



Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2106A-

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Alberto Calvo

MATERIA: Meccanica del volo appunti - Prof. Gili

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

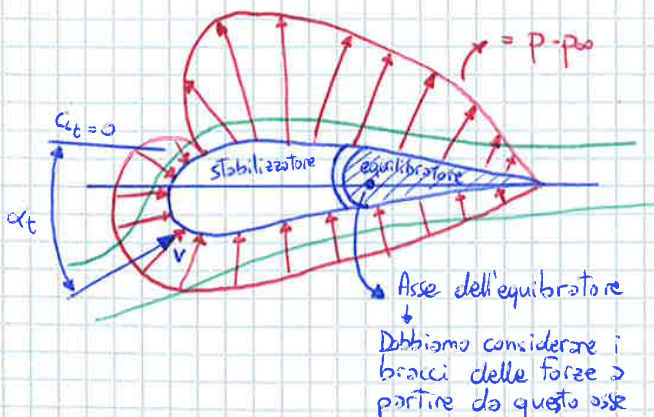
MECCANICA DEL VOLO

MOMENTO DI CERNIERA DELL'EQUILIBRATORE

- Ci permette di determinare gli sforzi di barra del pilota.
- A causa delle forze che agiscono sull'equilibratore si genera un momento attorno all'asse di cerniera che dovrà essere equilibrato dal pilota. Quindi definisce lo **sforzo di barra**.
- Bisogna avere dei comandi meccanici reversibili \Rightarrow Quelli dei piccoli velivoli \Rightarrow TRASMISSIONE. Questo perché i requisiti che devono essere soddisfatti per il **comando longitudinale** (ovvero il più importante) si rifanno ad una trattazione che prevede il comando classico reversibile.
- Quindi ora vedremo lo schema di questo comando classico.

Le forze che agiscono sull'equilibratore sono:

- Forze di Massa \Rightarrow Non le consideriamo, quindi consideriamo l'equilibratore equilibrato staticamente \rightarrow Baricentro sull'asse di cerniera
- Forze Aerodinamiche \leftarrow Pressioni
 \rightarrow Forze di Attrito \rightarrow Hanno braccio piccolo rispetto all'asse di cerniera quindi le trascuriamo
 \rightarrow Dipendono solo dalle pressioni sulla superficie mobile



• L'equilibratore è in posizione neutra $\delta = 0^\circ$

H: Momento di Cerniera

$$H = C_H \cdot S_e \cdot c_e \cdot \frac{1}{2} \rho V^2$$

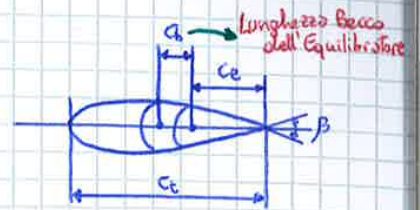
$C_H = C_H(\alpha_t, \delta) \Rightarrow$ Coefficiente di Momento di Cerniera

• Dalla formula ci accorgiamo come aumentando le dimensioni del velivolo sono aumentati anche i momenti di cerniera dei velivoli moderni.

• Il problema è andare a determinare queste costanti. Per ottenere dei valori bisogna fare delle prove sperimentali poiché determinarle teoricamente sarebbe difficile per via anche della viscosità. Sono problemi aerodinamici e non di meccanica del volo.

• Parametri che influenzano b_1, b_2, b_3 :

- Tipo di profilo
- Rapporto tra la corda dell'equilibratore e la corda totale $\frac{c_e}{c_t}$
- Rapporto tra la lunghezza del becco e la corda dell'equilibratore $\frac{c_b}{c_e}$
- Forma del becco dell'equilibratore
- Fessura tra stabilizzatore ed equilibratore $\left\{ \begin{array}{l} \text{Se esiste} \\ \text{Entità} \\ \text{Forma} \end{array} \right.$
- Angolo β
- Forma del bordo di uscita
- Numero di Reynolds
- Numero di Mach



• Posso adesso scrivere il C_H con un'altra espressione

$$\left[C_H = C_{H_0} + C_{H\alpha} \cdot \alpha + b_2 \cdot \delta + b_3 \cdot \delta_{stab} \right]$$

• Vediamo come si possono collegare i due modi differenti di scrivere il C_H .

Ricordando che $\alpha_s = \left(\alpha_t \right)_{\substack{\delta=0 \\ \delta_{stab}=0}} = \alpha_{wb} \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) - i$

Downwash Factor

$$\alpha_{wb} = \alpha + \frac{a_t}{a} \frac{S_t}{S} i$$

Quindi riscivo α_s

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \alpha \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) + \frac{a_t}{a} \frac{S_t}{S} i \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) - i \\ &= \alpha \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) - i \left[1 - \frac{a_t S_t}{a_{wb} (1+F) S} \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \right] \\ &= \alpha \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) - i \left(1 - \frac{F}{1+F} \right) \\ &= \alpha \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) - i \left(\frac{1}{1+F} \right) \end{aligned}$$

→ $\left[\alpha_s = \alpha \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) - i \left(\frac{1}{1+F} \right) \right]$

• Definiamo un coefficiente di portanza a comandi liberi

$$C_L' = C_{L\alpha} \cdot \alpha + C_{L\delta} \cdot \delta_{float}$$

Posso esprimerlo come $C_L' = C_{L0}' + C_{L\alpha}'$. Quindi posso sostituire

$$C_L' = -\frac{C_{L\delta}}{b_2} (C_{H0} + b_3 \delta_{stab}) + \left(C_{L\alpha} - \frac{C_{L\delta} C_{H\alpha}}{b_2} \right) \alpha$$

$$\left[C_{L\alpha}' = \frac{\partial C_L'}{\partial \alpha} = C_{L\alpha} - \frac{C_{L\delta} C_{H\alpha}}{b_2} = \alpha' \right]$$

• $C_{L\delta}$ è la variazione del coefficiente di portanza di tutto il velivolo per effetto della deflessione dell'equilibratore \Rightarrow È un valore PICCOLO

• $\frac{C_{H\alpha}}{b_2} \approx 1$

• Quindi alla luce di queste due considerazioni ho che

$$\left[C_{L\alpha}' \approx C_{L\alpha} \right] \text{ ma } \left[C_{L\alpha}' < C_{L\alpha} \right] \Rightarrow \text{Abbiamo dimostrato ciò che avevamo già detto poco fa.}$$

• Adesso vedremo alcune relazioni per il velivolo tuttala e per il velivolo convenzionale

■ VELIVOLO TUTTALA

$C_{H\alpha} = b_1 (*) \Rightarrow$ Non c'è il downwash factor poiché non c'è la coda

$$\alpha' = \alpha \left(1 - \frac{C_{L\delta} b_1}{a b_2} \right)$$

FREE ELEVATOR FACTOR per il tuttala

Possiamo avere anche un'espressione del C_M a comandi liberi per il tuttala

$$C_M' = C_{M0} + C_{M\alpha} \cdot \alpha + C_{M\delta} \cdot \delta_{float}$$

\Rightarrow Posso esprimerlo come somma di un termine che non dipende da α e uno che racchiude tutto ciò che è $f(\alpha)$

$$C_M' = C_{M0}' + C_{M\alpha}' \cdot \alpha$$

$$\left[C_{M0}' = -\frac{C_{M\delta}}{b_2} (C_{H0} + b_3 \delta_{stab}) + C_{M0} \right]$$

$$\left[C_{M\alpha}' = C_{M\alpha} - \frac{C_{M\delta} C_{H\alpha}}{b_2} \right] \Rightarrow \left[C_{M\alpha}' > C_{M\alpha} \right] \Rightarrow \text{Stabilità ridotta nel caso di comandi liberi}$$

■ VELIVOLO TUTTALA

• Quindi se il baricentro si trova in posizione ANTERIORE a X_N e $X_{N'}$ c'è una stabilità intrinseca che permette al velivolo di stabilizzarsi da solo in caso di disturbo.

Se il baricentro si trovasse in mezzo tra $X_{N'}$ e X_N (Ricorda $X_{N'}$ anteriore a X_N) non ci sarebbe questa stabilità intrinseca per i comandi liberi.

Tutto questo vale in caso di comandi a trasmissione meccanica reversibile.

Ora torniamo al velivolo tuttala e scriviamo il $C_{H\delta}$.

Per il velivolo tuttala $X_N \equiv X_{a'}$. Quindi:

$$C_{H\delta} = \frac{\partial C_{H_{0, \text{tuttala}}}}{\partial \delta} + C_{L\delta} \frac{X_G - X_{a'}}{c} \Rightarrow C_{H\delta} = \frac{\partial C_{H_0}}{\partial \delta} + \frac{X_G - X_N}{c}$$

$$\frac{X_G - X_{N'}}{c} = \frac{1}{a'} \left(a \frac{X_G - X_N}{c} - \frac{C_{H\alpha}}{b_2} \frac{\partial C_{H_0}}{\partial \alpha} - \frac{C_{H\alpha}}{b_2} C_{L\delta} \frac{X_G - X_N}{c} \right)$$

$$\frac{X_G - X_{N'}}{c} = \frac{X_G}{c} \underbrace{\left(\frac{a}{a'} - \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} C_{L\delta} \right)}_{a'} - \frac{X_N}{c} \frac{1}{a'} \left(1 - \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} C_{L\delta} \right)$$

$$\frac{X_G - X_{N'}}{c} = \frac{X_G}{c} - \frac{X_N}{c} \frac{1}{a'} \underbrace{\left(1 - \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} C_{L\delta} \right)}_{a'} - \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} \frac{\partial C_{H_0}}{\partial \delta}$$

$$\frac{X_{N'}}{c} = \frac{X_N}{c} + \frac{(-)}{a' b_2} \frac{(-)}{(-)} \frac{\partial C_{H_0}}{\partial \delta} \Rightarrow \boxed{\frac{X_{N'}}{c} < \frac{X_N}{c}}$$

■ VELIVOLO CONVENZIONALE

Facciamo la stessa trattazione anche per il velivolo convenzionale.

$$C_{H\delta} = -a_f \bar{\nu} + C_{L\delta} \frac{X_G - X_{a'}}{c}$$

$$\frac{X_G - X_{N'}}{c} = \frac{a}{a'} \frac{X_G - X_N}{c} + \underbrace{a_f \bar{\nu}}_{a_e} \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} - \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} C_{L\delta} \frac{X_G - X_{a'}}{c}$$

$$= \frac{X_G}{c} \frac{1}{a'} \underbrace{\left(a - \frac{C_{H\alpha}}{b_2} C_{L\delta} \right)}_{a'} - \frac{a}{a'} \frac{X_N}{c} + \frac{X_{a'}}{c} \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} C_{L\delta} + \frac{a_e C_{H\alpha}}{a' b_2} \bar{\nu}$$

$$= \frac{X_G}{c} - \frac{1}{a'} \left(a \frac{X_N}{c} - \frac{C_{H\alpha}}{b_2} \frac{X_{a'}}{c} \right) + \frac{C_{H\alpha}}{a' b_2} a_e \bar{\nu}$$

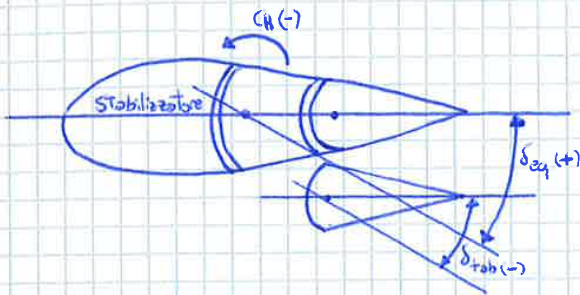
Adesso ricordiamo che $\left(\frac{X_{a'}}{c} = \frac{X_{a'} - X_N}{c} + \frac{X_N}{c} \right)$

ALETTA CORRETRICE (Trim Tab)

- L'aletta correttiva annulla lo sforzo di barra, ovvero la forza che il pilota deve esercitare per mantenere l'equilibrio.
 - La situazione di volo trimmato è quando il pilota non compie più sforzo di barra per mantenere l'equilibrio.
- Per ottenere ciò dobbiamo annullare il momento di cerniera

$$H = C_H S_e C_e \frac{1}{2} \rho V^2 = 0 \Rightarrow [C_H = 0] \rightarrow \text{Condizioni di Trimaggio}$$

- Disegniamo un impennaggio orizzontale



- C_H è negativo quando δ è positivo

- Partiamo adesso dalla relazione di C_H in funzione di $\alpha, \delta, \delta_{tab}$.

$$C_H = C_{H0} + C_{H\alpha} \alpha + b_2 \delta + b_3 \delta_{tab} = 0 \Rightarrow \text{Se } C_H = 0 \Rightarrow \text{ allora } \delta_{tab} \equiv \delta_{tab_{trim}}$$

$$\delta_{tab_{trim}} = -\frac{1}{b_3} (C_{H0} + C_{H\alpha} \alpha + b_2 \delta)$$

- Andiamo a ricavare il δ_{tab} in modo tale che si annulli il momento di cerniera. Ricordando le espressioni di α_{eq} e δ_{eq} le sostituisco in $\delta_{tab_{trim}}$

$$\delta_{tab_{trim}} = -\frac{1}{b_3} \left[C_{H0} + \frac{C_{H\alpha}}{\Delta} (C_{H0} C_{L\delta} + C_{H\delta} C_{L\alpha}) - \frac{b_2}{\Delta} (C_{H0} C_{L\alpha} + C_{H\alpha} C_{L\alpha}) \right]$$

$$\delta_{tab_{trim}} = -\frac{1}{b_3} \left[C_{H0} + \frac{C_{H0}}{\Delta} (C_{H\alpha} C_{L\delta} - b_2 C_{L\alpha}) + \frac{1}{\Delta} (C_{H\alpha} C_{H\delta} - C_{H\alpha} b_2) C_{L\alpha} \right]$$

- Dalla relazione (**): $C_{H\alpha} C_{H\delta} - C_{H\alpha} b_2 = -a' b_2 \frac{X_G - X_N}{c}$

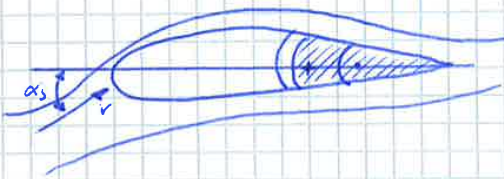
$$\delta_{tab_{trim}} = -\frac{1}{b_3} \left[C_{H0} + \frac{C_{H0}}{\Delta} (C_{H\alpha} C_{L\delta} - b_2 C_{L\alpha}) - \frac{a' b_2}{\Delta} \frac{X_G - X_N}{c} C_{L\alpha} \right]$$

Termine noto della retta $\delta_{tab_{trim}} - C_{L\alpha}$
NEGATIVO

ALETTA COMPENSATRICE

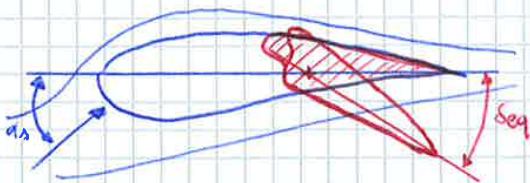
- Riduce il momento di cerniera $H \Rightarrow$ Compensazione aerodinamica.
- La compensazione aerodinamica si fa in diversi modi:
 - Arretramento asse di cerniera
 - Avanzamento di una parte di superficie mobile davanti all'asse di cerniera
 - Aletta compensatrice
- L'aletta correttiva è un comando a disposizione del pilota \Rightarrow Decide lui quando usarla.
- L'aletta compensatrice è indipendente dal pilota \Rightarrow è un **SERVOCOMANDO** si muove in modo opportuno quando si muove l'equilibratore.
- Perché la compensazione aerodinamica? Poiché $H = H(\rho^3, V^2)$ e con il passare degli anni sono aumentate grandezza e velocità dei velivoli quindi si raggiungono alti H e bisogna ridurre gli sforzi di barra.

Arretramento Asse di cerniera



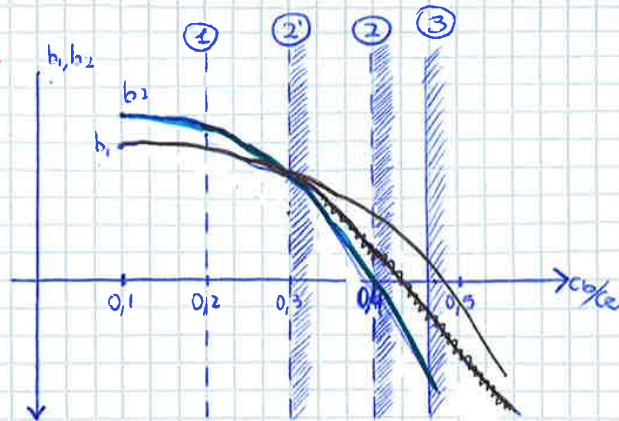
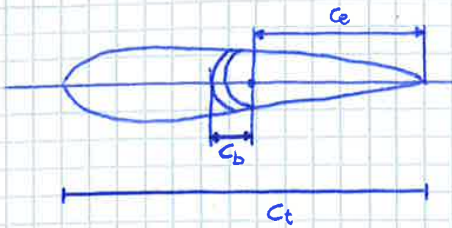
- Ha delle azioni aerodinamiche su dorso e ventre.
- Se arretrato l'asse di cerniera è più facile che queste azioni (che determinano il momento) si compensino e si equilibrino.

Avanzamento superficie Mobile



- Molto simile all'arretramento. Usa un equilibratore che ha una forma particolare (quello rosso). Ha una protuberanza sulla superficie che, ruotando con l'equilibratore, sporge dal dorso e modifica la distribuzione di pressione sul dorso modificando anche il momento di cerniera.
- Queste due soluzioni risultano molto simili. Ora andremo ad analizzare più nel dettaglio il funzionamento dell'aletta compensatrice.

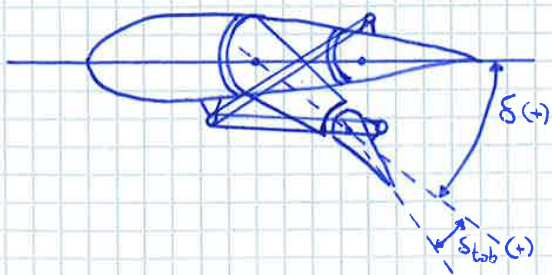
Armetramento asse di cerniera



- Con $b_2 > 0$ a ② non si ha più stabilità, il limite è ②' per ragioni di sicurezza. Visto che ②' è a $\frac{c_b}{c_e} = 0,3$ si è introdotta l'aletta Tab per abbattere ulteriormente il momento di cerniera. Questo poiché non posso arretrare oltre $\frac{c_b}{c_e} = 0,3$.
- Avevamo già detto che affinché ci sia stabilità $b_2 < 0$!

ALETTA SCOMPENSATRICE ⇒ Corregge l'eccessivo armetramento

- Se non basta la compensazione in ②', posso pensare di andare anche oltre il ②' ($b_2 = 0$) e quindi vado al punto ③ in cui b_1 è molto piccola e b_2 ha cambiato di segno andando quindi ad infrangere un requisito (Stabilità del comando). Quindi si è introdotta l'**Aletta Scompensatrice**.



- In questo modo $Stab$ ha lo stesso segno del δ . Questa situazione può funzionare solo con l'armetramento nella posizione ③ poiché la scompenzazione **INCREMENTA** il momento di cerniera!

Termine in δ : $b_2 \left(1 + K \frac{b_3}{b_2} \right) \delta$ ⇒ Nel caso ③ $b_2 > 0 \Rightarrow \frac{b_3}{b_2} < 0$ quindi ho il +

Nello stesso tempo, però, dev'essere $\left| K \frac{b_3}{b_2} \right| > 1$! E come lo realizzo?

$K > 0 ; b_3 < 0$

↳ Poiché $|K b_3| > |b_2|$

$\left| b_2 \left(1 + K \frac{b_3}{b_2} \right) \right| < |b_2|$

$\left(1 + K \frac{b_3}{b_2} \right) < 0 \Rightarrow \left| 1 + K \frac{b_3}{b_2} \right| < 1 \Rightarrow$ Quindi è verificato il requisito.

- In questo modo ho ridotto δ e mantenuto $b_2 < 0$ quindi ho conservato la stabilità del comando.

[REQUISITO 3] STABILITÀ DEL COMANDO

$$\left[\frac{\partial C_H}{\partial \delta} = b_2 < 0 \right]$$

[REQUISITO 4] TRIMMABILITÀ

$$[V_{eq} = V_{trim}]$$

- Ci dev'essere almeno una velocità a cui il velivolo può essere trimmato ^{anche senza pilota} e il pilota non deve fare sforzo.
Riesco a sfruttare l'equilibratore stando ben lontano dai suoi limiti, quindi nell'intervallo in cui è più efficace.
- Quindi se il velivolo non ha lo TRIM TAB ci dev'essere UNA velocità alla quale il velivolo è trimmato.

[REQUISITO 5] SENSIBILITÀ (2^a Mezza)

$$\left[\frac{d\alpha_{eq}}{dV_{eq}} > 0 \right]$$

⇒ Deve aumentare lo sforzo all'aumento della velocità. Deve rendersi conto che la velocità sta aumentando e che ci vuole più forza.

- ④ e ⑤ sono realizzati se il velivolo è stabile ⇒ comandi liberi ($X_G < X_N$) e di conseguenza ⇒ anche ⇒ comandi bloccati ($X_G < X_N < X_W$).
- Se soddisfo ④ e ⑤ allora è soddisfatto anche ②.
- Dimostriamo adesso il primo punto $X_G < X_N \Rightarrow$ ④ e ⑤ ok

$$P_z = -GH = -G C_H S c \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$C_H = C_{H_0} + C_{H\alpha} \alpha_{eq} + b_2 \delta_{eq} + b_3 \delta_{tab}$$

↙
Situaz.
Generica

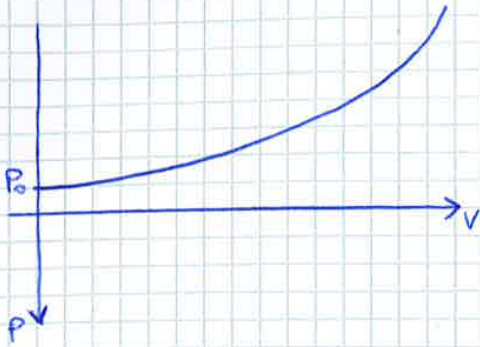
- Riscrivo il C_H in situazione di velivolo trimmato

$$C_{H_0} = 0 = C_{H_0} + C_{H\alpha} \alpha_{eq} + b_2 \delta_{eq} + b_3 \delta_{tab_{trim}}$$

- Faccio la differenza membro a membro e ottengo

$$C_H = b_3 (\delta_{tab} - \delta_{tab_{trim}})$$

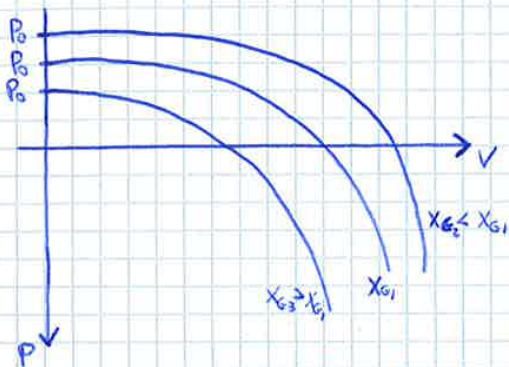
Se $P_0 < 0$ e $B < 0$



Requisito 4 NO $\rightarrow \nexists V_{trim}$

Requisito 5 NO $\rightarrow \frac{dP}{dV} < 0$

Se $P_0 < 0$ e $B > 0$



Requisito 4 OK! $\rightarrow \exists V_{trim}$

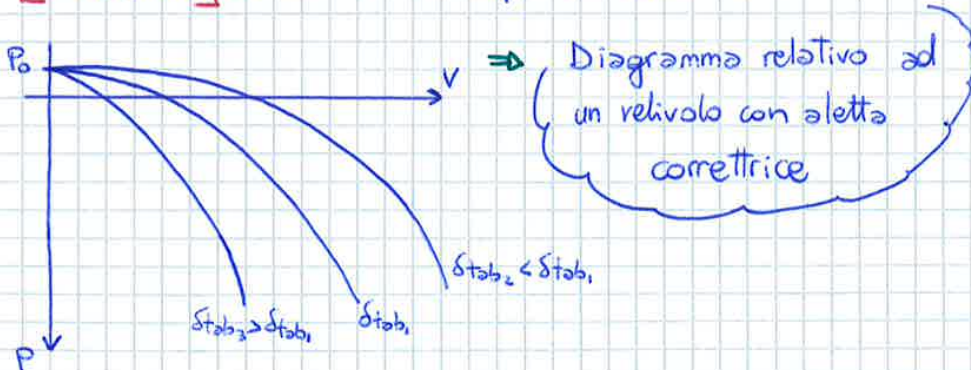
Requisito 5 OK! $\rightarrow \frac{dP}{dV} > 0$

\Rightarrow Diagramma relativo ad un velivolo senza aletta correttiva

Da cosa dipendono P_0 e B ?

$[P_0 = f(X_G)] \Rightarrow$ Quindi se cambio la posizione del baricentro si shifta la curva e cambia il V_{trim}
Allora se sposto il baricentro trimmo ad una velocità diversa.

$[B = f(\delta_{stab})] \Rightarrow$ In base alle diverse posizioni dell'aletta correttiva ho diversi valori di V_{trim}



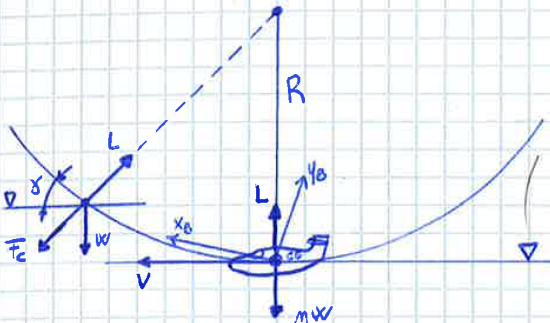
\Rightarrow Diagramma relativo ad un velivolo con aletta correttiva

Facciamo adesso un'ulteriore considerazione

- Andremo adesso a introdurre due nuovi gradienti che individueranno i requisiti di **manovrabilità** del velivolo. Per fare questo riprendiamo il **MOTO ACCELERATO** con accelerazione normale alla traiettoria (la **RICHIAMATA**)

■ MOTO ACCELERATO

- Moto curvo contenuto nel piano di simmetria.



$L = mW$

$mW = W + F_c = W + \frac{W}{g} \frac{V^2}{R} \Rightarrow \boxed{m = 1 + \frac{V^2}{g \cdot R}}$

$\boxed{q = \frac{V}{R} = \dot{\theta}} \Rightarrow$ Velocità angolare di beccheggio

- Se non siamo nel punto più basso della Traiettoria \Rightarrow Analizziamo il caso generale

$L = mW = W \cdot \cos \alpha + F_c = W \cdot \cos \alpha + \frac{W}{g} \frac{V^2}{R}$

$m = \cos \alpha + \frac{V^2}{gR}$

} Nel caso generale devo semplicemente considerare l'angolo α .

- Possiamo supporre un moto accelerato a regime nell'intorno del punto che stiamo considerando, ovvero dove i parametri sono costanti.

$V = \text{cost}$

$\alpha = \text{cost}$

$\Rightarrow m = \text{cost}$ e $\alpha \cong \text{cost}$ } Tutto sempre nell'intorno del punto

- Nel moto rettilineo uniforme ho un δ_{eq} e un P_{eq} ($L = W$)
- Nel moto accelerato ho $\delta_{eq} + \Delta \delta_{eq}$ e $P_{eq} + \Delta P_{eq}$ ($L = mW$) $\Delta m = m - 1$
- Ora dimostreremo che $\Delta \delta_{eq}$ e ΔP_{eq} sono proporzionali a Δm e questo è importante perché mi permette di individuare:

$\boxed{\frac{\Delta \delta_{eq}}{\Delta m}} \Rightarrow$ Elevator Angle per g

$\boxed{\frac{\Delta P_{eq}}{\Delta m}} \Rightarrow$ Stick Force per g

Questi due elementi sono legati al requisito della **manovrabilità** e mi permettono di individuare quindi i requisiti **6** e **7**

$\boxed{6} \frac{\Delta \delta_{eq}}{\Delta m} < 0$

$\boxed{7} \frac{\Delta P_{eq}}{\Delta m} < 0$

• Adesso troviamo C_{Mq}

$(\Delta C_{Mq})_{tail} = \Delta L_t l'_t \Rightarrow$ variazione di momento di beccheggio dovuta al tail.

$$\left\{ \frac{\Delta L_t}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} = (\Delta C_L)_{tail} = \Delta C_{L_t} \frac{S_t}{S} \right\}$$

$$(\Delta C_{Mq})_{tail} = - \frac{\Delta L_t l'_t}{S C \frac{1}{2} \rho V^2} = - \frac{\Delta C_{L_t} S_t l'_t}{S C} = - \Delta C_{L_t} \bar{V}'$$

Portanza positiva induce becche peggio negativo

(**) $\Delta C_{L_t} = a_t l'_t \hat{q} \frac{2}{c}$

$$\Rightarrow (\Delta C_{Mq})_{tail} = - a_t l'_t \hat{q} \frac{2}{c} \bar{V}'$$

Allora posso riscrivere la derivata aerodinamica

$$\frac{\partial C_{Mq}}{\partial \hat{q}} = C_{Mq} = \frac{(\Delta C_{Mq})_{tail}}{\partial \hat{q}} = - 2 a_t l'_t \frac{\bar{V}'}{c}$$

$$\frac{\partial C_{Mq}}{\partial \hat{q}} = - 2 a_t l'_t \frac{\bar{V}'}{c} \Rightarrow \text{Contributo della coda al coefficiente di beccheggio}$$

Quantità negativa

$$\left. \begin{matrix} C_{Mq} > 0 \\ C_{Mq} < 0 \end{matrix} \right\} f(x_0) \text{ perché c'è } l'_t$$

• Torniamo al ΔC_L e al ΔC_{Mq} . Nel passaggio dal volo rettilineo al volo accelerato si incrementa la portanza L per la forza centrifuga F_c .

$$\Delta L = \frac{W}{g} \cdot q V = (n-1)W \Rightarrow n-1 = \frac{qV}{g}$$

$$L = W = (C_L)_{n=1} S \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$\Delta L = \frac{1}{g} q \cdot V (C_L)_{n=1} S \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$\left\{ \begin{matrix} q = (n-1) \frac{W}{V} \\ qV = (n-1) g \\ \Delta C_L = \frac{1}{g} \frac{W}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} \hat{q} \frac{2V}{c} \end{matrix} \right. \quad (*)$$

$$\Rightarrow \Delta C_L = \frac{1}{g} \underbrace{(C_L)_{n=1}}_{\frac{W}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}} \underbrace{q \frac{2V}{c}}_{\frac{2V}{c} \frac{2V}{c}}$$

(*)

$$\Delta C_L = \frac{2 \hat{q} W}{g C S \frac{1}{2} \rho} = \frac{2 \hat{q} \frac{W}{g}}{C \frac{1}{2} \rho S}$$

Massa del Velivolo

Massa d'aria convenzionale

$$\mu = \frac{W/g}{\frac{1}{2} \rho S} \Rightarrow \text{PARAMETRO DI MASSA RELATIVA}$$

MASSA DEL VELIVOLO ADIMENSIONALIZZATA

\Rightarrow Aumenta con la quota \hat{q}

$$\left[-\left(\frac{\Delta\delta}{m-1}\right) C_{M\delta} - \frac{C_{Mq}}{2M} (C_L)_{m=1} \right] \frac{C_{L\alpha}}{C_{M\alpha}} = -\left(\frac{\Delta\delta}{m-1}\right) C_{L\delta} - (C_L)_{m=1} \left[\frac{C_{Lq}}{2M} - 1 \right]$$

$$\frac{\Delta\delta}{m-1} \left(C_{L\delta} - \frac{C_{M\delta} C_{L\alpha}}{C_{M\alpha}} \right) = (C_L)_{m=1} \left(\frac{C_{Mq}}{2M} \frac{C_{L\alpha}}{C_{M\alpha}} + 1 - \frac{C_{Lq}}{2M} \right)$$

- Ricordiamo che $C_{L\delta} C_{M\alpha} - C_{M\delta} C_{L\alpha} = -\Delta$

$$\frac{\Delta\delta}{m-1} = -\frac{(C_L)_{m=1}}{\Delta} C_{M\alpha} \left(\frac{C_{Mq}}{2M} \frac{C_{L\alpha}}{C_{M\alpha}} + 1 - \frac{C_{Lq}}{2M} \right)$$

$$= -\frac{(C_L)_{m=1}}{\Delta} \left[\frac{C_{Mq} C_{L\alpha}}{2M} + C_{M\alpha} - \frac{C_{Lq} C_{M\alpha}}{2M} \right]$$

$$= -\frac{(C_L)_{m=1}}{\Delta} \left[C_{M\alpha} \left(1 - \frac{C_{Lq}}{2M} \right) + \frac{C_{L\alpha} C_{Mq}}{2M} \right]$$

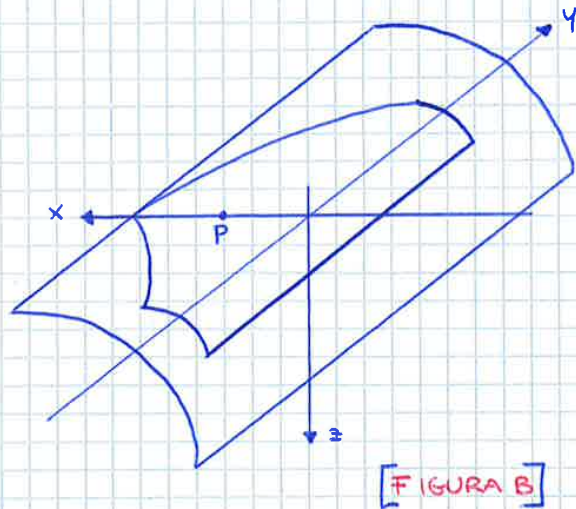
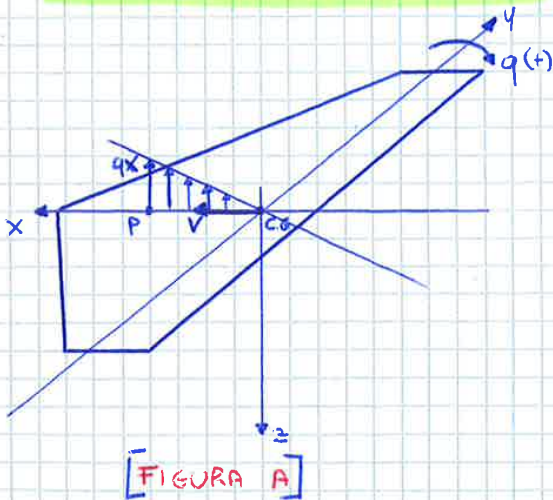
- Ricordiamo che $C_{M\alpha} = C_{L\alpha} \frac{X_G - X_N}{c}$ e scriviamo

$$\frac{\Delta\delta}{m-1} = -\frac{C_{L\alpha}}{\Delta} \left(1 - \frac{C_{Lq}}{2M} \right) \left[\frac{X_G - X_N}{c} + C_{L\alpha} \frac{C_{Mq}}{2M} \frac{2M}{2M - C_{Lq}} \right] (C_L)_{m=1}$$

$$\left[\frac{\Delta\delta}{m-1} = -\frac{C_{L\alpha}}{\Delta} \left(1 - \frac{C_{Lq}}{2M} \right) (C_L)_{m=1} \left[\frac{X_G - X_N}{c} + \frac{C_{Mq}}{2M - C_{Lq}} \right] \right] \Rightarrow \text{Bisogna soddisfare questo requisito durante tutto il volo.}$$

• L'influenza grossa per C_{Lq} e C_{Mq} è quella della coda.

CONTRIBUTO DELL'ALA A C_{Lq} E C_{Mq}



• Prendiamo una generica ala delta che si muove in direzione x con velocità V e velocità di beccheggio q. In un punto generico P avremo una componente di velocità cinematica che è funzione della distanza tra il punto generico e l'asse y. Quindi ci sarà una distribuzione lungo x della q_x come si vede in Figura A.

PUNTO DI MANOVRA A COMANDI BLOCCATI

X_M : Coordinata punto di Manovra

M: Manovra

↳ Nuovo punto caratteristico

• Si studia l'espressione $\frac{\Delta s}{\Delta m}$

$$\frac{\Delta s}{m-1} = -\frac{C_q}{\Delta} \left(1 - \frac{C_q}{2\mu}\right) (C_l)_{m=1} \left[\frac{X_G - X_M}{C} + \frac{C_{Mq}}{2\mu - C_q} \right] \Rightarrow \text{Dipende da } X_G, C, V$$

Ricordiamo $C_{Lq} = 2a + \bar{V}$ $C_{Mq} = -2a + \bar{V} \frac{p'_c}{p}$ $l_t \Rightarrow \text{Distanza } C_G - (aC)_{0.1}$

1^a Approssimazione $\Rightarrow C_{Mq}, C_{Lq} = f(X_G)$

Ci sarà un valore di X_G per cui $\frac{\Delta s}{m-1} = 0$ e lo ricaviamo annullando la quadra della relazione precedente.

$$\frac{X_M}{C} = \left(\frac{X_G}{C}\right)_{\frac{\Delta s}{\Delta m} = 0} = \frac{X_M}{C} - \frac{C_{Mq}}{2\mu - C_q}$$

Abbiamo detto che dev'essere $\frac{ds}{dm} < 0$

La condizione LIMITE è $\frac{ds}{dm} = 0$ e vale quando $X_G \equiv X_M$

Solo se $X_G < X_M \Rightarrow \frac{ds}{dm} < 0$

• Se è soddisfatta la condizione di stabilità statica è soddisfatta $\frac{ds}{dm} < 0$.

$$X_G < X_M \Rightarrow X_G < X_M \quad \left(\frac{ds}{dm} < 0\right)$$

• Adesso sostituisco la relazione di $\frac{X_M}{C}$ all'interno di $\frac{\Delta s}{m-1}$ e trovo

$$\frac{ds}{dm} = -\frac{C_{Lq}}{\Delta} \left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right) (C_l)_{m=1} \frac{X_G - X_M}{C}$$

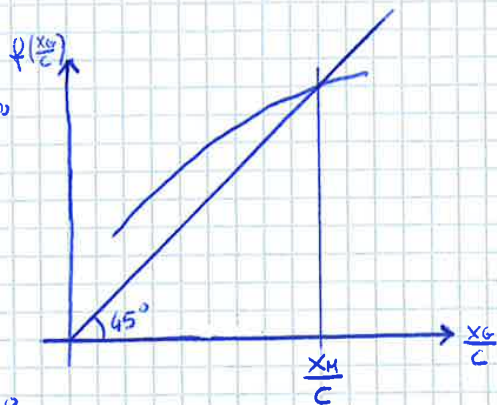
2^a Approssimazione $\Rightarrow C_{Mq}, C_{Lq} = f(X_G)$

Definisco $f\left(\frac{X_G}{C}\right) = \frac{X_M}{C} - \frac{C_{Mq}}{2\mu - C_q} \Rightarrow$ Eguagliando a zero la quadra

X_M è fisso mentre C_{Mq} e C_{Lq} variano col X_G

$$\frac{X_G}{C} = f\left(\frac{X_G}{C}\right)$$

Trovo $\frac{X_M}{C}$ quando la funzione è uguale a $\frac{X_G}{C}$, ovvero quando incontra la retta a 45°.



• Dividiamo anche in questo caso per $m-1$

$$\frac{\Delta d}{m-1} = -\frac{1}{a_x} \left[c_{L5} \frac{\Delta S}{m-1} - (c_L)_{m=1} \underbrace{\frac{c_{Lq} \hat{q}}{m-1}}_{\frac{c_{Lq} (c_L)_{m=1} (m-1)}{2\mu (m-1)}} \right]$$

$$\frac{\Delta d}{m-1} = -\frac{1}{c_{L\alpha}} \left[c_{L5} \frac{\Delta S}{m-1} + (c_L)_{m=1} \frac{c_{Lq}}{2\mu} (c_L)_{m=1} \right]$$

• Sostituendo tutto ottengo

$$\frac{\Delta C_H}{m-1} = -\frac{C_{Hx}}{C_{L\alpha}} \left[c_{L5} \frac{\Delta S}{m-1} + (c_L)_{m=1} \frac{c_{Lq}}{2\mu} - (c_L)_{m=1} \right] + b_2 \frac{\Delta S}{m-1} + C_{Hq} \frac{(c_L)_{m=1}}{2\mu}$$

$$\frac{\Delta C_H}{m-1} = \frac{1}{2\mu c_{L\alpha}} \left[(2\mu - c_{Lq}) C_{Hx} + C_{Hq} c_{L\alpha} \right] (c_L)_{m=1} + \left(b_2 - \frac{C_{Hx} c_{L5}}{c_{L\alpha}} \right) \frac{\Delta S}{m-1}$$

isolata la parte che non dipende da $\frac{\Delta S}{m-1}$

• A questo punto ricordo il coefficiente di portanza a comandi liberi:

$$c'_x = a' = c_{Lx} - \frac{C_{Hx} c_{L5}}{b_2}$$

e riscrivo:

$$\frac{\Delta C_H}{m-1} = \frac{1}{2\mu c_{L\alpha}} \left[(2\mu - c_{Lq}) C_{Hx} + C_{Hq} c_{L\alpha} \right] (c_L)_{m=1} + a' \frac{b_2}{c_{L\alpha}} \frac{\Delta S}{m-1}$$

Ricordiamo:

$$C_{Hq} = 2b_2 \frac{\rho c}{c} = f\left(\frac{x_G}{c}\right)$$

• A questo punto posso ricavare il punto di manovra a comandi liberi

PUNTO DI MANOVRA A COMANDI LIBERI

• 1^a Approssimazione $\Rightarrow c_{Lq}, C_{Hq}, C_{Hx} \neq f\left(\frac{x_G}{c}\right)$

$$\frac{\Delta S}{m-1} = -\frac{c_{L\alpha}}{\Delta} \left(1 - \frac{c_{Lq}}{2\mu} \right) (c_L)_{m=1} \frac{x_G - x_M}{c}$$

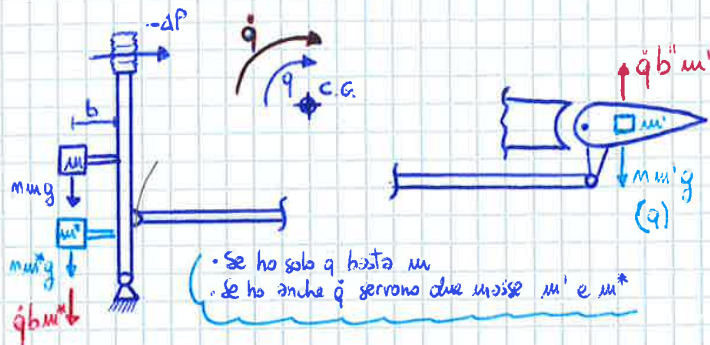
$$\frac{\Delta C_H}{m-1} = (c_L)_{m=1} \left\{ \left[\frac{C_{Hx}}{c_{L\alpha}} \left(1 - \frac{c_{Lq}}{2\mu} \right) + \frac{C_{Hq}}{2\mu} \right] - \frac{a' b_2}{\Delta} \left(1 - \frac{c_{Lq}}{2\mu} \right) \frac{x_G - x_M}{c} \right\}$$

• A questo punto il valore di x_G per cui $\frac{\Delta C_H}{m-1} = 0$ lo trovo annullando la graffa

$$\frac{C_{Hx}}{c_{L\alpha}} + \frac{C_{Hq}}{2\mu c_{Lq}} = \frac{a' b_2}{\Delta} \frac{x_G - x_M}{c}$$

■ Artificio per soddisfare $\frac{dP}{dn}$ voluto

- È quasi impossibile per un velivolo a trasmissione meccanica reversibile che non si debbano fare artifici.
- L'artificio classico è quello di aggiungere masse in certi punti della trasmissione stessa.



• La situazione è quella in cui ho q che non mi permette di avere il $\frac{dP}{dn}$ voluto. Metto allora una massa m che determina uno sforzo di barra.

• Se ho solo q basta m
 • Se ho anche q servono due masse m' e m^*

- Il problema sorge quando nel moto vario non c'è solo q , ma anche \dot{q} . In questa situazione, per effetto di \dot{q} , a seconda di dove stanno le masse (davanti o dietro), si aggiungono ulteriori componenti per effetto del prodotto tra \dot{q} e il braccio. Il trucco è mettere due masse. Aggiungo quindi m' . Il vantaggio di avere due masse è che avrò due forze opposte che si equilibrano.

Se ho solo q aumento lo sforzo di barra perché ho comunque m , ma quando ho anche \dot{q} allora annulla il suo effetto con m' ed m^*

- In precedenza avevamo scritto il $\frac{\Delta C_H}{\Delta n}$ nella seguente forma

$$\frac{\Delta C_H}{n-1} = \frac{1}{2\mu C_{L\alpha}} \left[(2\mu - C_{Lq}) C_{H\alpha} + C_{Lq} C_{L\alpha} \right] (C_L)_{m=1} + \frac{a'b_2}{C_{L\alpha}} \frac{\Delta S}{n-1}$$

- Poi avevamo ricavato $\frac{\Delta S}{n-1}$ e una funzione di $\frac{x_G}{c}$ per trovare il punto di manovra a cavandi bloccati.

$$f\left(\frac{x_G}{c}\right) = \frac{x_N}{c} - \frac{C_{Hq}}{2\mu - C_{Lq}} \rightarrow \text{La dipendenza è data da } C_{Hq} \text{ e } C_{Lq} \text{ che sappiamo dipendere dal baricentro.}$$

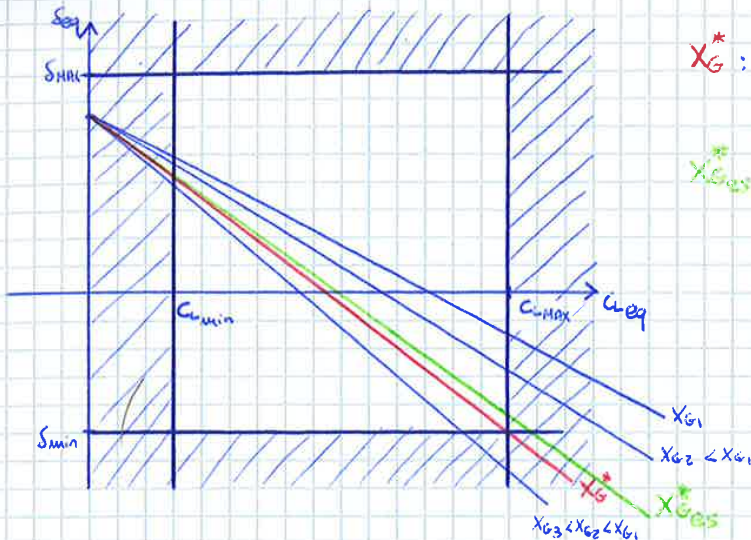
- Allora facendo alcuni passaggi troviamo che

$$\frac{\Delta C_H}{n-1} = (C_L)_{m=1} \left\{ \left[\left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right) \frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}} + \frac{C_{Hq}}{2\mu} - \frac{a'b_2}{\Delta} \left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right) \left(\frac{x_G}{c} - f\left(\frac{x_G}{c}\right)\right) \right] \right\}$$

- Saltando un po' di passaggi si arriva a

$$\frac{\Delta C_H}{n-1} = -\frac{a'b_2}{\Delta} \left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right) (C_L)_{m=1} \left[\frac{x_G}{c} - f\left(\frac{x_G}{c}\right) - \frac{\Delta}{a'b_2} \left(\frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}} + \frac{C_{Hq}}{2\mu - C_{Lq}}\right) \right]$$

• Quindi andiamo a prendere il solito diagramma $S_{eq}(C)$

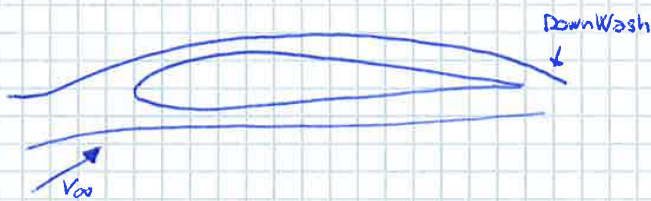


X_G^* : Posizione limite anteriore in volo libero ovvero senza effetto suolo

$X_G^*_{ES}$: Posizione limite anteriore con EFFETTO SUOLO

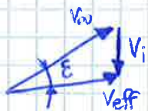
⇓
Tutto sommato resta una situazione favorevole anche se X_G^* è migliore. Non va verificato anche l'effetto suolo in progettazione.

■ Effetto Suolo



• La presenza dell'Effetto Suolo, ovvero la vicinanza al suolo, comporta una riduzione dell'angolo di DownWash e quindi di Velocità Indotta.

• Vediamo bene la situazione



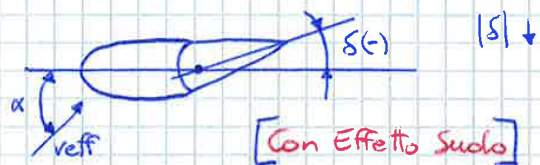
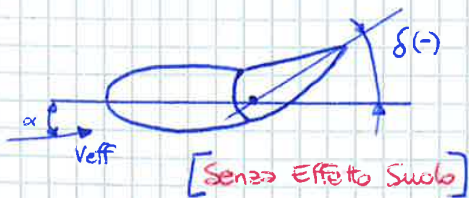
⇒ La Velocità Indotta si compone con la Velocità che arriva da infinito a monte per dare la Velocità effettiva. ϵ è l'angolo di DownWash.

• Quindi se diminuisce V_i diminuisce anche ϵ !

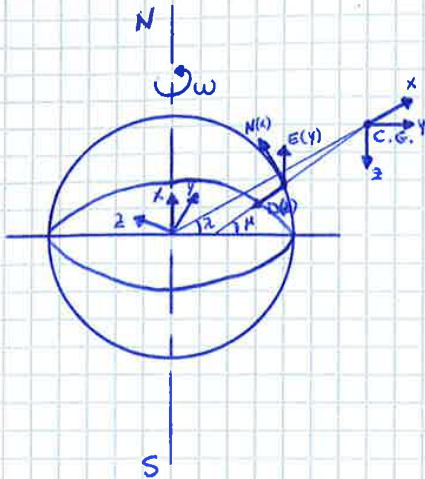
Allora se α_t ha la seguente espressione

$$\alpha_t = \alpha_{wb} - i_{wb} - \epsilon + i_t + \gamma \delta$$

possiamo dire che α_t AUMENTA con l'effetto suolo. ⇒ Di conseguenza il δ necessario diminuisce



MOTO VARIO DEL VELIVOLO



- Moto vario significa che cominceremo a considerare l'inerzia nelle equazioni di equilibrio
- Dal baricentro traccio la perpendicolare alla superficie terrestre e immagino un piano tangente su cui giacciono tre direzioni. **NED** = North-East-Down
- λ e μ non coincidono perché la Terra non è perfettamente sferica
- Dal baricentro del velivolo gli assi sono anche chiamati **ABC** = Aircraft Body Coordinate

- Dal centro della Terra, invece, abbiamo il sistema **ECI** = Earth-Centered-Inertial in cui y e z giacciono sul piano equatoriale e x giace sull'asse della Terra.
- Quello che dobbiamo fare è scrivere le equazioni del moto del corpo rigido (Velivolo) rispetto al riferimento **NED** che però deve essere inerziale.
- Noi assumeremo **NED inerziale**, ma non lo è perché è presente:
 - Rotazione Terrestre ($T = 24 \text{ h}$)
 - Rotazione attorno al Sole ($T = 365 \text{ giorni}$)
 - Nutazione (Oscillazione con semiasse $19''$ e $14''$) ($T = 18 \text{ anni e } 9 \text{ mesi}$)
 - Precessione ($T = 26000 \text{ anni}$)
 - Sistema Solare si muove nella Galassia
 - Movimento della Galassia
- Il fatto che ci sia il moto rotatorio terrestre e la superficie sferica comporta che ci siano delle accelerazioni aggiuntive da considerare per capire se siano trascurabili o meno. Dobbiamo anche considerare che la quota massima raggiungibile è di circa 20 km quando il raggio della terra è 6378 km sul piano equatoriale.

1 Accelerazione dovuta alla rotazione terrestre

$$a_c = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \right)^2 \cdot 6,4 \cdot 10^6 = 0,033 \text{ m/s}^2$$

$$\frac{a_c}{g} = \frac{1}{300} \Rightarrow \text{Ordine di grandezza rispetto alla gravità}$$

- Per studiare il Moto Vario del Velivolo Faremo una suddivisione

Moto Vario $\left\{ \begin{array}{l} \text{Moto Longitudinale (3 Gradi di Libertà Attivi)} \\ \text{Moto Latero-direzionale (3 Gradi di Libertà Attivi)} \end{array} \right.$

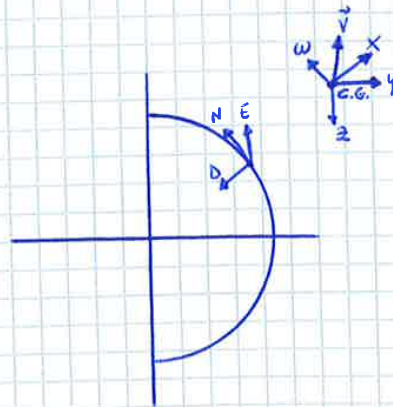
Moto Longitudinale: \vec{V} contenuto in $x-z$ quindi i GDL sono V, α, θ

Moto Latero-Direzionale: \vec{V} Fuori da $x-z$ quindi i GDL sono β, ψ, φ

- Prima di proseguire torniamo ai sistemi di riferimento per comprendere meglio gli Angoli di Eulero.

■ Riferimento NED

- \vec{P} = Vettore posizione del c.g. $[N, E, D]^T$
- $\dot{\vec{P}}$ = Vettore velocità del c.g. $[\dot{N}, \dot{E}, \dot{D}]^T$
- g = Accelerazione di gravità $[0, 0, g]^T$
- B_B = Matrice di Rotazione da NED ad ABC
- ↳ Serve a far coincidere NED e ABC



■ Riferimento ABC

- \vec{V}_B = Vettore velocità relativa di ABC rispetto a NED = $\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$
- $\vec{\omega}_B$ = Vettore velocità di rotazione di ABC rispetto a NED = $\begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix}$
- \vec{F}_B = Vettore delle Forze applicate
- \vec{T}_B = Vettore dei momenti applicati

- Ora dobbiamo ricavare la matrice di rotazione B_B

■ Matrice di Rotazione B_B

- Per comprendere meglio questi angoli che determinano la posizione del velivolo rispetto al riferimento inerziale adesso andiamo a scrivere le relazioni che mi permettono di riportare le grandezze a riferimento inerziale.

- L'operazione da fare è far coincidere ABC con NED attraverso una successione di operazioni. È importante l'ordine!

- ① Rotazione attorno a z_{NED} di un angolo $\psi > 0$ in modo che il rif. body diventi (x_1, y_1, z_1)
- ② Rotazione attorno a y_1 di un angolo $\theta > 0$ in modo che il rif. body diventi (x_2, y_1, z_2)
- ③ Rotazione attorno a x_2 di un angolo $\varphi > 0$ in modo che il rif. body diventi (x_3, y_2, z_3)

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO DINAMICO

(Corpo rigido ABC con riferimento sistema inerziale NED)

$$\vec{F}_{(a)} + \vec{F}_{(v)} + \vec{F}_{(i)} = 0 \quad \Rightarrow \text{Eq. delle Forze}$$

$$\vec{M}_{(a)} + \vec{M}_{(v)} + \vec{M}_{(i)} = 0 \quad \Rightarrow \text{Eq. dei Momenti}$$

$$\vec{F}_{(i)} = -\frac{d\vec{Q}}{dt} \quad \vec{Q}: \text{Quantità di Moto}$$

$$\vec{M}_{(i)} = -\frac{d\vec{K}}{dt} - \vec{v} \wedge \vec{Q}$$

\vec{K} : Momento della Q.d.M.

\vec{v} : Velocità del polo rispetto al quale si fa il momento delle forze
(Se il polo coincide con C.G. $\Rightarrow \vec{v} \wedge \vec{Q} = 0$)

• Ci portiamo nel caso in cui il polo che consideriamo coincide col C.G. quindi

$$\vec{F}_{(v)} = 0 \quad ; \quad \vec{M}_{(v)} = 0$$

$$\vec{F}_{(a)} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

$$\vec{M}_{(a)} = \frac{d\vec{K}}{dt}$$

• Con la semplificazione del piano di simmetria i momenti centrifughi si annullano (2su3) e posso scrivere

$$\begin{cases} F_x = m [\dot{u} + (q\dot{w} - r\dot{v})] \\ F_y = m [\dot{v} + (r\dot{u} - p\dot{w})] \\ F_z = m [\dot{w} + (p\dot{v} - q\dot{u})] \end{cases}$$

• A primo membro abbiamo le forze attive, ovvero propulsione e forze aerodinamiche

• È importante sapere il sistema di riferimento proprio per esplicitare le forze attive e i relativi momenti.

$$\begin{cases} L = \dot{p} J_x - \dot{r} J_{xz} - pq J_{xz} + qr (J_z - J_y) \\ M = \dot{q} J_y - \dot{p} r (J_x - J_z) - (r^2 - p^2) J_{xz} \\ N = \dot{r} J_z - \dot{p} J_{xz} + pq (J_y - J_x) + qr J_{xz} \end{cases}$$

• Questi sono i 6 GDL senza semplificazioni

• Dovremo poi esplicitare anche i primi membri.

• Se ho il piano di simmetria ma non c'è la simmetria di masse ho che $J_{xy} \neq 0$, $J_{yz} \neq 0$, $J_{xz} \neq 0$ quindi nelle equazioni dei momenti devo aggiungere dei termini

$$\begin{cases} L = \dot{p} J_x - \dot{r} J_{xz} - pq J_{xz} + qr (J_z - J_y) - J_{yz} (q^2 - r^2) - J_{xy} (\dot{q} - r\dot{p}) \\ M = \dot{q} J_y - \dot{p} r (J_x - J_z) - (r^2 - p^2) J_{xz} - J_{xy} (\dot{p} + q\dot{r}) - J_{yz} (\dot{r} - p\dot{q}) \\ N = \dot{r} J_z - \dot{p} J_{xz} + pq (J_y - J_x) + qr J_{xz} - J_{xy} (p^2 - q^2) - J_{yz} (\dot{q} + r\dot{p}) \end{cases}$$

• Se gli assi sono assi principali d'inerzia si annulla il J_{xz}

• Riscrivo e linearizzo anche l'equazione dei momenti:

$$\begin{cases} L = \dot{p} \delta x - \dot{r} \delta x_2 - p q \delta x_2 + q r (\delta z - \delta y) \\ M = \dot{q} \delta y - p r (\delta x - \delta z) - (r^2 - p^2) \delta x_2 \\ N = \dot{r} \delta z - \dot{p} \delta x_2 + p q (\delta y - \delta x) + q r \delta x_2 \end{cases}$$

• Alla fine ottengo il seguente sistema linearizzato

$$\begin{cases} F_x \approx m (\Delta \dot{u} + q w \omega_1) \\ F_y \approx m (\dot{v} + r \omega_1 q - p w \omega_1) \\ F_z \approx m (\Delta \dot{w} - q u \omega_1) \\ L \approx \dot{p} \delta x - \dot{r} \delta x_2 \\ M \approx \dot{q} \delta y \\ N \approx \dot{r} \delta z - \dot{p} \delta x_2 \end{cases}$$

• A questo punto possiamo procedere alla **separazione del moto**

- Moto Longitudinale: 3 Gradi di Libertà (M, F_x, F_z)
3 Variabili (u, w, q)

- Moto Latero-Direzionale: 3 Gradi di Libertà (L, N, F_y)
3 Variabili (v, r, p)

Longitudinale $\begin{cases} F_x = m (\Delta \dot{u} + q w \omega_1) + q \Delta w \\ F_z = m (\Delta \dot{w} - q u \omega_1) - q \Delta u \\ M = \dot{q} \delta y \end{cases}$

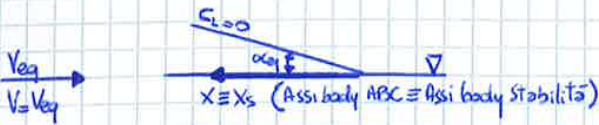
• Se le perturbazioni non sono piccole devo aggiungere i termini in nero

Latero-Direzionale $\begin{cases} F_y = m (\dot{v} + r \omega_1 q - p w \omega_1) \\ L = \dot{p} \delta x - \dot{r} \delta x_2 \\ N = \dot{r} \delta z - \dot{p} \delta x_2 \end{cases}$

• Linearizzando abbiamo tolto i termini che non entrano col moto Longitudinale. Quindi potevo separare il moto Longitudinale anche **SENZA** linearizzazione!

• Per separare il moto latero-direzionale, invece, è necessario linearizzare.

[Situazione Iniziale]



[Situazione Generica]

- Scriviamo le relazioni per lo schema affianco

$$\gamma + \alpha = \theta + \parallel$$



- Differenzio

$$d\theta = d\gamma + d\alpha$$

$$\Delta\gamma = \Delta\theta - \Delta\alpha$$

- Se consideriamo come condizione iniziale il moto rettilineo uniforme orizzontale

$$\gamma = \gamma_{eq} + \Delta\gamma = \Delta\gamma$$

→ = 0 perché orizzontale

$$\theta = \theta_{eq} + \Delta\theta = \Delta\theta$$

$$\alpha = \alpha_{eq} + \Delta\alpha \Rightarrow \Delta\alpha = \alpha - \alpha_{eq}$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\theta} - \dot{\alpha} \Rightarrow \text{Derivando ottengo } \dot{\gamma} = \dot{\theta} - \dot{\alpha} = 0 - \dot{\alpha}$$

- Se invece considero condizioni di volo rettilineo uniforme non orizzontale

$$\gamma - \gamma_{eq} = \theta - \theta_{eq} - \Delta\alpha \Rightarrow \text{Derivando ottengo } \dot{\gamma} = \dot{\theta} - \dot{\alpha} \quad (\text{La stessa cosa})$$

La variazione di γ è legata a $\theta - \alpha$.

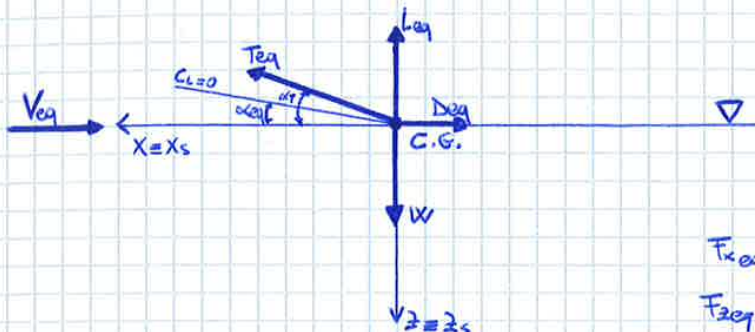
- Se voglio solo variazione di α faccio ondere il profilo su e giù, non c'è beccheggio.



La velocità si compone con le componenti perpendicolari (su o giù). Quindi si ha variazione solo di α . Ho solo $\dot{\alpha}$ perché non ci sono variazioni di beccheggio.

- Adesso andremo a schematizzare la situazione nelle condizioni iniziali (eq) e nelle condizioni generiche.

[Condizioni Iniziali]



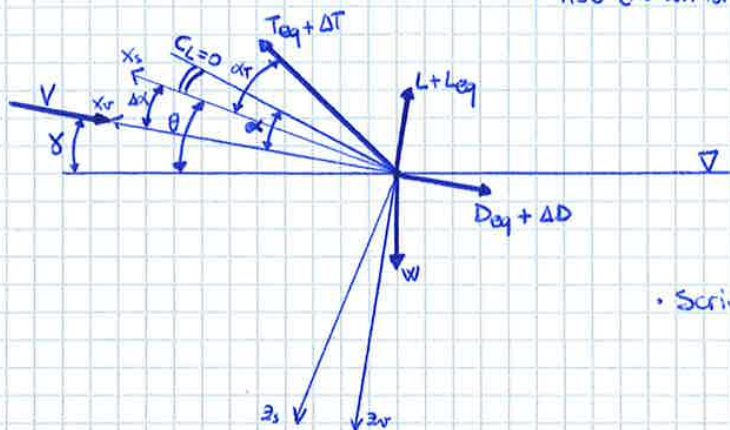
- Supponiamo volo orizzontale per avere lo schema più semplice

- Siamo in condizioni di EQUILIBRIO quindi $M_{eq} = 0$.

$$F_{x_{eq}} = T_{eq} \cdot \cos \alpha_T - D_{eq} = 0$$

$$F_{z_{eq}} = -T_{eq} \cdot \sin \alpha_T - L_{eq} + W = 0$$

[Condizioni Generiche]



$M=0$ (Ma con forze d'inerzia)

$\sin \Delta \alpha \approx \Delta \alpha$
 $\cos \Delta \alpha \approx 1$ } Variazioni molto piccole

- Scriverò le equazioni in assi vento

- Scriviamo F_x per la situazione generica

$$F_x = T_{eq} \cos \alpha_T \cos \Delta \alpha + \Delta T \cos \alpha_T - T_{eq} \sin \alpha_T \Delta \alpha - \Delta T \sin \alpha_T \Delta \alpha - D_{eq} - \Delta D - W \gamma = m \dot{V}$$

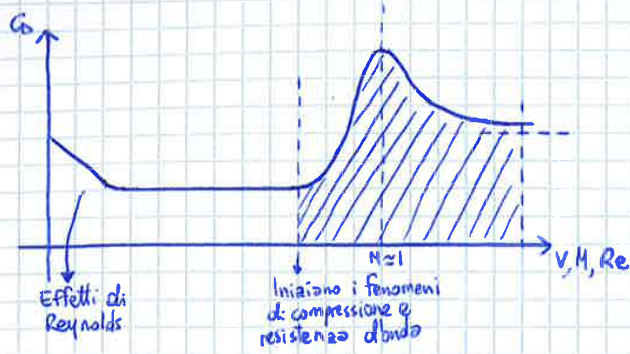
$$\Delta F_x = F_x - F_{x_{eq}} = \Delta T \cos \alpha_T - T_{eq} \sin \alpha_T \Delta \alpha - \Delta T \sin \alpha_T \Delta \alpha - \Delta D - W \gamma = m \dot{V} \Rightarrow \text{I Equazione}$$

- Scriviamo F_z per la situazione generica

$$F_z = -T_{eq} \sin \alpha_T \cos \Delta \alpha - \Delta T \sin \alpha_T \cos \Delta \alpha - T_{eq} \Delta \alpha \cos \alpha_T - \Delta T \Delta \alpha \cos \alpha_T - L_{eq} - \Delta L - W = -m V_{eq} \dot{\gamma} + m L_{eq} \dot{\alpha}$$

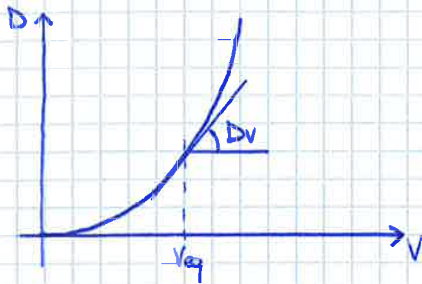
$$\Delta F_z = F_z - F_{z_{eq}} = -\Delta T \sin \alpha_T - T_{eq} \cos \alpha_T \Delta \alpha - \Delta L = -m V_{eq} \dot{\gamma} + m V_{eq} \dot{\alpha} \Rightarrow \text{II Equazione}$$

$$-W \gamma = -W (\theta - \alpha)$$



- Sicuramente nella zona tratteggiata il $\frac{\partial C_D}{\partial V} \neq 0$
- I fenomeni di compressione iniziano già a $M \approx 0,9$, infatti sappiamo che le onde d'urto nascono a M sonic.
- In campo subsonico $\frac{\partial C_D}{\partial V} = 0$ quindi c'è solo C_{Dsq} .

• Potrei invece avere la curva $D-V$ che è più comoda.



- Con questa curva è facile perché la pendenza corrisponde già a $D_V = \frac{\partial D}{\partial V}$

[D_{α}]

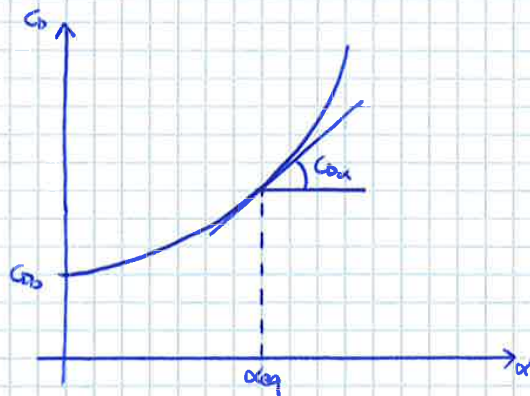
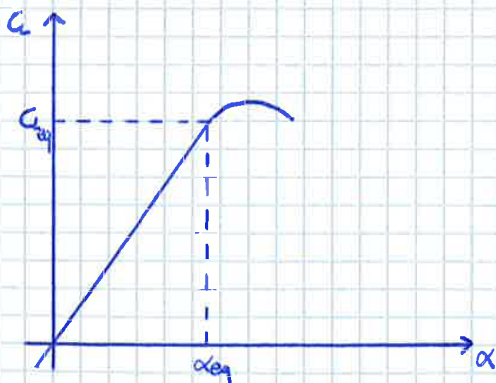
$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi A e} = C_{D0} + \frac{\rho^2 \alpha^2}{\pi A e} \Rightarrow \text{Polare Approssimata}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha} = D_{\alpha} = C_{D\alpha} \frac{1}{c} \rho_{eq} V_{eq}^2 S$$

$$\text{con } (C_{D\alpha})_{eq} = \frac{2 \alpha_{eq}^2}{\pi A e}$$

$$C_{D_{eq}} = \frac{2 W/S}{\rho_{eq} V_{eq}^2} \Rightarrow \alpha_{eq} = \frac{C_{D_{eq}} a}{c}$$

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{b}{c} \quad (c \Rightarrow \text{Corda di riferimento} = C_{m_{ref}}) \\ \lambda &= \frac{b}{C_{m_{ref}}} \quad (C_{m_{ref}}: \text{Corda media geometrica}) \\ e \pi \lambda &= A e \pi \end{aligned} \right.$$



• Dal $C_{D_{eq}}$ ricavo α_{eq} con il quale posso trovare $C_{D\alpha}$

M_q

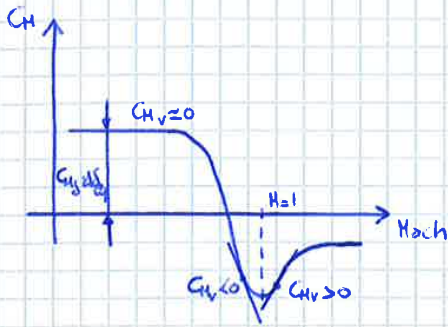
$$M_q = \frac{\partial M}{\partial q} = \frac{\partial C_M}{\partial q} S c \frac{1}{2} \rho q V_{eq}^2$$

$$\frac{\partial C_M}{\partial q} \neq C_{Mq} = \frac{\partial C_M}{\partial q}$$

(*) Approfondiamo il C_{Mv}

All'aumentare del Mach, aumenta la velocità e diminuisce l'incidenza α .

Se α diminuisce C_{Mv} diminuisce (se $C_{Mv} < 0$)

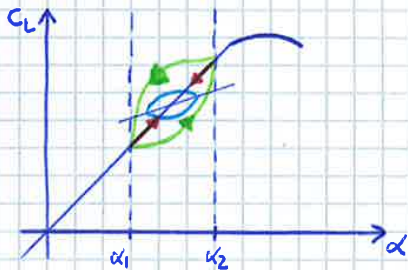


- Per bassi Mach $C_{Mv} \approx 0$. Avvicinandosi al transonico diventa negativo. Per velocità supersoniche diventa positivo per poi tornare ≈ 0 .
- La coordinata $C_{Mq} \cdot \Delta \delta_{eq}$ mi dice quanto deve deflettersi l'equilibratore per annullare il C_{Mv} . Quindi se C_{Mv} diminuisce (quindi negativo) diminuisce anche $|\Delta \delta_{eq}|$.

• In ogni caso essendo una derivata debole posso considerare $M_v \approx 0$.

DERIVATE DI L e M IN α

• Vediamo come varia la curva $C_L - \alpha$ quando si oscilla tra α_1 e α_2



- ← La linea continua è la variazione lenta di α $\alpha \approx 0$
- ↻ Variazione rapida di α . A salire faccio una strada, a scendere un'altra. $\alpha \neq 0$
- ↻ Variazione rapida di α senza arresto agli estremi α_1 e α_2 .

- Sull'ala isolata non abbiamo effetti di α quindi sono trascurabili questi effetti di isteresi dovuti all' α . In genere $\alpha \approx 10^\circ$
- Sul sistema ab+coda si sentono gli effetti di α che sono importanti sul C_{Mx} , mentre non sono sempre importanti sul C_{Lx} . Il motivo è che α si sente tramite effetto di ritardo di DownWash sulla coda. Sul C_{Lx} non è così importante perché in genere il contributo della coda alla portanza è trascurabile.

• E per la Terza avevamo scritto $M_V \Delta V + M_\alpha \Delta \alpha + M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M_q \cdot q = J_y \dot{q}$

$$\textcircled{III} \quad \dot{q} = \frac{1}{J_y} \left[\left(M_V - M_{\dot{\alpha}} \frac{L_v + T_v \sin \alpha_T}{u V_{eq} + L_{\dot{\alpha}}} \right) \Delta V + \left(M_{\alpha} - M_{\dot{\alpha}} \frac{L_\alpha + T_{eq} \cos \alpha_T}{u V_{eq} + L_{\dot{\alpha}}} \right) \Delta \alpha + \left(M_q + M_{\dot{\alpha}} \frac{u V_{eq} - L_q}{u V_{eq} + L_{\dot{\alpha}}} \right) q \right]$$

• Queste sono le forme dimensionalizzate. Ora troviamo le forme adimensionalizzate.
Ne ricaviamo una, le altre le scriviamo direttamente.

Tempo Aerodinamico $\Rightarrow t^* = \frac{c/2}{V_{eq}}$

Prendiamo la \textcircled{I} equazione

$$\frac{\frac{m \dot{V}}{\frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S}}{\frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S}} = \frac{2m}{\frac{1}{2} \rho_{eq} S c} \frac{\overset{\text{Adimensional}}{c}}{V_{eq}} \frac{dV}{dt} \frac{1}{2V_{eq}} = 2\mu \frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} \quad \Rightarrow \text{1° Membro}$$

Adimensionalizzato la massa Adimensionalizzato t

Passiamo al secondo membro termine per termine.

$$\begin{aligned} \cdot) \quad T &= C_T \frac{1}{2} \rho V^2 S ; \quad T_v = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_{eq} = S \frac{1}{2} \rho_{eq} \left(\frac{\partial C_T}{\partial V} V_{eq}^2 + 2 C_{T_{eq}} V_{eq} \right) \\ &\Rightarrow T_v = S \frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq} (C_T + 2 C_{T_{eq}}) \end{aligned}$$

$$\cdot\cdot) \quad -D_v = S \frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq} (C_{D_v} + 2 C_{D_{eq}})$$

$$\frac{(T_v \cos \alpha_T - D_v) \Delta V}{\frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S} = \Delta \hat{V} \left[(C_{T_v} + 2 C_{T_{eq}}) \cos \alpha_T - (C_{D_v} + 2 C_{D_{eq}}) \right]$$

$$-\frac{m g}{\frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S} = C_{W_{eq}}$$

$$D_\alpha = \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha} \right)_{eq} = C_{D_\alpha} S \frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 \Rightarrow \frac{D_\alpha}{\frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S} = C_{D_\alpha}$$

$$-\frac{T_{eq} \sin \alpha_T}{\frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S} = C_{T_{eq} \sin \alpha_T} \Rightarrow \text{poiché } T_{eq} = C_{T_{eq}} \frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S$$

Quindi $\Rightarrow (m g - D_\alpha - T_{eq} \sin \alpha_T) \Delta \alpha = (C_{W_{eq}} - C_{D_\alpha} - C_{T_{eq} \sin \alpha_T}) \Delta \alpha$

$$\cdot\cdot\cdot) \quad \frac{m g \theta}{\frac{1}{2} \rho_{eq} V_{eq}^2 S} = C_{W_{eq} \theta}$$

• Quindi riscrivo tutta l'equazione \textcircled{I}

$$\left[2\mu \frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} = \left[C_{T_v} \cos \alpha_T - C_{D_v} + 2(C_{T_{eq}} \cos \alpha_T - C_{D_{eq}}) \right] \Delta \hat{V} + (C_{W_{eq}} - C_{D_\alpha}) \Delta \alpha - C_{T_{eq} \sin \alpha_T} \Delta \alpha - C_{W_{eq} \theta} \theta \right]$$

$$\begin{cases} p_1 \lambda e^{2t} + h_{11} p_1 e^{2t} + h_{12} p_2 e^{2t} + h_{14} p_3 e^{2t} = 0 \\ p_2 \lambda e^{2t} + h_{21} p_1 e^{2t} + h_{22} p_2 e^{2t} + h_{23} p_3 e^{2t} = 0 \\ p_3 \lambda e^{2t} + h_{31} p_1 e^{2t} + h_{32} p_2 e^{2t} + h_{33} p_3 e^{2t} = 0 \end{cases}$$

Divido tutto per e^{2t} e per non trovare soluzioni banali ($p_1 = p_2 = p_3 = 0$) devo annullare il determinante della matrice dei coefficienti.

$$\begin{cases} (\lambda + h_{11}) p_1 + h_{12} p_2 + h_{14} p_3 = 0 \\ h_{21} p_1 + (h_{22} + \lambda) p_2 + \lambda h_{23} p_3 = 0 \\ h_{31} p_1 + h_{32} p_2 + (\lambda^2 + h_{33} \lambda) p_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + h_{11} & h_{12} & h_{14} \\ h_{21} & \lambda + h_{22} & \lambda h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & (\lambda^2 + h_{33} \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \lambda^4 + B_1 \lambda^3 + C_1 \lambda^2 + D_1 \lambda + E_1 = 0 \quad \Rightarrow$ Eq di 4° grado perché abbiamo variabili di stato. 4 soluzioni

• Come si possono presentare le 4 soluzioni?

- 4 autovalori reali
- 2 autovalori reali e 1 coppia complessa coniugata
- 2 coppie complesse coniugate \Rightarrow In genere si mole questo

Le variabili si presenteranno come

$$\begin{aligned} \Delta \hat{V} &= p_{11} e^{\lambda_1 t} + p_{12} e^{\lambda_2 t} + p_{13} e^{\lambda_3 t} + p_{14} e^{\lambda_4 t} \\ \Delta \alpha &= p_{21} e^{\lambda_1 t} + p_{22} e^{\lambda_2 t} + p_{23} e^{\lambda_3 t} + p_{24} e^{\lambda_4 t} \\ \theta &= p_{31} e^{\lambda_1 t} + p_{32} e^{\lambda_2 t} + p_{33} e^{\lambda_3 t} + p_{34} e^{\lambda_4 t} \end{aligned}$$

- Il valore degli p_{ij} è dato dalle condizioni iniziali. Questa linearizzazione è valida anche quando il disturbo non è così piccolo (anche se la soluzione sarà un po' approssimata)
- Le variabili saranno influenzate da tutti gli autovalori. Ogni contributo si sovrappone. \Rightarrow Sovrapposizione degli effetti.

• La parte immaginaria \bar{e} è legata al periodo

$$T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\hat{b}} \cdot t^* \quad ; \quad t^* = \frac{c}{2kq} \Rightarrow b = \omega$$

Alla parte immaginaria \bar{e} è legato anche il tempo di dimezzamento

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{|\hat{a}|} t^* = \frac{\ln 2}{|\hat{a}|} = \frac{0,693}{|\hat{a}|}$$

Quindi semplicemente avendo l'autovalore ricavato dalla matrice di sistema io riesco a ricavare caratteristiche fisiche importanti: Periodo e Smorzamento.

$N_{1/2}$: Numero di cicli di dimezzamento } Li abbiamo con gli autovalori
 N_2 : Numero di cicli di raddoppio

$$N_{1/2} = \frac{t_{1/2}}{T} = \frac{\ln 2}{|\hat{a}|} \frac{b}{2\pi} = \frac{\ln 2}{|\hat{a}|} \frac{\hat{b}}{2\pi}$$

- Lo smorzamento mi dice per quanto tempo mi devo preoccupare della variazione delle variabili.
- Confrontiamo le soluzioni della dinamica longitudinale per un velivolo grande e uno piccolo.

[VELIVOLO GRANDE]

$c = 10 \text{ m}$
 $v_{eq} = 250 \text{ m/s}$
 $t^* = 0,02 \text{ s}$
 $\hat{c} = 50 \text{ t}$

[VELIVOLO PICCOLO]

$c = 1,5 \text{ m}$
 $v_{eq} = 50 \text{ m/s}$
 $t^* = 0,015 \text{ s}$
 $\hat{c} = 66,9 \text{ t}$

Corto periodo:

$$\lambda_{1,2} = \underbrace{-0,1 \cdot 10^{-1}}_{\hat{a}} \pm \underbrace{0,2 \cdot 10^{-1} i}_{\hat{b}}$$

\hat{b} è molto minore di zero
 ma non è molto piccola

Corto periodo:

$$\lambda_{1,2} = \underbrace{-0,2 \cdot 10^{-1}}_{\hat{a}} \pm \underbrace{0,6 \cdot 10^{-1} i}_{\hat{b}}$$

Moto Fugace:

$$\lambda_{3,4} = \underbrace{-0,3 \cdot 10^{-4}}_{\hat{c}} \pm \underbrace{0,6 \cdot 10^{-3} i}_{\hat{d}}$$

Moto Fugace:

$$\lambda_{3,4} = \underbrace{-0,5 \cdot 10^{-3}}_{\hat{c}} \pm \underbrace{0,1 \cdot 10^{-1} i}_{\hat{d}}$$

- Quindi posso prendere solo due equazioni, quindi prendo le prime due.
(Potero prenderne altre due e scegliere un'altra combinazione (lineare))
Scrivo le equazioni per le soluzioni, prendendo solo λ_1 per il corto periodo e λ_3 per il fujaiide.

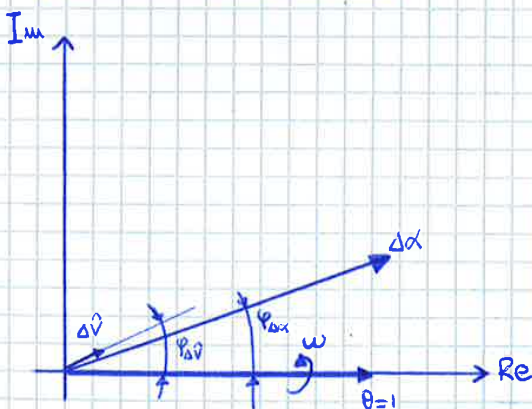
$$\begin{cases} \Delta V = \beta_1 e^{\lambda_1 t} + \beta_2 e^{\lambda_3 t} \\ \Delta \alpha = \beta_1 e^{\lambda_1 t} + \beta_2 e^{\lambda_3 t} \\ \theta = \beta_1 e^{\lambda_1 t} + \beta_2 e^{\lambda_3 t} \end{cases}$$

- Avendo diviso tutto per β_3 ho tutte soluzioni in funzione di θ (θ unitario ovviamente).
- Risolvo adesso il sistema di due equazioni con la regola di Kramer

$$\frac{\beta_1}{\beta_3} = \frac{\begin{vmatrix} -h_{11} & h_{12} \\ -h_{23}\lambda & (h_{22}+\lambda) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (h_{11}+\lambda) & h_{12} \\ h_{21} & (h_{22}+\lambda) \end{vmatrix}} = \Delta V \quad \frac{\beta_2}{\beta_3} = \frac{\begin{vmatrix} (h_{11}+\lambda) & (h_{11}+\lambda) \\ +h_{21} & -h_{23}\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (h_{11}+\lambda) & h_{12} \\ h_{21} & (h_{22}+\lambda) \end{vmatrix}} = \Delta \alpha$$

- Da tutto ciò riesco a rappresentare separatamente le variabili per fujaiide e corto periodo, fermo restando che il moto vario è la composizione dei due modi.
- Tutto ciò ci permette di trovare gli autovettori.

■ DIAGRAMMA DI ARGAND



- Possiamo rappresentare un vettore che ruota con velocità relativa alla pulsazione ω in senso antiorario perché abbiamo preso il λ_1 del corto periodo. (È la parte immaginaria che decide il senso)
- CORTO PERIODO: $\lambda_1 = a + ib$
 $\lambda_2 = a - ib$ ↻ ω

- $\theta=1$ è il valore massimo, e dobbiamo vedere gli altri come sono posizionati come fase rispetto a lui. Perché è la fase che mi dice il valore

reale della variabile. Quindi andiamo a vedere le posizioni sul grafico:

- $\Delta \alpha, \Delta \hat{V}, \theta$ sono QUASI in fase \Rightarrow Raggiungono il valore massimo più o meno mantenendosi in fase.
- $\Delta \alpha, \theta$ sono variabili importanti.
- $\Delta \hat{V}$ poco importante \Rightarrow Piccola variazione.

- Per concludere l'argomento del moto longitudinale a comandi bloccati riscriviamo la quartica:

$$\lambda^4 + B_1 \lambda^3 + C_1 \lambda^2 + D_1 \lambda + E_1 = 0$$

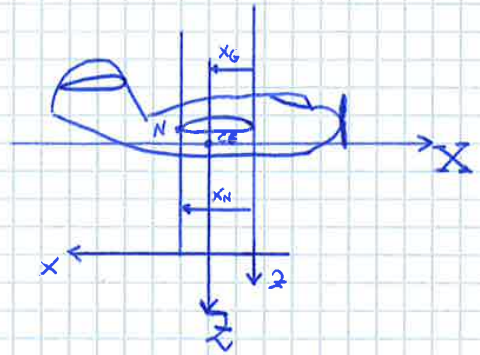
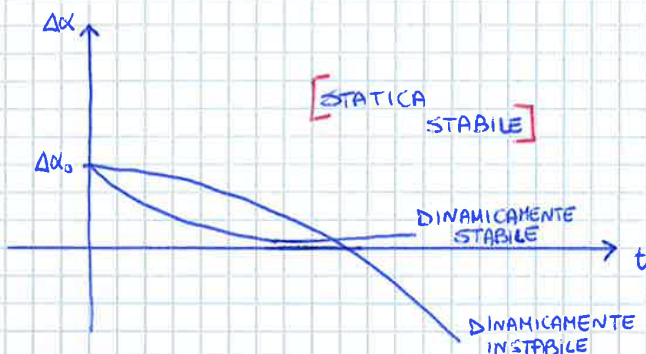
$$D_1, E_1 \ll C_1, B_1$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda^2 + B_1 \lambda + C_1)}_{\text{CORTO PERIODO}} \underbrace{\left(\lambda^2 + \frac{C_1 D_1 - B_1 E_1}{C_1} \lambda + \frac{E_1}{C_1}\right)}_{\text{FUGOIDE}} = 0$$

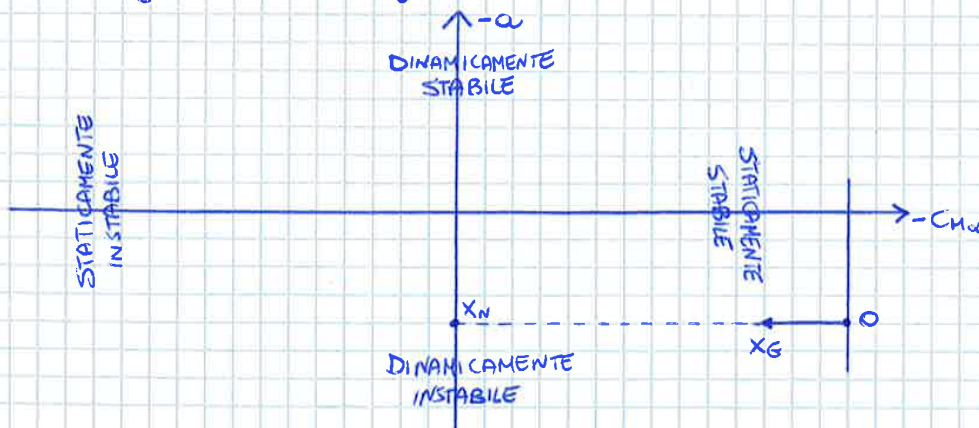
DIAGRAMMA DI STABILITÀ

Questo diagramma confronta la stabilità statica con quella dinamica

Stabilità Statica: $C_{M\alpha} = \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} = C_{L\alpha} \frac{X_G - X_N}{c} < 0$ se stabile

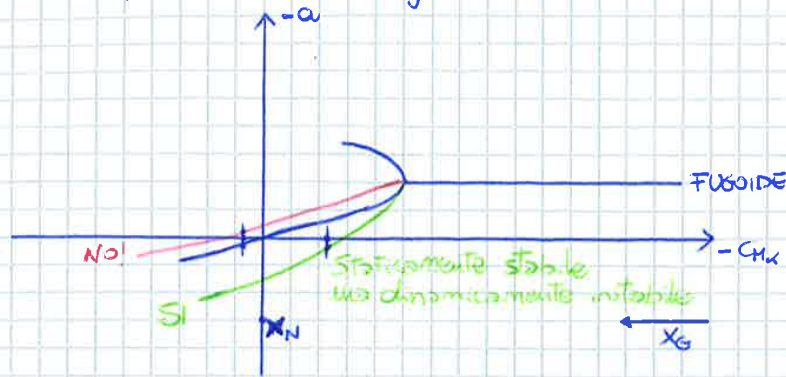


- La situazione nel diagramma è di stabilità statica, i due casi però differiscono dal fatto che una curva è anche dinamicamente stabile, l'altra no.
- La stabilità statica è ciò che succede nell'immediato, cioè un disturbo a cui dev'essere un momento che lo annulla.
- Bisogna che il punto neutro N deve essere posteriore al C.G.
- Vado a disegnare il mio diagramma di stabilità



- Sulle ordinate riporto la parte reale degli autovalori cambiata di segno, cioè $-\alpha$.
- Sulle ascisse riporto $-C_{M\alpha}$. Quindi posso riportare X_G che quando interseca l'asse delle ordinate diventa X_N .

• Analizziamo questa cosa sul diagramma di stabilità



- Il ramo ^{ROSSO} non è possibile poiché ha una situazione dinamicamente stabile ma non staticamente.
- Il ramo verde va bene perché è staticamente stabile.
- La situazione blu è una situazione al limite descritto dal 2° criterio di Routh.

2° Criterio di Routh

- Macroscopicamente la situazione nel grafico precedente è vera. Ci sono però situazioni border line come il ramo verde in cui c'è una leggera instabilità dinamica.
- Vediamo come si arriva al criterio

$$\dot{X} = AX \Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \quad \text{Matrice identità}$$

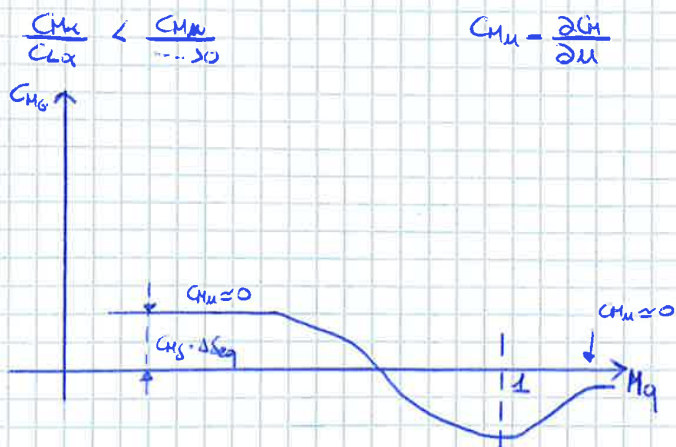
Routh ha fatto questa operazione studiando la risposta dinamica del sistema facendo variare i termini nella matrice di sistema A che dipendano dalle variabili coinvolte e andando via via a togliere importanza alla variazione delle variabili. Quindi studio la dinamica sempre più in prossimità della statica.

La stabilità statica diventa una condizione limite della stabilità dinamica.

$$CHx < 0 \xrightarrow{\text{Semplificazione}} \frac{XG - XN}{C} < 0 \Rightarrow \text{Questa è la nostra situazione limite}$$

↳ $CHx = CHx \frac{XG - XN}{C}$

Se facciamo come Routh otteniamo come situazione limite un'equazione del tipo



$$M \uparrow \rightarrow V \uparrow \Rightarrow \alpha \downarrow \quad \text{se } CHu < 0 \Rightarrow \Delta Seq \neq \text{cost} \quad |\Delta Seq| \downarrow$$

UTILIZZO DELLE CARATTERISTICHE DI RISPOSTA DINAMICA DEL SISTEMA A COMANDI BLOCCATI

- Facciamo uno studio volto a comprendere meglio la capacità del velivolo di compiere la missione.

Prima però vediamo come si è arrivati a concepire questo studio
Scriviamo il nostro sistema in forma adimensionata e compatta

$$\begin{cases} \frac{d\hat{V}}{dt} = -h_{11}\hat{V} - h_{12}\Delta\alpha - h_{14}\hat{q} \\ \frac{d\Delta\alpha}{dt} = -h_{21}\hat{V} - h_{22}\Delta\alpha - h_{23}\hat{q} \\ \frac{d\hat{q}}{dt} = -h_{31}\hat{V} - h_{32}\Delta\alpha - h_{33}\hat{q} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\theta} = -h_{43}\hat{q} \\ \ddot{x} = A\bar{x} \end{cases}$$

IPOTESI: $\Delta\hat{V}=0 \Rightarrow V=\text{cost}$

- Con questa ipotesi vanno via diversi termini, ed il sistema si riduce ad un'unica equazione differenziale del II ordine in cui le variabili sono solo α e q . Rimane solo un legame cinematico.

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Rightarrow \text{L'eq. classica del sistema massa molle}$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad \Rightarrow \text{Sistema Ridotto}$$

ω_n : Pulsazione Naturale
(Sistema non smorzato)

ζ : Smorzamento Adimensionato
 $\text{ratio} = \frac{c}{2m\omega_n}$

ζ_c : Smorzamento Critico

- Questo sistema ha proprio le caratteristiche dei modi che avevamo calcolato come soluzioni del sistema completo. Prima avevamo DUE MODI, Fugide e Corto Periodo, ora ne rimane solo uno.

Quale rimane? Rimane il corto periodo, perché abbiamo fatto l'ipotesi di $\Delta V=0$.

Fugide $\begin{cases} \Delta V, \theta \text{ Importanti} \\ \Delta\alpha \text{ Poco Importante} \end{cases}$

Corto Periodo $\begin{cases} \Delta\alpha, \theta \text{ Importanti} \\ \Delta V \text{ Poco Importante} \end{cases}$

Avevo tolto ΔV , che è importante per il fugide, ho tolto anche il fugide. Quindi $V=\text{cost}$ è una soluzione valida per tempi brevi rispetto al periodo del Fugide.

- Abbiamo capito che il concetto è che se andiamo a modificare le caratteristiche dello Short Period in termini di frequenza e smorzamento, e poi vado a vedere cosa ne pensa il pilota, riesco a dare criteri sulle caratteristiche di Short Period che posso modificare in progetto. Nascono così gli **ISO-OPINION PLOT**.

DINAMICA LONGITUDINALE A COMANDI LIBERI

- Trasmissione di comandi meccanica reversibile
- Partiamo da una condizione di volo trimmato
- Vedremo che anche in caso di comandi irreversibili (servocomando) potranno esserci situazioni che ci potranno ricondurre alla dinamica a comandi liberi.
- Ci sarà una variabile fondamentale indipendente in più, il $\Delta\delta$, cioè l'angolo dell'equilibratore. E di conseguenza ci saranno anche dei termini in più, nelle equazioni, che dipendono dal $\Delta\delta$.
- La trattazione che faremo adesso ci consente di richiamare alcune derivate aerodinamiche già conosciute e di introdurne altre che così verranno spiegate e determinate. Serviranno poi nella dinamica in generale.

Variabili Fondamentali: $\Delta V, \Delta\alpha, \theta, \Delta\delta$

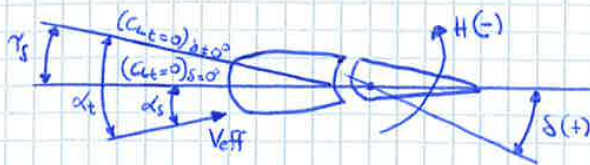
$$\bar{\dot{X}} = A \bar{X} \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\delta} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} V \\ \alpha \\ q \\ \delta \\ \theta \\ \delta \end{pmatrix}$$

- Quindi avremo 4 equazioni della dinamica e 2 della cinematica. Dovremo però aggiungere dei termini che non compaiono nel vettore di stato per avere α e q nella 4^a equazione della dinamica. La soluzione del sistema sarà una sestupla, quindi avremo 6 soluzioni.

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{V} &= -h'_{11}\Delta V - h'_{12}\Delta\alpha - h'_{14}\theta - h'_{16}\Delta\delta \Rightarrow \text{Eq. di equilibrio dinamico in direzione } x \\ &\quad \downarrow \begin{matrix} \approx 0 \\ h'_{16} \approx D_{\delta} (C_{D\delta} \approx 0) \end{matrix} \\ \dot{\alpha} &= -h'_{21}\Delta V - h'_{22}\Delta\alpha - h'_{23}q - h'_{26}\Delta\delta \Rightarrow \text{Eq. di equilibrio dinamico in direzione } z \\ &\quad \downarrow h'_{26} \approx C_{L\delta} \\ \dot{q} &= -h'_{31}\Delta V - h'_{32}\Delta\alpha - h'_{33}q - h'_{36}\Delta\delta \Rightarrow \text{Eq. di equilibrio dinamico alla rotazione attorno a } y \\ &\quad \downarrow h'_{36} \approx C_{M\delta} \\ \dot{\delta} &= \dots \Rightarrow \text{Eq. di equilibrio dinamico alla rotazione attorno all'asse di cerniera dell'equilibratore} \\ \dot{\theta} &= q \cdot h'_{53} \\ &\quad \downarrow \omega=1 \\ \dot{\delta} &= \frac{d\delta}{dt} \cdot h'_{64} \\ &\quad \downarrow \omega=1 \end{aligned} \right.$$

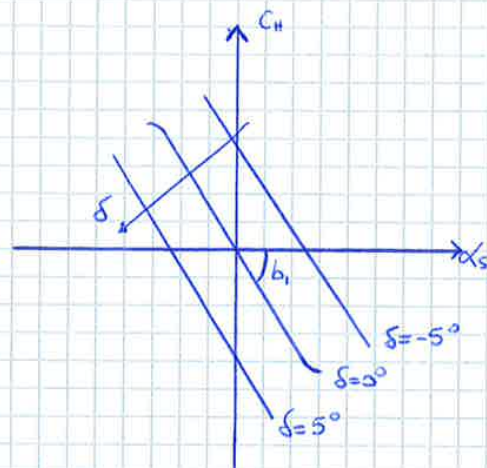
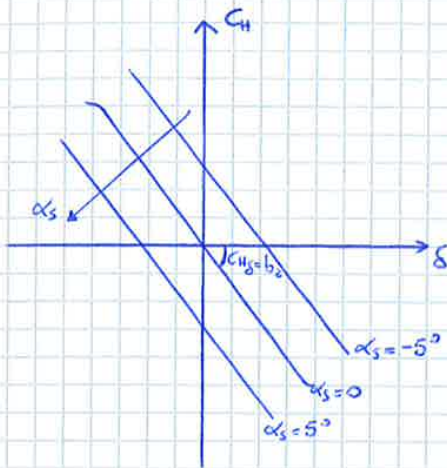
- Questo è il sistema. Dobbiamo adesso scrivere la quarta equazione

Facciamo una digressione a fondamenti di m.d.v.



$$\alpha_t = \alpha_s + \gamma_s$$

$$\gamma = \frac{\partial \alpha_t}{\partial \delta}$$



Ora torniamo alle derivate

• $H_\alpha \Rightarrow \left(\frac{\partial C_H}{\partial \alpha} \right) \neq C_{H\alpha} = \frac{\partial C_H}{\partial \alpha} = \frac{\partial C_H}{\partial \alpha} \frac{1}{t^*} \Rightarrow$ Le derivate in α sono critiche, non è semplice valutare. Possiamo trascurarla la maggior parte delle volte.

• $H_q \Rightarrow (C_{Hq}) = \frac{\partial C_H}{\partial q} \neq \frac{\partial C_H}{\partial q}$

$$C_{Hq} = 2b_1 \frac{l_t}{c} \quad \text{con } b_1 = \frac{\partial C_H}{\partial \alpha_s}$$

• $H_\delta \Rightarrow \left(\frac{\partial C_H}{\partial \delta} \right) = b_2$

• $H_\gamma \Rightarrow$ Lo vedremo meglio in seguito

• Quindi la 4^a equazione si presenta così:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{-(J_e + m_e x_e l_t^2)}_{h'_{48}} \ddot{q} + \underbrace{(m_e x_e V_{eq} + H_q)}_{h'_{43}} \dot{q} - \underbrace{(m_e x_e V_{eq} - H_\alpha)}_{h'_{47}} \dot{\alpha} + \underbrace{H_\alpha}_{h'_{42}} \Delta \alpha + \underbrace{H_\delta}_{h'_{44}} \Delta \delta = J_e \ddot{\delta} - \underbrace{H_\gamma}_{h'_{45}} \dot{\delta} - \underbrace{H_\delta}_{h'_{46}} \Delta \delta \\ + 3 \text{ equazioni della dinamica} \\ + q = \dot{\theta} ; \quad \delta = \frac{d\delta}{dt} ; \quad \alpha = \frac{d\alpha}{dt} ; \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{array} \right.$$

Soluzione Approssimata 2^a Soluzione

- La possiamo trovare considerando $V = \text{cost}$ ($\Delta V = 0$), cioè riducendo il sistema. Passa ad un sistema con 3 equazioni dinamiche più ciò che resta di cinematico. La soluzione consiste in due coppie complesse coniugate. Queste due coppie si riferiscono ad Hunting e Oscillazioni dell'equilibratore poiché dicendo che $\Delta V = 0$ ci siamo tolti il Fugoide.
- Se b_1 e b_2 sono bassi (ovvero c'è compensazione aerodinamica) peggiora il modo, nel senso che diminuisce lo smorzamento o addirittura amplifica.
- Se equilibrio la trasmissione $\begin{cases} \text{Statico} \Rightarrow \text{Peggiora} \\ \text{Dinamico} \Rightarrow \text{Utile} \end{cases}$

Determinazione di H_3

Partiamo dall'equilibratore libero $\Rightarrow q, \dot{q}, \ddot{q}, \Delta\alpha, \Delta V = 0$

$$J_e \ddot{\delta} - H_3 \dot{\delta} - H_3 \delta = 0$$

Termine Smorzante: $-\frac{H_3}{J_e}$ ($H_3 < 0$)

Termine Elastico: $-\frac{H_3}{J_e}$ ($H_3 < 0$)

Allora l'equazione è del tipo:

$$\ddot{\delta} + 2\zeta \omega_n \dot{\delta} + \omega_n^2 \delta = 0 \quad (\text{Se l'oscillazione fosse stata forzata sarebbe stato } = f(t))$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad \begin{matrix} \text{Oscillazione libera} \end{matrix}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \text{PULSAZIONE NATURALE}$$

$$r_c = 2\sqrt{mk} \Rightarrow \text{SMORZAMENTO CRITICO}$$

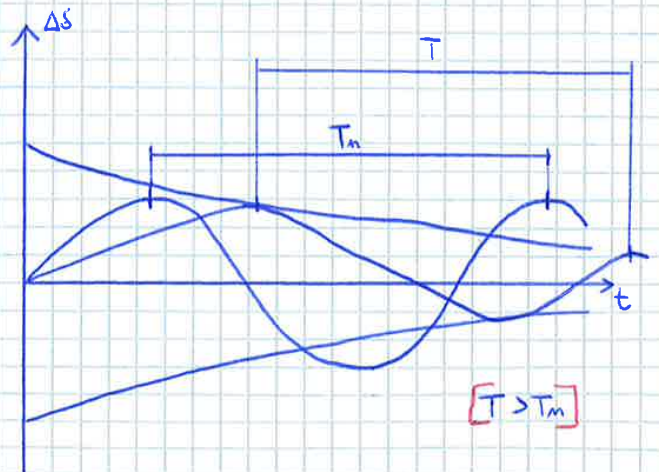
$$\zeta = \frac{r}{r_c} = \frac{r}{2\sqrt{mk}} \Rightarrow \text{SMORZAMENTO ADIMENSIONATO}$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{poiché} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{H_3}{J_e} - \frac{H_3^2}{4J_e^2}}$$

Il periodo è $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$

$$\omega_n = \sqrt{-\frac{H_3}{J_e}} \Rightarrow \text{Pulsazione naturale}$$

$$\omega \Rightarrow \zeta = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \Rightarrow H_3 = -2\zeta \omega_n J_e$$



• Allora tolgo M e metto m e m' e rifaccio gli equilibramenti:

[EQUILIBRAMENTO STATICO] $\Rightarrow m \cdot \text{braccio} + m' x_e - m x_e = 0$

[EQUILIBRAMENTO DINAMICO] $\Rightarrow -J_e \ddot{q} + m e l_t'' \dot{q} x_e + m \dot{q} x \cdot \text{braccio} - m' \dot{q} x' x_e' = 0$
 + termini con a_2 + termini con δ

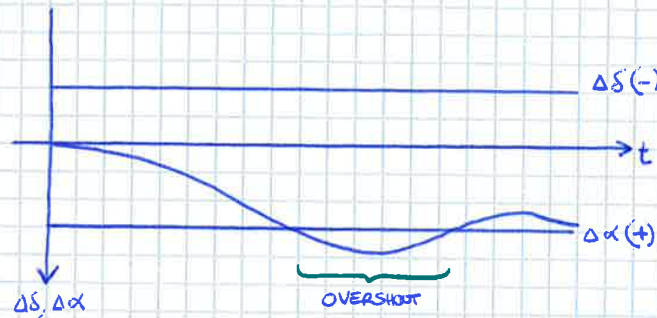
Da questo sistema determino m e m'

• Quindi, considerando solo q , posso avere equilibrio statico e dinamico solo se metto due masse, con una non è possibile.

RISPOSTA ALLA MANOVRA

• Cos'è una MANOVRA?

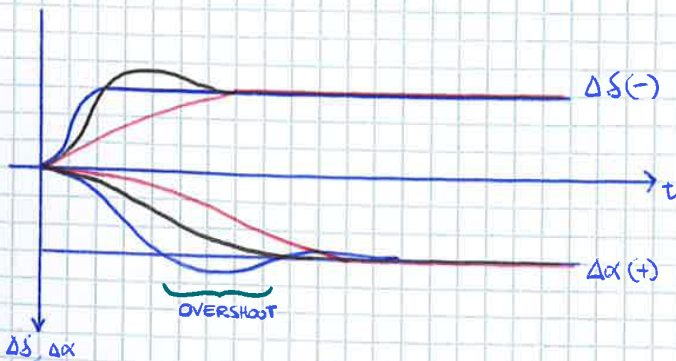
È il passaggio da una posizione di equilibrio ad un'altra. Esistono diversi tipi di manovre, quella che serve a noi è la **manovra istantanea** (= gradino).



• Porto l'equilibratore dalla posizione $\delta = 0^\circ$ ad una posizione negativa. In questo modo il $\Delta\alpha$ avrà un andamento oscillatorio che andrà stabilizzandosi asintoticamente ad un $\Delta\alpha$ positivo.

• Una manovra del genere è impossibile nella realtà anche solo per via dell'inerzia. La studiamo perché questa è una manovra conservativa, a parità di $\Delta\delta$ suppone una manovra istantanea determina condizioni di carico, dinamiche e strutturali che sono conservative. Quindi, come forzante per le nostre equazioni metteremo una manovra del genere.

• Prima vediamo delle manovre più realistiche.



- ◆ \Rightarrow Manovra NON scontrata
- ◆ \Rightarrow Manovra NON scontrata
- ◆ \Rightarrow Manovra scontrata

Nella manovra scontrata il pilota muove rapidamente la barra creando un'oscillazione dell'equilibratore così veloce da non portare ad un overshoot del $\Delta\alpha$. È la manovra perfetta

- 1^a Approssimazione: $h_{25} = 0$ (Trascuro c_5) (Ovviamente $h_{35} \neq 0$)

Dalla 2^a equazione ricavo:

$$\hat{q} = -\frac{1}{h_{25}} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{h_{22}}{h_{23}} \Delta\alpha \quad ; \quad \frac{d\hat{q}}{dt} = -\frac{1}{h_{25}} \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{h_{22}}{h_{23}} \frac{d\alpha}{dt}$$

Sostituisco nella 3^a:

$$-\frac{1}{h_{25}} \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{h_{22}}{h_{23}} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{h_{33}}{h_{35}} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{h_{33}h_{22}}{h_{23}} \Delta\alpha + h_{32} \Delta\alpha = h_{35} \Delta\delta$$

Ordinando mi viene un'equazione differenziale del 2^o ordine:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + (h_{22} + h_{33}) \frac{d\alpha}{dt} + (h_{22}h_{33} - h_{23}h_{32}) \Delta\alpha = h_{23}h_{35} \Delta\delta$$

Quindi possiamo ricondurci all'equazione del sistema massa-molla smorzato

$$\ddot{x} + 2\gamma\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = F(t) = h_{23}h_{35} \Delta\delta = \text{cost} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Sistema Ridotto} \Rightarrow \text{Comandi bloccati}$$

Gli γ e gli ω_n nell'equazione sono quelli di short period e vanno a determinare le soluzioni di risposta dinamica del velivolo

- Vediamo cosa succede se $h_{25} \neq 0$ e $h_{35} = 0$ (solo per correggere la soluzione precedente)

Dalla 3^a ricavo:

$$\Delta\alpha = -\frac{h_{33}}{h_{32}} \hat{q} - \frac{d}{dt} \hat{q} \frac{1}{h_{32}} \quad ; \quad \frac{d\Delta\alpha}{dt} = -\frac{h_{33}}{h_{32}} \frac{d\hat{q}}{dt} - \frac{d^2\hat{q}}{dt^2} \frac{1}{h_{32}}$$

Sostituisco nella 2^a:

$$\frac{1}{h_{32}} \frac{d^2\hat{q}}{dt^2} + \frac{d\hat{q}}{dt} \left(\frac{h_{33}}{h_{32}} + \frac{h_{22}}{h_{32}} \right) + \hat{q} \left(\frac{h_{32}h_{22}}{h_{32}} - h_{23} \right) = h_{23} \Delta\delta$$

Posso sommare poi le soluzioni che ho ottenuto con le due ipotesi e per sovrapposizione degli effetti trovo la soluzione del sistema ridotto

- Ora andremo a risolvere l'equazione differenziale di 2^o grado del sistema massa-molla per risolvere definitivamente il nostro problema.

• Vediamo come possiamo ricavare $\Delta\alpha_{MAX}$. È legato al fattore di contingenza

$$M = 1 + \frac{\Delta L}{W} = \frac{L}{W} \quad ; \quad L = L_{eq} + \Delta L$$

$$M = 1 + \frac{\frac{1}{2} P V_{eq}^2 S a \Delta\alpha}{W} \Rightarrow \text{Posso scrivere così perché abbiamo ipotizzato } V = \text{cost} \quad ; \quad a \Delta\alpha = \Delta C_L = C_{L\alpha} \Delta\alpha$$

$$M - 1 = \Delta M = \frac{a P V_{eq}^2}{2W/S} \Delta\alpha = \text{cost} \cdot \Delta\alpha$$

Costante definite configurazione velivolo e condizioni iniziali

$$\Delta\alpha_{\infty} = \frac{h_{23} h_{35}}{W_m^2} \Delta S = \text{cost}' \cdot \Delta S$$

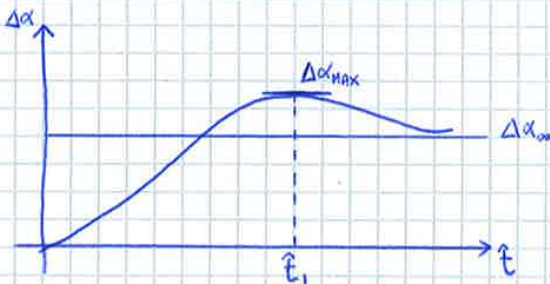
Costante definite la configurazione del velivolo (No condiz. iniziali)

Vediamo cosa sono h_{23} e h_{35}

$$\left[h_{23} = - \frac{2M - C_{L\alpha}}{2M + C_{L\alpha}} < 0 \right] \quad \left[h_{35} = - \frac{C_{M\alpha}}{S_y} > 0 \right]$$

Ne deriva che $\text{cost}' < 0 \Rightarrow \Delta M_{\infty} = \text{cost} \Delta\alpha_{\infty} = \text{cost} \cdot \text{cost}' \cdot \Delta S \Rightarrow$ Abbiamo legato il ΔS al $\Delta\alpha_{\infty}$ e al ΔM_{∞} attraverso le due costanti

Posso definire $\Delta\alpha_{MAX}$ come un fattore di amplificazione moltiplicato per $\Delta\alpha_{\infty}$



$$\Delta\alpha_{MAX} = \text{Fattore Amplific.} \cdot \Delta\alpha_{\infty}$$

$$\Delta M_{MAX} = \text{Fattore Amplific.} \cdot \text{cost} \cdot \text{cost}' \cdot \Delta S$$

- Con questo tipo di manovra trovo valori più gravosi di quelli reali \Rightarrow Conservativo
- Scriviamo adesso la soluzione in una forma un po' più compatta

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta S} = k_1 \left[1 - k_2 e^{-k_3 \hat{t}} \cdot \text{sen}(k_4 \hat{t} + \varphi) \right]$$

$$\frac{d}{d\hat{t}} \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta S} \right) = k_1 k_2 e^{-k_3 \hat{t}} \left[-k_4 \cos(k_4 \hat{t} + \varphi) + k_3 \text{sen}(k_4 \hat{t} + \varphi) \right] = 0$$

$$k_1 = \frac{h_{23} h_{35}}{W_m^2}$$

$$k_3 = 3 \omega_m$$

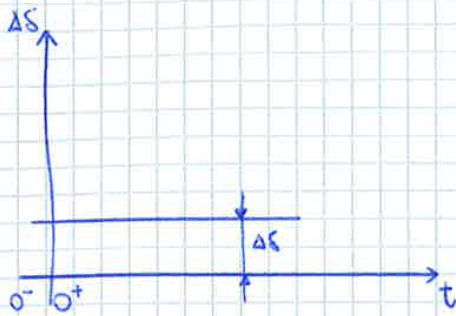
$$k_2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

$$k_4 = \sqrt{1 - \beta^2} \omega_m$$

Per $t \rightarrow \infty$ $k_1 k_2 e^{-k_3 \hat{t}} = 0$ e $[-k_4 \cos(k_4 \hat{t} + \varphi) + k_3 \text{sen}(k_4 \hat{t} + \varphi)] = 0$

Dobbiamo analizzare la quadra, considerando $\beta = k_4 \hat{t} + \varphi$

- Se a fondo corsa non raggiunge M_{MAX} il progetto è fatto male.
- C'è un altro accorgimento di tipo strutturale in caso di manovra istantanea.



- Nella manovra a gradino passo da 0^- a 0^+ al ΔS . I regolamenti dicono di verificare strutturalmente l'attacco del piano di coda partendo da valore della portanza in coda in condizioni di equilibrio $L_{t_{eq}}$.

$$L_t = L_{t_{eq}} + \Delta L_t \quad \text{con} \quad \Delta L_t = \Delta C_{L_t} S_C \frac{1}{2} \rho V_{eq}^2$$

$$\Delta C_{L_t} = a_t \Delta \alpha_t = a_t \frac{\partial \alpha_t}{\partial \Delta S} \Delta S = a_t \gamma \Delta S \Rightarrow \text{Ancora piú conservativo}$$

DINAMICA LATERO-DIREZIONALE

- Recuperiamo le tre equazioni che avevamo trascurato occupandoci della dinamica longitudinale

$$\begin{cases} F_y = m(\dot{v} + r u + p w) \\ L = J_x \dot{p} - J_{xz} \dot{r} - J_{xz} p q + (J_z - J_y) q r \\ N = J_z \dot{r} - J_{xz} \dot{p} - J_{xz} q r + (J_y - J_x) p q \end{cases}$$

$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad \vec{\omega} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix}$$

- Linearizziamo \Rightarrow

$$\begin{aligned} m &= m_{eq} + \Delta m & p &= \Delta p \\ v &= v_{eq} + \Delta v = v & q &= \Delta q \\ w &= w_{eq} + \Delta w_{eq} & r &= \Delta r \end{aligned}$$

- Abbiamo supposto Δ piccoli

$$\begin{cases} F_y = m(\dot{v} - p w_{eq} + r m_{eq}) \\ L = J_x \dot{p} - J_{xz} \dot{r} \\ N = J_z \dot{r} - J_{xz} \dot{p} \end{cases}$$

- Consideriamo Assi Body e li facciamo coincidere con gli Assi di stabilità \Rightarrow

$$\begin{cases} w_{eq} = 0 \\ m_{eq} = V_{eq} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_y = m(\dot{v} + r V_{eq}) \\ L = J_x \dot{p} - J_{xz} \dot{r} \\ N = J_z \dot{r} - J_{xz} \dot{p} \end{cases} \quad \text{Variabili Fondamentali: } v, p, r$$

- Dobbiamo esplicitare i primi membri trovando tutte le variabili e calcolando tutte le derivate aerodinamiche che restano.

- Sostituisco \dot{p} nella 3^a e \dot{r} nella seconda e ottengo

$$N_v \dot{v} + N_p \dot{p} + N_r \dot{r} = \dot{r} \left(J_z - \frac{J_{xz}^2}{J_x} \right) - L_v v \frac{J_{xz}}{J_x} + L_p p \frac{J_{xz}}{J_x} - L_r r \frac{J_{xz}}{J_x}$$

$$L_v v + L_p p + L_r r = \dot{p} \left(J_x - \frac{J_{xz}^2}{J_z} \right) - N_v v \frac{J_{zx}}{J_z} - N_p p \frac{J_{xz}}{J_z} - N_r r \frac{J_{xz}}{J_z}$$

- Ora introduciamo i momenti virtuali che indichiamo con l'apice.

$$\left[J_x' = J_x - \frac{J_{xz}^2}{J_z} \right]$$

$$\left[J_z' = J_z - \frac{J_{xz}^2}{J_x} \right]$$

$$\left[J_{xz}' = \frac{J_{xz}}{J_z - J_x'} = \frac{J_{xz}}{J_x J_z'} \right]$$

- Quindi riscriviamo:

$$\dot{p} = \frac{L_v}{J_x'} v + \frac{L_p}{J_x'} p + \frac{L_r}{J_x'} r + N_v v J_x' + N_p p J_{xz}' + N_r r J_{xz}'$$

- Le forme definitive della 2^a e della 3^a sono allora:

$$2^a) \dot{p} = \left(\frac{L_v}{J_x'} + N_v J_x' \right) v + \left(\frac{L_p}{J_x'} + N_p J_{xz}' \right) p + \left(\frac{L_r}{J_x'} + N_r J_{xz}' \right) r$$

$$3^a) \dot{r} = \left(L_v J_{xz}' + \frac{N_v}{J_z'} \right) v + \left(L_p J_{xz}' + \frac{N_p}{J_z'} \right) p + \left(J_{xz}' L_r + \frac{N_r}{J_z'} \right) r$$

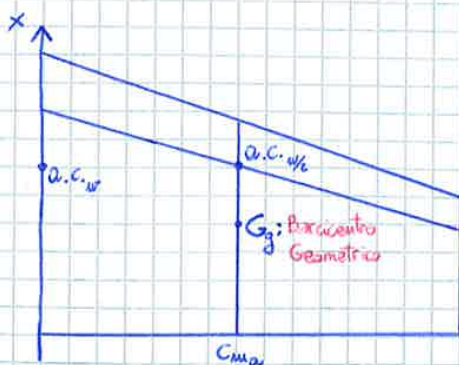
- Adesso abbiamo quindi trovato il sistema di equazioni per la dinamica latero-direzionale a comandi bloccati.
- Prima di passare alla forma adimensionata facciamo un breve richiamo

Allungamento Alare: $\lambda = \frac{b}{c} = \frac{b^2}{S}$ $C_{mq} \neq C_{mq} \neq C_{ma}$

$$C_{ma} = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} c^2 dy \quad C_{mq} = \frac{S}{b}$$

$$\left[\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} t^* = p \frac{c}{2V_{eq}} \frac{A}{A} = \frac{1}{A} p \frac{b}{2V_{eq}} = \frac{1}{A} \hat{p} \right] \quad \text{con } A = \frac{b}{C_{ma}} \neq \lambda ; A = \frac{b}{c} \text{ corda di riferimento}$$

$$\left[\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{A} \hat{p} \right] \quad \left[\frac{d\psi}{dt} = p \right] \quad \left[\frac{d\psi}{dt} = r \right]$$



- Per ali trapezio, pluri-trapezio ed ellittiche a profilo costante l'a.c. $1/4$ è sulla corda del Baricentro Geometrico
- Per ali trapezio e pluri-trapezio la corda del Baricentro Geometrico coincide con la corda media aerodinamica C_{ma} . Nelle ali ellittiche non coincide, ma $a.c. 1/4$ sta sempre davanti a G_g

- Adesso andiamo a vedere le soluzioni del nostro sistema in forma adimensionata della dinamica latero-direzionale.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \beta + k_{11} \beta + k_{12} \hat{p} + k_{13} \hat{r} + k_{14} \varphi = 0 \quad \Rightarrow \text{Eq. traslazione in direzione } y \\ \frac{d}{dt} \hat{p} + k_{21} \beta + k_{22} \hat{p} + k_{23} \hat{r} = 0 \quad \Rightarrow \text{Eq. rotazione attorno a } x \\ \frac{d}{dt} \hat{r} + k_{31} \beta + k_{32} \hat{p} + k_{33} \hat{r} = 0 \quad \Rightarrow \text{Eq. rotazione attorno a } z \\ \frac{d}{dt} \varphi = \frac{1}{A} \hat{p} \\ \frac{d}{dt} \psi = \frac{1}{A} \hat{r} \end{array} \right.$$

- Abbiamo un sistema di 5 equazioni (3 della dinamica e 2 della cinematica) nella forma $\dot{\bar{X}} = A \bar{X}$ con

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \beta \\ \hat{p} \\ \hat{r} \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} \beta \\ \hat{p} \\ \hat{r} \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

- Se i comandi ci sono, allora ci saranno: $\delta_a = \text{Rotazione Altoni}$
 $\delta_r = \text{Rotazione Timone}$

Quindi bisognerebbe aggiungere alle equazioni dei termini aggiuntivi

$$\left. \begin{array}{l} 1^a \text{ Eq.} \Rightarrow \text{Vanno aggiunte } C_{y\delta_a} \text{ e } C_{y\delta_r} \\ 2^a \text{ Eq.} \Rightarrow \text{Vanno aggiunte } C_{\dot{p}\delta_a} \text{ e } C_{\dot{p}\delta_r} \\ 3^a \text{ Eq.} \Rightarrow \text{Vanno aggiunte } C_{\dot{r}\delta_a} \text{ e } C_{\dot{r}\delta_r} \end{array} \right\} \text{Si aggiungono le Derivate di Manovra}$$

- Quindi il sistema si modifica come segue

$$\dot{\bar{X}} = A \bar{X} + B \bar{U} \quad \text{con } \bar{U} = \begin{pmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{pmatrix} \text{ e } B = \{5 \times 2\}$$

- Se muoviamo gli alettoni la barra si muove lateralmente, se muoviamo il timone si muove la pedaliera \Rightarrow Comandi Reversibili.
- A differenza della dinamica longitudinale, in cui ci possono essere grosse differenze, la dinamica LATERODIREZIONALE non cambia a seconda che si considerino comandi bloccati o liberi.

Adesso andiamo a caratterizzare queste soluzioni

[1^a REALE]

- Negativo e in valore assoluto molto elevato
- Moto aperiodico, molto smorzato
- Si chiama **ROLL SUBSIDENCE** (Convergenza di Rollio) o **ROLL MODE** (Modo di Rollio)
- Variabili coinvolte: φ importante
 β, ψ poco importanti
- Quindi, quando arriva il disturbo, il velivolo sbanda (φ importante) lateralmente, ma ψ resta nel piano di simmetria (β poco importante). La sbandata si smorza subito e il velivolo ritorna allo sbandamento nullo (Per un modo che vedremo dopo).

[2^a REALE]

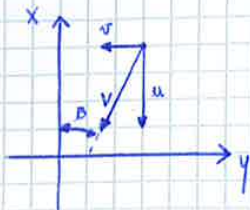
- Piccolo in valore assoluto, maggiore o minore di zero.
- Moto aperiodico, poco smorzato o poco amplificato.
- Si chiama **SPIRAL MODE** (Modo a Spirale)
- Variabili coinvolte: φ, ψ importanti
 β poco importante
- Anche in questo caso il velivolo sbanda, ma ψ resta sempre nel piano di simmetria poiché β continua ad essere poco importante. Con φ e ψ importanti il velivolo tende a curvare verso il centro compiendo proprio una spirale.

[3^a, 4^a SOLUZIONE]

- $|a|$ piccola e normalmente minore di zero
- Il periodo \bar{e} dell'ordine delle decine di secondi (Dipende dalle dimensioni) $T = 2 \div 30$ s
- Moto oscillatorio poco smorzato
- **ROLLIO OLANDESE** (DUTCH ROLL)
- Variabili coinvolte: φ, ψ, β importanti
- È un modo molto fastidioso, poco smorzato, quindi se il pilota (o un sistema automatico) non interviene continua. Essendo tutte importanti le variabili, si vanno a sommare anche gli altri due modi aperiodici.

C_{lp} - Effetto Diedro

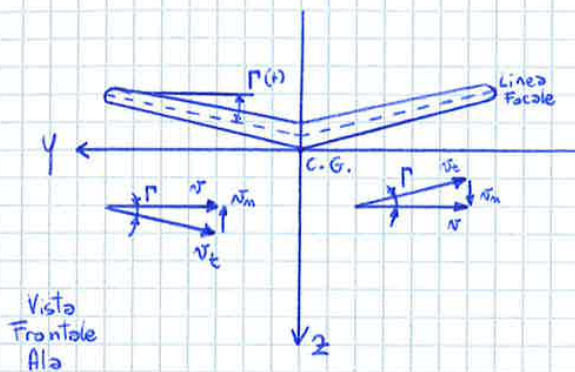
• È una derivata molto importante, normalmente minore di zero



• Usiamo lo solito visto in pianta con V inclinata di β rispetto a x che scomponiamo nelle due componenti u e v.

• Andiamo a vedere tutti i contributi

[1] - Contributo angolo diedro alare

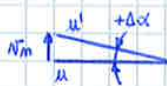


Γ : Angolo Diedro

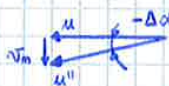
• Disegniamo per ogni ala la componente v , negativa per β positivo. La scomponiamo in due componenti che sono v_e , tangenziale alla linea focale, e v_n , normale alla linea focale.

È v_n che, composto con u, determina una variazione di incidenza sulla semiala.

[Semi-ala Sinistra]

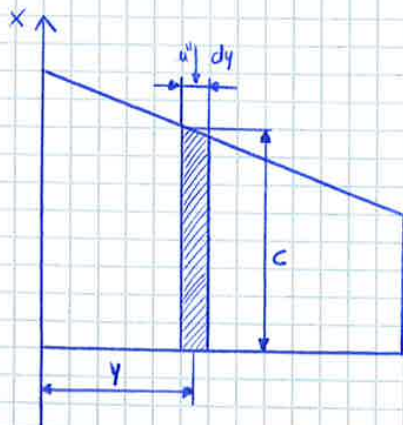


[Semi-ala Destra]



A seconda della semi-ala

• Quindi possiamo scrivere che : $\Delta\alpha \approx \frac{v_n}{V} = \frac{v \cdot \Gamma}{V} = \beta \cdot \Gamma \Rightarrow \Delta\alpha = \pm \beta \Gamma$



$$L = -2 \frac{1}{2} \rho V^2 \int_0^{b/2} c dy C_{u\alpha} \Delta\alpha y \Rightarrow \text{Momento di Rollio}$$

$$\Rightarrow C_l = -\frac{L}{\frac{1}{2} \rho V^2 S b} \Rightarrow \text{Lo derivo in } \beta \text{ e trovo il } C_{lp} \text{ per il contributo di } \Gamma$$

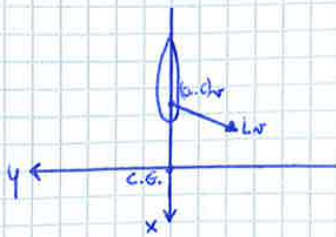
$$(C_{lp})_{\Gamma} = \left(\frac{\partial C_l}{\partial \beta}\right)_{\Gamma} = \frac{-2 \int_0^{b/2} c C_{u\alpha} \Gamma y dy}{S b/2}$$

Contributo dell'Angolo di diedro al C_{lp}

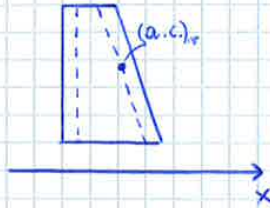
[Semi-ala di Destra]

• Questo contributo è negativo

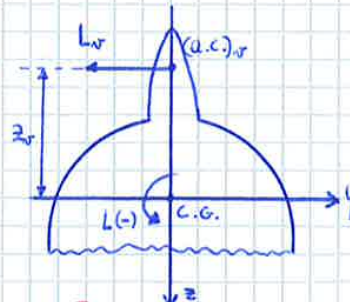
[5] - Impennaggio Verticale



[Vista in Pianta]



[Vista Laterale]



[Vista Posteriore]

• z_r è il braccio della portanza L_r che si crea sull'impennaggio verticale rispetto all'asse di rollio.

$$L = -L_r \cdot z_r \Rightarrow \text{Momento di Rollio}$$

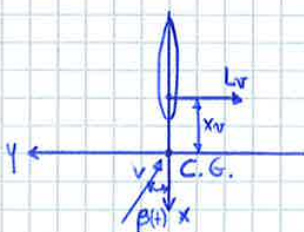
$$L_r = \frac{1}{2} \rho V^2 S_r C_{Lr} \alpha_r \quad \text{con } \alpha_r = \beta - \delta \Rightarrow \frac{\partial C_{Lr}}{\partial \beta} = 1 - \frac{\partial \delta}{\partial \beta}$$

• Anche qui ricavo C_L e ottengo il contributo $\Rightarrow \left[\frac{\partial C_L}{\partial \beta} = (C_{L\beta})_r < 0 \right]$

[$C_{m\beta}$] - Stabilità Direzionale

- Deve essere maggiore di 0 così che, con $\beta > 0$, si sviluppi un momento imbardante positivo che tende ad annullare β .
- Abbiamo due contributi:

[1] - Impennaggio Verticale (Effetto Banderuola)



Possiamo valutare il contributo dell'impennaggio verticale con

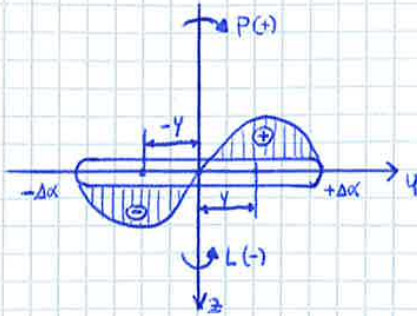
$$M_r = L_r \cdot x \Rightarrow \text{Ricavo il } c_m \text{ e trovo } \frac{\partial (c_m)_r}{\partial \beta} = (C_{m\beta})_r$$

[2] - Fusoliera

- Così come il $C_{m\alpha}$ della fusoliera era positivo, allo stesso modo il $C_{m\beta}$ sarà negativo. È un contributo meno importante quindi non dà problemi.

• Poiché $w_{b/2} = \frac{P \cdot b}{2}$, alle estremità ho $\Delta\alpha = \pm \frac{Pb}{2V}$

• Quindi vado a disegnare la distribuzione di portanza sull'ala. La distribuzione di portanza in figura determina un momento di rollio L negativo.

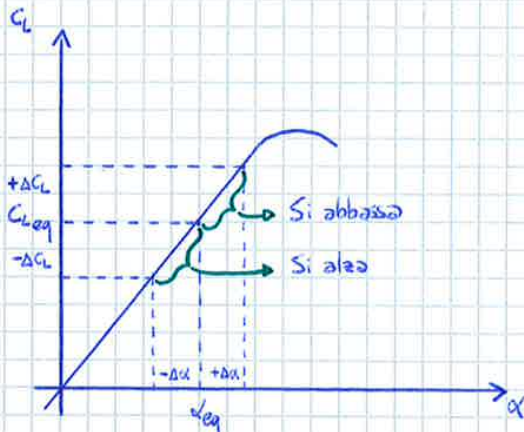


• Possiamo dare una valutazione numerica di questo, ma solo se consideriamo una distribuzione di portanza non realistica che segua la distribuzione di w . Si usa il metodo della striscia. Per usare questo metodo serve la curva $C_L(\alpha)$, ma prima scriviamo il momento di rollio

$$L = -2 \int_{-b/2}^{b/2} \rho V^2 \int_0^{\Delta\alpha} C_L C_{L\alpha} \Delta\alpha dy = -\rho V^2 \frac{P}{2V} \int_0^{\Delta\alpha} C_L C_{L\alpha} dy$$

Contributo delle due semiali ($\Delta\alpha = P y / 2V$)

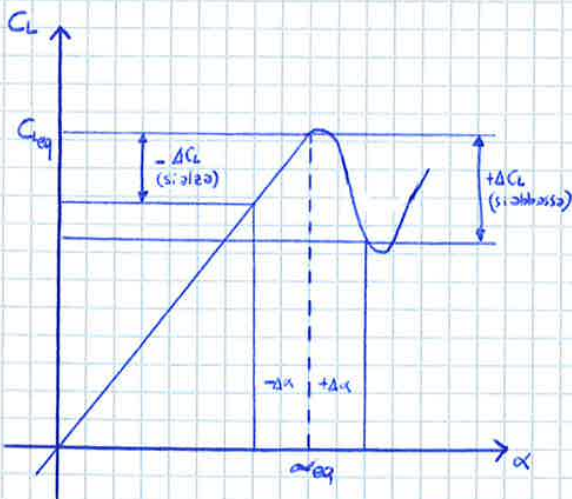
• Disegniamo la curva $C_L(\alpha)$ considerando due sezioni uguali dell'ala distanti $\pm y$ dall'asse.



$$\Delta\alpha = \frac{P y}{2V}$$

• Comunque se siamo nel tratto lineare (o perlomeno non siamo prossimi allo stallo brusco) possiamo dire che $[C_{L\alpha}]_{ala} < 0$

• Disegniamo adesso una curva $C_L(\alpha)$ con uno stallo brusco



• Prendo due $\Delta\alpha$ uguali in valore assoluto. La parte che si alza con il $-\Delta\alpha$ subisce un decremento di C_L , la parte che si abbassa con $+\Delta\alpha$ subisce un decremento maggiore

$$|\Delta C_L(\text{abbasso})| > |\Delta C_L(\text{alza})|$$

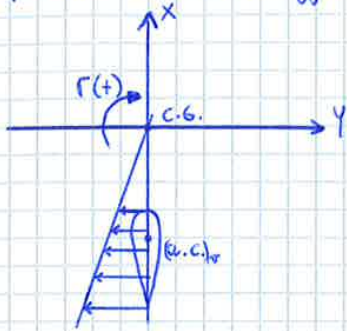
Quindi in questo caso il $C_{L\alpha}$ è maggiore di zero.

• Con volo ad alte α e prossimo allo stallo brusco può capitare l'Autorotazione.

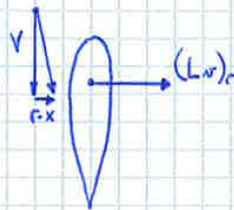
DERIVATE IN r

C_{Yr}

- C_{Yr} è normalmente maggiore di zero ed è una derivata debole. L'unico contributo importante è l'impennaggio verticale.



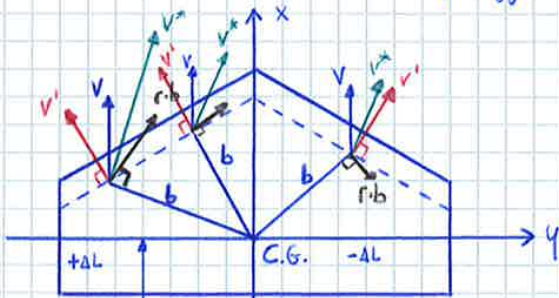
- In conseguenza ad $r(+)$ avrò una distribuzione di velocità dell'impennaggio verticale.
- Isoliamo l'impennaggio verticale e analizziamo le velocità rispetto ad esso



- La velocità di volo V si compone con $r \cdot x$ e dà una risultante che comporta la nascita di un Lift come in Figura. $r(+)$ e $(Lr)r$ in direzione y positiva mi danno $C_{Yr} > 0$

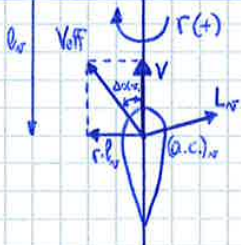
C_{Er}

- Anche questa è normalmente maggiore di zero. Facciamo una schematizzazione in pianta sia dell'ala che dell'impennaggio verticale



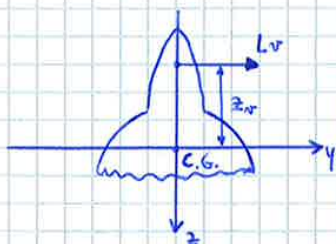
- $r \cdot b \Rightarrow$ Componente di velocità per effetto di r
- $V \Rightarrow$ Velocità di volo
- $V' \Rightarrow$ Risultante di V e $r \cdot b$
- $V' \Rightarrow$ Risultante aerodinamica efficace

$\Rightarrow L_r > 0$

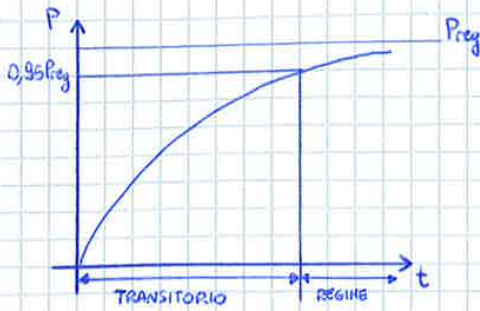


- La V è sempre uguale, la $r \cdot b$ dipende da b .
- Per effetto di r ci sarà una semi-ala investita con una velocità maggiore, quindi $L_r > 0$.
- L_r che si crea sull'impennaggio verticale è nel verso y positivo, quindi si crea un momento di rollio maggiore di zero

$$(L_r)_r = L_r \cdot z_r > 0$$



- Ora ciò che ci interessa è andare a valutare la condizione a regime, cioè la velocità di rollio p a regime, ovvero dopo che è passato il transitorio.



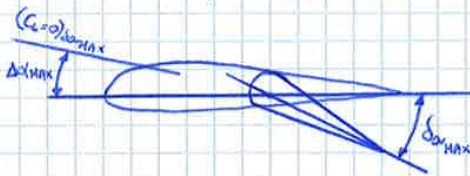
- L'andamento è asintotico alla p di regime.
- In teoria il transitorio allora non finirebbe mai visto che non posso raggiungere la p_{reg} ; allora si prende convenzionalmente lo $0,95 p_{reg}$ come valore di fine transitorio.

- Per calcolare la p_{reg} ricordiamo che a regime vale $\dot{p}=0$

$$p_{reg} = -\frac{L_{\delta a}}{L_p} \cdot \delta a$$

In genere dipende dal tempo, ma in questo caso posso considerarla costante perché la manovra è a gradino

- Le derivate L_p e $L_{\delta a}$ sappiamo ormai valutarle



- Se porto δa a valore massimo, avrò anche $\Delta \alpha_{MAX}$

$$\Delta \alpha_{MAX} = \frac{\partial \alpha}{\partial \delta a} \delta a_{MAX}$$

c_a : Corda alettone
 c : corda

$$f\left(\frac{c_a}{c}\right)$$

- Posso scrivere p_{reg} come

$$p_{reg_{MAX}} = H \frac{\partial a}{\partial \delta a} \frac{V}{b_c} \delta a_{MAX}$$

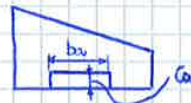
- Se vediamo le due relazioni di p_{reg} che abbiamo scritto, vediamo che separatamente ci sono le caratteristiche geometriche e le caratteristiche aerodinamiche.

$L_{\delta a}$ e L_p sono funzioni solo del $C_{L\alpha}$, che essendo sia sopra che sotto si annulla, quindi H è solo funzione della GEOMETRIA in pianta dell'ALA, ovvero di S, c, b_a e c_a .

$$H = f(S, c, b_a, c_a)$$

b_a : Lunghezza Alettone
 c_a : Corda Alettone

\Rightarrow



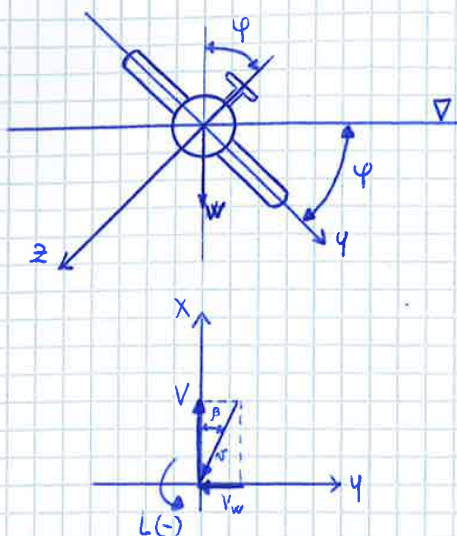
- A questo punto introduciamo un altro parametro, K_p , che non è altro che la p_{reg} adimensionale

$$K_p = \hat{p}_{reg_{MAX}} = p_{reg_{MAX}} \frac{b}{2V} = H \frac{\partial a}{\partial \delta a} \delta a_{MAX}$$

\Rightarrow Mi dà indicazioni chiare sulle capacità di manovra laterale del velivolo.

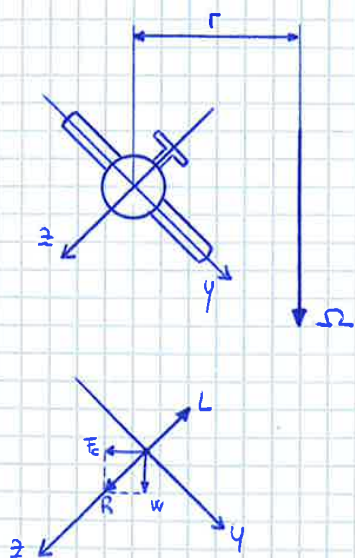
- Per velivoli normali, non acrobatici e cose simili, abbiamo $K_p \approx 0,07 \div 0,09$

• Consideriamo il velivolo sbandato



• Abbiamo detto che in questa situazione non c'è nulla che causi una dissimetria di portanza rispetto agli assi body. Quindi il solo sbandamento non genera nessun momento di rollio. Ciò che succede è che il peso F_{cg} sposta lateralmente il velivolo facendo nascere una r . Nella vista in pianta la r sarà inclinata di un angolo β positivo. Se c'è un $C_{lp} < 0$, ci sarà un $C_{lp} \cdot \beta$ che determina un $L(-)$, cioè un momento che tenderà a raddrizzare il velivolo. Quindi l'effetto di stabilità laterale che viene dato a C_{lp} è una conseguenza secondaria.

• Consideriamo anche la situazione della virata



• Se la virata è corretta il peso e la forza centrifuga devono comporsi e dare una risultante che giace sul piano di simmetria che deve essere equilibrata dalla portanza L .

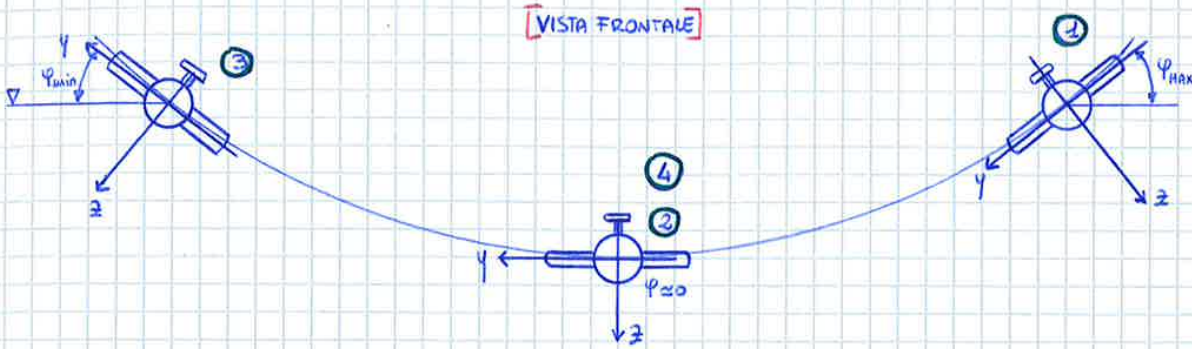
• Se consideriamo la virata a quota $z = \text{costante}$, vuol dire che di Ω non ho componenti lungo x , ho solo $q(y)$ e $r(z)$, $p(x) = 0$.

Se c'è r {

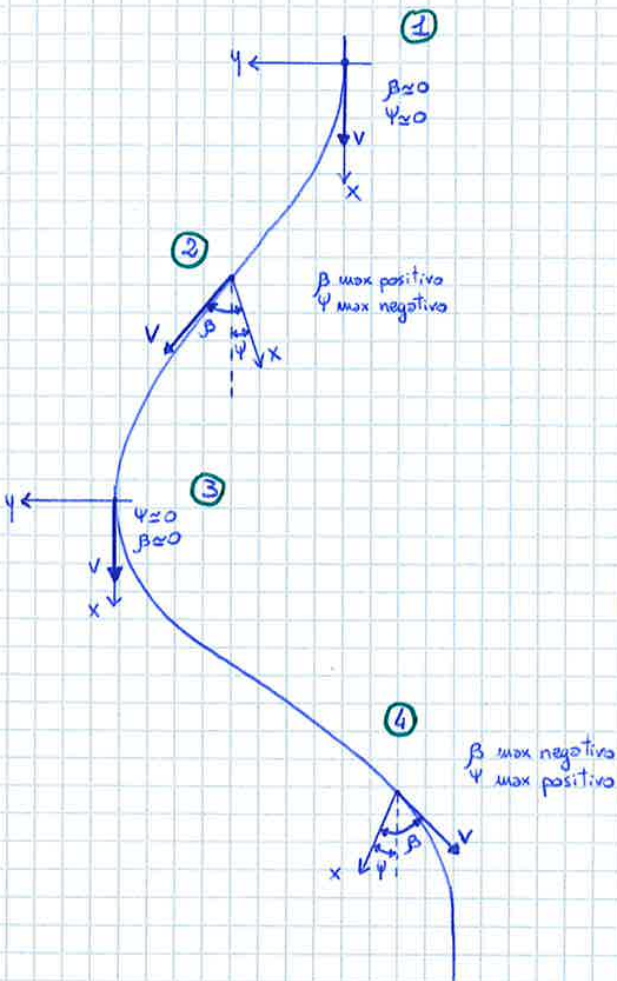
- Se $C_{lr} \neq 0$ nasce un momento di rollio che deve essere contrastato da un ΔS_a .
- Se $C_{mr} \neq 0$ nasce un momento imbardante che deve essere contrastato da un $\Delta \delta_r$.

• Inoltre il pilota deve cabrare un po' il velivolo perché serve più portanza, quindi serve barra. Chiaramente fa tutte e tre queste cose senza manco accorgersene perché sono tutte manovre istintive.

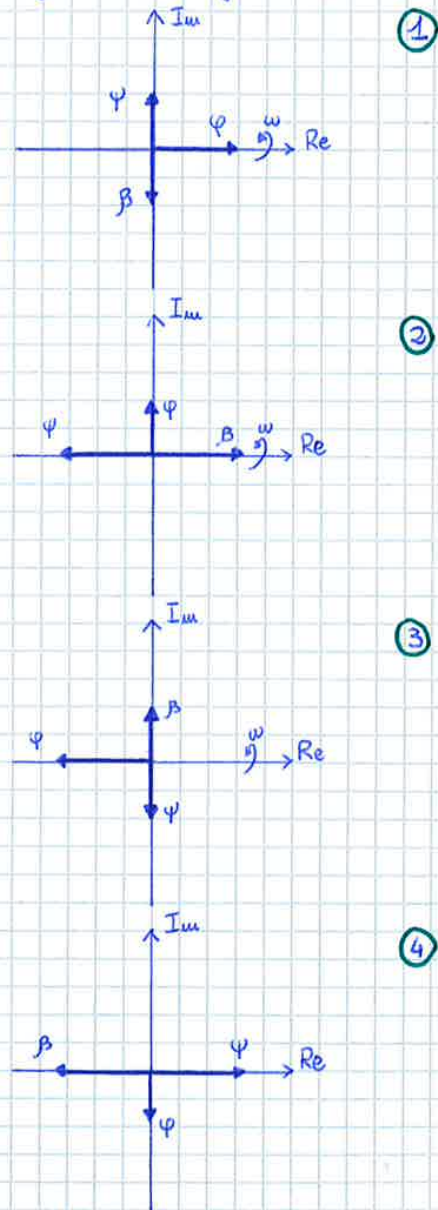
• Andiamo a vedere la traiettoria del Dutch Roll



[VISTA IN PIANTA]



■ Diagrammi di Argand



• Dalle due viste è possibile vedere chiaramente come influiscono i tre angoli nei diversi momenti del Dutch Roll.