



Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2094A-

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Ghigo Clara

MATERIA: Idraulica Fluviale teoria - Prof. Camporeale Rosso

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

IDRAULICA FLUVIALE

slide 1

CAMPIONEALE

①

Cenno normativo

→ Legge 28 dicembre 2015 n. 221
 ↳ promuovere misure di green economy
 ↳ contenimento dell'uso eccessivo di risorse naturali

3 COMPONENTI:

- 1) definizione di un quadro in relazione a:
 - stato morfologico attuale dei corsi d'acqua
 - traiettoria evolutiva degli alvei
 - dinamiche e quantità di trasporto solido
 - interferenza delle opere con processi morfologici
- 2) definizione obiettivi per corridoi fluviali, per e loro miglioramenti morfologici e ecologici e riduzione del rischio idraulico
 - è prioritario ridurre l'alterazione dell'equilibrio geomorfologico e si deve evitare l'artificializzazione dei corridoi fluviali
- 3) identificare interventi per raggiungere gli obiettivi del punto 2
 - scelta di misure + appropriate tra le diverse alternative (anche il non intervento) → deve avvenire con accurate valutazione e confronto degli effetti attesi
 - si deve dare priorità al ripristino della continuità idromorfologica in particolare al ripristino del trasporto solido e alle misure di rinaturalizzazione e riqualificazione morfologica del tronco locale di materiale o altri interventi di artificializz. devono essere giustificati da adeguate valutazioni
 - All'esportazione di materiale dal corso d'acqua si deve prendere la reintroduzione di materiale litoido

FIUME

= corso d'acqua perenne che non va mai in secca costituito da un alveo di materiale sciolto (=non coeso) e dall'acqua che raccoglie le acque superficiali

→ dentro ad un fiume porta 1 PORTATA $\left[\frac{m^3}{s}\right]$

- PORTATA DI FORBIDA = nelle stagioni piogge
- PORTATA DI PIENA = \int riferimento a condizioni eccezionali

PERCHÉ NASCE UN FIUME?

studio le cose in cui il corso d'acqua subisce un restringimento



to: $q_1 = q_2$ $q = \text{portata unitaria} (= \text{portata per unità di larghezza})$

$$q_1 w_1 = q_2 w_2 \rightarrow q_2 = \frac{q_1 w_1}{w_2} \Rightarrow \text{siccome } w_1 > w_2 \Rightarrow q_2 > q_1$$

PORTATA UNITARIA SOLIDA: $q_s \propto q^b \rightarrow q_s = a q^b$

$$q_{s1} = a q_1^b$$

$$q_{s2} = a q_2^b = a q_1^b \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^b$$

↑
portata

REGIME COPRESO: se ho \geq massimo \rightarrow uno scorcio alle
 scioglimento del ghiaccio (2)
 \rightarrow uno scorcio alle precipitazioni estivali

GRANDEZZE CHE GOVERNANO IL COMPORTAMENTO DI 1 CORSO D'ACQUA

- Portata liquida Q
- Portata solida S
- Larghezza B
- Altezza h (tirante Y)
- pendenza i
- dislivello sedimenti
- scabrezza
- vegetazione sponda

sono almeno 7 grandezze che sono funzione di spazio e tempo

EQUAZIONI che governano il corso d'acqua: (4) per uno scorcio di decine/centinaia di km

1) equazione conservazione fase liquida: $\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial UH}{\partial x} = 0$

2) equazione movimento fase liquida (eq. Saint Venant): $\frac{\partial UH}{\partial t} + \frac{\partial U^2 H}{\partial x} = -\frac{1}{2} g H \frac{\partial H}{\partial x} - g H \frac{\partial \eta}{\partial x} - c_f U^2$

H = tirante

U = velocità media

η = quota fondo \rightarrow dipende da spazio e tempo

c_f = coeff di attrito

3) equazione conservazione fase solida: $(1 - \lambda_p) \frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial q_t}{\partial x}$

q_t = portata solida totale

• la variazione della quota topografica di fondo dipende da variazioni spaziali della portata solida

• se la $\frac{\partial q_t}{\partial x}$ aumenta (x cresce verso valle) \Rightarrow abbiamo un processo di incisione

quindi se $\frac{\partial q_t}{\partial x} > 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t}$ diminuisce \Rightarrow incisione

se $\frac{\partial q_t}{\partial x} < 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t}$ aumenta \Rightarrow deposito (aggradazione)

4) equazione movimento della fase solida: $q_t = q_t(U)$
 $q \rightarrow$ scivolate attraverso relazioni empiriche che danno 1 rel. tra q e tensione di snello
 $\tau = \gamma R i \rightarrow \tau$ = tensione media al fondo $\Rightarrow \gamma$ = peso specifico
 R_i = proporzionale alla velocità al quadrato
 $R_i = U^2 / \chi$
 $\tau \propto U^2$

U = velocità è una variabile

Δt_i e $\Delta q_i \Rightarrow$ sono variabili random (a caso) \Rightarrow quindi qui interviene la stocasticità del problema (3)

Quindi quando avviene \uparrow funzione di autocorrel. \uparrow serie \uparrow termine deterministico sia \uparrow stocastico

Se cerco di capire quanto il segnale è correlato con se stesso per tempi molto alti \Rightarrow poca correlazione: se prendo $q(t=0)$ e $q(t=10 \text{ anni})$, poi prendo $q(t=1 \text{ secondo})$ e $q(t=10 \text{ anni} + 1 \text{ s})$ e faccio la media \Rightarrow non c'è correlazione \Rightarrow questo ce lo dice il fatto che l'autofunzione di correlazione va a 0. La scala integrale è l'area della funzione di autocorrelazione - tempo tipico della memoria del segnale \Rightarrow i segnali deterministici hanno area infinita \Rightarrow quindi istante è correlato con gli altri \Rightarrow i segnali stocastici hanno invece una scala integrale finita quindi \uparrow tempo di correlazione finito

Funzione di autocorrelazione della funzione seno: funzione seno \rightarrow funzione periodica con area infinita. Immagino quindi di avere media, varianza e la scala integrale (= area della funzione di correlazione delle portate): μ_q, σ_q, T_q

Uppio riproduzione \uparrow serie che abbia le stesse caratteristiche di quella vera, immagino che la serie sia così \uparrow come se abbia un salto e poi decresce, poi di nuovo \uparrow salto e poi decresce ecc.



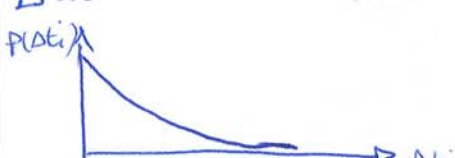
l'equazione da mettere nel calcolatore per risolvere una cosa del genere è: $\frac{dq}{dt} = -kt + F(t)$ eq. stocastica per risolvere *

derivata rispetto al tempo \downarrow termine deterministico \downarrow termine stocastico = è il numero Poissoniano $F(t) = \sum_{i=1}^N \Delta q_i \delta(t-t_i)$ \downarrow delta di Dirac \downarrow $\delta(t-t) = 1$ $\delta(t-t) = 0$

Δq_i e t_i sono variabili random: $\langle \Delta q_i \rangle = \frac{1}{f}$
 $\langle \Delta t_i \rangle = \frac{1}{\lambda}$

come faccio ad estrarre gli oni temporali e i salti delle portate? Δq_i e Δt_i sono estratti da distribuzioni esponenziali

$P(\Delta t_i) = \lambda e^{-\lambda \Delta t_i}$
 $P(\Delta q_i) = \gamma e^{-\gamma \Delta q_i}$ } distrib. di probabilità di Δt_i e Δq_i



Considerando portate alle: immagini di avere la serie delle x_i (non sono equispaziate) e fino a una $x_a \rightarrow$ solo alcune delle portate al colmo raggiunto la x_a ($x_i \rightarrow$ portate al colmo di un evento x_a)

Prendo a caso solo 2 di quelle che hanno superato x_a e vedo che questi due valori sono separati tra loro da 1 certo numero di valori che danno

$M-1 = n^\circ$ di osservazioni che separano due portate consecutive che hanno superato x_a

$M-1$ (non posso prendere le osservazioni che non sono consecutive) tra 2 osservazioni che hanno superato x_a è una

no di osservazioni tra 2 valori che superato x_a è una variabile random $\Rightarrow M$ è una variabile casuale
 Voglio quindi calcolare la distribuzione di probabilità di M :
 $P(M) = (\text{probabilità di non superamento di } x_a \text{ elevato a } M-1) \cdot (\text{probabilità di superamento})$
 $= P(x_a)^{M-1} (1 - P(x_a))$

media di M :

$$y(M) = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot P(M) = \sum_{m=1}^{\infty} m P(x_a)^{m-1} (1 - P(x_a))$$

m è 1 variabile discreta quindi posso fare

$$\text{ma } \sum_{m=1}^{\infty} m z^{m-1} = \frac{d}{dz} \sum_{m=1}^{\infty} z^m = \frac{d}{dz} \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{\infty} z^m \right)}_{\text{serie geometrica}} = \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{1-z} - 1 \right] = \frac{1}{(1-z)^2}$$

perciò $y(M) = \frac{1}{1 - P(x_a)}$

il tempo di ritorno associato a q : $T(q) = \frac{1}{1 - P(q)}$

$P(q) =$ probabilità di non superamento

DISTRIBUZIONE DI GUMBEL (EV3):

$q_c =$ portata al fondo

$$P(q_c) = e^{-e^{-y}} \rightarrow y = \alpha (q_c - \mu) \quad \alpha = \frac{1,283}{6} \quad \mu = \gamma - \frac{0,577}{\alpha}$$

$$T = \frac{1}{1-P} \rightarrow \text{lo invertito: } q_c = \mu - \frac{1}{\alpha} \ln \left(-\ln \frac{T-1}{T} \right)$$

perché $\ln \frac{T-1}{T} \sim -\frac{1}{T-1} \sim -\frac{1}{T} \Rightarrow q_c = \mu + \frac{1}{\alpha} \ln T$



quando si hanno dei dati \rightarrow si calcola la probab. di superamento per ogni valore delle portate \rightarrow poi si applica sulla curva di Gumbel

Altre leggi:

area sottesa dall'orone ν : $A \approx 0,18^{1,48 \nu}$

lunghezza canali: $L \approx 0,21 e^{0,97 \nu}$

lunghezza asta fluviale: $L \sim \nu^{\frac{1}{3}} A^{0,5-0,7}$

leggi di potenza
difficili da dimostrare

area sottesa del baso
 $\text{cost} \approx 1,31$

oggetti che si ripetono geometricamente in maniera simile: frattali

DIMENSIONE FRATTALE:

Assumiamo di avere 1 oggetto rappresentabile in 1 spazio euclideo n -dimensionale \rightarrow dimmofuso di riempire lo spazio con 1 prisma a lunghezza di lato ϵ

Per esempio ν solo nello spazio bidimensionale: curva \rightarrow riempire lo spazio con prisma a lunghezza ϵ dove i singoli quadrati hanno lato ϵ



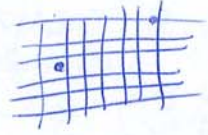
$\epsilon \rightarrow$ passo diminuisce o aumenta e vedo + quadrati

come si calcola la dimensione frattale:

\rightarrow con il metodo BOX-COUNTING DIMENSION (CAPACITÀ): $D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$

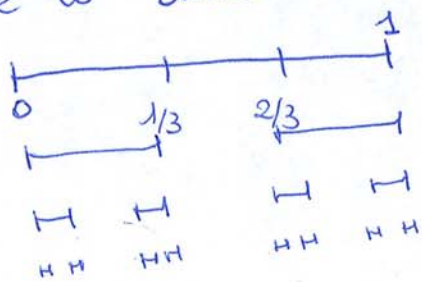
$N(\epsilon) = n^{\circ}$ quadrati o di celle, n° di cubi n -dimensionali in cui ϵ mio oggetto ϵ contenuto, al diminuire di ϵ N cresce: $N(\epsilon) \sim \frac{L}{\epsilon}$ = lunghezza curva
 \rightarrow metto $N(\epsilon)$ dentro ϵ caso bidimensionale
 $D_0 = 1$ (dimensione frattale \rightarrow dimensione curva = 1)

Se avessi, al posto della curva, 2 punti in 1 piano \rightarrow l'oggetto vive in uno spazio bidimensionale ma ϵ monodimensionale
Infatti ν presi ϵ mio prisma \rightarrow dove che il numero di quadrati contenuti nel prisma ϵ sempre solo 2:



$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 2}{\ln(1/\epsilon)} = 0$ (per $\epsilon \rightarrow 0 \rightarrow \ln(1/\epsilon) \rightarrow \infty$)

Il più semplice frattale: prendo un segmento di lunghezza 1 e lo divido in 3 parti \rightarrow tolto via la parte centrale



prendo queste divisione all'infinito steps ma successione di insieme \rightarrow CANTOR SET prende il nome di

$E_n = (\frac{1}{3})^n$ $N(\epsilon) = 2^n$ $D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}$

$D_0 = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,63$ $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D_0}$

$D_0 = 1,51 \pm 0,057 \rightarrow$ Claps
non vale solo dai 1 a 1000

di quante celle ho bisogno per avere il ricoprimento?

$$E(s) = \sum_i P_i = \sum \rho g Q s L + k \tau_0^n W L \quad (6)$$

$$\tau_0 = \rho g \gamma s, \quad \gamma \sim Q^{0.5}, \quad W \sim Q^{0.5}$$

$$E(s) = \sum \rho g Q s L + (\rho g)^n k (Q^{0.5} \cdot s)^n \cdot Q^{0.5} \cdot L = k^* \sum_i a_i L_i$$

$Q^{0.5} \cdot s = \text{cost} = k^*$

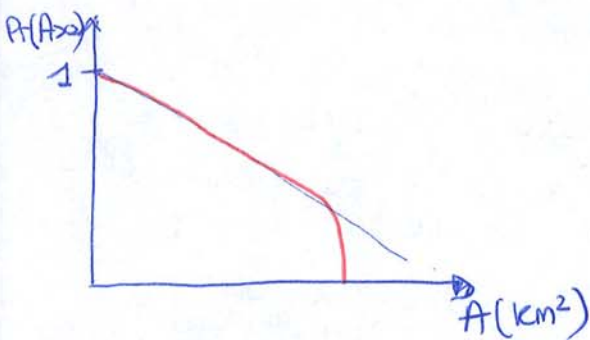
In questo secondo principio di ottimo si dice che non solo l'energia dissipata deve essere minima ma anche quella totale e la s deve essere minima $E(s)$

$$E = \min_s \{E(s)\} = \min_s \{ \sum_i a_i L_i \} \rightarrow \text{modo per generare possibili configurazioni}$$

Si come a volte non ~~abbiamo~~ le portate \rightarrow si assume che l'area sottesa va come la portata

$$E = \min_s \left(\sum_i A_i L \right) \quad A_i = \text{area sottesa}$$

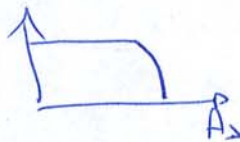
\Rightarrow queste configurazioni sono state usate per generare bacini morfologici realistici



probabilità che l'area sottesa ad 1 certo punto del bacino sia $> a_s$
 \downarrow
 empirico
 \rightarrow in scala logaritmica
 \rightarrow la risposta che ci aspettiamo è lineare
 \downarrow
 nella realtà è così fino ad 1 certo punto \approx

Come interpretare questo risultato? Voglio, x es, sapere qual è la probabilità che l'area sottesa sia maggiore di 10 km² ($= a_s$)

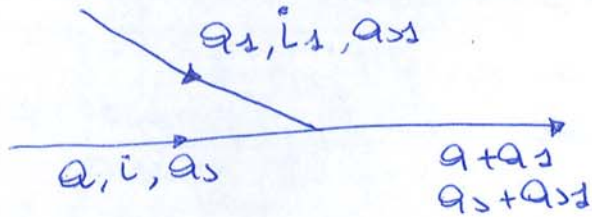
Probabilità che $A_s > a_s \Rightarrow$



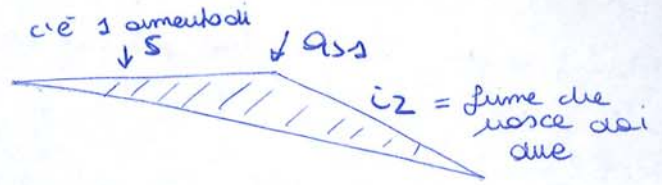
Le equazioni di Saint Venant e quelle di Shallow water valgono con determinate condizioni:

- n° di Froude non deve essere troppo alto
- rapporto tra larghezza e profondità non deve essere troppo basso
- in campo montano \rightarrow fiumi intrecciati
- in campo pianura \rightarrow meandri forme

ESEMPIO: immagino di avere 1 fiume (Q_1) che si unisce ad 1 altro fiume (Q_2)
 → nasce 1 terzo fiume



immagino che: $Q_1 \sim Q_2$ (7)
 $Q_1 > Q_2$



i_2 → cresce rispetto a i_1 ed è causato dal fatto che c'è un deposito di fango a monte c'è una diminuz. di pendenza

L'ANNO SA QUESTIONE DELLA PORTATA FORMATIVA pag 20

(= portata che riempie tutto l'abbeveratoio)
 → Qual è la portata che forma 1 certo fiume? cioè la portata + rappresentativa che prende per fare i conti

l'abbeveratoio
 forma 1 certo fiume? cioè la portata + rappresentativa che prende per fare i conti

→ risposta: approccio:



curve a = trasporto solido che va con legge di potenza
 Q_1 che cresce con legge di potenza

curve b = distribuzione di probabilità delle portate

$a \cdot b = c$ = prodotto delle frequenze per la portata solida

Prendo il max di c che corrisponde a 1 sforzo applicato ed ad 1 certa Q e non contano molto le portate frequenti ma conta il prodotto di frequenza e Q

A stress alti → Q_1 alti → quasi tutti portate intermedie → molto frequenti ma contano poco in termini di Q

quello conta è la b e la a

portata formativa → portata ^{liquida} che ha formato il fiume

Con questa notazione scuo poi le eq. di Navier Stokes (8)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \bar{u} + \bar{f} \\ \nabla \cdot \bar{u} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Dentro queste ci metto la decomposizione di Reynolds \Rightarrow quindi
 la $\bar{u} = \bar{V} + \bar{v}$ e faccio la media temporale si arriva alle
 EQUAZIONI DI REYNOLDS:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{D\bar{V}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \bar{V} - \nabla(\bar{g}\bar{z}) - \nabla \cdot (\tau) \\ \nabla \cdot \bar{V} &= 0 \quad (\text{eq. di continuità}) \end{aligned} \right.$$

\hookrightarrow pressione mediata sulla turbolenza

\Rightarrow La presenza particella di fluido subisce \pm acceleraz. a seguito di

fattori $\Rightarrow \frac{D\bar{V}}{Dt}$ = derivata totale cui da acceleraz. sulla particella

\Rightarrow l'acceleraz. \bar{e} è data da:

- 1) variazione di pressione (le particelle si muovono da pressione maggiore a minore quindi nella direz. opposta al gradiente \Rightarrow segno \ominus)

- 2) Dissipaz. viscosa:
 ν = viscosità cinematica
 $\nabla^2 \bar{V}$ = Laplaciano velocità

- 3) Le particelle sono soggette all'azione della gravità

- 4) termine nuovo che nell'eq. di Navier Stokes non c'è
 $-\nabla \cdot (\tau)$ = divergenza del tensore degli sforzi

↳ nasce dal fatto che i termini non lineari mi fanno nascere questo termine che richiede una CHIUSURA TURBOLENTE nel senso che io vorrei \pm relaz. che contenga solo quantità medie e questo non so come è fatto \rightarrow x questo ho bisogno di una chiusura turbolenta

\Rightarrow CHIUSURE TURBOLENTE \rightarrow ce ne sono molte
 \hookrightarrow la più famosa è la chiusura di Boussinesque

Condizioni al contorno su pareti solide

9

1) NON SLITTAMENTO : $u \cdot \vec{E} = 0$ (componente tangenziale della velocità è nulla sulla parete)

2) IMPERMEABILITÀ : $u \cdot \vec{n} = 0$ \vec{n} = componente normale

Condiz. che se la parete non è impermeabile non vale ma la considero perché il flusso che attraversa la parete è piccolo rispetto al resto

→ FLUSSO IPORFEO = scambio di acqua tra il canale e l'aquifero attraverso il sedimento del fiume

Questo è un problema subentrato

Per esempio le dune → c'è differenza di pressione tra monte e valle delle dune



Il materiale è permeabile
 caso in cui non vale la condizione di impermeabilità

Condizioni al contorno sulla superficie libera

1) CONDIZIONE CINEMATICA : la particella che si trova sulla superficie libera ha una velocità che deve essere pari alla velocità di traslazione della superficie libera stessa

$W = \frac{Dh}{Dt}$ = velocità di ~~involgimento~~ movimento della sup. libera
 ↓ sviluppo la derivata totale

la velocità verticale della particella che si trova sulla superficie libera è pari alla derivata tot di $h = \text{quota sup. libera}$

$\frac{dh}{dt} + U \frac{dh}{dx} + V \frac{dh}{dy} - w = 0$ ⇒ condiz. cinematica che vale per $z=h$

Lo stesso come $h_{,t} + U h_{,x} + V h_{,y} - w = 0$ si comporta come la sup. libera perciò questa formula vale anche per il fondo:

$\eta_{,t} + U \eta_{,x} + V \eta_{,y} - w = 0$ ⇒ condiz. cinematica sul fondo per $z=\eta$

1) e 2) sono indipendenti

quindi riassumendo la condizione cinematica è:

$$\begin{cases} h_{,t} + U h_{,x} + V h_{,y} - w = 0 \\ \eta_{,t} + U \eta_{,x} + V \eta_{,y} - w = 0 \end{cases}$$

$W_0 \sim U_0 \frac{Y_0}{L}$ (sto sempre parlando di ordini di grandezza quindi non considero i segni) (10)

L'ordine di grandezza della componente verticale \bar{e} : $W_0 \sim U_0 f$ molto più piccolo della componente orizzontale della velocità \rightarrow domina il flusso principale

Considero l'equazione di Reynolds nella direzione verticale: (z)

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right) + \nabla \cdot \nabla W + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g \cos \theta\right) + \nabla \cdot (\overline{WV}) = 0$$

divergenza

(trascuro le
terme di
dissipaz.
viscosa perché
domina la
dissipaz. turbolenta)

$\frac{\partial W}{\partial t} \rightarrow$ scala come $\rightarrow W = U_0 f$, $T = \text{tempo scala caratteristico} = \frac{L}{U_0}$

$$\frac{\partial W}{\partial t} \sim \frac{U_0 f}{T} = \frac{\partial U_0^2}{L}$$

$\nabla \cdot \nabla W \rightarrow$ prodotto spaziale $\Rightarrow \nabla \cdot \nabla W = U W_x + V W_y + W W_z = U_0 \frac{\partial U_0}{L} + U_0 \frac{\partial U_0}{L} + (U_0 \frac{\partial U_0}{L})$

\rightarrow ordine di grandezza: $\frac{\partial U_0^2}{L}$ \rightarrow termine più piccolo

$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g \cos \theta \approx g$

\approx - ordini di grandezza

$\nabla \cdot (\overline{WV}) = \frac{1}{L} \frac{U_* Y_0}{10} \frac{U_0}{Y_0}$

dimostro presto ultimo punto:
divergenza = derivata nello spazio \rightarrow ordine di grandezza $\frac{1}{L}$

$$\frac{\nabla \cdot (\overline{WV})}{\frac{1}{L}} \approx \overline{V_i V_j} = \int_T \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \dots$$

che si può implorare nelle prime

$$= O(U_0) \left(\frac{U_0}{Y_0} \right)$$

$$v_T = k \sqrt{z} \left(1 - \frac{z}{Y} \right) \approx U_* \cdot \frac{1}{Y} \int_0^T k z \left(1 - \frac{z}{Y} \right) dz \approx Y \cdot 0.067 \approx U_* \frac{Y}{10}$$

0.41 cost di von Karman *media su fronte della funzione di z*

1 Confronto A e B \rightarrow hanno lo stesso ordine di grandezza
 2 Confronto A o B con C \rightarrow dico che $A \text{ o } B \ll C$ se $\frac{\partial U_0^2}{L g} \ll 1 \rightarrow \frac{\partial Y_0 U_0^2}{L g Y_0} \ll 1$
 siccome $\frac{U_0}{\sqrt{g Y_0}} = Fr \Rightarrow \frac{\partial^2 Fr^2}{Fr^2} \ll 1 \Rightarrow$ quindi se $\frac{\partial^2}{Fr^2} \ll \frac{1}{Fr^2}$ posso trascurare A e B
 questo comporta che Fr non sia enni troppo alto perché se Fr è troppo alto $\rightarrow \frac{1}{Fr^2}$ è piccolo e non è detto che la relazione sia soddisfatta \Rightarrow Dico quindi che posso trascurare A e B solo se Fr non è troppo alto quindi \rightarrow

Queste 3 equazioni sono ancora tridimensionali perché rimangono come incognite w , tra le incognite è spunta la curva di moto (14)

Queste equazioni sono state utilizzate per risolvere il moto del cordale nei fiumi meandrosi che è a campo di moto tridimensionale

Siamo quindi nell'ipotesi di acque basse ma comunque siamo ancora in campo 3D.

Ora possiamo al modello 2D che vede soltanto per due componenti di velocità \rightarrow una longitudinale e una trasversale, non vede più quella verticale perché le equazioni scritte prima vengono mediate sulla verticale: per poter far la media sulla verticale dobbiamo definire una velocità mediata sulla verticale

$$\bar{U} = \text{media di } U \text{ rispetto a } z \Rightarrow \bar{U} = \frac{1}{Y} \int_{\eta(x,y,t)}^{\bar{h}(x,y,t)} U(x,y,z,t) dz$$

$$\bar{V} = \text{ " " } \Rightarrow \bar{V} = \frac{1}{Y} \int_{\eta(x,y,t)}^{\bar{h}(x,y,t)} V(x,y,z,t) dz$$

Ricordo la regola di Leibniz:
 $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x,z) dz = \int_a^b \frac{df}{dx} dz + \frac{f(x,b)}{dx} \frac{db}{dx} - \frac{f(x,a)}{dx} \frac{da}{dx}$
 perché a e b dipendono da x perciò ho anche *

Noi però usiamo questa regola al contrario:

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dz = \frac{d}{dx} \int_a^b f dz - \frac{f(x,b)}{dx} \frac{db}{dx} + \frac{f(x,a)}{dx} \frac{da}{dx}$$

Questa regola serve perché \Rightarrow prendendo l'equazione di continuità:

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0 \text{ e applico l'integrale tra } \eta \text{ e } \bar{h}$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{\eta}^{\bar{h}} U dz - U|_{\bar{h}} \cdot \frac{d\bar{h}}{dx} + U|_{\eta} \cdot \frac{d\eta}{dx}$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{d}{dy} \int_{\eta}^{\bar{h}} V dz - V|_{\bar{h}} \cdot \frac{d\bar{h}}{dy} + V|_{\eta} \cdot \frac{d\eta}{dy}$$

$$\frac{dW}{dz} = W|_{\bar{h}} - W|_{\eta}$$

se ricordo ~~che~~ le condizioni cinematiche;

$$1) \frac{d\bar{h}}{dt} = -U|_{\bar{h}} \frac{d\bar{h}}{dx} - V|_{\bar{h}} \frac{d\bar{h}}{dy} + W|_{\bar{h}} \rightarrow \text{c. cinematica per la sup. libera}$$

$$2) \frac{d\eta}{dt} = -U|_{\eta} \frac{d\eta}{dx} - V|_{\eta} \frac{d\eta}{dy} + W|_{\eta} \rightarrow \text{condiz. cinematica per il fondo}$$

se confronto queste due con $\bullet \bullet \rightarrow$ vedo che sono uguali

quindi $\frac{dU}{dt} + \vec{V} \cdot \nabla U$ posso scriverlo come:

(12)

$$\frac{1}{\rho} [\bar{U}_{,t} + \bar{U}U_{,x} + \bar{V}U_{,y}] = \frac{1}{\rho} [(\gamma T_{xx}^{disp})_{,x} + (\gamma T_{xy}^{disp})_{,y}]$$

Ora vedo cosa succede se considero la divergenza

$$\int_{\eta}^h \nabla \cdot (\bar{U}\vec{V}) dz = - \int \frac{1}{\rho} \left[\frac{dT_{xx}}{dx} + \frac{dT_{xy}}{dy} + \frac{dT_{xz}}{dz} \right] dz =$$

ora uso Leibniz: *

$$= - \frac{1}{\rho} \left[-T_{xx}|_h \frac{dh}{dx} - T_{xy}|_h \frac{dh}{dy} + T_{xz}|_h + T_{xx}|_{\eta} \frac{d\eta}{dx} + T_{xy}|_{\eta} \frac{d\eta}{dy} + T_{xz}|_{\eta} + \frac{d}{dx} (\gamma \tilde{T}_{xx}) + \frac{d}{dy} (\gamma \tilde{T}_{xy}) \right]$$

definisco il vettore normale: $\vec{n}_s = \frac{1}{|\nabla F_n|} (-h_{,x}; -h_{,y}; 1)$

se prendo l'equaz. * per x e y e non più per z:
per il mio sistema coordinate x-esima in z=h

* legg la 1^a x e come: $(T_{xx})_h, (T_{xy})_h, (T_{xz})_h \cdot \vec{n}_s |\nabla F_n| = \frac{[t_x]_{z=h}}{n_z^s} \approx [t_x]_h$
approssimazione = 1

$$|\nabla F_n| = \sqrt{1 + h_{,x}^2 + h_{,y}^2} \approx 1$$

* $(T_{xx})_{\eta}, (T_{xy})_{\eta}, (T_{xz})_{\eta} \cdot \vec{n}_s |\nabla F_n| = \frac{[t_x]_{z=\eta}}{n_z^s} \approx [t_x]_{\eta}$
è un' approssimazione più grande rispetto a $n_z^s = 1$ perché

approssimazione meno forte



quindi posso scrivere tutto (*) come:

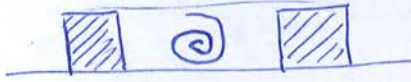
$$\frac{1}{\rho} \int_{\eta}^h \nabla \cdot (\bar{U}\vec{V}) dz = \frac{1}{\rho} [(\gamma \tilde{T}_{xx})_{,x} + (\gamma \tilde{T}_{xy})_{,y}] - \frac{T_x^s + T_x^f}{\rho \gamma}$$

quindi riscrivo l'equazione di partenza
1^a equazione del modello shallow water 2D:
 2^a equazione del modello shallow water 2D:

$$\bar{U}_{,t} + \bar{U}\bar{U}_{,x} + \bar{V}\bar{U}_{,y} = -g\gamma_{,x} + \frac{T_x^s + T_x^f}{\rho} + \frac{1}{\rho\gamma} [(\gamma \hat{T}_{xx})_{,x} + (\gamma \hat{T}_{xy})_{,y}]$$

$$\bar{V}_{,t} + \bar{U}\bar{V}_{,x} + \bar{V}\bar{V}_{,y} = -g\gamma_{,y} + \frac{T_y^s + T_y^f}{\rho} + \frac{1}{\rho\gamma} [(\gamma \hat{T}_{xy})_{,x} + (\gamma \hat{T}_{yy})_{,y}]$$

curvatura, qui è molto debole \Rightarrow modello 2D shallow water (13)



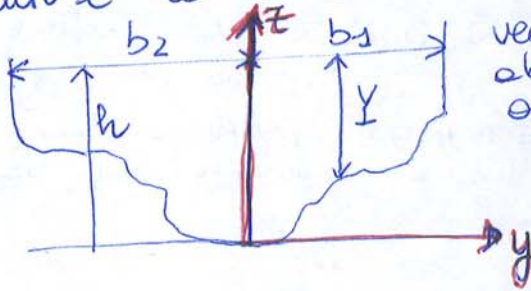
In questo caso si crea una situazione si crea una separazione della corrente, è vero che ci sono correnti secondarie ma sono ad una verticale
 \downarrow
 modello 2D

MODELLO 1D \rightarrow va bene quando dobbiamo studiare i profili di superficie idrodinamici

Introduco un rapporto: $\epsilon = \frac{b}{L} \ll 1$
 \rightarrow scala trasversale
 \rightarrow scala longitudinale

Avevo più definito $\delta = \frac{y_0}{L} \ll 1$

Con queste ipotesi è possibile trascurare la 2^a equazione del moto e le vibrazioni lungo y di h (traccia $\frac{dh}{dy}$) \Rightarrow assumo che vedendo la sezione del fiume questo abbia pelo libero sostanzialmente orizzontale.



$b = |b_1| + |b_2| =$ larghezza pelo libero
 $h =$ quota pelo libero

- 1) faccio 1 media verticale (come avevo più fatto nel modello 2D)
 - 2) faccio anche una media trasversale (media rispetto a y) \Rightarrow integro il dy per arrivare ad 1 equazione che ha 1 unica variabile \bar{U} mediata su tutta la sezione
- Il risultato di questa è l'equazione di De Saint Venant

$$\bar{U} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} U d\Omega = \frac{1}{\Omega} \int_{b_2}^{b_1} \int_{\eta}^h U dz dy$$

$\Omega =$ sezione trasversale

COEFF DI RAGGUAGLIO: $\beta = \frac{1}{\bar{U}^2 \Omega} \int_{\Omega} U^2 d\Omega$

\rightarrow dice che il profilo di velocità non è uniforme. se il profilo di velocità fosse uniforme $\Rightarrow \beta = 1$
 \rightarrow spesso comunque β viene preso = 1

otengo così:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} + \frac{d}{dx} \left(\beta \frac{Q^2}{\Omega} \right) &= -g \Omega \frac{dh}{dx} + \frac{B}{\rho} \tau \end{aligned} \right.$$

$B =$ perimetro bagnato
 " lunghezza totale

se ho 1 profilo rettangolare largo β circa = 1

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{dQ}{dx} &= 0 \rightarrow \text{eq. di continuità} \end{aligned} \right.$$

\rightarrow EQ. DI DE SAINT VENANT

Nei canali sperimentali:

$$E = \begin{cases} 2D_{65} \rightarrow \text{HENGELIND-HANSEN} \\ 2D_{90} \rightarrow \text{KAMPHUS} \\ 2D_{50} \rightarrow \text{YANG} \end{cases}$$

Nella realtà i valori sopposti sono diversi: vedi tabellata pag 2 slide 3

Assumendo che l'equazione del profilo di velocità sia vera ovunque e se la integri usi nel calcolo la media \rightarrow ottieni:


$$C = \frac{\bar{v}}{v_*} = 2,5 \ln \left(\frac{11Y}{E} \right) \quad Y = \text{tirante}$$


(in realtà questa eq. vale solo per il primo 20% perciò si usa 1 altra eq.)

Si usa un'equazione che corregge quella sopra perché tiene conto del fatto che il profilo di velocità è logaritmico per il primo tratto ma poi nella realtà abbiamo una funzione di scivolo che corregge la parte più alta:

EQUAZIONE DI KEULEGAN: $C = \frac{\bar{v}}{v_*} = 2,5 \ln \left(\frac{\alpha R_i}{E} \right)$

α = fattore di forma che tiene conto della forma del canale e dell'effetto delle pareti

$\alpha = 11$  \rightarrow canali rettangolari lisci

$\alpha = 12,2$  \rightarrow canali trapezoidali lisci

$\alpha = 13$  \rightarrow canali circolari

In generale $C = \frac{\tau}{\rho g}$ ma l'eq. di Keulegan viene usata abbastanza nella pratica

Tutto quello che abbiamo studiato fin ora vale per tubi idraulicamente scabro
 Se vuoi studiare canali artificiali \rightarrow potrei avere tubi idraulicamente liscio \rightarrow se vuoi una formula che tiene conto di entrambi:





(formula di Colebrook o di White \rightarrow serve a questo)

FORMULA DI MARCHI: $C = -2,5 \ln \left(\frac{C}{Re \cdot f} + \frac{E}{13,3 R_i \cdot f} \right)$

(implicita)

dove: \bullet n° di Reynolds: $Re = \frac{4R_i v}{\nu}$

\bullet f = fattore di forma

- $\leftarrow = 1,3 \div 1,25$  (canali)
- $\leftarrow = 0,8$ 
- $\leftarrow = 0,95$ 
- $\leftarrow = 0,8$  (canali)

$$\overline{T_{0f}} = \rho g i_f R_i = \frac{\rho \overline{U}^2}{\overline{C}^2} = \frac{\rho g C_f}{\overline{C}^2} \left[\frac{1}{\Omega} \int_{-b_2}^{b_1} c(y) Y^{3/2} dy \right]^2 \quad (15)$$

* ↓ conduttanza mediana *

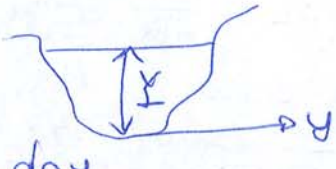
Uguaglio * e * ed esplicito \overline{C} :

$$\overline{C} = \frac{1}{\Omega \sqrt{R_i f}} \int_{-b_2}^{b_1} c(y) Y^{3/2} dy$$

* ↓ conduttanza locale * conduttanza equivalente per forme pancia

in $c(y)$ ci mette una delle formule citate prima come per esempio la formula di Keulegan
 Questo valore di conduttanza equivalente va usato per mettere nella formula di Chezy

C dipende da y perché C dipende da Y che dipende da y :

$$C = \frac{\chi}{\sqrt{g}} = \frac{k_s Y^{1/6}}{\sqrt{g}} = \frac{k_s(y) Y(y)^{1/6}}{\sqrt{g}}$$


ma poi anche era che k_s dipende da y
 sempre per dotti rettangolari per i coefficienti α e β che sono calcolati i COEFFICIENTI GRADUALI α e β :

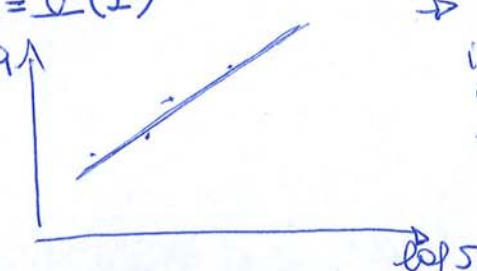
$$\beta = \frac{\int_{\Omega} U^2 d\Omega}{\overline{U}^2 \Omega} = \frac{\int_{-b_2}^{b_1} Y U dy}{\overline{U}^2 \Omega} = \frac{\Omega \int_{-b_2}^{b_1} c^2(y) Y^2 dy}{\left[\int_{-b_2}^{b_1} c(y) Y^{3/2} dy \right]^2}$$

→ β che compare nelle eq. di De Saint Venant

\overline{U} = velocità mediana sulla verticale)
 $\alpha = \frac{\int_{\Omega} U^3 d\Omega}{\overline{U}^3 \Omega} = \frac{\Omega \int c^3 Y^{5/2} dy}{\left[\int c Y^{3/2} dy \right]^3}$
 $\alpha = 1$ per sezioni rettangolari larghe
 α → compare nella defniz. di conco specifico E

$$E = Y + \alpha \frac{\overline{U}^2}{2g}$$

Scala di deflusso (moto uniforme)
 relazione: $Q = k \Omega^m$ (che ha forma di legge di potenza) (in scala logaritmicamente diventa una retta *)
 serve per misurare le portate in 1 fiume conoscendo la sezione Ω

$Q = Q(Y)$
 * $\log Q$ ↑

 ↓ $\log \Omega$

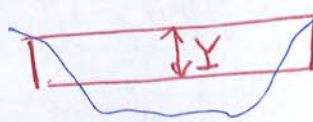
→ con pochi punti ⇒ interpolare
 in senso inverso ⇒ misurare di livello in un caso Y → se conosco $Q(Y)$ → conosco la portata

MOTO PERMANENTE

(16)

$$E = Y + \alpha \frac{Q^2}{2gY^3}$$

media di tutta la sezione, non viene in conto la sezione → in questo caso la Y non dipende da q



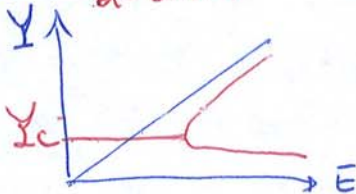
Se fino la portata: $Q = \text{cost}$
 ⇒ se faccio la derivata di E rispetto a Y e ponendola uguale a 0 ottengo l'altezza critica che minimizza l'energia specifica:

$$\frac{dE}{dY} \Big|_Q = 0 \Rightarrow \text{ottengo } Y_c \text{ tale che } E = E_{\min}$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{Q^3}{b} \right) Y = Y_c = \alpha \frac{Q^2}{g}$$

⇒ condizione per il calcolo dell'altezza critica a portata costante

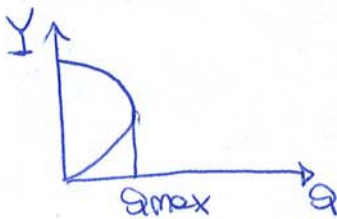
Per sezione rettangolare: $Y_c = \left[\alpha \frac{Q^2}{g b^2} \right]^{1/3}$



piccole variazioni del corso specifico comportano grandi variazioni del fronte

Se fino il corso specifico e lascio variare la portata: $E = \text{cost}$
 ⇒ $\frac{dQ}{dY} \Big|_E = 0$ ottengo Y_c tale che $Q = Q_{\max}$

$$\hookrightarrow Y_c | E + \left(\frac{Q}{2b} \right)_{Y_c} = E$$



Per sezione rettangolare: $Y_c = \frac{2}{3} E$

pendenza critica = si calcola a portata costante ed è la pendenza tale per cui l'altezza critica è pari all'altezza di moto uniforme.
 ⇒ per 1 certa portata → quando l'altezza critica è uguale all'altezza di moto uniforme si sono in condizioni di pendenza critica.
 fondo = pendenza critica.

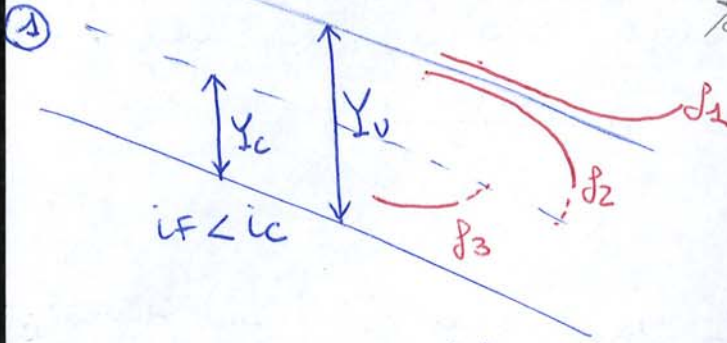
$$i_c = \left[\frac{Q^2}{C^2 g R_i^2 \Omega^2} \right]_{Y=Y_c} = \frac{\Omega^3}{\alpha C^2 b R_i^2 \Omega^2} = \frac{B}{\alpha C^2 b}$$

↳ $\frac{Q^2}{g} = \frac{\Omega^3}{\alpha b}$ $\frac{\Omega}{R_i} = B$ → per tutte le sezioni

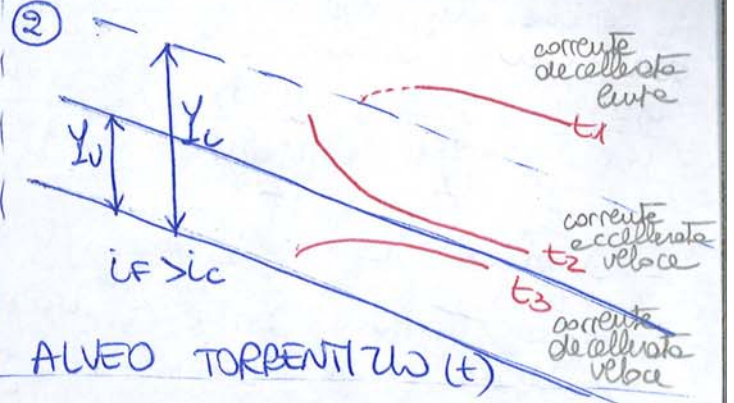
se la sezione è rettangolare allora: $i_c = \frac{1}{C^2}$

possibili profili di superficie

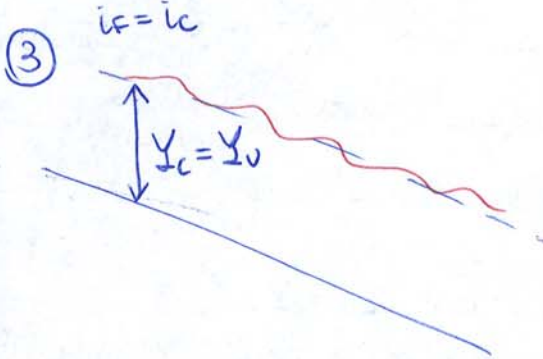
(si trattava di par. che si avvicinava alla Y_c perché in prossimità di Y_c non sono + valide le approssimaz. (17)



ALVEO FLUVIALE (f)



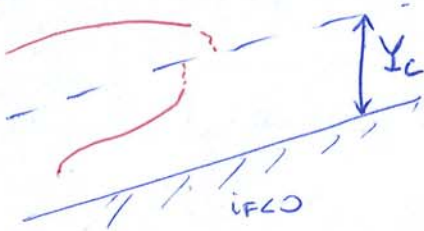
ALVEO TORRENTIZO (t)



In questo caso la superficie è ondulata perché il moto uniforme vero e proprio non esiste perché in prossimità di Y_c piccole variaz. di E mi danno grandi variaz. di Y

④ $i_f < 0$

non esiste moto uniforme



$$\frac{dY}{dx} = \frac{i_f - J}{\frac{dE}{dY}} \quad \text{se } i_f < 0 \rightarrow N < 0 \text{ sempre}$$

$D > 0 \rightarrow$ (corrente lenta)
 $\hookrightarrow \frac{dY}{dx}$ negativo \rightarrow accelerato

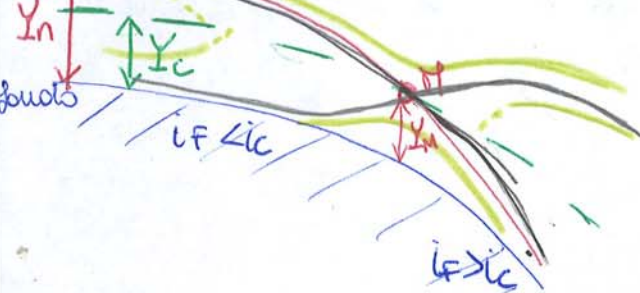
$D < 0 \rightarrow$ corrente veloce
 $\hookrightarrow \frac{dY}{dx}$ positivo \rightarrow corrente decelerata

CASO 1:

(18)

$a > 0 \Rightarrow$ aumento della pendenza verso x
 se $a > 0 \rightarrow$ il termine sotto radice è positivo perciò le soluzioni sono reali però solo una positiva e l'altra negativa perché $\sqrt{b^2+4ac}$ è sicuramente maggiore di b

quindi:
 $a > 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ } 2 soluzioni



$Y_n =$ altezza normale

soluzioni: $\rightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ } possono per M e intersecare Y_c

Altre possibili soluzioni tra le 2 soluzioni (λ_1 e λ_2)

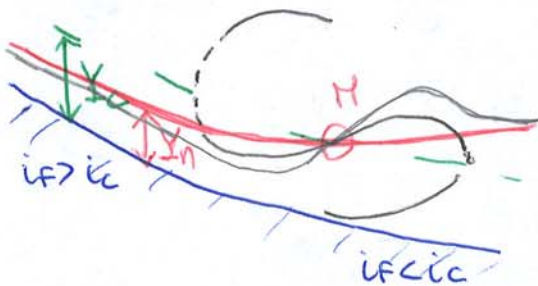
- Y_c non dipende dalla pendenza ma dalla portata che ci sia passando sopra
- $Y_n > Y_c$ finché $if < ic$, $Y_n < Y_c$ quando $if > ic$, Y_n interseca Y_c nel punto singolare

$a = \frac{dif}{dx} > 0, b = \frac{3ic}{Y_c} > 0, c = \frac{3}{Y_c} > 0$

CASO 2: $a < 0 \Rightarrow \frac{dif}{dx} < 0$ e $b^2+4ac > 0 \rightarrow \left| \frac{dif}{dx} \right| < \frac{3}{4} \frac{ic^2}{Y_m}$

ci sono due casi di $a < 0$

La pendenza del fondo in val. or. deve essere minore di $\frac{3}{4} \frac{ic^2}{Y_m} \Rightarrow$ siamo in 1 situazione di diminuzione verso valle della pendenza del fondo ma questa diminuzione è molto debole



~~Il caso~~
 Possesso da corrente veloce a corrente lenta \rightarrow di solito ci si aspetta sempre un salto quando in realtà quando il possesso è graduale ci sono delle condiz. in cui questo può non avvenire.

Questo è il caso: possesso graduale da corrente veloce a corrente lenta \Rightarrow la pendenza verso valle avviene subito.

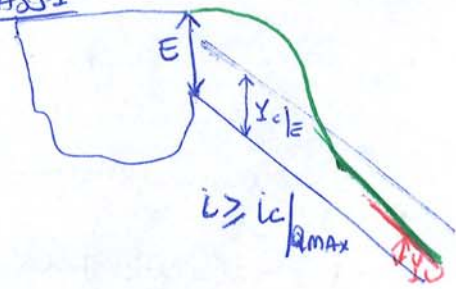
Se come il discriminante è $> 0 \Rightarrow$ 2 soluzioni reali entrambe positive: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ e $\lambda_2 < \lambda_1$

asintotica a Y_n sia a monte che a valle \rightarrow possesso da corrente veloce a corrente lenta \rightarrow questo può avvenire solo in questa condiz.
 ma 1 po' più in basso (pari trapezoidale = pari che non hanno senso)

PROBLEMA DA SERBATOIO

19

CASO 1



Visto che nel serbatoio l'acqua è ferma, il livello del serbatoio è uguale al carico specifico E .
 Uguale capire se nel canale si instaura una corrente veloce o una corrente lenta.

Posso già calcolarmi l'altezza critica con carico specifico assegnato: $Y_{c|E}$

Immaginando che al canale di derivazione sia rettangolare largo:

$Y_{c|E} = \frac{2}{3} E = Y_{c|Q_{max}}$ $\rightarrow Y_{c|E}$ corrisponde all'altezza di moto uniforme quando defluisce la massima portata nel canale

$$E = Y_{c|E} + \frac{Q_{max}^2}{2gb^2 Y_{c|E}^2}$$

$$Y_{c|E} = \frac{2}{3} E$$

$$Q_{max} = b Y_{c|E} \sqrt{2g(E - Y_{c|E})} = b \frac{2}{3} E \sqrt{2g \frac{E}{3}} = \left(\frac{2}{3} E\right)^{3/2} b \sqrt{g}$$

Le conosco E (così se E è assegnato) \Rightarrow conosco il valore di Q_{max} derivabile da quel canale.

Quali sono però le condizioni per cui posso arrivare a Q_{max} ?
 - posso giocare sulla pendenza:

se $Y_u < Y_{c|E} \equiv Y_{c|Q_{max}} \Rightarrow$ allora il profilo diventa di corrente veloce
 quindi se questa condizione è soddisfatta \rightarrow si deriva la Q_{max}
 ma questa condizione è soddisfatta quando:

$$i \geq i_{c|Q_{max}} = \frac{1}{C^2 (Y_{c|Q_{max}})^3}$$

Recapitolando:

Abbiamo il valore di $E \Rightarrow$ calcolo $Q_{max} \Rightarrow$ posso calcolarmi i_c perché questo dipende solo dalla portata \rightarrow se $i \geq i_c \Rightarrow$ significa che defluisce la portata massima

$$Q(Y_u) = C b Y_u \sqrt{g Y_u i}$$

$$Q_{MAX} = \left(\frac{2}{3} E\right)^{3/2} b \sqrt{g}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q(Y_u) = Q_{MAX} \\ Q_{MAX} = \left(\frac{2}{3} E\right)^{3/2} b \sqrt{g} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{Y_u}{Y_{c|E}} = \left[\frac{1}{i C^2} \right]^{1/3}$$

MECCANICA DEI SEDIMENTI

(20)

definizioni:

CURVA GRANULOMETRICA = distribuzione percentuale in peso dell'ammasso granulometrico

dimensioni comprese

$$\left[\frac{1}{16} \text{ mm}, 16 \text{ mm} \right]$$

La distribuzione granulometrica è voluta attraverso setaccio con maglie diverse che si impilano uno sopra l'altro e poi vengono fatti vibrare tutti insieme al modo tale che l'ammasso granulometrico passi solo attraverso alcuni setacci e poi su ogni setaccio si va a raccogliere la quantità di sedimento raccolto

dimensioni $< \frac{1}{16} \text{ mm}$ → no setaccio, ma altre modalità
 ↳ VALUTAZIONE della VELOCITÀ DI SEDIMENTAZIONE

~~Siccome i grani possiedono diametri diversi~~
 Siccome i sedimenti ~~possiedono~~ contemporaneo il spettro di dimensioni non uniformi perciò la trattazione più generale è quella statistica → costruire una distribuzione cumulata di probabilità da cui tiro fuori una distribuzione di densità di probabilità.

Scale tipica usata: **SCALA SEDIMENTOLOGICA:**

$$\psi = \log_2 d \quad (d = \text{diametro in mm})$$

ai valori di d che fornisce la tabella della granulometria corrispondono valori di ψ della scala sedimentologica.

per $d = 2 \text{ mm}$ → c'è il limite per cui $\psi = 0$ → passaggio da positivo a negativo corrisponde al limite sabbioso-gruoso

Se $P(d_x)$ = probabilità cumulata della distribuzione granulometrica è nota → peso ricorrenza \geq di massa in peso più ~~possa~~ grande rispetto ad d_x -esimo.

$$P(d_x) = \frac{x}{100}$$

es $P(d_{84}) = \frac{84}{100} = 84\%$ (d_{84} è quel diametro per cui l'84% in peso dei ~~di~~ diametri dell'ammasso granulometrico è più pesante quel valore)

di è tale che la percentuale pari a $\frac{i}{100}$ dell'ammasso granulometrico è più fine di d_i -esimo.

l'intensità della distribuzione granulometrica viene espressa ovunque gaussiana → in tal caso (solo in questo caso): $d_{50} = \sqrt{d_{84} \cdot d_{16}}$

Le componenti di G sono $\left. \begin{array}{l} \text{normale al piano} \\ \text{tangenziale al piano} \end{array} \right\}$ 21

$G_N = C_N$
 $G_T = C_t$ } $\rightarrow \frac{G_T}{G_N} = \frac{C_t}{C_N} = \gamma = \tan \phi = \text{ANGOLO DI ATTRITO INTERNO}$
 (è quello che si misura negli esperimenti)

\downarrow

$C_t = \gamma C_N$

\rightarrow la componente tangenziale è proporzionale alla reazione vincolare

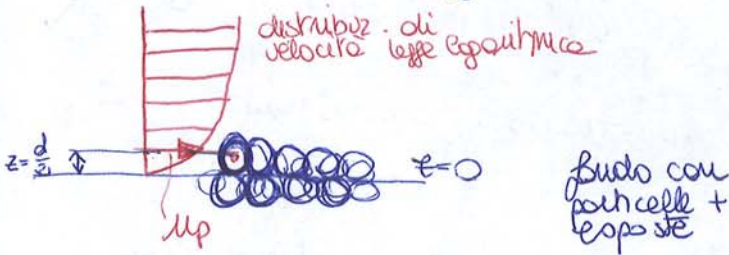
SABBIA : $\phi = 30^\circ$

GHIAIA : $\phi = 40^\circ$

Formula di ~~Reynolds~~ $\phi = 32,5 + 1,27 \cdot d_{50}(\text{mm})$

VELOCITÀ DELLA CORRENTE AD UNA QUOTA di $\frac{d}{2}$

U_p = velocità della corrente ad una quota (intesa, rispetto al fondo)
 pari a $z = \frac{d}{2}$ = BARICENTRO PARTICELLA



\Rightarrow FONDO SCABRO ($Re_* = \frac{U_* d}{\nu} \geq 70$):

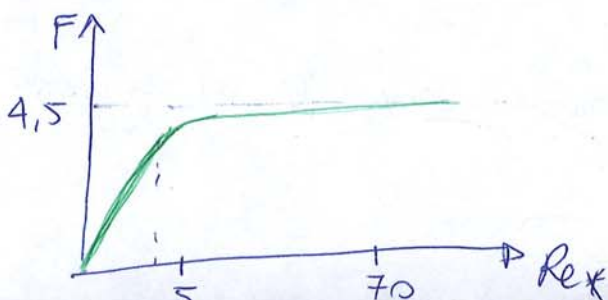
$$\frac{U(z)}{U_*} = \frac{1}{K} \ln\left(30 \frac{z}{d}\right) \rightarrow \frac{U(z=\frac{d}{2})}{U_*} = \frac{U_p}{U_*} = F = \frac{1}{K} \ln\left(30 \frac{\frac{d}{2}}{2,5d}\right) = \frac{1}{K} \ln(6) \approx 4,5$$

$\approx 0,41$

$\rightarrow F \approx 4,5 \rightarrow$ velocità particella normalizzata a U_*

\Rightarrow FONDO LISCIO ($Re_* = \frac{U_* d}{\nu} < 5$)

$$\frac{U(z)}{U_*} \approx y^+ = \frac{z U_*}{\nu} \quad \frac{U_p}{U_*} = \frac{U(z=\frac{d}{2})}{U_*} = \frac{d U_*}{2\nu} = \frac{Re_*}{2}$$



• Come sedimenta la particella vicino alla parete per esempio in un tubo verticale che potrebbe essere per esempio un piezometro:
EFFETTO DELLE PARETI:

Velocità di sedimentazione: $V = V_s \left[1 + \frac{9}{4} \frac{d}{D} + \frac{9}{4} \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]$

d = diametro particella

D = diametro tubo

• ALTRA FORMULA
 Per ogni d :

$$V = \frac{\rho}{9} \frac{\sqrt{g}}{dn} \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{4}{3} \frac{g}{\rho^2} D_*^3 \right)^{1/3} - \frac{1}{2} \right]^M$$

($\rho, g, M \rightarrow$ tabella)

$$D_* = dm \left(\frac{(\rho_s - \rho)g}{\nu^2} \right)^{1/3}$$

$$dm = \frac{d}{0.9}$$

$$\rho = \frac{26}{(1-C)^{4.7}}$$

$$\theta = \frac{1.3}{(1-C)^{4.7}}$$

concentraz. volumetrica del sedimento sospeso

Soulsby, 1997

ottima per la sabbia
 (Stokes ~~era~~ sabbia) non vale per

Quando la corrente è molto concentrata come Soulsby che ha proposto una corrente infatti se $C=0 \rightarrow$ numeri tabella perché quando il sedimento è per concentrato le particelle interagiscono tra loro \rightarrow si influenza la V_s

All'aumentare della tensione sul fondo si passa da tensioni molto basse \rightarrow onere di trasporto solido, poi la τ aumenta e supera una certa tensione critica si ~~ha sempre~~ osserva trasporto solido di fondo (si è definita una spha), superata la spha quindi inizia ad avere trasporto solido di fondo che inizialmente è dovuto alla traslazione delle particelle (= slittamento) poi se aumenta τ il trasporto è per rotolamento, poi se aumenta ancora inizia il saltellamento, quando il saltellamento inizia ad avere così distacco che considera tutta la corrente fluida si comincia a perdere anche di trasporto solido sospeso, quindi si definisce una ulteriore spha superata la quale si considera il sospeso

Ora vedo a definire le spha:

1) TRASPORTO INCIPIENTE DEL SOLIDO DI FONDO

Da analisi dimensionale e teorema Π si scrive:

TENSIONE DI SHIELDS: $\tau_c^* = f(\text{Re}_p, \psi, G)$

fattore di forme di Corey

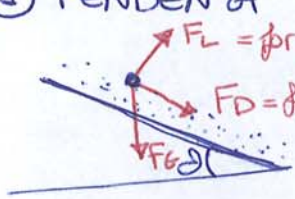
Re_p particellare

funzione di nascondimento (hiding)

Dipendenza di τ_c^* dall'inclinazione del fondo

Prima inclinaz. possibile:

① PENDENZA LONGITUDINALE



ϕ = angolo di attrito interno
 θ = pendenza

forze sulla particella (in equilibrio) $\left\{ \begin{array}{l} F_L = \text{portanza} \\ F_D = \text{Drag} \\ F_G = \text{peso} \end{array} \right.$

• \rightarrow particella più esposta al campo di moto (sitaz. di imminente equilibrio)

- $F_G = (\rho_s - \rho) g k_1 d^3$ volume particella
- $F_L = C_L \rho k_2 d^2 U_p^2 = C_L k_2 d^2 F^2 \tau_0$
- $F_D = C_D \rho k_2 d^2 U_p^2 = C_D k_2 \phi^2 F^2 \tau_0$

$$U_p = F U_* = F \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

$$\tau_c^* = \frac{\tau_0}{(\rho_s - \rho) g d}$$

Equilibrio:

(Forze normali) $\cdot \tau_p \phi$ = forze di trascinamento
forze resistenti

forze normali

$$(F_G \cos \theta - F_L) \tau_p \phi = F_G \sin \theta + F_D \quad \text{sostituendo, semplificando} \rightarrow$$

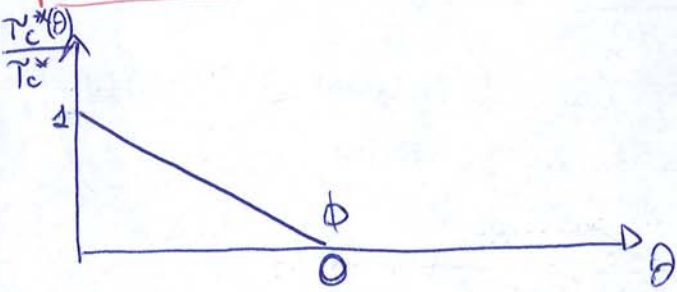
$$\left(k = \frac{k_1}{k_2 F^2} \frac{1}{C_D + C_L \tau_p \theta} \right) \quad \tau_c^*(\theta) = k (\tau_p \phi \cos \theta - \sin \theta)$$

$$\tau_c^*(\theta=0) = k \tau_p \phi \rightarrow \text{cos di shields}$$

$$\frac{\tau_c^*(\theta)}{\tau_c^*(0)} = \cos \theta \left(1 - \frac{\tau_p \theta}{\tau_p \phi} \right)$$

l'espressione da ricordare!

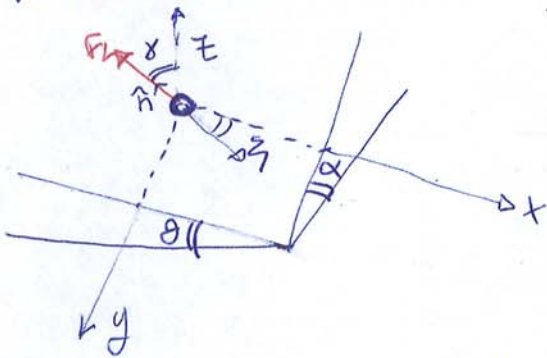
\Rightarrow dice come calcolare la corrente in funzione di questo angolo pendenza θ \rightarrow non trascurabile



no strettamente lineare
 ma per $\phi < 40^\circ \rightarrow$ la curva è lineare
 $\theta = \phi \Rightarrow \tau_c^* = 0$

③ CASO + GENERALE: PENDENZA LATERALE + PENDENZA LONGITUD. (2a)

In questo caso la soluzione non è data dalle 2 soluz. precedenti.



x = pendenza fiume che è molto minore di θ
 ξ = incognita e priori = inclinazione campo di moto

$$\begin{cases} F_R^2 = (F_p \cos \xi + F_g \operatorname{sen} \theta)^2 + (F_p \operatorname{sen} \xi + F_g \operatorname{sen} \alpha)^2 \\ F_R = (F_g \cos \gamma - F_L) \operatorname{tg} \phi \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{EQUILIBRIO} \\ \text{COURLOT B} \end{matrix}$$

$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$ coseno direttore del piano
 → componente della normale nella direzione z
 $\uparrow 1 + \frac{d \cdot}{dx} + \frac{d \cdot}{dy} = \text{grad del piano}$

Soluzione: $\frac{\tau_c^*(\theta, \alpha)}{\tau_c^*} = \frac{1}{(1 - \eta \gamma) \gamma} \left\{ -(\xi_0 + \gamma \cos \gamma)^2 + \sqrt{(\xi_0 + \gamma \cos \gamma)^2 - (1 - \eta \gamma)^2 \frac{\xi_0^2}{\cos^2 \gamma}} \right\}$

$$\begin{cases} \xi_0 = \cos \gamma \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \theta \\ \xi_0^2 = \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \alpha \end{cases}$$

Espressione approssimata (Drau, 2001): $\frac{\tau_c^*(\theta, \alpha)}{\tau_c^*} = \frac{\operatorname{sen}(\phi - \theta)}{\operatorname{tg} \phi} \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \phi}}$

ETEROGENEITÀ GRANULOMETRICA

In realtà la granulometria non è uniforme = ETEROGENEA quindi subentra il fattore di nascondimento (hiding)

Avevo diametri diversi la matrice + fine resta nascosta rispetto ai grani più grossi → la granulometria più piccola ha tensioni di immobilizzazione più piccole.
 Al contrario, il grano grosso è più esposto, la tensione scende e si immobilizza



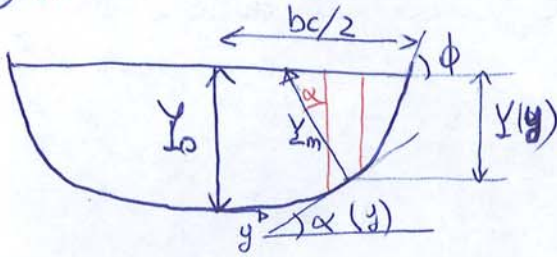
Occorre allora tenere conto dell'omogeneizzazione:

L'omogeneizzazione mira a uniformare dimensionalmente τ_c^* sulle tensioni:

$$\tau_c^* = 0,03 = \frac{\tau_0}{\rho g \Delta d}$$

b) *Analisi di Glover e Floren (1951)*

25



Nota la forma: trapezoidale, profondità massima Y_0

Scopo: come Y dipende da y ?

Assunto l'angolo della sponda pari ϕ

Approssimazione: trascurare l'effetto della ridistribuzione degli sforzi al fondo ad opera delle tensioni di Reynolds

$$\tau_0(y) = \gamma R_i(y) i_f = \gamma \frac{d\Omega}{dB} \Big|_y i_f = \gamma Y_n i_f = \gamma \frac{Y}{\cos \alpha} i_f$$

$$\tau_c(\alpha) = \tau_c \cos \alpha \sqrt{1 - \frac{\tau_0^2 \alpha}{\tau_0^2 \phi}}$$

$\tau_c(\alpha=0)$ è più della tensione al centro, cioè $\gamma Y_0 i_f$

Moltiplicando tutto per $\cos \alpha$:

$$\gamma Y i_f = \left(\gamma Y_0 i_f \cos^2 \alpha \sqrt{1 - \frac{\tau_0^2 \alpha}{\tau_0^2 \phi}} \right)^2 \quad \tau_0 \alpha = \frac{dY}{dy}$$

$$\left(\frac{dY}{dy} \right)^2 + Y^2 \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^2 - Y^2 = 0 \quad (\alpha \text{ molto piccolo, è max solo ai bordi})$$

Condizioni al contorno: $Y(y=0) = Y_0$
 Posto $\frac{Y}{Y_0} = \tilde{Y} \Rightarrow \tilde{Y} = \cos(\pi \tilde{y})$

Cerco quanto vale bc :

$$-\frac{dY}{dy} \Big|_{bc/2} = \tau_0 \phi \rightarrow bc = \frac{\pi Y_0}{\tau_0 \phi}$$

Cerco quanto vale Area A :

$$A = \int_{-bc/2}^{bc/2} Y(y) dy = \frac{2Y_0^2}{\tau_0 \phi}$$

La portata massima che può passare in 1 geometria sifatta:

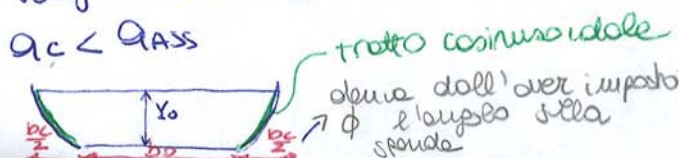
Nota la geometria su qualsiasi verticale impare Chery

$$Q_c = \frac{2Y_0^2 \sqrt{i_f}}{(\tau_0 \phi) n} \cdot \left[\frac{Y_0 \cos \phi}{\frac{\pi}{2} (1 - \frac{1}{4} \sin^2 \phi)} \right]^{2/3}$$

$$Y_0 = \frac{\tau_{oc}}{\rho g i_f} = \frac{d \Delta \tau_c^*}{i_f} \Rightarrow \text{noto } Y_0 \Rightarrow \text{calcolo } bc, A$$

Verifico se $Q_c \geq Q_{max}$ o sepprova:

$$Q_c < Q_{max}$$



oppure 1 tratto piatto per assumere Q eccedente:

$$b_0 = \frac{n}{Y_0^{5/3} \sqrt{i_f}} (Q - Q_c)$$

Step di calcolo per la geometria unidimensionale (26) (caso di geometria stabile → NO trasporto solido)

- 1) Calcolare $Re_p \rightarrow Re_p = \sqrt{\frac{\Delta \rho d^3}{\mu}}$ noto il diametro
- 2) Usando (Shields, tabelle, formule, Braundie 1981) → si calcola τ_c^*
- 3) Nota τ_c^* → posso calcolare Y_0 imponendo che sul centro del canale ho tensione critica (T_{oc}):

$$Y_0 = \frac{T_{oc}}{\rho g i_f} = \frac{\Delta d}{i_f} \tau_c^*$$
- 4) Risolvere le equazioni differenziali ODE
 ↳ così ottengo $\tilde{Y} = \tilde{Y}(\tilde{y}) \rightarrow$ visto che ho $Y_0 \Rightarrow Y = Y(y)$
- 5) Impongo che $\frac{dY}{dy} \Big|_{y=\frac{bc}{2}} = \tau_g \phi \rightarrow$ così calcolo bc
- 6) Calcolare l'area integrando Y e y (esprimere numerica)
- 7) Calcolare la portata tramite la relazione di Dipples e Vipitar 1992:

$$Q_c = 2,5 A \left(g i_f \frac{A}{b} \right)^{0,5} \ln \left(1,1 \frac{A}{d_{50} b} \right)$$
- 8) Calcolo la larghezza del tratto centrale se $Q > Q_c$ oppure b_0

Quindi sin ora ho parlato di geometria stabile e supposizione di assenza di trasporto solido → di solito questa è la condizione per il canale artificiale.

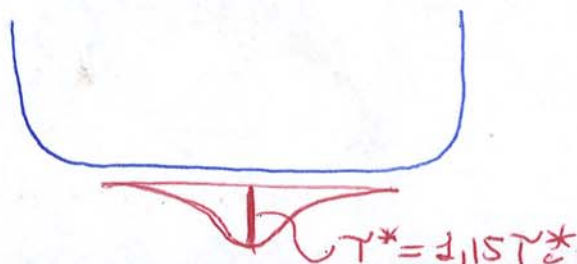
Quando si hanno fiumi → si ha trasporto solido:

INDAGINI → PARKER → meccanica dei sedimenti (slide 5)
 ↳ IZUMI KEDA

INDAGINE DI PARKER (1978)

- vale per alvei prismatici
- concetto fondamentale: se ho trasporto solido ovunque → la geometria non è stabile, ma in realtà la redistribuzione ad opera delle tensioni di Reynolds fa in modo che al centro c'è trasporto solido e sulle sponde non ce l'ha

Se questa è la geometria di equilibrio di un fiume prismatico:
la tensione critica nella parte centrale del fiume è questa distribuzione:



Devono però soddisfare delle relazioni:

(27)

$$b \bar{Y} = Q$$

$$a c k a^{\alpha + \beta + \gamma} = Q \rightarrow a c k = 1, \alpha + \beta + \gamma = 1$$

dove $\alpha \approx 0,5$, $\beta \approx 0,4$, $\gamma \approx 0,1$

Si ottengono così i diagrammi di Leopold o Leopoldini (vedi slide pag 7)

LACEY dice che: $b = 2,67 Q^{0,5}$

La ripetizione \rightarrow strugge il canale, diminuisce la larghezza
 \rightarrow aumenta la coesione del terreno \rightarrow quindi le sponde sono erose + pendenti e quindi + alte.

EFFETTO DELLA COESIONE delle SPONDE (Schumm, 1960)

$$\frac{b}{Y_0} = 2,55 \cdot S_p^{-1,08} \quad S_p = \text{percentuale di limo e argilla nella sponda}$$

Se sulle sponde ho limo e argilla \rightarrow le cose si complicano molto

Altra formula data da Schumm:

$$b = 0,2 Q_p^{0,45} S_p^{-0,36} \quad Q_p = \text{piena ordinaria}$$

Se le sponde sono coesive \rightarrow + il fiume si restringe

EROSIONE SPONDALE \rightarrow vedi slide

6

Forza di Grep: $\frac{1}{2} C_D \rho \frac{\pi d^2}{4} (\bar{u}_p - \bar{v}_p)^2 = \gamma_d \rho \Delta g \frac{\pi d^3}{6}$

se la particella è sferica \rightarrow *vel. relativa* R \rightarrow *volume*

(28)

γ_d = coeff di Coulomb dinamico

velocità media del campo di moto all'altezza delle particelle

$\bar{u}_p = \mu_* F = F \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ $\rho \Delta$ densità sommersa

e si sostituisce e si semplifica in cui si arriva a:

$\frac{\bar{v}_p}{\sqrt{\Delta g d}} = F \sqrt{\tau_*} - \left(\frac{4}{3} \frac{\gamma_d}{C_D} \right)^{1/2}$

$F \sqrt{\tau_*} = \tau_*^{1/2}$

se $\bar{v}_p = 0$ (= arresto delle particelle) $\Rightarrow \tau_*^* = \tau_{co}^* = \frac{4}{3} \frac{\gamma_d}{F^2 C_D}$

di arresto

$\frac{\bar{v}_p}{\sqrt{\Delta g d}} = F \left(\sqrt{\tau_*^*} - \sqrt{\tau_{co}^*} \right)$

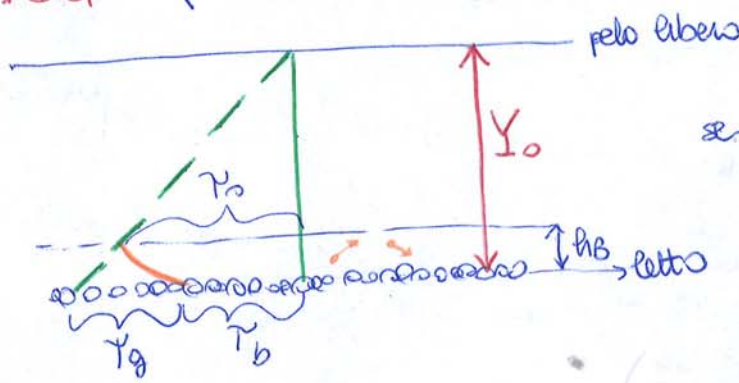
(1) \rightarrow velocità particellare

$\tau_{co}^* = m \tau_c^* \Rightarrow$ relazione empirica \rightarrow quindi per calcolare τ_{co}^*

\hookrightarrow circa 0,5

\Rightarrow step 2 (SEMINARA - DLAR)

$\frac{4}{3} \frac{\gamma_d}{F^2 C_D}$
 $m \tau_c^*$



distribuzione sforzi in presenza di trasporto solido \Rightarrow distribuzione degli sforzi

\Rightarrow NO trasporto solido \Rightarrow distribuzione degli sforzi

$\tau_0 \leftarrow$ trapezoidale \nearrow

nel caso in cui ci sia del materiale che si trasporta in h_b \Rightarrow la presenza di quest'area porrebbe parte della tensione dell'acqua

quindi finché non sono in $h_b \Rightarrow$ è lineare poi quando entro in h_b decade in seguito all'interazione

τ_g = tensione che l'acqua ha perso con i prouli

τ_b deve essere $> \tau_c$ se no non avrei trasporto solido sul fondo

Visto che $h_b < Y_0$ posso dire che $\tau_0 \sim \tau_g + \tau_b$

quindi $\frac{\tau_0 + \tau_c}{\Delta \rho g d} = \frac{\tau_g + \tau_b + \tau_c}{\Delta \rho g d}$ \rightarrow tolo τ_c e divido per $\Delta \rho g d$

ottengo: $\tau_* - \tau_c^* = \tau_b^* - \tau_c^* + \tau_g^*$

τ_g^* = tensione persa a seguito delle interazioni tra corrente e prouli

ripetendo questo
 $q_s = \bar{C} \bar{V}_p$

conviene usare

ϕ = termine di trasporto solido adimensionale = $\frac{q_s}{\sqrt{\Delta g d^3}}$
 La detta anche intensità di trasporto solido

$$\phi = \frac{q_s}{\sqrt{\Delta g d^3}} = \frac{\bar{C} \bar{V}_p}{d \sqrt{\Delta g d}} = F(\sqrt{T^*} - \sqrt{T^*_{\infty}}) \cdot \frac{h_{BB}}{\alpha d} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{h_{BB} \gamma_D}{\alpha d})} (T^* - T^*_c)$$

mettendo tutti i coeff insieme
 $= \Gamma (T^* - T^*_c) (\sqrt{T^*} - \rho \sqrt{T^*_c})$ dove $\rho = \sqrt{m} \approx 0,7$

Γ e ρ sono costanti da determinare
 espressione più generale:

$$\phi = \Gamma (T^* - T^*_c)^a (\sqrt{T^*} - \rho \sqrt{T^*_c})^b$$

Adesso noi abbiamo usato a e $b=1$, ma non è sempre così
 vedi slide \rightarrow i valori di questa formula

2° APPROCCIO: PROBABILISTICO

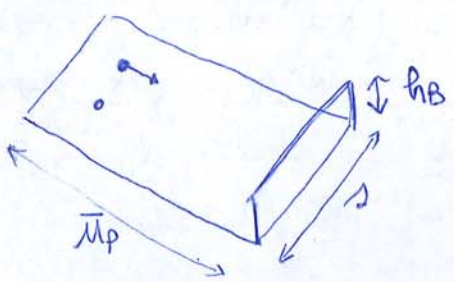
\rightarrow teoria di Kolinske
 \rightarrow teoria di Einstein
 \rightarrow è + accurato rispetto a quello deterministico
 \rightarrow adattabile e pronostica meglio l'erosione

Parte del presupposto che

il trasporto solido è movimentato dalle turbolenze

quindi non ha molto senso parlare di tensione critica e poi le particelle si muovono per salti
 trasporto solido avviene per salti \Rightarrow la particella si muove per salti
 poi dopo qualche salto si ferma poi viene rianimata, poi usata alle turbolenze.
 poi si riferisce e così via e questi salti sono legati alle turbolenze.

Kolinske nel 47 dice che:
 se prendiamo una striscia di fondo



Alora possiamo dire che le particelle che attraversano nell'unità di tempo la striscia alta h_B e lunga l_p e le attraversano con velocità $u_p \rightarrow$ solo quelle che si trovano in \pm zona di fondo lunga l_p e larga u_p
 Numero di particelle $N = \frac{l_p \cdot l}{K_1 d^3}$
 nelle striscie $-$ proiezione della striscia particella

portata solida: $q_s = K_3 d^3 p N$
volume particelle $\rightarrow 0,35$

fraz. delle particelle che sono effettivamente attive \rightarrow Kolinske le assume cost anche se non lo è

coefficiente $N \rightarrow q_s = \frac{K_3}{K_1} \bar{u}_p p d$, chiamo $k = \frac{K_3}{K_1}$

$\frac{q_s}{u_* d} = k \cdot p \cdot \frac{\bar{u}_p}{u_*}$ \rightarrow velocità media con cui si muovono le particelle \Rightarrow le particelle più soggette ad \pm di distrib. di \Rightarrow velocità

Se L_x è la distanza media che le particelle percorrono prima di fermarsi per un tempo sufficientemente lungo allora possiamo dire che le particelle depositate per unità di tempo e unità di area $N_d = \frac{q_s i_d}{L_x k_1 d^3}$ (30)

$L_x \cdot 1 =$ area su cui si depositano le particelle

Quanto vale L_x ?
 $P =$ probabilità di rimozione dal letto della singola particella

Dopo 1 salto onto' che: $(1-P)$ = numero di particelle che si fermano
 P = numero di particelle che riparte cioè viene rimossa dal fondo

Dopo 2 salti: $P(1-P) \rightarrow$ particelle che si fermano

Dopo $(n+1)$ salti: $P^n(1-P) \rightarrow$ particelle che si fermano

se voglio calcolare il n° di salti medio:

$$\lambda d \sum_{n=0}^{\infty} P^n (1-P) (n+1) = L_x$$

$\frac{\lambda d}{1-P} = L_x$

$$N_d = \frac{q_s i_d}{L_x k_1 d^3} = \frac{q_s i_d (1-P)}{\lambda k_1 d^n}$$

numero di particelle erose = unità di lunghezza e per unità di area

$$N_p = \frac{i_r}{k_2 d^2} P_s$$

$P_s = \frac{P}{t_e}$ = probabilità di rimozione per un'ora di tempo
 $t_e =$ tempo di scambio tra 1 particella e l'altra
 $i_r =$ frazione di particelle rimosse

$$t_e = \frac{d}{w_s} = k_3 \sqrt{\frac{d}{\rho g \Delta}}$$

$d =$ lunghezza particelle
 $w_s =$ velocità di sedimentazione

$$N_r = \frac{i_r}{k_2 d^2} \frac{P}{k_3 \sqrt{\frac{\rho g \Delta}{d}}}$$

Formula di Einstein

impungo $N_r = N_d \Rightarrow \frac{P}{1-P} = A^* \cdot \phi^*$

dove $\phi^* = \left(\frac{i_d}{i_r}\right) \phi$, $A^* = \frac{k_2 k_3}{\lambda k_1} = 43,5$

Quindi se conosco $P \Rightarrow$ lo metto dentro la formula e trovo il trasporto solido $\Rightarrow P$ non è cost ma dipende da τ
 Einstein ha dato 1 procedura per calcolare la P :
 se $\tau = 0,35 d_c \rightarrow$ la velocità che c'è a quella quota mi porta ad una portanza che è distribuita in ~~modo~~ maniera gamma e il coeff di portanza C_L è cost
 $C_L = 0,17 \frac{\tau}{\rho g d}$

Al posto di risolvere l'integrale per $\rho \Rightarrow$ posso usare la curva blu (3) a pag 22 \Rightarrow si entra dalle ordinate e si tira fuori il valore delle ascisse

$\phi_* = \frac{q_s}{\sqrt{g \Delta d^3}}$ \rightarrow noto ϕ (adimensionale) \rightarrow se lo moltiplico per $\sqrt{g \Delta d^3}$ ottengo la portata solida volumetrica unitaria: $q_s \left[\frac{m^2}{s} \right]$

se metto d50 in ϕ_* e in $\psi \Rightarrow$ faccio un calcolo medio se si ha tutta la curva granulometrica a disposizione \Rightarrow al posto di d50 metto di me devo introdurre una frazione:

$q_s^i = \phi_i \sqrt{g \Delta d_i^3} \cdot F_i$ $F_i =$ frazione che il pros di ha nella curva granulometrica

Per trovare q_s^i devo conoscere F_i

$\phi_i \rightarrow$ dipende da d_i

\Rightarrow quindi Einstein fornisce anche un modo per calcolare q_s di fondo per granulometrie eterogenee

ALTRO MODO PER CALCOLARE $\rho \rightarrow$ formula di Darcy pag 23 (cost di von Karman si riduce in presenza di trasporto solido di fondo)

VEDI SLIDE (8)

TRASPORTO SOLIDO SOSPESO

\Rightarrow condizioni di incipiente trasporto solido sospeso

$\frac{W_c}{u_*} \leq 0,6$ \Rightarrow c'è trasporto solido sospeso \rightarrow concetto che deriva dall'analisi di Bagnold

BAGNOLD

Una particella resta in sospensione quando l'intensità w' delle fluttuazioni verticali associate alla turbolenza in prossimità della parete (ovvero w' calcolata per $z \rightarrow \infty$) risulta superiore alla velocità di sedimentazione: $w'(z \rightarrow \infty) > W_c$

Da dati sperimentali si osserva che: $\sqrt{(w')^2} \cong u_*$ (in prossimità della parete)

se ricordiamo che $u_* = \sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}} = \sqrt{\tau_* g \Delta d}$

velocità di caduta: $W_c = \frac{g d^2}{18 \nu} \Delta$ (se Re_p è piccolo \rightarrow vale legge di Stokes)

sostituendo W_c in $*$ $\Rightarrow \tau_* \geq \frac{Re_p^2}{N}$ ($N = 18^2 \cdot 96$) $Re_p = \frac{\tau_* \Delta d^2}{\nu}$

(formula che approssima in eccesso)

Condiz. cinematica

flusso ^{di massa liquida} attraverso una superficie: $\int \vec{n} = \int_{\Omega} \rho(1-c) \vec{u} \cdot \vec{n} d\Omega$
 con normale \vec{n}

velocità acqua
 concentrazione in termini di $\frac{m^3}{m^3}$ (adimensionale)

$1-c = \%$ di volume non occupato dal solido

Prende il flusso e lo uso per calcolare il bilancio di massa liquida attraverso una generica superficie. Poiché la superficie non accumula massa:

$[[(1-c) \rho (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{n}]] = 0$ $[[=$ la doppia parentesi indica la differenza tra sopra e sotto
 condizione che si applica a ridosso di qualunque superficie

$\vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{n}$ = componente normale della velocità

VARI CASI:

⇒ CASO SUPERFICIE IMPERMEABILE: (= non attraversata dal liquido) ^{x es solido}
 = se il vettore con cui si tocca la sup. è il medesimo di quello sopra:



$c(z_+) = 1 \rightarrow [[(1-c) \rho (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{n}]]_{z^+} - [[(1-c) \rho (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{n}]]_{z^-} = 0$

siccome $c(z_+) = 1 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot \vec{n} = v$
 $[[(1-c) \rho (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{n}]]_{z^-} = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot \vec{n} = v$

Se $F = z - h(x, y, t) = 0$ $\frac{DF}{Dt} = 0 \Rightarrow$ caso superficie libera:
 perché sulla sup. $z = h$
 $\frac{dh}{dt} = [w - u \frac{dh}{dx} - v \frac{dh}{dy}]_{z=h}$

La stessa formula può essere scritta come: $\frac{dh}{dt} = \vec{u} \cdot \nabla F_h$

infatti $\nabla F_h = \nabla (z - h(x, y, t)) = \left\{ \frac{dh}{dx}, -\frac{dh}{dy}, 1 \right\}$

⇒ CASO SUPERFICIE PERMEABILE (per esempio il fondo è permeabile)
 semplificazione: no flusso iporeico = flusso che permea il sedimento in $z^- \Rightarrow u = 0$

$\left\{ \begin{aligned} u(z^-) &= 0 \\ \rho(z^-) &= \rho(z^+) \end{aligned} \right.$

Prende la c. cinematica con hp di no flusso iporeico:

$[[(1-c) (\vec{u} \cdot \vec{n} - v)]]_{z^+} = [[(1-c) (-v)]]_{z^-}$ perché in $z^- u=0$ $(1-c) =$ porosità $= \rho$

definisce $c_0 =$ concentrazione del solido a ridosso della superficie ma non ancora dentro la superficie

$[[(1-c_0) (\vec{u} \cdot \vec{n} - v)]] = -\rho v$

1° CONTRIBUTO: DIFFUSIONE MOLECOLARE: $q_s^{(D)} = -D \nabla C$ → gradiente di concentraz. (33)
 (di solito si trascura → meno imp) coeff di diffusione

2° CONTRIBUTO: ADVEZIONE + DISPERSIONE TURBOLENTA
 usiamo la decomposizione di Reynolds: $C = \bar{C} + c'$
 $\vec{u}_s = \vec{u}_s + \vec{u}'_s$ ↳ fluttuazione media

$$\vec{q}_s = \overline{C \vec{u}_s} = \overline{(\bar{C} + c')(\vec{u}_s + \vec{u}'_s)}$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{C} \vec{u}_s) + \cancel{\bar{C} \vec{u}'_s} + \cancel{c' \vec{u}_s} + (c' \vec{u}'_s) dt$$

$$\left(\frac{1}{T} \int_0^T \bar{C} \vec{u}'_s dt = \bar{C} \int_0^T \vec{u}'_s dt = 0 \text{ (per def. di fluttuazione)} \right)$$

quindi $\vec{q}_s = \bar{C} \vec{u}_s + \overline{c' \vec{u}'_s}$ ↳ advezione + turbolenza
↳ perché le particelle hanno velocità fluttuante = contributo alla dispersione turbolenta

$$\overline{c' \vec{u}'_s} = -E \nabla \bar{C} \quad \text{dove } E = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

se prendo l'equazione $\frac{dC}{dt} + \nabla \cdot (C \vec{u}_s) = 0$ e ne faccio la media temporale:

$$\frac{d\bar{C}}{dt} + \nabla \cdot (\underbrace{C \vec{u}_s}_{\vec{q}_s}) = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{C}}{dt} + \nabla \cdot (\bar{C} \vec{u}_s + \overline{c' \vec{u}'_s}) = 0$$

$$(\nabla \cdot (\bar{C} \vec{u}_s)) = \bar{C} \nabla \cdot \vec{u}_s + \vec{u}_s \cdot \nabla \bar{C}$$

$$\frac{d\bar{C}}{dt} + \bar{C} \nabla \cdot \vec{u}_s + \vec{u}_s \cdot \nabla \bar{C} + \nabla \cdot \frac{\overline{c' \vec{u}'_s}}{E \nabla \bar{C}} = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{C}}{dt} + \bar{C} \nabla \cdot \vec{u}_s + \vec{u}_s \cdot \nabla \bar{C} = \nabla \cdot (E \nabla \bar{C})$$

equazione di advezione-diffusione per solido

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} \epsilon_x + D & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y + D & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z + D \end{pmatrix}$$

↓
forma compatta

Da qui mi poi ometto la sottomechanica tanto è ovunque:
 ⇒ scivo l'eq. in forma estesa

$$\frac{dC}{dt} + C \left(\frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial z} \right) + u \frac{dC}{dx} + v \frac{dC}{dy} + w \frac{dC}{dz} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_x \frac{dC}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_y \frac{dC}{dy} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_z \frac{dC}{dz} \right)$$

(E è dipendente dallo spazio)

se avessi fatto lo stesso discorso per gli liquidi:
 $\rho = \int \rho (1-c) dV \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \rho = \text{cost} \Rightarrow \frac{dC}{dt} + \nabla \cdot [(1-c) \vec{u}] = 0$ eq. di advezione-diffusione per liquidi

$$\frac{dC}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} [(1-c)u] + \frac{\partial}{\partial y} [(1-c)v] + \frac{\partial}{\partial z} [(1-c)w] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_x \frac{dC}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_y \frac{dC}{dy} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_z \frac{dC}{dz} \right)$$

$$\frac{\partial h_b c_F}{\partial t} + (1-p) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} [(Y-h_b) C_s] + \nabla_0 [\bar{q}_s^F + \bar{q}_s^S] = 0$$

(3d)

Spero $h_b \ll Y$ quindi se vole questo:

$$(1-p) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (Y C_s) + \nabla_0 [\bar{q}_s^F + \bar{q}_s^S] = 0$$

eq da usare quando sbocco sia concenrez. sbocco sospeso & sia concenrez. del sbocco di sbocco c_F

se non ho sbocco sospeso:

$$(1-p) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q_{sx}^{(F)}}{\partial x} + \frac{\partial q_{sy}^{(F)}}{\partial y} = 0$$

Eq di Exner

differenza tra \bar{c} e \bar{c} :

\bar{c} = media temporale = $\frac{1}{T} \int_0^T c dt$, \bar{c} = media spaziale = $\frac{1}{Y} \int_0^h \bar{c} dz$

CASO SEMPLICE: FLOTO UNIFORME: $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} = 0$

$c \frac{\partial w_s}{\partial z} + w_s \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} (E_z \frac{\partial c}{\partial z}) = 0$ (1) eq advezione - diffusione fase solida

$(1-c) \frac{\partial w}{\partial z} - w \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} (E_z \frac{\partial c}{\partial z}) = 0$

alico che $w_s = w - w_c \Rightarrow$ sostituisco in (1) considerando $w_c = \text{cost}$ ($c \frac{\partial w_c}{\partial z} = 0$),

$c \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial c}{\partial z} - w_c \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} (E_z \frac{\partial c}{\partial z}) = 0$ (2)

$\frac{\partial}{\partial z} (c w_{eff})$

se focus (1) + (2) $\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (w c) \Rightarrow$ integrando in z ottengo:

$w = w_c c + \text{cost}$ poiché $w(h) = c(h) = 0 \Rightarrow \text{cost} = 0 \Rightarrow w = w_c c$

sulla superficie libera la concentrazione è nulla

visto che $w = w_c c \Rightarrow$ sostituisco questa relazione in (2)

$\frac{\partial}{\partial z} (c^2 w_c) - \frac{\partial}{\partial z} (c w_c) - \frac{\partial}{\partial z} (E_z \frac{\partial c}{\partial z}) = 0$

integro in z:

$c w_c (c-1) - E_z \frac{\partial c}{\partial z} = \text{cost}$

→ dare era nulla sulla superficie libera perché la turbolenza si annulla sulla sup. libera

Poiché $c(h) = E_z(h) = 0 \Rightarrow \text{cost} = 0$

- *Von Rijn (1984)*
 Queste soluzioni vale quando la concentrazione non è così piccola: se C non è $\ll 1 \Rightarrow w_c = (1-C)^4 w_{c0}$ (35)

$$\varepsilon \frac{dc}{dz} + (1-C)^5 C w_{c0} = 0$$

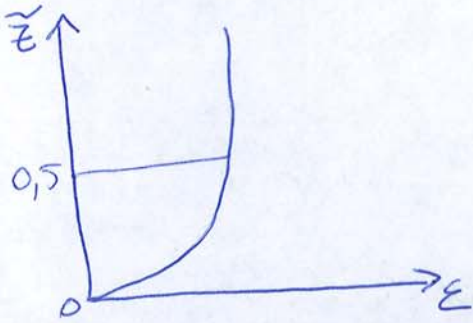
↓
 velocità di caduta delle particelle in acque limpide

$$\varepsilon(\bar{z} < 0,5) = \bar{z}(1-\bar{z})^4 k \mu_* \psi \phi$$

$$\varepsilon(\bar{z} > 0,5) = \frac{k \mu_* \psi}{4} \phi$$

↓ dove conto del fatto che la turbolenza viene 1° smorzata in presenza di solido 2° disperso

$$\phi = 1 + \left(\frac{C}{C_{max}}\right)^{0,8} - 2 \left(\frac{C}{C_{max}}\right)^{0,9}$$



Queste formule possono essere utilizzate se si conosce a e C_0 da si trovano da formule empiriche:

$$a = h_b = 2d$$

$$\bar{u}_b = 11,6 \mu_*$$

$$q_s^{(F)} = C_0 \cdot \bar{u}_b \cdot a = C_0 \cdot 11,6 \cdot \mu_* \cdot 2d \Rightarrow C_0 = \frac{q_s^{(F)}}{23,2 \mu_* d}$$

Risolto il problema di come calcolare i profili \rightarrow vedo come si calcola q_s^3

calcolo portata solida sedimenti sospesi

$$\bar{z} = \frac{w_c}{\mu_* k} \quad \bar{u} = \frac{\mu_*}{k} \ln\left(30,2 \frac{z k}{d_0 s}\right)$$

$$q_s^3 = \int_a^y C(z) \bar{u}(z) dz = \int_a^y C_0 \left(\frac{1-\bar{z}}{\bar{z}} \frac{a}{1-\bar{a}}\right)^3 \frac{\mu_*}{k} \ln\left(\frac{30,2 z k}{d_0 s}\right) dz =$$

$$= \frac{C_0 \mu_* a}{k} (Pe J_1 + J_2)$$

$$Pe = \ln\left(\frac{30,2 y k}{d_0 s}\right) \quad J_1 = \frac{I_1}{0,216} \quad J_2 = \frac{I_2}{0,216}$$

$$I_1 = 0,216 \frac{\bar{a}^{3-1}}{(1-\bar{a})^3} \int_{\bar{a}}^1 \left(\frac{1-\bar{z}}{\bar{z}}\right)^3 dz = I_1(\frac{3}{3}; \bar{a})$$

$$I_2 = 0,216 \frac{\bar{a}^{3-1}}{(1-\bar{a})^3} \int_{\bar{a}}^1 \left(\frac{1-\bar{z}}{\bar{z}}\right)^3 dz$$

Einstein fornisce ~~due~~ I_1 e I_2 proficamente

STEP 3: q_s^s e q_s^f non si possono ancora sommare perché q_s^f è quella misurata qui, ma si può ancora (36)
 ~~non~~ ~~calcolare~~ ~~ancora~~

$$q_{sim}^s = \int_{z_m}^{z_m} C_i \pi dz \rightarrow \frac{q_{sim}^{(s)}}{q_{si}^{(f)}} = \frac{I_1}{J_a(\tilde{a}, z_m)} [P_m J_a + J_b]$$

$$J_a = \int_{\tilde{a}}^1 \left(\frac{1-\tilde{z}}{\tilde{z}} \right)^{z_m} dz \quad J_b = \int_{\tilde{a}}^1 \left(\frac{1-\tilde{z}}{\tilde{z}} \right)^{z_m} \ln \tilde{z} dz$$

$$\frac{q_{sim}^s}{q_{si}^{(f)}} = 0,216 \frac{\tilde{a}^{z_m-1}}{(1-\tilde{a}^2)^{z_m}} [P_m J_a + J_b]$$

(J_a e J_b sono funzioni di z_m e \tilde{a})
 \tilde{a} è noto \Rightarrow trovo da questa z_m poi

ma la formula di Einstein: $z_m = n^\circ$ di Poise da usare \Rightarrow è ingeneroso ora
 che viene fuori da conti usando la procedura di

$$q_{TOT} = C_0 q_{si}^f (1 + P_m I_1(z_m, \tilde{a}_m) + I_2(z_m, \tilde{a}_m))$$

Quindi: $\frac{q_{TOT}}{q}$ \rightarrow calcolo q_{sim}^s da C_m e da q_{TOT} misure

- STEP 1: Finiti i dati \rightarrow calcolo $\frac{q_{TOT}}{q}$
- STEP 2: tramite la procedura di Einstein calcolo $q_{si}^{(f)} = 0,5 F_i \Phi_i \sqrt{\Delta p_i}$
- STEP 3: Noti q_{si}^f q_{si}^s conosco il rapporto fra questi due che è 1 equazione implicita in z_m
 Nota $z_m \rightarrow$ calcolo I_1 e I_2 che messi nella formula ottengo q_{TOT}

Graf e Acargliu dicono che: $\Phi_{TOT} = 0,39 \gamma^{* 2,52}$
 \rightarrow ma questa se non si vuole fare tutta la procedura gli piace

• Aumento ancora $Fr \rightarrow$ formazione di ondine ($Fr > 1$ general monte)

DIFFERENZA TRA DUNE E ANTI DUNE:

1) FORMA \rightarrow dune \rightarrow forma asimmetrica \rightarrow versante di monte meno inclinato del versante di valle

(37)

\rightarrow ondine \rightarrow forma simmetrica



2) SUPERFICIE e FONDO \rightarrow dune \rightarrow la superficie libera e fondo sono sfasate
 \rightarrow ondine \rightarrow hanno il fondo in fase con la sup. libera

3) MIGRAZIONE \rightarrow dune \rightarrow migrano verso valle
 \rightarrow ondine \rightarrow migrano verso monte = nascono la corrente

4) $Fr \rightarrow$ dune $\rightarrow Fr < 1$
 \rightarrow ondine $\rightarrow Fr > 1$

• Aumento $Fr \rightarrow$ onde molto lunghe al fondo e sulla superficie libera c'è frangimento

RIPPLES

Definisco $\lambda =$ lunghezza d'onda
 λ delleipples è centimetrica e l'altezza delleipples è di qualche cm \rightarrow sono forme di fondo piccole.

• Si vedono quando il fondo è piano e la peneumetria media $< 0,6$ mm (ricordare)
e non interferiscono con la superficie libera

• Si generano con corrente lenta \rightarrow scalari con la peneumetria (altezza e larghezza che sono multiple della dimensione peneumatica)

DUNE

• Fr maggiore \rightarrow all'aumentare di $Fr \rightarrow$ NO ripples ma si formano le dune

• la corrente è più veloce
• Ricorrono in corsi d'acqua sabbiosi
• ~~λ dell'ordine di centimetri di metri~~

• $Fr < 1$
• migrano verso valle
• superficie libera sfasata con il fondo
• scalari con il tirante

BARRE A FORMA DI LINGUA

Se aumenta ancora le dimensioni si fanno queste (probabilmente) (38)

BARRA PUNTUALE (pg. 12)

sono bene che non migrano e si formano per il fatto che lì c'è curvatura

Le dune si formano anche nelle bare

MORFODINAMICA (pg. 16)

equazioni di base:

- eq. conservazione della massa della fase fluida (1D, 2D, 3D)
- eq. conservazione della quantità di moto della fase fluida
- Equazione di Exner (= conservazione della massa della fase solida)

condizioni al contorno:

- cinematiche e dinamiche / sul fondo
/ sulla superficie libera

Relazioni di chiusura:

- modello di chiusura per la turbolenza
- formule per il vettore trasporto solido
- per 1D e 2D \rightarrow formule per le resistenze al fondo

Strategie

- onde lunghe di fondo \Rightarrow equazioni 1D
- barre e meandri \Rightarrow 2D o quasi 3D \Rightarrow shallow water
- Ripples \Rightarrow 2D piano verticale e si trascura l'interazione con la superficie libera
- Dune \Rightarrow 2D nel piano verticale e si considera l'interazione con la superficie libera

RIPPLES

Richardson l'esistenza di un sottostato viscoso ben definito nel fondo deve essere idraulicamente liscio \Rightarrow la scabrezza equivalente di Nikuradze è immersa nel sottostato viscoso \Rightarrow il tubo è idraulicamente liscio (ricordare)

Visto che la scabrezza equivalente, in questo caso, è la dimensione del grano d : un criterio di formazione potrebbe essere:

$$d < \delta_v$$

d = dimensione grano

$$\delta_v = \text{spessore sottostato viscoso} = \frac{11,6 \nu}{u_*}$$

\Rightarrow numero che la granulometria $d_{10} < 0,6 \text{ mm}$

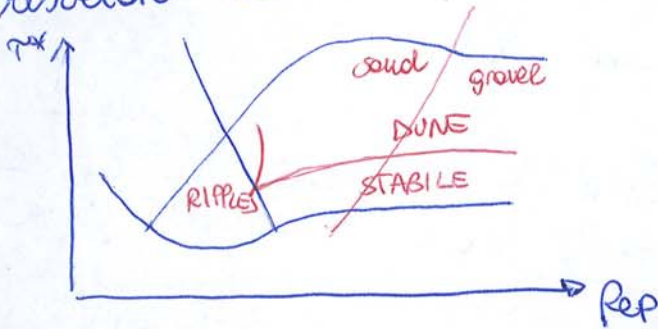
ricordare che $\tau_* = \left(\frac{11,6}{Re_p}\right)^2$, $\tau_* = \frac{\tau_b}{\rho \Delta g d}$, $Re_p = \frac{\sqrt{\Delta g d^3}}{\nu}$

CRITERI PREVISIONALI

Mirano a costruire dei profili e formule in cui le ascisse e le ordinate corrispondano a due parametri indipendenti tra di loro → x esempio Fr e $\frac{H}{D_{50}}$ (30)

• buoni → dà una serie di profili con Fr e $\hat{H} = \frac{Y}{D_{50}}$ a seconda di diversi valori di Re_p (pag 24)

• Il risultato di Chabert eud Chavim ci porta a (pag 31-32)



per $d^* = 40 \rightarrow$
 divide la zona delle sabbie da quella delle ghiaie

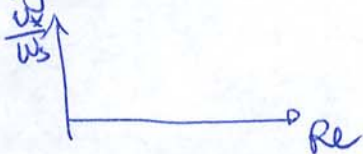
• Diagramma di Engelund eud Hausen (pag 33)

vale solo se ho fondo sabbioso
 $X_1 = Fr$ $X_2 = \frac{U}{U_*}$



→ si vede che aumentando molto Fr si passa da dune a fondo piatto

• Diagramma di Simon e Richardson



• Von Rijn → propone una tabella all'aumentare di τ → fondo piatto → ripples → dune → anti dune →

⇒ grafico più moderno: $d \left(\frac{2g}{\tau} \right)^{1/3}$ vs Re_p

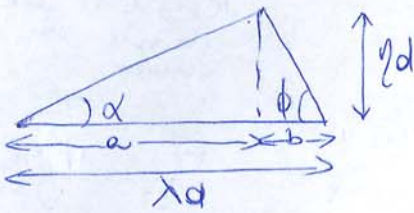
→ da questo grafico è possibile vedere che c'è una zona in cui ripples e dune coesistono

Nelle formule ~~se~~ per le dimensioni delle dune → si vede che è importante la superficie libera
 λ scelta bene con il tratto: $\lambda_{duna} = 6,5 Y$ ricordare

→ $\frac{\eta d}{\lambda d} \sim \frac{1}{10}$ ricordare $\eta d = d_{duna}$

Questa teoria ci dice perché le onde migrano, perché le dune sono asimmetriche. (40)

Considerando $\phi \cong 36^\circ$ e $\alpha \cong 6^\circ$ si può prevedere $\frac{\eta_d}{\lambda_d}$ ipotizzando la duna come un triangolo:



$$a \tan \alpha = \eta_d = b \tan \phi$$

$$a = \frac{\eta_d}{\tan \alpha}, \quad b = \frac{\eta_d}{\tan \phi}$$

$$\lambda_d = a + b = \eta_d \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \phi} \right)$$

$$= \eta_d \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \right) = \frac{\sin(\alpha + \phi)}{\sin \alpha \sin \phi} \eta_d$$

$$\frac{\eta_d}{\lambda_d} = \frac{\sin \phi \sin \alpha}{\sin(\alpha + \phi)} \approx \frac{1}{11}$$

↳ se $\phi = 33^\circ$
 $\alpha = 6^\circ$

2) TEORIA DI SHALLOW WATER + ATTRITI TRASCURATI

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial(UY)}{\partial x} = 0 \quad \text{eq. di continuità (Hp di profondità costante)}$$

Assumiamo l'approssimazione quasi-steady = quasi stabilità:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} \neq 0 \quad \text{cioè il fondo evolve con scala diversa dalla superficie libera e del flusso}$$

La superficie libera si adatta istantaneamente alla variazione del fondo → il fondo evolve lentamente → evolvendo lentamente lungo il tempo al campo di moto e alla superficie libera si adattano alla forma che assume il fondo: con questa approssimazione l'eq. di continuità diventa:

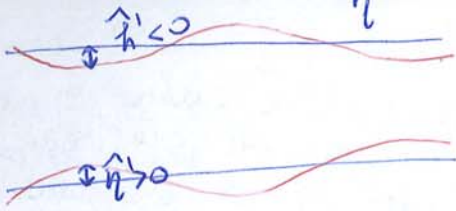
$$UY = \text{cost} = q = \text{portata unitaria}$$

Nell'equazione di ~~De Saint Venant~~ Exner non si usava l'equazione di De Saint Venant, mentre ora si chiama in causa: assumendo che: $\frac{\partial(UY)}{\partial t} = 0$, $\gamma = 1$ (coefficiente di rapporto = 1) e $\Omega = bY$ (= canale rettangolare)

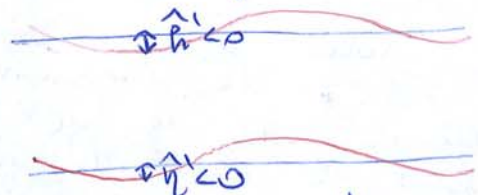
$$\text{l'eq. di De Saint Venant diventa: } \frac{\partial(U^2 Y)}{\partial x} = -gY \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\tau}{\rho}$$

↳ perché lo smunto che gli altri due trascurabili

Se $Fr_0 < 1 \Rightarrow \frac{\hat{h}'}{\hat{h}} < 0$ (dune)



Se $Fr_0 > 1 \Rightarrow \frac{\hat{h}'}{\hat{h}} > 0$ (antidune) (41)



La distinzione $Fr > 1$ e $Fr < 1$ è indicativa ↳ solo in fase mente buona, ma in realtà bisognerebbe essere più precisi
 $Fr < 1$ alto $\rightarrow \hat{h}'/\hat{h} = \pm$ = perturbazione λ onda = perturbazione della s.p. libera

3) TEORIA DI KENNEDY (1963) (+ precisa)

Si ipotizza che il campo di moto sia irrotazionale (non è così nella realtà) irrotazionale = rotore velocità nullo \rightarrow questo si ha se si è lontani dalla parete
 superinterna corrente abbiamo influenza del fondo \Rightarrow quindi è una forzatura dire che il campo di moto è irrotazionale

$\vec{u} = -\nabla\phi \Rightarrow \begin{cases} u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \\ w = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow$ se metto questa dentro l'equazione di continuità: $\nabla^2\phi = 0$ $\phi =$ potenziale

Fin ora abbiamo visto che:
 corrente subcritica $\rightarrow Fr < 1$
 corrente supercritica $\rightarrow Fr > 1$

Flusso è subcritico se presenta η e h in antifase } concorde con la teoria (2)
 Flusso è supercritico se presenta η e h in fase

La teoria di Kennedy dice che il passaggio da fase a antifase non avviene sempre per $Fr = 1$ ma per

$Fr = \sqrt{\frac{g h (k)}{k}}$ dove $k = \frac{2\pi\lambda_0}{\lambda}$
 \downarrow
 n° d'onde

per $\lambda \rightarrow \infty \rightarrow k \rightarrow 0 \rightarrow Fr \rightarrow 1$
 ma in generale il passaggio da antifase a fase dipende da quanto solo dipende le onde

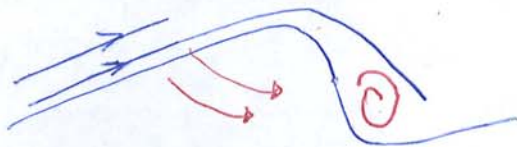
Se il fondo non è piatto $\Rightarrow Fr$ non è uguale a 1

grafico pag 44

La teoria di Kennedy dice anche un'altra cosa: c'è una curva superiore data da $Fr = \sqrt{\frac{1}{k \cdot g h k}}$ \rightarrow questa curva serve per separare due zone \Rightarrow sfasamento tra λ e h
 mentre la curva inferiore serve per il confronto tra h e η

DUNA → comporta la separazione di scuo

(42)



→ attrito
 → a valle sia ha la separazione di scuo → questo comporta una caduta di pressione

Sulla duna abbiamo → attrito dovuto alla scabrezza della duna = la duna non è liscia

PAG 52

↳ attrito dovuto alle forme stesse della duna che induce una caduta di pressione (Δp)

In termini di tensioni al fondo: $\tau_0 = \tau_0' + \tau_0''$

τ_0' = dipende solo dalla scabrezza dei gran (viscoso)

τ_0'' = dipende solo dalla geometria delle forme di fondo

Se il fondo è piatto $\tau_0 = \tau_0'$

Come si valutano τ_0' e τ_0'' ? ⇒ ci sono diversi metodi → ne studiamo 3:

1) Metodo di Einstein e Barbarossa

$$\tau_0 = \gamma R_i \rightarrow \gamma R_i = \gamma R^{\prime} \cdot i + \gamma R^{\prime\prime} \cdot i$$

c'è una ripartizione del raggio idraulico: $R = R^{\prime} + R^{\prime\prime}$

R^{\prime} = effetto della scabrezza, $R^{\prime\prime}$ = effetto delle forme di fondo

⇒ Per R^{\prime} Einstein e Barbarossa propongono una relazione empirica:

$$\frac{U}{U_*} = \frac{U}{\sqrt{g R^{\prime} i f}} = 7,66 \left(\frac{R^{\prime}}{d_{35}} \right)^{1/6}$$

assumendo un valore di R^{\prime} di primo tentativo → da questa relazione ~~trovo~~ ricavo la U

⇒ Per $R^{\prime\prime}$

Introduciamo un parametro: $\psi_{35} = \frac{\Delta d_{35}}{R^{\prime} i f}$

Nota ψ_{35} (perché ho d_{35} e ho assunto R^{\prime})

$$\frac{U}{U_*} = \frac{U}{\sqrt{g R^{\prime\prime} i f}} = f(\psi_{35}) \quad (1)$$

$R^{\prime\prime}$ dipende da ψ_{35} ma ψ_{35} dipende da R^{\prime}

Quindi sostituendo, la perdita di carico dovuta al brusco allungamento in prossimità della duna:

$$\Delta E = \frac{k}{2g} \left(\frac{q}{Y - \frac{\eta d}{2}} - \frac{q}{Y + \frac{\eta d}{2}} \right)^2 \approx \frac{k}{2g} \frac{\eta d^2}{Y} Fr^2 \quad \eta d \ll Y$$

quindi: $i'' = \frac{\Delta E}{\lambda d} = \frac{k}{2g\lambda} \frac{\eta d^2}{Y} Fr^2$

$$\tau^{*II} = \frac{\tau_0''}{\rho \Delta g d} = \frac{\rho g Y i''}{\rho \Delta g d} = \frac{Y i''}{\Delta d} = k \frac{U^2}{2g \Delta d} \left(\frac{\eta d}{Y} \right)^2 \frac{Y}{\lambda d} =$$

$$= \frac{k}{2} \left(\frac{U_*^2}{g \Delta d} \right) \left(\frac{U}{U_*} \right)^2 \cdot \frac{\eta d^2}{Y \lambda d}$$

$$\tau^{*II} = \frac{k}{2} \left(\frac{U}{U_*} \right)^2 \left(\frac{\eta d^2}{Y \lambda d} \right) \tau^{*I}$$

$\tau^* = \tau^{*I} + \tau^{*II} \rightarrow \tau^* = f(\tau^{*I})$ dove $\rightarrow \tau^{*I} = 0,06 + 0,4 \tau^* \quad (\tau^* < 0,55)$
 $\hookrightarrow \tau^{*I} = \tau^* \quad (0,55 < \tau^{*I} < 1)$

~~$\tau^{*I} = \tau^*$~~

$$\tau^{*I} = \left[0,298 + \frac{0,702}{(\tau^*)^{1,8}} \right]^{-0,56} \quad \text{per } \tau^{*I} > 1$$

Engelund fornisce anche una relazione per R^1 :

$$\frac{U}{\sqrt{g R^1 i^1}} = \frac{1}{k} \ln \left(12,2 \frac{R^1}{2,5 d_{50}} \right) *$$

Come si usa il metodo di Engelund:

DATI: $q, i^1, d_{50} \Rightarrow$ si vuole calcolare $Y \equiv R$

- 1) Si assume un valore di R^1
 - 2) $\tau^{*I} = \frac{R^1 i^1}{\Delta d}$
 - 3) si ottiene lo τ^* dal diagramma di Engelund
 - 4) Nota $\tau^* \rightarrow \tau^* = \frac{R^1 i^1}{\Delta d} \Rightarrow R = \frac{\Delta d \tau^*}{i^1}$
 - 5) Ricavo lo U da *: $U = \frac{\sqrt{g R^1 i^1}}{k} \ln \left(12,2 \frac{R^1}{2,5 d_{50}} \right)$
 - 6) $q = UR \equiv UY$
 - 7) confronto con il valore di q assegnato: se i due valori sono vicini \Rightarrow mi fermo, se no itero cambiando il valore di R^1
- Il metodo di Engelund non va tutto bene per fondi sabbiosi in campo, ^{invece} funziona bene in laboratorio

Come si usa la procedura di Parker:

DATI: q, i_e, d_i, F_i

1) Assumo un valore di Y

2) $U = \frac{q}{Y} \Rightarrow Fr = \frac{U}{\sqrt{gY}} ; T^* = \frac{Y i_e}{\Delta d}$

3) Calcolo T^* dalla (1) e K_{sc} dalla (3)

4) Calcolo $C_{0,05}$

5) Calcolo α

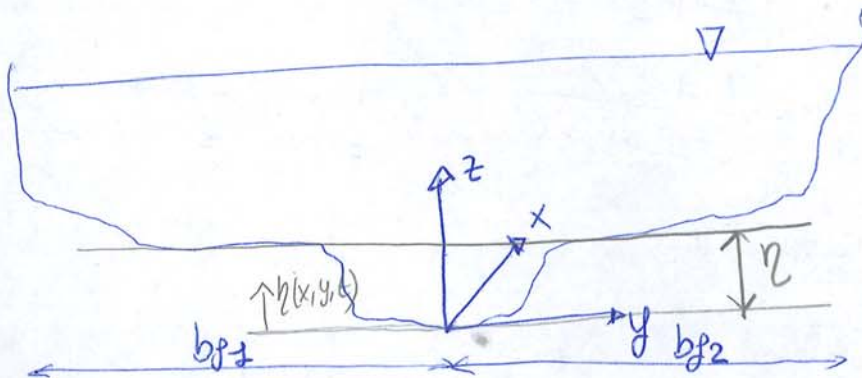
6) Calcolo Y dalla (4)

7) confronto con il valore assunto al punto (1)

\Rightarrow itero finché non c'è convergenza

MORFODINAMICA 1D

1D = le equazioni hanno solo una variabile spaziale (di solito x)
 di volo e considerare una sezione trasversale fatta così:



Se sono interessato a scale spaziali molto più lunghe della larghezza (studio il fiume come se fosse una linea \rightarrow 1D) \rightarrow Hec-ras)

Per sviluppare equazioni 1D

Equazione di Exner: $(1-P) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{sy}}{\partial y} = 0$

quindi posso sviluppare un'equazione 1D a patto di poter fare una media trasversale:

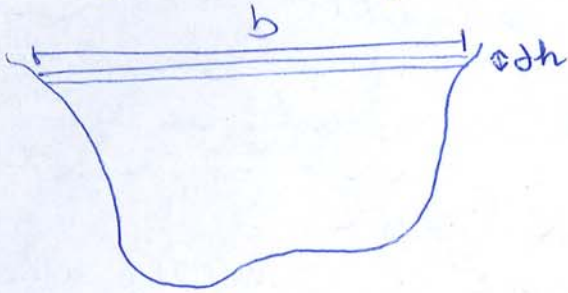
se posso eliminare questa, e sapere, non posso buttarla via perché devo prima verificare se ci sono variazioni lungo y perché il fondo h non è piatto

$\int_{-b_{f1}}^{+b_{f2}} (1-P) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{sy}}{\partial y} = 0 \quad b_f = b_{f2} - b_{f1}$

Per risolvere questa equazione \rightarrow Leibniz. \rightarrow ottengo:

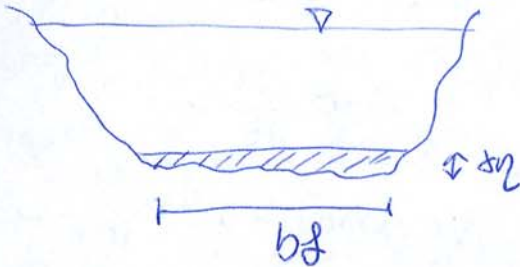
$$\Omega = \Omega[h(x,t), \eta(x,t), x]$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial h} \frac{dh}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt}$$



$$\frac{d\Omega}{dh} = b$$

Se fermo la superficie libera e ho (per fenomeni di erosione) una variazione infinitesima del fondo:



$$-\frac{d\Omega}{d\eta} = b_f \rightarrow \text{all'aumentare del fondo } \Omega \text{ diminuisce}$$

Quindi
$$\frac{d\Omega}{dt} = b \frac{dh}{dt} + b_f \frac{d\eta}{dt}$$

Se $b = b_f \Rightarrow \frac{d\Omega}{dt} = b \left(\frac{dh}{dt} - \frac{d\eta}{dt} \right) = b \frac{dy}{dt}$

Per risolvere il sistema ho bisogno di chiudere (chiusura turbolenta) \Rightarrow ho bisogno di una formula per il trasporto solido:

$$\bar{q}_s = \sqrt{\Delta g d^3} \phi(\tau^*, Re_p) \quad \rightarrow Re_p = \frac{\sqrt{\Delta g d^3}}{\nu}$$

Esempi: MPM

$$\phi = f(\tau^* - \tau_c^*)^{3/2}$$

Se il fondo è comune posso usare le formule di trasporto solido che conosco più ma invece di usare τ^* uso τ^{*1} (τ^* che deve dall'attrito con i prau)

Così calcolo il trasporto solido in presenza di dune

Oppure si possono usare formule opposte per esempio:

$$1) \tau^{*1} = 0,06 + 0,3 \tau^{*3/2}$$

$$2) \tau = \frac{\tau^{*1} - \tau_c^*}{\tau_c^*} \quad \phi = 0,053 \frac{\tau^{*1}}{Re_p^{-0,2}}$$

Problema: il fiume mantiene la sua pendenza nella direzione curvilinea \rightarrow facendo una Drizzopri \rightarrow il tratto che collega due punti con un percorso più corto di prima dove, per loro, avere una pendenza maggiore. \rightarrow il fiume si riporta ad un'unica pendenza che consente un equilibrio

Punto A \rightarrow vede 1 aumento di q_s tra monte e valle ($\frac{dh}{dx} < 0$)
 Punto B \rightarrow è opposto ad una diminuzione di q_s \rightarrow deposito
 Finché non c'è q_s costante lungo tutto il tratto
 \rightarrow questo significa che il fiume esonda

Carattere iperbolico delle equazioni 1D:

EQ DI CONTINUITÀ $\left\{ \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{dq}{dx} &= 0 \\ \frac{dq}{dt} + \frac{d}{dx} \left(\beta \frac{q^2}{\Omega} \right) + g\Omega \frac{dh}{dx} + \frac{q^2}{C^2 \Omega R} &= 0 \end{aligned} \right.$

EQ DI SAINT VENANT $\left. \begin{aligned} \frac{q^2}{\Omega} &= \frac{b^2 Y^2 V^2}{bY} = bY V^2 \end{aligned} \right\}$

EQ DI EXNER $(1-p) b g \frac{dy}{dt} + \frac{d}{dx} (b g q_s x) = 0$

Equazioni della morfodinamica 1D

Ora invece studiamo 1 situazione che prevede 1 stesso alveo
 rettangolare largo $b = b_f = \text{cost} \rightarrow \beta \approx 1 \Rightarrow \Omega = bY, q = VbY$

$q = \Omega C \sqrt{RJg} \rightarrow \frac{q^2}{C^2 R i} = \Omega^2 J g$

l'equazione di continuità con questa ipotesi diventa:

$b \frac{dY}{dt} + Y \frac{db}{dt} + b \left(V \frac{dY}{dx} + Y \frac{dV}{dx} \right) = 0$

$\leftarrow 0$ perché $b = \text{cost}$

$\rightarrow \frac{dY}{dt} + V \frac{dY}{dx} + Y \frac{dV}{dx} = 0 \rightarrow \dot{Y}_t = -V Y_x - Y U_x$ (1)
 (metto il pedice per indicare la derivata rispetto a t e x)

Ora prendo l'equazione di Saint Venant:

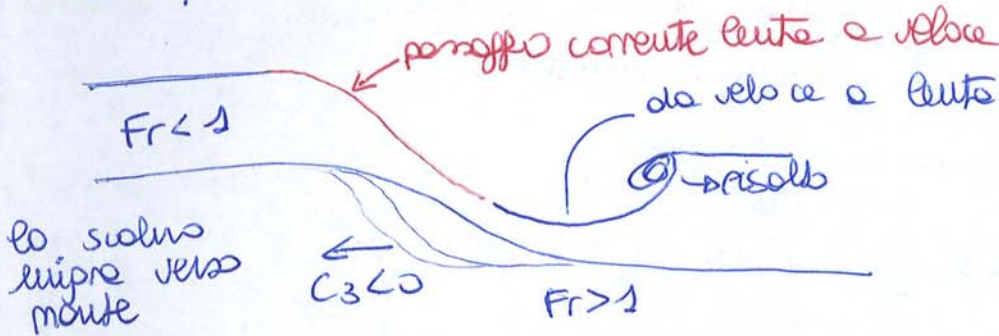
$b(V Y_t + Y U_t) + b(V^2 Y_x + 2Y V U_x) + g b Y (\eta_x + Y_x) + b Y g J = 0$

divido per bY e sostituisco

$\frac{1}{Y} (-V^2 Y_x - Y V U_x + Y U_t) + \frac{V^2}{Y} Y_x + 2V U_x + g(\eta_x + Y_x) + gJ = 0$

$U_t + V U_x + g(\eta_x + Y_x) + gJ = 0$

Il profilo delle da 1 punto di vista concavo della corrente o può (47) libero con condizioni da monte se è subcritico ma (47) sono condizionato morfodinamicamente da valle (viceversa se è supercritico)
 Quindi se devo risolvere questo sistema di equazioni dovrò avere almeno una condizione a monte e almeno una a valle.
 (Poi se due a monte o due a valle dipende se è subcritico o supercritico)
 C_3 è molto inferiore di C_1 e C_2 questo significa che il fondo evolve in modo molto più lento delle onde superficiali



Correggi → nella 3ª equazione $\frac{1-p}{1-p} (q \frac{\partial y}{\partial x} - \dots)$

MODELLI SEMPLIFICATI NON STAZIONARI

Ripetendo dalle equazioni della morfodinamica 1D

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{\Omega} \right) + g \Omega \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{Q^2}{\Omega C^2 R_i} = 0 \\ b_p (1-p) \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (b_p q x) = 0 \end{cases}$$

$\frac{b^2 v^2 y^2}{b y} = b y v^2$

$Q = \Omega C \sqrt{g y J}$
 $\rightarrow \frac{\Omega^2 C^2 g y J}{\Omega C^2} = b y g J$

Da ora ^{stati} ~~stati~~ studierò alcuni modelli semplificati per studiare il transitorio di un fiume da una situazione di equilibrio ad un'altra equazione di equilibrio → non stazionari → evolve nel tempo
 Capire quanto ci mette il sistema a raggiungere una nuova situazione di equilibrio → Per studiare le dighe e monte oppure per studiare l'effetto dei laghi, oppure se c'è un aumento di portata solida nel fiume oppure una diminuzione di portata solida.

Esempi di modelli semplificati:

- Siccome sappiamo che $C_3 \ll C_{1,2} \Rightarrow$ **APPROSSIMAZIONE QUASI STEADY**

1) Quasi steady approximation

ci dice che trascuriamo le variazioni temporali $\frac{\partial v}{\partial t}$ e $\frac{\partial y}{\partial t} \rightarrow 0$
 quindi $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ mentre $\frac{\partial \Omega}{\partial t} \neq 0$

Avevamo visto che c'erano tre velocità \rightarrow ma avendo fatto delle approssimazioni temporali, ne abbiamo solo più una. (48)
 Questo modello prevede delle onde che migrano con velocità c senza modificarsi \rightarrow infatti abbiamo trascurato J che è il termine che dovrebbe spauramente della forma



\rightarrow trascurando i termini dissipativi (J) \rightarrow l'onda va avanti in maniera rapida con velocità pari a c

c è positivo o negativo a seconda del numero di Frould

\rightarrow questo modello vede essenzialmente onde che migrano.
 Il modello cinematico deriva da \pm manipolazione e quindi viene a vedere la componente iperbolica del sistema e quindi le velocità
MODELLO PARABOLICO LINEARE (parabolici o diffusivi)

Questo modello non riconosce nessuna velocità.

Si basa sul fatto che $J \approx -\frac{d\eta}{dx}$ \rightarrow questo vorrebbe solo in moto uniforme, qui si usa per ricavare l'equazione evolutiva

Se vale $J \approx -\frac{d\eta}{dx} \Rightarrow q = \chi Y \sqrt{Y J} = \chi Y \sqrt{Y (-\frac{d\eta}{dx})}$ $\chi = \text{cost}$

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{q^2}{Y^3 \chi^2} = -\frac{U^2 Y^2}{Y^3 \chi^2} = -\frac{U^2}{\chi^2 Y} \rightarrow -\frac{U^3}{9 \chi^2} = \frac{d\eta}{dx}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{dx^2} &= -\frac{3U^2}{9\chi^2} \frac{dU}{dx} \\ \frac{dU}{dx} &= -\frac{9\chi^2}{3U^2} \frac{d^2\eta}{dx^2} \end{aligned}}$$

Considero χ cost (= non varia con x)
 metto U di moto uniforme
 e $\chi = c(Y)^{1/6}$ \rightarrow quella di moto uniforme

$$(1-p) \frac{d\eta}{dt} + q_{su} \frac{dU}{dx} = 0 \rightarrow \text{trascuro } q_{su}$$

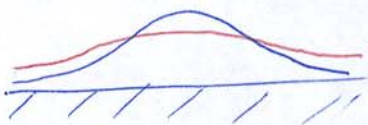
$$(1-p) \frac{d\eta}{dt} - \frac{9\chi^2}{3U^2} q_{su} \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{d\eta}{dt} - k \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0}$$

modello parabolico dove \rightarrow equazione del calore quindi k sarebbe una conduttività termica

$$\boxed{k = \frac{9\chi^2}{3U^2} \frac{q_{su}}{1-p}}$$

\downarrow
 non è una velocità e quindi la forma non si propaga rapidamente



\rightarrow si diffonde in entrambe le direzioni \rightarrow si espande ma non migra