot)$

② $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n)$ tali che $a_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1 \dots n\}$ n-uple

è un spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto a $+ \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots b_n) \longmapsto (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$

L'elemento neutro della somma: $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots 0)$

- $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \lambda, (a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$

- Attenzione: $\oplus \ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(a, b), (c, d) \longmapsto (a + c, b - d)$

non soddisfa S_2.

$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \oplus, \cdot)$ non è spazio vettoriale

③ Sia K campo, K^n è spazio vettoriale su K con

$+ \ K^n \times K^n \longrightarrow K^n$

$(a_i), (b_i) \longrightarrow (a_i + b_i) \qquad i = 1, \dots, n$

$\cdot \ K \times K^n \longrightarrow K^n$

$\lambda, (a_i) \longrightarrow (\lambda a_i)$

OSSERVAZIONE: se $n = 1$ $\mathbb{R}$ è spazio vettoriale su se stesso

L'operazione $\cdot \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lambda, a \to \lambda a$ è sia interna sia esterna

④ $\mathbb{C}$ è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$a + ib, c + id \longrightarrow (a + c) + i(b + d)$ tutte le proprietà sono soddisfatte.

$\bullet\ \mathbb{R} \times f(I) \longrightarrow f(I)$

$\lambda, f \longrightarrow \lambda f \quad$ dove $\lambda f : I \to \mathbb{R}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad x \longrightarrow \lambda f(x)$

7) Una matrice $m \times n$ con m righe e n colonne a coefficienti reali è una tabella

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \quad \text{con } a_{11} \dots a_{mn} \in \mathbb{R}$$

Si può scrivere così:

$$A = (a_{ij}) \quad i = 1 \dots m \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}$$
$$j = 1 \dots n$$

Se $m = n$ la matrice si dice quadrata e gli elementi a_{ii} formano la diagonale principale. Indichiamo con $\mathbb{R}^{m,n}$ l'insieme delle matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^{m,n}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con:

$$+ : \mathbb{R}^{m,n} \times \mathbb{R}^{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m,n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$0_{\mathbb{R}^{m,n}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad A = (a_{ij})$$
$$-A = (-a_{ij})$$

$\bullet\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m,n}$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$C^1(\mathbb{R}) \subseteq f(\mathbb{R})$ è s.s.v.

$D(f+g) = D(f) + D(g)$

$D(\lambda f) = \lambda D(f)$

es. $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x],$ grado $p(x) = 2 \} =$

di grado

$= \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

1) $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \qquad p(x) + q(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \; p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \qquad \lambda p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$0_{\mathbb{R}[x]} \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \Rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ è s.s.v. di $\mathbb{R}[x]$

$\mathbb{R}[x]_{=2} \cup \{0_{\mathbb{R}[x]}\}$ non è s.s.v.

es. $(x^2+x) + (-x^2) = x \notin \mathbb{R}[x]_{=2} \cup \{0_{\mathbb{R}[x]}\}$

Un'altra classe interessante di spazi vettoriali è costituita dagli spazi vettoriali di matrici, che possono considerarsi come naturale generalizzazione dei precedenti. Cominciamo col dare la definizione di matrice, ricordando che si tratta di uno dei concetti più utili in tutta la matematica.

CONTINUA

Una matrice a coefficienti in K è una tabella rettangolare del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ dove $a_{11}, a_{12}, \dots a_{mn} \in K$

Ogni lettera che compare in A ha due indici: a_{ij} appartiene alla riga i-esima e alla colonna j-esima. Una matrice con m righe ed n colonne (come A qui sopra) si chiama matrice $m \times n$ a coefficienti in K.

- LO SPAZIO VETTORIALE $K^{m,n}$ DELLE MATRICI $m \times n$

Fissiamo un campo K e denotiamo con $K^{m,n}$ l'insieme delle matrici $m \times n$ a coefficienti in K. Vogliamo far vedere che $K^{m,n}$ è uno spazio vettoriale a due operazioni molto naturali

SOMMA DI DUE MATRICI

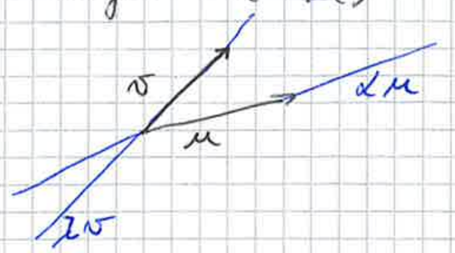
$$+ \; \mathbb{R}^{m,n} \times \mathbb{R}^{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m,n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

es.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

in questo modo valgono (2), (3)



Perché valga (1) devo aggiungere anche le somme tra vettori λv e αu.

$T = \{ \lambda v + \alpha u \in V_3 \ / \ \alpha, \lambda \in \mathbb{R} \}$ è SSV e geometricamente si tratta del piano per O individuato da u, v.

OSSERVAZIONE: Il più piccolo SSV contenente tre vettori non complanari è lo stesso V_3, e sono:
- $\{ O_{V_3} \}$, V_3 BANALI
- RETTE PER O
- PIANI PER O

LEMMA:

Sia $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ SV, $W, Z \subseteq V$ SSV di V. Allora:

$W \cap Z$ È SSV DI V

DIM: usiamo le "regole del gioco"

1) $\forall x, y \in W \cap Z \Rightarrow \underset{W}{x} + \underset{W}{y} \in W$ poiché W SSV
$\underset{Z}{x} + \underset{Z}{y} \in Z$ poiché Z SSV
$\Rightarrow x+y \in W \cap Z$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in W \cap Z \Rightarrow \lambda \underset{W}{x} \in W$ poiché W SSV
$\lambda \underset{Z}{x} \in Z$ poiché Z SSV
$\Rightarrow \lambda x \in W \cap Z$

3) $0_V \in W$, $0_V \in Z \Rightarrow 0_V \in W \cap Z$

L'intersezione di due sottospazi è sempre un sottospazio.

Def. La somma $W+Z$ si dice diretta (useremo la notazione $W \oplus Z$) se ogni $v \in W+Z$ si può scrivere in modo unico nella forma $v = x+y$ con $x \in W$, $y \in Z$

ovvero $\boxed{\forall v \in W \oplus Z \ \exists! \, x \in W \ \exists! \, y \in Z \ / \ x+y = v}$

es. $\{0\} \neq Z \subseteq W \subseteq V$, la somma $W+Z$ non è diretta

$$\underset{\neq 0}{z} \in Z \Rightarrow z = \underset{W}{z} + \underset{Z}{0_V} = \underset{W}{0_V} + \underset{Z}{z}$$

Proposizione:

Sia $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ S.V., $W, Z \subseteq V$ SSV, allora:

$W+Z$ è diretta $\Leftrightarrow W \cap Z = \{0_V\}$

DIM: $\Rightarrow$ Sia $v \in W \cap Z$

$$v = \underset{W}{0_V} + \underset{Z}{v} = \underset{W}{v} + \underset{Z}{0_V}$$ ma per Hp. $v = 0_V \Rightarrow W \cap Z = \{0_V\}$

Altra Hp. $W \cap Z = \{0_V\}$. Supponiamo $v \in W+Z$ e per assurdo:

$v = \boxed{x_1 + y_1 = x_2 + y_2}$ con $x_1, x_2 \in W$ e $y_1, y_2 \in Z$

La riscrivo in un'altra forma $\underbrace{x_1 - x_2}_{W} = \underbrace{y_2 - y_1}_{Z} \Rightarrow x_1 - x_2 \in W \cap Z$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 \in W \cap Z = \{0_V\} \Rightarrow x_1 = x_2$$
$$y_1 - y_2 \in W \cap Z = \{0_V\} \Rightarrow y_1 = y_2$$

Consideriamo l'insieme di tutte le matrici simmetriche:

$$S = \{ A \in \mathbb{R}^{n,n} \ / \ A = {}^tA \}$$

$$W = \{ A \in \mathbb{R}^{n,n} \ / \ A = -{}^tA \}$$ l'insieme delle antisimmetriche

es. $n = 2$ $\quad S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \ / \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \ / \ d \in \mathbb{R} \right\}$$

TEOREMA

Nello SV. $(\mathbb{R}^{n,n}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ $S, W \subseteq \mathbb{R}^{n,n}$ sono SSV e inoltre $S \oplus W = \mathbb{R}^{n,n}$

DIM: Usiamo il criterio de SSV su S

1) $\boxed{A, B \in S} \Rightarrow A + B \in S$?

$${}^t(A+B) \overset{(b)}{=} \underset{\substack{\| \\ A}}{{}^tA} + \underset{\substack{\| \\ B}}{{}^tB} = \boxed{A + B \in S}$$ (per Hp)

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ A \in S \Rightarrow \boxed{\lambda A \in S}$?

$${}^t(\lambda A) \overset{(c)}{=} \lambda \, {}^t(A) = \lambda A = \boxed{\lambda A \in S}$$

3) $0_{\mathbb{R}^{n,n}} \in S$

Usiamo il criterio per W:

1) $A, B \in W \Rightarrow (A + B) \in W$

$${}^t(A+B) \overset{(a)}{=} \underset{\substack{\| \\ -A}}{{}^tA} + \underset{\substack{\| \\ -B}}{{}^tB} = -(A+B)$$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall A \in W \Rightarrow \lambda A \in W$

$${}^t(\lambda A) = \lambda \, {}^tA = -\lambda A \Rightarrow \lambda A \in W$$

3) $0_{\mathbb{R}^{n,n}} \in W$

CONTINUA

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

Data $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B = \mathbb{R}^{n,p}$ si può definire il prodotto in questo modo:

$$A \cdot B = (c_{ik})_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,p}} \in \mathbb{R}^{m,p}$$

$$\bullet \quad \mathbb{R}^{m,n} \times \mathbb{R}^{n,p} \longrightarrow \mathbb{R}^{m,p}$$
$$(a_{ij}) \quad (b_{jk}) \longmapsto (c_{ik})$$

ogni c_{ik} è il prodotto scalare tra la i-esima riga di a $(a_{i1},\dots,a_{in})$ e la k-esima colonna di b $(b_{1k},\dots,b_{nk})$

$$c_{ik} = a_{ij} \cdot b_{jk} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$AB \in \mathbb{R}^{3,2}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 0 & 3\cdot 2 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE: BA NON ESISTE

PROPIETA'

$\forall A, B, C$ matrici $\forall a \in \mathbb{R}$

1) $(AB)C = A(BC)$
2) $A(B+C) = AB + AC$
3) $a(AB) = (aA) = A(aB)$
4) ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$

DIPENDENZA LINEARE

Def. Sia $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ S.V.

Siano $v_1, \dots, v_n \in V$, un elemento $v \in V$ si dice combinazione lineare (CL) di $v_1, \dots, v_n$ se:

$$\boxed{\exists\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \;/\; v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n}$$

es. Se $V = V_2$ ogni $v \in V_2$ è C.L. di $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$

ogni v è C.L. di $i+j,\ i-j$

Se $V = V_3$, $\hat{k}$ non è C.L. di $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$

→ $v = (1,2,3)$ è C.L. di $u_1\,(1,0,1)$, $u_2 = (2,1,0)$?

Ovvero $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $v = a u_1 + b u_2$?

$$(1,2,3) = (a,0,a) + (2b,b,0) \iff$$

$$(1,2,3) = (a+2b, b, a) \iff$$

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \Rightarrow 3+4 = 1 \quad \# \\ b = 2 \\ a = 3 \end{cases}$$

Sistema non risolvibile

Perciò $v \notin$ al piano individuato da u_1 e u_2. Quindi v non è C.L. di u_1 e u_2

NOTAZIONE:

Dati $v_1, \dots, v_n \in V$

$$\boxed{\mathcal{L}}(v_1, \dots, v_n) = \{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in V \,/\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

↓ simbolo della combinazione lineare

È il più piccolo S.S.V. di V contenente $v_1, \dots, v_n$

OSSERVAZIONE: $v_1, \dots, v_m \in V$ sono L.D. se $\exists\, v_i$ che C.L. degli altri.

OSSERVAZIONE: $v_1, \dots, v_m \in V$ sono L.D. se nessun v_i si può scrivere come C.L. degli altri.

es. in V_2 $\quad i, j$ sono L.I.

$i, j, i+j$ sono L.D.

OSSERVAZIONE: $0_V, v_1, v_2 \quad \forall\, v_1, v_2 \in V \quad 0_V$ è C.L. di v_1, v_2

$$0_V = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{0}}\, v_1 + \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{0}}\, v_2$$

Per convenzione $\{0_V\}$ è generato da $\emptyset$ (insieme vuoto)

- PROPOSIZIONE:

$v_1, \dots, v_m \in V$ sono L.I. $\iff$ ogni C.L. di $v_1, \dots, v_m$ si scrive in modo unico (a meno dell'ordine degli addendi)

$\forall\, v \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)\ \exists!\ a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ tali che

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

DIM: Siano $v_1, \dots, v_m$ L.I.

Sia $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = b_1 v_1 + \dots + b_m v_m \iff$

$$a_1 v_1 - b_1 v_1 + \dots + a_m v_m - b_m v_m = 0_V$$

$$(a_1 - b_1) v_1 + \dots (a_m - b_m) v_m = 0_V \quad \underset{Hp}{\iff}$$

$$(a_1 - b_1) = 0, \dots, (a_m - b_m) = 0 \iff$$

$$\boxed{a_1 = b_1, \dots, a_m = b_m} \qquad \square$$

$\Leftarrow \quad 0_V = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$

inoltre $\quad 0_V = 0 v_1 + \dots + 0 v_m$

per Hp $\quad a_1 = 0, \dots, a_m = 0 \qquad \square$

METODO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI

Siano $w_1, \dots, w_s$ generatori di V. Vediamo come trovare una base di V scartando alcuni w_i

- Scartiamo i w_i nulli $\rightarrow$ $\boxed{w_i = 0_V}$
- Si scarta il primo w_i che è C.L. dei precedenti
- Procedo fino a esaurire i w_i

es. Cerchiamo una base di $W = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_6) \subseteq \mathbb{R}^3$ dove
$w_1 = (0,0,0)$, $w_2 = (1,0,1)$, $w_3 = (2,0,2)$, $w_4 = (1,1,1)$,
$w_5 = (0,1,0)$, $w_6 = (0,2,1)$.

1° PASSO: elimino $w_1 = 0$, w_2 è ok
2° PASSO: scarto w_3 poiché $w_3 = 2w_2$
3° PASSO: w_4 è ok
4° PASSO: scarto w_5 poiché $w_5 = w_4 - w_2$
5° PASSO: mi chiedo se w_6 è C.L. di w_2, w_4.
w_2, w_4, w_6 sono L.I.?

$$a w_2 + b w_4 + c w_6 = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} a = b = c = 0$$

$$(a,0,a) + (b,b,b) + (0,2c,c) = (0,0,0)$$

$$(a+b, b+2c, a+b+c) = (0,0,0) \iff$$

$$\begin{cases} a+b=0 \Rightarrow b=-a \Rightarrow \boxed{a=0} \\ b+2c=0 \Rightarrow b+0=0 \Rightarrow \boxed{b=0} \\ a+b+c=0 \Rightarrow a-a+c=0 \Rightarrow \boxed{c=0} \end{cases}$$

Posso prendere come base $B = \{w_2, w_4, w_6\}$

OSSERVAZIONE: • Ogni S.V. ammette una base

• $v_1, \dots, v_m$ L.I. $\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_m$ sono contenuti in una base di V. Ovvero posso completare l'insieme $\{v_1, \dots, v_m\}$ ad una base di V

$\Rightarrow B = \{(1,0,1),(0,2,1),(0,1,0)\}$

LEMMA DI STEINITZ

Sia $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ S.V., siano $x_1, \dots, x_n \in V$ un insieme di generatori e $y_1, \dots, y_m \in V$ siano L.I.. Allora $\boxed{n \geq m}$

TEOREMA:

Sia $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ S.V. $E = (e_1, \dots, e_n)$ un base

Allora ogni altra base è formata sempre da n elementi

DIM: Sia $F = (f_1, \dots, f_m)$ un'altra base, perciò si ha

$\left.\begin{array}{l} e_1, \dots, e_n \text{ sono generatori} \\ f_1, \dots, f_m \text{ sono L.I.} \end{array}\right\} \Rightarrow$ attraverso il lemma preced. $\boxed{n \geq m}$

d'altro canto, se:

$\left.\begin{array}{l} f_1, \dots, f_m \text{ sono generatori} \\ e_1, \dots, e_n \text{ sono L.I.} \end{array}\right\} \Rightarrow$ attraverso il lemma preced. $m \geq n \Rightarrow \boxed{m = n}$ $\square$

DIMENSIONE

Def. Si dice che uno S.V. $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ ha dimensione n se ogni sua base è formata da n elementi.

es. $\dim V_2 = 2$ $\qquad B = \{i, j\}$

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$ $\qquad B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$\dim \mathbb{R}^n = n$

$\mathbb{R}^{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} / a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

$\dim \mathbb{R}^{2,2} = 4$ $\qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Quindi $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base canonica

$f_1, \dots, f_n$ L.I in $V \iff$ sono contenuti in una base di V e quindi B è anche base di V poiché $\dim V = \dim W$

$\underline{W} = \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n) = \underline{V}$ $\square$

PROPOSIZIONE SULLA DIMENSIONE DI SOMME DI SSV

Sia $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ S.V.

$V_1, \dots, V_n$ S.S.V di V, allora:

$$\boxed{\dim V_1 + \dots + V_s \leq \dim V_1 + \dots + \dim V_s}$$

<u>DIM</u>:

Sia $(x_1^1, \dots, x_1^{n_1})$ base di V_1, $\dim V_1 = n_1$

$(x_s^1, \dots, x_s^{n_s})$ base di V_s, $\dim V_s = n_s$

$v \in V_1 + \dots + V_s$ si ha $v = v_1 + \dots + v_s$ con $v_1 \in V_1$
con $v_s \in V_s$

$v = v_1 + \dots + v_s = (a_1^1 x_1^1 + \dots + a_1^{n_1} x_1^{n}) + \dots + (a_s^1 x_s^1 + \dots + a_s^{n_s} x_s^{n_s})$

con $a_i^j \in \mathbb{R}$, quindi v è C.L. di $x_1^1, \dots, x_1^{n_1} \dots x_s^1 \dots x_s^{n_s}$

L'insieme $\{x_1^1 \dots x_1^{n_1} \dots x_s^1 \dots x_s^{n_s}\} = B_{V_1} \cup \dots B_{V_s}$ è un insieme di generatori di $V_1 + \dots + V_s$

Posso quindi estrarre una base da $B_{V_1} \cup \dots B_{V_s} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(V_1 + \dots + V_s) \leq n_1 + \dots + n_s$

$\square$

FORMULA DI GRASSMANN

Siano $W, Z \subseteq V$ S.S.V.

$$\boxed{\dim(W + Z) = \dim W + \dim Z - \dim(W \cap Z)}$$

Inoltre si ha la matrice completa:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{m,n+1}$$

*) è equivalente a $AX = B$, con $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $X \in \mathbb{R}^{n,1}$, $B \in \mathbb{R}^{m,1}$

es.

$$\textcircled{*}\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

Quindi (*) equivale a $AX = B$

Def. Due sistemi $AX = B$, $A'X = B'$ con $A, A' \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dicono equivalenti se hanno le stesse identiche soluzioni

MATRICE FORTEMENTE RIDOTTA

Def. Una matrice si dice fortemente ridotta (o echelon) se gli elementi speciali sono a scala tutti uguali a 1 con zeri sia sotto che sopra.

es.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{PRECEDENTI}]{\text{PASSAGGI}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3]{R_2 \to -1R_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ ECHELON

$$\begin{cases} x - z = 2 \Rightarrow x = 2 + z \\ y + 2z = 1 \Rightarrow y = 1 - 2z \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

RANGO DI UNA MATRICE

Sia
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \in R_1 \\ \in \mathbb{R}^{m,n} \\ \to \in R_m \in \mathbb{R}^{m,n} \end{array}$$

$\downarrow$ $\exists C_1$ (colonna 1), C_2, C_n

Def. Si definisce

$R_A = \mathcal{L}(R_1, \dots, R_m) \subseteq \mathbb{R}^n$ lo spazio generato dalle righe di A

$C_A = \mathcal{L}(C_1, \dots, C_n) \in \mathbb{R}^m$ lo spazio generato dalle colonne di A

Def: Data una matrice, il suo rango è per definizione il numero:

$$\rho(A) = \dim R_A = \dim C_A$$

OSS. Per trovare $\rho(A)$ riduco A (per righe) e conto le righe non nulle.

OSS. Se $W_1, \dots, W_s \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim \mathcal{L}(W_1, \dots, W_s) = \rho\begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_s \end{pmatrix}$

TEOREMA DI ROUCHE - CAPELLI

Sia $AX = B$ un sistema lineare con $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, allora

a) È risolubile $\Leftrightarrow \rho(A) = \rho(A|B)$

b) Se $p = \rho(A) = \rho(A|B)$ il sistema ha ∞^{n-p} soluzioni (ovvero si hanno $n-p$ incognite libere)

DIM: a) il sistema si può scrivere così

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = B$$

Il sistema è risolubile $\Leftrightarrow \exists (l_1 \dots l_n) \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{= C_1} l_1 + \dots + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{= C_n} l_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = B$$

B è C.L. delle colonne di $A \Leftrightarrow \rho(A|B) = \rho(A)$

$\square$

Oppure vediamo la forma echelon di $(A|B)$

Se $p = \rho(A) \neq \rho(A|B)$

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1\,p+1} & \dots & a'_{1n} & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 1 & a'_{p\,p+1} & \dots & a'_{pn} & \vdots \\ \vdots & & & & & & & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

es.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases} \qquad (A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \rho(A) = 1 \neq 2 = \rho(B)$$

$\overset{R.C.}{\Longrightarrow} \nexists$ soluzioni.

es.

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases} \qquad (A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rho(A) = \rho(A|B) = 1$$

siccome $n=2$ ho $n-\rho(A) = 1$ incognite libere (∞^1 soluzioni)

$$\boxed{x = 2-y}$$

es.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-z=2 \\ 2x-2z=2 \end{cases} \qquad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 = R_3 - 2R_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \rho(A) = 2 \neq 3 \ \rho(A|B)$$

R.C. $\nexists$ soluzioni

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

Un sistema lineare $AX = B$ si dice omogeneo se $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

OSSERVAZIONE: $AX = 0$ ammette sempre soluzioni. Infatti

$x_1, \dots, x_n = 0$ è soluzione

es.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \rho(A) = \rho\left(A \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

Questa è un'intersezione di iperpiani passanti per l'origine.

$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = z, \ y = -2z - t\}$ ma potrei anche dire

$S = \{(z, -2z - t, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ z, t \in \mathbb{R}\} = \{z(1, -2, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4 \ / \ z, t \in \mathbb{R}\}$ Quindi

$\{(1, -2, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$ è una base di S

OSSERVAZIONE Sia $AX = B$ un sistema lineare e $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ una sua soluzione, allora ogni altra soluzione è della forma $Y + Y_0$ dove $Y \in \mathbb{R}^n$ è soluzione del sistema omogeneo associato. $AX = 0$. Infatti siano Y_1, Y_2 soluzioni di $AX = B$, allora $Y_1 - Y_2$ è soluzione di $AX = 0$

$$A(Y_1 - Y_2) = \underset{\underset{B}{\parallel}}{AY_1} - \underset{\underset{B}{\parallel}}{AY_2} = B - B = 0$$

es.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$$ ha soluzione $Y_0 = (1, 0, 1, 0)$

risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ x = z \end{cases} \Rightarrow z + y + z + t = 2 \Rightarrow y = 2 - t - 2z$$

$S = \{(z, 2 - t - 2z, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ z, t \in \mathbb{R}\} =$

SOL. PARTICOLARE

$= \{(0, 2, 0, 0) + (z, -t - 2z, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ z, t \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(1, 0, 1, 0) + (z', -t' - 2z', z', t') \ / \ z', t' \in \mathbb{R}\}$

con $z' + 1 = z$ e $-t' - 2z' = 2 - t - 2z$

$$-t' - 2(z - 1) = 2 - t - 2z \Rightarrow \boxed{t' = t}$$

Adesso passo secondo le proprietà e vedo se le cose cambiano.

PROPRIETÀ:

1) Se B è la matrice ottenuta da A usando E_1:
($R_i \to R_i + \lambda R_j$ con $\lambda \in \mathbb{R}$) $\det B = \det A$

2) Se B è la matrice ottenuta da A usando E_2:
($R_i \leftrightarrow R_j$) $\det B = -\det A$

3) Se B è la matrice ottenuta da A usando E_3:
($R_i \to \lambda R_j$ con $\lambda \in \mathbb{R}$) $\det B = \lambda \det A$

4) $\det A = \det {}^tA$

5) Se A ha due righe uguali: $\det A = 0$

6) Formula di Binet: $\det (AB) = \det A \cdot \det B$

OSSERVAZIONE:

Ogni matrice si può ridurre in forma triangolare usando E_1, E_2, E_3.
Ovvero:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

È facile notare che $\det B = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$
= Quindi per calcolare il $\det A$ posso ridurre A in forma triangolare.

OSSERVAZIONE:

$\rho(A) < n \iff \det A = 0$
$\rho(A) = n \iff \det A \neq 0$

TEOREMA

Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ allora TFEA:

1) $Ax = 0$ ha soluzioni non nulle
2) $\rho(A) < n$
3) $\det A = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 118

TEOREMA DI KRONECKER

Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, allora TFAE:

1) $\rho(A) = p$
2) A ha un minore non nullo di ordine p e tutti i minori di ordine $p+1$ sono nulli.

OSSERVAZIONE:

Il rango di A è l'ordine massimo dei suoi minori non nulli.

REGOLA DI CRAMER

Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile, allora il sistema $Ax = B$ equivale a $x = A^{-1}B$. In particolare il vettore delle incognite è dato da:

$$x_1 = \frac{\Delta 1}{\det A} \quad \cdots \quad x_n = \frac{\Delta n}{\det A}$$

dove Δ_J è il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la J-esima colonna con B.

es.
$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \qquad A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 = \det A$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = 1$$

es $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (x+y, x-y)$ è a.l.?

1) Siano $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = f(x_1+x_2, y_1+y_2) =$
$= (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1+x_2-y_1-y_2)$ •

$f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2) = (x_1+y_1, x_1-y_1)+(x_2+y_2, x_2-y_2) =$
$= (x_1+y_1+x_2+y_2, x_1-y_1+x_2-y_2)$ •

Vale la (3), • e • sono uguali.

2) $f(\lambda(x_1, y_1)) = f(\lambda x_1, \lambda y_1) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_1 - \lambda y_1)$ •
$\lambda f(x_1, y_1) = \lambda(x_1+y_1, x_1-y_1)$ •

ok è un'applicazione lineare

6) $D: C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ è a.l.? Sì, infatti: $D(f+g) = D(f)+D(g)$
derivata $f \mapsto f'$
$D(\lambda f) = \lambda D(f)$

7) $\phi: C^0([a,b]) \to \mathbb{R}$ è a.l.? Sì, infatti:
$f \longmapsto \int_a^b f(x)$

$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$

$\int_a^b \lambda f\,dx = \lambda \int_a^b f\,dx$

8) Siano $(V, \mathbb{R}, +, \cdot), (W, \mathbb{R}, +, \cdot)$ S.V. allora:
$f: V \to W$ $\quad f(x+y) = f(x) + f(y)$; $\lambda f(x) = f(\lambda x)$
$x \longmapsto 0$ $\quad$ (tutti $= 0$: $0 = 0 + 0$; $0 = 0$)

Si chiama applicazione lineare nulla

9) $f: V \to V$ $\quad$ a.l. identità
$x \longmapsto x$
$\underset{x+y}{f(x+y)} = \underset{x}{f(x)} + \underset{y}{f(y)}$ ok ; $\underset{\lambda x}{f(\lambda x)} = \underset{\lambda x}{\lambda f(x)}$ ok

PROPIETÀ

Sia $f: V \to W$ a.l., allora:

a) $f(0_V) = 0_W$

b) $\forall v \in V$, $f(-v) = -f(v)$

DIM:

a) $f(0_{\mathbb{R}}\, 0_V) \overset{(2)}{=} 0_{\mathbb{R}}\, f(0_V) = 0_W$

b) $f(-1 \cdot v) \overset{(2)}{=} -1\, f(v) = -f(v)$

SOMMA DI A.L. E PRODOTTO PER $a \in \mathbb{R}$

Siano $f: V \to W$, $g: V \to W$ a.l., allora:

$$f+g : V \to W$$
$$x \mapsto f(x)+g(x) \quad \text{è a.l.}$$

e $af : V \to W$ è a.l.

$$x \mapsto a(f(x))$$

Sia $L(V,W)$ l'insieme di tutte le a.l. tra V, W, allora:

$$((L, V, W), \mathbb{R}, +, \cdot) \text{ è S.V.}$$

Se $V = W \Rightarrow L(V,W) = End(V)$

endomorfismo

OSSERVAZIONE:

La composizione di a.l. è a.l.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & W \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

$g \circ f$ è a.l. tra V e Z poiché se $x, y \in V$

$$g \circ f\,(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x)+f(y)) = g\,f(x) + g\,f(y) =$$
$$= g \circ f(x) + g \circ f(y)$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in V$: $g \circ f(\lambda x) = g(f(\lambda x)) = g(\lambda f(x)) = \lambda g(f(x)) = \lambda\, g \circ f(x)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 118

TEOREMA: A.L. SU BASI

Siano $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$, $(W, \mathbb{R}, +, \cdot)$ S.V.
Sia $\mathcal{E} = \{e_1 \dots e_n\}$ base di V, siano $z_1 \dots z_n \in W$ (anche non distinti)
allora:

$$\boxed{\exists!\ \Psi: V \to W \text{ a.l. tale che } \Psi(e_1) = z_1 \dots \Psi(e_n) = z_n}$$

DIM: Vediamo l'esistenza

Sia $v \in V \Rightarrow \exists\ a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}$ tale che $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$
Definisco $\Psi(v) \overset{DEF}{=} a_1 z_1 + \dots + a_n z_n$ si dimostra che è a.l.
Ora vediamo l'unicità, supponiamo $\exists\ \gamma V \to W$ a.l.
$\gamma(e_1) = z_1 \dots \gamma(e_n) = z_n$
Sia $v \in V$, devo mostrare che $\gamma(v) = \Psi(v)$
$\gamma(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) = a_1 \gamma(e_1) + \dots + a_n \gamma(e_n) =$
$= a_1 z_1 + \dots + a_n z_n = \Psi(v)$ $\square$

Def: Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, siano $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$, $(W, \mathbb{R}, +, \cdot)$ S.V.
con basi $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_n)$, $F(f_1 \dots f_m)$. Siano $z_1 \dots z_n$ i vettori di W le cui componenti rispetto alla base F sono date dalle colonne di A:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} z_1 & & z_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Quindi per il teorema precedente, $\exists!\ \Psi_A^{\mathcal{E},F} : V \to W$ a.l. tale che
$\Psi_A^{\mathcal{E},F}(e_1) = z_1 \dots \Psi_A^{\mathcal{E},F}(e_n) = z_n$

Viceversa data $\gamma: V \to W$ a.l. e date $\mathcal{E} = \{e_1 \dots e_n\}$, $F = \{f_1 \dots f_m\}$ basi di V e W, allora posso costruire una matrice $M_\gamma^{\mathcal{E},F} \in \mathbb{R}^{m,n}$ che ha per colonne le componenti di $\gamma(e_1) \dots \gamma(e_n)$ rispetto a F. $M_\gamma^{\mathcal{E},F}$ si chiama "matrice associata" a γ rispetto alle basi $\mathcal{E}, F$.

es. $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$p(x) \Rightarrow D(p(x)) + 3p(x)$

considero $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\} = F$. Voglio $M_\varphi^{\mathcal{E},F}$ quindi calcolo:

$\varphi(1) = D(1) + 3(1) = 3 = 3(1) + 0x + 0x^2$

$$M_\varphi^{\mathcal{E},F} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\varphi(x) = D(x) + 3(x) = 1 + 3x = 1 \cdot 1 + 3(x) + 0x^2$

$\varphi(x^2) = D(x^2) + 3(x^2) = 2x + 3x^2 = 0 \cdot 1 + 2(x) + 3(x^2)$

OSSERVAZIONE:

Sia $f : V \to W$ a.l. $\mathcal{E}$ base di V, F base di W. Sia $v \in V$, siano $(x_1, \dots, x_n)$ le componenti di v rispetto alla base $\mathcal{E}$, siano $(y_1, \dots, y_m)$ " " $f(v)$ " " F, allora:

$$M_f^{\mathcal{E},F} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E}, F$ basi canoniche

es. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x, y, z) \longmapsto (x - y, y - z)$

$$M_f^{\mathcal{E},F} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad f(x,y,z) = M_f^{\mathcal{E}F} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \end{pmatrix}$$

COMPOSIZIONE DI APPLICAZIONI LINEARI

Siano V, W, Z s.v. con basi $\mathcal{E} = \{e_1 \dots e_n\}$, $F = \{f_1 \dots f_m\}$, $G = \{g_1 \dots g_l\}$

Siano $\varphi : V \to W$, $\psi : W \to Z$ a.l. Allora si ha:

$\psi \circ \varphi$ è a.l.

$$\begin{tikzcd} V_{\mathcal{E}} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi \circ \varphi"'] & W_F \arrow[r, "\psi"] & Z_G \end{tikzcd}$$

$$M_{\psi \circ \varphi}^{\mathcal{E}G} = \underset{l \times m}{M_\psi^{\mathcal{E}F}} \cdot \underset{m \times n}{M_\varphi^{\mathcal{E}F}}$$

Sia $v \in V$ che ha componenti $(x_1 \dots x_n)$ rispetto a $\mathcal{E}$.

CONTINUA →

TEOREMA

$Ker\ \varphi$ è S.S.V. di V

DIM:

Usiamo il criterio 3) $0_V \in Ker\ \varphi$

1) Siamo $x_1, x_2 \in Ker\ \varphi$, $\varphi(x_1+x_2) = \underbrace{\varphi(x_1)}_{0} + \underbrace{\varphi(x_2)}_{0} = 0_W$ per Hp.

$\Rightarrow x_1+x_2 \in Ker\ \varphi$

2) Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in Ker\ \varphi$ e faccio:

$$\varphi(\lambda x) = \lambda \underbrace{\varphi(x)}_{0_W} = 0_W \Rightarrow \lambda x \in Ker\ \varphi$$

$\square$

TEOREMA

φ è iniettiva $\Leftrightarrow$ $Ker\ \varphi = \{0_V\}$

DIM:

$\boxed{\Rightarrow}$ Hp. Se $x, y \in V$ tali che $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$

Sia $x \in Ker\ \varphi$, si ha $\varphi(x) = 0_W = \varphi(0_V)$

$\Rightarrow$ per Hp $x = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo $\varphi(x) = \varphi(y)$ vogliamo mostrare che $x = y$

$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow \varphi(x) - \varphi(y) = 0_W \Leftrightarrow \varphi(x-y) = 0_W \Rightarrow$

$\Rightarrow x-y \in Ker\ \varphi \Rightarrow x-y = 0_V \Rightarrow \boxed{x=y}$

Essere iniettiva vuol dire avere il nucleo più piccolo di tutti.

$\square$

Def: Un'applicazione lineare iniettiva si dice <u>monomorfismo</u>.

OSSERVAZIONE:

Sia $f: V \to W$ a.l., $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base di V, $\mathcal{F} = \{f_1 \dots f_m\}$ base di W. $M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{EF}}$ la matrice associata.

$$Ker\ f: \{x \in V / f(x) = 0_W\} = \left\{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n / M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{EF}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

DIM:

a) Usiamo il criterio: 1) Siano $y_1, y_2 \in f(z) \Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in Z$ tale che

$$f(x_1) = y_1 \quad , \quad f(x_2) = y_2$$

$$\underbrace{y_1 + y_2}_{\in f(z)} = f(x_1) + f(x_2) = f\underbrace{(x_1 + x_2)}_{\in Z} \in f(z)$$

2) Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $y_1 \in f(z) \Rightarrow \exists\, x_1 \in Z$ tale che $y_1 = f(x_1)$

$$\lambda y_1 = \lambda f(x_1) = f\underbrace{(\lambda x_1)}_{\in Z} \in f(z)$$

3) $0_W \in f(z)$ poiché essendo Z s.s.v. lo $0_V \in Z$ e

$$0_W = f(0_V) \in f(z)$$

b) allo studente

c) è (a) con $Z = V$ $\square$

OSSERVAZIONE:

f è suriettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = W$

Def Un'a.l. suriettiva si dice EPIMORFISMO

Def. Un'a.l. biettiva si dice ISOMORFISMO

OSSERVAZIONE

Sia $f: V \to W$ a.l., $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, $F = \{f_1 \dots f_m\}$
base di V — base di W

Sia $A = M_F^{EF}$. Dato $x \in V$, $y \in W$ indichiamo con $(x_1, \dots, x_n)$ le componenti di x rispetto a E e con $(y_1, \dots, y_m)$ le componenti di y rispetto a F.

$$\operatorname{Im} f = \{y \in W / \exists\, x \in V,\ f(x) = y\} = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m / \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}\}$$ questo sistema ammette soluzioni

Risolvo il sistema:

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \Rightarrow x-z+2z=0 \Rightarrow \boxed{x=-z} \\ -y-z=0 \Rightarrow \boxed{y=-z} \end{cases}$$

$Ker\ f = \{(-z,-z,z) \in \mathbb{R}^3 / z \in \mathbb{R}\}$

$B_{Ker\ f} = \{(-1,-1,-1)\}$

Per trovare una base di Im f riduciamo A per colonne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \to C_3 - 2C_1]{C_2 \to C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$ è ridotta per colonne

$\rho(A) = 2$

$B_{Im\ f} = \{(1,2,3),(0,-1,-2)$

Ci chiediamo se $(3,4,5) \in Im\ f$. Ho due possibilità.

1) $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} / (3,4,5) = \alpha(1,2,3) + \beta(0,-1,-2)$

2) Il sistema $A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ha soluzioni?

2) $$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \Rightarrow x-z-z+2z=3 \\ -y-z=-2 \Rightarrow y=2-z \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-z \\ y=2-z \end{cases}$$

$f^{-1}(3,4,5) = \{(1-z, 2-z, z) \in \mathbb{R}^3 / z \in \mathbb{R}\}$

<u>OSSERVAZIONE</u>:

Se $f: V \to W$ a.l. e $\dim V = \dim W$, abbiamo 3 proprietà:

1) f è un monomorfismo
2) f è un epimorfismo
3) f è isomorfismo

Infatti: f monomorfismo $\Leftrightarrow Ker\ f = \{0_V\} \Leftrightarrow \dim Ker\ f = 0 \Leftrightarrow$
$\dim Im\ f = \dim V = \dim W \Leftrightarrow$ f è SURIETTIVA

$$P = M_{\varphi}^{EE} \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \varphi(e_1) & \dots & \varphi(e_n) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ f_1 & & f_n \end{pmatrix}$$

2) $id_V : V \to V \qquad P = M_{id_V}^{FE}$

$$P = M_{id_V}^{FE} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ id(f_1) & \dots & id(f_n) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ f_1 & & f_n \end{pmatrix}$$

TEOREMA SULLE MATRICI DI PASSAGGIO

Sia $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ E, F basi, P matrice di passaggio da E a F, allora P è invertibile e l'inversa P^{-1} è la matrice di passaggio da F a E.

DIM: USIAMO 1)

Pensiamo $P = M_{\varphi}^{EE} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ha rango massimo poiché le colonne $\varphi(e_1) = f_1 \dots \varphi(e_n) = f_n$ sono l.i. (F è base)

$$\rho(P) = n \Rightarrow \operatorname{Im} \varphi = V \Rightarrow \text{è isomorfismo}$$
$$\rho(P) = n \Rightarrow P \text{ invertibile}$$

Inoltre si ha $(f_1 \dots f_n) = (e_1 \dots e_n) \Leftrightarrow (f_1 \dots f_n) P^{-1} = (e_1 \dots e_n)$

Quindi P^{-1} è la matrice di passaggio dalla base F alla base E.

... Binet si ha: $\det B = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det A$

$\det(P^{-1}) = 1$

Es. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longmapsto (x+y, y-z)$ NO Iniettiva

Si Suriettiva

Sia $\mathcal{E} = C$ (canonica)

$\mathcal{E}' = \{ f_1 = (1,-1,0),\ f_2 = (1,0,-1),\ f_3 = (0,1,1) \}$

$F = C$ (canonica) di $\mathbb{R}^2$

$F' = \{ f_1' = (1,1),\ f_2' = (0,1) \}$

$A = M_f^{\mathcal{E}\mathcal{E}} = M_f^{\mathcal{E}C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A' = M_f^{\mathcal{E}'F'}$ ha sulle colonne le componenti di $f(f_1), f(f_2), f(f_3)$ rispetto a F'

$f(f_1) = f(1,-1,0) = (0,-1) = 0(1,1) - 1(0,1)$

$f(f_2) = f(1,0,-1) = (1,1) = 1(1,1) + 0(0,1)$

$f(f_3) = f(0,1,1) = (1,0) = 1(1,1) - 1(0,1)$

$A' = M_f^{\mathcal{E}'F'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Voglio la matrice che ha sulle colonne le componenti di f_1, f_2, f_3 rispetto a $\mathcal{E}$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

${}^tQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \det Q = 1 \quad Q^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = Q^{-1}AP$ ovvero: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ci sono altri autovettori associati a 2 e 3?

$V_3 = \ker f_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ Abbiamo sostituito $\lambda = 3$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \qquad V_3 = \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}\right\}$$

$B_{V_3} = \{(1,0)\} \rightarrow$ L'insieme di tutti gli autovettori associati all'autovalore 3 saranno quelli formati da $(x,0)$

$V_2 = \ker f_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad V_2 = \left\{(0,y) \in \mathbb{R} / y \in \mathbb{R}\right\} \qquad B_{V_2} = \{(0,1)\}$$

OSSERVAZIONE:

Data $f: V \to V$, $f_\lambda = f - \lambda\, id_V$

Se $\lambda = 0 \Rightarrow f_0 = f \Rightarrow$ quindi lo zero è autovalore $\Leftrightarrow f = f_0$ NON è iniettiva e inoltre $V_0 = \ker f$

OSSERVAZIONE:

Sia $f: V \to V$ a.l., sia $E = \{e_1 \dots e_n\}$, sia $M_f^{EE} = A = (a_{ij})$

$\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore $\Leftrightarrow \ker f_\lambda \neq \{0_V\} \Leftrightarrow \dim(\ker f_\lambda) \neq 0$,

cioè quando
$$\boxed{\det\left(M_{f_\lambda}^{EE}\right) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0}$$

TEOREMA

Gli autovalori di f sono dunque le radici reali del polinomio dato dal $\det(M_f^{EE} - \lambda I)$, detto polinomio caratteristico (P.C.)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 118

TEOREMA (AUTOVETTORI l.i.)

Sia $f: V \to V$ a.l., siano $\lambda_1 \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$ autovalori distinti. Siano $v_1 \in V_{\lambda_1} \dots v_m \in V_{\lambda_m}$ autovettori (non nulli). Allora $v_1 \dots v_m$ sono tutti l.i.

DIM:
Supponiamo che esista $i \leq m-1$ tale che $v_1 \dots v_i$ siano l.i. ma

$\Leftrightarrow^{\otimes} \lambda_{i+1}(a_1 v_1 + \dots + a_i v_i) = a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_i \lambda_i v_i$

$v_{i+1} = a_1 v_1 + \dots + a_i v_i \Leftrightarrow f(v_{i+1}) = f(a_1 v_1 + \dots + a_i v_i)$

$\Leftrightarrow \lambda_{i+1} v_{i+1} = a_1 f(v_1) + \dots + a_i f(v_i) = a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_i \lambda_i v_i \Leftrightarrow (\underbrace{\lambda_{i+1} - \lambda_1}_{\neq 0}) a_1 v_1 + \dots + (\underbrace{\lambda_{i+1} - \lambda_i}_{\neq 0}) a_i v_i = 0$

$\Leftrightarrow$ l.i. $a_1 = \dots = a_i = 0 \Leftrightarrow^{\otimes} v_{i+1} = 0$ # inaccettabile

Def Un endomorfismo $f: V \to V$ si dice semplice se ammette una base ε di V formata da autovettori, ovvero:

$$M_f^{\varepsilon\varepsilon} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 e_1 = f(e_1)$ $\quad \lambda_m e_m = f(e_m)$

è una matrice diagonale con $\lambda_1 \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$ (non necessariamente distinti)

OSSERVAZIONE:

Se f ha n autovalori distinti $\lambda_1 \dots \lambda_n$ allora per il teorema $v_1 \in V_{\lambda_1} \dots v \in V_{\lambda_n}$. Sono n autovettori tutti l.i. e formano una base di V. (f con n autovalori distinti $\Rightarrow f$ semplice)

es. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (x+y, y)$

det. pongo $= 0$

$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ il p.c. è $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0$

$\Downarrow$

$\lambda = 1$ ho un solo autovalore

Cerco gli autovettori:

$V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_{f_1}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ $\quad \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow V_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}\}$

d) ⇒ c) Poiché $\underset{\dim V}{n} = \underset{\dim V_{\lambda 1}}{m_{\lambda 1}} + \dots + \underset{\dim V_{\lambda s}}{m_{\lambda s}}$ $\square$

c) ⇒ b) ok per il th. sulle dimensioni sulle somme dirette.

b) ⇒ a) l'unione delle basi di $V_{\lambda 1} \dots V_{\lambda s}$ è una base di V ed è formata da autovettori.

DIAGONALIZZAZIONE DI UNA MATRICE

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale ovvero se $\exists$ $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile tale che:

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

TEOREMA SULLA DIAGONALIZZAZIONE

Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ S.V., $\dim V = n$, sia $\mathcal{E}$ una base di V e $f: V \to V$ a.l. tale che $A = M_f^{\mathcal{E}\mathcal{E}}$, allora abbiamo:

a) A è diagonalizzabile ⇔ f è semplice

b) Se $\mathcal{F}$ è una base formata da autovettori, P è la matrice di passaggio da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ $(P = M_{id}^{\mathcal{F}\mathcal{E}})$, allora:

$$\underbrace{P^{-1}AP}_{\text{regola del cambiamento di base}} = \underbrace{D}_{\text{matrice associata a una base di autovettori}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sono gli autovalori di f.

- REGOLA PRATICA PER DIAGONALIZZARE:

Voglio vedere se una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è diagonalizzabile:

1) Calcolo le radici del p.c. $(A - \lambda I)$

2) Controllo se siano tutte reali $\lambda_1 \dots \lambda_s \in \mathbb{R}$ (se non è così mi fermo)

3) Se $\exists$ λ_i con $m_{\lambda i} > 1$ controllo che: $\dim V_{\lambda i} = m_{\lambda i}$

4) Costruisco la matrice P mettendo sulle colonne una base di autovettori.

PROPOSIZIONE

Sia $f: V \to V$ a.l., sia $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di f, V_λ il suo autospazio

Allora λ^2 è autovalore: $f^2 = f \circ f : V \to V$ e $W_{\lambda^2} \supseteq V_\lambda$

DIM:

$v \in V_\lambda \Rightarrow f(v) = \lambda v \Rightarrow f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 f(v)$

$\Rightarrow v$ è autovettore di f^2 con autovalore λ^2

OSSERVAZIONE

Se $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ con autovalori $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 2$

Allora: $A^3 = A \cdot A \cdot A$, avrà autovalori $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 8$

SPAZI VETTORIALI CON PRODOTTI SCALARI

Sia $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ S.V. una a.l. $V \times V \to V$

$v, w \longmapsto v \cdot w$

Si dice prodotto scalare se soddisfa 4 proprietà:

PS_1) $v \cdot w = w \cdot v$

PS_2) $(a v) w = a (w v) = v (a w)$

PS_3) $(v + w) z = v \cdot z + w \cdot z$

PS_4) $v \cdot v \geq 0$ e $v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Uno S.V. con prodotto scalare si dice S.V.P.S.

es. V_2 il prodotto scalare soddisfa PS_1 ... PS_4.

es. $V \times V \to V$

$f, g \longmapsto \int_a^b f(x) g(x)\, dx$ soddisfa $PS_1 \dots PS_4$

es. $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ S.V., $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$, si può definire:

$v \cdot w = (a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) \cdot (b_1 e_1 + \dots + b_n e_n)$

Soddisfa $PS_1 \dots PS_4$.

TEOREMA (MATRICI ORTOGONALI E CAMBIO DI BASE)

Sia $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ S.V.P.S., $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormale, $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ base ortonormale. P è la matrice di passaggio da E a F.

Allora è ortonormale $\Leftrightarrow$ P è ortogonale

DIM:

Sia $P = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$ matrice di passaggio

$f_1 = p_1 e_1 + \dots + p_{n1} e_1$

$f_n = p_{1n} e_n + \dots + p_{nn} e_n$ $\quad \forall i, j$ quanto vale $f_i \cdot f_j$?

$f_i \cdot f_j = p_{1i} \cdot p_{1j} + \dots + p_{ni} p_{nj}$

$$ {}^tPP = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{n1} \\ \vdots & & \\ p_{1n} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 f_1 & \dots & f_1 f_n \\ f_n f_1 & \dots & f_n f_n \end{pmatrix} $$

${}^tPP = I \Leftrightarrow F$ è ortonormale.

– COROLLARIO:

Sia $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ allora TFAE:

a) P ortogonale

b) Le colonne di P formano una base ortonormale

c) Le righe di P formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

OSSERVAZIONE:

P ortogonale $\Leftrightarrow {}^tPP = I \Leftrightarrow \det({}^tPP) = 1 \Leftrightarrow \det {}^tP \cdot \det P = 1$

$\Leftrightarrow (\det P)^2 = 1 \Rightarrow \det P = \pm 1$.

Se $\det P = +1$, P si dice ortogonale speciale

OSSERVAZIONE:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A = 1$ ma A non è ortogonale perché $(1,0) \cdot (2,1) = 2 \neq 0$

Quindi:

$$A = M_f^{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} f(e_1)\cdot e_1 & \dots & f(e_n)\cdot e_1 \\ f(e_1)\cdot e_2 & \dots & f(e_n)\cdot e_2 \\ \vdots & & \vdots \\ f(e_1)\cdot e_n & \dots & f(e_n)\cdot e_n \end{pmatrix}$$

$\uparrow f(e_1)$ $\qquad\qquad$ $\uparrow f(e_n)$

A è simmetrica $\Leftrightarrow$ f è autoaggiunto

es. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \mapsto (-y, x)$ $\qquad M_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

non è simmetrica $\Rightarrow$ f non è autoaggiunto

es. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \mapsto (x+y, x)$ $\qquad M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è simmetrica $\Rightarrow$ f è autoaggiunto

Def. Sia $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ S.V.P.S. $\quad W, Z \subseteq V$ S.S.V.
W e Z si dicono ortogonali $(W \perp Z)$ se $\forall x \in W, \forall y \in Z, x \cdot y = 0$

OSSERVAZIONE:

Se $\{z_1 \dots z_\ell\}$ è una base di Z e $\{w_1 \dots w_s\}$ è una base di W
$W \perp Z \Leftrightarrow \forall i = 1 \dots s, \forall j = 1 \dots \ell$, si ha sempre $w_i \cdot z_j = 0$

TEOREMA SUGLI ENDOMORFISMI AUTOAGGIUNTI

Sia $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ S.V.P.S., $f: V \to V$ e.l. endomorfismi, allora valgono le seguenti proprietà:

a) f è autoaggiunto;
b) f è semplice e gli autospazi sono a due a due ortogonali
c) $\exists$ una base ortonormale di autovettori.

- COROLLARIO:

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ simmetrica è sempre diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale che ha nelle colonne una base ortonormale di autovettore.

es. $q(x,y) = 4x^2 + 3xy + 2y^2 \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$

In generale A $q(x_1 \dots x_n)$ possiamo associare la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si ha che $q(x_1 \dots x_n) = (x_1 \dots x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = {}^t x A x$ dove $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Si dice rango di q il rango della matrice A associata a q.

CAMBIAMENTO LINEARE DI VARIABILI

Siano $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ variabili

Un cambiamento lineare di variabili è una trasformazione del tipo $x = Py$ dove $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile (si ha anche $y = P^{-1}x$)

OSSERVAZIONE:

Se $q(x) = {}^t x A x$ è una forma quadratica e $x = Py$ un cambiamento lineare di variabili, allora si ha $r(y) = q(Py) = {}^t(Py) A (Py) =$
$= {}^t y \, (\underbrace{{}^t P A P}_{B}) \, y$ questa è ancora una forma quadratica nelle variabili y che ha come matrice associata: $B = {}^t P A P$

Def Due forme quadratiche si dicono equivalenti se si possono ottenere l'una dall'altra tramite un cambiamento di variabili.

es. $q(x,y) = xy \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$r = (x', y') = x'^2 - y'^2$ sono equivalenti

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ considero: $\begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' - y' \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$q(x,y) = xy = (x'+y')(x'-y') = x'^2 - y'^2 = r(x',y')$

$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{x+y}{2} \\ y' = \frac{x-y}{2} \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 118

REGOLA DI CARTESIO

Sia $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ un polinomio con tutte radici reali. Allora le radici positive sono tante quante i cambiamenti di segno nella successione dei coefficienti $(a_0, a_1 \dots a_n)$

es. $f(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3$

$1, +2, -1, 1$ ha due radici positive

cambia segno   cambia segno

es. Scriviamo la forma canonica della forma quadratica

$$q(x,y) = 4x^2 - 4xy + 7y^2$$

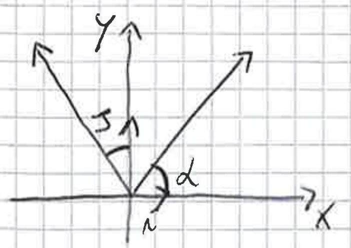
$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ che ha autovalori $8, 3$

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ Il cambiamento di variabili $x = PY$ $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y' \\ y = -\frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y' \end{cases}$

$$q(x,y) = 4x^2 - 4xy + 7y^2 = 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y'\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y'\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y'\right) +$$
$$+ 7\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y'\right)^2 = \dots = 8x'^2 + 3y'^2$$ è def. positiva

ROTAZIONI NEL PIANO

Una rotazione in $\mathbb{R}^2$ consiste nel mandare la base i, j in un'altra base ortonormale tramite una matrice ortogonale speciale.



$$I = \cos\alpha\, \hat{i} + \sin\alpha\, \hat{j}$$
$$J = -\sin\alpha\, \hat{i} + \cos\alpha\, \hat{j}$$

$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ è ortogonale e $\det P = 1$

es $r)\ 3x - 2y - 1 = 0$ eq. cartesiana

passa per $P_0 = (1,1)$ ed è $\perp$ a $v(3,-2)$, quindi:

$v'(2,3)$ è $// r \Rightarrow v \cdot v' = (3,-2)\cdot(2,3) = 6 - 6 = 0$

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$$ FORMA PARAMETRICA

Per passare dalla forma parametrica alla forma cartesiana ricavo t:

$$\begin{cases} t = \frac{x-1}{2} \\ t = \frac{y-1}{3} \end{cases} \Rightarrow r : \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0$$

$$3x - 2y - 1 = 0$$

Un altro modo per passare in forma parametrica è porre una variabile $= t$

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{3t-1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \end{cases}$$ è un'altra forma parametrica

RETTA PER DUE PUNTI

Siano $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ con $P_1 \neq P_2$, allora la retta per P_1 e P_2 $//$ $P_2 - P_1$

$$r : \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

Ricavo t : $$\begin{cases} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = t \\ \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

oppure $r : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ oppure $r : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$

es $y = 2x$ $\quad r_2 = \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \end{cases}$

$r_1 \cap r_2 = 1+2t = 2(1+t) \Rightarrow 1 = 2$ # contraddizione. Sono rette // non coincidenti.

FASCI DI RETTE

Siano: $r_1 : ax + by + c = 0$

$r_2 : a'x + b'y + c' = 0$

due rette che si intersecano in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Allora il fascio di rette per P_0 può essere dato da:

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0 \quad \text{con } (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

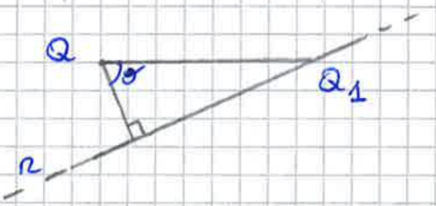
OSSERVAZIONE:

Un altro modo per ottenere questo fascio possiamo:

$$\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) = 0 \quad \text{con } (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

DISTANZA PUNTO-RETTA

Sia $r : ax + by + c$ e $Q = (h, K)$, la distanza $d = (r, Q)$ è tra Q e la sua proiezione ortogonale su r.



Sia $Q = (x_1, y_1) \in r$

$$d = (r, Q) = d(Q, Q') = \| Q - Q_1 \| \cos\theta \| = (Q - Q_1) \cdot u$$

dove u è un versore $\perp r$ e prendiamo: $\boxed{u = \frac{(a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$

$$d(r, Q) = \| (Q - Q_1) \cdot u \| =$$

$$= \frac{|(h - x_1, K - y_1) \cdot (a, b)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ah + bK - ax_1 - by_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$Q_1 \in r \Rightarrow ax_1 + by_1 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = -ax_1 - by_1}$

CONTINUA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 118

FASCI DI CIRCONFERENZE

Siano $\gamma_1 : f_1(x,y) = x^2+y^2+a_1x+b_1y+d_1=0$

$\gamma_2 : f_2(x,y) = x^2+y^2+a_2x+b_2y+d_2=0$

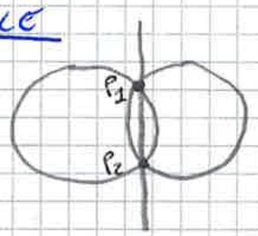
tale che $\gamma_1 \cap \gamma_2 = P_1 \cup P_2$. Il fascio delle circonferenze passante per P_1 e P_2 è dato da:

$$\lambda f_1(x,y)+\mu f_2(x,y)=0 \qquad \text{con } (\lambda,\mu)\neq(0,0)$$

- se $\lambda=-\mu \Rightarrow \lambda(x^2+y^2+a_1x+b_1y+d_1)-\lambda(x^2+y^2+a_2x+b_2y+d_2)=0$

$(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+d_1-d_2=0$ **ASSE RADICALE**

È l'eq. dell'asse radicale del fascio



Se $P_1=P_2=P$ si parla di fascio di circonferenze tangenti in P.

Se $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ sono tangenti in P, il fascio è dato da:

$$\lambda f_1(x,y)+\mu f_2(x,y)=0$$

Se $P=(x_0,y_0)$ e $f(x,y)=0$ è l'asse radicale, il modo più semplice per avere il fascio è:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\lambda f(x,y)=0 \qquad \text{con } \lambda\in\mathbb{R}$$

CIRCONFERENZA PER 3 PUNTI

Siano $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2)$ e $P_3=(x_3,y_3)$ tre punti non allineati allora $\exists!$ circonferenza γ passante per P_1, P_2, P_3.

γ ha eq:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

è una circonferenza, perché il coefficiente di x^2+y^2 è $\neq 0$

- ELLISSE: se $\alpha, \beta > 0 \rightarrow \alpha, \beta < 0$
- IPERBOLE: se $\alpha > 0, \beta < 0 \vee \alpha < 0, \beta > 0$

o se $\beta = 0 \rightarrow \alpha \bar{x} = 2\gamma\bar{y}$ $\quad B' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\gamma = \pm\sqrt{-\frac{\det B'}{\alpha}}$$

OSSERVAZIONE:

Una canonica può essere trasformata in forma canonica con una rototraslazione.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

dove: $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ è una matrice $\perp$ che ha nelle colonne una base ortonormale di autospazi di A e (a, b) sono nel caso ellisse / iperbole le coordinate del centro (dove si intersecano gli assi di simmetria) e si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

Nel caso della parabola sono le coordinate del vertice. Poniamo:

$Q = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & a \\ p_{21} & p_{22} & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si ha che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$f(x,y) = (x \;\; y \;\; 1)\, B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = {}^tQ \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} BQ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (\bar{x} \; \bar{y} \; 1)\, {}^tQBQ \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= f(\bar{x}, \bar{y})$$

$B' = {}^tQBQ \quad , \quad A' = {}^tPAP$