appunti
www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2114A-

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Laface Gianluca

MATERIA: Analisi I - Prof. Grillo

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell’autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

Def: Insieme

Si definisce insieme una collezione di oggetti a volte tali da soddisfare una proprietà. È un concetto primitivo. In generale si denota con una lettera maiuscola, gli oggetti prendono il nome di elementi e si indicano con lettere minuscole.
Per indicare che un oggetto a appartiene ad un oggetto A si scriverà: $a \in A$
In generale una data proprietà che caratterizza gli elementi di un insieme si indica con $\mathcal{P}$ (è una p calligrafica).

Def. Quantificatori

- $\forall$ si legge: per ogni, qualunque, tutti.
- $\exists$ si legge: esiste almeno uno.
- $\exists!$ si legge: esiste ed è unico.
- $\nexists$ si legge: non esiste.

es. "Tutte le matricole superano analisi I al 1° appello".

Siano: S = insieme matricole ; s = matricola

P: supera analisi 1 al 1° appello.

$\forall s \in S : P(s)$

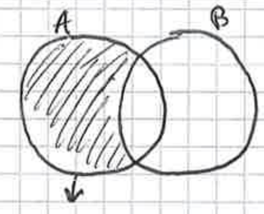
Negazione $\exists s \in S : \neg P(s)$ $\qquad \neg$ = NON

- **Inclusione**. Un insieme A è incluso, ovvero contenuto, in un insieme B se tutti gli elementi di A sono anche elementi di B
  Si scrive: $A \subseteq B$ ("A incluso in B")
  cioè $\forall a \in A, a \in B \Leftrightarrow A \subseteq B$

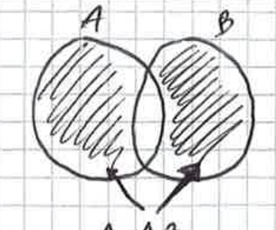
Def. Intersezione

Siano A e B due insiemi, diremo intersezione di A con B, cioè A intersecato B l'insieme costituito dagli elementi di A che sono anche elementi di B. $A \cap B \Leftrightarrow \forall a \in A \cap B \quad a \in A, a \in B$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 148



$A \setminus B$



$A \Delta B$

$\emptyset$ insieme vuoto, privo di elementi

Def. Disgiunto

Due insiemi si dicono disgiunti quando la loro intersezione è vuota

$A \cap B = \emptyset$

Def. Insieme delle parti

Diciamo insieme delle parti di un insieme A, l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A e si indica con $P(A)$

Per convenzione l'insieme vuoto, $\emptyset$, è sottoinsieme di tutti gli insiemi.

$P(A) = \{\emptyset, A, \text{tutti gli altri sottoinsiemi di } A\}$

es.

$A = \{1, 2, 3\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

Si può dimostrare che se A è un insieme finito, allora l'insieme delle parti di A ha 2^n elementi, con $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$

Attenzione!

$1 \in A$ Sì

$1 \subseteq A$ No

$\{1\} \subseteq A$ Sì

$1 \in P(A)$ NO

$\{1\} \in P(A)$ Sì

Def. Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B definiamo prodotto cartesiano tra A e B l'insieme di tutte le coppie ordinate date da un elemento di A accoppiato con un elemento di B. Si indica con:

$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$

"A cartesiano B"

ordinate vuol dire $A \times B \neq B \times A$ → $B \times A = \{(b,a) : b \in B, a \in A\}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 148

Insiemi numerici

$\mathbb{N}$ = numeri naturali = $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ = numeri interi = $\{\dots, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0\}$ $\quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$ = numeri razionali = $\{\frac{n}{m}, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$

qui sono contenute frazioni ridotte ai minimi termini, cioè numeri interi, decimali limitati (che ha un numero finito dopo la virgola), decimali illimitati (che ha un numero illimitato di cifre dopo la virgola) e numeri periodici $\quad \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ = numeri reali = {decimali, illimitati, non periodici} $\cup\ \mathbb{Q}$, a questo insieme fanno parte numeri come: $\sqrt{2}, e, \pi$. $\quad \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{C}$ = numeri complessi $\quad \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

- Operazioni su $\mathbb{R}$:

$+$ SOMMA
$\cdot$ PRODOTTO $\qquad (\mathbb{R}, +, \cdot) \Rightarrow$ Campo

- Proprietà dell'insieme $\mathbb{R}$:

1) Commutativa: $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a+b = b+a \,;\, a \cdot b = b \cdot a$

2) Associativa: $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad (a+b)+c = a+(b+c) \,;\, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

3) Distributiva della somma rispetto al prodotto:
$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

4) Esistenza dell'elemento neutro rispetto alla somma: (INDICATO CON 0)
$\forall a \in \mathbb{R} \quad a + 0 = 0 + a = a$ dove 0 è lo zero.

5) Esistenza dell'elemento neutro rispetto al prodotto: (INDICATO CON 1)
$\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \,;\, \forall x \in \mathbb{R}\ \exists\ e_m$ tale che $x e_m = e_m x = x$
$e_m = 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 148

Def. Valore assoluto

Si definisce valore assoluto di un numero reale x il numero x se $x \geq 0$ il numero $-x$ se $x < 0$, si indica con $|x|$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

es. $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$; $|3| = 3$; $|-\frac{3}{5}| = \frac{3}{5}$; $|-10^{\pi}| = 10^{\pi}$

$$|F(x)| = \begin{cases} F(x) & \text{dove } F(x) \geq 0 \text{ sul dominio di } F \\ -F(x) & \text{dove } F(x) < 0 \text{ sul dominio di } F \end{cases}$$

Errori tipici: $|F(x)| \cancel{=} F(x)$ dove F è positiva (perché manca la parte negativa)

$$\cancel{|F(x)| = \begin{cases} F(x) & \underline{x \geq 0} \\ \underbrace{-F(x)}_{F(-x)} & \underline{x < 0} \end{cases}}$$

$$\cancel{\left|\frac{H(x)}{G(x)}\right| = \begin{cases} \frac{H(x)}{G(x)} & \frac{H(x)}{G(x)} \geq 0 \\ \frac{-H(x)}{-G(x)} & \frac{H(x)}{G(x)} < 0 \end{cases}}$$

il segno meno è uno solo

Ciò che si trova all'interno di un valore assoluto si chiama "argomento"

$|x|$, x è l'argomento del valore assoluto.

Proprietà: Siano $x, b \in \mathbb{R}$, allora:

1) $|x| < b$ equivale a $-b < x < b$ e se $b \leq 0$ equivale a $\emptyset$

2) $|x| > b$ equivale a $x < -b \vee x > b$ e se $b < 0$ abbiamo una disuguaglianza sempre vera. Se $b = 0$ si ha $x \neq 0$

3) $|x| \leq b$ equivale a $-b \leq x \leq b$ e se $b < 0$ equivale a $\emptyset$

4) $|x| \geq b$ equivale a $x \leq -b \vee x \geq b$ e se $b \leq 0$ abbiamo una disuguaglianza sempre vera.

CONTINUA →

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 148

$|x| = 0$ se $\begin{cases} x \geq 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ -x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

$x = 0 \quad \cup \quad \emptyset \quad \Rightarrow x = 0$

$||x|| = |x| \qquad ||x|| = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \geq 0 \\ -|x| & \text{se } \boxed{|x| < 0} \end{cases}$

NON È POSSIBILE perché il valore ass. torna un numero positivo o al più zero.

2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

$|x \cdot y| = \begin{cases} xy, & x \cdot y \geq 0 \\ -xy, & xy < 0 \end{cases}$

$|x| \cdot |y| = \begin{cases} xy, & x \geq 0 \wedge y \geq 0 \\ & x < 0 \wedge y < 0 \\ -xy, & x > 0 \wedge y < 0 \\ & x < 0 \wedge y > 0 \end{cases}$

3) $x \leq |x| \longrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq x \Rightarrow 0 \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ x \leq -x \Rightarrow 2x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0 \end{cases}$

SEMPRE VERA

$x \geq 0 \quad \cup \quad x < 0 \quad \Rightarrow \mathbb{R}$

4) $|x+y| \leq |x| + |y|$

Noi sappiamo che $\boxed{x \leq |x|}$ e in modo analogo possiamo affermare che $\boxed{y \leq |y|}$

$x \leq |x| \longrightarrow$ AGGIUNGO MEMBRO A MEMBRO $\longrightarrow x + y \leq |x| + y$

da $y \leq |y| \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow x + y \leq |x| + y \leq |x| + |y|$

USO QUESTA

Siamo arrivati fin qui $x+y \leq |x| + |y|$ e ancora non so se $|x+y| \overset{?}{\leq} |x| + |y|$

$\underbrace{-|x| - |y| \leq x + y}\ \underbrace{\leq |x| + |y|} \qquad -b \leq x \leq b$

Io parto da: $x \leq |x|$ ma posso sfruttare anche $|x| \leq |x|$. Da questa posso dire che $\underline{-|x| \leq x \leq |x|}$. D'altra parte io posso dire che:

$|x| \geq -x \Rightarrow \underline{-|x| \leq x}$

$-|x| + y \leq x + y$

$-|x| - |y| \leq -|x| + y \leq x + y \Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 148

$|3x^2 - x - 2| < 1$

$-1 < 3x^2 - x - 2 < 1 \rightarrow \begin{cases} ② \; 3x^2 - x - 2 > -1 \\ ① \; 3x^2 - x - 2 < 1 \end{cases}$

① $3x^2 - x - 2 - 1 < 0$

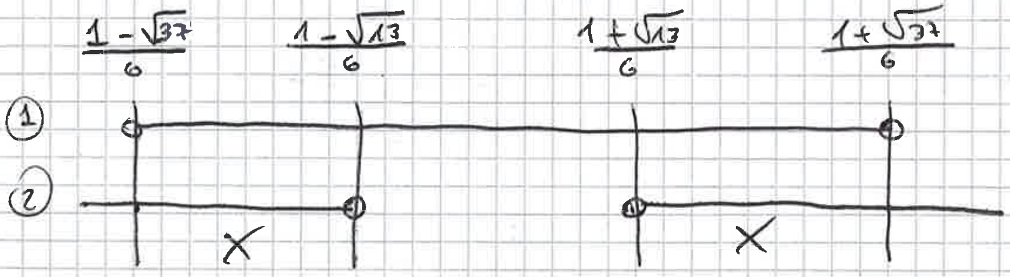
$3x^2 - x - 3 < 0$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+36}}{6} = \dfrac{1 \pm \sqrt{37}}{6}$ $\qquad \dfrac{1-\sqrt{37}}{6} < x < \dfrac{1+\sqrt{37}}{6}$

② $3x^2 - x - 1 > 0$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+12}}{6} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$ $\qquad x < \dfrac{1-\sqrt{13}}{6} \cup x > \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$

$\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{37}}{6} < x < \dfrac{1+\sqrt{37}}{6} \\ x < \dfrac{1-\sqrt{13}}{6} \cup x > \dfrac{1+\sqrt{13}}{6} \end{cases}$

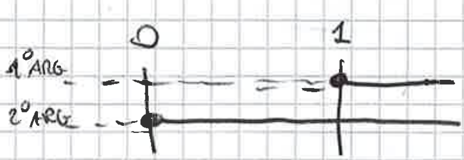


$\dfrac{1-\sqrt{37}}{6} < x < \dfrac{1-\sqrt{13}}{6} \cup \dfrac{1+\sqrt{13}}{6} < x < \dfrac{1+\sqrt{37}}{6}$

$1 + |x-1| \geq |x|$ $\longrightarrow$ Si nota subito che è $\forall x \in \mathbb{R}$, sempre vero.

$x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

$x \geq 0$



Mappa

$\begin{cases} x \leq 0 \\ 1 - (x-1) \geq -x \end{cases}$ $\cup$ $\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ 1 - (x-1) \geq x \end{cases}$ $\cup$ $\begin{cases} x > 1 \\ 1 + x - 1 \geq x \Rightarrow 0 \geq 0 \text{ S.V.} \end{cases}$

1° SIST. $\qquad$ 2° SIST. $\qquad$ 3° SIST.

1° SIST. $\begin{cases} x \leq 0 \\ 1 - \cancel{x} + 1 \geq -\cancel{x} \Rightarrow 2 \geq 0 \text{ S.V.} \end{cases} \Rightarrow x \leq 0$

2° SIST. $\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ 1 - x + 1 \geq x \Rightarrow -2x \geq -2 \Rightarrow \boxed{x \leq 1} \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leq 1$

soluzione finale: S.V.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 148

Assioma di Dedekind

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$. Supponiamo che $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$ $\boxed{x \leq y}$, allora: $\exists z \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq z \leq y$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ non ha buchi! z è detto "elemento separatore".

È proprio l'assioma di Dedekind che mi permette di rappresentare $\mathbb{R}$ con la retta reale.

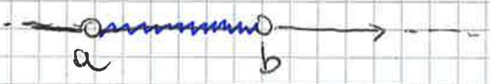
Def. - Intervallo

$I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se $\forall x, y \in I$ con $x < y$ allora l'insieme dei numeri reali compreso tra x e y è contenuto in I. ⊗

Def. Intervalli limitati

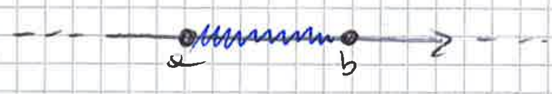
- aperti: $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$ $\Rightarrow (a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

  graficamente



- chiuso: $a, b \in \mathbb{R}$ tale che $a < b$ $\Rightarrow [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

  graficamente



- misti: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

- Ampiezza, si indica con $\text{Amp}([a, b]) = b - a > 0$ se $a < b$

  non cambia se sono aperte o chiuse

⊗ $\boxed{a, b \in I,\ a < b \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \subseteq I}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 148

Inf, Sup, Min, Max

Def - Insiemi limitati

$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

- "A è limitato superiormente" se "$\forall x \in A \; \exists m \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq m$"

  Altrimenti: "A è non limitato superiormente" se "$\exists x \in A$ tale che $\boxed{x > m}$"

  "A è limitato superiormente" se "$\exists m \in \mathbb{R}$ tale che $A \subseteq (-\infty, m]$"

- "A è limitato inferiormente" se "$\forall x \in A \; \exists m \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq x$"

  Equivalentemente se "$\forall x \in A \; \exists m \in \mathbb{R}$ tale che $A \subseteq [m, +\infty)$"

  "Se $\exists m \in \mathbb{R}$ tale che $\boxed{x < m}$, $x \in A$, allora A non è limitato inferiormente".

Esempio per fugare la confusione tra limitatezza e finitezza

$A = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \}$ è un insieme infinito compreso tra 1 e 0, ma è limitato superiormente. È infinito perché contiene infiniti elementi tra $[0, 1]$

Def - Maggioranti, Minoranti, Minimo e Massimo

$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $m \in \mathbb{R}$:

- m è un maggiorante di A se "$\forall x \in A$, $x \leq m$"
- m è un minorante di A se "$\forall x \in A$, $x \geq m$"
- Se $m \in A$ e se $\forall x \in A$, $x \leq m \Rightarrow m$ è il MAX di A.
- Se $m \in A$ e se $\forall x \in A$, $x \geq m \Rightarrow m$ è il MIN di A.

Oss (Spirito di Dedekind)

L'insieme di tutti i minoranti di A è separato dall'insieme di tutti i maggioranti di A. Da ciò segue che:

Se $\exists$ min e max di A $\Rightarrow$ $\boxed{\min A \leq \max A}$

$\rightarrow$ me lo ritrovo con il teorema di Rolle.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 148

Teorema

$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $m \in \mathbb{R}$

(a) Se $m = \min A \Rightarrow m$ è anche inf di A

(b) Se $m = \inf A$ e $m \in A \Rightarrow m = \min A$

(c) Se $m = \max A \Rightarrow m$ è anche sup di A

(d) Se $m = \sup A$ e $m \in A \Rightarrow m = \max$ di A

Dim:

(a) Se $m = \min$ di $A \Rightarrow \forall x \in A$, $x \geq m$. (Inoltre $m \in A$)

D'altra parte m è necessariamente un minorante di A. Se dimostro che m è il massimo dei minoranti allora ho dimostrato anche che m è inf A.

Supponiamo che $\exists$ un minorante $m' \in \mathbb{R}$ tale che $m' \leq x$ $\forall x \in A$ (uso la def di minorante). Ma allora, siccome $m \in A$ deve anche succedere che $m' \leq m$. Da ciò segue che data l'arbitrarietà di m', $m \geq m'$ $\forall m'$ minorante di A. Abbiamo trovato che: $\forall m' \in \{$minoranti di $A\} \Rightarrow m' \leq m$

$\Rightarrow m$ è il max dei minoranti $\Rightarrow m = \inf A$.

(b) Se $m = \inf A$ e $m \in A$, allora $\forall x \in A$, $m \leq x$ ma $m \in A$

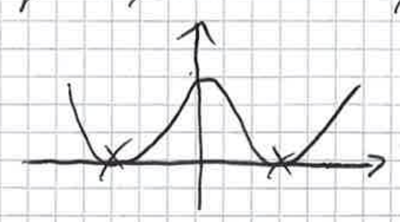
$\Rightarrow$ quindi $m = \min A$ proprio per definizione di min. $\square$

Oss

Se l'estremo inferiore di $A \notin A \Rightarrow \nexists$ minimo di A.

Se il sup $A \notin A \Rightarrow \nexists \max A$

Inf A e sup A, se esistono, sono unici.



la funz. ha 1 minimo ma 2 punti di min

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 148

FUNZIONI

$f: A \to B$

- A insieme di partenza su cui la funzione è definita (dominio, dom(f))
- B si chiama codominio di f ed è l'insieme in cui f restituisce valori
- f è la legge con cui gli elementi di A vengono elaborati ed associati agli elementi di B.

$\boxed{\forall x \in A \ \exists! \ y \in B \text{ tale che } y = f(x)}$ (definizione logica di funzione)

→ Cercare la scala logaritmica. Perché i grafici della scala logaritmica hanno la forma che hanno?

Es. Funzione segno: $\text{Sign}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{Sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \quad \text{(se è positivo)} \\ 0 & \text{se } x = 0 \quad \text{(se è zero)} \\ -1 & \text{se } x < 0 \quad \text{(se è negativo)} \end{cases}$$

Date due funzioni si parla di:

Def - Uguaglianza

$f: A \to B$, $g: A \to B$ dirò che:

"f è uguale a g" se "$\forall x \in A$, $f(x) = g(x)$" Devono anche lo stesso dominio

es. $f(x) = e^x \qquad x \in [0, 1]$

$g(x) = e^x \qquad x \in [-1, 0] \cup [2, +\infty)$

Non sono uguali perché il dominio è diverso.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 148

Calcolo il dominio della seguente funzione:

$f(x) = x^q$ quando dico: $x^q \equiv x^{\frac{n}{m}}$

$q \in \mathbb{Q}$, $q = \frac{n}{m}$ $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$

se $x \geq 0 \Rightarrow n \geq 1$ $n \in \mathbb{N}$

se $x > 0 \Rightarrow n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

se $x < 0$ $f(x) = \sqrt[m]{x^n} \neq x^{\frac{n}{m}}$

se m è dispari $\otimes$

Esempio: $n = 1$ $\Rightarrow q = \frac{1}{3} \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

$m = 3$

prendiamo adesso come esempio $x = -8 \Rightarrow \sqrt[3]{-8} = -2$

$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}}$ Δ $= (-8)^{\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}}$ $\Delta\Delta$ $=$

$= (-8)^{\frac{2}{6}}$ $\Delta\Delta\Delta$ $= \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$

Siamo arrivati a dire $-2 = 2$ IMPOSSIBILE

Al primo Δ non possiamo scrivere la frazione perché la base è negativa. Vedi $\otimes$

Quindi se io scrivo $f(x) = x^q$ con $q \in \mathbb{Q} \Rightarrow \mathrm{dom}(f) = [0, +\infty)$

Oppure il caso in cui $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \mathrm{dom}(f) = (0, +\infty)$

ma se $\boxed{x \in (0,1)} \Rightarrow x^\alpha$ è da intendersi come l'estremo inferiore di x^q, $q \in \mathbb{Q}$, $q \leq \alpha \}$ cioè, $x^\alpha = \inf \{x^q, q \in \mathbb{Q}, q \leq \alpha\}$

Se $x > 1$, $x^\alpha = \sup \{x^q, q \in \mathbb{Q}, q \leq \alpha\}$

Se $\mathbb{Q}$ non fosse denso in $\mathbb{R}$, tutto ciò non avrebbe senso.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 148

Def - Funzione iniettiva

$A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$ $\quad f: A \to B$

"f è iniettiva" se "$\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $\boxed{x_1 \neq x_2}$, $f(x_1) \neq f(x_2)$"

Def - Suriettiva

$A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$ $\quad f: A \to B$

"f è suriettiva" se "$f(A) = \text{im}(f) \equiv B$"

Def - Biezione

$A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$ $\quad f: A \to B$

"f è biettiva se è iniettiva e suriettiva", cioè:

"$\forall x \in A \ \exists! \ y \in B = \text{im}(f)$ tale che $y = f(x)$"

L'unione di due intervalli, in generale, non è un intervallo!

Def - Composizione di funzioni

$A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti $\quad f: A \to B$, $g: B \to C$

$h: g \circ f: A \to C$

es $\quad f(x) = \sqrt{x} = y \qquad g(y) = \dfrac{y^2+1}{y^2-1}$

$$x \xrightarrow{f} \sqrt{x} = y = f(x) \xrightarrow{g} \frac{(\sqrt{x})^2+1}{(\sqrt{x})^2-1} = \frac{x+1}{x-1} = h(x) \ \circledast$$

Per comporre deve succedere che:

$$\text{Im}(f) \cap \text{dom}(g) \neq \emptyset$$

Ma il 1° problema per comporre è: $D = \{x \in \text{dom}(f)$ tale che $y = f(x) \in \text{Im}(f) \cap \text{dom}(g)\}$

$\circledast$ Prima di fare tutto ciò devo: $\text{dom}(f) = [0, +\infty)$, $\text{im}(f) = [0, +\infty)$

$\text{dom}(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 148

Al contrario posso scrivere:

$f^{-1} \circ f : A \to A$ (identità sinistra)

$id_A = f^{-1} \circ f \quad \forall x \in A, \ id_A(x) = x$

es. $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

$\log \circ \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad im(\exp) = dom(\log) \to$ ALLORA POSSO COMPORRE

Si scriverà allora: $id_{\mathbb{R}} = \log \circ \exp$

Invece: $\exp \circ \log : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$

Si scriverà allora: $id_{(0,+\infty)}(x) = x \quad \forall x > 0$

Def - Funzioni monotone

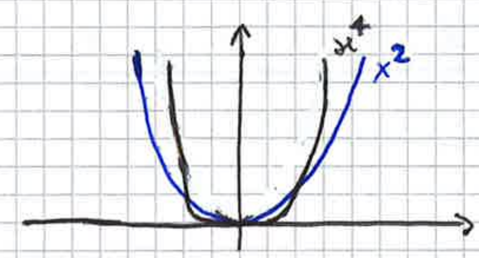
$f : dom(f) \to \mathbb{R}$

- f è monotona crescente se: $\forall x_1, x_2 \in dom(f)$, $\boxed{x_1 < x_2} \Rightarrow \boxed{f(x_1) \leq f(x_2)}$
  - se $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ monotona strettamente crescente.
- f è monotona decrescente se: $\forall x_1, x_2 \in dom(f)$, $\boxed{x_1 < x_2} \Rightarrow \boxed{f(x_1) \geq f(x_2)}$

es. n pari $n \in \mathbb{N}$

$f(x) = x^n$

$f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$

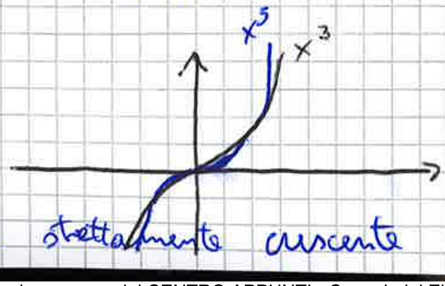


Monotone strettamente decrescenti in $(-\infty, 0)$ e sono monotone strettamente crescente in $(0, +\infty)$

n dispari $n \in \mathbb{N}$

$f(x) = x^n$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Monotona strettamente crescente

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 148

Teorema (Somma, composizione e monotonia)

f	g	$f+g$	$f \circ g$
$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$\nearrow$	$\searrow$	?	$\searrow$
$\searrow$	$\nearrow$	?	$\searrow$
$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Def - Funzione lineare

$f: \text{dom}(f) \to \mathbb{R}$ è lineare se e solo se:

$\forall x_1, x_2 \in \text{dom}(f)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

a patto che $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \text{dom}(f)$

Def - Funzione affine

Una funzione lineare è del tipo $f(x) = ax$ con $a \in \mathbb{R}$. Una funzione affine è del tipo: $f(x) = ax + b$

Un esempio di funzione affine è la trasformazione da gradi Celsius a gradi Farenheit.

$$x\,°C \Rightarrow T^{\circ}_{(x)}\,F = 1{,}8x + 32$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 148

Def - Funzioni limitate e non

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$. Diremo che:

1) f è limitata inferiormente se $\exists\, m \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in dom(f) \Rightarrow$
$$f(x) \geq m$$

2) f è limitata superiormente se $\exists\, m \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in dom(f) \Rightarrow$
$$f(x) \leq m$$

3) f è limitata (sia inferiormente sia superiormente) se $\exists\, m_1, m_2 \in \mathbb{R}$:
$\forall x \in dom(f) \Rightarrow m_1 \leq f(x) \leq m_2$

(*) importante per caratterizzare i limiti

Alternativamente posso dire che: detto $M = \max\{|m_1|, |m_2|\} = |f(x)| \leq M$

(*) me lo ritrovo nella def. di limite e nella condizione di sviluppabilità di una funzione in polinomio di Taylor, con opportuno resto.

Def - Estremi di funzione

$\inf f \equiv \inf(im(f))$ (estremo inferiore di f)

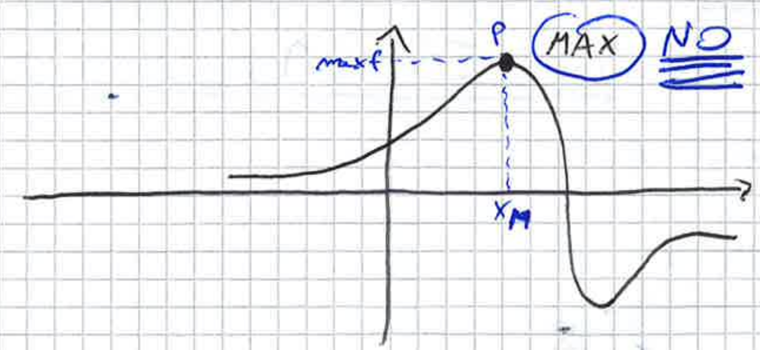
$\sup f \equiv \sup(im(f))$ (estremo superiore di f)

$\inf f = \min f$ se $\inf f \in im(f)$

$\sup f = \max f$ se $\sup f \in im(f)$

⚠ min f e max f se esistono sono punti di $im(f)$,

NON DEL GRAFICO



$P(x_M, \max f)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 148

"$x_0 \in dom(f)$ è pt. di max relativo di f" se "fissato $x_0 \in dom(f)$ $\exists\, I(x_0, \delta)$ t.c. $\forall x \in I(x_0, \delta) \cap dom(f)$, $f(x) \leq f(x_0)$".

Def - Confronto tra funzioni.

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$, $g: dom\, g \to \mathbb{R}$ $\boxed{dom\, f \cap dom\, g \neq \emptyset}$

(a) $f \overset{\geq}{\leq} g \iff \forall x \in dom(f) \cap dom(g)$ $f(x) \overset{\geq}{\leq} g(x)$

(b) date f, g è l'opposta di f se $dom(g) \equiv dom(f)$ e $\forall x \in dom(f)$, $g(x) + f(x) = 0 \to \boxed{g \equiv -f}$

(c) data f, diremo che g è reciproca di f se $g: dom(f) \setminus \{x \in dom(f)$ t.c. $f(x) = 0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) \cdot f(x) = 1$, $\boxed{g(x) = \frac{1}{f(x)}}$

(*) me lo ritrovo nell' eq. differenziali.

(d) date $f: dom(f) \to \mathbb{R}$ e $g: dom(g) \to \mathbb{R}$, la somma:

$s: dom(f) \cap dom(g) \to \mathbb{R}$ $\boxed{s(x) = f(x) + g(x)}$

$s(x) = f(x) + (-g(x)) = \boxed{f(x) - g(x)}$ (differenza)

(e) prodotto $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in dom(f) \cap dom(g)$

(f) rapporto $r(x) = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, $\forall x \in dom(f) \cap dom(g) \setminus \{x : g(x) = 0\}$

(g) $f: dom(f) \to \mathbb{R}$, $g: dom(g) \to \mathbb{R}$. Voglio calcolare:

max $\{f(x), g(x)\} = M(x)$, $M: dom(f) \cap dom(g) \to \mathbb{R}$

min $\{f(x), g(x)\} = m(x)$, $m: dom(f) \cap dom(g) \to \mathbb{R}$

es. $f(x) = -x^2$ $x \in [0, 2]$

$g(x) = x$ $x \in [0, 2]$

min $\{f(x), g(x)\}$, $x \in [0, 1]$ e max $\{f(x), g(x)\}$, $x \in (1, 2]$ $\to$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 148

L'insieme di tutti i punti interni di A si indica con $int(A) = \mathring{A} \subseteq A$

es. $A = [0,1] \cup [3,5]$

$\mathring{A} = (0,1) \cup (3,5)$

Def - Insieme aperto

$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ diremo che A è aperto se $A = \mathring{A}$ (se ogni punto di A è interno ad A)

diremo che A è chiuso se $\complement A = \mathbb{R} \setminus A$ è aperto

Convenzionalmente diciamo che: $\emptyset$, $\mathbb{R}$ sono sia aperti sia chiusi.

Def - Punto isolato ⚠ occhio ai quantificatori

$A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, "x_0 è punto isolato di A" se "$\exists \delta > 0$ tale che

$I(x_0, \delta) \cap A = \{x_0\}$" è un'equazione insiemistica!

Equivalentemente: "$(I(x_0, \delta) \cap A) \setminus \{x_0\} = \emptyset$"

Def - Punto d'accumulazione

$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (può appartenere ad A ma non deve)

"x_0 è punto d'accumulazione per A" se "$\forall \delta > 0$ succede che

$(I(x_0, \delta) \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$" → è una disequazione insiemistica!

(a) mi serve per fare i limiti e per definire le funzioni continue"

Se NON ho punto d'accumulazione NON posso fare i limiti.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 148

Def. - Punto di frontiera

$A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (⚠ NON C'È SCRITTO A)

x_0 è punto di frontiera di A se:

$\forall \delta > 0$, $I(x_0; \delta)$ è tale che: $I(x_0, \delta) \cap A \neq \emptyset$

$I(x_0; \delta) \cap \complement A \neq \emptyset$

L'insieme dei punti di frontiera di A si indica con: ∂A

$\partial A = \{x \in \mathbb{R} : x$ è di frontiera per $A\}$. Si chiama anche bordo di A.

Un punto d'accumulazione può essere un punto di frontiera. Il viceversa non vale, perché può essere isolato.

OSS.

$x_0 \in A$ è isolato $\Rightarrow x_0 \in \partial A$ (punto di frontiera)

$\not\Leftarrow$

$x_0 \notin A$ ma di frontiera di A $\Rightarrow x_0 \in D(A)$ (punto d'accumulazione)

$\not\Leftarrow$

TEOREMA - Caratterizzazione dei punti (teorema del $18 \pm \varepsilon$)

$A \subseteq \mathbb{R}$ allora:

(a) $A \subseteq \text{int}(A) \cup \partial A$

(b) A è chiuso $\Leftrightarrow \partial A \subseteq A$ nel qual caso $A = \text{int}(A) \cup \partial A$

DIM:

(a) Per assurdo neghiamo la tesi. Allora, diciamo che: "$A \not\subseteq \text{int}(A) \cup \partial A$"

Ossia "$\exists x_0 \in A$ tale che $x_0 \notin \text{int}(A) \cup \partial A$", quindi posso dire che:

"$x_0 \notin \text{int}(A)$ e $x_0 \notin \partial A$" quando nego interseco quando affermo unisco.

Dalla conclusione "$x_0 \notin \text{int}(A)$" ["x_0 non è punto interno"] segue che "$\forall \delta > 0$, $I(x_0, \delta) \not\subseteq A$" $\Rightarrow$ ["$I(x_0, \delta)$ trasborda e invade $\complement A$"]

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 148

quindi "$I(x_0, \delta)$ fuoriesce da CA" ossia "$A \cap I(x_0, \delta) \neq \phi$"
Poiché $x_0 \in CA$ allora: "$CA \cap I(x_0, \delta) \neq \phi$ e $A \cap I(x_0, \delta) \neq \phi$"
Ma questa la definizione di punto di frontiera $\Rightarrow x_0 \in \partial A$.
e poiché, per ipotesi $\partial A \subseteq A$, allora concludiamo che $x_0 \in A$
Ma questo è assurdo perché avevamo detto $x_0 \in CA$.
Pertanto è vero che CA è aperto e quindi A è chiuso.

Dim "A chiuso $\Rightarrow A = \text{int}(A) \cup \partial A$"

In generale $A \subseteq \text{int}(A) \cup \partial A$ e $\text{int}(A) \subseteq A$ (contenuto). Inoltre se A è chiuso, $\partial A \subseteq A$ e quindi $A \supseteq \text{int}(A) \cup \partial A$ (contiene)

Pertanto $A = \text{int}(A) \cup \partial A$

$\square$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 148

CASO 1:

$x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$

- $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in (\mathrm{dom}(f) \cap I(x_0, \delta)) \setminus \{x_0\}$: $\boxed{|f(x) - \ell| < \varepsilon}$

CASO 2/3:

$x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$ / $-\infty$

- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

$\forall a \in \mathbb{R} \; \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in (\mathrm{dom}(f) \cap I(x_0, \delta)) \setminus \{x_0\}$: $\boxed{f(x) \gtrless a}$

CASO 4:

$x_0 = +\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$

- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap (m, +\infty)$, $x > m$: $\boxed{|f(x) - \ell| < \varepsilon}$

CASO 5:

$x_0 = -\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$

- $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell}$

$\forall \varepsilon > 0$: $\forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap (-\infty, m)$, $x < m$: $\boxed{|f(x) - \ell| < \varepsilon}$

CASO 6/7:

$x_0 = +\infty$, $\ell = \pm\infty$

- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

$\forall a \in \mathbb{R} \; \exists m \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x > m$: $f(x) \lesseqgtr a$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 148

② $l_2 - \frac{l_1-l_2}{2} < f(x) < l_2 + \frac{l_1-l_2}{2}$

$$\frac{3l_2 - l_1}{2} < f(x) < \frac{l_2+l_1}{2}$$

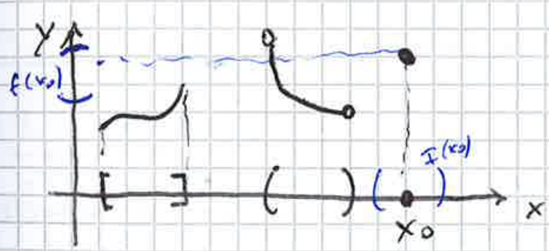
Ma ciò è assurdo $\Rightarrow$ è vero che $\boxed{l_1 = l_2}$ $\square$

Def - Funzione continua

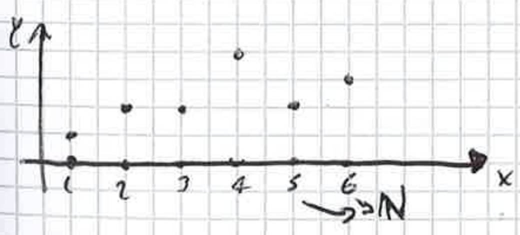
$f: dom(f) \to \mathbb{R}$

$\boxed{x_0 \in dom(f)}$ IMPORTANTISSIMO!

"f è continua in x_0" significa che "$\forall I(f(x_0))\ \exists I(x_0)$ tale che $\forall x \in (dom(f) \cap I(x_0))$, $f(x) \in I(f(x_0))$".



La funzione è continua



Anche le successioni sono continue nella loro topologia! Così per insiemi discreti.

- Se $x_0 \in dom(f)$ è p.to di accumulazione per $dom(f)$, allora dire che: "f è continua in x_0" significa che "$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$".

Teorema

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 p.to di accumulazione per $dom(f)$. Allora:

(a) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \forall x \in dom(f) \setminus \{x_0\} \\ l, & x = x_0 \end{cases}$

$\hat{f}$ è continua in x_0.

La definizione della funzione $\hat{f}$ si chiama "prolungamento per continuità di f in x_0".

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 148

Def - Limite sinistro

$f : dom(f) \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$ p.to di accumulazione per $dom(f) \cap (-\infty, x_0)$

$l \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora la locuzione:

"f ha limite sinistro l, per $x \to x_0$" significa che " $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ e

$\forall I(l)\ \exists I^-(x_0)$ tale che $\forall x \in dom(f) \cap I^-(x_0)$, $f(x) \in I(l)$

Es. $l \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in D(dom(f) \cap (x_0, +\infty))$, allora la locuzione:

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ si traduce in termini di ε, così:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in dom(f) \cap (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow \boxed{|f(x) - l| < \varepsilon}$

$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

- $l = -\infty$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$, tale che $\forall x \in dom(f) \cap (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) < a$

⊗ ce le ritroviamo nei limiti di successione.

- $x \to x_0^+ \Rightarrow x \in dom(f) \cap (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow x \to x_0$, $x > x_0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 148

Def - Continuità destra e sinistra

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$

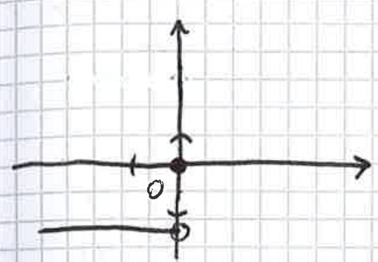
$x_0 \in dom(f)$

• "f è continua da destra in x_0" se "$f_{|dom(f) \cap [x_0, +\infty)}$ è continua in x_0".

• "f è continua da sinistra in x_0" se "$f_{|dom(f) \cap (-\infty, x_0]}$ è continua in x_0".

es. $f(x) = sign(x)$

$\mathbb{R} \cap (-\infty, x_0] = (-\infty, x_0]$



DIM: per assurdo e fisso $\epsilon = \frac{1}{2}$ e trovo valori di x tali che:

$f(x) = sign(x) = -1 \notin (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

La funzione sign(x) non è continua né da sinistra né da destra.

Def - Asintoti verticali, orizzontali -

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per $(-\infty, x_0) \cap dom(f)$ e per $dom(f) \cap (x_0, +\infty)$

• $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ oppure $-\infty$ $\Rightarrow \exists$ ASINTOTO VERTICALE DESTRO ⊛

• $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ oppure $-\infty$ $\Rightarrow \exists$ ASINTOTO VERTICALE SINISTRO ⊛⊛

La retta di equazione $x = x_0$ è asintoto verticale destro ⊛

La retta di equazione $x = x_0$ è asintoto verticale sinistro ⊛⊛

Se sono uguali allora avrò un asintoto verticale.

⚠ Non vi azzardate a calcolare asintoti orizzontali per funzioni definite su domini limitati.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 148

Def - Punto di discontinuità di prima specie

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$

$x_0 \in dom(f)$ punto d'accumulazione per $dom(f)$

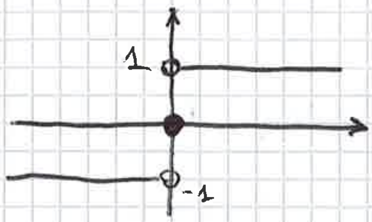
Dire che "x_0 è punto di discontinuità di prima specie" significa che

"$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_+ \in \mathbb{R}$ "

$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_- \in \mathbb{R}$ MA $l_+ \neq l_-$

Si definisce funzione salto: $S(x_0) = \left| \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x) \right|$

es.



In questo caso posso solo eliminare mezza discontinuità e renderla continua o solo da dx o solo da sx, ma non globalmente!

Def - Punto di discontinuità di seconda specie

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$

$x_0 \in dom(f)$ punto d'accumulazione per $dom(f)$

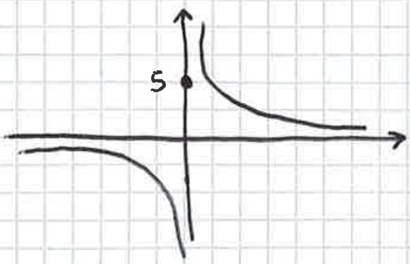
Dire che "x_0 è punto di discontinuità di seconda specie" significa che

"o almeno uno dei due limiti laterali di f per $x \to x_0$ è $+\infty$ o $-\infty$

oppure almeno uno dei due limiti laterali non esistono".

es. $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}, & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 5, & x = 0 \end{cases}$$



$\boxed{\text{In questo caso non si può eliminare la discontinuità, in nessun modo!}}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 148

- Se f è continua in x_0 punto isolato di dom (f) il teorema si riformula come segue:

Supponiamo di prendere $I(x_0)$ tale che $\text{dom}(f) \cap I(x_0) = \{x_0\}$, poiché $f(x_0) \in \mathbb{R}$, allora possiamo dire che f è banalmente limitata in $\text{dom}(f) \cap I(x_0) = \{x_0\}$

- Se f è continua in x_0 e x_0 è p.to d'accumulazione per dom (f) allora $f_{|\text{dom}(f) \cap I(x_0)}$ è limitata e non occorre escludere x_0 perché, essendo $f(x_0) \in \mathbb{R}$, x_0 non contribuisce a rendere f illimitata.

Teorema - Permanenza del segno (teorema della patina)

$f: \text{dom}(f) \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ p.to d'accumulazione per dom (f)

Hp. $\exists\, l \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Tesi
- Se $l \in \mathbb{R}$ $l > 0$ oppure $l = +\infty$ $\Rightarrow \exists\, I(x_0)$ tale che $\boxed{f(x) > 0}$ $\forall x \in (\text{dom}(f) \cap I(x_0)) \setminus \{x_0\}$
- Se $l \in \mathbb{R}$ $l < 0$ oppure $l = -\infty$ $\Rightarrow \exists\, I(x_0)$ tale che $\boxed{f(x) < 0}$ $\forall x \in (\text{dom}(f) \cap I(x_0)) \setminus \{x_0\}$

DIM:

* $l \in \mathbb{R}$, $l > 0$

Poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, I(x_0) : \forall x \in (\text{dom}(f) \cap I(x_0)) \setminus \{x_0\}$,

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

è sufficiente prendere $\varepsilon = \frac{l}{2} \Rightarrow 0 < \frac{l}{2} < f(x) < \frac{3}{2} l$

x_0] Siccome $l > 0 \Rightarrow$ lo è anche $\frac{l}{2}$ ok! dimostrato.

Pertanto $f(x)$ è positiva in $(\text{dom}(f) \cap I(x_0)) \setminus \{x_0\}$ se il suo $\lim_{x \to x_0} f(x)$ $\exists$ ed è finito e positivo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 148

SIMBOLI DI LANDAU

Def - "o-piccolo"

$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$; $f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ p.to di accumulazione per A. Diciamo che:

"f è o-piccolo di g, $x \to x_0$" e scriviamo $\boxed{f = o(g)}$ se

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

considero la classe di funzioni tali che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

es.

$g(x) = x$ $\qquad x_0 = 0$

$f_n(x) = x^n$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$ $\qquad f_n(x) = o(g)$, $x \to 0$

perché: $\lim_{x \to 0} \frac{x^n}{x} = \lim_{x \to 0} x^{n-1} = 0$

Se $x^n = o(x)$, $x \to 0$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$ anche $-x^n = o(x)$, $x \to 0$

Quindi $\quad o(x) = o(x)$ $\quad -o(x) = o(-x)$

$o(x) + o(x) = 2\,o(x) = o(2x) = o(x)$

$o(x) - o(x) = o(x) + o(-x) = o(x) + o(x) = 2\,o(x) = o(2x) = o(x) \neq 0$

Se consideriamo x^n, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$ e x^m, $m > 1$, $m \in \mathbb{N}$ $m \neq n$

$\Rightarrow$ $x^n = o(x)$, $x \to 0$; $x^m = o(x)$, $x \to 0$ $\quad \cancel{\Leftrightarrow}$ $x^n \neq x^m$

es. $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in D(A)$ p.to acc.

Suppongo che: $f = o(g)$, $x \to x_0$; $g = o(h)$, $x \to x_0$ $\quad \Rightarrow f = o(h)$, $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{h(x)} = \underbrace{\left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\right)}_{0} \underbrace{\left(\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)}\right)}_{0} = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 148

OSSERVAZIONE

è giusto così!

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)+\cancel{o(f_1(x))}}{g_1(x)+\cancel{o(g_2(x))}}$$

l'uguaglianza è tra i limiti

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

es.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\sin(x)}{x^2-\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)+x}{o(x)-x} \overset{\text{P.E.T.T.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x}{-x} = -1$$

Def - Funzioni EQUIVALENTI

$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in D(A)$

$f, g : A \to \mathbb{R}$

Diciamo che "f è equivalente a g, per $x \to x_0$, e scriviamo $f \sim g$, $x\to x_0$,

se $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$ $\not\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \left(f(x)-g(x)\right) = 0$

Se fosse vero, allora f e g sarebbero più che equivalenti, sarebbero asintotiche.

Se $f \sim g$, $x \to x_0$ $\Rightarrow f = g + o(g)$, $x \to x_0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 148

Def - Funzioni campione

$$x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \text{"infinito campione"} & u(x) = \dfrac{1}{|x-x_0|} \\ \text{"infinitesimo campione"} & u(x) = |x-x_0| \end{cases}$$

$$x_0 = \pm\infty \Rightarrow \begin{cases} \text{"infinito campione"} & u(x) = |x| \\ \text{"infinitesimo campione"} & u(x) = \dfrac{1}{|x|} \end{cases}$$

Def - Parte principale

$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in D(A)$

- $f : A \to \mathbb{R}$ è un infinito di ordine $\alpha > 0$ rispetto all'infinito campione $u(x)$, per $x \to x_0$, se: $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{l\,[u(x)]^\alpha} = 1$, $l \neq 0$

La funz. $P_\alpha(x) = l\,[u(x)]^\alpha$ si chiama parte principale di f, per $x \to x_0$

$$f \sim l\,[u(x)]^\alpha = P_\alpha(x), \quad x \to x_0$$

- $f : A \to \mathbb{R}$ è un infinitesimo per $x \to x_0$ in maniera analoga

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 148

es. $a_n = (-1)^n \quad , n \geq 1$

Questa successione è oscillante, è limitata ma non ha limite. (non converge)

Def - Successione convergente

$\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$

se $\lim_n a_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \{a_n\}$ è convergente in $\mathbb{R}$.

se $\lim_n a_n = \pm\infty \Rightarrow \{a_n\}$ è divergente positivamente
è divergente negativamente

se $\nexists$ limite di a_n, $n \to +\infty$, $\{a_n\}$ è indeterminata. Una successione oscillante come $(-1)^n$ è indeterminata.

$(-1)^n = \cos(n\pi)$

esempio: $a_n = \frac{1}{n}$ convergente, con $n \geq 1$

$a_n = n^2$ divergente pos.

$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ convergente

$a_n = -n!$ divergente negativamente.

Le successioni sono funzioni continue nella topologia di $\mathbb{N}$ perché costituite da punti isolati.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 148

DIM $\Leftarrow$)

Hp. $\forall x_n \subseteq A \setminus \{x_0\}$ tale che $\lim_n x_n = x_0$, $\lim_n f(x_n) = \ell$

Tesi: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

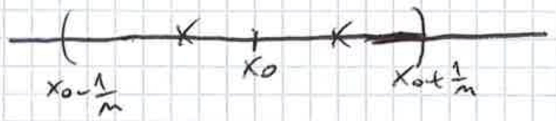
Si ragiona per assurdo, cioè non è vero che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e si scrive

$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \ell \Rightarrow \exists\, I(\ell)$ t.c. $\forall x \in (A \cap I(x_0)) \setminus \{x_0\}$, $f(x) \notin I(\ell)$

Supponiamo che $x_0 \in \mathbb{R}$, ma essendo arbitrario, scegliamo:

$$I(x_0) = I_n(x_0) = \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\forall x \in \left(A \cap \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)\right) \setminus \{x_0\} \quad f(x) \notin I(\ell)$$



tutti i punti si addensano su x_0 per il semplice fatto di aver scelto quell'intorno.

Abbiamo generato una successione $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ tale che $x_n \in I_n(x_0) \setminus \{x_0\}$

cioè $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$

per $n \to +\infty$ il 2° teorema del confronto implica che $x_n \to x_0$, $n \to +\infty$

Quindi:

$\lim_n f(x_n) = \ell \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \quad \underline{f(x_n) \in I(\ell)}$

ma questo è assurdo! perché $f(x) \notin I(\ell)$

Allora deve essere $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ $\square$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 148

Teorema - Criterio del rapporto

$\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Hp. $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

Tesi
- Se $l < 1 \Rightarrow \lim_n a_n = 0$
- Se $l > 1 \Rightarrow \lim_n a_n = +\infty$
- Se $l = 1 \Rightarrow$ BOH!

es $a_n = \frac{b^n}{n!}$, $b > 0$ $\lim_n \frac{b^n}{n!} = ?$

$a_{n+1} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{b^n} =$

$= \frac{\cancel{b^n} \cdot b}{(n+1)\cancel{n!}} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{b^n}} = \frac{b}{n+1}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b}{n+1} = o(1)$, $n \to +\infty$

Infatti $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{b}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \lim_n a_n = \lim_n \frac{b^n}{n!} = 0$

Un importante vademecum sulla scala di infiniti per successioni.

- n^n
- $n!$
- a^n , $a > 1$
- n^k , $k > 0$
- $\log(n)$, $n \geq 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 148

Prendiamo $n = 1$

$$n! > c^n \Rightarrow \sqrt[n]{n!} > c$$

Abbiamo trovato che $\forall c > 0$ (perché c è arbitrario) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_0$ $\sqrt[n]{n!} > c$ ma allora ho trovato la def. di limite.

$$\lim_n \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

es. $a_n = \sqrt[n^2]{n!}$ $\qquad \lim_n \sqrt[n^2]{n!} = ?$

$$1 \leq n! \leq n^n \qquad \forall n \geq 1$$

$$1 \leq \sqrt[n^2]{n!} \leq (n^n)^{\frac{1}{n^2}} = n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n}$$

$$\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$$

Per il 2° teorema del confronto si ha che:

$$n \to +\infty, \qquad \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{1} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n^2]{n!}} \leq \sqrt[n]{n} \to 1$$

$$\lim_n \sqrt[n^2]{n!} = 1$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 148

Prendiamo $m = 1$

$$n! > c^n \Rightarrow \sqrt[n]{n!} > c$$

Abbiamo trovato che $\forall c > 0$ (perché c è arbitrario) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_0$ $\sqrt[n]{n!} > c$ ma allora ho trovato la def. di limite.

$$\lim_n \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

es. $a_n = \sqrt[n^2]{n!}$ $\qquad \lim_n \sqrt[n^2]{n!} = ?$

$$1 \leq n! \leq n^n \qquad \forall n \geq 1$$

$$1 \leq \sqrt[n^2]{n!} \leq (n^n)^{\frac{1}{n^2}} = n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n}$$

$$\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$$

Per il 2° teorema del confronto si ha che:

$n \to +\infty$, $\quad 1 \leq \sqrt[n^2]{n!} \leq \sqrt[n]{n} \to 1$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \\ \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 1 & \end{array}$$

$$\lim_n \sqrt[n^2]{n!} = 1$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 148

$\exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b) \Rightarrow f(x) < 0$

Allora $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq A$ Conclusione assurda! Infatti consideriamo $(x_0, x_0 + \delta)$ e osserviamo che esistono $x > x_0$ tali che $f(x) < 0$, $x_0 \in A$

Ma questo risultato è in contraddizione con il fatto che x_0 è sup A.

Pertanto $f(x_0) \geq 0$

⑦ Se $f(x_0) > 0$, allora per il teorema della permanenza del segno $\exists \delta > 0$ (non è il δ precedente) tale che $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x) > 0$

Inoltre $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$

Allora $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A = \emptyset$, in particolare $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ si ha che $f(x) > 0$ e che $x \notin A$ Questo è assurdo, quindi non è compatibile con la definizione di sup.

Quindi deve succedere che $f(x_0) = 0$. Se f è strett. monotona e quindi anche continua, allora x_0 è unico! Infatti $\forall x \neq x_0$ $f(x) \neq f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$ $\square$

es.

$e^x + x = 0$ Non si risolve con i metodi classici! Ma posso risolverla con il teorema degli zeri.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = e^x + x = 0$

Cerchiamo $x \in [-1, 0]$, $f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ sicuramente

$f(0) = 1$

Allora mi trovo nel caso in cui $f(-1) \cdot f(0) < 0$ e posso applicare il teorema. Allora $\exists x_0 \in (-1, 0)$ tale che $f(x_0) = 0$, per esempio $[-1, -1/2]$

$$\left.\begin{aligned} f(-1) &= \frac{1}{e} - 1 < 0 \\ f\left(-\tfrac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2} > 0 \end{aligned}\right\}$$

cerco un altro numero tra questi due $\exists x_1 \in [-1, -\frac{1}{2}]$ tale che $f(x_1) = 0$

Continuiamo così iterando con intervalli sempre più piccoli purché $f(x_1) f(x_2) < 0$

Ho creato due successioni! La funz. è monotona e quindi $f(x_0)$ è unico!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 148

la successione ammette limite $= -\infty = \inf A$.

Teorema di Weierstrass

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funz. continua

$\Rightarrow \exists$ minimo e massimo assoluto, $m = \min\limits_{[a,b]} f$ e $M = \max\limits_{[a,b]} f$

$\exists\, x_m \in [a,b]$ tale che $f(x_m) = m = \min\limits_{[a,b]} f$

$\exists\, X_M \in [a,b]$ tale che $f(X_M) = M = \max\limits_{[a,b]} f$

Poiché f è definita in $[a,b] \Rightarrow \mathrm{im}(f)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 148

Def - Derivata laterale

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$

$x_0 \in dom(f)$, $\exists \delta > 0$ tale che $[x_0, x_0+\delta) \subseteq dom(f)$

Se esiste finito il limite $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ diremo che f è derivabile da destra, o che f ha derivata destra, in $x = x_0$. In tal caso si pone $f'_+(x_0) \equiv D_+ f(x_0)$

$$f'_+(x_0) \equiv D_+ f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Se $\exists \delta > 0$ tale che $(x_0-\delta, x_0] \subseteq dom(f)$ e se $\exists$ finito il limite laterale $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ diremo che f è derivabile da sinistra, o che f ha derivata sinistra, in $x = x_0$. In tal caso si pone $f'_-(x_0) \equiv D_- f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

TEOREMA - Derivabilità e continuità

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$

$x_0 \in int(dom(f))$

Hp. f è derivabile in x_0.

Tesi. f è continua in x_0.

DIM:

Poiché $x_0 \in int(dom(f)) \Rightarrow$ possiamo caratterizzare la continuità di f in x_0 attraverso il limite. Deve succedere che: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ciò significa che $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ ma adesso nulla vieta di calcolare così:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) \overset{f \text{ è derivabile in } x_0}{=} \underbrace{\left[\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]}_{\in \mathbb{R}} \lim_{x \to x_0}(x-x_0) = f'(x_0) \lim_{x \to x_0}(x-x_0) = 0$$

$\square$

Se f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ è continua in x_0

$\not\Leftarrow$

Se f non è continua in $x_0 \Rightarrow f$ non è derivabile in x_0

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 148

esempio: $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
$h_1, h_2 \in T_{x_0}\mathbb{R}$

$$df(x_0)(c_1h_1 + c_2h_2) = f'(x_0)(c_1h_1 + c_2h_2) = c_1 f'(x_0)h_1 + c_2 f'(x_0)h_2 =$$
$$= c_1 df(x_0)(h_1) + c_2 df(x_0)(h_2)$$

$id(x) = x \qquad id'(x) = 1$

$$d\,id(x_0)(h) = \underbrace{id'(x_0)}_{\equiv 1}h = h \quad \Rightarrow h = d\,id(x_0)(h)$$

$df(x_0)(h) = f'(x_0)\,d\,id(x_0)(h)$ siccome deve valere per ogni x_0 e $\forall h$.

$df = f'\,d\,id$, ma con abuso di notazione scriviamo

$$\boxed{df = f'dx}$$

Teorema - Derivata, continuità e derivate laterali

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$
$x_0 \in int(dom(f))$

Hp. $\exists f'_+(x_0), f'_-(x_0)$, cioè esistono le derivate laterali.

Tesi
- f è continua in x_0 [È sufficiente avere l'esistenza delle derivate laterali per avere la continuità della funzione in x_0]
- f è derivabile in $x_0 \iff f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ e in tal caso poniamo:
$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

DIM: Ovvia.

Def. - Derivabilità (in dom f)

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$

Se f è derivabile in ogni punto di $dom(f)$ allora "f è derivabile in tutto $dom(f)$"

Nei punti di frontiera in cui ha senso parlare di derivata, la derivata è quella laterale opportuna.

Se f è derivabile su tutto $dom(f) \Rightarrow dom(f') \equiv dom(f)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 148

esempio: $\sqrt[3]{x^2}$

$$\lim_{x\to 0^-} R(x,0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

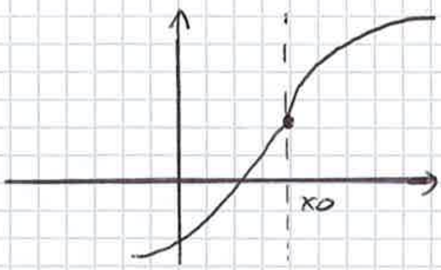
Def - Punto di flesso a tangente verticale

$f : dom(f) \to \mathbb{R}$

$x_0 \in int(dom(f))$

x_0 è punto di flesso a tangente verticale se:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-} R(x,x_0) = \pm\infty \quad e \quad \lim_{x\to x_0^+} R(x,x_0) = \pm\infty}$$

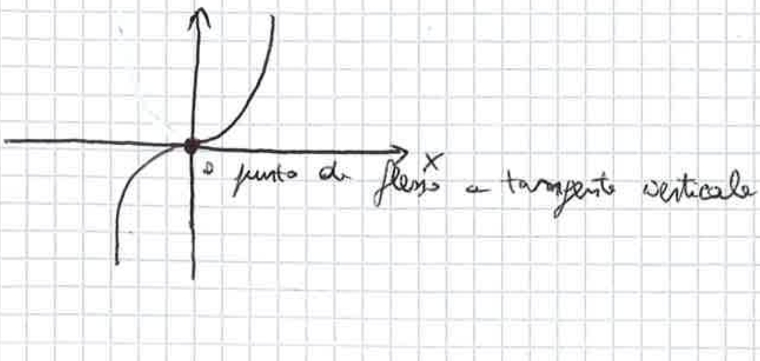


esempio:

$f(x) = x|x|$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}|x|}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} |x| = 0$$

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ -x^2 & , x < 0 \end{cases}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 148

Teorema - Derivazione della funzione composta

$f : dom(f) \to \mathbb{R}$
$g : dom(g) \to \mathbb{R}$ | $im(f) \subseteq dom(g)$ cond. per fare la composizione.

$x_0 \in int(dom(f))$

$y_0 = f(x_0) \in int(im(f))$

Hp. • f è derivabile in x_0
• g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$

Tesi: $g \circ f$ è derivabile in x_0 e risulta: $\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$

DIM:

$y_0 \in dom(g)$ e sfruttiamo la derivabilità di g in x_0. Per la 1ª formula dell'incremento finito, avviene che:

$$\forall y \in dom(g) \Rightarrow g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y-y_0) + o(y-y_0), \quad y \to y_0$$

Se $y_0 \in im(f) \Rightarrow \exists x_0 \in dom(f)$ tale che $f(x_0) = y_0$
Prendo $y = f(x) \in im(f) \subseteq dom(g)$

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + o(f(x) - f(x_0)), \quad x \to x_0$$

dividiamo per $(x - x_0)$:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + o\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right), \quad x \to x_0$$

Calcolo il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + \underbrace{\lim_{x \to x_0} o\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)}_{\text{tende a } 0} =$$

allora esiste finito:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) f'(x_0) = (g \circ f)'(x_0)$$

□

Questo teorema è detto anche chain rule.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 148

es. $f: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f(x) = \arctan(x)$ $\qquad x = f^{-1}(\underset{f(x)}{y})$, $f^{-1}(y) = \tan y$

$f'(x) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{\cos^2 y} = \dfrac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} =$

$= [\tan y]^2 + 1$

$(f^{-1})'(f(x)) = 1 + [\tan(\arctan x)]^2 = 1 + x^2$

TEOREMI SUL CALCOLO DIFFERENZIALE

Def - Punto di min locale e punto di max locale

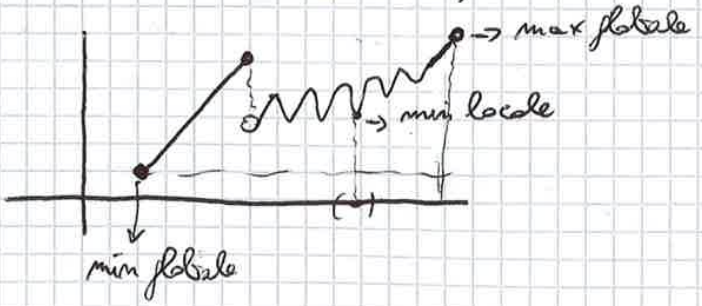
$f: \text{dom}(f) \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \text{dom}(f)$

- x_0 è punto di min locale se $\exists\, \delta > 0$ tale che $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \text{dom}(f)$
  $f(x) \geq f(x_0)$
- x_0 è punto di max locale per f se $\exists\, \delta > 0$ tale che $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \text{dom}(f)$
  $f(x) \leq f(x_0)$

Tali punti sono chiamati anche punti di estremo locale

es.



C'è qualche legame tra punti di min e max locale con i punti critici?

Può essere.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 148

Punti critici sono candidati ad essere punti di estremo.

Teorema di Rolle

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

Hp. a) f è continua in $[a,b]$

b) f è derivabile in (a,b)

c) $f(a) = f(b)$ ★ (→ garantisce che quando i punti di min e max non coincidono con l'intervallo, allora sono punti interni e si può applicare il teorema di Fermat.)

Tesi: $\exists\, x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0) = 0$

DIM:

Poiché f è continua in $[a,b] \Rightarrow$ per il teorema di Weierstrass $\exists$ $x_m \in [a,b]$ e $x_M \in [a,b]$ tali che $f(x_m) = \min_{[a,b]} f$ e $f(x_M) = \max_{[a,b]} f$

Pertanto $\forall x \in [a,b]$, $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$

Distinguiamo due casi:

① x_m e x_M coincidono con a e b.

Allora per l'ipotesi c) $\Rightarrow f(x_m) = f(x_M)$

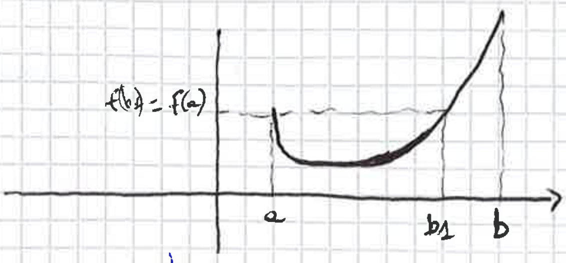
Quindi f è costante in $[a,b] \Rightarrow \forall x \in (a,b) \Rightarrow f'(x) = 0$

② x_m e x_M sono punti di (a,b) [almeno uno tra x_m e x_M è interno ad $[a,b]$]

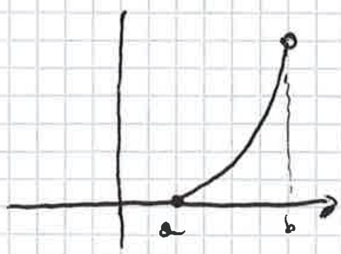
Supponiamo che $x_M \in (a,b)$ e siccome è punto di max

$\Rightarrow$ essendo f derivabile in tutto (a,b) e quindi anche in x_M, allora per il teorema di Fermat $f'(x_M) = 0$

□



↓ TROVO SEMPRE UN INTERVALLO $[a, b_1]$



↓ NO ROLLE

SI WEIERSTRASS

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 148

Teorema - Legame tra MONOTONIA e SEGNO DELLA DERIVATA

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e $f: I \to \mathbb{R}$

- f derivabile in I, $\forall x \in I$.

Hp. — Tesi

a) Se f è crescente su I $\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

Se f è decrescente su I $\Rightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

b) Se $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ è crescente su I

Se $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ è decrescente su I

c) Se $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ è strettamente crescente su I

Se $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ è strettamente decrescente su I

DIM: (a) caso funz. crescente

Prendiamo $x_0, x \in I$, $x < x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0$

$\Rightarrow R_f(x,x_0) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, $\forall x \in I$ tale che $x < x_0$.

Poiché f è derivabile in x_0 (punto interno) $\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} R_f(x,x_0)$ e $\lim_{x\to x_0} R_f(x,x_0) = \lim_{x\to x_0^-} R_f(x,x_0) =$

$= f'(x_0)$ e per il corollario del teorema della permanenza del segno, posso dire che $\Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

Poiché x_0 è arbitrario posso estendere il risultato a tutte le $x \in I$, quindi $f'(x) \geq 0$.

DIM: (b)

Prendiamo $x_0, x \in \mathring{I}$, $x > x_0$ e invochiamo la 2ª formula dell'incremento finito. $\exists\ t \in (x_0, x)$ tale che

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{f'(t)}_{\geq 0}\ \underbrace{(x-x_0)}_{\geq 0} \geq 0$$

per ipotesi

$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f$ crescente su I;

Se $f'(t) > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f$ è strettamente crescente su I $\square$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 148

DIM: a) caso 2.

Prendiamo $h = f_{|[x,b]}$

$$h(b) - h(x) = f(b) - f(x) = \underbrace{h(\tau)}_{\geq 0}\underbrace{(b-x)}_{\geq 0}, \quad \tau \in (x,b)$$

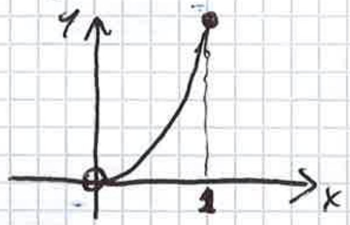
$\Rightarrow f(b) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(b) \geq f(x)$

$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, $\forall x \in [a,b]$ □

⚠ ⚠ OSSERVAZIONE

Il teorema anti-taroccamento richiede la continuità su tutto $[a,b]$, mentre è sufficiente la derivabilità in (a,b).

es.



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ x^2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

perché se prendo $I = (0,1] \Rightarrow$ posso utilizzare il teorema, su I NON su $[a,b]$

Su $[0,1]$ NON VALE il teorema "anti-taroccamento"

Teorema - Ricerca di punti di max e min

$f: \text{dom}(f) \to \mathbb{R}$

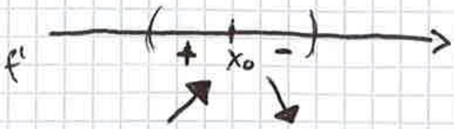
$I \subseteq \text{dom}(f)$

$x_0 \in \mathring{I}$ (insieme dei punti interni)

⚠⚠⚠ f continua su I e derivabile in $I \setminus \{x_0\}$ (perché x_0 può essere punto di non derivabilità)

a) Se $f'(x) > 0$ $\forall x \in I$, $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ $\forall x \in I$, $x > x_0$

$\Rightarrow x_0$ è punto di max locale per f



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 148

Teorema - Funzioni costanti

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I e tale che $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$

$\Rightarrow$ f è costante in I.

DIM:

Siano $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 < x_2 \Rightarrow \exists\, t \in (x_1, x_2)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(t)}_{=0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \qquad \square$$

esempio:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

è la restrizione della funzione segno privata dello zero.

$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

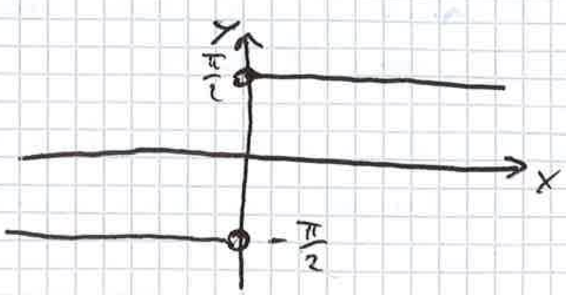
$f'(x) = 0$, $\forall x \in \text{dom}(f)$ ma non è costante.

$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad \text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(1) = \underbrace{\arctan(1)}_{\frac{\pi}{4}} + \underbrace{\arctan(1)}_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\cancel{x^2}}{x^2+1}\,\frac{1}{\cancel{x^2}} = 0$$

Globalmente NON è costante.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 148

es. di errore

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x+3} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos(x)}{1} = \cancel{\exists} \quad \text{NO!!}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x+3} = 1$$

NON SODDISFA L'IPOTESI c).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$ NO! il limite fa 1.

Teorema - Derivabilità di una funzione mediante il limite della derivata

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$f : I \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathring{I}$

Hp. a) f è continua su I

b) f è derivabile su $I \setminus \{x_0\}$ (so per certo che f è derivabile su tutto $I \setminus \{x_0\}$)

c) $\exists \lim_{x\to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$

Tesi f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = l$, e f' è continua in x_0.

DIM:

Per dimostrare la derivabilità di f in x_0 $\Rightarrow$ dobbiamo dimostrare che $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \exists$ finito. Siccome f è continua in x_0, allora

$\lim_{x\to x_0} f(x) \equiv f(x_0)$. ⚠ Grazie alla continuità di f in x_0, è soddisfatta la prima ipotesi del teorema di de L'Hôpital per forme indeterminate zero/zero.

Poiché f è derivabile in $I(x_0)\setminus\{x_0\}$ e la funz. $g(x) \equiv x - x_0$ è derivabile in $I(x_0)$ con $g'(x) = 1 \neq 0$ $\Rightarrow$ vale la 2ª ip. di de L'Hôpital

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{?}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$$ allora

per l'ipotesi c

vale la 3ª ipotesi di de L'Hôpital. Quindi $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 148

esempio:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

f è continua in 2\^o.

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow f \text{ è continua}$$

Studio la derivabilità:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 0 \Rightarrow f \text{ è derivabile e } f'(0) = 0$$

NON POSSO UTILIZZARE IL TEOREMA, guardiamo cosa succede:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \nexists$$

$\exists\, f'(0) = 0 \neq \lim_{x\to 0} f'(x) = \nexists$ in $x = 0$ la f' ha un punto di discontinuità di 2ª specie.

Teorema - Discontinuità della derivata

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto

$f: I \to \mathbb{R}$ derivabile

Tes: f' non può avere punti di discontinuità eliminabili né punti di discontinuità di prima specie.

f' può avere solo punti di discontinuità di 2ª specie nel senso che se x_0 è punto di discontinuità per f' $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f'(x) \nexists$$

DIM:

Prendo $x_0 \in \mathring{I}$ di discontinuità per f'. Dico che x_0 non è un punto di discontinuità eliminabile.

Suppongo per assurdo che lo sia. Quindi:

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R} \neq f'(x_0)$$

CONTINUA →

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 148

Def - Asintoti obliqui

Sia f una funz. a valori reali con dom (f) illimitato inferiormente e/o superiormente e tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{oppure} \\ -\infty \end{cases}$ oppure $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{oppure} \\ -\infty \end{cases}$

Se per $x \to +\infty$ $f(x) = mx + q + o(1)$ e/o con $m \neq 0$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$

Se per $x \to -\infty$ $f(x) = m'x + q' + o(1)$ con $m' \neq 0$, $m' \in \mathbb{R}$, $q' \in \mathbb{R}$

Allora si dirà che $f(x)$ ammette per $x \to +\infty$ asintoto obliquo destro dato dalla retta $y = mx + q$ e/o $f(x)$ ammette per $x \to -\infty$ asintoto obliquo sinistro dato dalla retta $y = m'x + q'$ e qualora esistano entrambi gli asintoti e si abbia $m = m'$ e $q = q'$ si dirà che $f(x)$ ammette asintoto obliquo dato dalla retta:

$y = mx + q$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ \text{oppure} \\ x \to -\infty}} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} m \\ m' \end{cases}$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$$

$$q' = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - m'x]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 148

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 148

elemento neutro per la somma, è unico ed è 0. $z+0=0+z=z$

La somma è associativa e commutativa.

$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists!\ z' \in \mathbb{C}$ tale che $z+z' = z'+z = 0$, ovvero esiste ed è unico l'opposto di un numero complesso z. $z'=-z$

es. $z = a+ib$ $\quad z+z'=0$

$z' = c+id$ $\quad a+ib+c+id=0$

$(a+c)+i(b+d)=0$

$$\begin{cases} a+c=0 \rightarrow c=-a \\ b+d=0 \rightarrow d=-b \end{cases}$$

$z' = -a-ib = -(a+ib) = -z$

- Due numeri complessi coincidono se e solo se hanno stessa parte reale e stessa parte immaginaria.

- PRODOTTO

$z = a+ib \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$z' = c+id$

$$z \cdot z' = (a+ib)\cdot(c+id) = a\cdot c + iad + ibc + \underbrace{i^2}_{-1} bd =$$

$$= (ac-bd)+i(ad+bc)$$

Il prodotto gode delle proprietà associativa e commutativa, inoltre vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma. (x)

(x) $\forall\ z, z', z'' \in \mathbb{C} \rightarrow z(z'+z'') = zz' + z\cdot z''$

1 è l'elemento neutro rispetto al prodotto, cioè:

$\forall z \in \mathbb{C} \qquad z\cdot 1 = 1\cdot z = z$

- Esistenza del reciproco: $\forall z \in \mathbb{C},\ z\neq 0\ \exists!\ z^{-1}$ tale che $zz^{-1} = z^{-1}\cdot z = 1$

$z = a+ib \quad a\neq 0 \vee b\neq 0$

$z^{-1} = \frac{1}{z}$ con $z\neq 0 \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 148