



Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2108A-

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Sacchiero Giulia

MATERIA: Strutture aerionautiche - Esercitazioni temi d'esame
- Prof. Di Sciuva

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

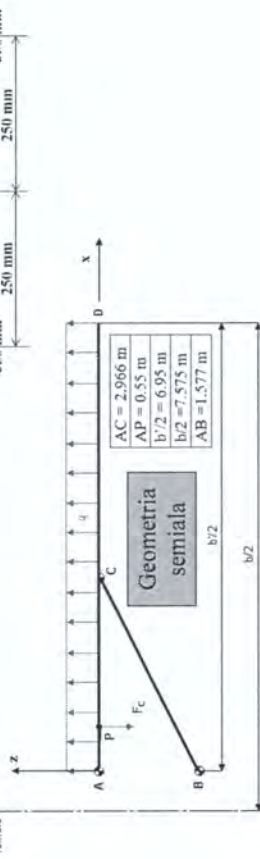
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Analisi statica di una semiala con il modello della trave a semiguscio

Dati del problema

$W = 2800$ Kg (Peso al decollo del velivolo)
 $W_C = 200$ Kg (Peso combustibile semiala)
 $W_S = 210$ Kg (Peso semiala)
 $n = 3.6$ (Fattore di carico massimo)
 Portanza uniforme lungo l'apertura
 Materiale: Dural ($E = 73000$ MPa, $\nu = 0.33$)

traccia del piano di simmetria del velivolo



Strutture Aeronautiche
1 - Analisi statica di una semiala con il modello della trave a semiguscio

3

Contenuto dell'esercitazione

L'esercitazione consiste nell'analisi statica di una semiala controventata con il modello della trave a semiguscio e si divide in due fasi:

1. determinazione dell'andamento della caratteristiche di sollecitazione;
2. analisi dello stato di tensione di una campata rappresentativa.

Scopo dell'esercitazione

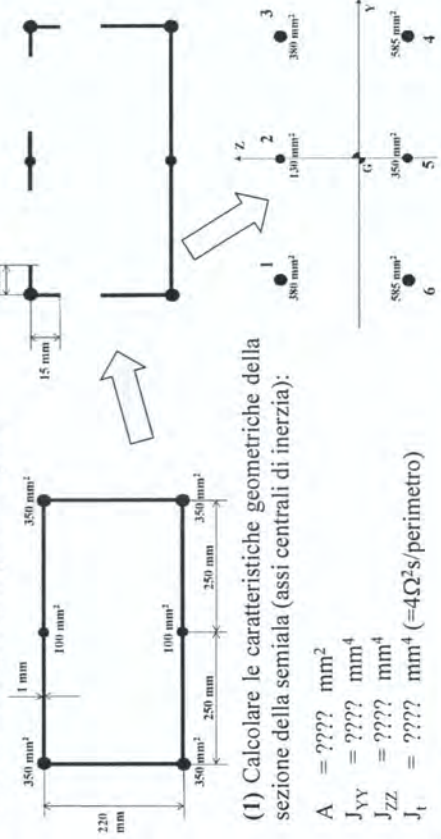
Lo scopo dell'esercitazione è quello di applicare le formule principali del modello della trave a semiguscio.

Strutture Aeronautiche
1 - Analisi statica di una semiala con il modello della trave a semiguscio

2

Svolgimento

Nella sezione della semiala si considerano collaboranti tutti i pannelli tesi e per la sola striscia collaborante quelli compressi



(1) Calcolare le caratteristiche geometriche della sezione della semiala (assi centrali di inerzia):

$$\begin{aligned}
 A &= ??? \text{ mm}^2 \\
 J_{YY} &= ??? \text{ mm}^4 \\
 J_{ZZ} &= ??? \text{ mm}^4 \\
 J_t &= ??? \text{ mm}^4 (=4\Omega^2/\text{perimetro})
 \end{aligned}$$

Strutture Aeronautiche
1 - Analisi statica di una semiala con il modello della trave a semiguscio

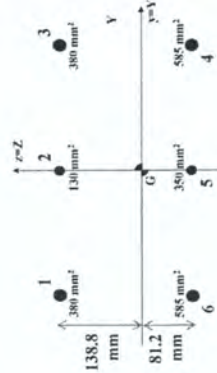
4

Analisi statica di una semiala con il modello della trave a semiguscio

Risultati

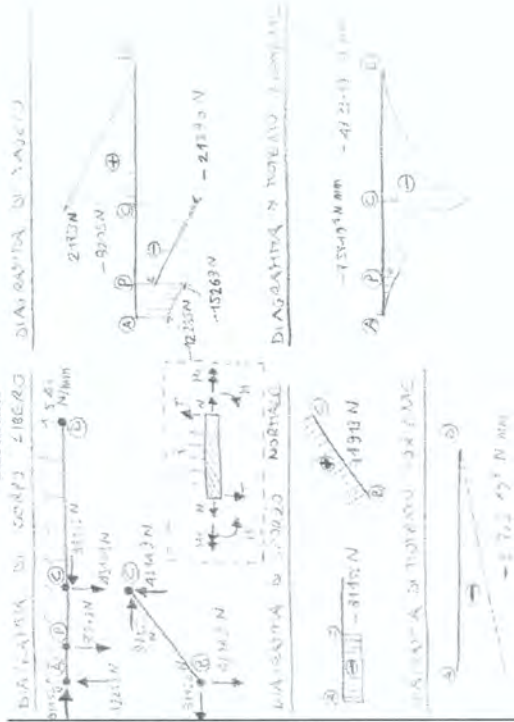
(1) Caratteristiche geometriche della sezione della semiala (assi centrali di inerzia)

$$\begin{aligned}
 A &= 2410 \text{ mm}^2 \\
 J_{yy} &= 2.71683 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \\
 J_{zz} &= 1.20625 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \\
 J_x &= 3.3611 \cdot 10^7 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$



Risultati

(2) Andamento delle caratteristiche di sollecitazione sulla semiala



Strutture Aeronautiche
1 - Analisi statica di una semiala con il modello della trave a semiguscio

Risultati

(2) Valori delle caratteristiche di sollecitazione per $x_1=1977 \text{ mm}$ e $x_2=2472 \text{ mm}$

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -81155 \text{ N} \\
 N_2 &= -81155 \text{ N} \\
 T_1 &= 15996 \text{ N} \\
 T_2 &= -18699 \text{ N} \\
 M_1 &= -24.84 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \\
 M_2 &= -33.43 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \\
 M_{11} &= -2.694 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \\
 M_{12} &= -2.426 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \\
 T_m &= -17347 \text{ N} \\
 M_{\text{min}} &= -2.56 \cdot 10^6 \text{ Nmm}
 \end{aligned}$$

Strutture Aeronautiche
1 - Analisi statica di una semiala con il modello della trave a semiguscio

ESERCITAZIONE 1

ANALISI STATICA DI UNA SEMIALA CON IL MODELLO DELLA TRAVE A SEMIGUSCIO

CONTENUTO

L'esercitazione consiste nell'analisi statica di una semiala controventata con il modello della trave a semiguscio e si divide in due fasi:

- 1 - determinazione dell'andamento delle caratteristiche di sollecitazione
- 2 - analisi dello stato di tensione di una campata rappresentativa

SCOPO

Applicare le formule principali del modello della trave a semiguscio

DATI

$W = 2800 \text{ kg}$ (peso al decollo del velivolo)

$W_c = 200 \text{ kg}$ (peso al decollo del combustibile)

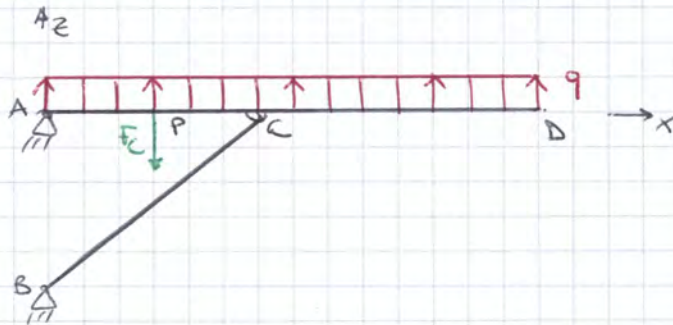
è applicato nel baricentro del serbatoio, non è un carico distribuito

$W_s = 210 \text{ kg}$ (peso della semiala)

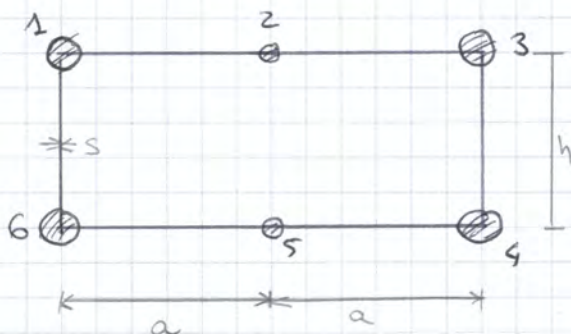
$n = 3,6$ (fattore di carico massimo concesso a questo tipo di velivolo)

Materiale: Dural ($E = 73'000 \text{ MPa}$, $\nu = 0,33$)

Consideriamo la portanza uniforme lungo l'apertura della semiala. La risultante del carico distribuito q la considero applicata nella metà di AD, in realtà il punto vero di applicazione sarebbe più vicino alla cerniera (che nella metà la sollecitazione sulla cerniera è maggiore \rightarrow più sicurezza!)



$$\begin{aligned} \overline{AC} &= 2,966 \text{ m} \\ \overline{AP} &= 0,55 \text{ m} \\ \overline{AD} &= 6,85 \text{ m} \\ \overline{AB} &= 1,577 \text{ m} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A_1 = A_3 = A_4 = A_6 &= 350 \text{ mm}^2 \\ A_2 = A_5 &= 100 \text{ mm}^2 \\ a &= 250 \text{ mm} \\ h &= 220 \text{ mm} \end{aligned}$$

	A_i [mm ²]	y [mm]	z [mm]	Y [mm]	Z [mm]	J_{zz_i} [mm ⁴]	J_{yy_i} [mm ⁴]
1	380	0	220	-250	138,8	$23,75 \cdot 10^6$	$7,32 \cdot 10^6$
2	130	250	220	0	138,8	0	$2,5 \cdot 10^6$
3	380	500	220	250	138,8	$23,75 \cdot 10^6$	$7,32 \cdot 10^6$
4	585	500	0	250	-81,2	$36,56 \cdot 10^6$	$3,85 \cdot 10^6$
5	350	250	0	0	-81,2	0	$2,3 \cdot 10^6$
6	585	0	0	-250	-81,2	$36,56 \cdot 10^6$	$3,85 \cdot 10^6$
	$A_{tot} = 2410$					$J_{zz} = 1,2 \cdot 10^8$	$J_{yy} = 2,71 \cdot 10^7$

Con $Y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{130 \cdot 250 + 500 \cdot 380 + 585 \cdot 500 + 350 \cdot 250}{2410} = 250 \text{ mm}$

$Z_G = \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i} = \frac{220 \cdot 380 + 220 \cdot 130 + 220 \cdot 380}{2410} = 81,2 \text{ mm}$

$J_{zz_i} = A_i y_i^2 \rightarrow J_{zz} = 1,2 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$

$J_{yy_i} = A_i z_i^2 \rightarrow J_{yy} = 2,71 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$

$J_t = \frac{4 \Omega^2}{\oint \frac{ds}{s}} = \frac{4 \Omega^2}{\left(\frac{\text{perimetro}}{\text{spessore}} \right)} = \frac{4 \cdot (500 \cdot 220)^2}{(500 + 220) \cdot 2} = \frac{1,84 \cdot 10^{10}}{1440} = 33,6 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

Possiamo quindi ora andare a calcolare le forze che sollecitano l'ala

$$q_L = n \cdot \frac{W}{AD} \cdot g = 3,6 \cdot \frac{(2500 + 2 \cdot 200)}{6,35} \cdot 3,88 = 6,53 \cdot 10^3 \frac{N}{m} = 6,53 \frac{N}{mm}$$

$$q_W = n \cdot \frac{W_S}{AD} \cdot g = 3,6 \cdot \frac{210}{6,35} \cdot 3,81 = 1,067 \cdot 10^3 \frac{N}{m} = 1,067 \frac{N}{mm}$$

$$M_L = q_L \cdot 83 = 541,8 \text{ N}$$

$$q = q_L - q_W = 5,46 \frac{N}{mm}$$

$$F_C = n \cdot g \cdot W_C = 3,6 \cdot 3,81 \cdot 200 = 2063 \text{ N}$$

Andiamo ora a disegnare i diagrammi T, N, M, M_E.

Convenzione dei segni:

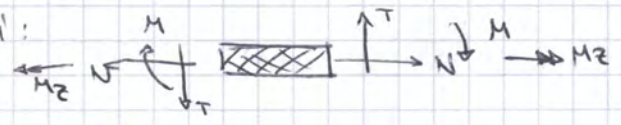
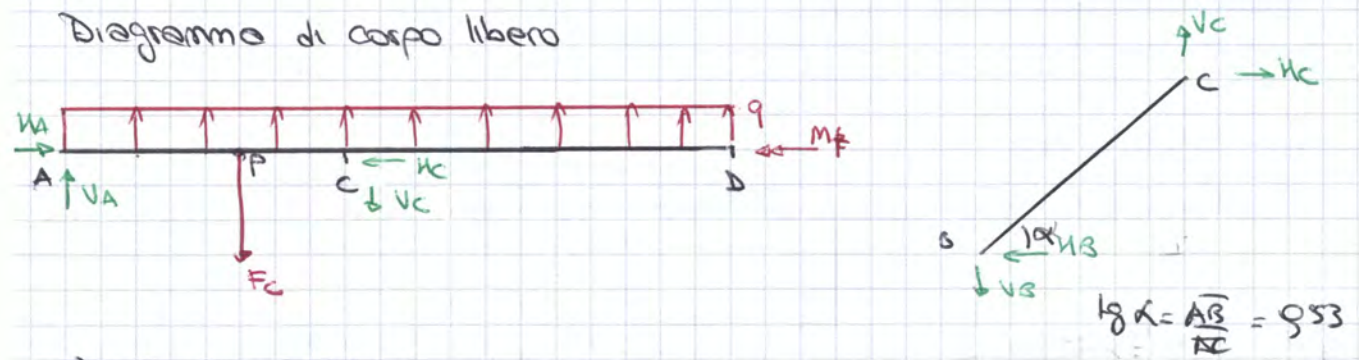


Diagramma di corpo libero



$$\uparrow) V_A - V_C + q \cdot \overline{AD} - F_C = 0$$

$$V_A = V_C - q \cdot \overline{AD} + F_C = 43'149 - 5,46 \cdot 6350 + 2063 = 12'265$$

$$\rightarrow) H_A + H_C = 0 \quad H_A = H_C = 81'155 \text{ N}$$

$$\uparrow) V_C \cdot \overline{AC} + F_C \cdot \overline{AP} - q \cdot \overline{AB} \cdot \frac{\overline{AD}}{2} = 0$$

$$V_C \cdot 2366 + 2063 \cdot 550 - 5,46 \cdot \frac{6350^2}{2} = 0$$

$$V_C \cdot 2366 + 3'884'650 - 131'865'825 = 0$$

$$V_C = \frac{131'865'825 - 3'884'650}{2'366} = 43'149 \text{ N}$$

$$B) V_C \cdot \overline{BC} \cdot \cos \alpha - H_C \cdot \overline{BC} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$H_C = \frac{V_C}{\tan \alpha} = 81'155 \text{ N}$$

→) $N(x) = -V_A + H_C = 0$

1) $T(x) = F_C - V_A + V_C - q(\bar{AC} + x)$

$$T(C) = 7063 - 12265 - 93148 - 5,43 \cdot 2966 =$$

$$= -21753 \text{ N}$$

$$T(D) = 7063 - 12265 + 93145 - 5,46 \cdot 6950 =$$

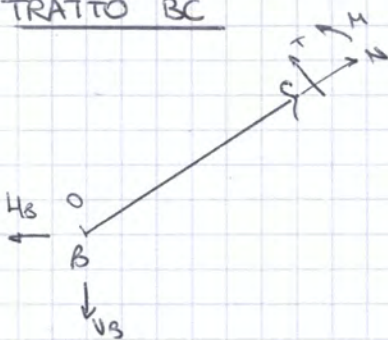
$$= 0 \rightarrow \text{estremo non vincolato}$$

\hat{x} $M(x) = -V_A(\bar{AC} + x) + V_C \cdot e - q \frac{(\bar{AC} + x)^2}{2} + F_C \cdot (\bar{AC} + x)$

$$M(C) = -V_A \cdot \bar{AC} - q \frac{\bar{AC}^2}{2} + F_C \cdot \bar{AC} = -43,33 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M(D) = 0 \rightarrow \text{estremo non vincolato}$$

TRATTO BC



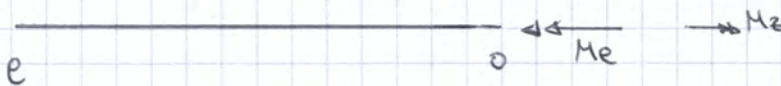
→) $N = \sqrt{V_B^2 + H_B^2} = 81813 \text{ N}$

↑) $T = 0$

EP $M = 0$

} asta incernierata

Per quanto riguarda il momento torcente, esso agisce solo sull'asta orizzontale



$M_z = M_e \cdot e$

$$M_z(D) = 0$$

$$M_z(A) = -M_e \cdot AB = -54,8 \cdot 6950 = -3,76 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

3) SI CONSIDERI LA CAMPATA DELLA SEMIALA TRA LE DUE CENTINE A
 $x_1 = 1377 \text{ mm}$ e $x_2 = 2472 \text{ mm}$.

DETERMINARE:

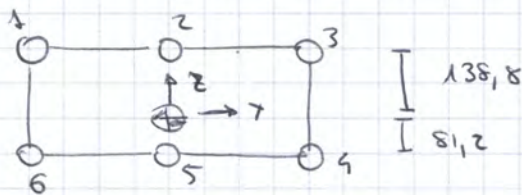
- a - LE TENSIONI NORMALI NEL CORRENT PER x_1 E x_2
- b - I FLUSSI DI TAGLIO NELLA CAMPATA
- c - IL GRADIENTE DI TORSIONE NELLA CAMPATA

Ci troviamo nel tratto PC. Andiamo a vedere quanto vale lo sforzo normale e il momento nelle due campate:

$$\begin{aligned}
 x_1 \rightarrow N_1 &= -81155 \text{ N} \\
 \hookrightarrow M_1 &= -VA \cdot 1377 - q \frac{1377^2}{2} + 7063 \cdot (1377 - 550) = \\
 &= -12265 \cdot 1377 - 5,46 \cdot \frac{1377^2}{2} + 7063 \cdot 1427 = -29,84 \cdot 10^6 \text{ Nmm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 \rightarrow N_2 &= -81155 \text{ N} \\
 \hookrightarrow M_2 &= -12265 \cdot 2472 - 5,46 \cdot \frac{2472^2}{2} + 7063 \cdot 1922 = -633,42 \cdot 10^6 \text{ Nmm}
 \end{aligned}$$

a) TENSIONI NORMALI



La tensione normale è data dalla formula di Navier

$$\sigma_{x_i} = \frac{N}{A_{TOT}} + \frac{M_z J_y - M_y J_{yz}}{J_{yz} J_z - J_{yz}^2} y + \frac{M_y J_z - M_z J_{yz}}{J_z J_y - J_{yz}^2} z$$

Semplificando otteniamo che in questo caso la formula da applicare è:

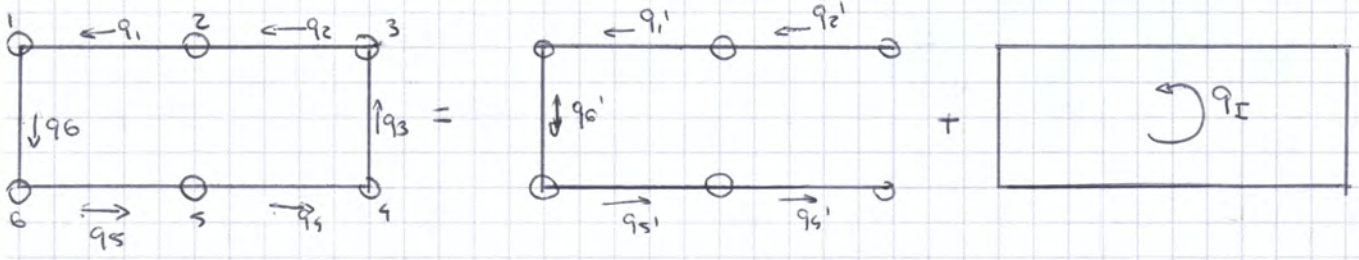
$$\sigma_{x_i} = \frac{N}{A_{TOT}} + \frac{M_y}{J_y} z_i$$

Sezione 1

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 &= \frac{N}{A_{TOT}} + \frac{M_1}{J_y} \cdot 138,8 = \frac{-81155}{2410} + \frac{29,84 \cdot 10^6}{2,71 \cdot 10^7} \cdot 138,8 = \\
 &= -33,67 - 127,22 = 160,89 \text{ N/mm}^2
 \end{aligned}$$

$$\sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = \frac{N}{A_{TOT}} + \frac{M_2}{J_y} (-81,2) = -33,67 + 931 \left(\frac{81,2}{2,71} \right) = 40,7 \text{ N/mm}^2$$

Procedura apro e chiudo



CORRENTE 3



$$q_2' = -\frac{dN_3}{dx} = 33,66 \text{ N/mm}$$

CORRENTE 4



$$q_4' = +\frac{dN_4}{dx} = 30,35 \text{ N/mm}$$

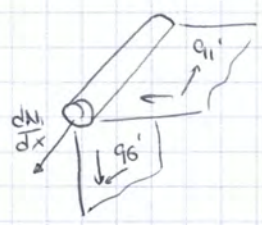
CORRENTE 2



$$\frac{dN_2}{dx} + q_1' - q_2' = 0$$

$$q_1' = q_2' - \frac{dN_2}{dx} = 33,66 + 11,58 = 45,19 \text{ N/mm}$$

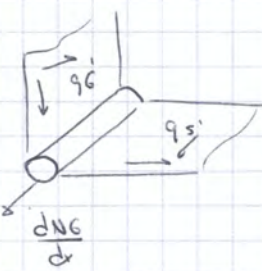
CORRENTE 1



$$\frac{dN_1}{dx} + q_6' - q_1' = 0$$

$$q_6' = q_1' - \frac{dN_1}{dx} = 45,19 + 33,66 = 78,82 \text{ N/mm}$$

CORRENTE 6



$$\frac{dN_6}{dx} + q_5' - q_6' = 0$$

$$q_5' = q_6' - \frac{dN_6}{dx} = 78,82 - 30,35 = 48,51 \text{ N/mm}$$

Andiamo ora a calcolare con il flusso correttivo

Analisi statica di piastre multistrato caricate trasversalmente

Contenuto dell'esercitazione

- L'esercitazione si divide in tre fasi:
1. calcolo delle matrici di rigidità di piastre cross-ply simmetriche;
 2. determinazione della massima deflessione delle piastre quando semplicemente appoggiate sui 4 lati e soggette ad un carico trasversale;
 3. determinazione dello stato di deformazione e tensione in alcuni punti caratteristici.

Scopo dell'esercitazione

Lo scopo dell'esercitazione è quello di analizzare il comportamento statico di piastre cross-ply e simmetriche soggette a carichi trasversali.

Problema

Si considerino due piastre rettangolari ($a=50$ cm, $b=25$ cm, $h=2$ mm), semplicemente appoggiate sui 4 lati, caricate trasversalmente da un carico binusoidale di intensità $q_0=1000$ Pa. Le caratteristiche meccaniche del singolo strato sono $E_L=11$ GPa, $E_T=8$ GPa, $G_{LT}=3$ GPa e $\nu_{LT}=0.33$. Le stratificazioni delle due piastre sono:

- piastra a: $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$
- piastra b: $(90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ)$

e gli spessori sono tra loro uguali (laminazione regolare). Si chiede di determinare, per ognuna delle 2 piastre:

- (1) le matrici $[A]$, $[B]$ e $[D]$
- (2) la massima deflessione w_{max} ($w^{(0)}(a/2,b/2)$)
- (3) l'andamento lungo lo spessore delle deformazioni ϵ_x e ϵ_y e delle tensioni σ_x e σ_y nel punto centrale ($a/2,b/2$)
- (4) l'andamento lungo lo spessore della tensione τ_{xz} nel punto $(0,b/2)$ (*facoltativo*)

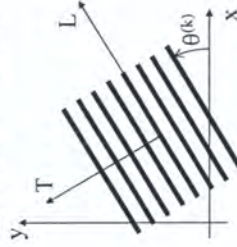
Svolgimento

Il calcolo della matrice delle rigidità ridotte trasformate di un generico strato, $[Q_p^{(k)}]$, può essere effettuato con la seguente procedura

$$[Q_p^{(k)}] = [\Lambda^{(k)}]^{-1} \cdot [Q_p^{(0)}] \cdot ([\Lambda^{(k)}])^{-1}$$

$$[Q_p^{(0)}] = \begin{bmatrix} E_L & \nu_{LT} E_T & 0 \\ \nu_{LT} E_T & E_T & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \quad [\Lambda^{(k)}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

$$c \equiv \cos(\theta^{(k)}) \quad s \equiv \sin(\theta^{(k)})$$



dove E_L e E_T sono i moduli di Young nelle due direzioni principali, ν_{LT} e G_{LT} sono il coefficiente di Poisson e il modulo di taglio nel piano (L,T). Si ha che $\nu_{TL} = \nu_{LT} E_T / E_L$. Si notino i due casi seguenti (piastra cross-ply):

$$\theta^{(k)} = 0^\circ \Rightarrow [\Lambda^{(k)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [Q_p^{(k)}] = [Q_p^{(0)}] \quad \theta^{(k)} = 90^\circ \Rightarrow [\Lambda^{(k)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Svolgimento

Sebbene il modello di Kirchhoff non le preveda, è possibile calcolare anche le due tensioni di taglio trasversale τ_{xz} e τ_{yz} . Partendo dalle equazioni indefinite di equilibrio in direzione x ed y (in assenza di forze di volume)

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} = 0$$

e, note σ_x , σ_y e τ_{xy} , si possono determinare le tensioni di taglio trasversale per integrazione lungo lo spessore. Proviamo, per esempio, a calcolare la tensione τ_{xz} :

$$\tau_{x,z,z} = -(\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y})$$

da cui

$$\tau_{xz}(x,y,z) = \tau_{xz}(x,y,-h/2) - \int_{-h/2}^z (\sigma_{x,x}^{(k)} + \tau_{xy,y}^{(k)}) dz$$

Sostituendo alle tensioni le deformazioni (piastra cross-ply $\Rightarrow Q_{16}^{(k)}=Q_{26}^{(k)}=0$ in ogni strato) e raccogliendo, la funzione integranda diventa

$$-(\sigma_{x,x}^{(k)} + \tau_{xy,y}^{(k)}) = \left[(Q_{11}^{(k)} \cdot w_{,xx}^{(0)} + Q_{12}^{(k)} \cdot w_{,yy}^{(0)}) + (2Q_{66}^{(k)} \cdot w_{,xy}^{(0)}) \right] \cdot z = f^{(k)}(x,y) \cdot z$$

per cui, essendo $\tau_{xz}(x,y,-h/2)=0$,

$$\tau_{xz}(x,y,z) = \int_{-h/2}^z (f^{(k)}(x,y) \cdot z) dz$$

Svolgimento

Sviluppando le derivate coinvolte nell'espressione finale, si ha

$$w_{,xxx}^{(0)} = -(\pi/a)^3 W \cos(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$$

$$w_{,yyy}^{(0)} = -(\pi/a)(\pi/b)^2 W \cos(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$$

Allora

$$f^{(k)}(x,y) = \left[(Q_{11}^{(k)} \cdot w_{,xx}^{(0)} + Q_{12}^{(k)} \cdot w_{,yy}^{(0)}) + (2Q_{66}^{(k)} \cdot w_{,xy}^{(0)}) \right]$$

$$= \left[Q_{11}^{(k)} \cdot w_{,xxx}^{(0)} + (Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \cdot w_{,yyy}^{(0)} \right]$$

$$= -(\pi/a) \left[Q_{11}^{(k)} (\pi/a)^2 + (Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) (\pi/b)^2 \right] W \cos(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$$

Un'analogia procedura si può utilizzare per calcolare la tensione τ_{yz} .

Analisi di convergenza

Consideriamo la piastra b (90°/0°/0°/90°) ma questa volta soggetta ad un carico trasversale uniforme (sempre di intensità $q_z=1000$ Pa).

In questo caso dobbiamo sviluppare il carico in serie di Fourier:

$$\bar{q}_z(x,y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mn} \text{sen}(\lambda_m x) \text{sen}(\lambda_n y) \text{ con } \lambda_m \equiv \frac{m\pi}{a} \text{ e } \lambda_n \equiv \frac{n\pi}{b}$$

$$q_{mn} = \begin{cases} 16\bar{q}_z / (\pi^2 mn) & m \text{ e } n \text{ dispari} \\ 0 & m \text{ o } n \text{ pari} \end{cases}$$

Allora la deflessione della piastra è

$$w^{(0)}(x,y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{mn} \text{sen}(\lambda_m x) \text{sen}(\lambda_n y) \text{ con } \lambda_m \equiv \frac{m\pi}{a} \text{ e } \lambda_n \equiv \frac{n\pi}{b}$$

dove

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \lambda_n^2 + D_{22} \lambda_n^4} \quad \forall m,n$$

Analisi di convergenza

Si riportano i valori di deflessione e tensioni massime al variare del numero di termini negli sviluppi in serie della soluzione

M=N	w _{max} (mm)	max(σ _x) (MPa)	max(σ _y) (MPa)
1	0,933	2,26	16,49
3	0,807	0,40	13,53
5	0,816	0,59	14,06
7	0,812	0,34	13,97
9	0,813	0,40	14,00
11	0,813	0,30	13,99
13	0,813	0,36	14,00

Analisi statica di piastre multistrato caricate trasversalmente

Risultati

(1) Matrici di rigidezza per la piastra a ($[B]=[0]$)

A =
1.1994e+008 5.3218e+006 3.6592e-011
5.3218e+006 1.1994e+008 6.3202e-009
3.6592e-011 6.3202e-009 6.0000e+006

D =
6.5934e+001 1.7739e+000 3.0494e-018
1.7739e+000 1.4027e+001 5.2669e-016
3.0494e-018 5.2669e-016 2.0000e+000

(1) Matrici di rigidezza per la piastra b ($[B]=[0]$)

A =
1.1994e+008 5.3218e+006 3.6592e-011
5.3218e+006 1.1994e+008 6.3202e-009
3.6592e-011 6.3202e-009 6.0000e+006

D =
1.4027e+001 1.7739e+000 2.1346e-017
1.7739e+000 6.5934e+001 3.6868e-015
2.1346e-017 3.6868e-015 2.0000e+000

Strutture Aeronautiche
2 – Analisi statica di piastre multistrato caricate trasversalmente

3

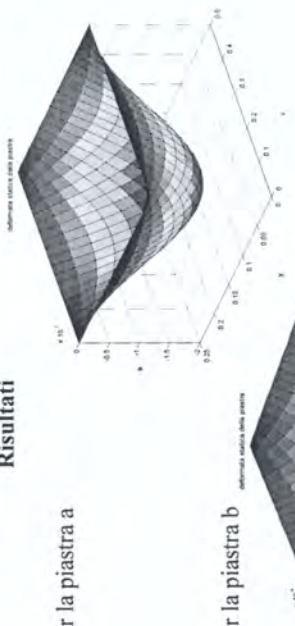
Risultati

I risultati sono riportati in unità di misura del S.I. (m, Pa)

Risultati

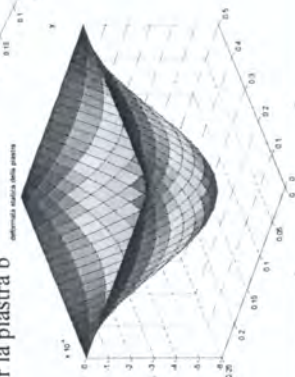
(2) Freccia massima per la piastra a

$w_{max} = -1.9065e-003$



(2) Freccia massima per la piastra b

$w_{max} = -5.7536e-004$



Strutture Aeronautiche
2 – Analisi statica di piastre multistrato caricate trasversalmente

4

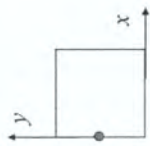
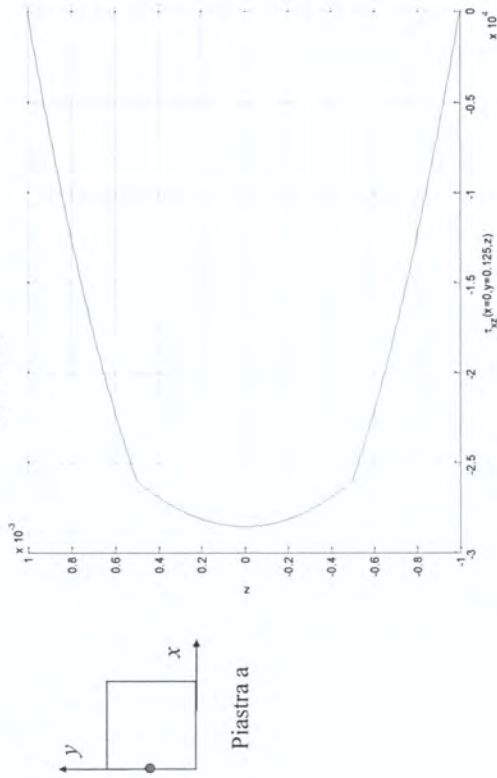
Strutture Aeronautiche
2 – Analisi statica di piastre multistrato caricate trasversalmente

2



Politecnico di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Risultati



Piastra a

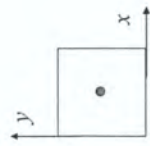
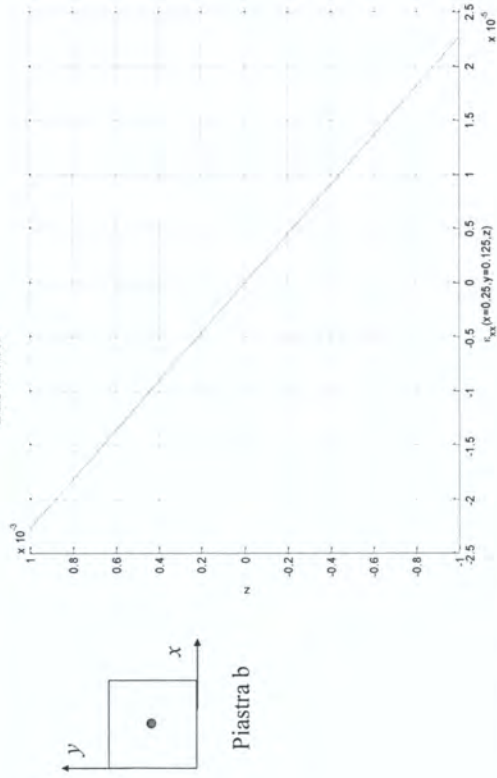
Strutture Aeronautiche
2 – Analisi statica di piastre multistrato caricate trasversalmente

9



Politecnico di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Risultati



Piastra b

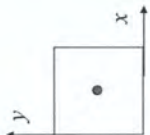
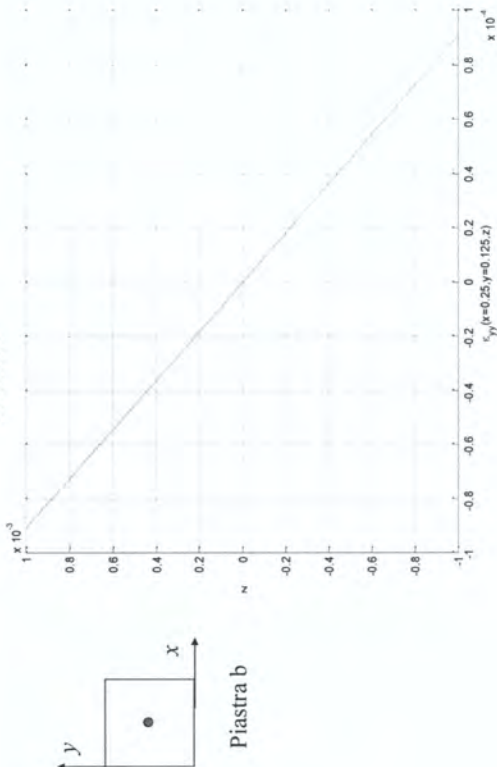
Strutture Aeronautiche
2 – Analisi statica di piastre multistrato caricate trasversalmente

10



Politecnico di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Risultati



Piastra b

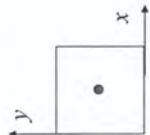
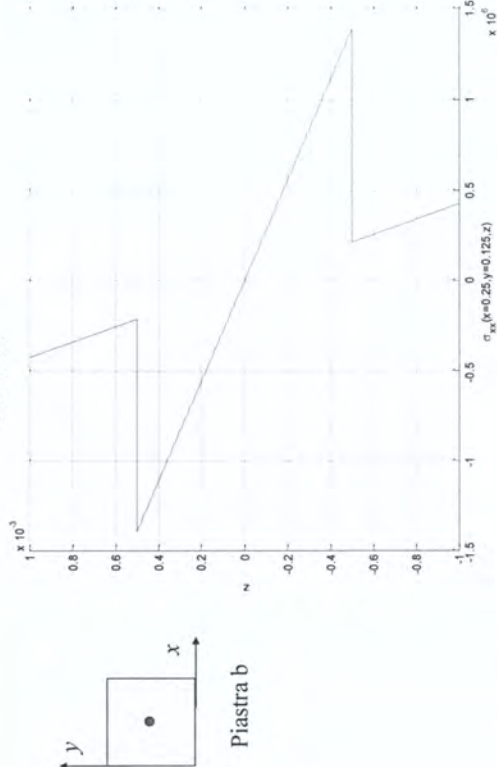
Strutture Aeronautiche
2 – Analisi statica di piastre multistrato caricate trasversalmente

11



Politecnico di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Risultati



Piastra b

Strutture Aeronautiche
2 – Analisi statica di piastre multistrato caricate trasversalmente

12

ESERCITAZIONE 2: PIASTRA DI KIRCHHOFF

ANALISI STATICA DI PIASTRE MULTISTRATO CARICATE TRASVERSALMENTE

CONTENUTO

1. Calcolo delle matrici di rigidità di piastre cross-ply simmetriche
2. Determinazione della massima deflessione delle piastre quando semplicemente appoggiate sui 4 lati e soggette ad un carico trasversale
3. Determinazione dello sforzo di deformazione e tensione in alcuni punti caratteristici → finire

SCOPO

Lo scopo dell'esercitazione è quello di analizzare il comportamento statico di piastre cross-ply simmetriche soggette a carichi trasversali.

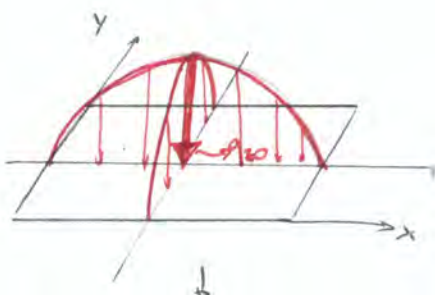
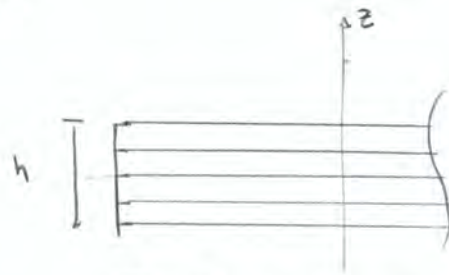
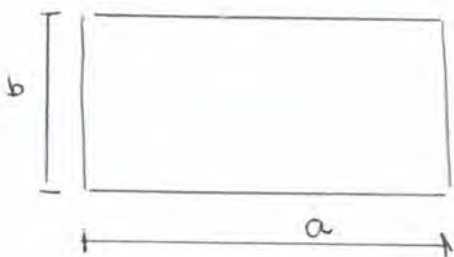
PROBLEMA

Si considerino due piastre rettangolari ($a=50\text{ cm}$, $b=25\text{ cm}$, $h=2\text{ mm}$), semplicemente appoggiate sui 4 lati, caricate trasversalmente da un carico sinusoidale di intensità $q_z = -1000\text{ Pa}$. Le caratteristiche meccaniche del singolo strato sono $E_L = 110\text{ GPa}$, $E_T = 8\text{ GPa}$, $G_{LT} = 3\text{ GPa}$ e $\nu_{LT} = 0,33$.

Le stratificazioni delle due piastre sono:

- a) $0^\circ/30^\circ/30^\circ/0^\circ$
- b) $30^\circ/0^\circ/0^\circ/30^\circ$

gli spessori sono tra loro uguali.



Dati:	$a = 500\text{ mm}$
	$b = 250\text{ mm}$
	$h = 2\text{ mm}$
	4 appoggi
	$E_L = 110\text{ GPa}$
	$E_T = 8\text{ GPa}$
	$G_{LT} = 3\text{ GPa}$
	$\nu_{LT} = 0,33$
	$q_{z0} = -1000\text{ Pa}$

carico sinusoidale $q_z = q_{z0} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$

Audiamo quindi ora a calcolare la matrice delle rigidità ridotte nei due casi (90° e 0°)

$$[Q_p^{(0)}] = \begin{pmatrix} \frac{11 \cdot 10^3}{1,933 \cdot 9029} & \frac{833,8 \cdot 10^3}{1,933 \cdot 9029} & 0 \\ \frac{833,8 \cdot 10^3}{1,933 \cdot 9029} & \frac{8 \cdot 10^3}{1,933 \cdot 9029} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 10^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,12 \cdot 10^{11} & 2,66 \cdot 10^8 & 0 \\ 2,66 \cdot 10^8 & 5,08 \cdot 10^9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$

Questa matrice coincide con la matrice delle rigidità ridotte per le piastre con fibre poste a 0° in quanto $[A^{(0)}] = [A^{(0)}]^{-1} \cdot [Q_p^{(0)}] \cdot ([A^{(0)}]^{-1})^T = [I]$.

Audiamo ora a calcolare la matrice di rigidità ridotte per le piastre con fibre poste a 90° .

$$[Q_p^{(90)}] = [A^{(90)}]^{-1} \cdot [Q_p^{(0)}] \cdot ([A^{(90)}]^{-1})^T = \begin{pmatrix} 5,08 \cdot 10^9 & 2,66 \cdot 10^8 & 0 \\ 2,66 \cdot 10^8 & 1,12 \cdot 10^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$

Nota $[Q_p^{(k)}]$ per ogni strato si possono determinare le matrici di rigidità caratteristiche del laminato.

• $[A] = \langle [Q_p] \rangle$ MATRICE DELLE RIGIDITÀ MEMBRANALI

$$[A] = \sum_{k=1}^4 \int_{z^{(k)-}}^{z^{(k)+}} [Q_p^{(k)}] dz = \sum_{k=1}^4 \int_{z^{(k)-}}^{z^{(k)+}} dz \cdot [Q_p^{(k)}] = \sum_{k=1}^4 [Q_p^{(k)}] \cdot h^{(k)} =$$

$$= 2 \cdot 55 \cdot 10^{-3} \cdot ([Q_p^{(0)}] + [Q_p^{(90)}]) = \begin{pmatrix} 1,2 \cdot 10^8 & 5,3 \cdot 10^6 & 0 \\ 5,3 \cdot 10^6 & 1,2 \cdot 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \cdot 10^6 \end{pmatrix}$$

Questa matrice è uguale sia per la piastra (a) che per la piastra (b)

• $[B] = \langle [Q_p] \rangle$ MATRICE DELLE RIGIDITÀ DI ACCOPPIAMENTO

$$[B] = \sum_{k=1}^4 \int_{z^{(k)-}}^{z^{(k)+}} z \cdot [Q_p^{(k)}] dz = \sum_{k=1}^4 [Q_p^{(k)}] \int_{z^{(k)-}}^{z^{(k)+}} z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [Q_p^{(k)}] \cdot ((z^{(k)+})^2 - (z^{(k)-})^2)$$

Essendo sia la piastra (a) che quella (b) simmetriche la matrice $[B]$ è nulla per entrambe.

Piastre a)

$$w_{max} = \frac{-1000}{66 \cdot 1558 + 2 \cdot (1,17 + 2 \cdot 2) \cdot 33,48 \cdot 157,5 + 14 \cdot 29536} = -1,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Piastre b)

$$w_{max} = \frac{-1000}{14 \cdot 1558 + 2 \cdot (1,17 + 4) \cdot 33,48 \cdot 157,5 + 66 \cdot 29536} = -5,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Punto 3

Per prima cosa dobbiamo andare a determinare le deformazioni nel pannello.

$$\{\epsilon_p\} = \{\epsilon_p^{(0)}\} - z \{k_p\}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{x,y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u^{(0)}_{,x} \\ v^{(0)}_{,y} \\ u^{(0)}_{,y} + v^{(0)}_{,x} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} w_{,xx}^{(0)} \\ w_{,yy}^{(0)} \\ 2w_{,xy}^{(0)} \end{Bmatrix}$$

↙ 0

Il termine membranale è nullo perché $u^{(0)}(x,y) = v^{(0)}(x,y) = 0$, dal momento che sono piastre simmetriche caricate trasversalmente.

Le deformazioni sono lineari nello spessore e si annullano per $z=0$.

Sviluppando i calcoli per le derivate seconde, si ha

$$\{\epsilon_p(x,y,z)\} = -z \begin{Bmatrix} w^{(0)}_{,xx}(x,y) \\ w^{(0)}_{,yy}(x,y) \\ 2w^{(0)}_{,xy}(x,y) \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} -(\pi/a)^2 w \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b) \\ -(\pi/b)^2 w \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b) \\ 2(\pi/a)(\pi/b) w \cos(\pi x/a) \cos(\pi y/b) \end{Bmatrix}$$

Per $x = \frac{a}{2}$ e $y = \frac{b}{2}$ si ha che

$$\{\epsilon_p(x,y,z)\} = -z \begin{Bmatrix} -4\pi^2 w \\ -16\pi^2 w \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} \rightarrow z_1) & 2,66 \cdot 10^9 \cdot 7,5 \cdot 10^{-5} + 8,06 \cdot 10^9 \cdot 1,5 \cdot 10^{-9} = 2,6 \cdot 10^6 \\ z_2) & 2,66 \cdot 10^9 \cdot 3,75 \cdot 10^{-5} + 8,06 \cdot 10^9 \cdot 1,5 \cdot 10^{-9} = 1,3 \cdot 10^6 \\ z_2') & 2,66 \cdot 10^9 \cdot 3,75 \cdot 10^{-5} + 12 \cdot 10^9 \cdot 1,5 \cdot 10^{-9} = 18,01 \cdot 10^6 \\ z_3) & 0 \\ z_4) & -2,66 \cdot 10^9 \cdot 3,75 \cdot 10^{-5} - 12 \cdot 10^9 \cdot 1,5 \cdot 10^{-9} = -18 \cdot 10^6 \\ z_4') & -2,66 \cdot 10^9 \cdot 3,75 \cdot 10^{-5} - 8,06 \cdot 10^9 \cdot 1,5 \cdot 10^{-9} = -1,3 \cdot 10^6 \\ z_5) & -2,66 \cdot 10^9 \cdot 7,5 \cdot 10^{-5} - 8,06 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-9} = -2,6 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

Placca b

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} \rightarrow z_1) & 8,06 \cdot 10^9 \cdot 2,25 \cdot 10^{-5} + 2,66 \cdot 10^9 \cdot 9,5 \cdot 10^{-9} = 9,42 \cdot 10^6 \\ z_2) & 8,06 \cdot 10^9 \cdot 1,125 \cdot 10^{-5} + 2,66 \cdot 10^9 \cdot 4,75 \cdot 10^{-9} = 9,21 \cdot 10^6 \\ z_2') & 1,12 \cdot 10^9 \cdot 1,125 \cdot 10^{-5} + 2,66 \cdot 10^9 \cdot 4,75 \cdot 10^{-9} = 1,38 \cdot 10^6 \\ z_3) & 0 \\ z_4) & -1,12 \cdot 10^9 \cdot 1,125 \cdot 10^{-5} - 2,66 \cdot 10^9 \cdot 4,75 \cdot 10^{-9} = -1,38 \cdot 10^6 \\ z_4') & = -z_4 = -9,21 \cdot 10^6 \\ z_5) & = -z_1 = -9,42 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

PUNTO 4

Andiamo ora a calcolare l'andamento della tensione τ_{xy} nel punto $(0, \frac{b}{2})$ lungo lo spessore.

Sebbene il modello di Kirchhoff non preveda è possibile andare a calcolare anche le due tensioni di taglio trasversale τ_{xz} e τ_{yz} .

Partendo dalle equazioni indefinite di equilibrio in direzione x è possibile calcolare τ_{xz}

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0$$

Note σ_x , τ_{xy} è possibile calcolare τ_{xz}

$$\tau_{xz,z} = -\sigma_{x,x} - \tau_{xy,y}$$

$$\tau_{xz} = \int_{-\frac{b}{2}}^z (-\sigma_{x,x} - \tau_{xy,y}) dz$$

per condizioni al contorno $(\tau_{xz}(x, y, -\frac{b}{2}) = 0)$

Dimensionamento di travi composite e sandwich

Contenuto dell'esercitazione

L'esercitazione si divide in tre fasi:

1. risoluzione di alcuni semplici schemi strutturali statici secondo le teorie della trave di Eulero-Bernoulli e sandwich;
2. analisi delle prestazioni (massa, rigidità, robustezza) nel caso di laminazione isotropa, composita e sandwich;
3. dimensionamento delle travi composita e sandwich.

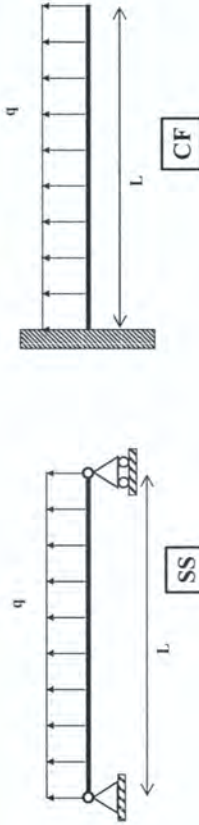
Scopo dell'esercitazione

Gli scopi dell'esercitazione sono:

- imparare a calcolare la risposta statica (spostamenti e tensioni) di semplici schemi strutturali mono-dimensionali a partire dalle equazioni di equilibrio scritte in termini di spostamento (equazione della linea elastica);
- confrontare il comportamento di travi isotrope, composita e sandwich in termini di massa, rigidità e robustezza.

Problema

Si considerino i seguenti due schemi strutturali



$L=500$ mm
 $b=25$ mm (larghezza sezione trasversale)
 $q=5000$ N/m

Problema

Le travi vengono realizzate con tre diverse soluzioni

Trave isotropa

$h=25$ mm (spessore totale)

Lega di Alluminio ($E=73000$ MPa, $\rho=2700$ kg/m³)

Trave composita regolare (0/90/0)

h variabile (spessore totale)

Carbon/Epoxy ($E_1=111000$ MPa, $E_2=8000$ MPa, $\rho=1500$ kg/m³)

Trave sandwich simmetrica

h variabile (spessore del cuore)

$h_F=1$ mm o 2 mm (spessore di ciascuna faccia)

Facce in lega di Alluminio ($E_F=73000$ MPa, $\rho_F=2700$ kg/m³)

Cuore in honeycomb di alluminio ($G_C=300$ MPa, $\rho_C=50$ kg/m³)

Svolgimento

Le equazioni di equilibrio trasversale della teoria della trave sandwich (simmetrica) sono

$$A_T (w_{xx}^{(0)} + \psi_{xx}) = -q(x)$$

$$D \psi_{x,xx} = A_T (w_{xx}^{(0)} + \psi_{xx})$$

dove D è la rigidezza flessionale ed A_T quella di taglio trasversale della sezione della trave

$$D = \left(\int_{A_c} E_x^{(0)} z dA - \int_{A_c} E_x^{(0)} z dA \right) \frac{h}{2}$$

$$A_T = \int_{A_c} G^{(0)} dA$$

Nel caso in esame, le facce sono isotrope ed identiche (h_F, E_F) per cui

$$D = b \left(\int_{-h/2}^{h/2} E_F z dz - \int_{-h/2}^{h/2} E_F z dz \right) \frac{h}{2} = \frac{E_F b h}{2} \left[\frac{(h/2+h_F)^2 - (h/2)^2}{2} - \frac{(-h/2)^2 - (-h/2-h_F)^2}{2} \right] = \dots$$

Per quello che riguarda la rigidezza A_T , si ha semplicemente

$$A_T = G_c b h$$

Strutture Aeronautiche
3 - Dimensionamento di travi composite e sandwich 9

Svolgimento

Determinate la freccia e la rotazione, $w^{(0)}(x)$ e $\psi_x(x)$, è possibile determinare la tensione (assiale) con la solita procedura (ristretta alle sole facce)

$$\sigma_{xx}^{(0)}(x,z) = -\epsilon_{xx}^{(0)}(x,z) = u_{x,x}^{(0)}(x) + (h/2) \psi_{x,x}(x)$$

$$\sigma_{xx}^{(0)}(x,z) = -\sigma_{xx}^{(0)}(x,z) = E_F (h/2) \psi_{x,x}(x)$$

La tensione assiale, per ogni stazione x, ha due soli valori (uguali ed opposti) sulle due facce

Dunque la massima tensione assiale si ha dove è massima la curvatura ($\psi_{x,x}$), cioè ancora una volta dove è massimo il momento flettente

$$M = D \psi_{x,x}$$

$$\sigma_{\max} \equiv \max_{x,z} (\sigma_{xx}^{(0)}(x,z)) = E_F \frac{h}{2} \cdot \max_x (\psi_{x,x}(x))$$

Strutture Aeronautiche
3 - Dimensionamento di travi composite e sandwich 10

Svolgimento

SS	Trave isotropa e composita (Eulero-Bernoulli)	Trave sandwich
Freccia	$w^{(0)}(x) = \frac{qL^4}{24D} [\eta^4 - 2\eta^3 + \eta]$	$w^{(0)}(x) = \frac{qL^4}{24D} \left[(\eta^4 - 2\eta^3 + \eta) + \frac{12D}{A_T L^2} (-\eta^2 + \eta) \right]$
Rotazione sezione	$w_{,x}^{(0)}(x) = \frac{qL^3}{24D} [4\eta^3 - 6\eta^2 + 1]$	$\psi_x(x) = \frac{qL^3}{24D} [-4\eta^2 + 6\eta^2 - 1]$
w_{\max}	$\frac{5qL^4}{384D}$	$\frac{5qL^4 + qL^2}{384D} \frac{1}{8A_T}$
σ_{\max}	$E \frac{h qL^2}{2} \frac{1}{8D}$	$E_F \frac{h qL^2}{2} \frac{1}{8D}$

$$\eta \equiv \frac{x}{L}$$

Strutture Aeronautiche
3 - Dimensionamento di travi composite e sandwich 11

Svolgimento

CF	Trave isotropa e composita (Eulero-Bernoulli)	Trave sandwich
Freccia	$w^{(0)}(x) = \frac{qL^4}{24D} [\eta^4 - 4\eta^3 + 6\eta^2]$	$w^{(0)}(x) = \frac{qL^4}{24D} \left[(\eta^4 - 4\eta^3 + 6\eta^2) + \frac{12D}{A_T L^2} (-\eta^2 + 2\eta) \right]$
Rotazione sezione	$w_{,x}^{(0)}(x) = \frac{qL^3}{24D} [4\eta^3 - 12\eta^2 + 12\eta]$	$\psi_x(x) = \frac{qL^3}{24D} [-4\eta^2 + 12\eta^2 - 12\eta]$
w_{\max}	$\frac{qL^4}{8D}$	$\frac{qL^4 + qL^2}{8D} \frac{1}{2A_T}$
σ_{\max}	$E \frac{h qL^2}{2} \frac{1}{2D}$	$E_F \frac{h qL^2}{2} \frac{1}{2D}$

$$\eta \equiv \frac{x}{L}$$

Strutture Aeronautiche
3 - Dimensionamento di travi composite e sandwich 12

Dati comuni a tutte le travi

L=500 mm
 b=25 mm
 q=5000 N/m (carico totale sulla trave di 250 kg circa)

Trave isotropa - Eulero-Bernoulli

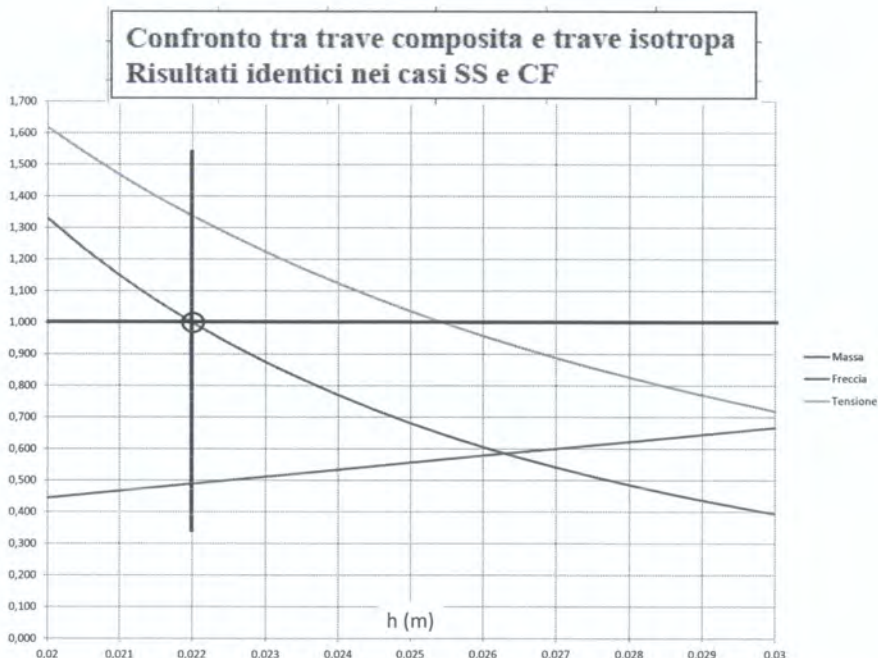
h=25 mm
 Alluminio ($E=73000 \text{ MPa}$, $\rho=2700 \text{ kg/m}^3$)
 Caso SS: $w_{\max}=1.71 \text{ mm}$, $\sigma_{\max}=60 \text{ MPa}$
 Caso CF: $w_{\max}=16.4 \text{ mm}$, $\sigma_{\max}=240 \text{ MPa}$

Trave composita (0/90/0) - Eulero-Bernoulli

h variabile
 $E_1=111000 \text{ Mpa}$
 $E_2=8000 \text{ MPa}$
 $\rho=1500 \text{ kg/m}^3$

Trave sandwich simmetrica - Teoria della trave sandwich

h_c variabile
 $h_f=1 \text{ mm}$
 Facce in alluminio ($E_f=73000 \text{ MPa}$, $\rho_f=2700 \text{ kg/m}^3$)
 Cuore in honeycomb di alluminio ($G_c=300 \text{ Mpa}$, $\rho_c=50 \text{ kg/m}^3$)



3

$W_{max} = W\left(\frac{L}{2}\right) = \left[\frac{5}{384} \frac{qL^4}{D} \right] \rightarrow \text{Rif: } \frac{E}{5} \text{ altezza } q \cdot h \cdot l$

$W_{,xx} = \frac{q}{2D} x^2 - \frac{qLx}{2D} = \frac{qL^2}{2D} \left[\eta^2 - \eta \right]$

Il massimo si ha per $x = \frac{L}{2}$ per cui $\left[\frac{E}{2} \frac{qL^2}{8D} \right]$

$\sigma_{max} = -E \frac{1}{2} \frac{qL^2}{2D} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{E}{2} \frac{qL^2}{8D} \right]$

$\sigma_{,xxx} = \frac{q}{D} x - \frac{qL}{2D} = \frac{q}{D} \left(x - \frac{L}{2} \right)$

CASO CF

$W(0) = 0$ $H(L) = 0$
 $W_x(0) = 0$ $T(L) = 0$

Esempio $(H = -DW_{,xxx})$ $T = -DW_{,xxx}$

Si ha anche

$W_x(L) = 0$ $W_{,xx}(L) = 0$
 $W_x(0) = 0$ $W_{,xxx}(L) = 0$

$W_{,xxx}(L) = \left[\frac{qL}{D} + c_1 = 0 \right] \Rightarrow c_1 = -\frac{qL}{D}$

$W_{,xx}(L) = \left[\frac{q}{2D} L^2 - \frac{qL^2}{D} + c_2 = 0 \right] \Rightarrow c_2 = \frac{qL^2}{2D}$

$W_x(0) = \left[c_3 = 0 \right]$

$W(0) = \left[c_4 = 0 \right]$

3

Quadrati

$W = \frac{q}{24D} x^4 - \frac{qL}{6D} x^3 + \frac{qL^2}{4D} x^2$
$W = \frac{qL^4}{24D} \left[\eta^4 - 4\eta^3 + 6\eta^2 \right]$

$W_{max} = W(L) = \left[\frac{qL^4}{8D} \right]$

Per SS $W_{max}^{SS} = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{D} < W_{max}^{CF}$

$W_{,xx} = \frac{q}{2D} x^2 - \frac{qL}{D} x + \frac{qL^2}{2D} = \frac{qL^2}{2D} \left[\eta^2 - 2\eta + 1 \right]$

Massimo per $\eta = 0$ per cui

$\sigma_{max} = \left[+E \frac{1}{2} \frac{qL^2}{2D} \right]$

$\sigma_{,xxx} = \frac{q}{D} x - \frac{qL}{D} = \frac{q}{D} (x - L)$
 $T = D \sigma_{,xxx} = q(x - L)$

4

Soluzione Sandwich

$\left\{ \begin{aligned} A_T (W_{,xx} + \psi_{,xx}) &= -q \rightarrow (W_{,x} + \psi_{,x})_{,x} = -\frac{q}{A_T} \\ D \psi_{,xxx} &= A_T (W_{,x} + \psi_{,x}) \end{aligned} \right.$

Si ha

$(W_{,xx} + \psi_{,xx}) = -\frac{q}{A_T}$

$D \psi_{,xxx} = A_T (W_{,x} + \psi_{,x})$

$W_{,x} + \psi_{,x} = -\frac{q}{A_T} x + c_1$

$D \psi_{,xxx} = -q x + c_1 A_T$

2

Abbiamo

$$W_{MAX} = W\left(\frac{L}{2}\right) = \boxed{\frac{5}{384} \frac{qL^4}{D} + \frac{qL^2}{8AT}}$$

Si ha poi

$$\psi_{x,x} = -\frac{qL^2}{2D} + \frac{qLx}{2D} = \frac{qL^2}{2D} (-\frac{L}{2} + x)$$



Massimo per $x=L/2$ per cui

$$\sigma_{MAX} = \boxed{EF \frac{1}{2} \frac{qL^2}{8D}}$$

Caso CF

$$W(0) = 0$$

$$\psi_x(0) = 0$$

ovvi si ha

$$M = \Delta \psi_{x,x}$$

per cui

$$\psi_{x,x}(0) = 0$$

$$W_x(0) + \psi_x(0) = 0$$

$$T = AT(W_x + \psi_x)$$

$$M(0) = 0$$

$$T(0) = 0$$

$$W_x(L) + \psi_x(L) = -\frac{qL}{AT} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{qL}{AT}$$

$$\psi_{x,x}(L) = -\frac{qL^2}{2D} + \frac{qAL^2}{D \Delta x} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{qL^2}{2D} \quad (7)$$

3) TRAVE SANDWICH SIMMETRICA

h variabile (cuore)

$h_f = 1 \text{ mm} \text{ o } 2 \text{ mm}$ (spessore faccie)

Facce \rightarrow lega di alluminio ($E_f = 73 \text{ 000 MPa}$, $\rho_f = 2700 \text{ kg/m}^3$)

Cuore \rightarrow metallo di alluminio ($E_c = 300 \text{ MPa}$, $\rho_c = 50 \text{ kg/m}^3$)

Si chiede di determinare:

1) Per quale spessore totale h la freccia massima della trave composta è la stessa della trave isotropa.

Nota h , confrontare masse e massime tensioni normali.

2) Per quale spessore del cuore h la trave sandwich ha la stessa freccia massima della trave isotropa.

Nota h , confrontare masse e massime tensioni normali.

SVOLGIMENTO

Il primo passo da compiere è quello di andare a valutare le caratteristiche di sollecitazioni delle due travi.

SS)



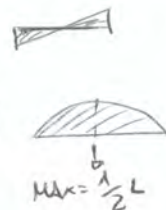
1) $V_A + V_B = q \cdot L \Rightarrow V_A = q \frac{L}{2}$

2) $V_B \cdot L - q \frac{L^2}{2} = 0 \Rightarrow V_B = q \frac{L}{2}$



$T(x) = q \cdot x - q \frac{L}{2} = q(x - \frac{L}{2})$

$M(x) = q \frac{x^2}{2} - q x \frac{L}{2} = q(\frac{x^2}{2} - \frac{L}{2}x)$



CF)



1) $V_A = qL$

2) $M_A = q \frac{L^2}{2}$

Otteniamo quindi che

$$\frac{b}{3} \left(-\frac{E_1}{216} \cdot h^3 + \frac{E_1}{8} h^3 + \frac{E_2}{216} h^3 + \frac{E_2}{216} h^3 + \frac{E_1}{8} h^3 - \frac{E_1}{216} h^3 \right) = 2,37 \cdot 10^9 \text{ MPa}$$

$$h^3 \cdot \frac{2b}{3} \cdot \left(\frac{E_1}{8} + \frac{E_2}{216} - \frac{E_1}{216} \right) = 2,37 \cdot 10^9$$

$$h_{comp} = 21,89 \text{ mm}$$

Andiamo ora a confrontare la tensione massima delle due travi nei due casi -

La tensione si calcola a partire dalla relativa deformazione

$$\epsilon_{xx}(x, z) = v_{,x}''(x) - z w_{,xx}^{(0)}(x)$$

↳, ma a solo cerchi nel piano x-y

$$\sigma_{xx}^{(0)}(x, z) = -E_x^{(0)} z \cdot w_{,xx}^{(0)}(x)$$

Il massimo della tensione si ha dove è massima la curvatura, cioè dove è massimo il momento flettente, essendo

$$M = -D w_{,xx}^{(0)}$$

Determinata la sezione x di massima curvatura, occorre determinare la quota z che massimizza ulteriormente la tensione -

→ TRAVE ISOTROPA SS

La tensione massima si ha nel piano mediano del momento che è andamento della tensione a linearità

$$\sigma_{max} = \max(\sigma_{xx}(x, z)) = -E \cdot \frac{h}{2} \cdot \max(w_{,xx}^{(0)}(x))$$

La deformazione massima si ha in mezzo → $x = \frac{L}{2}$

Sappiamo che

$$w^{(0)}(x) = \frac{qL^2}{24D} [4\eta^4 - 2\eta^3 - \eta] \quad \text{con } \eta = \frac{x}{L}$$

$$\text{Quindi } w_{,xx}^{(0)}(x) = \frac{qL^2}{24D} \cdot [4\eta^3 - 6\eta^2 - 1]$$

$$w_{,xx}^{(0)}(x) = \frac{qL^2}{24D} \cdot [12\eta^2 - 12\eta] = \frac{qL^2}{2D} \cdot [\eta^2 - \eta] =$$

La tensione massima quindi vale

$$\sigma_{max} = -E \cdot \frac{h}{2} \cdot \omega_{,xx}^{(0)}|_{max} = 240,64 \text{ MPa}$$

→ TRAVE COMPOSITA CF

$$\sigma_{max} = -E_1 \cdot \frac{b}{2} \cdot \omega_{,xx}^{(0)}|_{max} = ~~300,65 \text{ MPa}~~ 320,39 \text{ MPa}$$

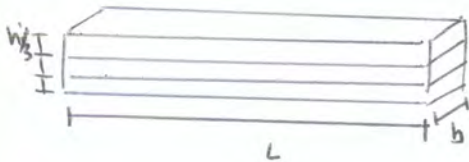
Andiamo infine a confrontare le masse

→ TRAVE ISOTROPA



$$M = \rho \cdot L \cdot b \cdot h = 2,7 \cdot 10^6 \cdot 500 \cdot 25 \cdot 25 = 9844 \text{ kg}$$

→ TRAVE COMPOSITA



$$M = \rho \cdot L \cdot b \cdot h = 1,5 \cdot 10^6 \cdot 500 \cdot 25 \cdot 21,88 = 941 \text{ kg}$$

CASO SS

~~caso SS~~

$$W_{MAX-ISO-SS} = W_{MAX-S-SS}$$

$$\frac{59L^4}{384 \cdot D} = \frac{59L^4}{384 \cdot D} + \frac{9L^2}{8At} \rightarrow \begin{cases} \text{CASO a} \rightarrow h = 57,037 \text{ mm} \rightarrow D = 3,02 \cdot 10^3 \\ \text{CASO b} \rightarrow h = \quad \quad \quad \rightarrow D = \quad \quad \quad \end{cases}$$

CASO CF

$$\frac{9L^4}{8D} = \frac{9L^4}{8D} + \frac{9L^2}{2At}$$

$$\rightarrow \text{CASO a)} \quad 16,48 = \frac{92 \cdot 83,22}{n(n+1)} + \frac{83,33}{n} \rightarrow h = 52,58 \text{ mm} \rightarrow D = 2,6 \cdot 10^3$$

$$\rightarrow \text{CASO b)} \quad 16,48 = \frac{21962,9}{n(n+1)} + \frac{41,66}{n} \rightarrow h = 36,82$$

Andiamo ora a calcolare la tensione massima

Determinate la freccia $w^{(0)}(x)$ e la rotazione $\psi_x(x)$ e' possibile determinare la tensione con la solita procedura

$$\epsilon_{xx}^{(1)}(x,z) = -\epsilon_{xx}^{(0)}(x,z) = \underbrace{u_{,xx}^{(0)}}_{=0}(x) + \left(\frac{h}{z}\right) \psi_{,x}(x)$$

$$\sigma_{xx}^{(1)}(x,z) = -\sigma_{xx}^{(0)}(x,z) = E_F \left(\frac{h}{z}\right) \psi_{,x}(x)$$

La tensione assiale ha due soli valori uguali sulle due facce. Dunque la massima tensione assiale si ha dove è massima la curvatura, cioè dove è massimo il momento flettente $\rightarrow x = \frac{L}{2}$

$$M = D \psi_{,xx}$$

$$\sigma_{max} = \max_{x,z} (\sigma_{xx}^{(1)}(x,z)) = E_F \frac{h}{2} \max_x (\psi_{,xx}(x))$$

53

CONFRONTO MASSE

CASO SS

$$\begin{aligned}
 a) \quad M &= 2 \cdot (\rho_F \cdot h_F \cdot b \cdot L) + (\rho_C \cdot h \cdot b \cdot L) = \\
 &= 2 \cdot 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 25 \cdot 500 + 5 \cdot 10^{-8} \cdot 57,037 \cdot 25 \cdot 500 = \\
 &= 90675 + 9036 = 9,103 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \Rightarrow M &= 2(\rho_F \cdot h_F \cdot b \cdot L) + (\rho_C \cdot h \cdot b \cdot L) = \\
 &=
 \end{aligned}$$

CASO CF

$$\begin{aligned}
 a) \quad M &= 2 \cdot (\rho_F \cdot h_F \cdot b \cdot L) + (\rho_C \cdot h \cdot b \cdot L) = \\
 &= 2 \cdot 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 25 \cdot 500 + 5 \cdot 10^{-8} \cdot 52,88 \cdot 25 \cdot 500 = \\
 &= 90675 + 90329 = 9,0104 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

$$b) =$$

59

Politecnico di Torino
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Svolgimento

Ricaviamo ora il modulo tangente del materiale E_{cr} , ovvero la pendenza della curva $\sigma(\epsilon)$ nella zona non lineare, al variare della tensione. Sono possibili vari metodi: metodo grafico (rapporto incrementale), interpolazione con polinomi (di grado non elevato però), metodo dei minimi quadrati, etc.

Strutture Aeroelastiche
4 - Stabilità a compressione di aste e correnti

5

Politecnico di Torino
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Svolgimento

Il diagramma può essere usato per calcolare la tensione critica (instabilità globale) nota la snellezza (si ricordi anche la formula di Johnson). Dato che la geometria della sezione è fissa, possiamo determinare p (raggio d'inerzia) conoscendo il piano di inflessione, L_{eff} (lunghezza libera di inflessione), invece, dipende dalle condizioni di vincolo dei due estremi dell'asta.

Strutture Aeroelastiche
4 - Stabilità a compressione di aste e correnti

7

Politecnico di Torino
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Svolgimento

Instabilità globale
Calcoliamo l'andamento della snellezza $A=A(\sigma_{cr})$

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{L_{eff}^2} \Rightarrow N_{cr} = \pi^2 \frac{ESp^2}{L_{eff}^2} \Rightarrow N_{cr} = \pi^2 \frac{E}{(L_{eff}/p)^2}$$

$$\sigma_{cr} = \pi^2 \frac{E}{A^2} \Rightarrow A = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{cr}}} \Rightarrow A_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

Bisogna distinguere il caso del campo lineare, nel quale vale la teoria di Eulero, da quello non lineare, nel quale supponiamo valida la teoria del modulo tangente. Si hanno pertanto due espressioni per la snellezza:

$$A = \begin{cases} \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{cr}}} & 0 \leq \sigma_{cr} \leq \sigma_p \text{ campo lineare} \\ \pi \sqrt{\frac{E_t(\sigma_{cr})}{\sigma_{cr}}} & \sigma_{cr} \geq \sigma_p \text{ campo non lineare} \end{cases}$$

Può essere utile ricavare $E_t(\sigma)$

Strutture Aeroelastiche
4 - Stabilità a compressione di aste e correnti

6

Politecnico di Torino
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Svolgimento

Per calcolare p dobbiamo ricordarci che

$$p = \sqrt{J}$$

Il valore di J da utilizzare nella formula precedente deve essere pari al momento di inerzia relativo al piano nel quale effettivamente avviene l'inflessione dell'asta per instabilità globale. In mancanza di altre indicazioni, bisogna usare il minimo J fra gli infiniti possibili valori, poiché corrisponde alla tensione critica minima. È noto che i due momenti di inerzia centrali sono uno il minimo e uno il massimo; è quindi necessario calcolare il baricentro della sezione e poi determinare quali sono gli assi centrali ed i corrispondenti momenti di inerzia. Si avrà allora

$$p = \sqrt{J_{min}}$$

Per il calcolo di A bisogna tenere presente che

$$A = \frac{L_{eff}}{p} \text{ con } L_{eff} = c \cdot L \text{ e } c = \begin{cases} 1 & \text{estremi appoggiati} \\ 0,5 & \text{estremi incastrati} \end{cases}$$

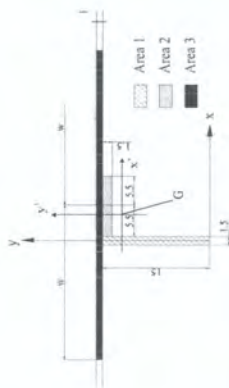
Strutture Aeroelastiche
4 - Stabilità a compressione di aste e correnti

8

57

Problema

Determinare le tre tensioni critiche a compressione di un corrente in Dural, di lunghezza 345 mm e la cui sezione trasversale è rappresentata sotto



13

Svolgimento

Instabilità globale del corrente (con striscia collaborante)
La procedura è la stessa usata in precedenza per l'asta: si calcola il baricentro della sezione costituita da corrente e striscia collaborante, si calcola il raggio di inerzia rispetto all'asse x' (l'inflessione del corrente avviene intorno a tale asse perché minima è la rigidità del pannello), si calcola L_{eff} a partire dalla lunghezza geometrica (estremità appoggiate), si calcola S e, quindi, σ_c , dal solito diagramma (parità di materiale).

Instabilità locale del corrente (con striscia collaborante)
Vale la formula di Vallaï, in questo caso il lembo libero è il tratto verticale del corrente.

Instabilità torsionale del corrente (con striscia collaborante)
Per calcolare la posizione del centro di taglio dell'area complessiva trascuriamo la striscia collaborante; in questo modo il centro di taglio è di immediata individuazione (*). Si può allora scrivere:

$$J_h = J_{h0} + S(x'^2 + y'^2) = J_{h0} + J_{h,y'y'} + S(x'^2 + y'^2)$$

dove siamo tornati a considerare l'area completa

14

7

3° INSTABILITÀ GLOBALE

Per conoscere il valore di σ_{cr} bisogna calcolare l'andamento della snellezza dal momento che

$$\sigma_{cr} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$$

Bisogna però distinguere il caso del campo lineare, nel quale vale la teoria di Euler, da quello non lineare, nel quale sappiamo valida la teoria del modulo tangente.

Abbiamo quindi che

$$\lambda = \begin{cases} \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{cr}}} & \text{se } 0 < \sigma_{cr} < \sigma_p \\ \pi \cdot \sqrt{\frac{E + \sigma_{cr}}{\sigma_{cr}}} & \text{se } \sigma_{cr} > \sigma_p \end{cases}$$

Dal grafico sforzo deformazione (figura 1) è possibile ricavare σ_p (ordinatea del punto in cui la curva si allontana dall'andamento rettilineo) e σ_s (ordinatea in cui si ha una deformazione permanente dello 0,2%).

$$\sigma_p = 20 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sigma_s = 31 \text{ kg/mm}^2$$

Andiamo a calcolare il valore limite della snellezza

$$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \sqrt{\frac{73'000}{20}} = 60$$

Dobbiamo ora valutare se in entrambi i casi ci si trova in campo elastico o meno

Per il calcolo della snellezza bisogna conoscere il valore del raggio di inerzia

$$p = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Dove I da utilizzare nella formula è il momento di inerzia relativo al piano nel quale avviene l'inflessione dell'asta.

In mancanza di altre informazioni dobbiamo usare il momento di inerzia minimo dei momenti di inerzia centrali, che corrisponde alla tensione critica minima.

o1
 Procediamo al calcolo del raggio di inerzia:

$$p = \sqrt{\frac{I_x}{A_{TOT}}} = \sqrt{\frac{2,672 \cdot 10^4}{275}} = 9,857 \text{ mm}$$

Possiamo quindi ora andare a calcolare la snellezza della trave nei due casi:

Caso 1: 2 appoggi $\rightarrow l=L$

$$\lambda_1 = \frac{L}{p} = 94,3 \rightarrow \text{asta snella, è possibile usare la teoria elastica}$$

Caso 2: 2 incastri $\rightarrow L = \frac{l}{2}$

$$\lambda_2 = \frac{L}{p} = 47,15 \rightarrow \text{asta tozza, bisogna applicare la teoria del modulo tangente.}$$

Calcoliamo prima il carico critico per l'asta snella

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 E \cdot I_x}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 73'000 \cdot 26720}{300^2} = 23766,93 \text{ N}$$

$$\sigma_{CR} = \frac{P_{CR}}{A_{TOT}} = 86,42 \text{ N/mm}^2 = 8,64 \text{ kg/mm}^2$$

Procediamo ora al calcolo di σ_{tr} per la trave tozza. Per fare questo dobbiamo calcolare il modulo tangente. con matlab costruiamo il polinomio ~~inter~~ di quarto grado interpolante i 5 ~~dat~~ punti di deflessione ~~con~~ plastica

si ottiene che il polinomio interpolante ha equazione

$$\sigma' = -9,0869 \varepsilon^4 + 7,8175 \varepsilon^3 - 29,0125 \varepsilon^2 + 125,8125 \varepsilon - 162,8156$$

Per ottenere E_t si deriva questa equazione per ε

$$E_t = \frac{d\sigma'}{d\varepsilon} = -36,3476 \varepsilon^3 + 23,4525 \varepsilon^2 - 58,025 \varepsilon + 125,8125$$

A questo punto è possibile ricavare ~~e~~ e diagrammare i valori di E_t (finire)

$$\sigma' \quad E_t$$

INSTABILITÀ TORSIONALE

La tensione critica per instabilità torsionale è data dalla formula

$$\sigma_{CR} = G \cdot \frac{J_t}{J_p}$$

Dove

- $J_t \rightarrow$ FATTORE DI RIGIDEZZA TORSIONALE

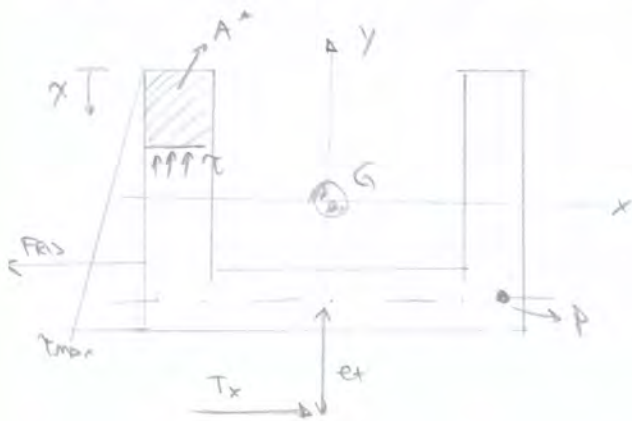
$$J_t = \frac{\sum d_i s_i^3}{3} = \frac{2 \cdot b \cdot s^3}{3} + \frac{a \cdot s^3}{3} = 312,5 + 260,42 = 572,92 \text{ mm}^4$$

- $J_p \rightarrow$ MOMENTO DI INERZIA POLARE (rispetto al centro di taglio)

$$J_p = J_{pG} + A(x_t^2 + y_t^2) = I_x + I_y + A \cdot y_t^2$$

Dove J_{pG} è il momento di inerzia polare della sezione rispetto al suo baricentro, pari alla somma dei due termini già calcolati.

Resta di calcolare la posizione del centro di taglio ($x_t=0$)



Si utilizza la formula di Jourawsky

$$\tau = \frac{T_x \cdot S_y^*}{I_y \cdot s} \rightarrow \text{momento statico di } A^* \text{ rispetto a } y$$

$I_y \cdot s \rightarrow$ spessore

$$S_y^* = s \cdot x \left(-\frac{h}{2}\right) = -s \frac{h}{2} x$$

Per calcolare e_t (posizione verticale del centro di taglio) imponiamo l'equilibrio dei momenti.

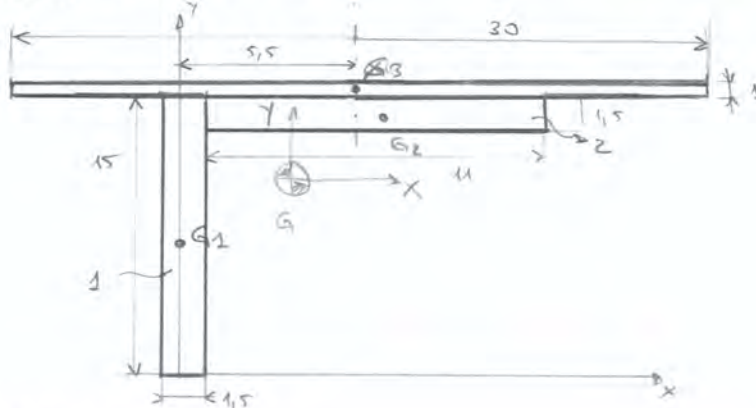
Scegliamo il punto P come polo in modo da non dover calcolare troppi momenti

$$T_x \cdot e_t = F_{es} \cdot h$$

PROBLEMA 2

51

Determinare le 3 tensioni critiche a compressione di un coarctato in IUPP, di lunghezza 345 mm e la cui sezione trasversale è rappresentata in figura



INSTABILITÀ GLOBALE

$x_{G1} = 0 \text{ mm}$ $A_1 = 15 \cdot 1,5 = 22,5 \text{ mm}^2$
 $y_{G1} = 7,5 \text{ mm}$

$x_{G2} = \frac{11}{2} + \frac{1,5}{2} = 6,25 \text{ mm}$ $A_2 = 1,5 \cdot 11 = 16,5 \text{ mm}^2$
 $y_{G2} = 15 - \frac{1,5}{2} = 14,25 \text{ mm}$

$x_{G3} = 5,5 + \frac{1,5}{2} = 6,25 \text{ mm}$ $A_3 = 30 \text{ mm}^2$
 $y_{G3} = 15 + 0,5 = 15,5 \text{ mm}$

$A_{tot} = A_1 + A_2 + A_3 = 69 \text{ mm}^2$

$x_G = \frac{\sum x_{Gi} A_i}{\sum A_i} = \frac{6,25 \cdot 16,5 + 6,25 \cdot 30}{69} = 6,21 \text{ mm}$

$y_G = \frac{\sum y_{Gi} A_i}{\sum A_i} = \frac{7,5 \cdot 22,5 + 14,25 \cdot 16,5 + 15,5 \cdot 30}{69} = 12,53 \text{ mm}$

Dal momento che è in flessione avviene attorno all'asse x, calcoliamo il momento di inerzia rispetto a tale asse.

$I_{x1} = \frac{1,5 \cdot 15^3}{12} + 1,5 \cdot 15 \cdot (12,53 - 7,5)^2 = 1119,33 \text{ mm}^4$

$I_{x2} = \frac{1,5 \cdot 11^3}{12} + 1,5 \cdot 11 \cdot (14,25 - 12,53)^2 = 98,36 \text{ mm}^4$

$I_{x3} = \frac{30^3}{12} + 30 \cdot 4 \cdot (15,5 - 12,53)^2 = 256,5 \text{ mm}^4$

$I_x = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} = 1310 \text{ mm}^4$

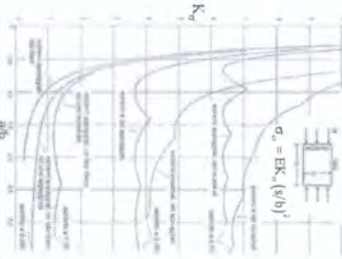
Sappiamo che

$$J_t = \frac{\sum d_i s_i^3}{3} = 39,25 \text{ mm}^4$$

Possiamo quindi infine calcolare il valore di σ_{cr} di instabilità torsionale

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\frac{J_t}{J_{pr}}} = 28070,92 \cdot \frac{39,25}{5737} = 19,21 \text{ kg/mm}^2$$

Svolgimento



Strutture Aerospaziali
3 - Stabilità a compressione e taglio di pannelli alari

5

Svolgimento

La tensione critica di taglio per un pannello isotropo si calcola con la seguente formula

$$\tau_{cr} = EK_1 \left(\frac{s}{b} \right)^2$$

dove E , s e b (lato minore) sono ancora una volta dati noti per il pannello. B mentre K_1 si può calcolare conoscendo al/b e supponendo che il pannello sia semplicemente appoggiato sui 4 lati (vedere grafico nella slide successiva).

La tensione sollecitante è ricavabile dal flusso di taglio, determinato nell'esercizio 1, ricordando che lo spessore del pannello è $s=1$ mm.

$$\frac{q_{GI}^{TOT}}{q_{GI}} = +27.79 \text{ N/mm} \Rightarrow \tau_{GI}^{TOT} = q_{GI}^{TOT} / s = +27.79 \text{ N/mm}^2$$

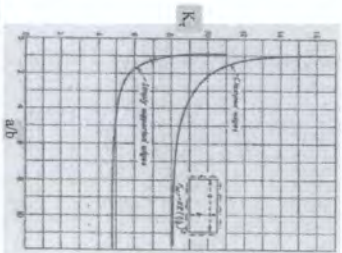
Anche in questo caso la tensione sollecitante è maggiore di quella critica e il pannello lavora in campo post-critico.

E' quindi possibile determinare lo stato di sollecitazione interno al pannello, riconoscendolo in campo di tensione diagonale parziale.

Strutture Aerospaziali
3 - Stabilità a compressione e taglio di pannelli alari

6

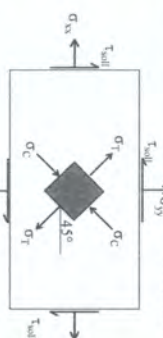
Svolgimento



Strutture Aerospaziali
3 - Stabilità a compressione e taglio di pannelli alari

7

Svolgimento



Il campo tangenziale puro (a) è quello pre-critico, il campo diagonale completo (c) è post-critico per valori molto elevati di T_{sol} . Nelle situazioni intermedie vale il campo diagonale parziale (b), somma di (a) fino a τ_{cr} e di (c) per la differenza $\Delta T = T_{sol} - \tau_{cr}$.

	(a) Tangenziale puro ($T_{sol} \leq \tau_{cr}$)	(b) Diagonale parziale ($T_{sol} \in [\tau_{cr}, 2\tau_{cr}]$)	(c) Diagonale completo ($T_{sol} >> \tau_{cr}$)
σ_T	T_{sol}	$2T_{sol} - \tau_{cr}$	$2T_{sol}$
σ_C	T_{sol}	τ_{cr}	0
σ_{xx}	0	$T_{sol} - \tau_{cr}$	T_{sol}
σ_{yy}	0	$T_{sol} - \tau_{cr}$	T_{sol}

Strutture Aerospaziali
3 - Stabilità a compressione e taglio di pannelli alari

8

74

Svolgimento

Nota lo stato di sollecitazione dei pannelli B, C e D, le forze applicate ai rivetti del pannello B si calcolano come segue:

- per ogni lato dei tre pannelli si calcolano le forze risultanti orizzontale e verticale;
- dividendo tali due forze per il numero di rivetti presenti sul lato, si ottengono le forze orizzontale e verticale agenti sul singolo rivetto e dovute al singolo pannello;
- per i rivetti interni dei due lati orizzontali del pannello B non ci sono altri pannelli che contribuiscono, possiamo calcolare la forza risultante agente sul rivetto;
- per i rivetti interni dei due lati verticali del pannello B bisogna sommare i contributi dovuti ai lati verticali dei pannelli adiacenti;
- per i 4 rivetti di vertice del pannello B ci sono 4 contributi relativi ai 4 lati di pannelli adiacenti che in tali vertici si toccano.

Strutture Aerospaziali
5 - Stabilità e compressione e taglio di pannelli alari

SVOLGIMENTO 1

La tensione critica a compressione massima per un pannello isotropo si calcola come

$$\sigma_{cr} = E k_{\sigma} \left(\frac{a}{b} \right)^2$$

Dove E , k_{σ} e b (lato corto) sono noti per il pannello, mentre k si ricerca dai grafici in allegato una volta noto il rapporto $\frac{a}{b}$.

Si considera il pannello semplicemente appoggiato sui 4 lati.

Il lato corto è $b = 250 \text{ mm}$

$$\frac{a}{b} = \frac{135}{250} = 1,38$$

Dal grafico



abbiamo che $k_{\sigma} = 3,62$

Possiamo quindi cercare σ_{cr}

$$\sigma_{cr} = 73'000 \cdot 3,62 \cdot \left(\frac{1}{250} \right)^2 = 4,2 \text{ MPa}$$

Commento



Politecnico di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Marco Gherlone

Scrittura dei programmi

Inserimento dei dati per l'analisi:

- dati sui materiali (E);
- dati sulla geometria e sulla mesh (sezioni, coordinate dei nodi, connectivities);
- dati sui vincoli (gradi di libertà bloccati);
- dati sui carichi (carichi concentrati nei nodi).



Politecnico di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Marco Gherlone

Scrittura dei programmi

Inserimento dei dati per l'analisi:
• dati sui materiali (E)

Bisogna considerare la possibilità che la struttura sia realizzata in diversi materiali; è allora necessario inserire il numero di materiali (nmat) e i valori di E per ognuno di essi (attraverso il vettore colonna, di dimensioni nmat x 1, {E}).

```
nmat=input('scrivi il numero di materiali diversi presenti nella struttura: ');
for n=1:nmat
    disp(['materiale n° ',num2str(n),'?']);
    E(n,1)=input('modulo elastico del materiale: ');
end
```



Politecnico di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Marco Gherlone

Strutture Aeronautiche
6 - Scrittura e applicazione di un programma MATLAB® per l'analisi FEM di travature reticolari piane 5

Scrittura dei programmi

Inserimento dei dati per l'analisi:
• dati sui materiali (E)

Per l'inserimento di questi dati, così come per quelli discussi nelle slides successive, è possibile usare una modalità alternativa a quella del comando input; elencarli tutti in un file .m che viene richiamato all'inizio dell'esecuzione del programma di analisi ROD_FEM.m.

```
nmat=3;
E=1:100:10^11;
end
```

Strutture Aeronautiche
6 - Scrittura e applicazione di un programma MATLAB® per l'analisi FEM di travature reticolari piane 7



Politecnico di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Marco Gherlone

Strutture Aeronautiche
6 - Scrittura e applicazione di un programma MATLAB® per l'analisi FEM di travature reticolari piane 6

Scrittura dei programmi

Inserimento dei dati per l'analisi:
• dati sulla geometria e sulla mesh (sezioni)

Le varie aste possono avere sezioni trasversali con aree diverse; bisogna inserire il numero di sezioni diverse (nsez) e l'area di ognuna (vettore colonna nsez x 1 {A}).

```
nsez=input('??');
for s=1:nsez
    disp('??');
end
```

Strutture Aeronautiche
6 - Scrittura e applicazione di un programma MATLAB® per l'analisi FEM di travature reticolari piane 8

Scrittura dei programmi

Calcoli preliminari:

- matrice di connectivity dei gradi di libertà per elemento;
- numero di nodi, di elementi e di gradi di libertà;
- lunghezza, $\cos(\alpha)$ e $\sin(\alpha)$ per ogni elemento.

Strutture Aeronautiche
6 - Scrittura e applicazione di un programma MATLAB® per l'analisi FEM di travature reticolari piane 13

Scrittura dei programmi

Calcoli preliminari:

- numero di nodi, di elementi e di gradi di libertà

Il numero di nodi (nn) si trova facilmente (è il numero di righe di [Pn]).
Il numero di elementi (ne) è altrettanto facile da calcolare (le righe di [Cne]).
Il numero di gradi di libertà o incognite (nl) è il massimo indice presente in [Cse].

```
nn=size(Pn,1);
ne=???;
nl=max(max(Cse));
```

Strutture Aeronautiche
6 - Scrittura e applicazione di un programma MATLAB® per l'analisi FEM di travature reticolari piane 15

Scrittura dei programmi

Calcoli preliminari:

- matrice di connectivity dei gradi di libertà per elemento

Per effettuare in maniera rapida l'assemblaggio, bisogna passare dalla matrice di connectivity dei nodi per elemento [Cne] (ne x 2, per ogni riga gli indici del primo e del secondo nodo dell'elemento) a quella dei gradi di libertà per elemento [Cse] (ne x 4, per ogni riga gli indici dei 4 gradi di libertà globali di quell'elemento). Il passaggio si può fare in modo automatico (slide 9), notando che, per esempio

$Cne(3,:) = [5 \quad 8]$

$Cse(3,:) = [9 \quad 10 \quad 15 \quad 16]$

$Cse(3,:) = [2 * 5 - 1 \quad 2 * 5 \quad 2 * 8 - 1 \quad 2 * 8]$

```
for e=1:size(Cne,1)
    Cse(e,:)=12*Cne(e,:)-1; end
```

Strutture Aeronautiche
6 - Scrittura e applicazione di un programma MATLAB® per l'analisi FEM di travature reticolari piane 14

Scrittura dei programmi

Calcoli preliminari:

- lunghezza, $\cos(\alpha)$ e $\sin(\alpha)$ per ogni elemento

La lunghezza e le funzioni trigonometriche dell'angolo α per ogni elemento si ricavano sapendo due cose: (1°) quali sono i due nodi di quell'elemento ([Cne]) e (2°) quali sono le coordinate di quei due nodi ([Pn]). Per esempio

$$L^{(3)} = \sqrt{(x_8^{G(3)} - x_1^{G(3)})^2 + (y_8^{G(3)} - y_1^{G(3)})^2}$$

$$\cos(\alpha^{(3)}) = \frac{x_8^{G(3)} - x_1^{G(3)}}{L^{(3)}} \quad \dots \quad \sin(\alpha^{(3)}) = \frac{y_8^{G(3)} - y_1^{G(3)}}{L^{(3)}} \quad \dots$$

```
for e=1:ne
    L(e,1)=sqrt((Pn(Cne(e,2),1)-Pn(Cne(e,1),1))^2+(Pn(Cne(e,2),1)-Pn(Cne(e,1),1))^2);
    ca(e,1)=(Pn(Cne(e,2),1)-Pn(Cne(e,1),1))/L(e);
    sa(e,1)=(Pn(Cne(e,2),1)-Pn(Cne(e,1),1))/L(e);
end
```

Strutture Aeronautiche
6 - Scrittura e applicazione di un programma MATLAB® per l'analisi FEM di travature reticolari piane 16



Politecnico di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Marco Gherlone

Scrittura dei programmi

Calcolo della matrice $[K^Q]$ e del vettore $\{F^{CQ}\}$ per l'intera struttura:
* calcolo delle matrici e dei vettori ridotti

Per fare il calcolo statico ci servono le sottomatrici di $[K]$ ed $\{F\}$. In primo luogo bisogna creare il vettore dei gradi di libertà non vincolati $\{il\}$ noti tutti i gradi di libertà $[1:1:nl]^T$ e quelli vincolati $\{lb\}$ (si noti che $\{il\}$ contiene i gradi di libertà non contenuti in $\{lb\}$). Poi bisogna calcolare i vari blocchi con dimensioni e indici pari a quelli indicati da $\{il\}$ e $\{lb\}$.

```

il=sort(il);
lb=sort(lb);
l1=???
K1F=R(il,il);
K1V=R(il,lb);
K1V=R(lb,il);
K1V=R(lb,lb);
F1F=???
F1V=???

```

Strutture Aeronautiche
6 – Scrittura e applicazione di un programma MATLAB® per l'analisi FEM di travature reticolari piane 21



Politecnico di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Marco Gherlone

Scrittura dei programmi

Risoluzione:
* calcolo statico (spostamenti nodali e reazioni vincolari)

Il calcolo statico consiste nell'uso delle sottomatrici di $[K]$ ed $\{F\}$ per calcolare i gradi di libertà non vincolati $\{QF\}$ e le reazioni vincolari $\{RV\}$. Si tratta poi di ricostruire il vettore completo dei gradi di libertà $\{Q\}$ e quello completo delle reazioni vincolari $\{CV\}$ (si noti che in questo caso $\{Fev\}=\{0\}$).

```

Q1=K1V\F1V;
RV=K1V*Q1+F1V;
Q(il,1)=QF;
Q(lb,1)=zeros(length(lb),1);
CV(il,1)=zeros(length(il),1);
CV(lb,1)=RV;

```

Strutture Aeronautiche
6 – Scrittura e applicazione di un programma MATLAB® per l'analisi FEM di travature reticolari piane 23



Politecnico di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Marco Gherlone

Scrittura dei programmi

Risoluzione:
* calcolo statico (spostamenti nodali e reazioni vincolari).

Strutture Aeronautiche
6 – Scrittura e applicazione di un programma MATLAB® per l'analisi FEM di travature reticolari piane 22



Politecnico di Torino
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Marco Gherlone

Scrittura dei programmi

Salvataggio dei risultati:
* salvataggio dei risultati statici.

Strutture Aeronautiche
6 – Scrittura e applicazione di un programma MATLAB® per l'analisi FEM di travature reticolari piane 24

Scrittura dei programmi

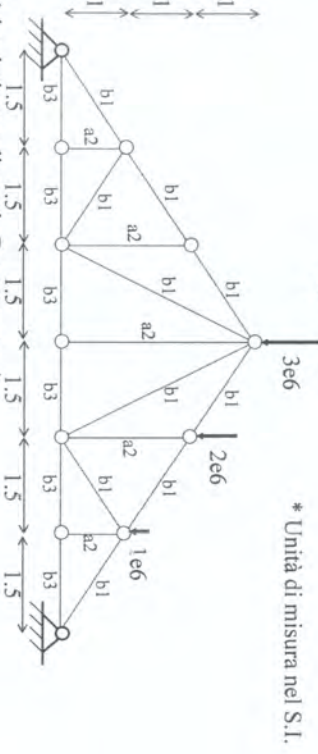
Elaborazione dei risultati (static):
• realizzazione del grafico della deformata statica

Il grafico va fatto elemento per elemento (si tratterà quindi di un ciclo su tutti gli elementi dopo un hold on iniziale che serve ad accumulare i vari contributi). Il comando axis equal serve a far sì che venga usata la stessa scala secondo i due assi. Per ogni elemento bisogna semplicemente individuare la posizione dei due nodi dopo la deformazione; tale posizione è data da quella iniziale ([Pn]) più gli spostamenti nodali ([qj]).

```
figure(1);
hold on;
axis equal;
grid on;
for e=1:ne
    plot([Pn(Che,e,1),1]+q(1,e) Pr(Che,e,2),1)+q(3,e)],'r');
end
```

Strutture Aeronautiche
6 - Scrittura e applicazione di un programma MATLAB® per l'analisi FEM di travi rettilinee piane 29

Applicazione



Sezioni* (circolari cave di raggio R e spessore s):
 a. $R=5e-2, s=5e-3;$
 b. $R=3e-2, s=5e-3.$ } $A \cong 2\pi R s$

Materiali*:
 1. Acciaio ($E=210e9, \nu=0.3, \rho=7.96e3$);
 2. Titanio ($E=105e9, \nu=0.3, \rho=4.50e3$);
 3. Alluminio ($E=73e9, \nu=0.3, \rho=2.70e3$).

Si determinino:
 • spostamenti dei nodi;
 • reazioni vincolari;
 • deformazioni delle aste;
 • tensioni nelle aste;
 • sforzi normali nelle aste.

Strutture Aeronautiche
6 - Scrittura e applicazione di un programma MATLAB® per l'analisi FEM di travi rettilinee piane 31

Scrittura dei programmi

Elaborazione dei risultati (static):
• calcolo della deformazione, della tensione e dello sforzo normale in ogni elemento

Si può creare la matrice [D] (ne x 4) contenente, in ogni riga, il numero dell'elemento, la deformazione, la tensione e lo sforzo normale in quell'elemento. Per il calcolo della deformazione si ricordino le espressioni

$$\epsilon^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{U^{(e)}_1} \\ q_{U^{(e)}_2} \end{Bmatrix} \rightarrow \epsilon^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} [A^{(e)}] \begin{Bmatrix} q^{(e)} \end{Bmatrix}$$

Per il calcolo della tensione e dello sforzo normale, bisogna utilizzare i valori di A e di E relativi all'elemento in questione.

```
D=zeros(ne,4);
D(:,1)=1:ne;
for e=1:ne
    Lambdae=?;
    D(e,2)=(1/L(e))*[-1 1]*Lambdae*q(:,e);
    D(e,3)=?;
    D(e,4)=?;
end
```

Strutture Aeronautiche
6 - Scrittura e applicazione di un programma MATLAB® per l'analisi FEM di travi rettilinee piane 30


```

for e=1:size(Cne,1)
    Cse(e,:)=[2*Cne(e,1)-1 2*Cne(e,1) 2*Cne(e,2)-1 2*Cne(e,2)];
end

ni=max(max(Cse)); %numero di gradi di libert? o incognite

%% calcoli preliminari (lunghezza coseno seno)
for e=1:ne
    L(e,1)=sqrt((Pn(Cne(e,2),1)-Pn(Cne(e,1),1))^2 + (Pne(Cne(e,2),2)-Pn(Cne(e,1),2))^2);
    ca(e,1)=(Pn(Cne(e,2),1)-Pn(Cne(e,1),1))/L(e);
    sa(e,1)=(Pn(Cne(e,2),2)-Pn(Cne(e,1),2))/L(e);
end

%% processing
% calcolo della matrice di rigidezza globale e del vettore dei carichi

K=zeros(ni);

for e=1:ne
    Ke=fun_Kg (L(e), ca(e), sa(e), A(Cpe(e,1)), E(Cpe(e,2)));
    I=Cse(e, :);
    K(I,I)=K(I,I)+Ke;
end

f=zeros(2*ne,1);

for e=1:size(Fn,1)
    f(Fn(e,1))=Fn(e,2);
end

ib=sort(ib); il=1:1:ni;
il=stdiff(il,ib);
Kff=K(il,il); Kfv=K(il,ib);
Kvf=K(ib,il); Kvv=K(ib,ib);
Ff=F(il); Fv=F(ib);

%calcolo statico spostamenti nodali e reazioni vincolari

Qf=Kff\Fef; Rv=Kvf*Qf-Fev;
Q(il,:)=Qf; Q(ib,:)=zeros(length(ib),1);
Cv(il,:)=zeros(length(il),1); Cv(ib,:)=Rv;

%salvataggio risultati

nomesave=input([' scrivi il nome (tra apici) del file nel quale salvare i risultati: ']);
str=['save ',nomesave,' A E Pn Cne Cpe Cse ib Fn nn ne ni L ca sa K F Q Cv;'];
eval(str);

function [Ke] = fun_Kg( L, ca, sa, A, E)
Kl= E*A/L*[1 -1; -1 1];
lambda=[ca sa 0 0; 0 0 ca sa];
Ke=lambda' * Kl * lambda;
end

```

RISULTATI

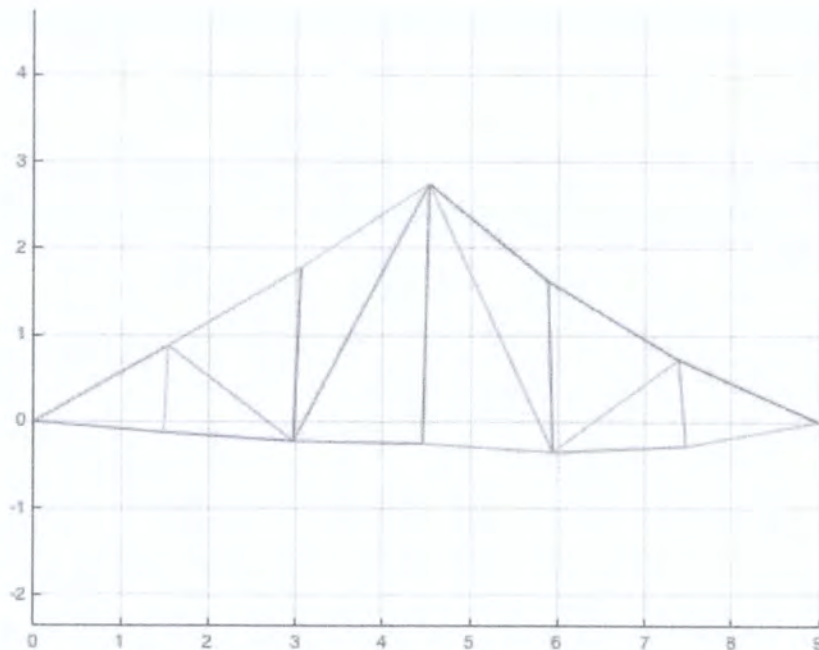
Spostamenti nodali

Nodi	Spost. X [m]	Spost. Y [m]
1	0.0000e+000	0.0000e+000
2	-14.5347e-003	-123.8790e-003
3	36.5370e-003	-123.8790e-003
4	-29.0694e-003	-222.2887e-003
5	56.0945e-003	-222.2887e-003
6	-43.6041e-003	-251.6249e-003
7	29.6029e-003	-251.6249e-003
8	-58.1388e-003	-348.4542e-003
9	-113.6132e-003	-372.7064e-003
10	-29.0694e-003	-279.5040e-003
11	-113.9733e-003	-279.5040e-003
12	0.0000e+000	0.0000e+000

Reazioni vincolari

Nodi	Forza X [N]	Forza Y [N]
1	4.1667e+006	2.3333e+006
12	-4.1667e+006	3.6667e+006

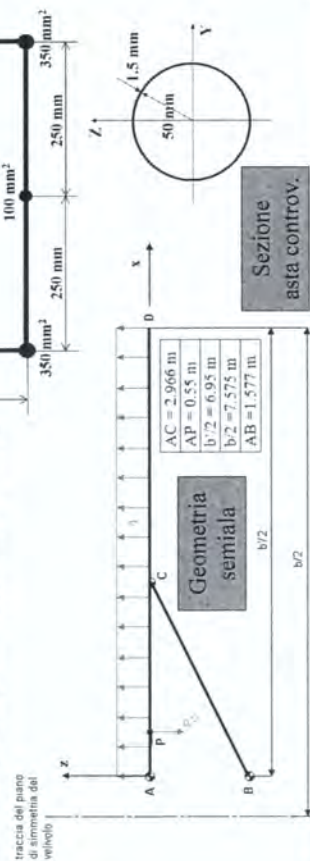
Grafico della deformata statica



Analisi statica di una semiala con elementi finiti 1D in ambiente MSC/PATRAN®-NASTRAN®

Dati del problema

W=2800 Kg (Peso al decollo del velivolo)
 $n=3.6$ (Fattore di carico massimo)
 $P_C=200$ Kg (Peso comb. semiala)
 $P_S=210$ Kg (Peso semiala)
 Portanza triangolare lungo la corda
 Materiale: ERGAL ($E=73000$ MPa, $\nu=0.33$)



Contenuto dell'esercitazione

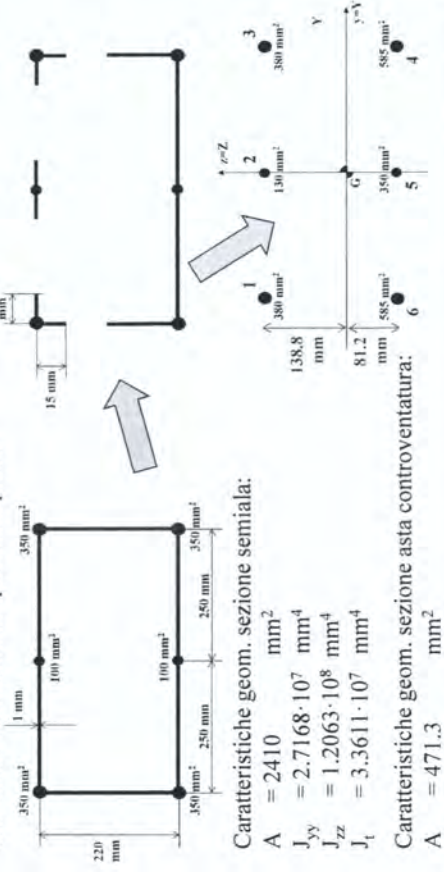
L'esercitazione consiste nell'analisi statica di una semiala controventata con il modello della trave a semiguscio e si divide in due fasi:
 1. soluzione del problema con elementi finiti 1D (ROD e BEAM) in ambiente MSC/PATRAN®-NASTRAN®;
 2. confronto con soluzione analitica del problema.

Scopo dell'esercitazione

Gli scopi fondamentali dell'esercitazione sono:
 • l'impiego accoppiato di diversi elementi finiti 1D (ROD e BEAM) in presenza di carichi concentrati e distribuiti;
 • la familiarizzazione con un codice commerciale agli elementi finiti.

Calcoli preliminari

Nella sezione della semiala si considerano collaboranti tutti i pannelli tesi e per la sola striscia collaborante quelli compresi



Caratteristiche geom. sezione semiala:

$$A = 2410 \text{ mm}^2$$

$$J_{yy} = 2.7168 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

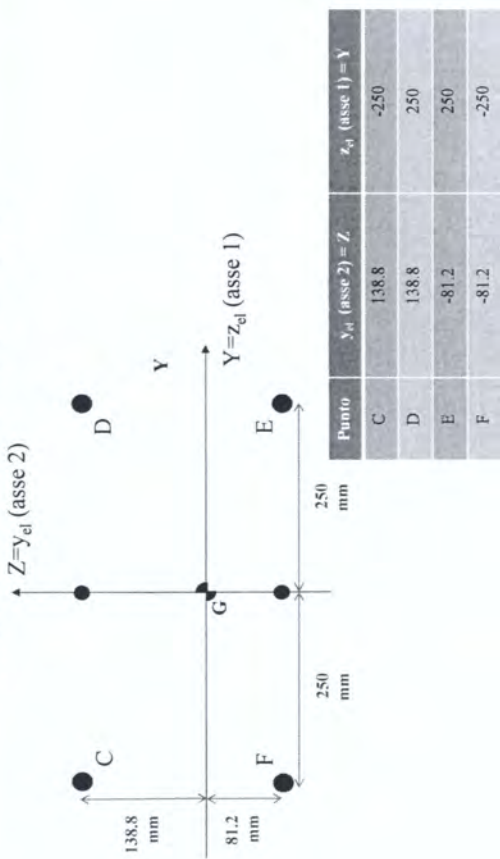
$$J_{zz} = 1.2063 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$J_t = 3.3611 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

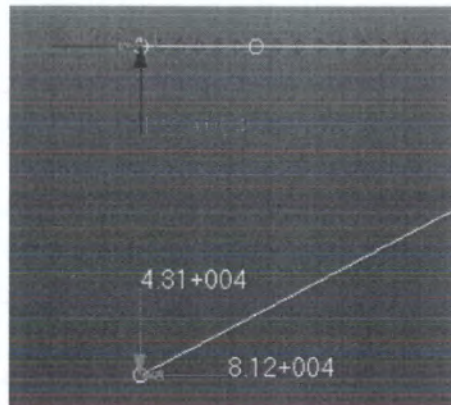
Caratteristiche geom. sezione asta controventatura:

$$A = 471.3 \text{ mm}^2$$

Sezione elementi BAR: notazione e convenzioni

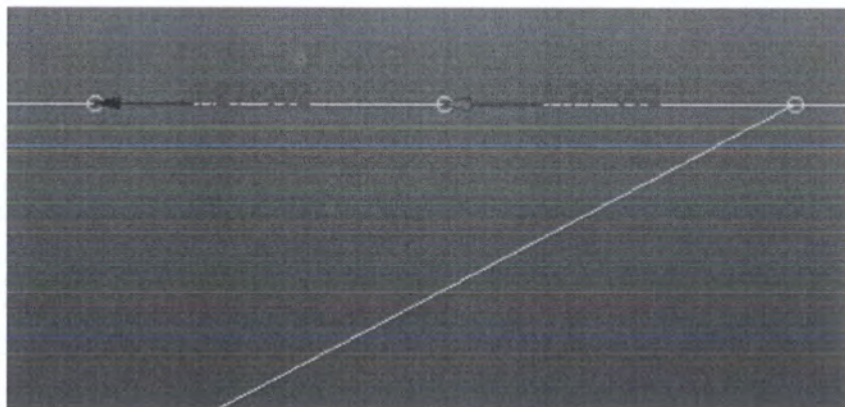


I valori delle reazioni vincolari sono:



Si nota che sono identici a quelli ottenuti in via analitica.

L'ultimo punto da calcolare è la tensione nei correnti in due particolari sezioni della semiala posti ad $x_1=1977\text{mm}$ e $x_2=2472\text{mm}$. I valori che si ottengono sono:

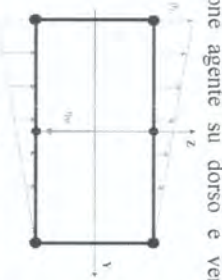


Questi valori differiscono da quelli calcolati per via analitica perchè non si è tenuto conto della tensione prodotta dallo sforzo normale. Se si aggiungesse questa ai valori ottenuti si otterrebbero gli stessi risultati.

Calcoli preliminari

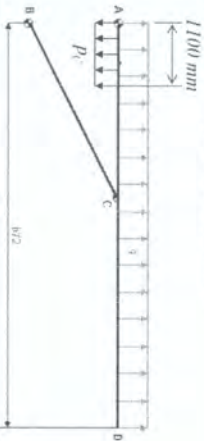
La portanza è modellizzata come una pressione agente su dorso e ventre con distribuzione triangolare in y (uniforme in x)

$$P_L(y) = 0,01305 \left(\frac{1-y}{2} \right) \frac{N}{mm^2}$$



Il peso del combustibile è modellizzato come una pressione uniforme agente sul ventre per i primi 1100 mm di lunghezza della semiala (baricentro a 550 mm)

$$P_C = \frac{P_C}{1100 * 500} = \frac{N}{7063} = 0,01284 \frac{N}{mm^2}$$



Strutture Aeronautiche
8 - Analisi statica di una semiala con elementi finiti 1D e 2D in ambiente MSC/PATRAN®-NASTRAN® 5

Modellizzazione dei vincoli

La cerniera di collegamento tra semiala e fusoliera viene schematizzata come un vincolo:

- in grado di lasciare libera la sola rotazione di flessione;
 - concentrato nel centro della sezione di attacco.
- Tale punto viene collegato rigidamente ai nodi della sezione



Nella cerniera di collegamento tra asta e fusoliera vengono bloccati gli stessi gradi di libertà.

Strutture Aeronautiche
8 - Analisi statica di una semiala con elementi finiti 1D e 2D in ambiente MSC/PATRAN®-NASTRAN® 7

Calcoli preliminari

Il peso della semiala viene modellizzato come un carico inerziale associato all'intera semiala.

Il carico complessivo è

$$F_S = nW_S g = 7416 \text{ N}$$

Il volume della sola parte strutturale di semiala (cioè quella modellizzata) è

$$V_S = V_{\text{corona}} + V_{\text{pannelli}} + V_{\text{colonne}} = (4 * 350 + 2 * 100) * 6950 + (2 * 500 + 2 * 220) * 1 * 6950 + (500 * 220 * 1) * 14 = 22668000 \text{ mm}^3$$

Il carico F_S può essere quindi ottenuto come inerziale associato al volume V_S se quest'ultimo è soggetto ad una accelerazione "fittizia" a_S

$$F_S = m_S a_S = \rho V_S a_S \Rightarrow a_S = \frac{F_S}{\rho V_S} = 121175 \frac{mm}{s^2} \quad (= ng \text{ con } n = 12,3)$$

Strutture Aeronautiche
8 - Analisi statica di una semiala con elementi finiti 1D e 2D in ambiente MSC/PATRAN®-NASTRAN® 6

Risultati attesi

Si chiede di determinare (con l'analisi agli elementi finiti):

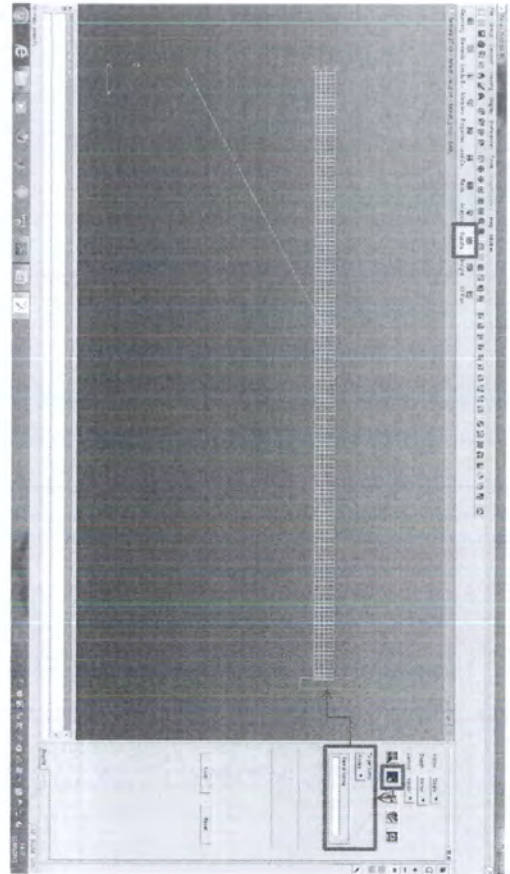
- la deformata statica della semiala e, in particolare, i valori di deflessione (w_{max}) e rotazione di torsione (θ_{max}) dell'estremità alare;
- le reazioni vincolari nelle cerniere di collegamento con la fusoliera;
- le tensioni nei correnti in corrispondenza:
 - all'attacco semiala-fusoliera;
 - al collegamento semiala-controventatura;
 - ai punti x_1 e x_2 dell'esercitazione 1.

E' poi richiesto il confronto con i risultati già ottenuti nell'esercitazione 1 (modello trave a semiguscio, soluzione analitica) e nell'esercitazione 7 (modello trave a semiguscio, soluzione con elementi finiti 1D) per le reazioni vincolari e per le tensioni normali nei correnti per $x=x_1$ e $x=x_2$.

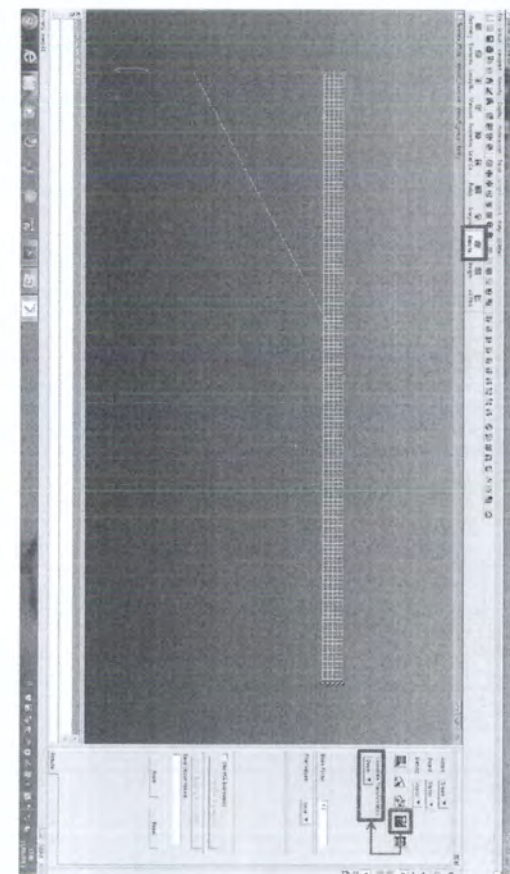
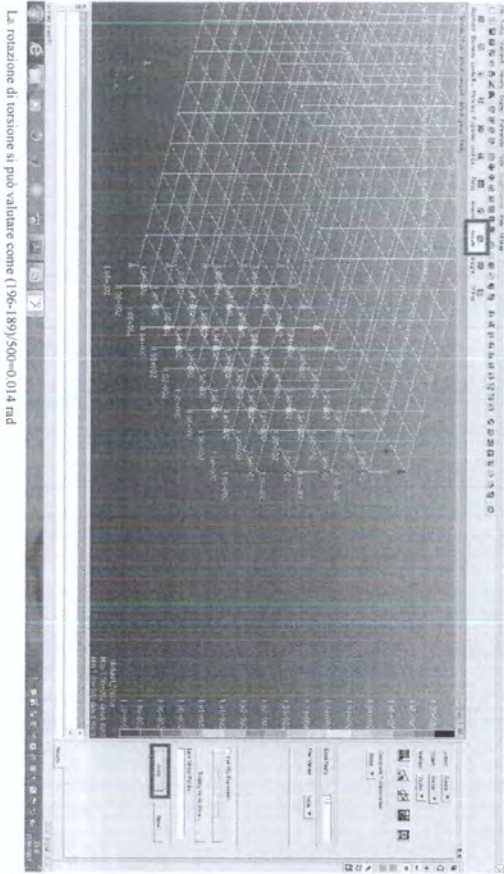
Strutture Aeronautiche
8 - Analisi statica di una semiala con elementi finiti 1D e 2D in ambiente MSC/PATRAN®-NASTRAN® 8

102

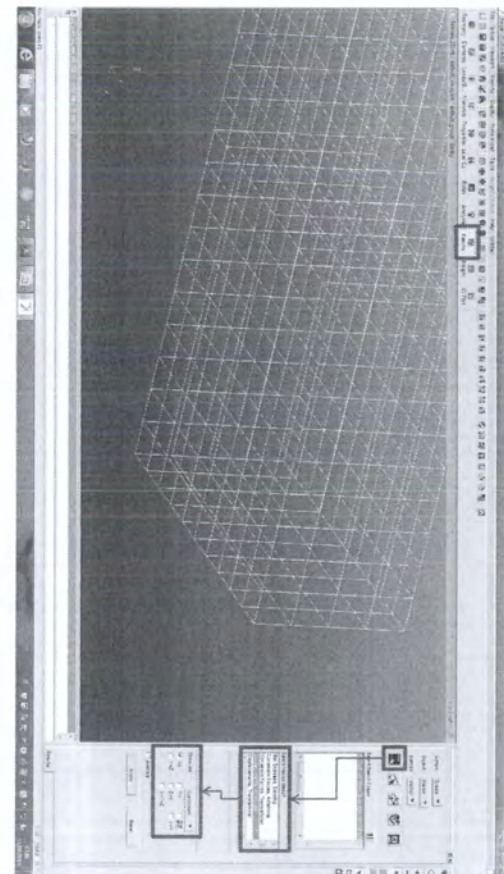
9



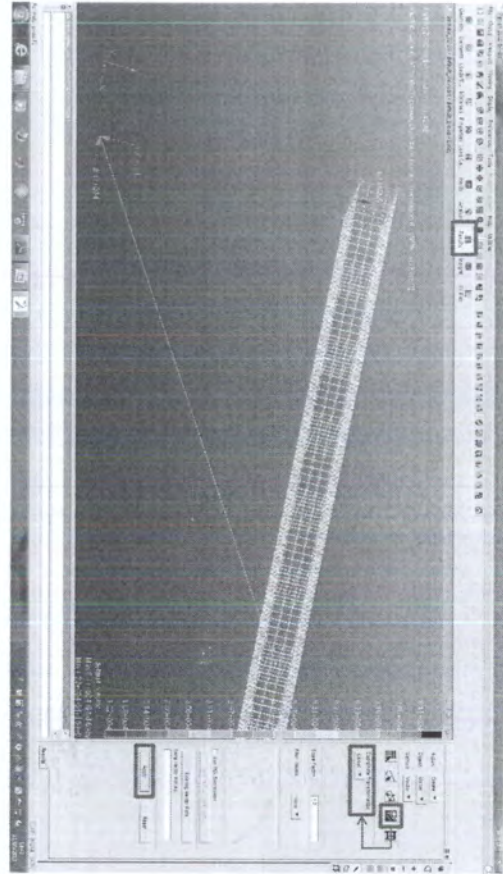
La sezione di estremità del cassone ha spostamenti in direzione x e y uguali tra dorso e ventre ma variabili linearmente tra bordo d'attacco e bordo di fuga (per effetto della torsione)
La freccia media (confrontabile con il valore ottenuto nelle analisi 1D) può essere calcolata come valore intermedio tra 196 e 189 (o freccia del nodo centrale della centina), cioè circa 192 mm



E' possibile valutare la rotazione di torsione nel centro della sezione di estremità come grado di libertà di rotazione nel nodo centrale



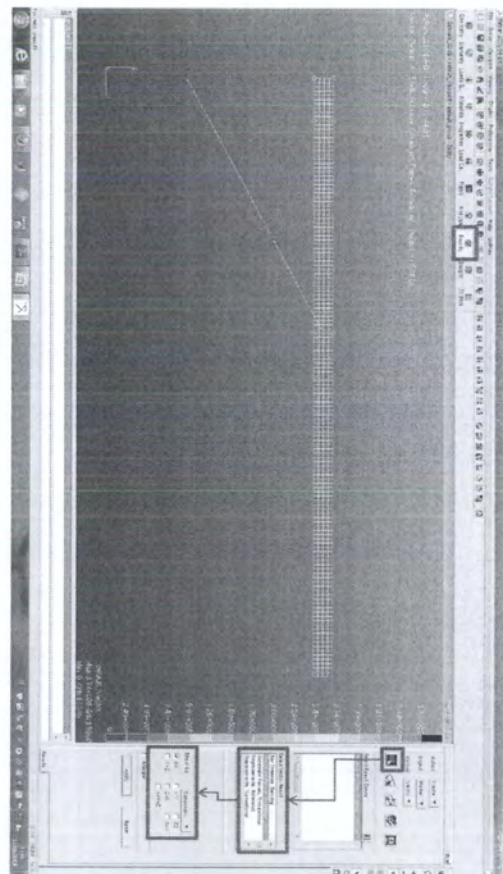
66



Le tensioni nei correnti (schematizzati con elementi bar) si possono visualizzare come "Bar Stresses, Axial", in questo modo si valuta il valore medio dello stress sulla sezione del corrente, valore confrontabile con i calcoli analitici e FEM 1D basati sull'ipotesi di semiguscia ideale che assume costante la tensione sulla sezione di ciascun corrente



Analogo e possibile visualizzare le reazioni vincolari (forcente in questo caso)

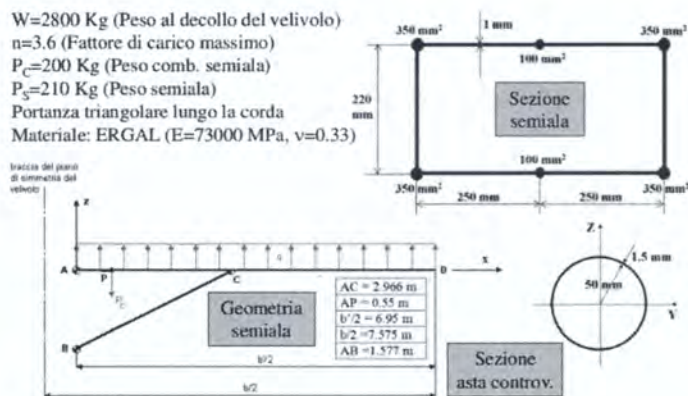


ESERCITAZIONE 8

Analisi statica di una semiala con elementi finiti 1D e 2D in ambiente MSC/PATRAN-NASTRAN

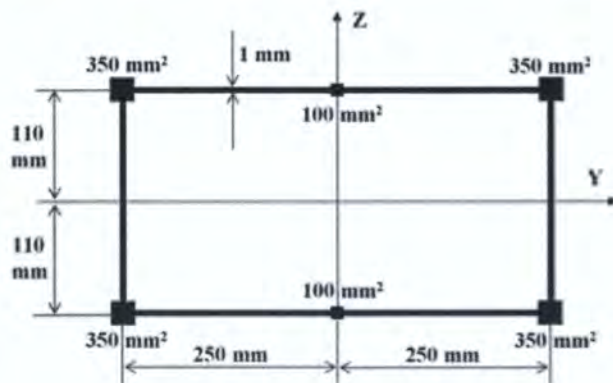
L'esercitazione consiste nell'analisi statica di una semiala con elementi finiti 1D (ROD e BEAM) e 2D (QUAD4) in ambiente MSC/PATRAN-NASTRAN. Si analizza lo stesso problema dell'esercitazione 1, con la quale verranno confrontati I risultati ottenuti analiticamente.

I dati seguenti richiamano il testo dell'esercitazione 1:



In questo caso non verranno più applicate le ipotesi del semiguscio ideale, ma la struttura sarà schematizzata nel seguente modo:

- **Correnti:** travi con sezione quadrata (I momenti di inerzia propri non sono trascurabili anche se piccoli);
- **Pannelli:** piastre soggette a deformazione membranale a flessione;
- **Centine:** anch'esse piastre (quella di collegamento con l'asta deve essere molto rigida);
- **Controventatura:** asta.

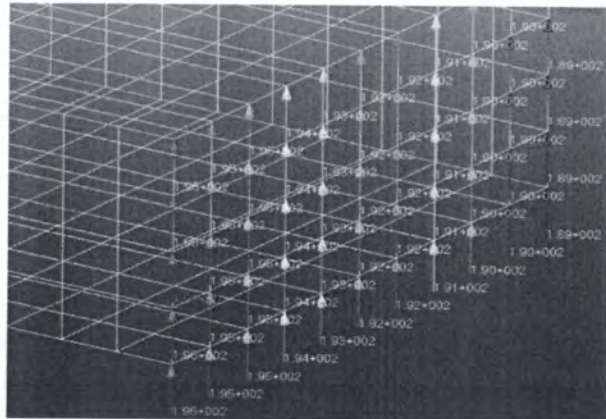


L'asta di controventatura viene considerata un elemento ROD. L'unico parametro necessario da conoscere è l'area $A=471,3$ mm².

La portanza è modellizzata come una pressione agente sul dorso e ventre con distribuzioni triangolare in y (uniforme in x).

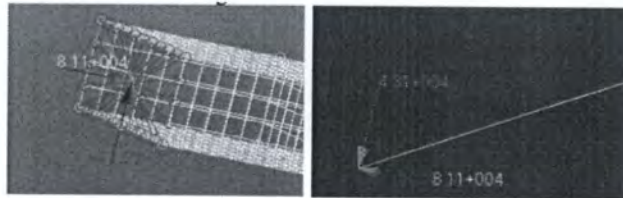
Il peso del carburante è modellizzato come una pressione uniforme agente sul ventre per I primi 1100 mm di lunghezza della semiala (baricentro a 550 mm).

Il peso della semiala viene modellizzato come un carico inerziale associato all'intera semiala.



La rotazione dovuta alla torsione vale $\theta_{\max}=1,38 \cdot 10^{-2}$ rad.
Si ottiene quindi un valore simile a quello dell'esercitazione 1.

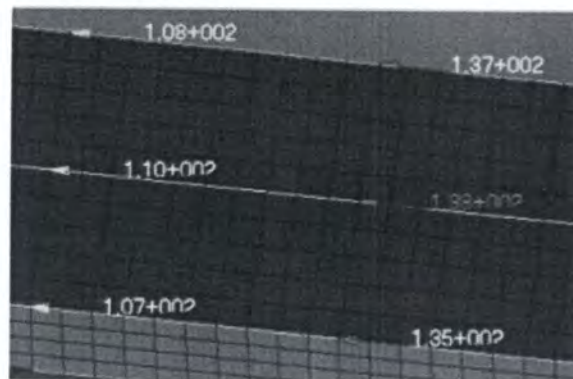
Le reazioni vincolari valgono:



Questi valori sono identici a quelli ottenuti nell'esercitazione 1.

Si è inoltre interessati alla tensione nei correnti in due particolari sezioni della semiala posti a $x_1=1977$ mm e $x_2=2472$.

Le tensioni normali nei correnti superiori valgono:



Le tensioni normali nei correnti inferiori valgono:

FEM1D

Anche in questo caso le tensioni differiscono:

corrente	tensione normale (FEM1D)		
	1	2	
1	-160,7	-204,7	MPa
3	-160,7	-204,7	MPa
4	40,3	66,3	MPa
6	40,3	66,3	MPa

TENSIONI ATTACCO ALA-FUSOLIERA

FEM1D: per tutti i correnti nell'attacco ala-fusoliera ci sono: -33.7 MPa

corrente	posy	posz		FEM2D	
1	-0,25	0,1388		-32	MPa
2	0	0,1388		-36	MPa
3	0,25	0,1388		-16	MPa
4	0,25	-0,0812		-38	MPa
5	0	-0,0812		-14	MPa
6	-0,25	-0,0812		-23	MPa

TENSIONI SEMIALA-CONTROVENTATURA

Subito prima del punto di incontro:

Corrente 1: -254.7 MPa

Corrente 3: -254.7 MPa

Corrente 4: +96.3 MPa

Corrente 6: +96.3 MPa

Subito dopo del punto di incontro:

Corrente 1: -221 MPa

Corrente 3: -221 MPa

Corrente 4: +130 MPa

Corrente 6: +130 MPa

corrente	posy	posz		FEM2D	
1	-0,25	0,1388		-164	MPa
2	0	0,1388		-127	MPa
3	0,25	0,1388		-164	MPa
4	0,25	-0,0812		137	MPa
5	0	-0,0812		102	MPa
6	-0,25	-0,0812		137	MPa

M7

Esercitazione di laboratorio sperimentale

Prova di torsione su un Cassone alare

Scopo

L'esercitazione è di carattere sperimentale e riguarda lo studio di un cassone alare soggetto a torsione.

In particolare, si chiede di:

1) determinare sperimentalmente il gradiente di torsione $d\theta/dz$ corrispondente ai vari valori del momento torcente M_t applicato;

forza applicata \rightarrow spostamenti
&
gradienti

2) riportare su un diagramma $M_t - d\theta/dz$ i risultati sperimentali;

3) valutare, attraverso il metodo della regressione lineare, la rigidità torsionale GJ_t del cassone.

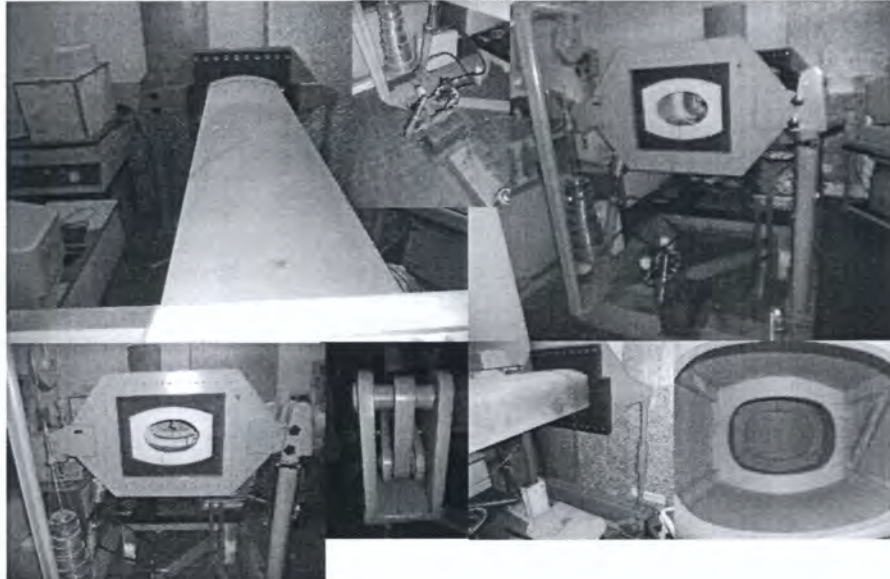
Po' essere inquadrata

in un'attività di progettazione \rightarrow sub-componente \rightarrow cassone alare

Accanto alle altre prove richieste, è necessaria la prova di accettazione sul componente \rightarrow certificazione a livello sperimentale \rightarrow deve soddisfare una certa rigidità. In un altro ambito dobbiamo produrre delle prove di sviluppo, soprattutto quando è un progetto innovativo

⊗ è *Asso-torsione*

Risogna capire il modo di rotazione ⊗



Svolgimento

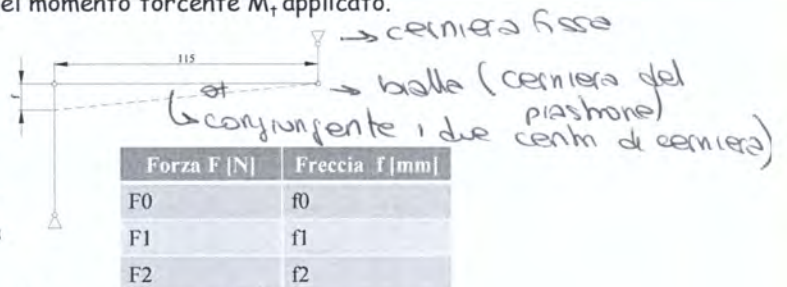
1) determinare sperimentalmente il gradiente di torsione $d\theta/dz$ corrispondente ai vari valori del momento torcente M_t applicato.

Cinematismo di rotazione del piastrone a cui è collegata una estremità del cassone (l'altro piastrone non ruota)

Durante la prova, ad ogni step di carico, vengono rilevati i valori della forza applicata e quelli della freccia. Si costruisce la tabella qui a fianco.

Viene misurata la distanza d (1,15m) tra la retta d'azione della forza e quella, parallela, della reazione vincolare, uguale in modulo e opposta in verso, che nasce all'altro estremo del piastrone.

Il momento torcente applicato vale: $M_t = F \cdot d$ (Nm)



Vengono contemporaneamente acquisiti il valore della forza e dello spostamento

Moment = F · b → non è una vera prova di trazione → dovrebbe girare intorno al centro → in realtà si abbatte ⊗³



3) valutare, attraverso il metodo della regressione lineare, la rigidità torsionale GJ_t del cassone.

Dalla relazione $M_t = GJ_t \frac{d\theta}{dz}$ si ottiene $GJ_t = \frac{M_t}{\frac{d\theta}{dz}} = \text{cost}$

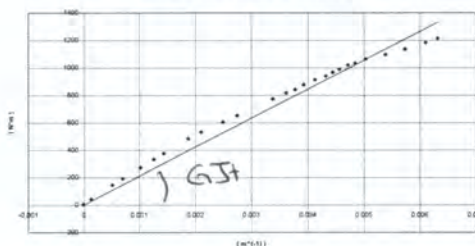
o' costante

Dalla lettura i-esima, si ricava $(GJ_t)_i = \frac{M_{t,i}}{\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_i}$

rigidità torsionale

Ovviamente le N letture forniranno, in genere, N valori diversi della rigidità torsionale

Andamento sperimentale del gradiente di torsione (in ascisse) in funzione del momento torcente (in ordinate) confrontato con l'andamento teorico ottenuto mediante regressione lineare dei dati sperimentali attraverso il metodo dei minimi quadrati.



Per calcolare tale rigidità usiamo il metodo della regressione lineare.

$$M_t = (GJ_t)_{\text{exp}} \frac{d\theta}{dz}$$

$$(GJ_t)_{\text{exp}} = 210633,528 \text{ [Nm}^2\text{]}$$

A livello sperimentale non otteniamo una retta

che passa per l'origine che meglio approssima i dati sperimentali

errore quadratico medio



Scriviamo le N relazioni sperimentali precedenti (con GJ_t incognita) in forma matriciale:

$$\{A\} (GJ_t)_{\text{exp}} = \{B\} \text{ dove } \{A\} = \left\{ \left(\frac{d\theta}{dz} \right)_i \right\} \quad \{B\} = \{ (M_t)_i \}$$

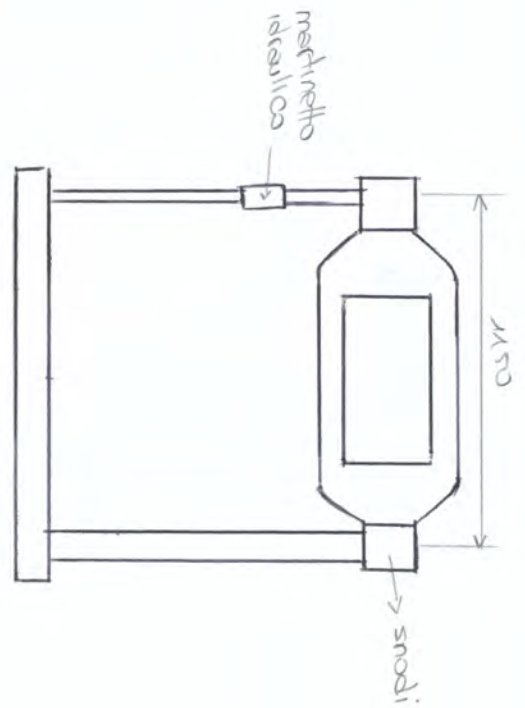
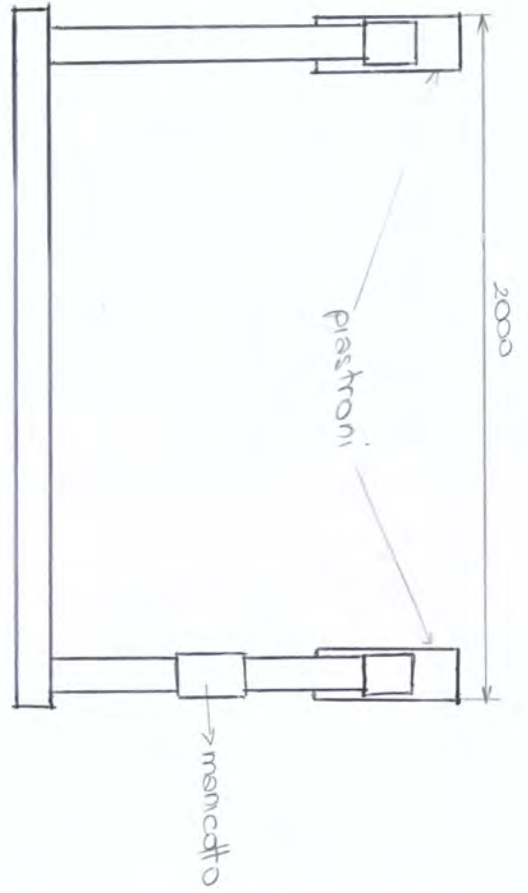
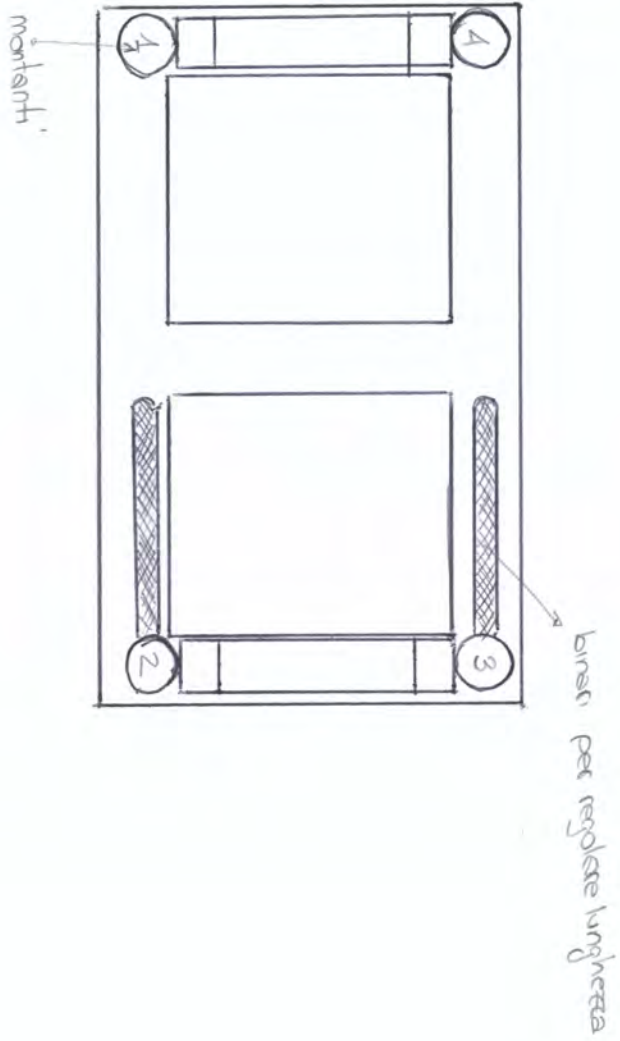
Poiché il sistema non è risolvibile (N equazioni, una sola incognita), pre-moltiplichiamo entrambi i membri per la trasposta di $\{A\}$.

Si ottiene quindi la seguente equazione modificata

$$\{A\}^T \{A\} (GJ_t)_{\text{exp}} = \{A\}^T \{B\} \Rightarrow (GJ_t)_{\text{exp}} = \frac{\{A\}^T \{B\}}{\{A\}^T \{A\}}$$

La soluzione approssimata così ottenuta è quella che minimizza l'errore che commettiamo sostituendo la retta all'insieme di punti sperimentali. $\sum_{i=1}^N (y_i - mx_i)^2 = \min$

56 163



Il cassone alare non è direttamente collegato ai piastroni, ma è stretto da delle selle (in nero) che a loro volta sono poi collegate tramite bullonatura alla struttura della macchina di prova.

La morfologia di questo macchinario fa sì che vengano rispettate il più possibile le ipotesi matematiche che stanno alla base del modello numerico.

In questo caso il modello matematico da rispettare è quello della trave di De Saint-Venant che come ipotesi richiede che le fibre longitudinali non si allunghino né si accorcino durante la deformazione.

A questo fine il macchinario è dotato di snodi all'attaccatura dei montanti con i piastroni che permettono al cassone di scorrere leggermente longitudinalmente in modo da non modificare le fibre (mantenendo in ogni caso il piastrone incernierato ai fini della torsione).

Il cassone viene caricato attraverso la cerniera del martinetto 4 che esercita una forza data da un circuito idraulico che muove lo stelo del martinetto.

Per poter valutare la forza applicata è presente una cella di carico (trasduttore) che è collegata al martinetto e alla piastra. Il trasduttore è poi collegato al calcolatore che riceve i dati.

Per poter valutare lo spostamento dato da questa forza verticale si usa un trasduttore di spostamento (una canna), che è costituito da uno stelo mobile collegato a una molla che serve a tenere in contatto lo stelo stesso con una linguetta metallica collegata rigidamente alla cerniera del piastrone. Anche questo trasduttore è collegato al calcolatore che raccoglie i dati.

Il cassone alare è realizzato tramite un compensato bilanciato di betulla formato da 5 strati di spessore 1,5 mm. L'orientamento delle fibre è angle α con $\alpha=45^\circ$ ($+45^\circ/+45^\circ/-45^\circ/+45^\circ/+45^\circ$).

La lunghezza è pari a 2 m ed è largo 40.

Lungo la lunghezza sono presenti 7 centine: le due di testata e quella centrale sono spesse 30 mm, mentre le altre 4 15 mm.

Agli angoli della sezione sono presenti 4 correnti.

I pannelli superiori e inferiori formano un arco di circonferenza.

Sul cassone sono posti 9 rosette estensimetriche (3 nella sezione di carico, 3 in quella centrale e 3 in quella di incastro) a -45° , 0° e -45° .

MISURAZIONI

La misurazione è stata condotta imprimendo una forza verticale tramite il martinetto del montante 4 collegato al circuito idraulico.

La durata totale della prova è di 360 secondi, il calcolatore riceve i dati dai trasduttori e dalle rosette estensimetriche con una frequenza di 1 Hz (1 al secondo).

La tabella seguente riporta alcuni dei dati relativi a forza applicata, freccia e spostamento delle fibre.

Dai dati provenienti dagli estensimetri ci si aspetterebbe di avere deformazione nulla per gli estensimetri a 0° , negativa per quelli a -45° e positiva per quelli a $+45^\circ$. In realtà come si può notare dai dati e dai grafici non avviene questo, se non nella sezione di mezzeria, perché si verificano dei fenomeni di instabilità locale che fanno ingobbire il pannello del cassone.

130

A livello sperimentale è evidente che è difficile ottenere una vera e propria retta e quindi si otterrebbe un differente valore di GJ_t per ogni coppia di valori.

Per ottenere il valore di GJ_t che meglio approssima la pendenza della retta interpolante i dati sperimentali ci si avvale del metodo dei minimi quadrati.

Il metodo dei minimi quadrati è una tecnica di ottimizzazione che permette di trovare una funzione rappresentata da una curva ottima (in questo caso una retta), che minimizzi la somma dei quadrati delle distanze tra i dati e quelli della retta che rappresenta la funzione stessa.

$$\sum_{i=1}^N (y_i - mx_i)^2$$

Nel nostro caso questo si traduce come segue.

Si scrivono le N equazioni sperimentali precedenti in forma matriciale:

$$\{A\}(GJ_t)_{exp} = \{B\} \quad \text{dove } \{A\} = \left\{ \left(\frac{d\theta}{dz} \right)_i \right\} \text{ e } \{B\} = \{(M_t)_i\}$$

Poiché il sistema non è risolvibile (N equazioni con una sola incognita), si premoltiplicano entrambi i membri per la trasposta di $\{A\}$.

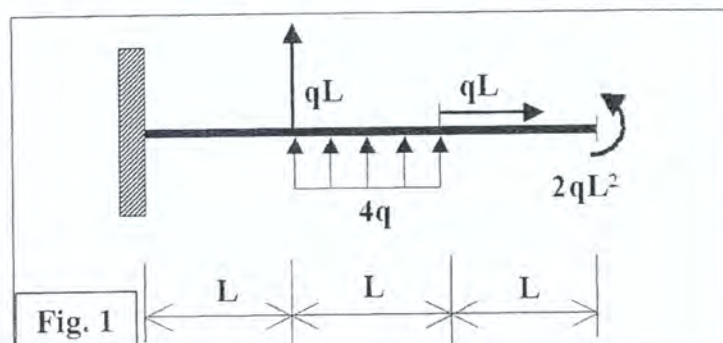
Si ottiene quindi che:

$$\{A\}^T \{A\} (GJ_t)_{exp} = \{A\}^T \{B\} \rightarrow (GJ_t)_{exp} = \frac{\{A\}^T \{B\}}{\{A\}^T \{A\}} =$$

POLITECNICO DI TORINO
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA AERONAUTICA E SPAZIALE
CORSO DI STRUTTURE AERONAUTICHE

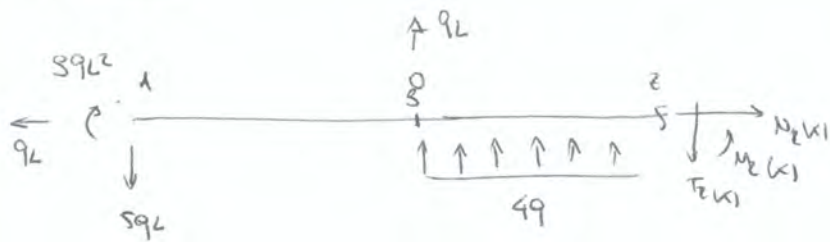
Prova scritta del 15/07/2008

1. Per lo schema strutturale rappresentato in Figura 1, calcolare le reazioni vincolari e tracciare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione; tali diagrammi vanno quotati nei punti caratteristici. (5)
2. Si deve dimensionare la trave di Fig. 1 a robustezza *rispetto alle sole tensioni normali dovute al momento flettente*. A tale scopo si supponga che la sezione trasversale sia rettangolare, con larghezza b e spessore h , e si suppongano fissate tutte le grandezze (tranne h , *dimensione da determinare*). Scegliere, tra i seguenti materiali, quello per il quale la massima tensione normale non supera il valore a rottura con la minore massa complessiva della trave: DURAL, ERGAL, Titanio, Acciaio (da bonifica). (7)
3. Ricavare le equazioni di equilibrio alla traslazione in direzione x e y (cioè nel piano) della piastra di Kirchhoff in termini di forze risultanti. (5)
4. Descrivere le proprietà dell'elemento finito ROD:
 - numero e tipo di gradi di libertà nodali;
 - proprietà delle funzioni di forma.
 Effettuare poi i passaggi necessari per ottenere la matrice di rigidezza (nel sistema di riferimento locale) a partire dall'espressione dell'energia di deformazione elastica dell'asta. (7)



Durata della prova: 1.5h.

35) TRATTO BC



→) $N_2(x) = 9L$

1) $T_2(x) + 5qL - 9L - 4qx = 0 \Rightarrow T_2(x) = 4q(L-x) \rightarrow T_2(B) = -4qL$
 $\hookrightarrow T_2(C) = 0$

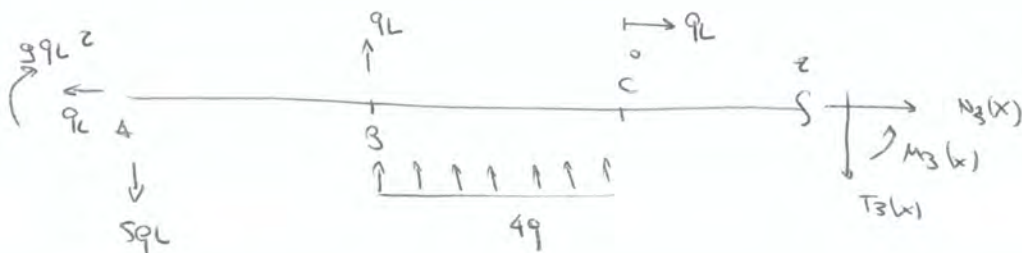
2) $M_2(x) - 4qx \cdot \frac{x}{2} - 9L \cdot x - 9qL^2 + 9qL(L+x) = 0$

$M_2(x) = -2qx^2 - 9Lx - 9qL^2 + 9qL^2 + 9qLx = 0$

$M_2(x) = -2qx^2 - 9Lx + 9qL^2 \rightarrow M_2(B) = 4qL^2$

$\hookrightarrow M_2(C) = -2qL^2 - 9qL^2 + 9qL^2 = -2qL^2$
 ↳ Andamento parabolico

TRATTO CD



→) $N_3(x) = 0$

1) $T_3(x) - 4qL - 9L + 5qL = 0 \Rightarrow T_3(x) = 0$

2) $M_3(x) - 9L(L+x) - 4qL(\frac{L}{2} + x) + 5qL(L+x) - 9qL^2 = 0$

~~$M_3(x) = 9L^2 + 9Lx - 2qL^2 - 4qLx - 5qL^2 - 5qLx - 9qL^2 - 5qLx$~~

$= +9L^2 + 9Lx + 2qL^2 + 4qLx - 10qL^2 - 5qLx + 9qL^2$

$= 2qL^2$

ESERCIZIO 2

Il dimensionamento e robustezza va effettuato nel punto maggiormente sollecitato dal momento flettente, in questo caso l'incastro in cui $M = 99L^2$

La tensione nominale massima in questo punto sarà

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{J} \cdot \frac{h}{2} = \frac{99L^2}{\frac{1}{12}bh^3} \cdot \frac{h}{2} = 59 \frac{9L^2}{bh^2}$$

Questa σ_{max} deve essere minore di quella di rottura

$$59 \frac{9L^2}{bh^2} \leq \sigma_R \rightarrow h = \sqrt{\frac{599L^2}{\sigma_R b}} = 3L \sqrt{\frac{69}{\sigma_R b}}$$

Sappiamo che la massa della trave è

$$M_t = \rho b h \cdot 3L \rightarrow (u.p)$$

Al limite della rottura quindi avremo

$$M_t = \rho b L \cdot 3L \cdot \sqrt{\frac{69}{\sigma_R b}} \cdot 3L = 9L^2 \cdot \sqrt{69} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{\rho} \cdot \left(\frac{\rho}{\sigma_R}\right)$$

Visto che caratteristiche geometriche, vincoli e carichi sono fissati, l'unica scelta che si può fare è su $\frac{\rho}{\sigma_R}$ che deve essere minimo

	$\rho [kg/m^3]$	$\sigma_R [Pa]$	ρ/σ_R
DURAL	2800	$400 \cdot 10^6$	914
ERGA	2800	$600 \cdot 10^6$	911
TITANIO	4500	$1200 \cdot 10^6$	913
ACCIAIO	7800	$1200 \cdot 10^6$	923



ESERCIZIO 4

L'elemento rod asta J è un elemento soggetto a carico longitudinale, i cui unici gradi di libertà sono alla traslazione sul suo asse



Essendo un elemento conforme e dal momento in cui la formula per la sua energia potenziale è

$$U_p = \frac{1}{2} EA \int_0^L (u, x)^2 dx$$

Quindi la derivata di ordine massimo è 1, le sue funzioni di forma devono essere continue.

Inoltre, dal momento che è anche un elemento completo, la somma delle funzioni di forma in ogni punto deve dare 1.

Per l'elemento asta a due nodi, queste funzioni sono riconoscibili dai polinomi di Lagrange.

Chiamiamo $\xi = \frac{x}{L}$, quindi $\xi_1 = 0$ e $\xi_2 = 1$

Averemo che

$$L_1^{(1)} = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\xi - 1}{0 - 1} = -\xi + 1 = -\frac{x}{L} + 1 = 1 - \frac{x}{L}$$

$$L_2^{(1)} = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\xi - 0}{1 - 0} = \xi = \frac{x}{L}$$

Ricaviamo ora la matrice di rigidità a partire dall'espressione dell'energia di deformazione elastica.

Sappiamo che

$$U_p = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_0^L E \epsilon_x \epsilon_x dx = \frac{1}{2} \int_0^L EA (u, x)^2 dx$$

↓
1 sola componente lungo x

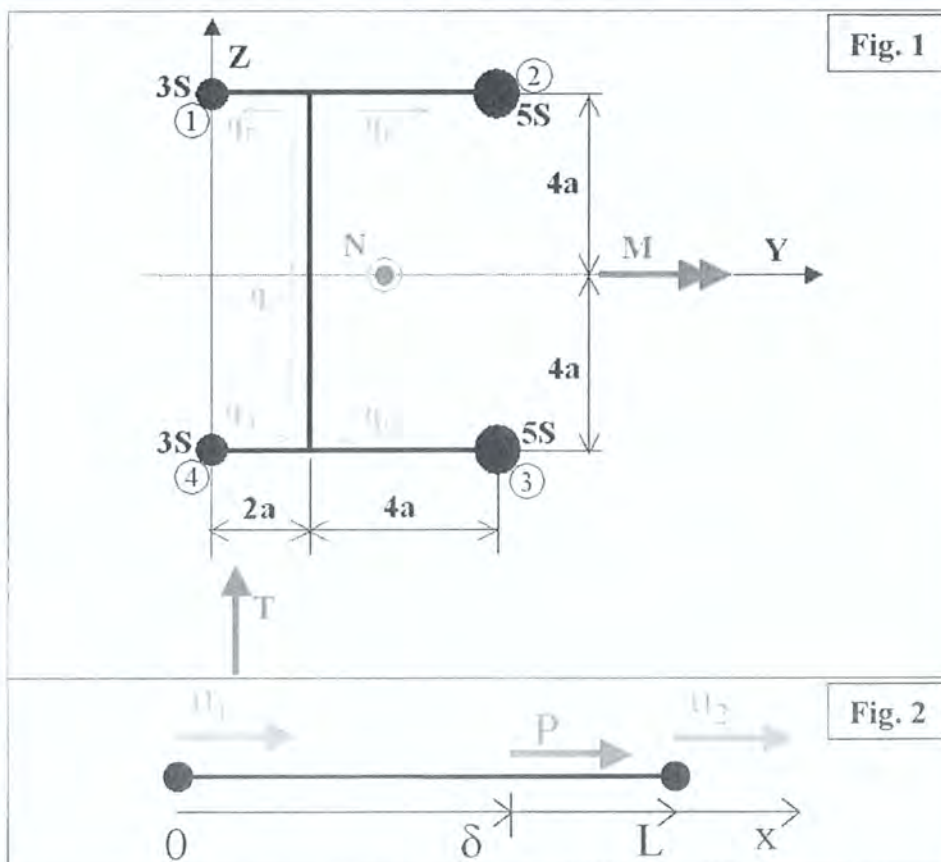
POLITECNICO DI TORINO

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA AERONAUTICA E SPAZIALE

CORSO DI STRUTTURE AERONAUTICHE

Prova scritta del 09/09/2008

1. Per la sezione a semiguscio rappresentata in Figura 1 si richiede di calcolare le tensioni normali nei correnti, i flussi di taglio nei pannelli e le posizioni del baricentro e del centro di taglio. I calcoli vanno condotti in maniera letterale e svolgendo completamente i passaggi. Si consideri lo sforzo normale N agente nel baricentro della sezione. Si utilizzino, inoltre, gli assi e le numerazioni per correnti e flussi riportate in Figura 1. (9)
2. Si consideri un elemento finito ROD con un carico assiale concentrato come in Figura 2; calcolare il vettore delle forze nodali equivalenti. Si supponga poi che $u_2 = -3u_1$; si determini il valore di δ per cui il carico P compie lavoro nullo. (5)
3. Descrivere in breve (senza dimostrazioni o spiegazioni concettuali ma con l'aiuto di disegni e tabelle) gli stati di tensione possibili per un pannello piano soggetto a taglio. (6)
4. Tracciare il diagramma qualitativo $\sigma(\epsilon)$ dell'ERGA, e riportare in una tabella i valori delle tensioni al limite di proporzionalità, di snervamento e di rottura, dell'allungamento percentuale a rottura, del modulo di Young, del coefficiente di Poisson, del modulo di taglio, della densità, della lunghezza di rottura e i principali componenti chimici. (4)



Durata della prova: 1.5h.

1) Determino ~~da~~ gli sforzi sui pannelli

$$\sigma_i = \frac{N}{A_{tot}} + \frac{M_y I_y - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y_i + \frac{M_z I_z - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z_i =$$

$$= \frac{N}{A_{tot}} + \frac{M}{I_y} z_i$$

$$\sigma_1 = \frac{N}{16S} + \frac{M}{256a^2} \cdot 4a = \frac{N}{16S} + \frac{M}{64a}$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{16S} + \frac{M}{256a^2} \cdot 4a = \frac{N}{16S} + \frac{M}{64S a}$$

$$\sigma_3 = \frac{N}{16S} - \frac{M}{64S a}$$

$$\sigma_4 = \frac{N}{16S} - \frac{M}{64S a}$$

Determino i flussi di taglio

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{P_y I_y - P_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \cdot y_i A_i + \frac{P_z I_z - P_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z_i A_i = \frac{I}{I_y} z_i A_i$$

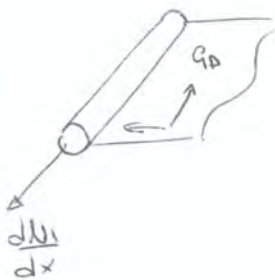
$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{T}{256S a^2} \cdot 4a S = \frac{3}{64} \frac{T}{a}$$

$$\frac{dN_2}{dx} = \frac{5}{64} \frac{T}{a}$$

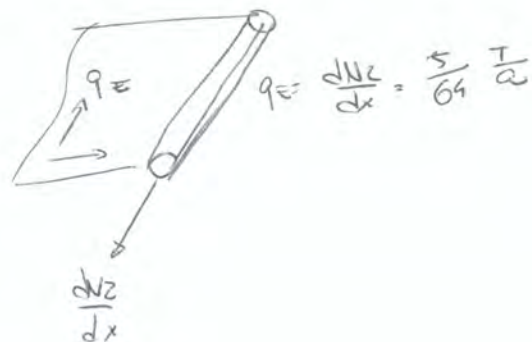
$$\frac{dN_3}{dx} = -\frac{5}{64} \frac{T}{a}$$

$$\frac{dN_4}{dx} = -\frac{3}{64} \frac{T}{a}$$

Determino flussi di taglio



$$q_D = \frac{dN_1}{dx} = \frac{3}{64} \frac{T}{a}$$



$$q_E = \frac{dN_2}{dx} = \frac{5}{64} \frac{T}{a}$$

146

Il lavoro è nullo se

$$P \cdot U(\delta) = 0 \rightarrow U(\delta) = 0 \rightarrow L_1(\delta)U_1 + L_2(\delta)U_2 = 0$$

Se $U_2 = -3U_1$

$$L_1(\delta)U_1 - 3L_2(\delta)U_1 = 0$$

$$1 - \frac{\delta}{L} - 3\frac{\delta}{L} = 0$$

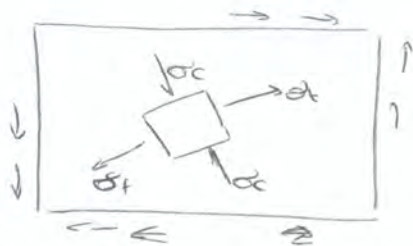
$$4\frac{\delta}{L} = 1 \rightarrow \delta = \frac{L}{4}$$

ESERCIZIO 3

Gli stati tensionali di un pannello soggetto a taglio possono essere: tangenziale puro, diagonale completo e diagonale incompleto.

Lo stato tensionale tangenziale puro si ha quando $\tau_{sol} < \tau_{critica}$

Immaginiamo di avere un pannello isotropo con fibre orientate a 45° . Se applico uno sforzo di taglio, su ogni parte del pannello si sviluppano σ_c e σ_t . σ_c è la tensione delle fibre che lavorano a compressione, mentre σ_t è quella delle fibre che lavorano a trazione.



$$\text{con } \begin{cases} \sigma_c = \tau_{sol} \\ \sigma_t = \tau_{sol} \end{cases}$$

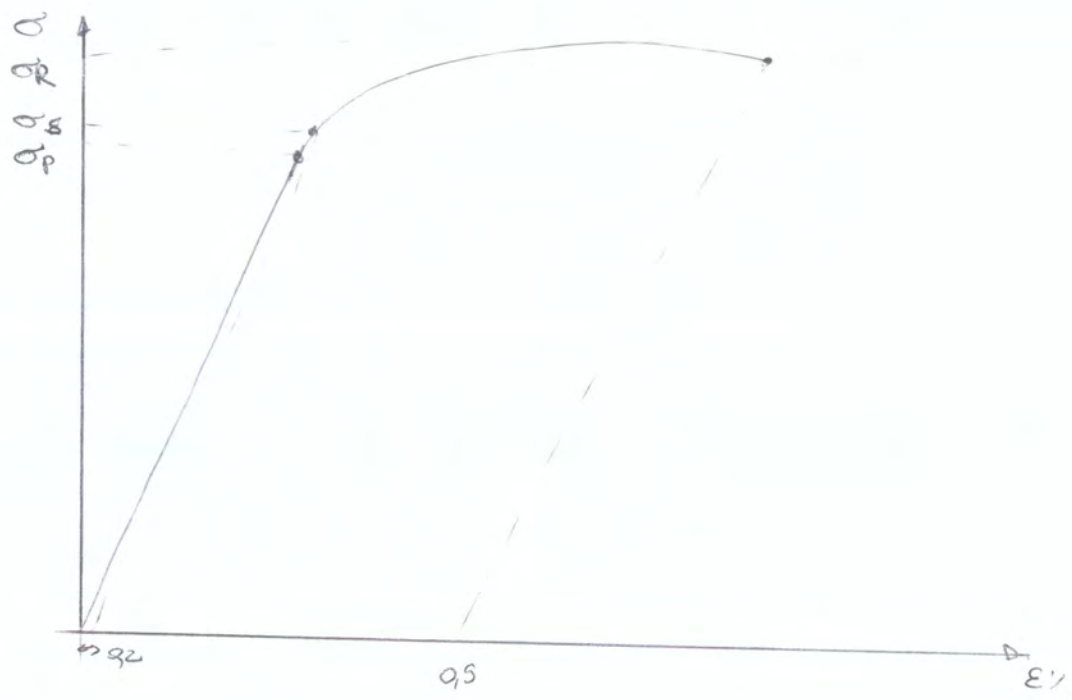
(si annullano vicendevolmente le componenti lungo x o lungo y) -

Aumentando la τ_{sol} oltre il valore critico ($\sigma_{ce} = K_f \cdot E \cdot \left(\frac{\tau}{b}\right)^2$), le fibre lavoranti a trazione non subiranno problemi, mentre quelle lavoranti a compressione cederanno.

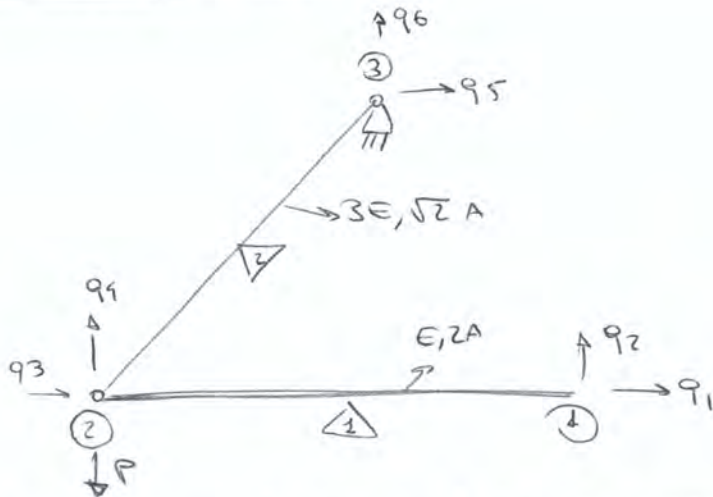
Per $\tau_{sol} \gg \tau_{ce}$ si ha campo diagonale completo. Si è in campo di "pena instabilità". Le fibre compresse assorbono solo una $\sigma_c = \tau_{critica}$, che, essendo molto minore di τ_{sol} è praticamente trascurabile.

Assumendo sempre di trattare un pannello omogeneo isotropo con inclinazione delle fibre a 45° , abbiamo:

148



ESAME 12/01/2008



Per prima cosa calcolo le matrici di rigidità nel sistema strutturale di entrambi gli elementi

Elemento 1

$$[k_e^{(1)}] = \frac{E \cdot ZA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 0^\circ \rightarrow [L^{(1)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_g^{(1)}] = [L^{(1)}]^T \cdot [k_e^{(1)}] \cdot [L^{(1)}] =$$

$$= \frac{EA}{2L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vettore dei vincoli

$$\{F_V\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$$

Vettore dei carichi

$$\{F_F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Gradi di libertà liberi $\{q_F\} = \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \rightarrow \{F_F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$

Gradi di libertà vincolati $\{q_V\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} \rightarrow \{F_V\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$

Quindi le matrici di rigidezza ridotte sono

$$[K_{FF}] = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{3EA}{2L}$$

$$[K_{VF}] = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{2L}$$

Possiamo quindi calcolare gli spostamenti dei nodi e le reazioni vincolari

$$[K_{FF}] \cdot \{q_F\} = \{F_F\} \rightarrow \{q_F\} = \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L \\ -\frac{5}{3}L \end{Bmatrix} \frac{PL}{EA}$$

~~$$\{q_F\} = [K_{FF}]^{-1} \cdot \{F_F\} = \frac{EA}{2L} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$~~

~~$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & | & 0 \\ 3 & 3 & | & -P \end{bmatrix}$$~~

$$[K_{VF}] \cdot \{q_F\} = \{F_V\} = 0 \quad \{F_V\} = \frac{PL}{EA} \cdot \frac{3EA}{2L} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} P$$

ESERCIZIO 3

$$\sigma_{CR} = \frac{\sigma_s}{1 + k \beta \frac{e s}{E}}$$

L'instabilità locale è tipica delle strutture a parete sottile sollecitate a compressione. In questo caso non può essere applicata la teoria delle travi perché non è più verificata l'ipotesi che le sezioni trasversali si mantengono inalterate durante la trasformazione.

Sperimentalmente si è trovata la formula precedentemente scritta in cui:

σ_s = tensione di snervamento

k = parametro che vale 3 per sezioni chiuse e 8,5 per quelle aperte

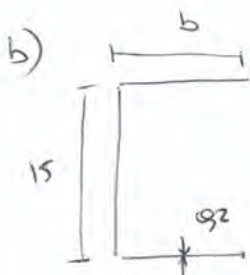
β = indice di spessore: $\frac{\text{dimensione caratteristica}}{\text{spessore}}$

(la dimensione c è quella in cui teoricamente è più probabile che avvenga prima il cedimento)

E = modulo elastico del materiale

a) Sezione arcobaleno in parete sottile $R=10\text{mm}$ $s=0,5\text{mm}$ (ERCA)

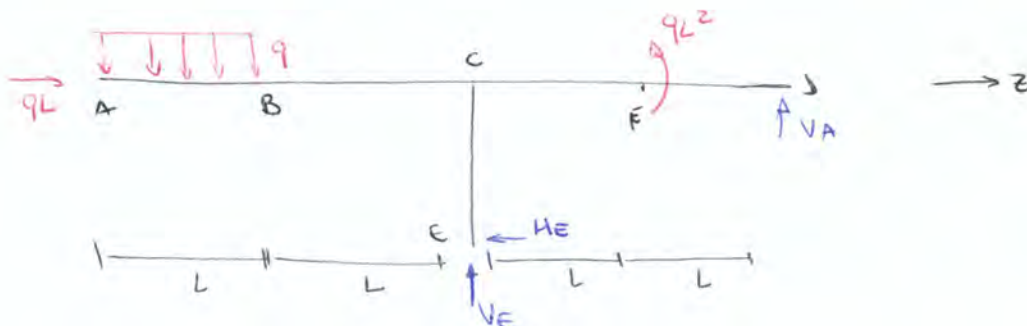
$$\sigma_c = \frac{50}{1 + 3 \cdot \frac{10}{0,5} \cdot \frac{50}{7300}} = 35,44 \text{ kg/mm}^2$$



$$\sigma_c = \frac{50}{1 + 8,5 \cdot \frac{5}{0,2} \cdot \frac{50}{7300}} = 20,36 \text{ kg/mm}^2$$

ESAME 12/02/2009

ESERCIZIO 1



1) $qL = H_E$

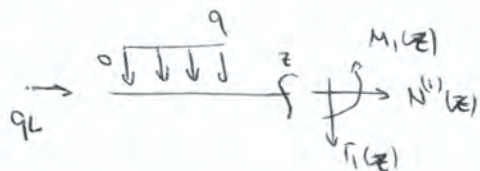
2) $qL = V_E + V_A \rightarrow V_E = \frac{7}{9} qL$

3) $qL \left(L + \frac{L}{2} \right) - H_E \cdot L + qL^2 \cdot 2VA = 0$

$V_A = -qL^2 - qL^2 + qL^2 \rightarrow qL^2 = -\frac{3}{2} qL^2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} qL^2$

Diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione

TRATTO AB



$N(z) = -qL$

$T(z) = -qz \rightarrow T(A) = 0, T(B) = -qL$ } andamenti lineari

$M(z) = -q \frac{z^2}{2} \rightarrow M(A) = 0, M(B) = -\frac{3}{2} qL^2$ } andamenti parabolici

TRATTO BC



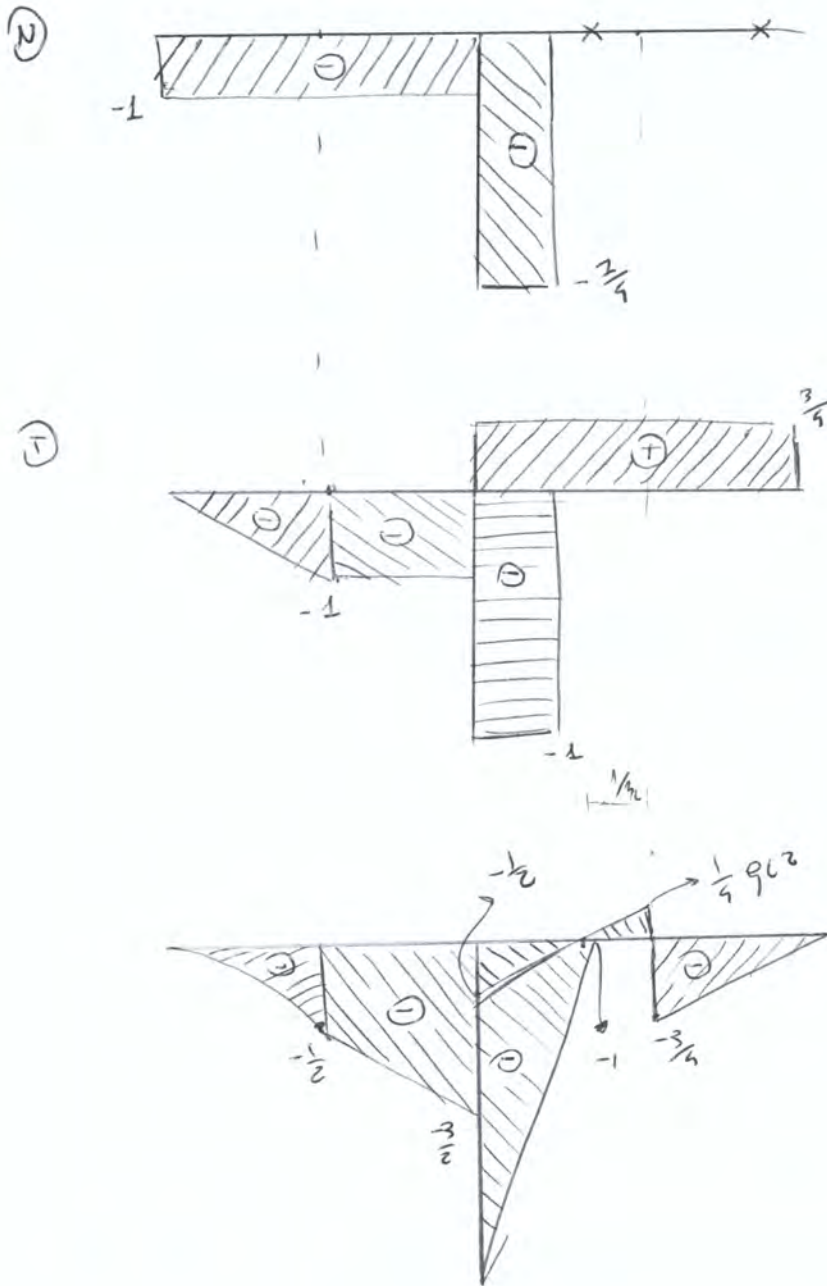
$N(z) = -qL$

$T(z) = -qL$

$M(z) = -qL \cdot \left(\frac{L}{2} + z \right) = -qL^2/2 - qLz$

$M(B) = -qL^2/2$ } andamenti lineari

$M(C) = -\frac{3}{2} qL^2$



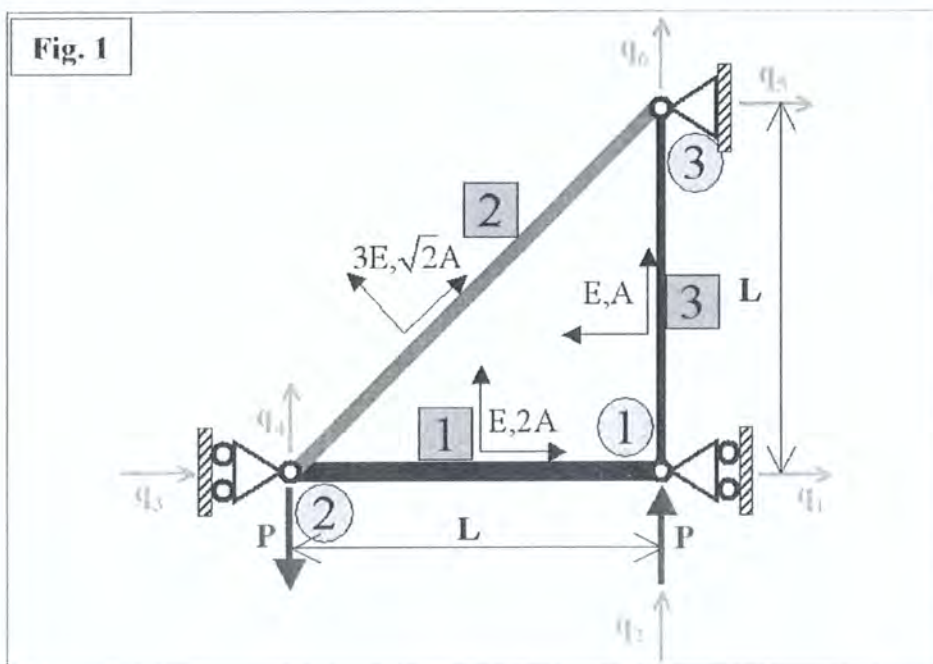
POLITECNICO DI TORINO

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA AERONAUTICA E SPAZIALE

CORSO DI STRUTTURE AERONAUTICHE

Prova scritta del 25/06/2009

1. Per la struttura rappresentata in Figura 1 calcolare gli spostamenti nei nodi, le reazioni vincolari, le deformazioni e le tensioni in ogni asta usando il metodo degli elementi finiti. *Si utilizzi la numerazione per elementi, nodi e gradi di libertà riportata in Figura. Si faccia particolare attenzione alle proprietà delle singole aste (geometria e materiale).* (12)
2. Tracciare il diagramma qualitativo $\sigma(\epsilon)$ del DURAL, e riportare in una tabella i valori delle tensioni al limite di proporzionalità, di snervamento e di rottura, dell'allungamento percentuale a rottura, del modulo di Young, del coefficiente di Poisson, del modulo di taglio, della densità, della lunghezza di rottura e i principali componenti chimici. (4)
3. Scrivere e commentare la formula per l'instabilità globale a compressione delle aste snelle. Ricordare poi almeno due metodi (e le relative formule) per il calcolo dell'instabilità globale delle aste tozze. *Definire sempre tutte le grandezze coinvolte nelle formule riportate.* Tracciare infine le curve relative ai casi di aste snelle e aste tozze nel piano (σ_{CR} = tensione critica, λ = snellezza). (8)



Durata della prova: 1.5h.

68

$$[k_G^{(2)}] = \frac{3}{2} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Elemento 3

$$[k_L^{(3)}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^{(3)} = 90^\circ \rightarrow [L^{(3)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix}$$

$$[k_G^{(3)}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Assemblaggio

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & -2 & & & \\ & 1 & & & & -1 \\ -2 & & 2 + \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ & -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} + 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Calcolo di deformazioni e tensioni

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(1)} &= \frac{1}{L^{(1)}} \cdot [-1 \ 1] \cdot [L^{(1)}] \cdot \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{L} \cdot [-1 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \cdot \frac{2PK}{EA} = \\ &= \frac{2P}{EA} \cdot [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = 0 = \varepsilon^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(2)} &= \frac{1}{L^{(2)}} \cdot [-1 \ 1] \cdot [L^{(2)}] \cdot \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}L} \cdot [1 \ 1] \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \frac{PK}{EA} = \\ &= \frac{P}{EA} \cdot [-1 \ -1 \ 1 \ 1] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{P}{EA} \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(3)} &= \frac{1}{L^{(3)}} \cdot [-1 \ 1] \cdot [L^{(3)}] \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{L} \cdot [-1 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \frac{2PK}{EA} = -\frac{P}{EA} \end{aligned}$$

Quindi

$$\sigma^{(1)} = \frac{2P}{EA} \cdot \varepsilon = \frac{2P}{EA} \cdot 0 = 0$$

$$\sigma^{(2)} = \frac{1}{3} \frac{P}{EA} \cdot 3\varepsilon = \frac{P}{EA} \cdot \varepsilon = \frac{P}{EA} \cdot \frac{1}{3} = \frac{P}{3EA}$$

$$\sigma^{(3)} = -\frac{P}{EA} \cdot \varepsilon = -\frac{P}{EA} \cdot \left(-\frac{P}{EA}\right) = \frac{P^2}{EA^2}$$

2. Se le ~~travi~~ ^{le aste} sono tozze non è più possibile calcolare la tensione critica con la formula di eulero.

Per risolvere il problema sono disponibili due ~~formule~~ ^{vie} semiempiriche.

1) FORMULA DI JOHNSON

$$\sigma_{ce} = \sigma_s - \frac{\sigma_s^2 \lambda^2}{4\pi^2 E}$$

Dove σ_s è la tensione di snervamento del materiale.

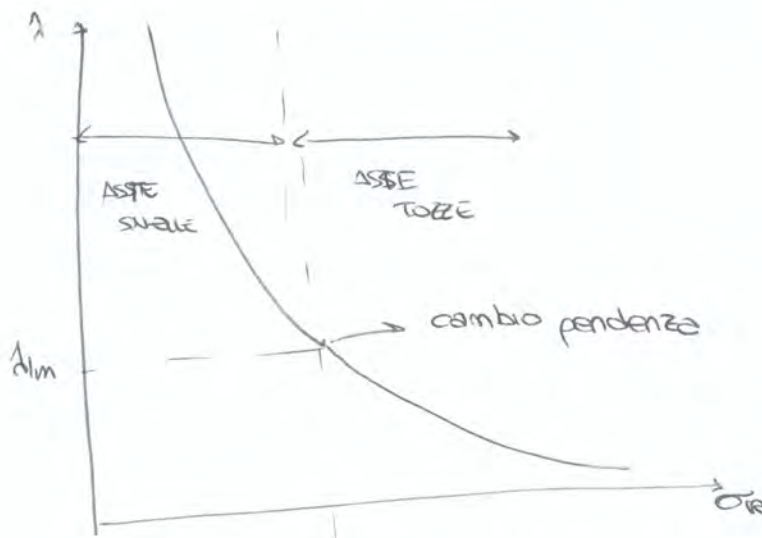
Si nota che l'equazione non è più un'iperbole come per la formula di Eulero, ma è una parabola.

2) FORMULA DEL MODULO TANGENTE

$$\sigma_{ce} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2}$$

Questa formula è uguale a quella di Eulero, ma al posto del modulo elastico compare il modulo a taglio E_t .

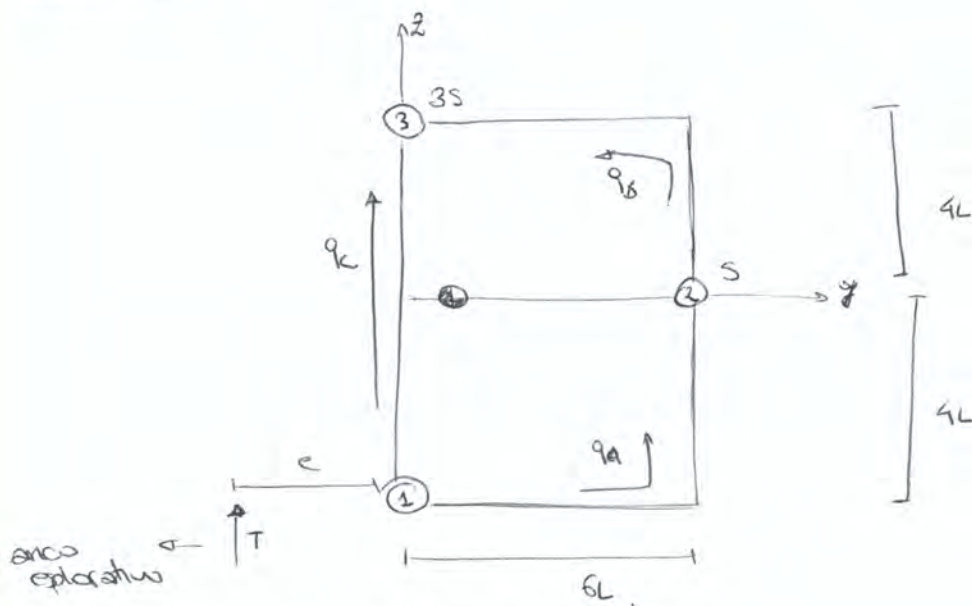
Per i materiali di impiego aeronautico questa via è più precisa.



con $\lambda_m = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$

ESAME 10/07/2008

ESERCIZIO 1



anco esplorativo

	A_i	y_i	z_i	$I_y = A_i z_i^2$	dN/dx
1	3S	0	-4	48L ² S	-T/8L
2	3S	4	0	0	0
3	3S	0	4L	$\frac{48L^2S}{36L^2}$	T/8L

Posizione baricentro $y = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{6SL}{7S} = \frac{6L}{7}$

$z = \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i} = 0$

Sforzi normali sui correnti

$\frac{dN_1}{dx} = \frac{T}{I_y} \cdot z_i \cdot A_i$

$\frac{dN_1}{dx} = \frac{T}{36L^2S} \cdot (-4L) \cdot 3S = -\frac{T}{8L}$

$\frac{dN_2}{dx} = 0$

$\frac{dN_3}{dx} = \frac{T}{36L^2S} \cdot (4L) \cdot 3S = \frac{T}{8L}$

Possiamo quindi imporre l'equilibrio alla rotazione attorno al nodo 1 per calcolare q_8 .



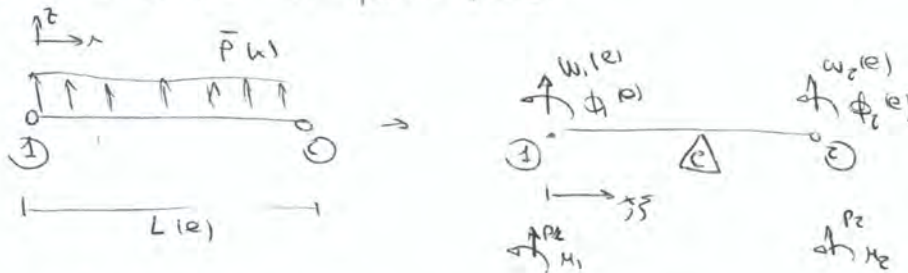
$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 6L \cdot 4L = 12L^2$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 8L \cdot 6L + \frac{1}{2} \cdot 4L \cdot 6L = 24L^2 + 12L^2 = 36L^2$$

$$F_{e+} = q_A \cdot 2\Omega_1 + q_B \cdot 2\Omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12L^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 36L^2 = 12L^2 + 36L^2 = 48L^2 = \frac{24}{7}L$$

ESERCIZIO 2

L'elemento trave (SEM) è un elemento monodimensionale che viene caricato a taglio e si inflette in questo piano



I sei gradi di libertà sono 2 per nodo: la traslazione verticale e la sua derivata (rotazione attorno a y).

$$\{q\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_1 \\ w_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$

L'espressione dell'energia di deformazione elastica in questo caso è

$$U_p = \frac{1}{2} EI_T \cdot \int_0^L (w_{1,x})^2 dx$$

Il massimo ordine di derivazione è 2, quindi bisogna garantire che le funzioni di forma e le loro derivate siano continue.

Le funzioni di forma sono ricavabili dai polinomi di Hermite

$$N_1^{(4)} = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

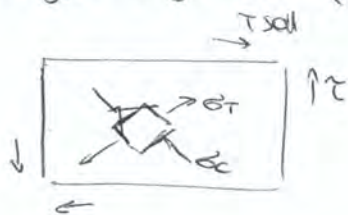
$$N_3^{(4)} = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$N_2^{(4)} = \xi - 2\xi^2 + \xi^3$$

$$N_4^{(4)} = -\xi^2 + \xi^3$$

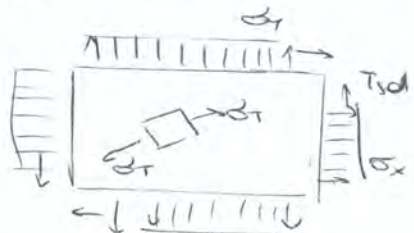
ESERCIZIO 4

• ~~Diagonale~~ Tangenziale pura τ_{sol} τ_{ce}



$$\begin{aligned} \sigma_T &= \tau_{sol} \\ \sigma_C &= -\tau_{sol} \\ \sigma_x &= 0 \\ \sigma_y &= 0 \end{aligned}$$

• Diagonale ^{completa} incompleta $\tau_{sol} \gg \tau_{ce}$



$$\begin{aligned} \sigma_T &= 2\tau_{sol} \\ \sigma_C &= 0 \\ \sigma_x &= -\tau_{sol} \\ \sigma_y &= \tau_{sol} \end{aligned}$$

• Diagonale ~~comp~~ ~~incomp~~ incompleta $\tau_{sol} > \tau_{ce}$

$$\tau_{sol} = \tau_{ce} + \Delta\tau$$

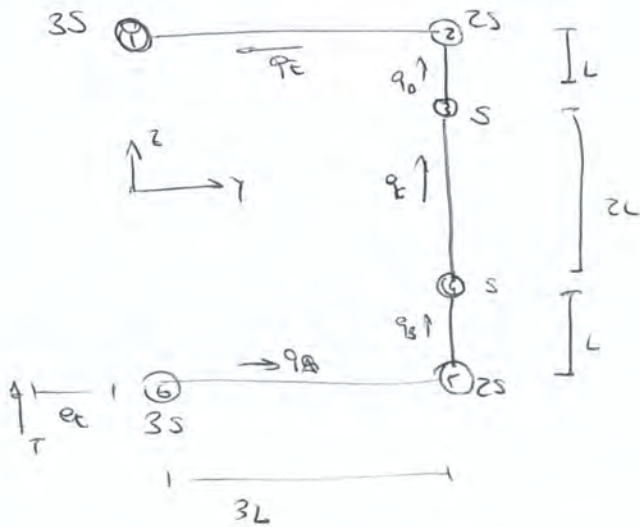
↑
per diagonale completa

	TG	DC	DIN
σ_T	τ_{ce}	$2\tau_{ce}$	$\tau_{ce} + 2\Delta\tau$
σ_C	τ_{ce}	0	τ_{ce}
σ_x	0	$\Delta\tau$	$\Delta\tau$
σ_y	0	$\Delta\tau$	$\Delta\tau$

ESAME 03/03/2008

103

ESERCIZIO 1



$T \rightarrow$ carico esplorativo
 la sezione è simmetrica
 rispetto a y
 \downarrow
 $Z_G = 0$
 \downarrow
 Mi serve conoscere solo questo,
 non calcolo Y_G e I_z

i	A_i	z_i	$I_y = A_i z_i^2$	$\frac{dU_i}{dx}$
1	3S	2L	12L ² S	$\frac{T}{L}$
2	2S	2L	8L ² S	
3	S	L	L ² S	
4	S	-L	L ² S	
5	2S	-2L	8L ² S	
6	3S	-2L	12L ² S	$-\frac{T}{7L}$
			42S L ²	

Calcolo gli incrementi di sforzo normale sui correnti

$$\frac{dU_i}{dx} = \frac{T}{I_y} \cdot A_i \cdot z_i$$

$$\frac{dU_1}{dx} = \frac{T}{42SL^2} \cdot 3S \cdot 2L = \frac{T}{7L} = -\frac{dU_6}{dx}$$

$$\frac{dU_2}{dx} = \frac{T}{42SL^2} \cdot 2S \cdot 2L = \frac{2}{21} \frac{T}{L} \rightarrow \text{non li calcolo!}$$

Perché quando faccio l'equilibrio alla rotazione per calcolare e_t , posso impostare Σ come polo, e quindi l'unico flessibile è q_e

$$\int_0^L \begin{Bmatrix} L_1(x) \\ L_2(x) \end{Bmatrix} p(x) dx = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad \text{con} \quad L_1 = 1 - \frac{x}{L} \\ L_2 = \frac{x}{L}$$

$$\int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \cdot p_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = p_0 \cdot \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 + \frac{x^2}{L^2} - \frac{2x}{L} \\ \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \end{Bmatrix} dx =$$

$$= p_0 \cdot \begin{Bmatrix} x + \frac{1}{3} \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \\ \frac{1}{2} \frac{x^2}{L} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{L^2} \end{Bmatrix}_0^L = p_0 L \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

ESERCIZIO 3

$$\{N\} = [A] \cdot \{E_{\gamma}^{(k)}\} + [B] \cdot \{k_{\gamma}\}$$

$$\{M\} = [B] \cdot \{E_{\gamma}^{(k)}\} + [D] \cdot \{k_{\gamma}\}$$

con

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \rightarrow \text{vettore degli sforzi normali}$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} : \text{vettore dei momenti}$$

$\{E_{\gamma}^{(k)}\}$: vettore delle deformazioni membranali in termini ingegneristici

$\{k_{\gamma}\}$: vettore delle curvatures

matrice
 $[A]$: matrice delle rigidità membranali $[A] = \sum_{k=1}^{N_S} [D_p^{(k)}] \cdot h^{(k)}$

$[B]$: matrice di accoppiamento $[B] = \sum_{k=1}^{N_S} [D_p^{(k)}] \cdot \left(\frac{z^{(k-1)}}{2} - \frac{z^{(k)}}{2} \right)$

$[D]$: matrice delle rigidità flessione torsionali $[D] = \sum_{k=1}^{N_S} [D_p^{(k)}] \cdot \left(\frac{(z^{(k-1)})^3}{3} - \frac{(z^{(k)})^3}{3} \right)$

$[D_p]$: matrice delle rigidità ridotte

Per una piastra in materiale isotropo

con $\nu_{TT} = \nu_{TT} \cdot \frac{E_T}{E_L}$

$$[D_p] = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T \nu_{LT}}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{E_T \nu_{LT}}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix}$$

POLITECNICO DI TORINO

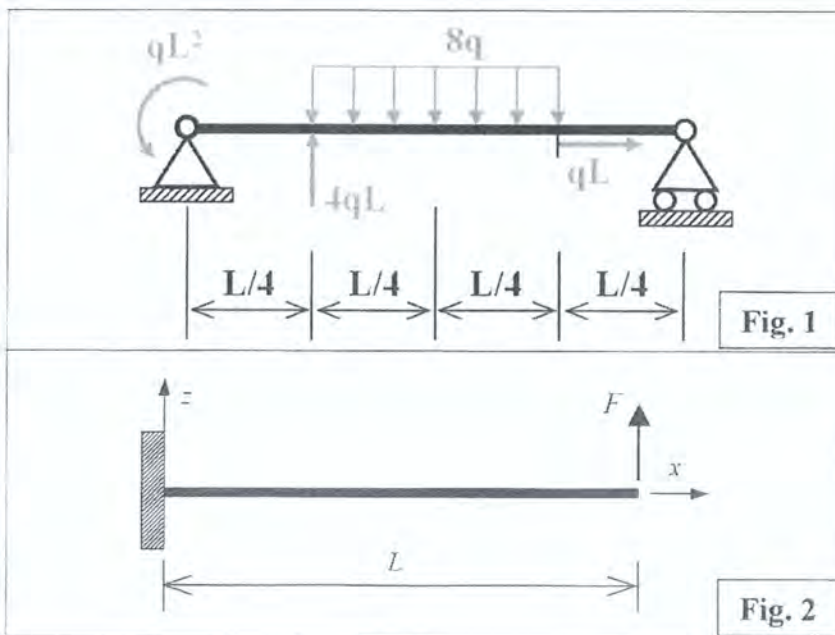
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA AERONAUTICA E SPAZIALE

CORSO DI STRUTTURE AERONAUTICHE

Prova scritta del 11/01/2010

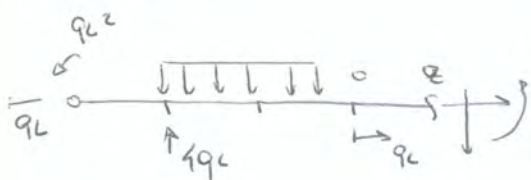
1. Per lo schema strutturale rappresentato in Figura 1, calcolare le reazioni vincolari e tracciare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione; tali diagrammi vanno quotati nei punti caratteristici. **(7)**
2. Scrivere e commentare (*definendo tutte le grandezze coinvolte*) la formula per l'instabilità locale a compressione delle aste. Effettuare poi il calcolo della tensione critica di un'asta in DURAL nei seguenti due casi di sezione trasversale:
 - a. rettangolare in parete sottile (base $b=10$ [mm], altezza $h=25$ [mm], spessore $s=0.5$ [mm])
 - b. a "C" in parete sottile (lunghezza tratto verticale $h=20$ [mm], lunghezza tratti orizzontali $b=8$ [mm], spessore $s=0.2$ [mm]). **(6)**
3. Scrivere (*non ricavare*) le equazioni costitutive della piastra di Kirchhoff (*definendo tutte le grandezze coinvolte*) ed elencare le proprietà delle matrici di rigidità caratteristiche. **(5)**
4. Si consideri la trave isotropa rappresentata in Figura 2. Si richiede di *calcolare, con il metodo degli elementi finiti*, la freccia e la rotazione dell'estremità libera. **(6)**

$$[K^{(e)}] = \frac{E^{(e)}J^{(e)}}{(L^{(e)})^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L^{(e)} & -12 & 6L^{(e)} \\ 6L^{(e)} & 4(L^{(e)})^2 & -6L^{(e)} & 2(L^{(e)})^2 \\ -12 & -6L^{(e)} & 12 & -6L^{(e)} \\ 6L^{(e)} & 2(L^{(e)})^2 & -6L^{(e)} & 4(L^{(e)})^2 \end{bmatrix}$$



Durata della prova: 1.5h.

FRATTO DE



→) $N(x) = 0$

↑) $T(x) = 0$

↗) $M(x) = 0$

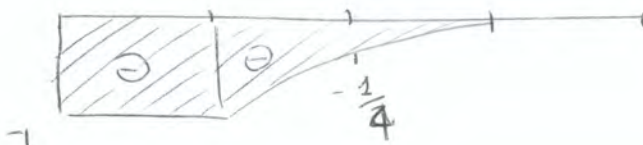
(N)



(T)



(M)



ESERCIZIO 2

$$\sigma_{cr} = \frac{\sigma_s}{1 + k\beta \frac{\sigma_s}{E}}$$

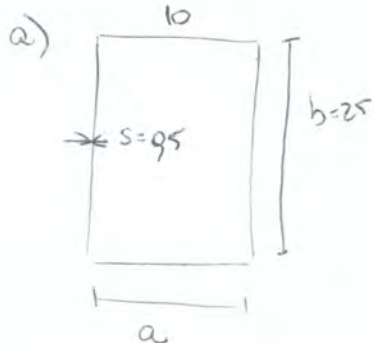
Con σ_s : tensione di snervamento

E: modulo elastico

k: parametro che vale → 3 per sezioni chiuse

↳ 8,15 per sezioni aperte

β : parametro di forma definito come $\frac{\text{lunghezza cedimento}}{\text{spessore}}$



$k = 3$
 $\beta = \frac{25}{0,5} = 50$

$\sigma_s = 30 \text{ kg/mm}^2$
 $E = 7300 \text{ kg/mm}^2$

$$\sigma_{cr} = \frac{30}{1 + 3 \cdot 50 \frac{30}{7300}} = 18,56 \text{ kg/mm}^2$$

82

ESERCIZIO 9



$$\{F_G\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ F \\ \theta \end{Bmatrix} \quad \{q_F\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \quad \{F_F\} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{F_U\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$$

$$[K_{FF}] = \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{EJ}{L^3}$$

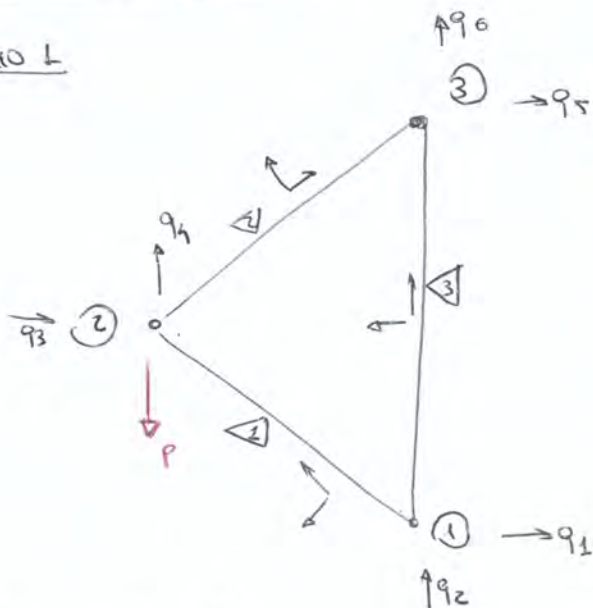
$$[K_{FF}] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 12w_1 - 6L\theta_1 = \frac{FL^3}{EJ} \\ -6w_1L + 4L^2\theta_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \theta_1 = \frac{3}{2} \frac{w_1}{L}$$

$$\begin{cases} 12w_1 - 9w_1 = \frac{FL^3}{EJ} \rightarrow w_1 = \frac{FL^3}{3EJ} \\ \theta_1 = \frac{3}{2} \frac{w_1}{L} \rightarrow \theta_1 = \frac{FL^2}{2EJ} \end{cases}$$

ESAME 01/02/2010

ESERCIZIO 1



- $\triangle 1$ $E = \bar{E}$
 $A = \sqrt{2} A$
- $\triangle 2$ $E = 3E$
 $A = \sqrt{2} A$
- $\triangle 3$ $E = E$
 $A = A$

vincoli $\rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}$ carico in q_4 (-P)

Per prima cosa ricavo la matrice di rigidezza

$$[k_2^{(1)}] = \frac{E \cdot \sqrt{2} A}{\sqrt{2} L} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^{(1)} = 135^\circ \rightarrow [L^{(1)}] = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k_{22}^{(1)}] = [L^{(1)}]^T \cdot [k_2^{(1)}] \cdot [L^{(1)}] =$$

$$= \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assemble la matrice di rigidità

$[k_G] = \frac{EA}{2L}$

	1	2	3	4	5	6	
1	1	-1	-1	1			1
2	-1	1	1	-1		-1	2
3	-1	1	1	-1	-3	-3	3
4	1	-1	-1	1	-3	-3	4
5			-3	-3	3	3	5
6		1	-3	-3	3	3	6

$[k_G] = \frac{EA}{2L}$

	1	2	3	4	5	6	
1	1	-1	-1	1	0	0	1
2	-1	1	1	-1	0	-1	2
3	-1	1	1	-1	-3	-3	3
4	1	-1	-1	1	-3	-3	4
5	0	0	-3	-3	3	3	5
6	0	1	-3	-3	3	3	6

Passo a calcolare spostamenti e reazioni vincolari

vettore dei carichi $\{F_G\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ +R_3 \\ -P \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$

Gradi di libertà liberi $i_l = [2 \ 4]$
 Gradi di libertà vincolati $i_b = [1 \ 3 \ 5 \ 6]$

$[k_{FF}] = [k_G(i_l, i_l)] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\{F_F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} 92 \\ 94 \end{Bmatrix}$

$[k_{FG}] = [k_G(i_b, i_l)] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ $\{F_G\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_3 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$

ESERCIZIO 2

- $\sigma_p = 30 \text{ kg/mm}^2$
- $\sigma_{02} = 45 \text{ kg/mm}^2$
- $\sigma_R = 55-60 \text{ kg/mm}^2$
- $A_{ps} = 5 \cdot 11$
- $E = 23000 \text{ kg/mm}^2$
- $\nu = 0,33$
- $G = 28000 \text{ kg/mm}^2$
- $\gamma = 2,8 \text{ kg/m}^3$
- $L_e = 23 \text{ km}$
- Componenti: Al



ESERCIZIO 3

$$D_{11} w_{,xxxx}^{(0)} + 2(D_{12} + 2D_{66}) w_{,xxyy}^{(0)} + D_{22} w_{,yyyy}^{(0)} = \bar{q}_z$$

- I lati sono semplicemente appoggiati o il carico è verticale.
- I lati non traslano $\rightarrow w^{(0)} = 0$
- la rotazione è libera sui lati $\rightarrow M = 0$.

Queste equazioni quindi diventano

$$\begin{cases} x=0, a \rightarrow w^{(0)} = 0 \\ M_x = 0 \\ y=0, b \rightarrow w^{(0)} = 0 \\ M_y = 0 \end{cases}$$

Le condizioni mischiano termini cinematici e meccanici, cerchiamo di ricondurre le espressioni condizioni di bordo in termini di spostamenti.

Riprendiamo le equazioni costitutive:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} D_{11} w_{,xx}^{(0)} + D_{12} w_{,yy}^{(0)} \\ D_{12} w_{,xx}^{(0)} + D_{22} w_{,yy}^{(0)} \\ 2D_{66} w_{,xy}^{(0)} \end{Bmatrix}$$

Abbiamo quindi che

$$M_x = 0 \rightarrow D_{11} w_{,xx}^{(0)} + D_{12} w_{,yy}^{(0)} = 0$$

$$M_y = 0 \rightarrow D_{12} w_{,xx}^{(0)} + D_{22} w_{,yy}^{(0)} = 0$$

Si è per $x=0, a$ \rightarrow $w^{(0)} = w_{,xx}^{(0)} = 0$
 $y=0, b$ \rightarrow $w^{(0)} = w_{,yy}^{(0)} = 0$ \rightarrow CONDIZIONI AL CONFINO

POLITECNICO DI TORINO

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA AERONAUTICA E SPAZIALE

CORSO DI STRUTTURE AERONAUTICHE

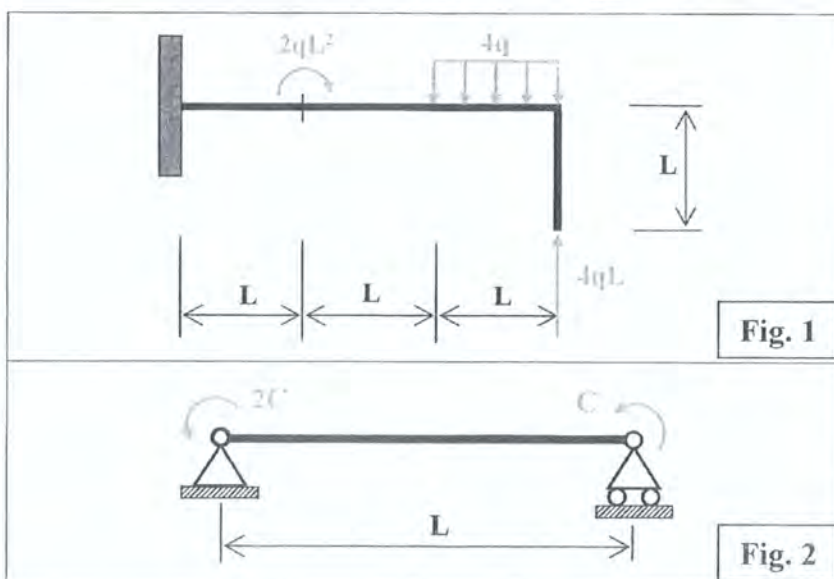
Prova scritta del 25/06/2010

1. Per lo schema strutturale rappresentato in Figura 1, calcolare le reazioni vincolari e tracciare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione; *tali diagrammi vanno quotati nei punti caratteristici.* (6)
2. Descrivere in breve (*senza dimostrazioni o spiegazioni concettuali ma con l'aiuto di disegni e tabelle*) gli stati di tensione possibili per un pannello piano soggetto a taglio. (6)
3. Si consideri una piastra costituita da tre strati: i due esterni sono in alluminio e sono spessi 2 [mm] ciascuno, lo strato interno è in acciaio ed ha spessore di 6 [mm]. *Calcolare* la matrice di rigidezza membranale [A] della piastra e *dimostrare* che la matrice [B] di accoppiamento è nulla (*non basta dire che è nulla perchè la laminazione è simmetrica*). (6)

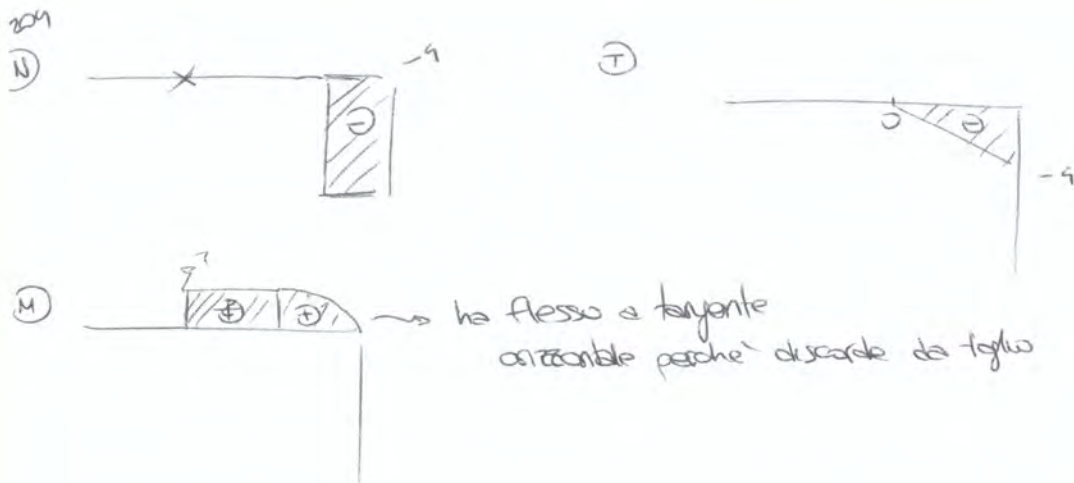
$$[Q_P^{(0)}] = \begin{bmatrix} E_L & \nu_{LT}E_T & 0 \\ 1-\nu_{LT}\nu_{TL} & 1-\nu_{LT}\nu_{TL} & 0 \\ \nu_{LT}E_T & E_T & 0 \\ 1-\nu_{LT}\nu_{TL} & 1-\nu_{LT}\nu_{TL} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix}$$

4. Si consideri la trave isotropa rappresentata in Figura 2. Calcolare, *con il metodo degli elementi finiti*, le rotazioni di estremità e le reazioni vincolari. (6)

$$[K^{(e)}] = \frac{E^{(e)}J^{(e)}}{(L^{(e)})^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L^{(e)} & -12 & 6L^{(e)} \\ 6L^{(e)} & 4(L^{(e)})^2 & -6L^{(e)} & 2(L^{(e)})^2 \\ -12 & -6L^{(e)} & 12 & -6L^{(e)} \\ 6L^{(e)} & 2(L^{(e)})^2 & -6L^{(e)} & 4(L^{(e)})^2 \end{bmatrix}$$

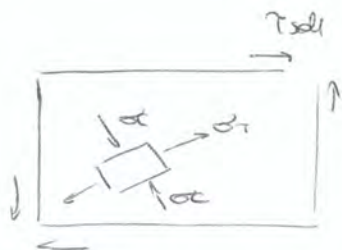


Durata della prova: 1.5h.



ESERCIZIO 2

1) Tangenziale puro quando $\tau_{sdh} < \tau_{cr}$



$$\begin{aligned} \sigma_T &= \tau_{sdh} \\ \sigma_C &= -\tau_{sdh} \\ \sigma_x &= 0 \\ \sigma_y &= 0 \end{aligned}$$

2) Diagonale completo $\rightarrow \tau_{sdh} >> \tau_{cr}$



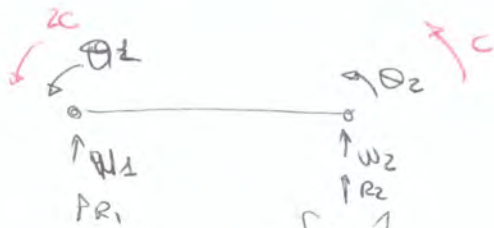
$$\begin{aligned} \sigma_T &= 2\tau_{sdh} \\ \sigma_C &= -\tau_{cr} = 0 \\ \sigma_x &= \tau_{sdh} \\ \sigma_y &= \tau_{sdh} \end{aligned}$$

3) Diagonale incompleto $\tau_{sdh} > \tau_{cr}$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{sdh} &= \tau_{cr} + \Delta\tau \\ &\downarrow \\ &\tau_j \text{ puro} \rightarrow \text{diagonale completo} \end{aligned}$$

	τ_j puro	DA. COM	DA INCOM
σ_T	τ_{cr}	$2\Delta\tau$	$\tau_{cr} + 2\Delta\tau$
σ_C	τ_{cr}	0	τ_{cr}
σ_x	0	$\Delta\tau$	$\Delta\tau$
σ_y	0	$\Delta\tau$	$\Delta\tau$

20
ESERCIZIO 4



Vettore dei carichi = $\begin{Bmatrix} R_1 \\ 2C \\ R_2 \\ C \end{Bmatrix}$

Gradi di libertà vincolati: ~~θ_1, θ_2~~ = $e_{ib} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}$

spostamenti: $\{q\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$

$\{F_F\} = \begin{Bmatrix} 2C \\ C \end{Bmatrix}$

$\{F_V\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$

$[k_F] = \begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{EJ}{2L^3}$

$[k_V] = \begin{bmatrix} 6L & 6L \\ -6L & -6L \end{bmatrix} \cdot \frac{EJ}{L^3}$

$[k_F] \cdot \{q_F\} = \{F_F\}$

$\frac{EJ}{L^3} \begin{bmatrix} 2L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 2L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2C \\ C \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{C}{2EJ} \\ 0 \end{Bmatrix}$

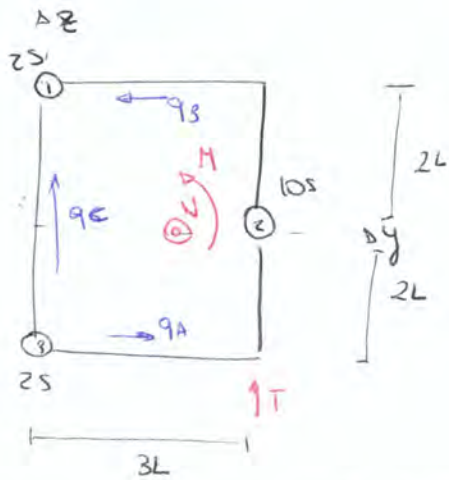
$[k_V] \cdot \{q_F\} = \{F_V\}$

$\frac{EJ}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} \cdot \frac{L}{EJ} \begin{Bmatrix} \frac{CL}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} \frac{3C}{L} \\ -\frac{3C}{L} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$

ESAME 15/07/2010

ESERCIZIO 1



	A_i	y_i	z_i	y_i	z_i	$I_T = A_i z_i^2$	σ_i	$\frac{d\sigma_i}{dx}$
1	2S	0	2L	$-\frac{15}{7}L$	2L	$8SL^2$	$\frac{N}{145} + \frac{M}{8LS}$	$\frac{T}{4L}$
2	10S	3L	0	$\frac{6}{7}L$	0	0	$\frac{N}{145}$	0
3	2S	0	-2L	$-\frac{15}{7}L$	-2L	$\frac{8SL^2}{16SL^2}$	$\frac{N}{145} - \frac{M}{8LS}$	$-\frac{T}{4L}$
		<u>145</u>						

Posizione baricentro

$$Y = \frac{\sum A_i y_i}{A_{tot}} = \frac{30LS}{145} = \frac{15}{7}L$$

$$Z = \frac{\sum A_i z_i}{A_{tot}} = 0$$

Tensioni normali

$$\sigma_i = \frac{N}{A_{Tot}} + \frac{M}{I_T} \cdot z_i$$

$$\sigma_1 = \frac{N}{145} + \frac{M}{16SL^2} \cdot 2L = \frac{N}{145} + \frac{M}{8LS}$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{145}$$

$$\sigma_3 = \frac{N}{145} - \frac{M}{8LS}$$

Nel caso generale (quindi taglio non applicato come in figura) per calcolare il flusso di taglio imponiamo $\dot{\theta} = 0$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2G\ell s} \sum q_i \ell_i = 0$$

$$q_A \cdot 5L + q_B \cdot 5L - q_C \cdot 4L = 0$$

$$(q_A' + q^*) \cdot 5 + (q_B' + q^*) \cdot 5 + 4q^* = 0$$

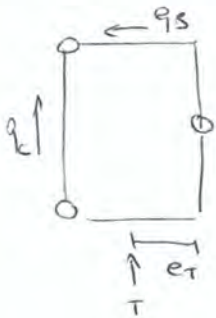
$$14q^* + 5(q_A' + q_B') = 0$$

$$14q^* + \frac{5}{2} \frac{T}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad q^* = -\frac{5}{28} \frac{T}{L}$$

Quindi \rightarrow

$$\begin{aligned} q_A &= \frac{T}{4L} - \frac{5}{28} \frac{T}{L} = \frac{1}{14} \frac{T}{L} \\ q_B &= \frac{1}{14} \frac{T}{L} \\ q_C &= \frac{5}{28} \frac{T}{L} \end{aligned}$$

Calcolo posizione centro di taglio (punto A)



$$T \cdot e_t = 2 \cdot q_B \cdot \frac{1}{2} \cdot 3L \cdot 4L + 2q_C \cdot \frac{1}{2} \cdot 3L \cdot 4L$$

$$T \cdot e_t = 12L^2 \cdot \left(\frac{5}{28} \frac{T}{L} - \frac{1}{14} \frac{T}{L} \right) = 6 \cdot e_t = \frac{9}{7} L$$

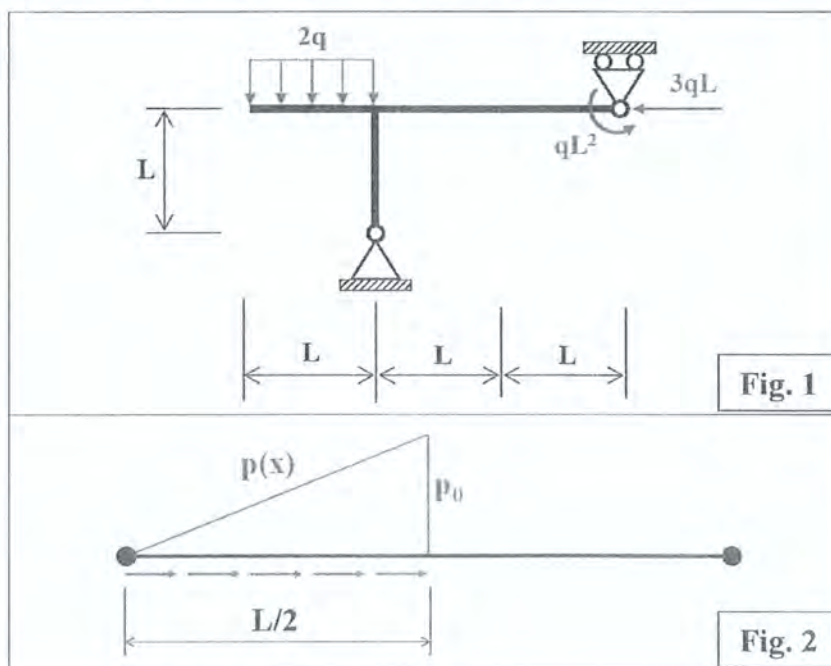
POLITECNICO DI TORINO

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA AERONAUTICA E SPAZIALE

CORSO DI STRUTTURE AERONAUTICHE

Prova scritta del 16/09/2010

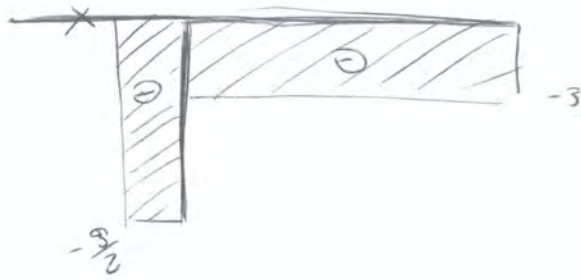
1. Per lo schema strutturale rappresentato in Figura 1, calcolare le reazioni vincolari e tracciare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione; tali diagrammi vanno quotati nei punti caratteristici. **(6)**
2. Ricavare per un elemento finito ROD il vettore delle forze nodali equivalenti ad un *carico assiale distribuito linearmente* come in figura 2. **(6)**
3. Scrivere e commentare la formula per l'instabilità globale a compressione delle aste snelle. Ricordare poi almeno due metodi (e le relative formule) per il calcolo dell'instabilità globale delle aste tozze. Definire sempre tutte le grandezze coinvolte nelle formule riportate. Tracciare infine le curve relative ai casi di aste snelle e aste tozze nel piano (σ_{CR} = tensione critica, λ = snellezza). **(8)**
4. Tracciare il diagramma qualitativo $\sigma(\epsilon)$ dell'ERGA, e riportare in una tabella i valori delle tensioni al limite di proporzionalità, di snervamento e di rottura, dell'allungamento percentuale a rottura, del modulo di Young, del coefficiente di Poisson, del modulo di taglio, della densità, della lunghezza di rottura e i principali componenti chimici. **(4)**



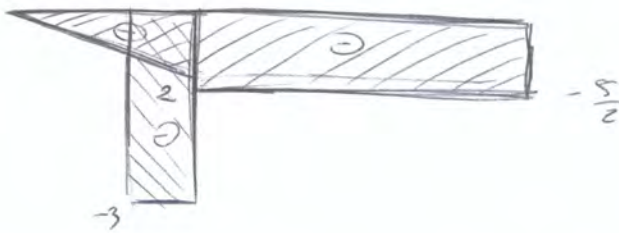
Durata della prova: 1.5h.

26

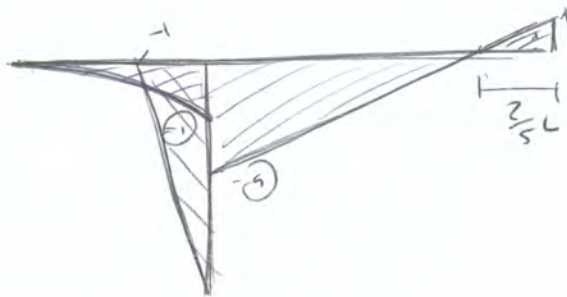
(N)



(T)

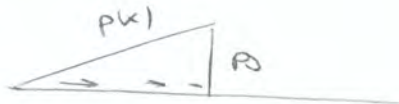


(M)



ESERCIZIO 2

(a)



$$p(x) = 2 p_0 \frac{x}{L} \quad \text{per } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

→ SISTEMA DEL CARICO EFFETTIVO

(b)



→ SISTEMA DEI CARICHI NODALI EQUIVALENTI

28

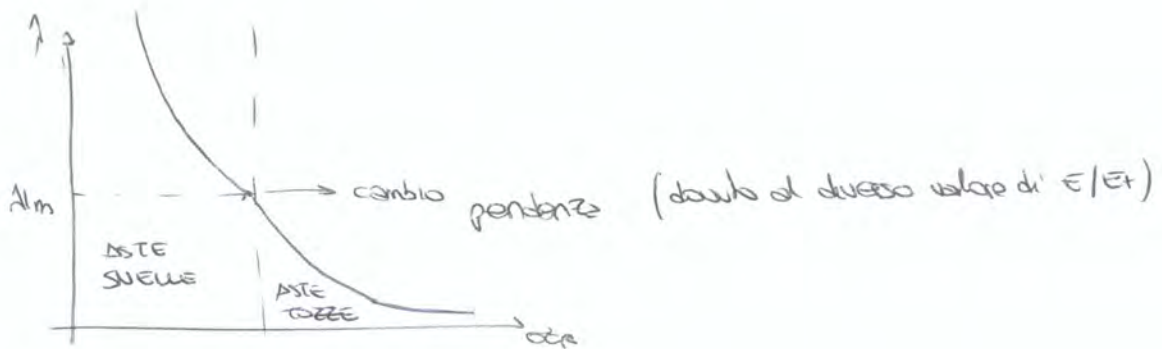
Per aste torde

1) FORMULA DELLA PARABOLA DI JOHNSON

$$\sigma_{cr} = \sigma_s - \frac{\sigma_s^2 l^2}{4\pi^2 E} \quad \text{con } \sigma_s : \text{tensione di snervamento}$$

2) FORMULA DEL MODULO TANGENTE

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E_t}{l_{eff}^2} \quad \text{con } E_t : \text{modulo tangente}$$



ESERCIZIO 4

$\sigma_p = 30 \text{ kg/mm}^2$

$\sigma_s = 85 \text{ kg/mm}^2$

$\sigma_r = 80 \text{ kg/mm}^2$

$A_{ps} = 109 \text{ kg/mm}^2$

$E = 1300 \text{ kg/m}^2$

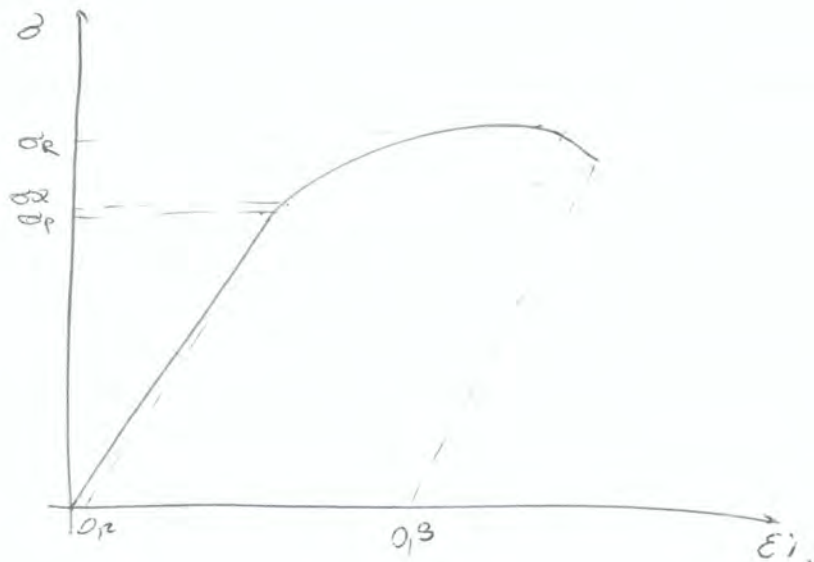
$D = 933$

$G = 2800 \text{ kg/mm}^2$

$\gamma = 2,8 \text{ kg/dm}^3$

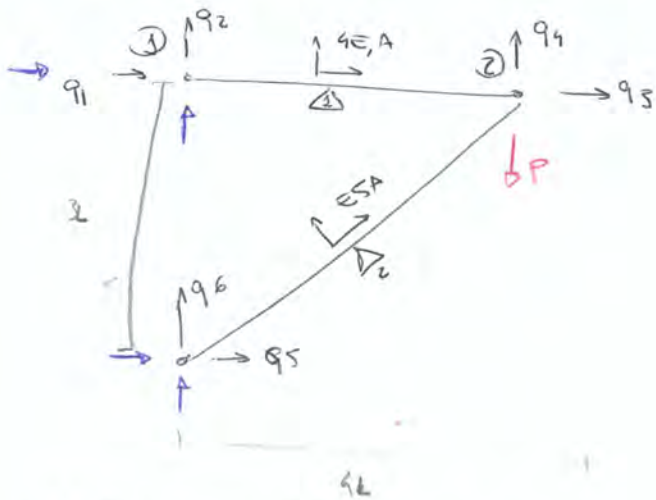
$L_e = 231 \text{ cm}$

Componenti =



ESAME 07/02/2011

ESERCIZIO 1



calcolo la matrice di rigidità

$$[k_L^{(1)}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^{(1)} = 0 \rightarrow [L^{(1)}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^{(1)}] = [L^{(1)}]^T \cdot [k_L^{(1)}] \cdot [L^{(1)}]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{L} =$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_L^{(2)}] = \frac{E \cdot \frac{3}{5} A}{\frac{3}{5} L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^{(2)} = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \rightarrow [L^{(2)}] = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^{(2)}] = \frac{EA}{5L} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{25L} \begin{bmatrix} 16 & 12 & -16 & -12 \\ 16 & 9 & -12 & -9 \\ -16 & -12 & 16 & 12 \\ -12 & -9 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2

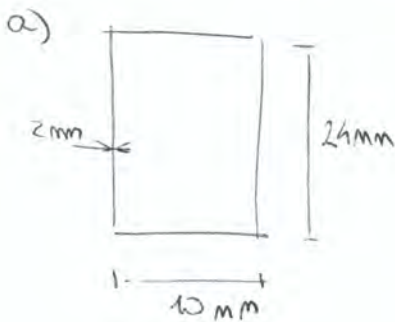
$$\sigma_{CR} = \frac{\sigma_s}{1 + k \cdot \beta \cdot \frac{\sigma_s}{E}}$$

con σ_s : tensione di snervamento

E : modulo elastico

β : parametro di forma $\beta = \frac{\text{lunghezza cedimento}}{\text{spessore}}$

$k = \frac{1}{3}$ per sezioni aperte
 $8,5$ per sezioni chiuse aperte



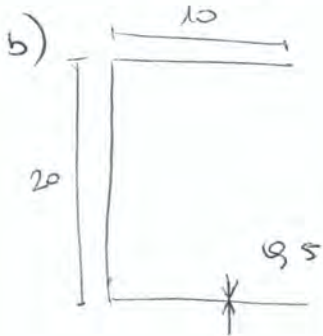
$$k = \frac{8,5}{3}$$

$$\beta = \frac{24}{2} = 12$$

$$\sigma_s = 50 \text{ kg/mm}^2$$

$$E = 7300 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sigma_{CR} = \frac{50}{1 + \frac{8,5}{3} \cdot 12 \cdot \frac{50}{7300}} = 29,11 \text{ kg/mm}^2$$



$$k = 8,5$$

$$\beta = \frac{10}{9,5} = 2,0$$

$$\sigma_s = 50 \text{ kg/mm}^2$$

$$E = 7300 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sigma_{CR} = \frac{50}{1 + 8,5 \cdot 2,0 \cdot \frac{50}{7300}} = 23,10 \text{ kg/mm}^2$$



$$k = \frac{8,5}{3}$$

$$\beta = \frac{10}{1} = 10$$

$$\sigma_s = 50 \text{ kg/mm}^2$$

$$E = 7300 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sigma_{CR} = \frac{50}{1 + \frac{8,5}{3} \cdot 10 \cdot \frac{50}{7300}} = 41,98 \text{ kg/mm}^2$$

POLITECNICO DI TORINO

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA AERONAUTICA E SPAZIALE

CORSO DI STRUTTURE AERONAUTICHE

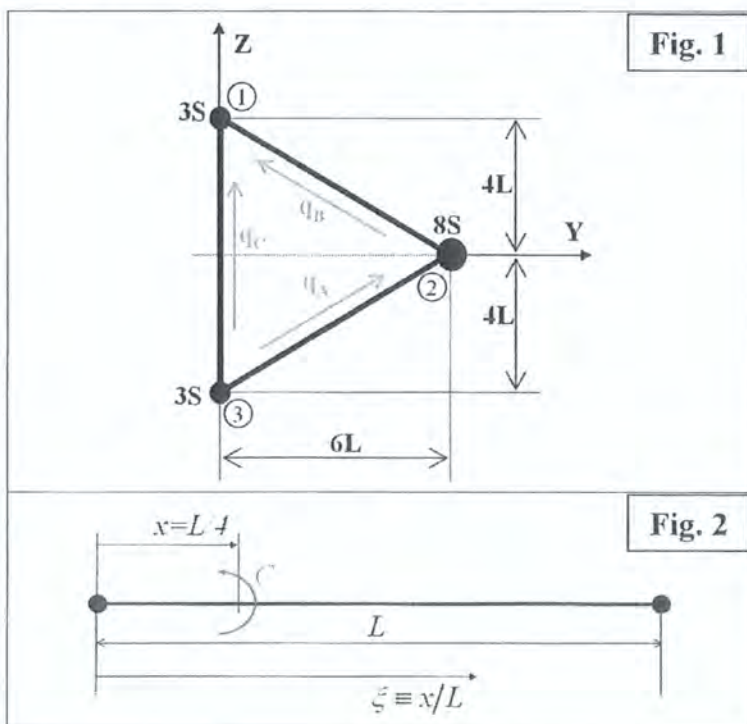
Prova scritta del 28/02/2011

1. Per la sezione a semiguscio rappresentata in Figura 1 si richiede di calcolare la posizione del centro di taglio. I calcoli vanno condotti in maniera letterale e svolgendo completamente i passaggi. Si utilizzino gli assi e le numerazioni per correnti e flussi riportate in Figura 1. **(10)**
2. Ricavare per un elemento finito BEAM il vettore delle forze nodali equivalenti ad una coppia concentrata C come indicato in figura 2. Si ricorda l'espressione dei polinomi di Hermite ($\xi=x/L$)

$$H_1(\xi) \equiv 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \quad *** \quad H_2(\xi) \equiv \xi^3 - 2\xi^2 + \xi \quad *** \quad H_3(\xi) \equiv -2\xi^3 + 3\xi^2 \quad *** \quad H_4(\xi) \equiv \xi^3 - \xi^2$$

(5)

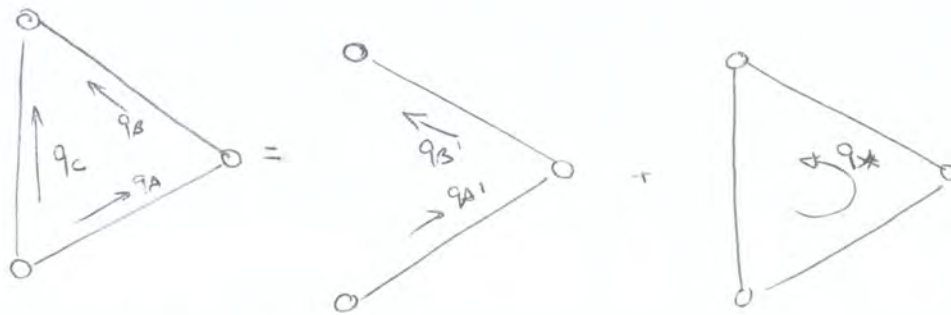
3. Scrivere (non ricavare) le equazioni costitutive della piastra di Kirchhoff (definendo tutte le grandezze coinvolte) ed elencare le proprietà delle matrici di rigidezza caratteristiche. **(5)**
4. Tracciare il diagramma qualitativo $\sigma(\epsilon)$ del DURAL, e riportare in una tabella i valori delle tensioni al limite di proporzionalità, di snervamento e di rottura, dell'allungamento percentuale a rottura, del modulo di Young, del coefficiente di Poisson, del modulo di taglio, della densità, della lunghezza di rottura e i principali componenti chimici. **(4)**



Durata della prova: 1,5h.

cco

Sovrapposizione degli effetti:

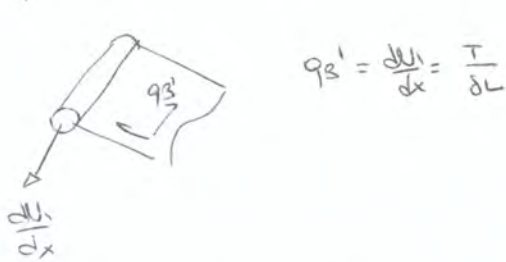


$$q_A = q_{A'} + q^*$$

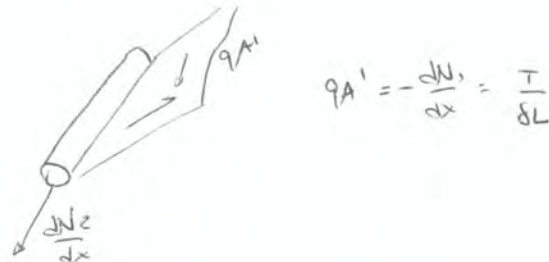
$$q_B = q_{B'} + q^*$$

$$q_C = -q^*$$

Equilibrio di correnti:



$$q_{B'} = \frac{du_1}{dx} = \frac{T}{\delta L}$$



$$q_{A'} = -\frac{du_2}{dx} = \frac{T}{\delta L}$$

Il quoziente di Bredt

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2G\delta s} \cdot \sum q_i \cdot l_i = q_A \cdot \sqrt{52} L + q_B \sqrt{52} L - q_C \delta L = 0$$

$$\frac{T}{4L} \cdot \sqrt{52} L + 2q^* \sqrt{52} L - q^* \delta L = 0 \rightarrow q^* = -0.0809 \frac{T}{L}$$

Quindi:

$$q_A = 0.046 \frac{T}{L}$$

$$q_B = 0.046 \frac{T}{L}$$

$$q_C = 0.0606 \frac{T}{L}$$

calcolo del centro di taglio

$$T \cdot e_t = q_C \cdot \delta L \cdot 6L \rightarrow e_t = q_C \frac{6\delta L^2}{T} = 3.88L$$