NUMERO: 2111A- ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Rossi Fabio

MATERIA: Meccanica delle macchine - Prof. Eula

MECCANICA DELLE MACCHINE

5/3/13

LABORATORIO OBBLIGATORIO : 1,30 h

libro: FERRARESI, RAPARELLI, "MECCANICA APPLICATA", ED. CLUT

- COMPITO SCRITTO: teoria + esercizi

ORARI:

MERCOLEDÌ: 14,30 - 16,00 , 16,00 - 17,30

GIOVEDÌ: 14,30 - 16,00 , 16,00 - 17,30

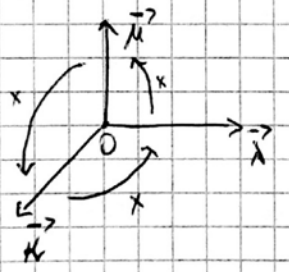
VENERDÌ: 10,00 - 11,30 , 11,30 - 13,00

- DERIVATA DI UN VETTORE ROTANTE

$$\boxed{\frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \omega\vec{K} \times (r\vec{\lambda})}$$

$\times = \wedge \rightarrow$ prodotto vettoriale

ω = velocità di rotazione di $r\vec{\lambda}$ nel piano.



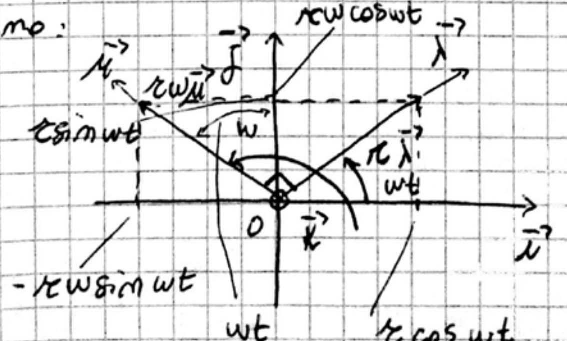
$$\left[\begin{array}{l} \vec{\lambda} \wedge \vec{\mu} = \vec{K} \\ \vec{\mu} \wedge \vec{K} = \vec{\lambda} \\ \vec{K} \wedge \vec{\lambda} = \vec{\mu} \end{array}\right.$$

verso antiorario

$$\begin{array}{l} \vec{\lambda} \wedge \vec{K} = -\vec{\mu} \\ \vec{K} \wedge \vec{\mu} = -\vec{\lambda} \\ \vec{\mu} \wedge \vec{\lambda} = -\vec{K} \end{array}$$

verso orario

piano:



$\omega t \rightarrow$ angolo

2 vettori ortogonali con modulo $\neq$ e velocità ω per entrambi

le proiezioni del 2° vettore sono le derivate delle proiezioni del primo.

r, ω scalari

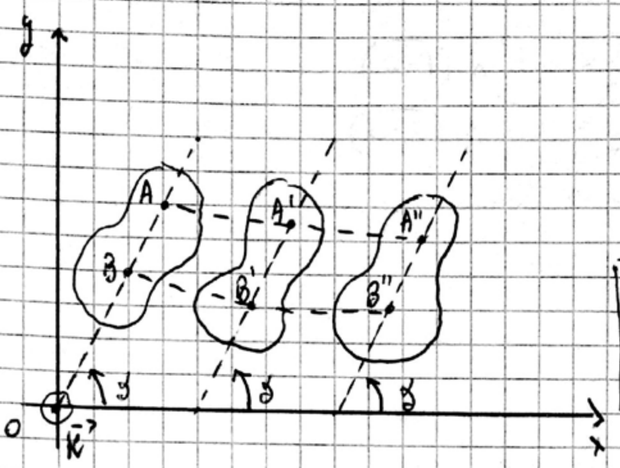
$$\underbrace{\frac{d(r\vec{\lambda})}{dt}}_{\text{vettore velocità}} = r\omega\vec{\mu} = r\omega\left[\vec{K} \wedge \vec{\lambda}\right] = \omega\vec{K} \wedge \underbrace{(r\vec{\lambda})}_{\text{vettore posizione}}$$

proprietà terna di vettori e prodotto vettoriale

Scanned by CamScanner

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 174

1) MOTO DI TRASLAZIONE



$\gamma = cost$

$\Downarrow$

$\omega = 0 \quad , \quad \dot{\omega} = 0$

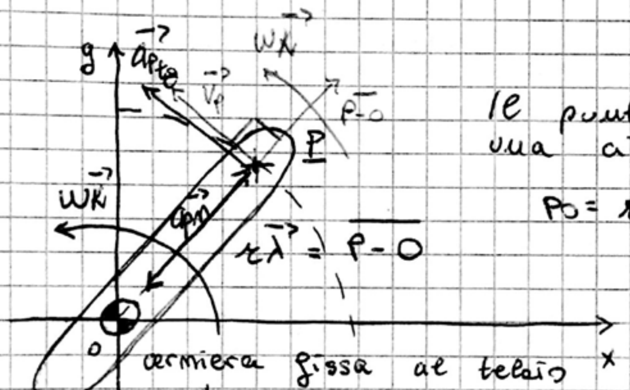
$\vec{V_A} = \vec{V_B}$

$\vec{a_A} = \vec{a_B}$

MOTO TRASLATORIO

tutti i punti hanno stessa velocità e accellerazione lineare.

2) MOTO ROTATORIO INTORNO AD UN PUNTO FISSO



il punto P ruota attorno ad O descrivendo una circonferenza di raggio $\overline{OP}$.

$PO = r = cost$

$\overline{P-O}$ vettore orientato da O a P

cerniera fissa al telaio

il corpo può solo ruotare intorno ad O.

$$\vec{V_P} = \frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \cancel{\frac{dr}{dt}\vec{\lambda}} + r\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = r\left[\omega\vec{k} \wedge \vec{\lambda}\right] = \omega\vec{k} \wedge (r\vec{\lambda})$$

0 (poiché $r = cost$)

appunto derivata di un vettore rotante

$$= \boxed{\omega\vec{k} \wedge (\overline{P-O}) = \vec{V_P}}$$

$(V_O = 0) \rightarrow$ poiché O punto fisso.

$$\vec{a_P} = \frac{d(r\omega\vec{\mu})}{dt} = \cancel{\frac{dr}{dt}\omega\vec{\mu}} + r\frac{d\omega}{dt}\vec{\mu} + r\omega\frac{d\vec{\mu}}{dt}$$

$$= r\dot{\omega}\left[\vec{k} \wedge \vec{\lambda}\right] + r\omega\left[\omega\vec{k} \wedge \vec{\mu}\right] = \dot{\omega}\vec{k} \wedge \left[r\vec{\lambda}\right] + r\omega^2\left[-\vec{\lambda}\right]$$

$$= \boxed{\dot{\omega}\vec{k} \wedge (\overline{P-O}) - \omega^2\left[\overline{P-O}\right] = \vec{a_P}}$$

$a_O = 0$

accellerazione divisa in 2 contributi

$$\boxed{\vec{a_P} = \vec{a_{P_{tg}}} + \vec{a_{P_n}}}$$

tangenziale — centripeta

a_n dipende da ω, anche se questa è costante, e non da $\dot{\omega}$.

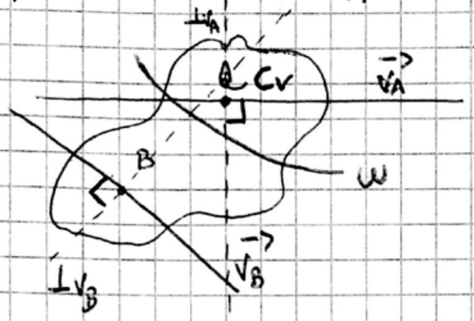
Scanned by CamScanner

CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE O CENTRO DELLE VELOCITÀ

$C_V \longrightarrow V_{C_V} = 0$

$a_{C_V} \neq 0$

a) $\vec{V}_A , \vec{V}_B$ non // => suffic. DIREZIONI



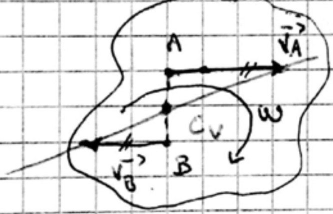
$C_V \to$ incrocio delle perpendicolari delle velocità.

$$\vec{V}_A = \cancel{\vec{V}_{C_V}}^{\,0} + \vec{V}_{A/C_V} = \omega \vec{k} \wedge (A - C_V)$$

$$\vec{V}_B = \cancel{\vec{V}_{C_V}}^{\,0} + \vec{V}_{B/C_V} = \omega \vec{k} \wedge (B - C_V)$$

b) $\vec{V}_A \, // \, \vec{V}_B$ => devo conoscere MODULO, DIREZIONE e VERSO

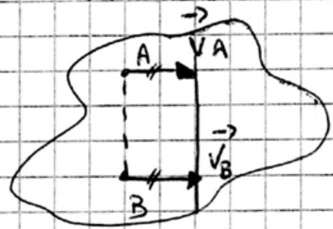
3 casi:



Cv interno alla distanza $\overline{AB}$

(si conosce il verso di w)

$|\vec{V}_A| = |\vec{V}_B|$

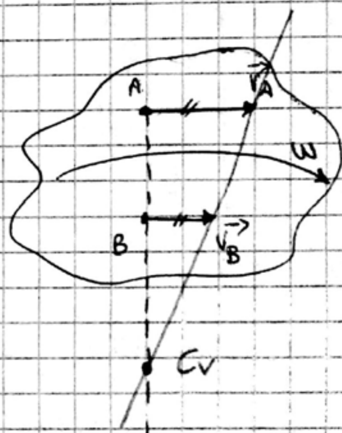


si ha una TRASLAZIONE

$\Downarrow$

$C_V = \infty$

$(\omega = 0)$

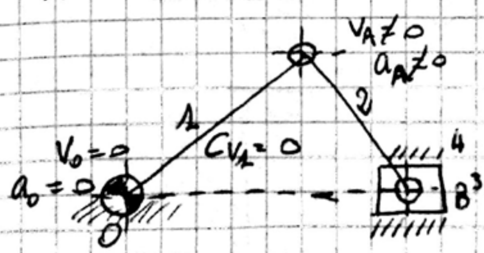


Cv cade fuori dal corpo rigido

---

a) CATENA CINEMATICA: è un insieme di più corpi rigidi connessi da vincoli

b) CATENA CINEMATICA SEMPLICE: se ogni C.R. ha solo 1 o 2 coppie cinematiche (vincoli).



Biella - manovella

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 174

- CALCOLO DEI GdL di 1 MECCANISMO

FORMULA DI GRÜBLER

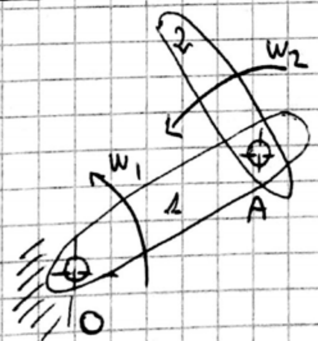
$$X = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$$

- $X \rightarrow$ n° GdL
- $m \rightarrow$ n° di corpi compreso il telaio
- $C_1 \rightarrow$ n° di vincoli presenti a 1 GdL
- $C_2 \rightarrow$ n° di vincoli presenti a 2 GdL

Esempio (Biella - manovella)

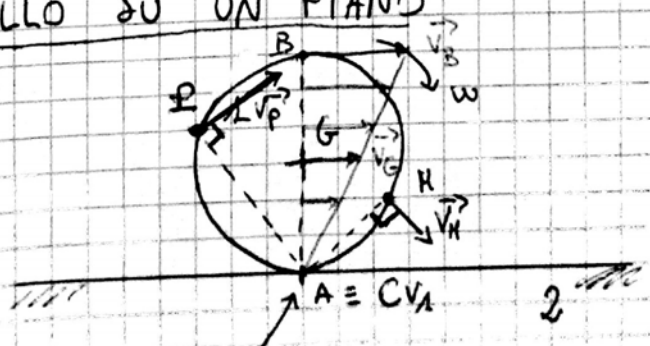
$$\begin{cases} m = 4 \ (AO, AB, 3, \text{telaio } 4) \\ C_1 = 4 \ (O, A, B, \text{guida orizzontale}) \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = 1 \ (1 \text{ GdL})$$

Esempio (braccio umano)



2 GdL

- RULLO SU UN PIANO



1 = rullo
2 = piano fisso

puro rotolamento $\Rightarrow$ V relativa $1/2 = 0$

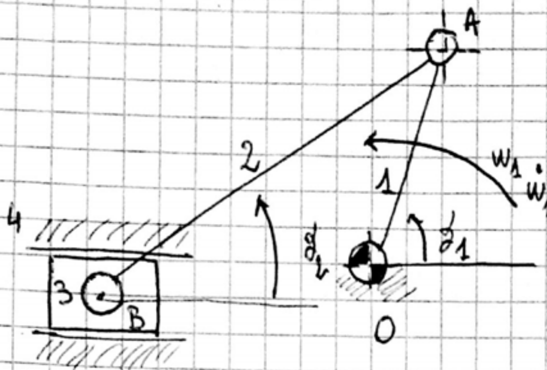
$\downarrow$

1 GdL $\rightarrow$ rotazione, $\nexists$ strisciamento.

Scanned by CamScanner

BIELLA - MANOVELLA

6/3/13



$\omega_1 = 1500$ giri/minuto

$\dot{\omega}_1 = 1000$ rad/s²

$OA = 0,21$ m

$\gamma_1 = 45°$

$AB = 0,61$ m

$\gamma_2 = 30°$

AO = manovella
AB = biella
B = piede di biella

Il meccanismo trasforma il moto circolare di AO in una traslazione alternata di B (o viceversa).

Calcolo dei GdL:

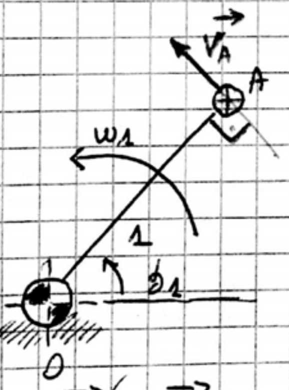
$X = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$

$m = 4$ (AO, AB, 3, telaio)

$C_1 = 4$ (O, A, B, ⊥ guida asta)

$C_2 = 0$

AO:



$$\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = 157,07 \text{ rad/s}$$

Il punto A ruota rigidamente intorno ad O.

$V_O = 0 \quad a_O = 0$

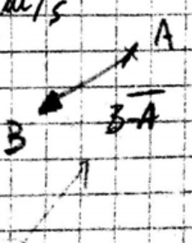
$\vec{V}_A = \cancel{\vec{V}_O} + \vec{V}_{A/O}$ F.F.C.

$= \vec{V}_{A/O} = \omega_1 \vec{k} \wedge (A-O)$

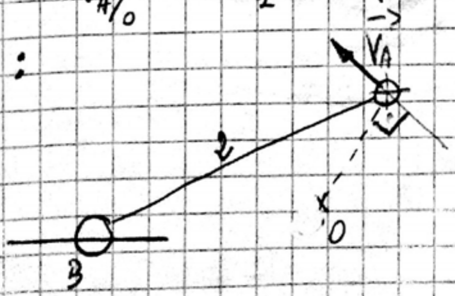
MODULO: $V_A = \omega_1 \overline{AO} = 32,98$ m/s

DIREZIONE: ⊥ AO

VERSO: ω_1 ↺



AB:



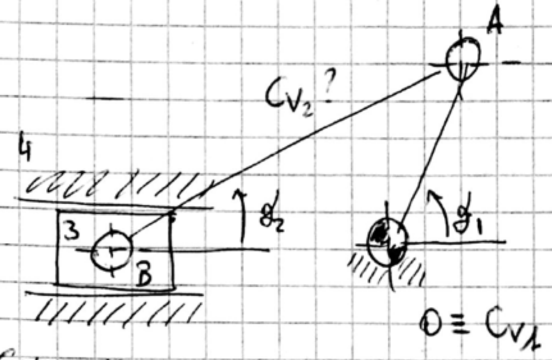
Non ci sono vincoli fissi.

$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} = \vec{V}_A + \omega_2 \vec{k} \wedge (B-A)$

$\vec{V}_B$: nota solo in direzione
$\vec{V}_A$: nota completamente
$\omega_2 \vec{k} \wedge (B-A)$: nota solo in direzione

Questo stesso esercizio lo si può risolvere con il centro delle velocità:

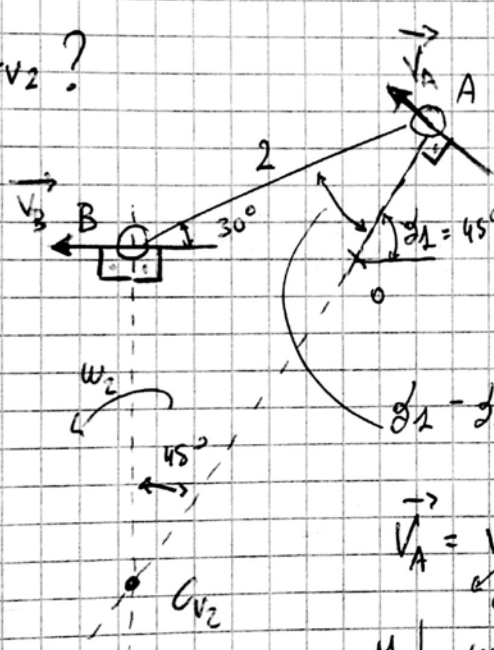
- Ogni corpo rigido nel meccanismo ha il suo CV, uno solo.



$C_{V_3} = \infty$

↳ poiché ho una traslazione

C_{V_2} ?



$\vartheta_1 - \vartheta_2 = 15°$

$$\frac{AC_{V_2}}{\sin(90°+30°)} = \frac{AB}{\sin 45°} \Rightarrow AC_{V_2}$$

$$\frac{BC_{V_2}}{\sin 15°} = \frac{AB}{\sin 45°} \Rightarrow BC_{V_2} = 0{,}223 \text{ m}$$

$$\vec{V_A} = \cancel{\vec{V}_{C_{V_2}}}^{\,0} + w_2 \vec{K} \wedge (A - \vec{C_{V_2}})$$

M	$w_2 = V_A / AC_{V_2} = 44{,}21$ rad/s
D	$\perp AC_{V_2}$
V	w_2 ↺ (da $\vec{V_A}$)

$$\vec{V_B} = \cancel{\vec{V}_{C_{V_2}}}^{\,0} + w_2 \vec{K} \wedge (B - C_{V_2})$$

M	$V_B = w_2 AC_{V_2} = 9{,}86$ m/s
D	orizzontale
V	←

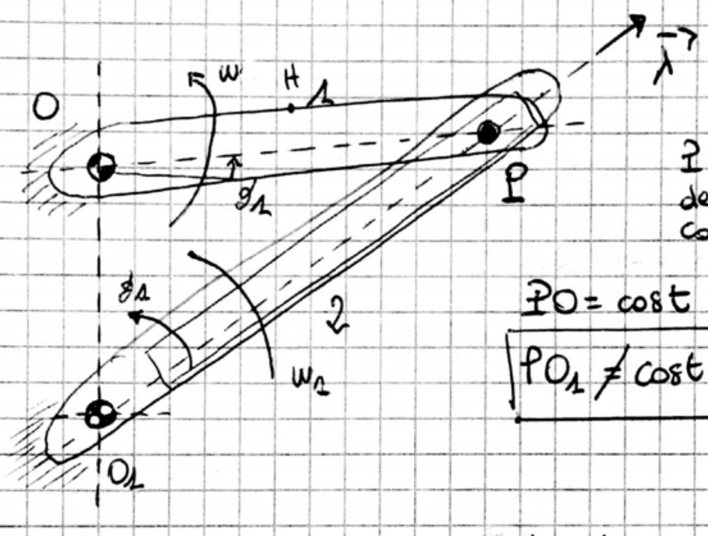
Scanned by CamScanner

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 174

AO = cost AB = cost → pezzi rigidi definiti nel tempo

- Quando si hanno come componenti di un meccanismo pezzi rigidi ben definiti nel tempo si ha un <u>MOTO SEMPLICE</u>.

GUIDA DI FAIRBAIN O GLIFO



fermo
↑
1 → ruota rigidamente intorno ad O

1 scorre all'interno della guida nel corpo 2.

$PO = cost$

$\boxed{PO_1 \neq cost}$ → MOTO COMPOSTO
↓
2 tipi di moti che si compongono

H subisce solo ROTAZIONE

P subisce sia una ROTAZIONE che una TRASLAZIONE.

$$\vec{V}_{P_{assoluta}} = \vec{V}_{P_{relativa}} + \vec{V}_{P_{trascinamento}}$$

$$\vec{a}_{P_{assoluta}} = \vec{a}_{P_{relativa}} + \vec{a}_{P_{trascin.}} + \vec{a}_{co}$$

$\vec{a}_{co}$ = ACCELLERAZIONE DI CORIOLIS o accellerazione complementare.

$$= 2\omega_{tras} \vec{k} \wedge \vec{V}_{rel.}$$

Moto di trascinamento: $\vec{a}_{co} = 0$ poichè $\vec{V}_{rel} = 0$

- IDENTIFICAZIONE DEI MOTI (in caso di moto composto):

1) MOTO ASSOLUTO → <u>ROTAZIONE DI P INTORNO AD O</u>

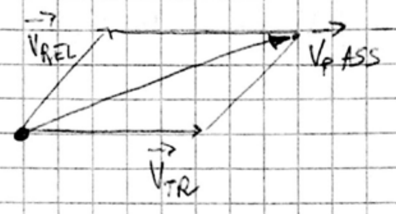
2) MOTO RELATIVO → <u>TRASLAZIONE DI P LUNGO $\vec{\lambda}$: $\pm V_{rel} \vec{\lambda}$</u>

3) MOTO DI TRASCINAMENTO → <u>ROTAZIONE DI 2 INTORNO A O_1</u>

MOTO ASSOLUTO DI P: composizione dei 2 → P MOTO COMPOSTO

↓

perchè si muove all'interno del corsello.



Ripresa GUIDA GLIFO

$$\vec{V}_{P_{ass}} = \vec{V}_{P_{rel}} + \vec{V}_{P_{tr}} \qquad \vec{V}_{P_{rel}} = V_{P_{rel}}\vec{\lambda}$$

$$\vec{V}_{P_{tr}} = [\underbrace{\vec{V}_{O_1}}_{0} + \underbrace{\omega_1}_{\omega_{trascinamento}}\vec{K} \wedge (P-O_1)]$$

$$\vec{V}_{P_{ASS}} = \underbrace{\vec{V}_O}_{0} + \underline{\omega\vec{K} \wedge (P-O)} = \underline{\pm V_{P_{rel}}\vec{\lambda}} + \underline{[\omega_1\vec{K} \wedge (P-O_1)]}$$

M	$\omega PO = 47,1 \; m/s$	?	$\omega_1 PO_1 = ?$
D	$\perp PO$	lungo PO_1	$\perp PO_1$
V	ω ↻	?	?

DATI PROBLEMA

$\dot{\omega} = 0$

$OP = 0,3 \; m$

$O_1P = 0,6 \; m$

$O_1O = 0,4 \; m$

$\vartheta = 27,27°$

$\vartheta_1 = 26,38°$

12/3/13

GRADI DI LIBERTÀ

$x = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$

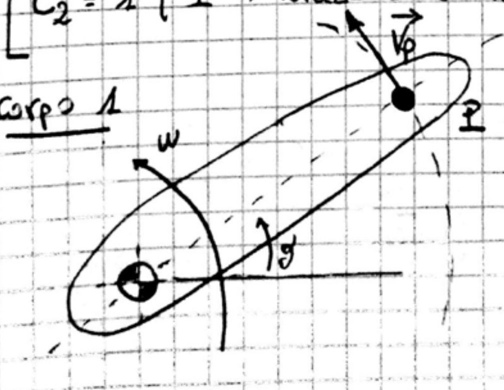
$m = 3$ (1, 2, telaio)

$C_1 = 2$ (O, O_1)

$C_2 = 1$ (P → rotazione e traslazione)

$x = 1$

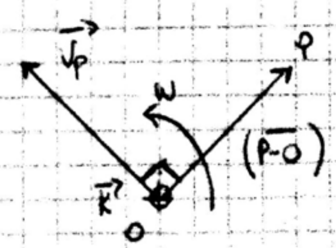
corpo 1



ANALISI DELLE VELOCITÀ

$$\vec{V}_P = \underbrace{\vec{V}_O}_{0} + \vec{V}_{P/O} = \omega\vec{K} \wedge (P-O)$$

M	$\omega PO = 47,1 \; m/s$
D	$\perp PO$
V	↻ ω



Scanned by CamScanner

ANALISI DELLE ACCELLERAZIONI

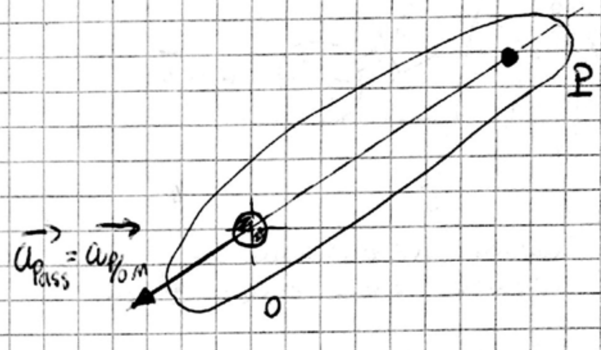
corpo 1

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P\,ass} = \underbrace{\cancel{\vec{a}_O}}_{0} + \vec{a}_{P/O_M} + \vec{a}_{P/O\,tg} = -\omega^2(P-O) + \underbrace{\cancel{\dot{\omega}k}}_{0} \wedge (P-O)$$

0 → poiché $\omega = cost$

$\vec{a}_{P ass}$

M	$\omega^2 PO = 7394{,}7\ m/s^2$
D	$//\ PO$
V	$P \to O$



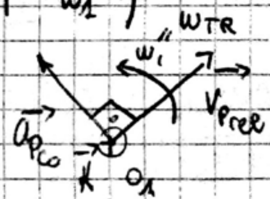
corpo 2

$$\vec{a}_{P\,ass} = \vec{a}_{P\,rel} + \vec{a}_{P\,tr} + \vec{a}_{P\,co}$$

$$= \pm a_{P\,rel}\,\vec{\lambda} + \left[\underbrace{\cancel{\vec{a}_{O_1}}}_{0} + \dot{\omega}_1 \vec{k} \wedge (P-O_1) - \omega_1^2 (P-O_1)\right]_{tr} + \left[2\omega_1 \vec{k} \wedge \vec{V}_{P\,rel}\right]_{co}$$

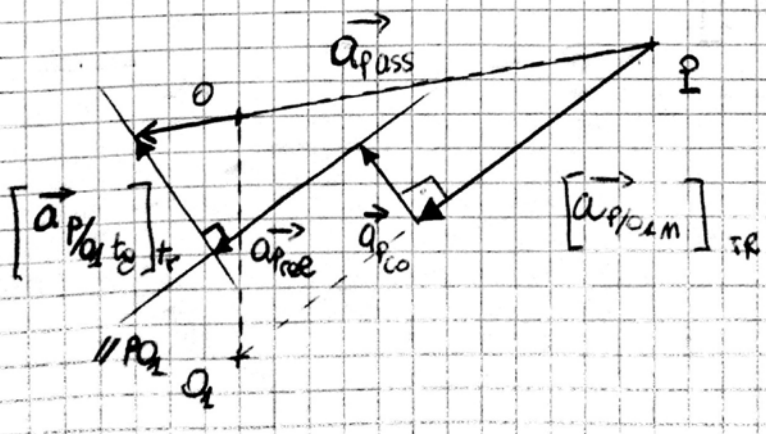
$\omega_{tr} \vec{k}$

M		?	$\dot{\omega}_1 PO_1 = ?$	$\omega_1^2 PO_1 = 2398\ m/s^2$	$2\omega_1 V_{P\,rel} = 3528{,}9\ m/s^2$
D	moto	$//\ PO_1\ (\vec{\lambda})$	$\perp\ PO_1$	$//\ PO_1$	$\perp\ \vec{V}_{P\,rel}$
V		?	$\dot{\omega}_1$) ?	$P \to O_1$	ω_1)



Costruisco il poligono delle accelerazioni:

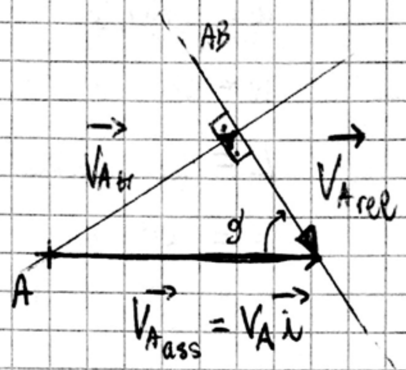
Per i moduli delle accellerazioni si dovrebbero fare delle considerazioni geometriche sugli angoli.

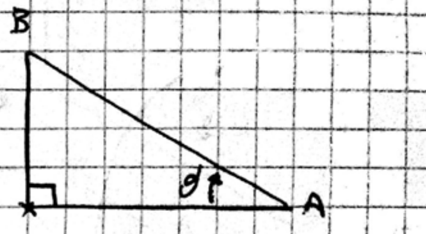


Scanned by CamScanner

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 174

Triangolo delle velocità:





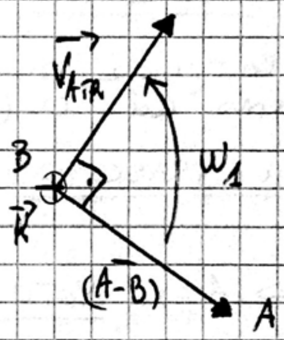
$$AB = \frac{a}{\sin\vartheta} = 0{,}5 \ m$$

$$V_{A\,tr} = V_{A\,ass} \cdot \sin\vartheta = 0{,}5 \ m/s$$

$$V_{A\,rel} = V_{A\,ass} \cdot \cos\vartheta = 0{,}86 \ m/s$$

$$\omega_1 = \frac{V_{A\,tr}}{AB} = 1 \ rad/s$$

$$\vec{V}_{A\,tr} = \omega_1 \vec{k} \wedge (\overline{A-B})$$



ANALISI DELLE ACCELLERAZIONI:

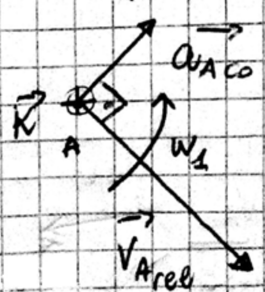
$$\vec{a}_{A\,ass} = \vec{a}_{A\,rel} + \vec{a}_{A\,TR} + \vec{a}_{A\,Co}$$

$$\vec{a}_{A\,Co} = 2\,\omega_1 \vec{k} \wedge \vec{V}_{A\,rel}$$

M | $2\,\omega_1 \, V_{A\,rel} = 1{,}73 \ m/s^2$

D | $\perp \vec{V}_{A\,rel}$

V |



Scanned by CamScanner

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 174

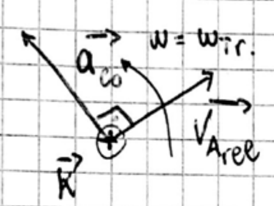
$$\vec{a}_{A_{ass}} = \pm a_{A_{ass}}\vec{j} = \pm a_{A_{rel}}\vec{\lambda} + \left[\vec{a}_o - \omega^2(A-O) + \dot{\omega}\vec{K}\wedge(A-O)\right]_{tr} + 2\underbrace{\omega}_{\omega_{tr}}\vec{K}\wedge\vec{V}_{A_{rel}}$$

$$\vec{a}_{A_{Co}} = 2\omega\vec{K}\wedge\vec{V}_{A_{rel}}$$

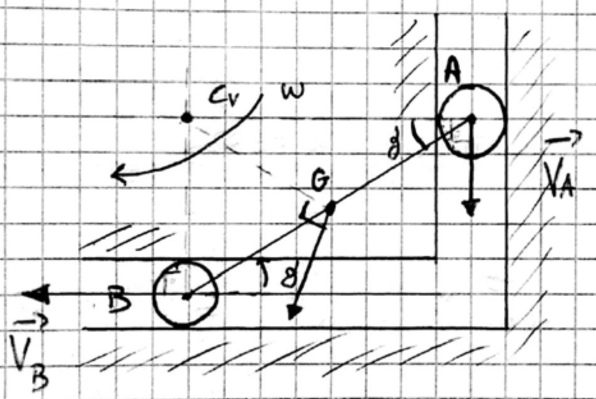
M | $2\omega V_{A_{rel}}$ → $0\ m/s^2$; → $0{,}155\ m/s^2$

D | $\perp\ \vec{V}_{A_{rel}}$

V |



ESERCIZIO 2



$AB = cost$ → solo moto semplice

$AB = 200\ mm$

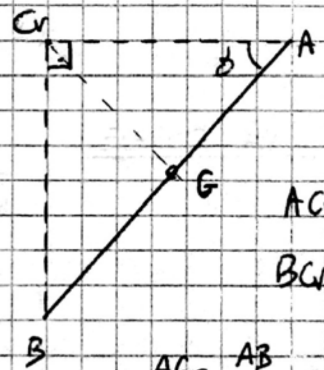
$V_A = 2\ m/s$

$\gamma = 30°$

$$\vec{V}_A = \cancel{\vec{V}_{C_v}} + \omega\vec{K}(A-C_v)$$

$$\vec{V}_B = \cancel{\vec{V}_{C_v}} + \omega\vec{K}(B-C_v)$$

$$\vec{V}_G = \vec{V}_{C_v} + \omega\vec{K}\wedge(G-C_v)$$



$AC_v = AB\cos\gamma = 0{,}173\ m$

$BC_v = AB\sin\gamma = 0{,}10\ m$

$AG = \frac{AB}{2}$

TEOREMA DI CARNOT

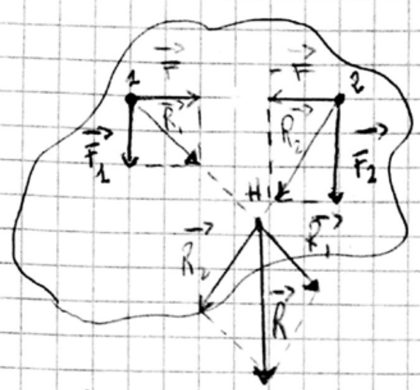
$$GC_v = \sqrt{AG^2 + AC_v^2 - 2(AG)(AC_v)\cos\gamma} = 0{,}0998\ m$$

$$\omega = \frac{V_A}{AC_v} = 11{,}56\ \frac{rad}{s}$$

$$V_B = \omega(BC_v) = 1{,}156\ m/s$$

$$V_G = \omega(GC_v) = 1{,}154\ m/s$$

COMPOSIZIONE DI $\vec{F}$ //



Si aggiunge una generica forza $\vec{F}$, però contrapposta da una della stessa intensità dall'altra parte.

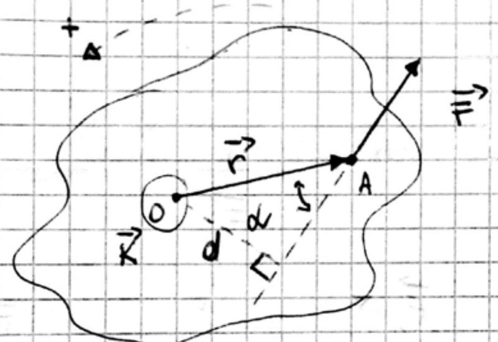
↓

Quindi effetto nullo.

Trovo le risultanti provvisorie, trovo H e così ottengo la $\vec{R}$.

$$\vec{R_1} = \vec{F_1} + \vec{F} \qquad \vec{R_2} = \vec{F_2} - \vec{F} \qquad \vec{R} = \vec{R_1} + \vec{R_2} = \vec{F_1} + \cancel{\vec{F}} - \cancel{\vec{F}} + \vec{F_2}$$

MOMENTO DI UNA FORZA



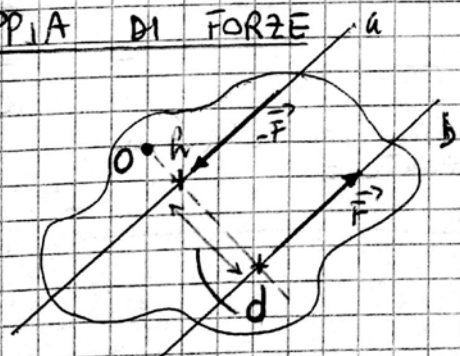
Momento di $\vec{F}$ rispetto ad O:

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \wedge \vec{F} = r \sin\alpha \, F \, \vec{k}$$

$d = r \sin\alpha \qquad d \perp F \qquad d =$ braccio della forza F rispetto ad O

↳ $\vec{M} = dF\vec{k} \qquad M_0 = dF$

COPPIA DI FORZE



a // b

$\vec{F}$ // = in modulo

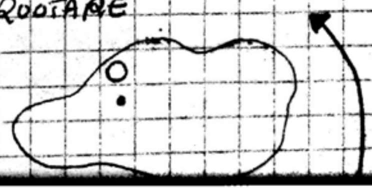
opposte in verso

$M_0 = -Fh + F(d+h)$ — distanza tra le 2 forze

$M = C =$ coppia $= F d_C \qquad d_C =$ braccio ~~della~~ coppia C.

↳ VETTORE LIBERO → SOLO RUOTARE

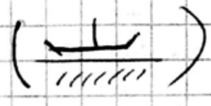
=



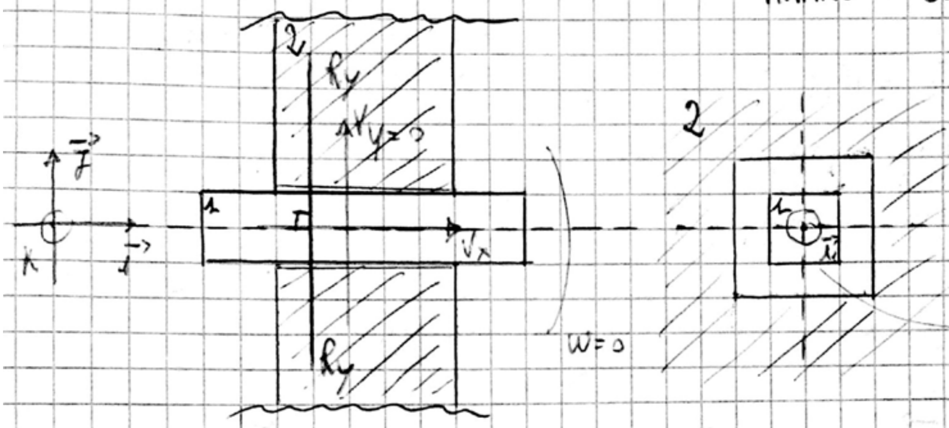
$C = dF_c$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 174

REAZIONI VINCOLARI: sono forze o coppie scambiate nei vincoli; sono incognite e nascono nelle direzioni in cui il vincolo impedisce il moto.

a) COPPIA PRISMATICA: 

→ PATTINO → SOLO TRASLAZIONE



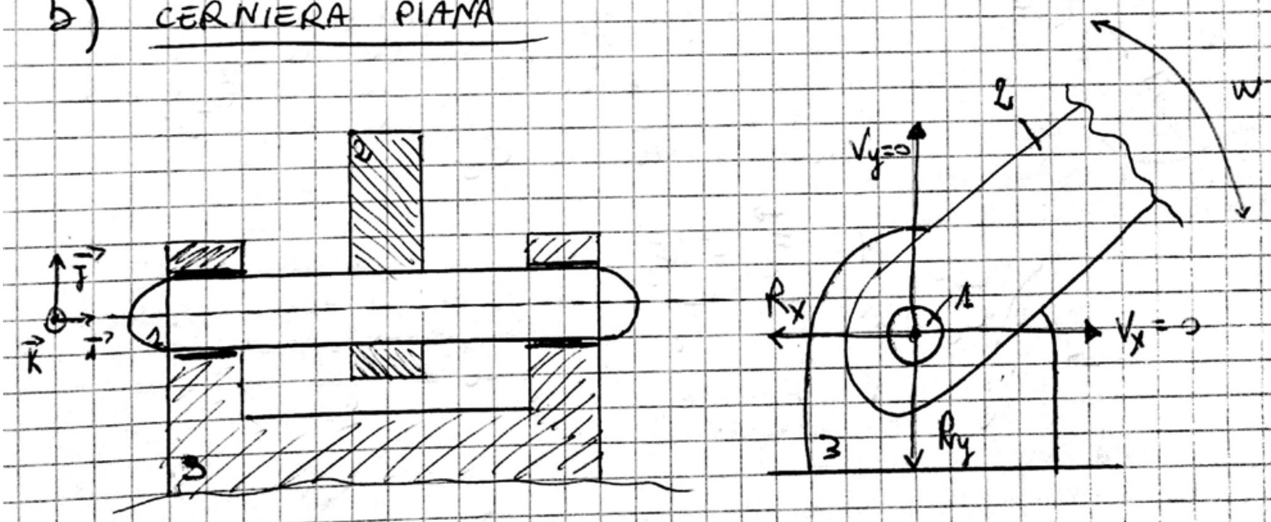
vincolo non reagisce

$$\begin{cases} V_x \neq 0 \\ V_y = 0 \\ \omega = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} R_x &= 0 \\ R_y &\neq 0 \rightarrow \text{nascono forze} \\ M_i &\neq 0 \end{aligned}$$

dovute al contatto tra i corpi

REAZIONI DEL VINCOLO SENZA ATTRITO

b) CERNIERA PIANA



$$\begin{cases} V_x = 0 \\ V_y = 0 \\ \omega \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_x \neq 0 \\ R_y \neq 0 \\ M_A = 0 \end{cases}$$

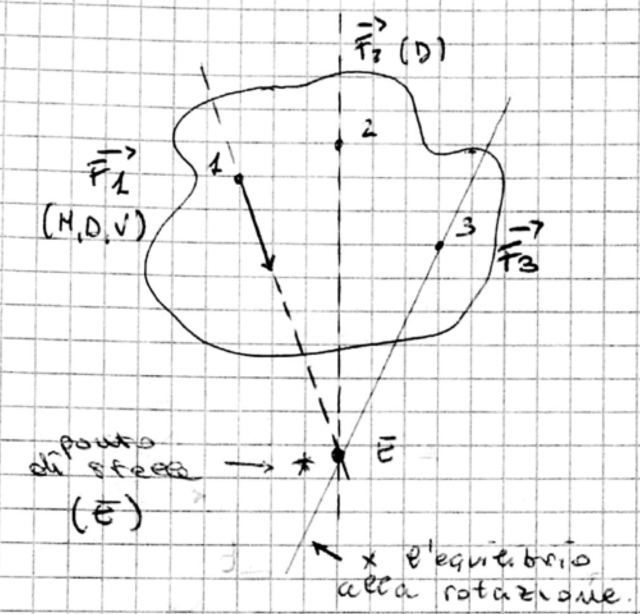
1 GdL

EQUIVALENZA:

$C = F_1 b$ $\qquad |\vec{F_1}| = |\vec{F_2}|$

↳ identità

3) C.R. soggetto a 3 forze:



Si ha, $\vec{F_1}$ nota, $\vec{F_2}$ solo in direzione ed $\vec{F_3}$ incognita.

Prolungo la retta di azione di $\vec{F_1}$ finché incontra quella di $\vec{F_2}$ nel punto detto PUNTO DI STELLA. Anche la retta d'azione di $\vec{F_3}$ deve passare per * per l'equilibrio alla rotazione.

EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE: $\longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{F} = 0$

$\vec{M_0} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ $\qquad M_0 = bF \qquad b \perp F \qquad$ b rispetto ad O

Rispetto ad E (polo momenti):

$F_1 \cancel{b_E} + F_2 \cancel{b_E} + F_3 \cancel{b_E} = 0$ → Così si ha l'equilibrio alla rotazione

0 0 0

↳ nullo perché E è sulla retta d'azione.

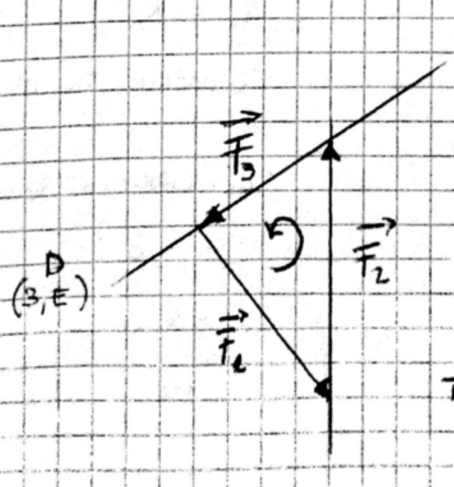
↓ Se ci fosse una forza la cui retta d'azione non passasse per E non si avrebbe equilibrio.

EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE: $\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \vec{R_F} = 0$

$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = 0$

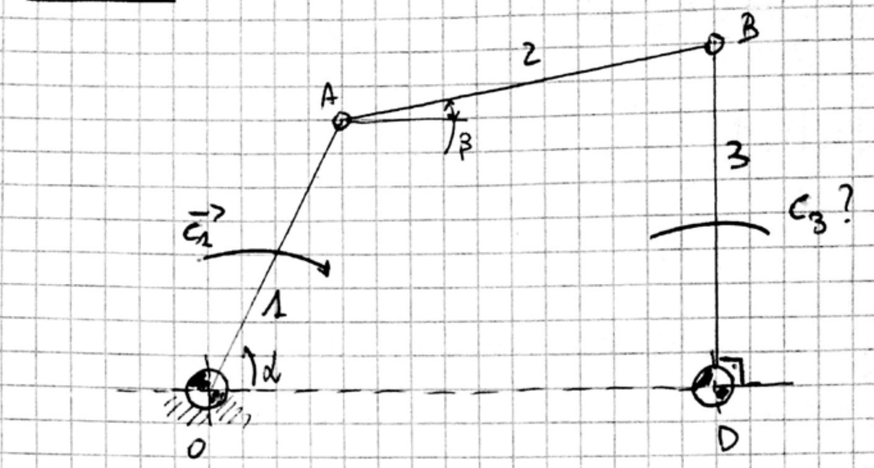
↓

Devo avere tutte le forze in serie (testa-coda)

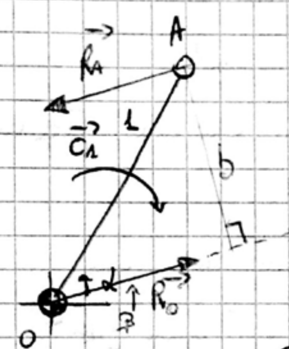


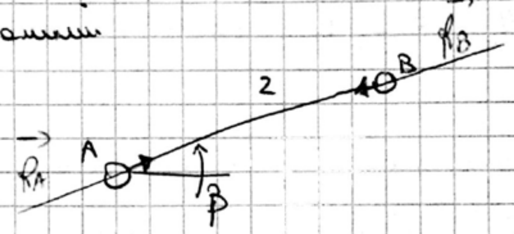
TRIANGOLO DELLE FORZE.

ESERCIZIO



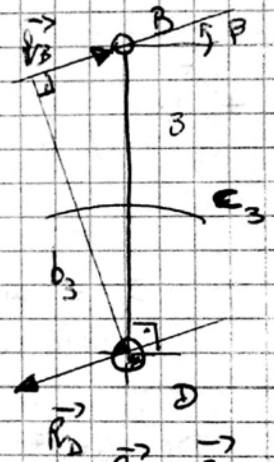
Traccio i diagrammi





asta scarica

$|\vec{R_A}| = |\vec{R_B}|$



$\vec{R_A} \parallel \vec{R_0}$

$|\vec{R_A}| = |\vec{R_B}|$

$C_1 = R_A b$

$C_3 = R_B b_3$

$\vec{R_B} \parallel \vec{R_D}$

$|\vec{R_B}| = |\vec{R_D}|$

19/3/13

3 LEGGI DELLA DINAMICA (NEWTON)

1) Una particella resta a riposo o in moto rettilineo uniforme se $\vec{R}_F = 0$

2) L'accelerazione di una particella è $\propto$ alla $\sum_{i=1}^{m} \vec{F}_{est_i}$:

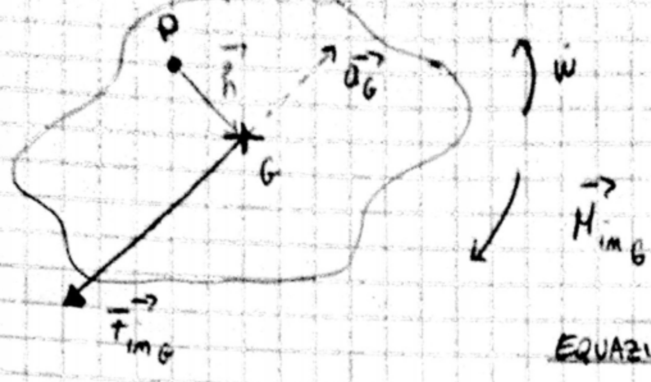
$$\sum_{i=1}^{m} \vec{F}_{est_i} = m\vec{a}$$

$\vec{a}$ = accelerazione della particella

m = massa della particella $[Kg]$

↓

inerzia o resistenza della particella a cambiare la sua $\vec{v}$



$$\mathcal{P}: \begin{cases} 1 \quad \sum_{i=1}^{m} \vec{F}_{est_i} + \vec{F}_{im_G} = 0 \\ 2 \quad \sum_{i=1}^{m} \vec{M}_{est_i} + \vec{M}_{im_G} + \vec{h} \wedge \vec{F}_{im_G} = 0 \end{cases}$$

EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA

Nel piano le forze si possono spezzare in componenti:

$$\mathcal{P}: \begin{cases} 1 \begin{cases} \times \vec{i} \xrightarrow{+} \sum_{i=1}^{m} F_{est_{x_i}} + F_{im_{Gx}} = 0 \\ \times \vec{j} \uparrow + \quad \sum_{i=1}^{m} F_{est_{i_y}} + F_{im_{Gy}} = 0 \end{cases} \\ 2 \quad \mathcal{P}. \circlearrowleft + \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{m} M_{est_i}}_{F \cdot b} + \underbrace{\vec{M}_{im_G}}_{I_G \dot{\omega}} + \underbrace{b_{im} F_{im_G}}_{b_{in} \perp F_{imG}} = 0 \end{cases}$$

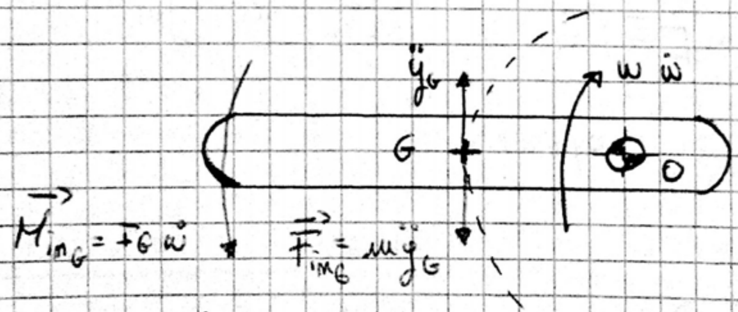
2 equazioni SCALARI di equilibrio alla TRASLAZIONE

1 equazione SCALARE di equilibrio alla ROTAZIONE

Questo è un metodo alternativo al lavoro grafico con le risultanti.

ESEMPIO

Asta incernierata in O, che non coincide con G. → [analisi azioni di inerzia]



m = massa distribuita

$\ddot{y}_G$ → accellerazione angolare di G intorno a O

$I_G = \dfrac{m l}{12}$ $[Kg\, m^2]$ → momento di inerzia notevole

l = lunghezza della leva.

EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE:

Conviene prendere come polo un punto di vincolo così non si avranno i contributi delle reazioni vincolari (poichè avrebbero braccio nullo).

Scanned by CamScanner

BARICENTRO DI UN C.R. nel piano

1) SISTEMA DISCRETO ⟹ n masse

$$\begin{cases} X_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{M} \\ Y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{M} \end{cases} \qquad M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

2) SISTEMA CONTINUO:

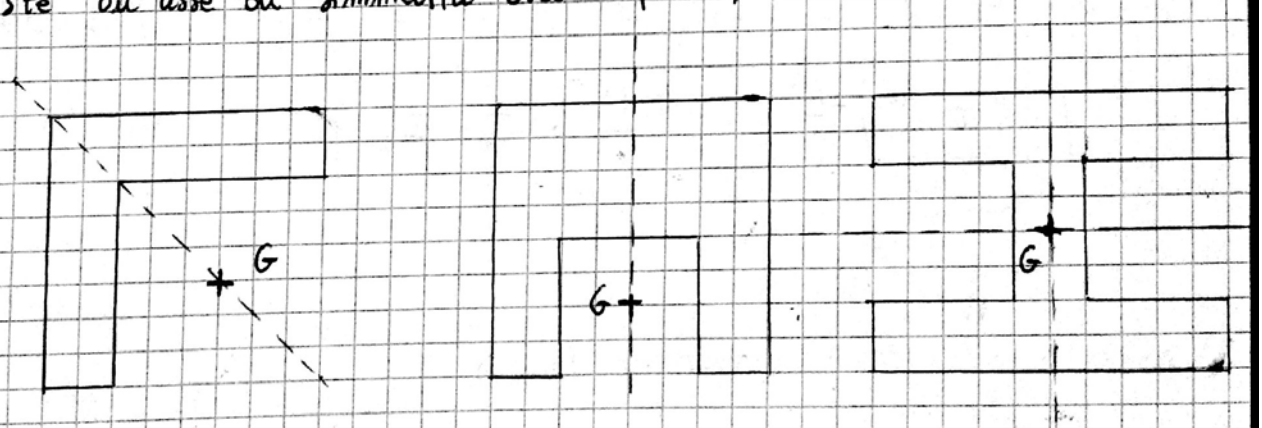
(x nostra ipotesi)

$$\rho = \text{densità} = \frac{dm}{dV} = \text{cost}$$

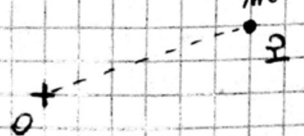
$$X_G = \frac{\int_M x\, dm}{M} = \frac{\int_V (\rho\, dV)\, x}{M}$$

$$Y_G = \frac{\int_M y\, dm}{M} = \frac{\int_V (\rho\, dV)\, y}{M}$$

· Se esiste un asse di simmetria del corpo ⟹ lì ha G



MOMENTO DI INERZIA



$$I_O = m(\overline{PO})^2 \rightarrow [Kg\,m^2]$$

1) SISTEMA DISCRETO

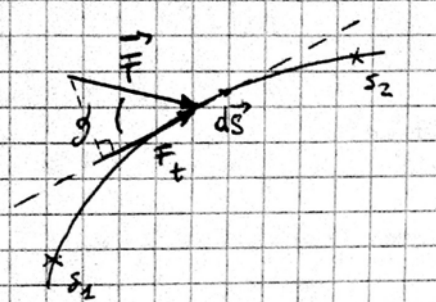
$$O: \quad I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i (\overline{P_i O})^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$I_o = \int_M r^2 dm = \int_M (x^2+y^2)\, dm = \int_M x^2 dm + \int_M y^2 dm = I_x + I_y$$

Nel piano, per simmetria: $I_x = I_y$

$$I_x = I_y = \frac{I_o}{2} = \frac{\left(\frac{MR^2}{2}\right)}{2} = \frac{MR^2}{4}$$

LAVORO DI UNA FORZA



$$dL = \vec{F}\, d\vec{s} = F\, ds \cos\alpha \quad [J = \text{joule}]$$

$$L = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}\, d\vec{s}$$

$$= [\underbrace{F\cos\alpha}_{F_t}]\, ds = F_t\, ds \quad \begin{cases} > 0 & \text{concordi} \\ < 0 & \text{discordi} \end{cases}$$

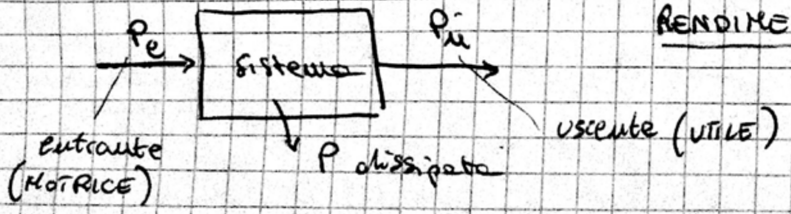
$$L = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} F_t\, ds$$

$$L_c = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} M\, d\vartheta$$

<u>POTENZA</u>: $P_F = \dfrac{dL}{dt} = F_t \dfrac{ds}{dt} = F_t v \qquad [W = \text{Watt}] \to J/s$

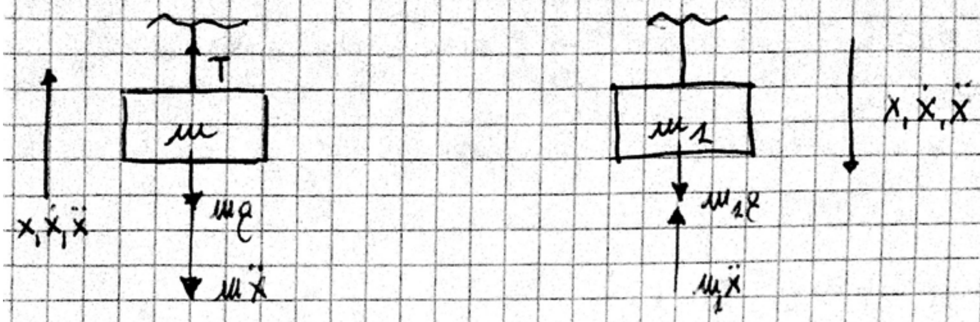
$$P_L = \frac{dL_c}{dt} = M\frac{d\vartheta}{dt} = M\omega$$

$$\boxed{P_{TOT} = F_t v + M\omega}$$



<u>RENDIMENTO</u>: $\eta = \dfrac{P_u}{P_e} \le 1$

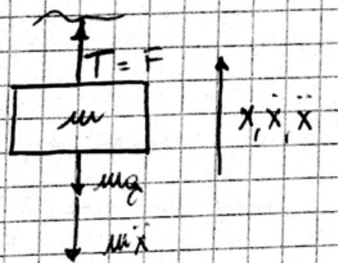
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 174



$$\left.\begin{array}{ll} m: \uparrow + & T - mg - m\ddot{x} = 0 \\ m_1: \downarrow + & T - m_1 g + m_1 \ddot{x} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \ddot{x} = g\frac{(m_1 - m)}{(m_1 + m)} = 1,4\ m/s^2$$

Se al posto di m_1 venisse applicata una forza $\vec{F}$, pari a m_1 ?

$F = m_1 g = 1962\ N$

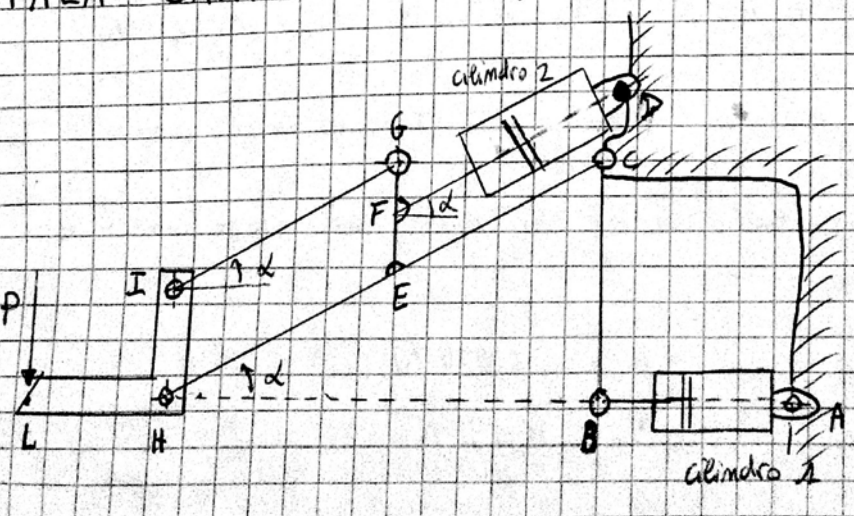


$$\uparrow + \quad F - mg - m\ddot{x} = 0 \rightarrow \ddot{x} = \frac{F - mg}{m} = 3,27\ m/s^2$$

Applicando la forza F, anche se pari in valore alla forza peso, riesco a tirare la massa m più velocemente verso l'alto.

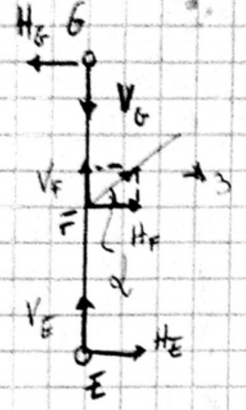
↳ Ciò è dovuto al fatto che non essendoci m_1, non c'è la forza di inerzia su questo corpo che si oppone al movimento.

PALA CARICATRICE (equilibrio statico)



Scanned by CamScanner

2) Sposto ad analizzare l'asta GE:



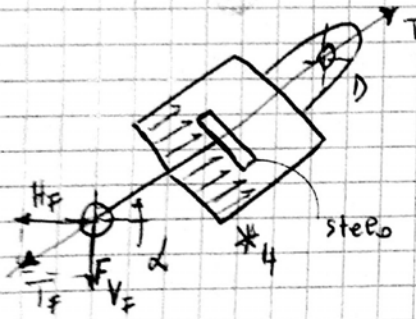
Dopo aver scomposto le componenti delle reazioni vincolari dei punti G, F, E scrivo il sistema:

$$\xrightarrow{+} \quad -H_G + H_F + H_E = 0$$

$$+\uparrow \quad -V_G + V_F + V_E = 0$$

$$E \circlearrowright^{+} \quad H_G(\overline{EG}) - H_F(\overline{EF}) = 0$$

Di nuovo, per trovare la 4 eq, analizzo il cilindro 2:



*3 Riportando di nuovo la direzione di T_F sull'asta GE nel punto F, scrivo la 4° eq:

$$V_F = H_F \tan\alpha$$

Risolvo il sistema e trovo:

$H_F = 52'448$ N $\quad V_F = 30'280$ N $\quad V_E = -15'140$ N $\quad H_E = -26'224$ N

Cilindro in trazione

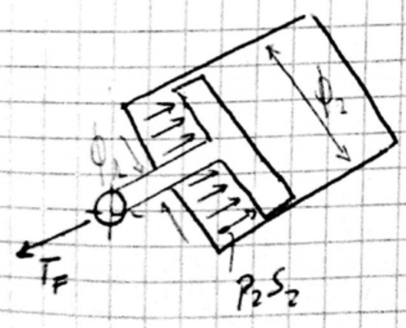
↓

Lo stelo scorre nella camicia del cilindro.

↓

*4

Da cui si può calcolare la pressione p_2, la sua forza $p_2 S_2$:



$$S_2 = \frac{\pi\left[\phi_2^2 - \phi_1^2\right]}{4}$$

$$T_F = p_2 S_2 = \sqrt{V_F^2 + H_F^2}$$

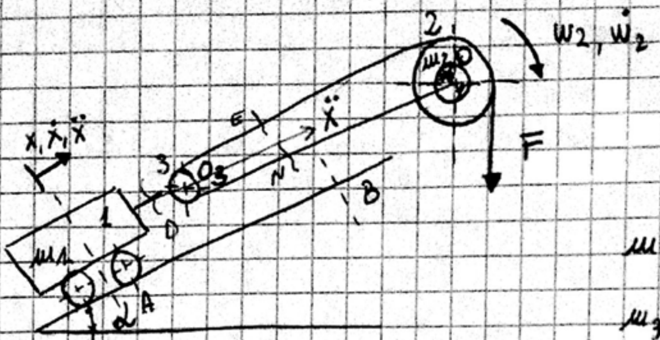
$$\Downarrow$$

$$p_2 = \frac{T_F}{S_2} = 7139690{,}74 \text{ Pa} = 71{,}39 \text{ bar}$$

$$(1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa})$$

Scanned by CamScanner

CARRELLO SU PIANO INCLANATO



puleggia 3
↓
moto di rototraslazione

$m_1 = 50\ kg$, $m_2 = 4\ kg$

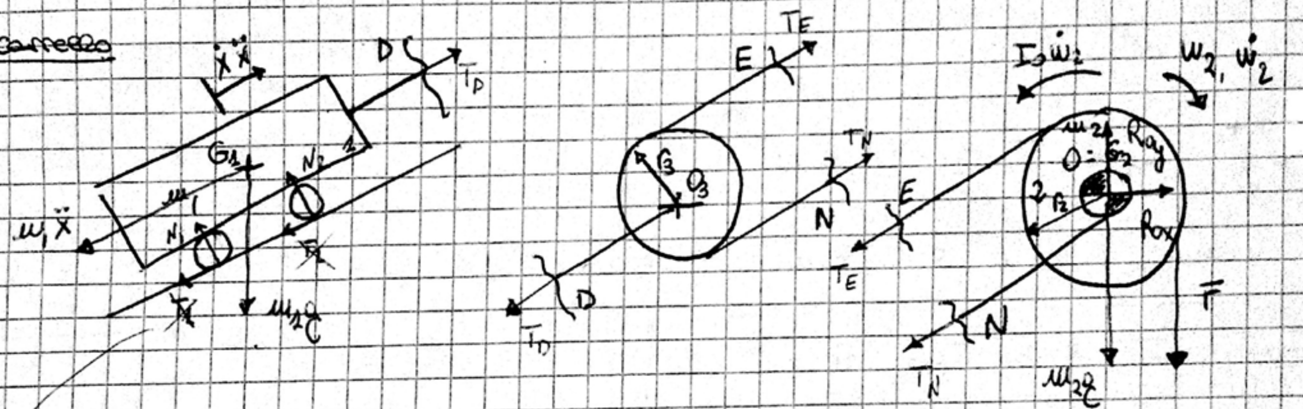
m_3 e attriti trascurabili

$V_i = \dot{x}_i = 0 = \dot{x}_A$

$\alpha = 30°$ $F = 250\ N$ $AB = 2m$ V_B ?

Diagrammi di corpo libero

carrello



N_1, T_1, N_2, T_2 sono le reazioni delle ruote sul terreno.

↳ T_1 e T_2 sono trascurabili poiché l'attrito non viene preso in considerazione.

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$x(t) = \underset{0}{X_0} + \underset{0}{V_0} t + \frac{1}{2}\ddot{x}t^2$$

$$\boxed{X_{AB} = \frac{1}{2}\ddot{x}t^{*2}}$$

$AB \rightarrow V_A = 0$, $V_B = ?$

il tempo di entrambe le equazioni è lo stesso, quindi:

$$v(t) = \underset{0 \ \ V_A}{V_0} + \ddot{x}t \longrightarrow \boxed{V_B = \ddot{x}t^*}$$

$$t = \frac{V_B}{\ddot{x}}$$

$$X_{AB} = \frac{1}{2}\ddot{x}\left[\frac{V_B}{\ddot{x}}\right]^2 = \frac{1}{2}\cancel{\ddot{x}} \cdot \frac{V_B^2}{\ddot{x}^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}\frac{V_B^2}{\ddot{x}} \longrightarrow \boxed{V_B = \sqrt{2\ddot{x}X_{AB}}}$$

Scanned by CamScanner

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 174

$2\ddot{x} = r_2 \dot{\omega}_2$

Sostituendo nelle eq precedenti è:

$\nearrow^{+}_{\alpha}$ $\quad T_D - m_1 \ddot{x} - m_1 g \sin\alpha = 0$

$O \circlearrowright^{+}$ $\quad I_o \left[\frac{2\ddot{x}}{r_2}\right] + \left(\frac{T_D}{2}\right) r_2 - F r_2 = 0$

$\left(\frac{T_D}{2}\right) \to T_E$

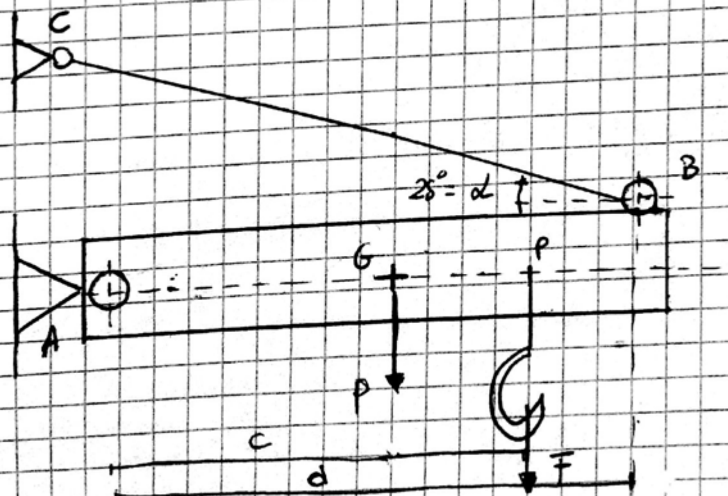
$\Downarrow$

$$I_o = I_{G_2} = \frac{m_2 r_2^2}{2}$$

$$\ddot{x} = \frac{2F - m_1 g \sin\alpha}{m_1 + 4\frac{I_o}{r_2^2}} = \frac{2F - m_1 g \sin\alpha}{m_1 + \cancel{4}^{2}\left[\frac{m_2 r_2^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\right]\frac{1}{\cancel{r^2}}} = \boxed{\ddot{x} = 4{,}69\ m/s^2}$$

$$\boxed{V_B = \sqrt{2 x_{AB} \ddot{x}} = 4{,}33\ m/s}$$

BRACCIO DI SUPPORTO



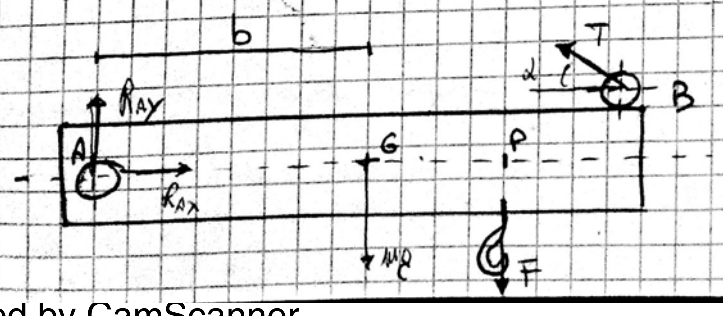
0,25 m = a

F = 10 kN

P = mg = 4666 N

$m_{trave} = 95 \cdot 5 = 475\ Kg$

Diagramma trave



$a = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25\ m$

$b = 2{,}5 - 0{,}12 = 2{,}38\ m$

$c = 3{,}5 - 0{,}12 = 3{,}38\ m$

$d = 5 - 0{,}12 = 4{,}88\ m$

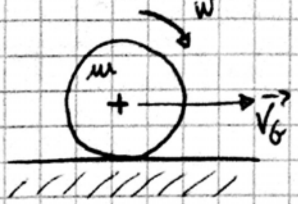
Scanned by CamScanner

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 174

$E_{p_g} = mgh$

$L_{F_{peso}} = -mgh \quad [J]$

$$\text{Energia cinetica} = \underbrace{\tfrac{1}{2} m V_G^2}_{\text{traslazione}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} I_G \omega^2}_{\text{rotazione}}$$



PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

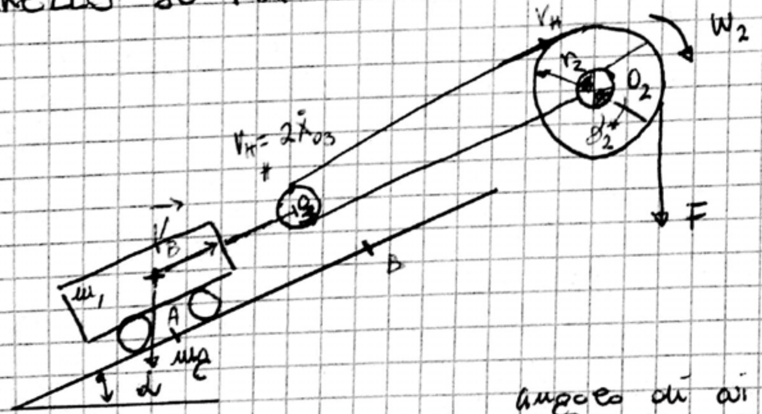
$$L_{F_{est}} + L_{F_{int}} = \Delta E_{cin} + \Delta E_{p_g} + \Delta E_{p_{el}}$$

$L_{F_{est}}$: No F peso, No F inerzia

$L_{F_{int}}$: attrito

↳ poichè vengono prese in considerazione nel secondo membro dell'equazione

CARRELLO SU PIANO INCLINATO

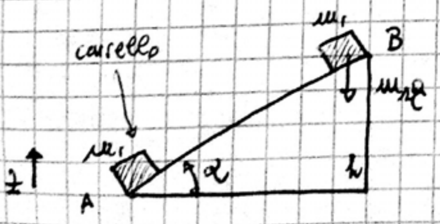


$V_A = 0$

$V_B = ?$

$AB = 2m$

$F_{est} \Rightarrow F \Rightarrow L_{F_{est}} = F\vartheta_2^*$ ← angolo di cui gira la puleggia mentre il carrello sale.



$h = AB \sin\alpha$

$\underbrace{E_{p_g A} = 0 \ (i) \quad E_{p_g B} = m_1 g h \ (f)}$

ΔE_{p_g} → variazione energie istante iniziale e finale

Scanned by CamScanner

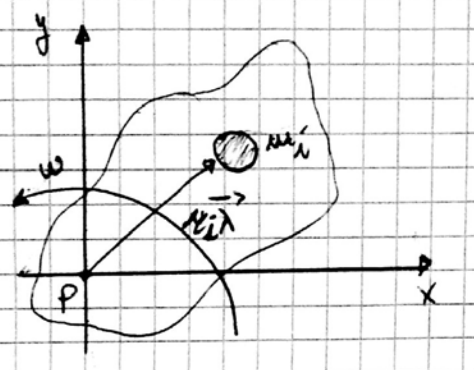
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} F_{est_i} = \frac{d\vec{Q}}{dt}}$$

- Se in un sistema isolato si ha:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{est_i} = 0} \longrightarrow \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{Q} = cost}$$

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE QUANTITÀ DI MOTO

MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO



$$\vec{K}_P = \sum_{i=1}^{n} r_i\vec{\lambda} \wedge \underbrace{(m_i \dot{r}_i\vec{\lambda})}_{\vec{Q}_i}$$

$$\vec{K}_P = \sum_{i=1}^{n} r_i\vec{\lambda} \wedge m_i \underbrace{\left[\omega\vec{k} \wedge r_i\vec{\lambda}\right]}_{\dot{r}_i\vec{\lambda}} = \sum_{i=1}^{n}\left[r_i^2 m_i \omega\right]\left[\vec{\lambda} \wedge \vec{\mu}\right]$$

$$\vec{\lambda} \wedge \vec{\mu} = \vec{\nu} \quad (\mu\nu)$$

$$\vec{K}_P = \sum_{i=1}^{n} (m_i r_i^2)\,\omega\,\vec{\nu} \quad (\perp \text{ piano})$$

$$\boxed{\vec{K}_P = I_P\,\omega\,\vec{\nu}} \quad \text{nel piano } P = G \Rightarrow \boxed{\vec{K}_G = I_G\,\omega\,\vec{\nu}}$$

$$\vec{M}_{in\,G} = -I_G\,\dot{\vec{\omega}} = -\frac{d\vec{K}_G}{dt}$$

EQUILIBRIO

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{est_i} + \vec{M}_{in_G} = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{est_i} = -\vec{M}_{in_G} = +\frac{d\vec{K}_G}{dt}$$

Scanned by CamScanner

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 174

$Q_i = m_1 V_{1i}$

$Q_f = m_1 \vec{V}_{1f} + m_2 \vec{V}_{2f}$

si urtano e poi si respingono

URTO ELASTICO TRA I CARRELLI → I carrelli all'istante finale sono separati

⇓

$Q_i = Q_f \Rightarrow m_1 V_{1i} = m_1 \underset{?}{V_{1f}} + m_2 \underset{?}{V_{2f}}$

Ciò porta alla conservazione di E_{cin}:

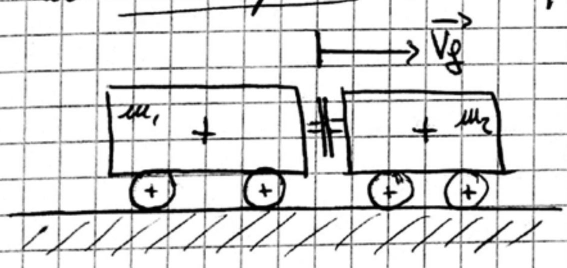
$E_{cin_i} = E_{cin_f} \rightarrow \frac{1}{2} m_1 \underset{?}{V_{1f}^2} + \frac{1}{2} m_2 \underset{?}{V_{2f}^2} = \frac{1}{2} m_1 V_{1i}^2$

Mettendo a sistema le 2 eq. trovo le incognite V_{1f} e V_{2f}.

Da ciò:

URTO ELASTICO ⇒ CONSERVAZIONE ENERGIA (no dissipazione)

- Se nell'istante finale si ha questa configurazione:



Dopo l'urto si muovono con le stesse velocità V_f, uniti.

↓

Si ha lo stesso la CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Si crea un nuovo sistema di massa $m_1 + m_2$ con velocità V_f

$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{est_i} = 0 \longrightarrow \vec{Q} = cost$

$Q_i = m_1 V_{1i}$
$Q_f = (m_1 + m_2) V_f$

URTO ANELASTICO (dissipazione di energia)

↓

$m_1 V_{1i} = (m_1 + m_2) V_f \rightarrow V_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) V_{1i}$

$\Delta E_{cin} = E_{cin_f} - E_{cin_i} \neq 0$

$\Delta E_{cin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_f^2 - \frac{1}{2} m_1 V_{1i}^2$ → ENERGIA DISSIPATA DALL'URTO DEI 2 CARRELLI

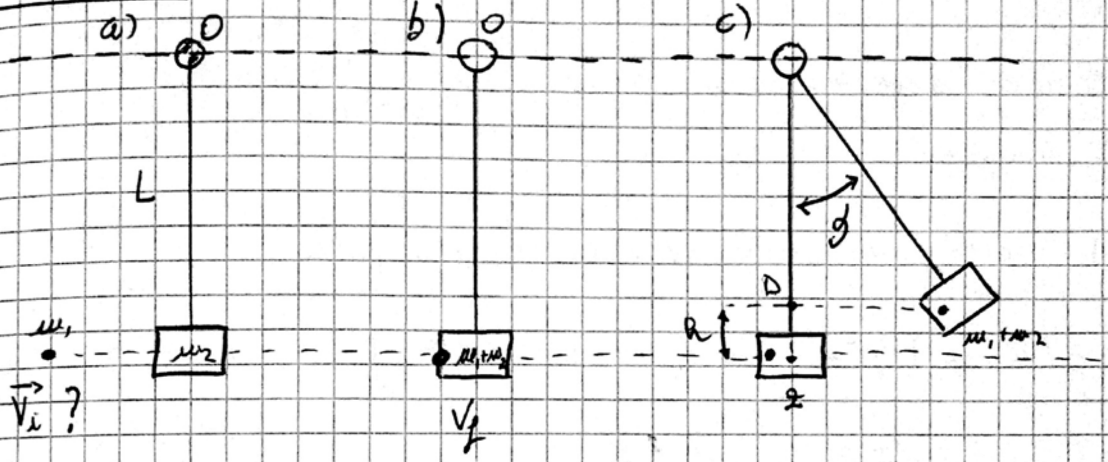
$m_1 V_1 + m_2 V_2 - m_3 V_3 = (m_1 + m_2 + m_3) V_f \Rightarrow V_f = 0{,}0987 \ m/s$

Dissipazione energia:

$$\Delta E_{cin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3) V_f^2 - \frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 + m_3 V_3^2)$$

$$= 16\,577{,}65 \ J$$

ESERCIZIO



E_{cin} dissipata ? $m_1 = 60 \ Kg$ $m_2 = 30 \ Kg$ $L = 3 \ m$ $\vartheta = 15°$

a) → b) URTO ANELASTICO

$Q_a = m_1 V_i$
$Q_b = (m_1 + m_2) V_f$
$\Big] \ Q_i = Q_f \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{est_i} = 0$

$m_1 V_i = (m_1 + m_2) V_f$?

b) → c) principio di conservazione dell'energia

$\cancel{L_{est}} + \cancel{L_{int}} = \Delta E_{cin} + \Delta E_{pg}$
$\quad 0 \qquad\quad 0$

$\frac{1}{2}\cancel{(m_1 + m_2) V_c^2} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_f^2 = \Delta E_{cin}$
$\qquad 0$
c) $\qquad\qquad$ b)

$\Delta E_{pg} = (m_1 + m_2) g h - 0$
$\qquad\qquad$ c) $\qquad\qquad$ b)

1) $\vec{F}_{in_G}$: $\omega = cost$ $\dot{\omega} = 0$

↓

nasce l'accellerazione centripeta o normale

$\vec{a}_n = -\omega^2 (P-G)$ ⟶ FORZA DI INERZIA CENTRIFUGA

$\vec{a}_{t_c} = \dot{\omega} \vec{K} \wedge (P-G)$

0

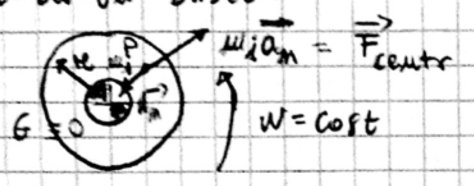
↓

nasce in contrapposizione ad $\vec{a}_n$

$\vec{F}_{centr}$

forza centripeta ⟷ forza centrifuga.

Nel caso di un disco:



ROTORE ⟶ si presuppone che la massa sia tutta concentrata nel baricentro.

$\overline{PG} \to 0$ (zero)

⇓

Equilibriamo il rotore in modo da avere la maggior parte della massa in G.

$\cancel{a_m = \omega^2 (GG)}$

$F_{in_G} = F_{n_{centr}} = m a_n = 0$

$[\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu}]$ ⟶ terna centrale inerziale solidale con il rotore.

↓

1) È una terna di simmetria

2) È una terna principale di inerzia.

3) È centrata nel baricentro ⟹ è anche TERNA CENTRALE DI INERZIA.

Il fatto che $\vec{\omega}$ sia intorno a $\vec{K}$, produce una $\vec{M}_{in_G}$ = coppia di inerzia perchè $\vec{K} \neq \vec{\nu}$ ⟶ $\vec{\nu}$ asse del rotore.

$$\vec{M}_{in_G} = -\frac{d\vec{K}_G}{dt}$$

$$\vec{K}_G = I_\lambda p \vec{\lambda} + I_\mu q \vec{\mu} + I_\nu r \vec{\nu}$$

Scanned by CamScanner

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 174

Quindi ora posso derivare $\vec{K_G}$ e trovare così l'espressione di $\vec{M_{imG}}$:

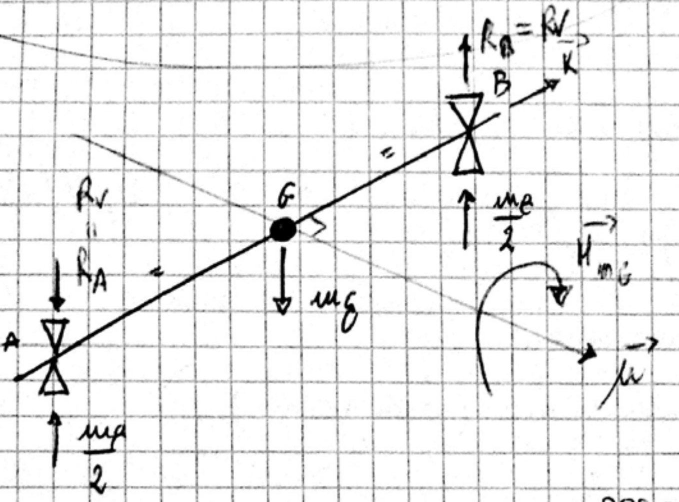
$$\frac{d\vec{K_G}}{dt} = \left[I_\lambda \omega \sin\alpha\right]\left[\omega\cos\alpha\right]\vec{\mu} + \left[I_v \cos\alpha\right]\left[-\sin\alpha\, \omega\right]\vec{\mu}$$

$$= \left[I_\lambda \omega^2 \sin\alpha\cos\alpha\right]\vec{\mu} - \left[I_v \omega^2 \sin\alpha\cos\alpha\right]\vec{\mu}$$

I_v = momento di inerzia assiale $= \frac{m r^2}{2} = 3{,}1\ Kg\ m^2$

$I_\mu = I_\lambda$ = mom. DIAMETRALE $= \frac{m}{4}\left[r^2 + \frac{h^2}{3}\right] = 7{,}3\ Kg\ m^2$

$$\vec{M_{mG}} = -\frac{d\vec{K_G}}{dt} = -1808\ \vec{\mu}\ [Nm]$$



Il peso si scarica equalmente sui supporti A e B.

↓

Proprio per questo motivo, insieme alla rotazione, nei supporti nascono le reazioni R_A e R_B

↓

peso ← SOLLECITAZIONI STATICHE

momento inerzia ← SOLLECITAZIONI DINAMICHE

$$R_V = \frac{M_{imG}}{l} = 3014\ N \qquad l = AB$$

EQUILIBRIO VERTICALE: ↑+

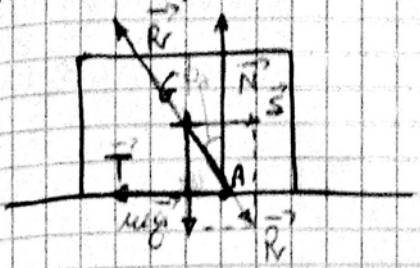
A: $-R_V + \frac{mg}{2} = R_A = -1662\ N$

B: $R_V + \frac{mg}{2} = R_B = 4366\ N$

Scanned by CamScanner

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 174

, Se applico una forza di trazione:



Il terreno reagisce con una forza in modulo uguale a R, stessa retta d'azione ma verso opposto

La verticale per A non passa più per G.

T = componente tangenziale di attrito di aderenza ($V=0$) è una forza reattiva opposta alla possibile direzione di moto.

ATTRITO → opposto alla direzione del moto
→ sono forze incognite
→ non è lineare

R = reazione del terreno legata ad N e a T

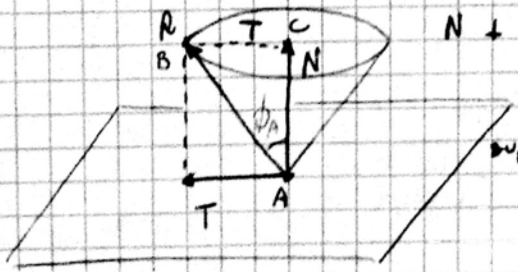
N e T sono qui legate dalla legge dell'attrito di aderenza. ($V=0$)

$$\boxed{T \leq f_a N}$$

f_a = coeff. di attrito di aderenza.
↳ dipende dalla natura dei corpi a contatto e dallo stato delle superfici.

$\phi_A = \hat{N;R}$ = ANGOLO DI ADERENZA

CONO DI ATTRITO DI ADERENZA (modello geometrico)



N ⊥ alla superficie di contatto

superficie di contatto

$T \leq f_a N \qquad T_{lim} = f_a N$

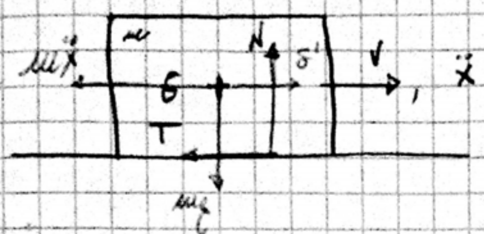
In $\hat{ABC}$ → $T_{lim} = tg\,\phi_A\, N$
e poichè $T_{lim} = f_a N$ } → $\boxed{tg\,\phi_A = f_a}$ $\phi_A = arctg\, f_A$

aumentando T si raggiunge T_{lim}

$\uparrow S \Rightarrow \uparrow T \quad , \quad \uparrow T \Rightarrow T_{lim}$

Scanned by CamScanner

- $V \neq 0$ (STRISCIAMENTO) $\rightarrow$ $V \neq cost$



se $V \neq cost \Rightarrow \ddot{x} \Rightarrow S' \neq T$ $\nearrow$ $S' < T \Rightarrow \ddot{x} < 0$ decellera

$\searrow$ $S' > T \Rightarrow \ddot{x} > 0$ accellera

$\downarrow$

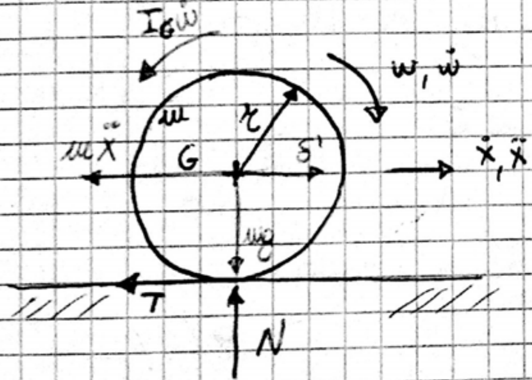
si deve tenere conto della FORZA D'INERZIA.

$T = fN$ $\qquad f = tg\,\phi$ $\rightarrow$ valgono allo stesso modo.

$S' \Rightarrow$ azione motrice $\neq$ da T $\rightarrow$ AZIONE RESISTENTE

- L'azione motrice attraverso l'attrito produce SEMPRE DISSIPAZIONE DI ENERGIA sotto forma di CALORE.

RUOTA CONDOTTA O TRASCINATA



$\xrightarrow{+}$ $\quad S' - m\underline{\ddot{x}} - \underline{T} = 0 \quad 1)$

$\uparrow +$ $\quad \underline{N} - mg = 0 \quad 2)$

$O \circlearrowright^{+}$ $\quad I_G \underline{\underline{\dot{\omega}}} - Tr = 0 \quad 3)$

$\downarrow$

3 eq e 4 incognite

RUOTA $\nearrow$ a) 1 GdL se $\dot{x}$ e ω ($\ddot{x}$ e $\dot{\omega}$) sono legate

$\downarrow$

PURO ROTOLAMENTO $\rightarrow$ ADERENZA

$\searrow$ b) 2 GdL se $\dot{x}$ e ω ($\ddot{x}$ e $\dot{\omega}$) indipendenti.

$\downarrow$

NO PURO ROTOLAMENTO

$\downarrow$

STRISCIAMENTO

Scanned by CamScanner

$\xrightarrow{+}$ $-m\ddot{x}_G + T = 0$ 1)

$+\uparrow$ $N - P = 0$ 2)

$G \circlearrowright^{+}$ $I_G\dot{\omega} - C_M + Tr = 0$ 3)

Ipotesi: $\begin{cases} A \equiv C_V \rightarrow \text{puro rotolamento} \\ \dot{x} = r\omega \;;\; \ddot{x} = r\dot{\omega} \quad \text{in } G \\ \boxed{T \leq f_a N} \rightarrow \text{CONDIZIONE DI ADERENZA} \quad 4)^* \end{cases}$

Si deve verificare e vedere se è valida questa relazione

$T > f_a N \Rightarrow \ddot{x} \neq r\dot{\omega} \;,\; \dot{x} \neq r\omega$

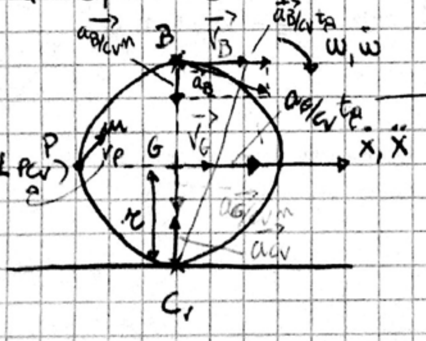
↳ NO PURO ROTOLAMENTO

↳ ATTRITO DI STRISCIAMENTO → 2 GdL

$\boxed{T = f N}$ $4)^*$

Quindi la 4° equazione dipende dal sistema in cui ci troviamo.

- RIPRESA CINEMATICA



$\vec{a}_{G/C_V t_g} = \dot{\omega}\vec{K} \wedge (G - C_V)$

1) VELOCITÀ:

$\vec{V}_G = \vec{V}_{C_V} + \omega\vec{K} \wedge (G - C_V)$ $\quad |V_G| = \omega(\overline{GC_V}) = \omega r$

$\vec{V}_B = \cancel{\vec{V}_{C_V}} + \omega\vec{K} \wedge (B - C_V)$ $\quad |V_B| = \omega(\overline{BC_V}) = \omega(2\overline{GC_V}) = \omega(2r) = 2V_G$

2) ACCELLERAZIONI:

$\vec{a}_G = \cancel{\vec{a}_{C_V}} + \dot{\omega}\vec{K} \wedge (G - C_V) - \cancel{\omega^2(\overline{GC_V})}$

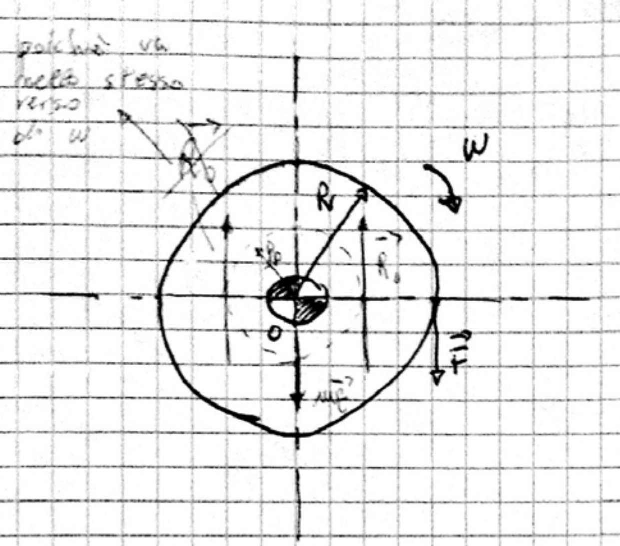
$\updownarrow$

$\vec{a}_{C_V} = \omega^2(\overline{G - C_V})$

Scanned by CamScanner

- $\vec{Q}$ è la reazione vincolare sulla cerniera e segue l'attrito al perno
- L'attrito al perno non sposta da O né peso né inerzia.

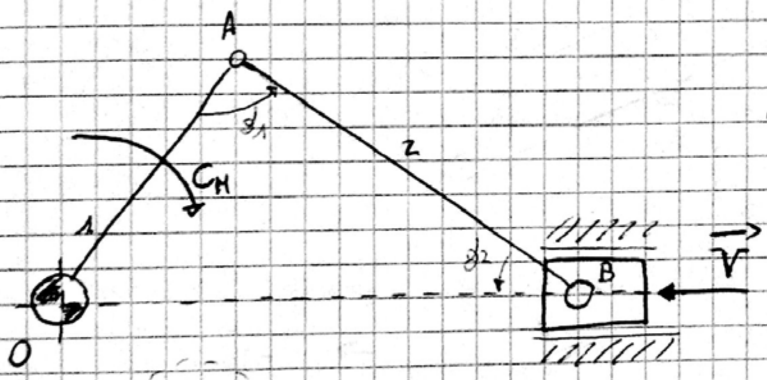
ESEMPIO



$f_p = r_p \sin \phi_p$

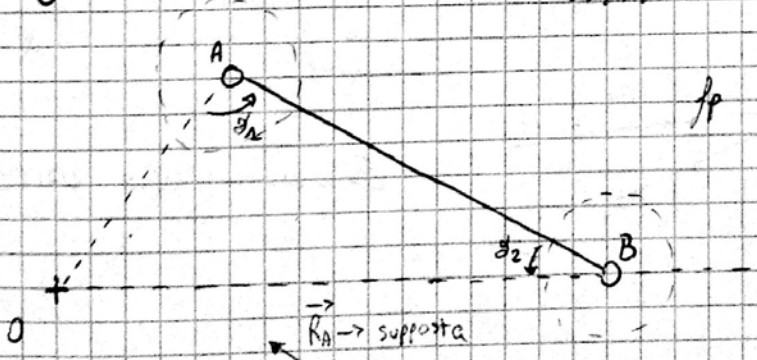
R = raggio del tamburo

SISTEMA BIELLA MANOVELLA (con attrito in A e in B)



ϑ_1 sta aumentando

ϑ_2 diminuisce

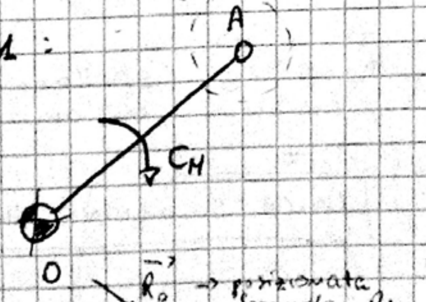


f_p

cerchi di attrito

$\vec{R}_A$ → supposta

corpo 1:



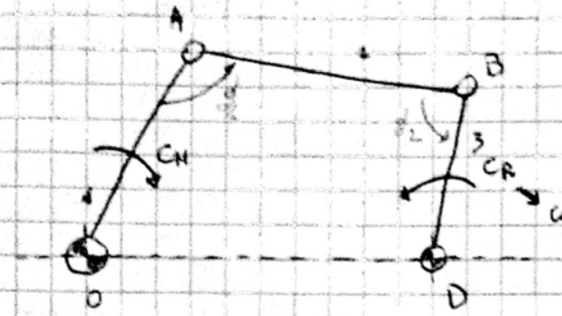
$\vec{R}_O$ → posizionata secondo R_A

$\vec{R}_A \parallel \vec{R}_O$

$\vec{R}_A$ è opposta a C_M

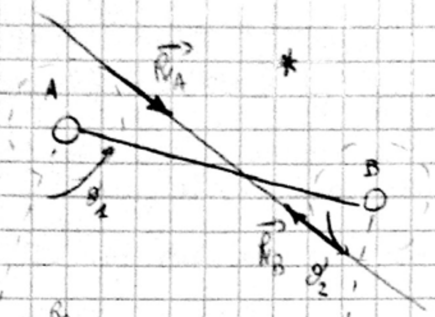
Scanned by CamScanner

QUADRILATERO ARTICOLATO (con attrito nei perni)

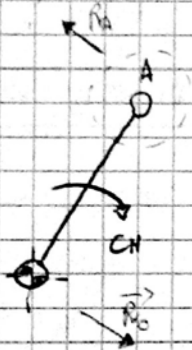


ATTRITO IN A E B

$C_R \rightarrow$ coppia resistente



OA :

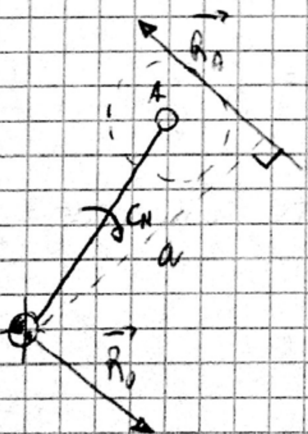


R_A ed R_O formano una coppia opposta a C_M

$\downarrow$

Si conoscono in verso ma non in direzione *
Per questo si usa la tg ai cerchi di attrito.

Conoscendo la direzione di R_A cambia il diagramma di $\overline{OA}$:

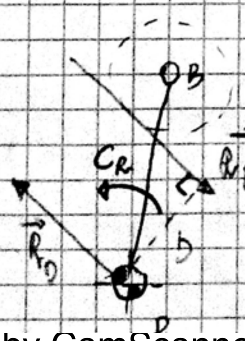


$\vec{R_O} \parallel \vec{R_A}$

$|R_O| = |R_A|$

$O)\; C_M - R_A a = 0$

$\overline{BD}$:



$\vec{R_B} \parallel \vec{R_D}$

$|R_B| = |R_D|$

$D)\; C_R - R_B b = 0$

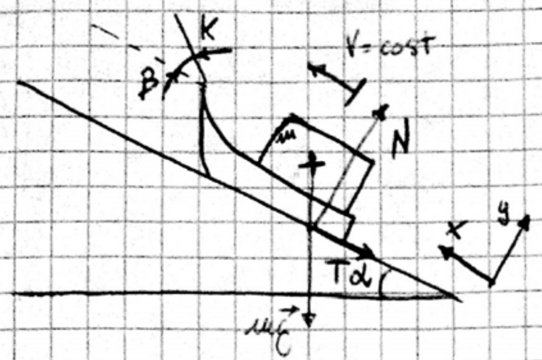
$\vec{R_B}$ ed $\vec{R_D}$ formano una coppia che si oppone a C_R

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 174

ESERCIZI ATTRITO

SLITTA SU PIANO INCLINATO

$tg\,\alpha = \frac{30}{100} \rightarrow \alpha = 16{,}69°$



$m = 500\ Kg$

$\alpha = 30\%$

$f = 0{,}2$

K_{MIN} ?

β ?

x^{+}: $K\cos\beta - T - mg\sin\alpha = 0$ 1)

y^{+}: $K\sin\beta - mg\cos\alpha + N = 0$ 2)

$T = fN$ 3)

Da queste relazioni si ricava il $K(\beta)$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{aligned} N &= mg\cos\alpha - K\sin\beta \\ T &= K\cos\beta - mg\sin\alpha \\ T &= fN \end{aligned}\right\} \longrightarrow K(\beta) = \frac{f(mg)\cos\alpha + mg\sin\alpha}{\underbrace{\cos\beta + f\sin\beta}_{G(\beta)}}$$

$K_{MIN} \Rightarrow G(\beta)_{MAX}$

cerco il massimo

$$\frac{dG(\beta)}{d\beta} = -\sin\beta + f\cos\beta = 0$$

$$\Rightarrow tg\,\beta = f = tg\,\phi \Rightarrow \boxed{\beta = \phi = arctg\,f = 11{,}31°} \quad 4)$$

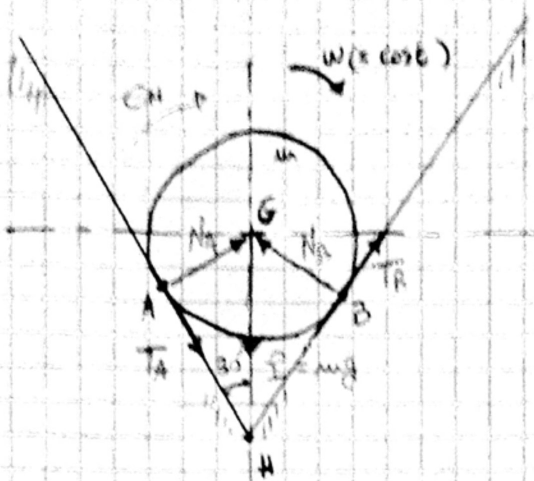
$$\frac{d^2G(\beta)}{d\beta^2} < 0 \qquad \beta = 0 / 90°$$

Usando l'eq. 4) si trova il valore minimo di K:

$$K_{min}(\beta) = 2{,}3\ KN$$

CUSCINETTO A V AD ATTRITO SECCO

10/4/13



$d = 30$ mm

$n = 100$ giri/minuto

$\vartheta = 30°$

$m = 100$ Kg

$\rho_i = 0{,}2$ m

$f = 0{,}25$

$\phi = 14°$

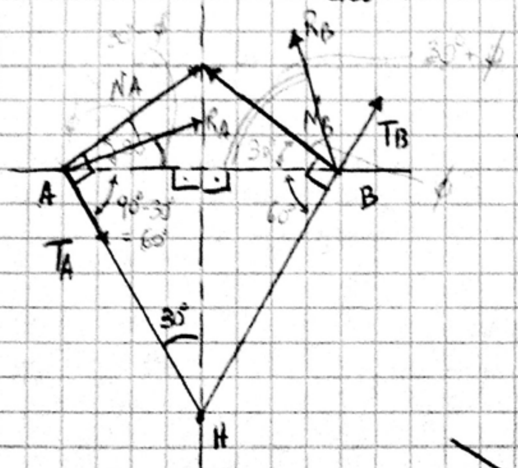
ρ_i = raggio di inerzia della ruota

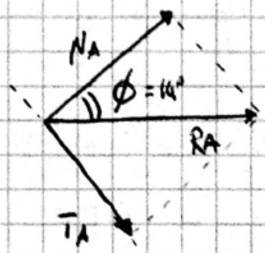
$$\begin{cases} I_G = m\rho_i^2 = 4 \text{ Kg m}^2 \\ I_G = \dfrac{mr^2}{2} \end{cases}$$

→ 2 formule che portano allo stesso risultato
↓
Dipende dai dati che ho, la decisione di quale formula usare.

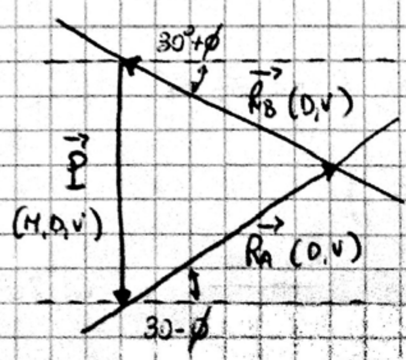
V = cost → no inerzie.

ω in senso orario → la ruota preme di più su B, mentre tende a staccarsi da A.





TRIANGOLO DELLE FORZE:



• Equazione di equilibrio:

$$\vec{P} + \vec{R_A} + \vec{R_B} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{est_i} = 0$$

Scanned by CamScanner

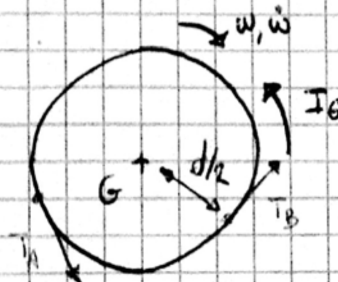
Spiegazione formula calcolo Kcal/h :

$$W = \frac{J}{s} = \left[\frac{cal}{4,126}\right] \cdot \frac{1}{s} = \left[\frac{cal}{4,186}\right] \cdot \left[\frac{3600}{h}\right] = \left[\frac{cal}{4,186}\right]\left[\frac{3600}{h}\right] \cdot \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{Kcal}{h}$$

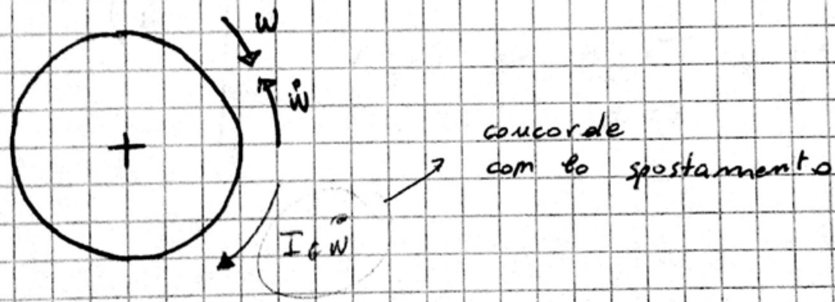
- Si suppone che non ci sia la forza motrice, la velocità quindi * decellera e nasce così un'accellerazione mettendo in gioco l'inerzia:

$$G \curvearrowleft^{+} \quad I_G \dot{\omega} + (T_A + T_B)\frac{d}{2} = 0$$

$$\dot{\omega} = -\frac{(T_A + T_B)\, d/2}{I_G} = (\text{decel.}, <0) = - \dots \ \frac{rad}{s^2}$$



Altro possibile diagramma di corpo libero:



- Calcolo del tempo di arresto nella nuova configurazione:

$$\omega(t) = \omega_0 + \dot{\omega} t$$

$$\downarrow$$

$$0 = \omega_0 + \dot{\omega} t \qquad \omega_0 = \frac{2\pi n}{60}$$

$$t = -\frac{\omega_0}{\underset{(<0)}{\dot{\omega}}} = 6\ s$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 174

Quindi per il calcolo con $\alpha = 45°$:

$T = fN$

$\ddot{\vartheta} = \dot{\omega} = 3{,}03 \ rad/s^2$

$\ddot{x} = \dfrac{mg \sin\alpha - T}{m} = 5{,}89 \ m/s^2$

$T = fN = (0{,}15)(69\,367{,}17 \ N)$

- Tempo trascorso per compiere uno spostamento di 200 m?

$x(t) = \cancel{x_0} + \cancel{\dot{x}_0} t + \frac{1}{2}\ddot{x} t$

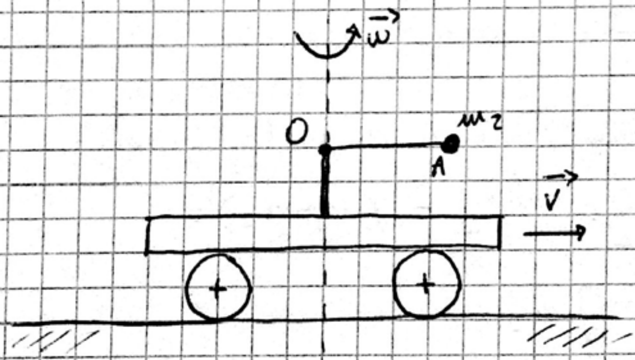
$\underbrace{200 \ m}_{s^*} = \frac{1}{2}\ddot{x} t^{*2}$ $\qquad t^* = \sqrt{\dfrac{2s^*}{\ddot{x}}}$ $\quad 10° \Rightarrow t = 21{,}3 \ s$; $\quad 45° \Rightarrow t = 8{,}24 \ s$

$\vartheta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\vartheta} t^2 \Rightarrow \vartheta_{10°}, \vartheta_{45°}$ a t^*

$\alpha = 10° \Rightarrow \dfrac{\vartheta^*_{10°}}{2\pi} = 63{,}68$ giri

$\alpha = 45° \Rightarrow \dfrac{\vartheta^*_{45°}}{2\pi} = 16{,}48$ giri.

CARRELLO $\qquad$ 12/4/13



$m_1 = 20 \ Kg$

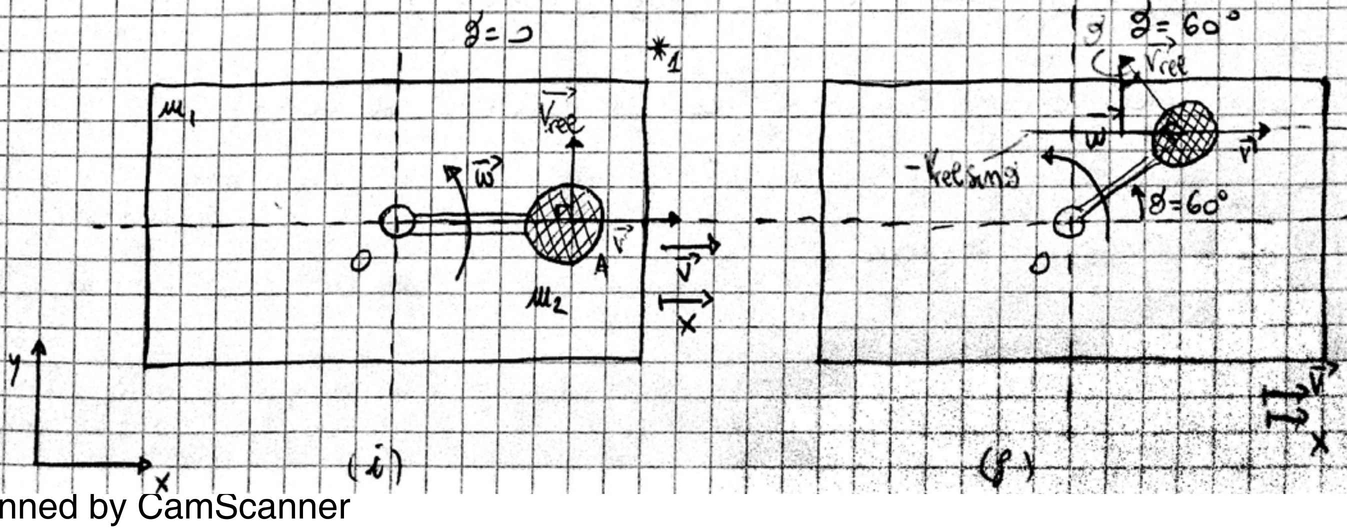
$m_2 = 5 \ Kg$

$\overline{OA} = r = 0{,}4 \ m$

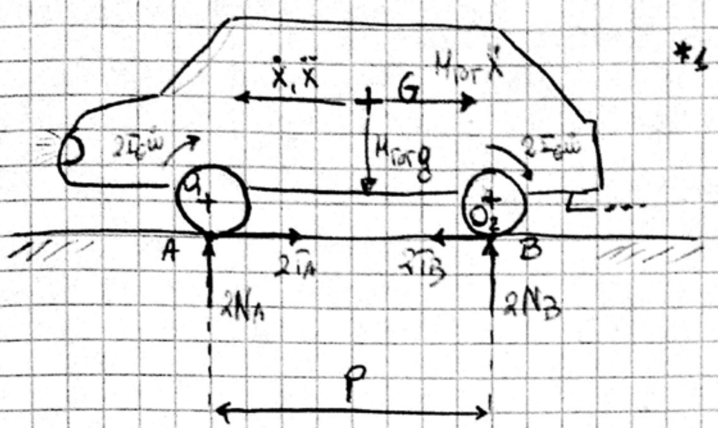
$\omega = 4 \ \frac{rad}{s}$

$v = 0{,}6 \ m/s \ (\vartheta = 0°)$

? v' a $\vartheta = 60°$



MACCHINA IN PARTENZA



*1

$M_{tot} = 1360\ Kg$

$P = M_{tot}\,g = 13341{,}6\ N$

$p = 2{,}3\ m$

$r = 0{,}325\ m$

$X_G = 1{,}30\ m$

$Z_G = 0{,}72\ m$

$f = 0{,}2 \quad f_a = 0{,}55$

$m_r = q = 10\ Kg$

$\rho_i = 0{,}2\ m$

$C_{M\,max}$? $\quad \ddot{x}_{max}$? $\quad R_A$? $\quad R_B$?

$I_G = \rho_i^2\, q = 0{,}4\ Kg\,m^2$ (ruota)

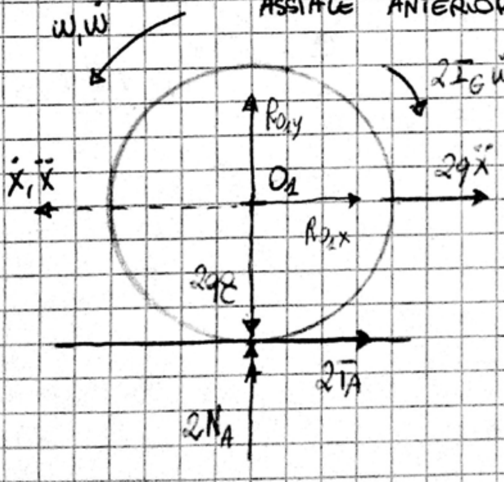
Sono motrici soltanto le ruote posteriori → la coppia motrice sarà solo su queste

↓

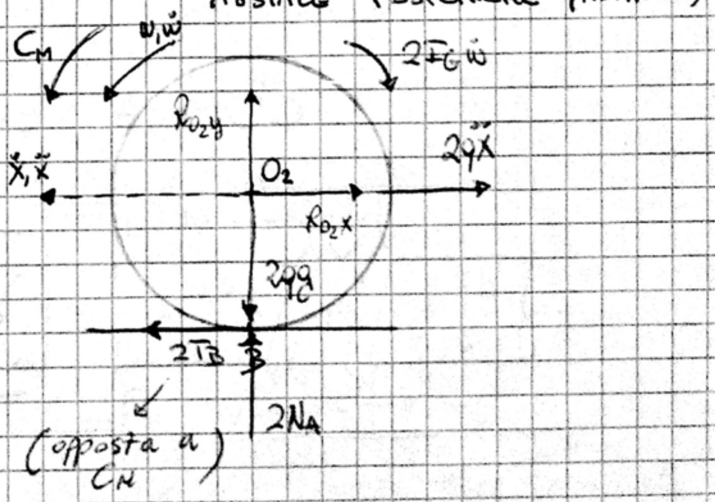
Le ruote anteriori sono semplicemente trascinate.

- Diagrammi di corpo rigido delle ruote:

ASSIALE ANTERIORE



ASSIALE POSTERIORE (MOTRICE)



I valori prendono in considerazione entrambe le ruote anteriori o posteriori.

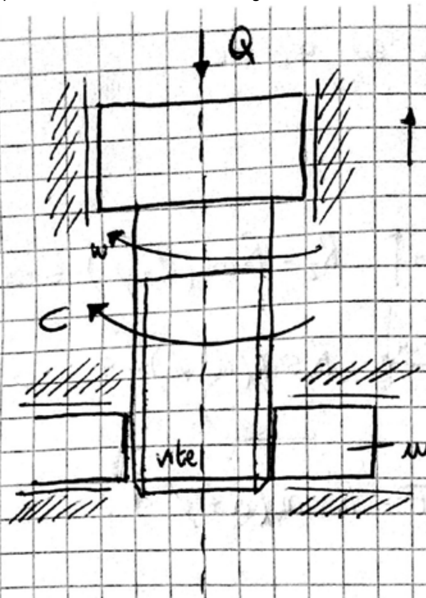
Riporto i valori trovati sul diagramma dell'auto. *1

↓

Sulla figura composta non vengono riportate la coppia motrice e altre grandezze.

↳ di importanza solo i momenti di inerzia e le reazioni in A e B.

Scanned by CamScanner



In questo caso la madrevite ruota e la vite trasla

PROFILI FILETTATURA

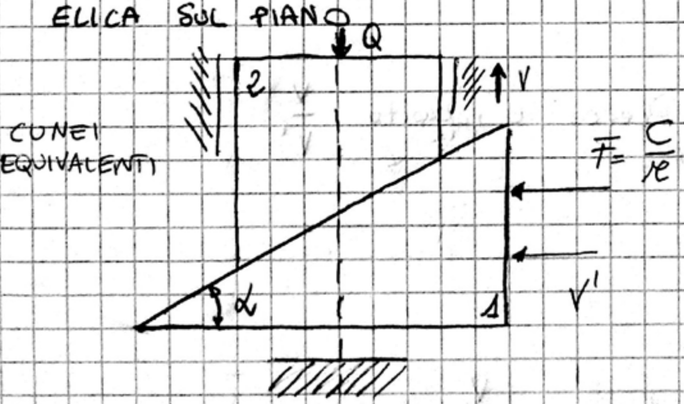
RETTANGOLARE

↓

il nostro studio si sofferma solo su questo tipo di filettatura

TRAPEZIA

ELICA SUL PIANO

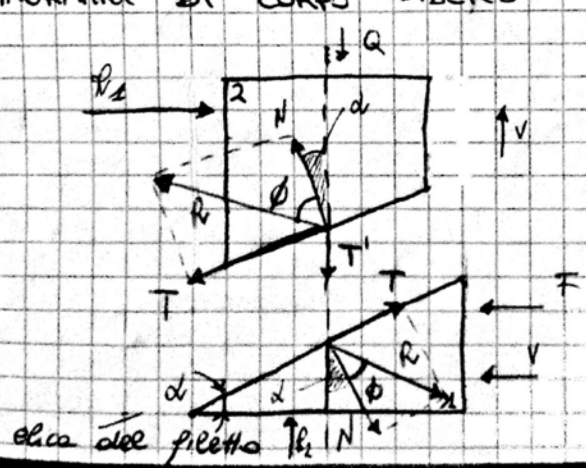


1 madrevite

2 vite

r = raggio medio della vite

DIAGRAMMI DI CORPO LIBERO



T ed N sono le forze di attrito scambiate tra 1 e 2.

$\hat{\phi}$: N, R → angolo di attrito di strisciamento

$\hat{\alpha}$: angolo di inclinazione del filetto (sempre tra N e l'asse)

CONTATTI ESTESI

IPOTESI

Pressione uniforme

Ipotesi USURA (Ip. REYE)

<u>Ipotesi dell'USURA</u>: il volume di materiale asportato nell'unità di tempo per attrito è proporzionale al lavoro fatto dalla forza di attrito nella stessa unità di tempo.

$\Downarrow$

δ = spessore asportato

lavoro delle forze di attrito

$$dV = \left(\frac{d\delta}{dt}\right) dA = K \frac{dL_T}{dt}$$

costante proporzionalità

$$\delta\, dA = K\left[dT \cdot \frac{ds}{dt}\right] \longrightarrow \delta \cancel{dA} = K\left[(f p \cancel{dA})\, V_{rel}\right]$$

$dT = f\,dN = f(p\,dA)$, p = pressione di contatto.

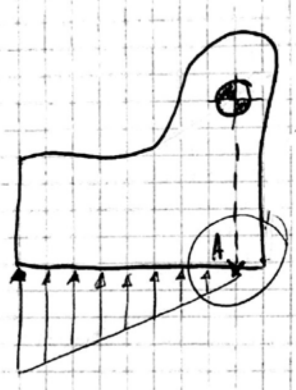
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 174

Corpo 1:

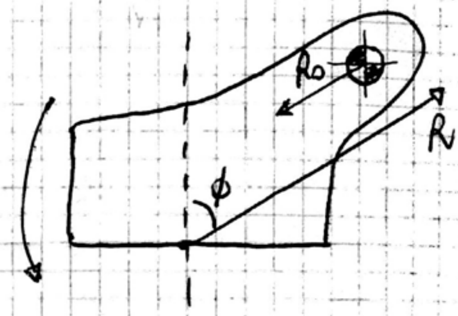
R ed R_0 formano una coppia uguale ed opposta a C:

$C = R d \qquad R = \frac{T}{\sin\phi} = \frac{N}{\cos\phi} \qquad |R| = |R_0|$

$$N x_0 = \int_a^{a+b} (\rho\, dx)\, x \Leftarrow N = \int_A \rho\, dA \rightarrow N x_0 = \int_A (\rho\, dA)\, x = \int_a^{a+b} (\rho \cdot \underbrace{dx \cdot 1}_{dA})\, x$$



PATTINO PARZIALIZZATO

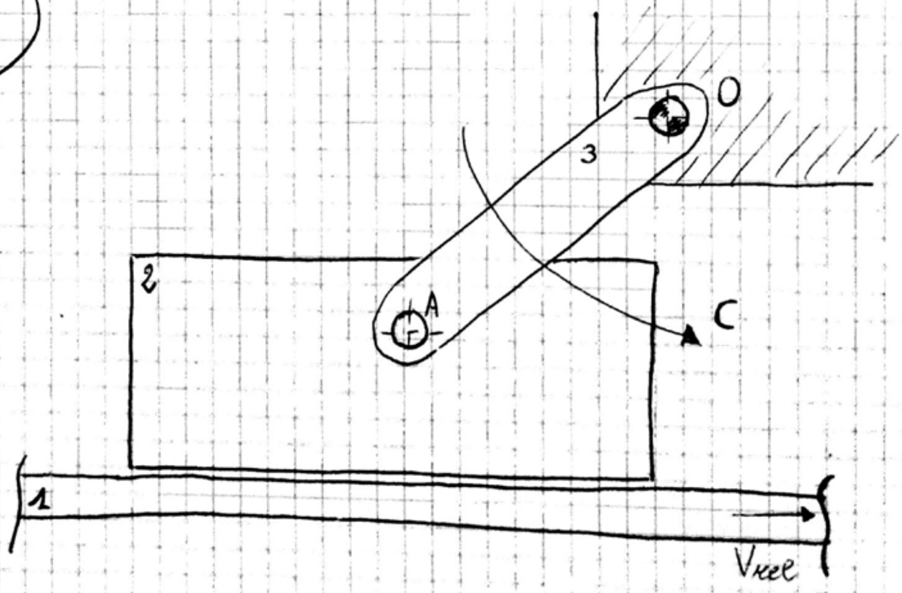


AUTO IMPUNTAMENTO

↓

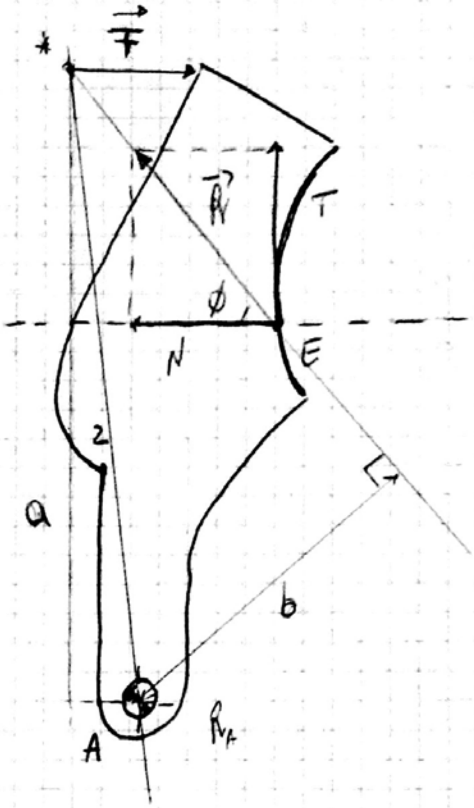
Si forma una coppia in modo spontaneo
↳ R inclinata di ϕ.

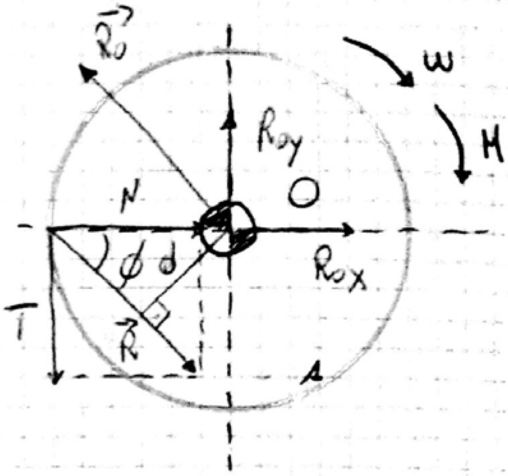
2



1: mastro
3: leva
2: pattino

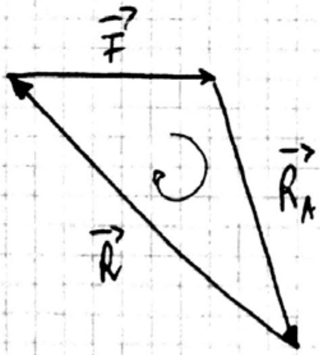
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 174





Scegliamo di non usare l'ipotesi dell'usura, ma l'ipotesi che N e T siano applicate in E (asse orizzontale tamburo) e tangente al tamburo

Dal punto di stella (*) ricavo il TRIANGOLO DELLE FORZE:



$$\vec{F} + \vec{R_A} + \vec{R_0} = 0$$

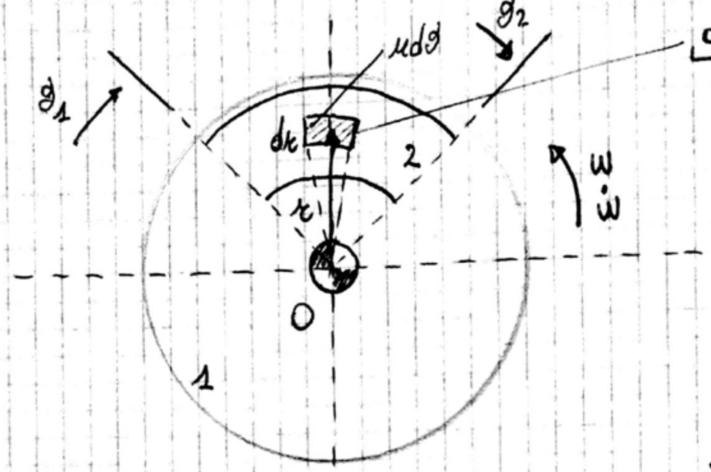
$O)_+ \quad M - Rd = 0 \longrightarrow R$

$A)_+ \quad Fa - Rb = 0 \longrightarrow F$

17/4/13

5 (ACCOSTANETO RIGIDO)

$dA = r\, d\vartheta\, dr$

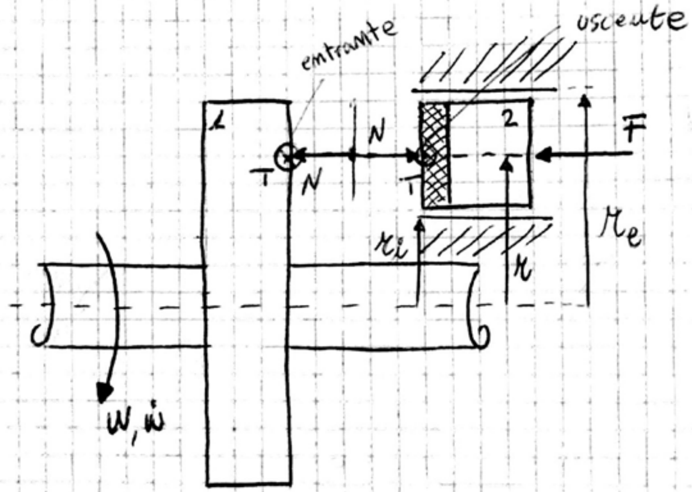


forze di attrito tra pastiglia e disco.

$\delta = cost$

↓

Spessore di materiale asportato.



Ipotesi dell'usura:

$V_{rel} = \omega r$

$$dV = \delta \cancel{dA} = K(f p \cancel{dA})\, V_{rel} \longrightarrow \delta = K f p (\omega r)$$

cost cost cost

costante istante per istante

$$p = \frac{K'}{r}$$ → include tutte le costanti

$r_i \le r \le r_e$

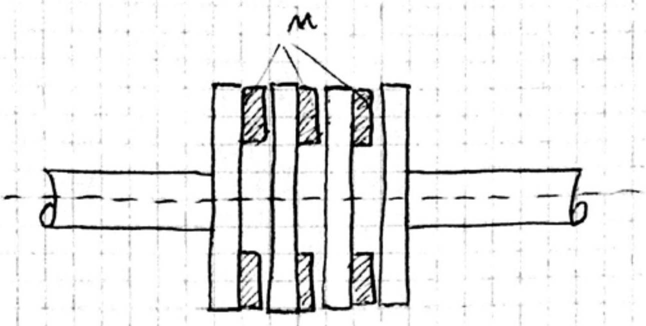
$$K' = \frac{\delta}{K f \omega}$$

p_{MAX} a r_i

p_{MIN} a r_e

$$\boxed{F} = N = \int_A p\, dA = \int_{r_i}^{r_e}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left[\frac{K'}{\cancel{r}}\right]\left[\cancel{r}\, d\vartheta\, dr\right] = \boxed{K'(r_e - r_i)(\vartheta_2 - \vartheta_1)}$$

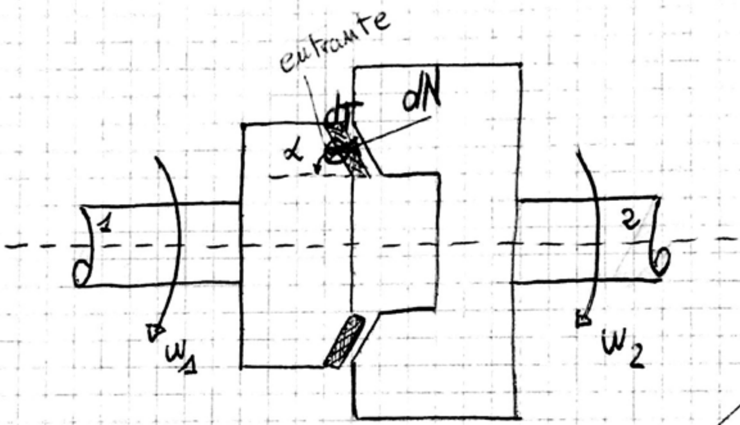
FRIZIONI PIANE MULTIPLE



$$\boxed{C_{frizione} = m f F \frac{(r_e + r_i)}{2}}$$

m = n° superfici di contatto

FRIZIONE CONICA



Ipotesi usura:

$$p = \frac{K'}{r}$$

$$\boxed{C_{frizione} = \frac{f}{\sin\alpha} F \frac{(r_e + r_i)}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$f' > f$$

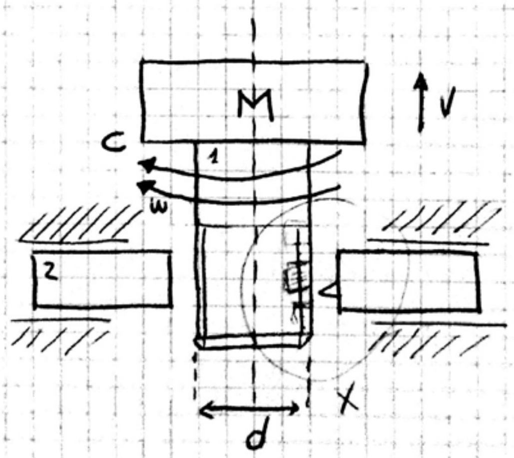
$$\Downarrow$$

perche $\sin\alpha$ al max è 1.

Hanno una coppia (e quindi una potenza) maggiore rispetto alle frizione di prima

ESERCIZI

SISTEMA VITE - MADREVITE



1 - vite

2 - madrevite

M = 100 Kg

d = 30 mm

$\alpha = 3°$

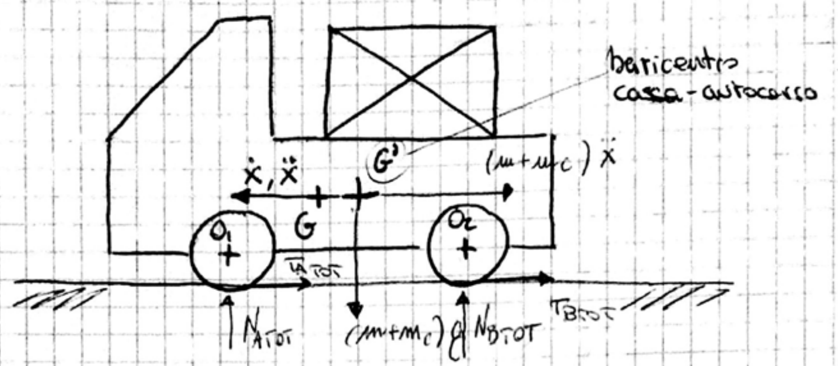
$f = 0,1$

$\phi = 5,7°$

?C ?V $C' = 5\ Nm > C$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 174

AUTOCARRO IN FRENATA



$m = 3'600$ Kg

$m_c = 400$ Kg

$f = 0,25$

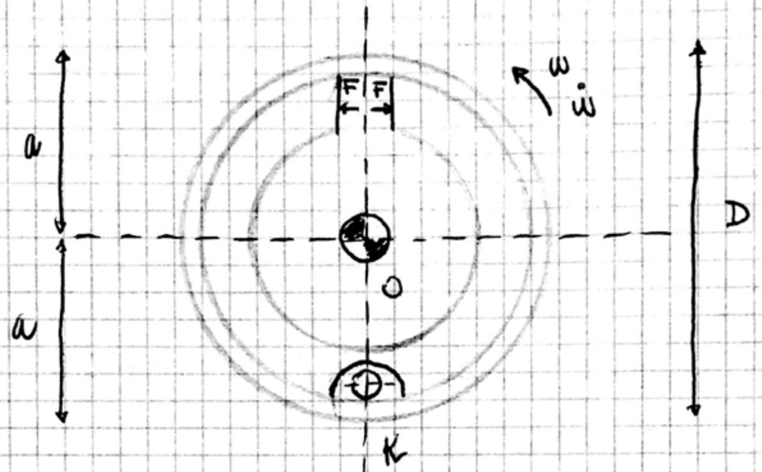
$d = 0,8$ m

$D = 60$ cm

$a = 20$ cm

$\ddot{x} = -3\ m/s^2$ (cost) ↗ il sistema frena

$V_0 = 50$ Km/h $= 13,88$ m/s



? t^*, s^*

? f_a min ?

? $\overline{F}$

- FRENI A TAMBURO AD ACCOSTAMENTO RIGIDO a ceppi interni
- NO Ipotesi usura

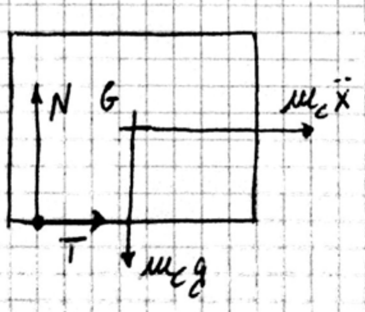
$v(t) = V_0 + \ddot{x}\, t \longrightarrow 0 = V_0 + \ddot{x}\, t^*$ —> tempo di frenata

$x(t) = \cancel{X_0} + V_0 t + \frac{1}{2}\ddot{x} t^2$ ($X_0 = 0$)

$t^* = -\frac{V_0}{4} = 4,629$ s

$x(t^*) = s^* = V_0 t^* + \frac{1}{2}\ddot{x}\, t^{*2} \longrightarrow s^* = 32,15$ m

Diagramma corpo libero della cassa:



$\xrightarrow{+}$ $T + m_c\ddot{x} = 0$

$+\uparrow$ $N - m_c g = 0$

$\Downarrow$

$T = -m_c\ddot{x}$

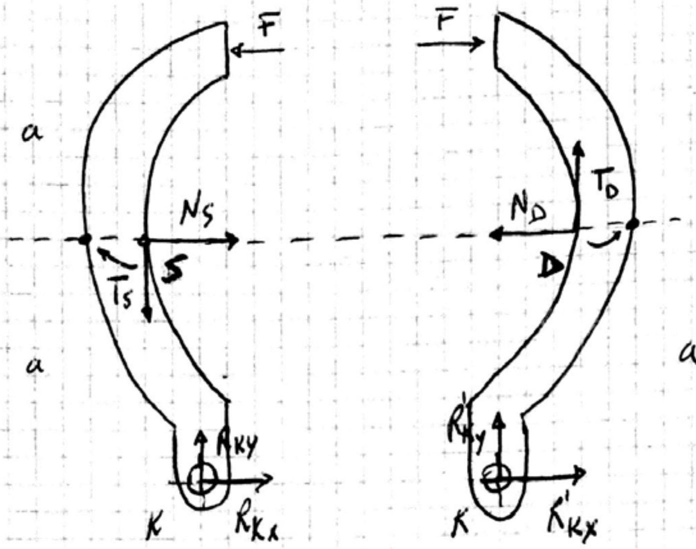
$N = m_c g$

$T = f_a N$

Scanned by CamScanner

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 174

Diagrammi corpo libero ceppo:



$M_{fr} = 2400$ Nm $= (T_S + T_D)\, r$

identità

$K \circlearrowleft^{+} \quad F(2a) - N_S a + T_S r = 0 \qquad T_S = f N_S$

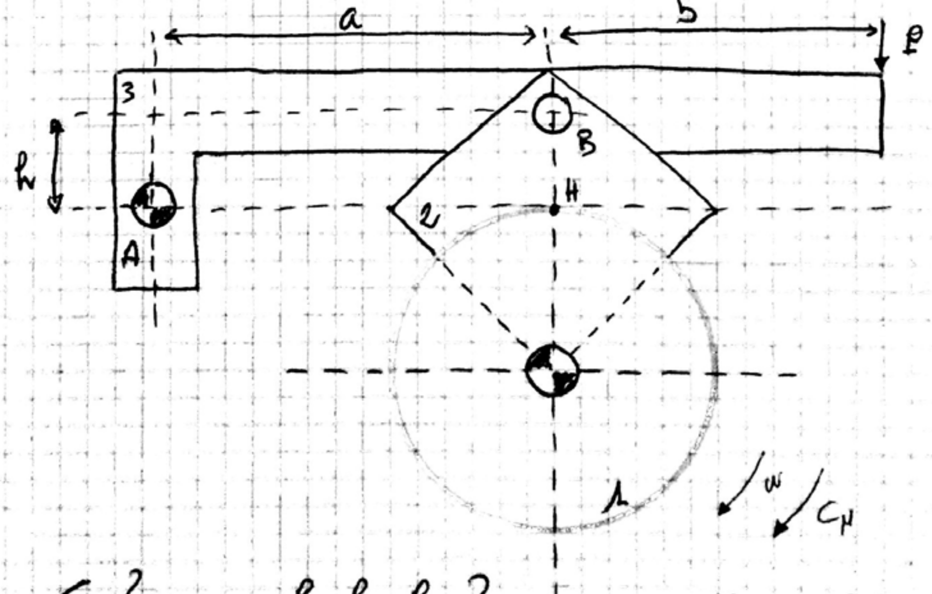
$K \circlearrowright^{+} \quad -F(2a) + T_D r + N_D a = 0 \qquad T_D = f N_D$

$$\begin{cases} T_S = F \cdot \dfrac{2af}{a - rf} \\ T_D = F \cdot \dfrac{2af}{rf + a} \end{cases} \Longrightarrow F = M_{fr} \cdot \frac{a^2 - r^2 f^2}{4a^2 f r} = 6875\ \text{N}$$

$\downarrow$

Forza di serraggio dei freni.

FRENO A CEPPI A TAMBURO 19/04/13



$P = 98,1$ N

$f = 0,4$

$f_a = 0,6$

$a = 15$ cm

$b = 30$ cm

$d = 22$ cm

$h = 5$ cm

$\omega = \cos t$

C_M? $\quad R_O, R_A, R_B$?

CEPPO → si trascura il peso

Scanned by CamScanner

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 174

$C_R = R_E f_t = 13{,}71\ Nm$

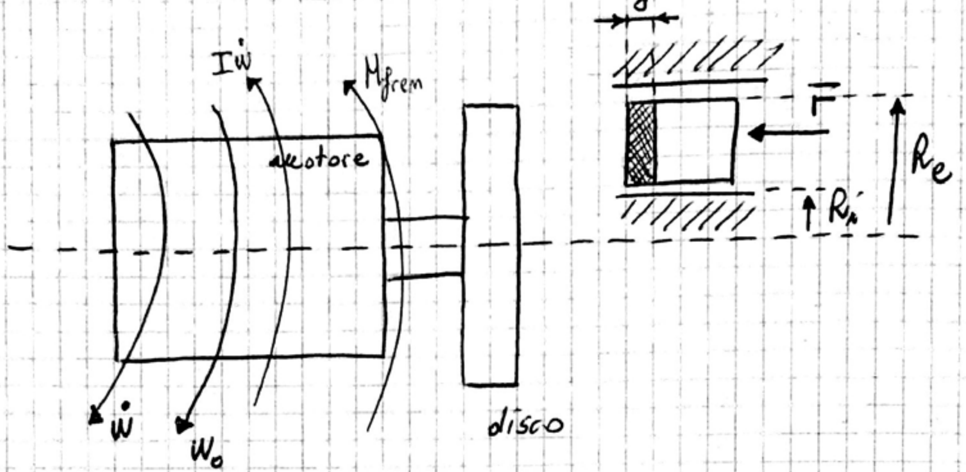
Per trovare R_A:

$+\uparrow \quad R_B \cos\varepsilon - R_{Ay} - P = 0$

$\rightarrow \quad R_B \sin\varepsilon - R_{Ax} = 0$

$\longrightarrow \quad R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 240{,}88\ N$

FRENO A DISCO AD ACCOSTAMENTO RIGIDO



Ipotesi dell'usura:

$$dV = \delta\, dA = K\, \underbrace{[dT]\, \omega r}_{dL_T/dt} \rightarrow \underset{\text{cost}}{\delta}\, \cancel{dA} = \overset{\text{cost}}{K}\, [\underset{\text{cost}}{f}\, p\, \cancel{dA}]\, \underset{\text{cost ist. x ist.}}{(\omega r)}$$

$$p = \frac{K'}{r}$$

$$M_{fr} = f \cdot F\, \frac{(r_e + r_i)}{2} = -I\dot{\omega}$$

I = momento di inerzia del disco $= 9\ Kg\, m^2 = M \rho_i^2$

$M_{fr} = 141{,}37\ Nm$

$\hookrightarrow F = 2'692{,}79\ N$

DATI

$\omega_0 = \frac{2\pi n}{60} = 157{,}07\ \frac{rad}{s}$

$t^* = 10\ s$ tempo frenata

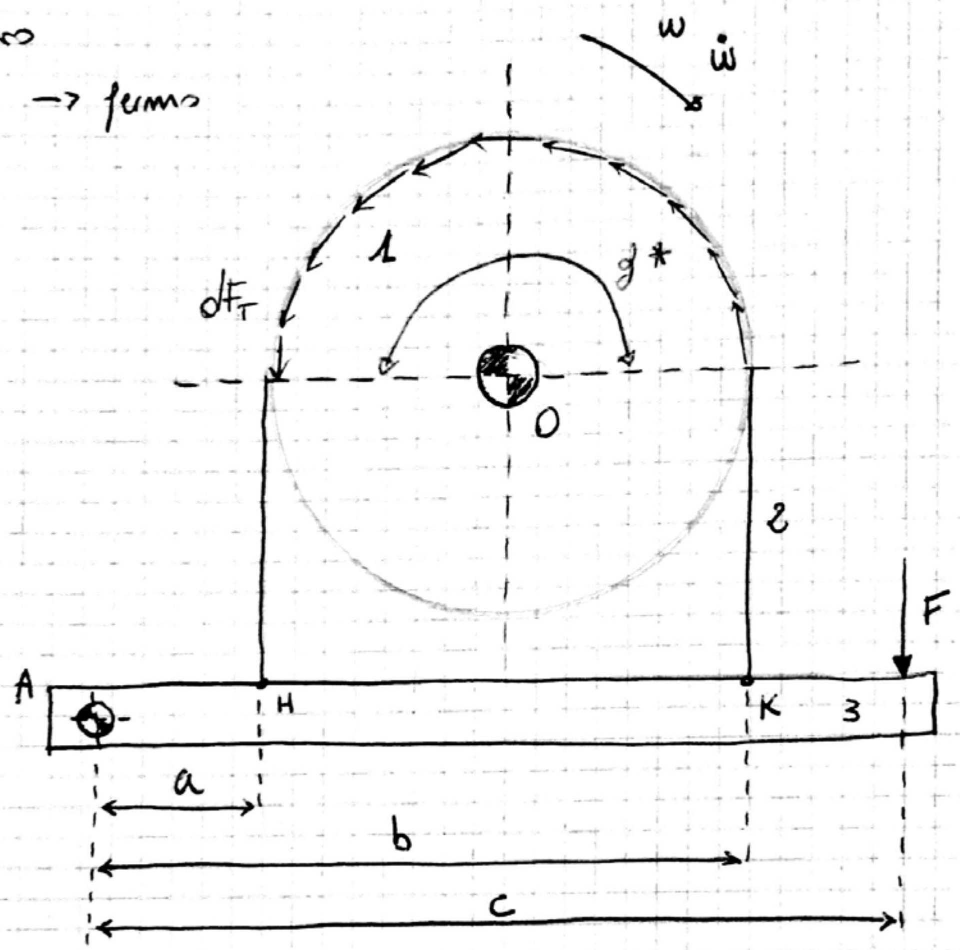
$\dot{\omega} = -\frac{\omega_0}{t^*} = -15{,}7\ \frac{rad}{s^2}$

da: $\omega(t) = \omega_0 + \dot{\omega}\, t^*$

0

FRENO A NASTRO

1 - tamburo
2 - nastro → fermo
3 - leva



DIAGRAMMI CORPO LIBERO: