



**appunti**  
www.centroappunti.it

**Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 2093A-**

**ANNO: 2017**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Aimar Mauro**

**MATERIA: Teoria e progetto delle strutture in C.A e C.A.P. -  
Prof. Giordano e La Mazza**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti. Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

## CRITERI GENERALI DI PROGETTAZIONE

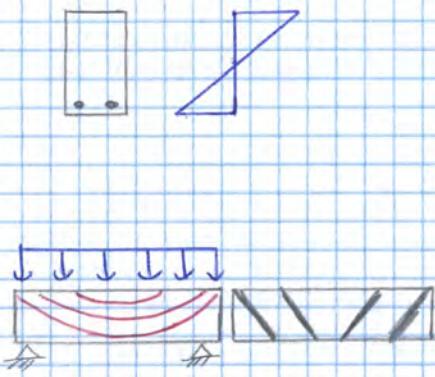
### I PREMESSA STORICA

Il calcestruzzo è stato usato dai Romani, che scoprirono che un materiale e naturale, ridotto in polvere e miscelato con acqua, consentiva di realizzare strutture solide.  
Esso era usato nelle fondazioni e nelle cupole, come il Pantheon (dove nella parte alta si usava calcestruzzo alleggerito con aggregati in tufo).

Nel Medio Evo cadde in disuso fino al 1750, dove si cominciò a introdurre il calcestruzzo nella realizzazione dei soldi.  
Questi non potevano essere fatti in muratura (è difficile fare strutture piene) e si facevano in legno o acciaio.  
Il problema è che questi materiali sono sensibili agli incendi e per questo si introdusse il calcestruzzo.  
Poi dal 1850 si cominciarono a introdurre dei brevetti sul cemento armato.

### 2 Conglomerato cementizio armato:

esso è un materiale composito che si basa su un legame conglomerato - armature in acciaio.  
Il legame si ottiene grazie all'aderenza del legante cementizio e all'azione di ingranamento.



→ nelle strutture inflesse e in trazione serve ad assorbire la forza di trazione e sfruttare l'elevata resistenza a compressione del calcestruzzo.  
Questo, infatti, ha un'elevata resistenza a compressione ma una piccola a contrattrazione.  
Nelle strutture inflesse, siccome le tensioni di trazione e compressione non appena si supera la resistenza a trazione, avviene una rottura di schiaccia e non conta più la resistenza a compressione.

Per questo si anneggano le barre di armatura, disponendole dal lato dove ci sono tensioni di trazione (x assorbirle) e, possibilmente, devono seguire la direzione delle risostatiche di trazione.

→ nelle strutture compresse serve ad aumentare la capacità portante a compressione.

L'armatura deve lavorare in modo corretto e necessita di particolari costruttivi per realizzare l'aderenza armatura - calcestruzzo (es. pieghi).  
Se l'armatura fosse in un tubicino, essa non servirebbe.

#### L'ACCOPPIAMENTO CALCESTRUZZO - ACCIAIO funziona perché

→ hanno ugual coefficiente di dilatazione termica ( $\approx 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ )

→ il calcestruzzo protegge le barre d'acciaio dalla corrosione, poiché crea un ambiente basico che ne impedisce l'ossidazione (almeno fino alla carbonizzazione)

→ il calcestruzzo protegge le barre d'armatura dal fuoco o, meglio, ritarda il raggiungimento di temperature elevate e la conseguente perdita di resistenza (è praticamente nulla a  $900^{\circ}\text{C}$ ).

Il calcestruzzo, infatti, ha una grande inerzia termica e 5 cm di calcestruzzo possono proteggere l'armatura x quasi 1 ord.

### 3 Classificazione degli elementi strutturali:

gli elementi in cemento armato si possono classificare secondo diversi criteri

#### → tipologia di acciaio

- elementi in cemento armato ordinario, dove l'acciaio ha resistenza sui 500 MPa
- elementi in cemento armato precompresso, dove l'elemento in acciaio ha resistenza tra 1000 MPa (barre) e 2000 MPa (trefoli). Si possono avere diversi casi
  - pretensione
  - posttensione
  - precompressione esterna

VANTAGGI → si possono usare acciai ad elevato limite di snervamento

- il comportamento in esercizio è più soddisfacente, siccome si limitano fessure e spostamenti (piccoli spostamenti)
- in genere, si impiega un minor volume di calcestruzzo e dunque c'è meno peso proprio (con vantaggi in strutture dove la massa è un problema).
- elevata resistenza a fatica
- meno costo x opere con luci importanti (sopra i 10 m) e carichi importanti.

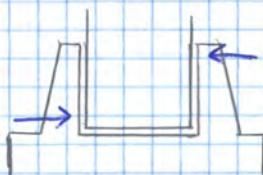
Svantaggi → essendo spesso elementi prefabbricati, c'è il problema della movimentazione di elementi di grosse dimensioni

- maggiore sensibilità dell'armatura precompressa alla corrosione.

#### → luogo di getto

- elementi gettati in opera, dove si sfrutta il vantaggio di ottenere la forma desiderata.
- elementi gettati in stabilimento (prefabbricati):

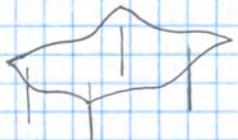
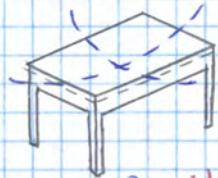
sono spesso usati in ambito industriale, come colonne, solai, travi a doppia pendente e piede e plinti.  
Il prodotto finito ha buona qualità ma c'è la problematica legata al trasporto.



Ad es. si realizzano plinti a bicchiere, cioè plinti cavi in cui si cala il pilastro e si realizza poi un getto di compensazione (per sigillare elementi strutturali diversi) con calcestruzzo fluido espansivo (EMACO).

Se c'è un incastro al piede, il momento flettente è assorbito dalle forze orizzontali in contatto con la base.

→ bidimensionale (piastre, lastre e setti)



Aggiungendo alla lastra altre 2 travi di bordo, il carico si dirige nelle 3 direzioni e il comportamento è bidimensionale (2 curvature).

→ tridimensionale (comportamento spaziale)

## 2/ Individuazione della soluzione strutturale

In genere, quando si cerca di capire come deve essere fatto un edificio x resistere alle azioni, le azioni sono divise in 2 famiglie

→ AZIONI VERTICALI

→ AZIONI ORIZZONTALI

I 2 sistemi strutturali che assorbono le azioni verticali e orizzontali possono essere identici stessi (allo stesso sistema strutturale si demanda il compito di assorbire entrambe le azioni) o diversi.

→ azioni verticali (più semplici)

Dato un oggetto soggetto a un'azione verticale, x prenderla ci sono più possibili soluzioni

→ SOLAIA A COMPORTAMENTO MONODIMENSIONALE :

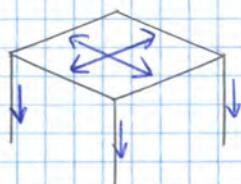
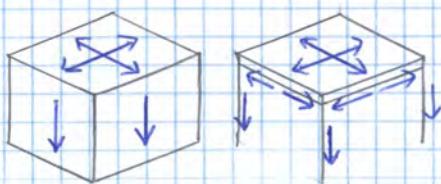
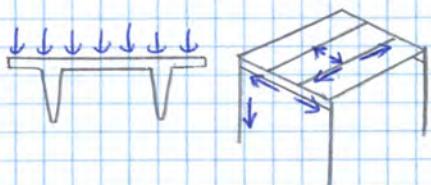
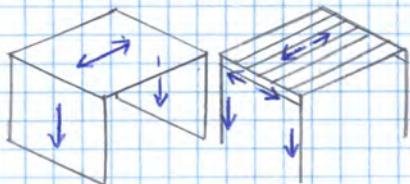
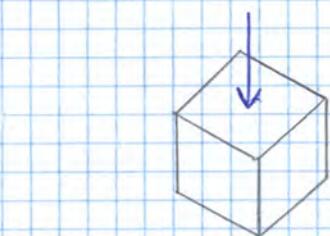
si possono avere più strutture a seconda della modalità con cui l'azione presa dall'impalcato è riportata all'esterno

→ si può fare un getto continuo dell'impalcato che poggia su due muri (questo ha deformità cilindrica)

→ anziché fare un getto continuo, si inseriscono n elementi monodimensionali affiancati tra di loro.

Questi portano il carico alla trave.  
Inoltre si è tolto il muro, lasciando un telaio in cui la trave passa il carico alle colonne

→ si usano elementi monodimensionali allargati (tegoli a  $\pi$ ), in cui il carico verticale applicato si muove prima in direzione orizzontale x arrivare alle anime del tegolo.  
Poi questo si muove verso la trave



caso x assorbire l'azione verticale, occorre definire un sistema piano e poi capire come il carico è trasmesso alla fondazione.

→ SOLAIA A COMPORTAMENTO Bidimensionale

→ si fa un getto continuo con appoggi su tutti i 4 lati.  
Il carico applicato si distribuisce su tutti e 4 gli appoggi

→ l'impalcato poggia ora su travi e colonne

→ l'impalcato poggia direttamente sulle colonne e non c'è trave.



caso x assorbire l'azione verticale, occorre definire un sistema piano e poi capire come il carico è trasmesso alla fondazione.

### 3 Percorso dei carichi:

un elemento fondamentale x individuare la soluzione strutturale consiste nel trovare il percorso dei carichi, una volta scelta la struttura.

→ CARICHI VERTICALI : CARICHI VERTICALI NEL PIANO ORIZZONTALE E

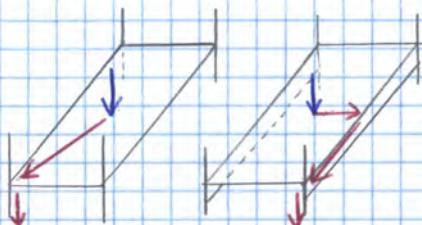
Essi sono applicati in corrispondenza dei solai, si muovono su di essi fino ad arrivare agli elementi verticali, dove i carichi sono trasmessi alle Fondazioni.

Le modalità di moto in un solido dipendono da come è concepita la struttura

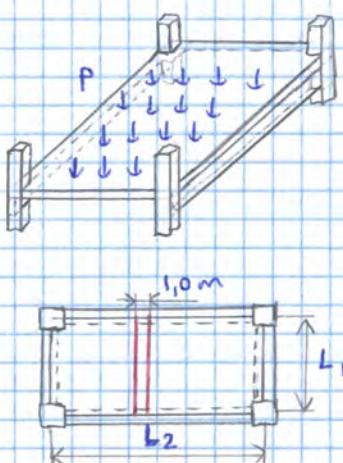
→ se bidimensionale, il carico non si muove in direzione privilegiata e si muove direttamente verso le colonne

→ se monodimensionale, il carico non si muove verso le colonne ma segue una direzione privilegiata verso le travi.

Ciò si lega al fatto che il carico si muove verso le strutture più rigide, x questione di congruenza degli spostamenti.



Es



Si consideri una struttura allungata in una direzione avente le colonne ai vertici e che poggia su travi lungo 2 spigoli opposti.

Essa è soggetta a un carico uniformemente distribuito  $p$ .

In questo caso, si ha una struttura bidimensionale che assume comportamento monodimensionale, poiché con questo carico la deformazione è monodimensionale.

Ma tali condizioni, qualunque fetta di soffitto è uguale a tutte le altre.

Pertanto, si isola una fetta di soffitto soggetto al carico di sua competenza, con la sua sezione resistente. Si immagina che la fetta abbia larghezza unitaria.

La fetta è vincolata agli estremi dalla trave, che impedisce gli spostamenti verticali (mentre non interessano quelli orizzontali) mentre non impedisce la rotazione, altrimenti la trave dovrebbe avere rigidità torsionale infinita.

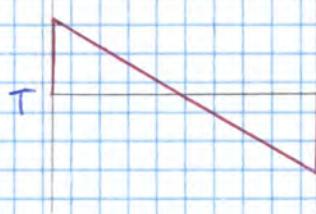
⇒ La fetta lavora sulla lunghezza  $L_1$ , come una trave semplicemente appoggiata.

Se la striscia è soggetta a un carico distribuito  $p$ , con

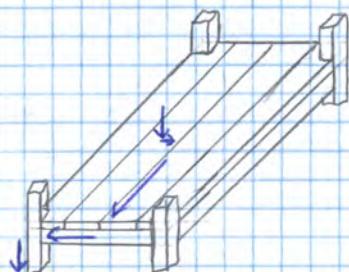
$$[p] = \text{kNm}^{-2}$$

Allora il carico applicato sulla fetta vale

$$q = p \cdot 1,0 \rightarrow 1,0 = \text{larghezza}$$



Es



Rispetto allo schema precedente, si può aggiungere un livello strutturale, nel caso che la luce  $L_1$  (su cui deve lavorare il solaiò) sia troppo elevata. Pertanto, invece di una sola trave in corrispondenza delle colonne, si inseriscono più travi nella direzione di  $L_1$ :

quelle in corrispondenza delle colonne sono collegate a esse;

quelle che danno sul vuoto sono collegate a un'altra trave in direzione perpendicolare (nuovo livello strutturale).

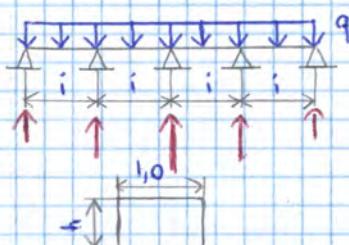
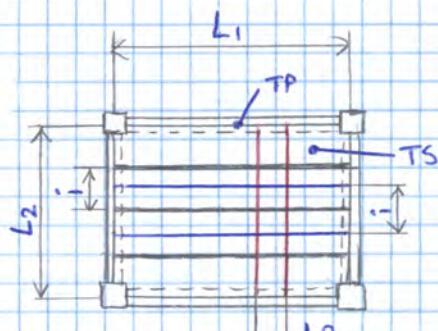
Di conseguenza, la struttura si caratterizza di:

→ piastra

$TP$

→ travi principali, che lavorano sulla luce  $L_2$  e sono collegate direttamente alle colonne

→ travi secondarie, con interasse  $i$  ( $TS$ )



Nell'analisi del percorso dei carichi, si parte dalla struttura più secondaria, cioè il solaiò su cui è applicato direttamente il carico.

Si può notare che il carico va verso l'elemento più rigido, ossia si muove lungo la luce più corta (luce  $L_2$ ). Una volta arrivato alla trave secondaria, viaggia su di essa.

Di conseguenza, nel solaiò si considera una striscia di larghezza unitaria, che è uno schema a trave continua su 5 appoggi (le travi secondarie) e soggetto al carico

$$q = p - 1,0$$

La sezione resistente ha dimensioni  $1,0 \times h$ .

### OSSERVAZIONE

In presenza di carichi variabili, questi devono essere disposti secondo le linee di influenza in modo da massimizzare le sollecitazioni.

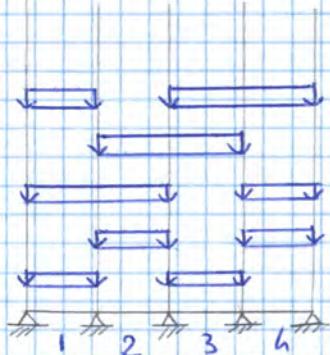
Se si ha una trave continua, un primo schema prevede una disposizione a scacchiera in cui:

→ il carico variabile è applicato nelle campate dispari

⇒ massimo momento nelle campate dispari

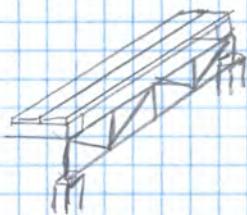
→ il carico variabile è applicato nelle campate pari

⇒ massimo momento nelle campate pari



Si considera poi la condizione di carico con le prime 2 campate caricate seguite da una disposizione a scacchiera, che dà momento minimo nel 2° appoggio. Segue la condizione in cui si caricano le campate centrali seguite dall'alternanza a scacchiera, che

Es



Uno schema alternativo può prevedere l'aggiunta di un ulteriore livello, dove la trave principale trasmette un carico puntuale a una trave reticolare.

Il ragionamento è lo stesso di prima.

Questo è il modus operandi che si adotta in tutte le strutture e si basa su 2 principi:

→ si parte dagli elementi secondari (quelli a cui si applica il carico) passando via via ai livelli superiori.

Questo è un metodo comodo, ma segue un'evoluzione opposta rispetto alla costruzione.

→ nel passaggio al livello superiore, le reazioni che si avevano nel livello precedente diventano carichi per il livello successivo.

Sequendo questo approccio, si trasforma una struttura complessa in n strutture semplici e ciò consente di avere controllo su quello che si fa, cioè permette di CAPIRE COME FUNZIONA LA STRUTTURA ed evidenziare l'insorgenza di problemi.

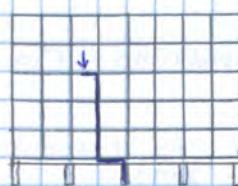
Si potrebbe ricorrere a un modello agli elementi finiti, ma si ottrebbiere un modello complicato e poco gestibile con troppi valori.

↳ questo si può fare solo dopo uno schema di calcolo manuale

Da qui, capita il percorso strutturale, si possono calcolare tutti gli elementi strutturali che il carico incontra (piastrelle, travi secondarie, travi principali, colonne e fondazioni).

→ CARICHI VERTICALI: CARICHI VERTICALI NEL PIANO VERTICALE

Una volta che le forze arrivano alle colonne, queste scendono lungo esse in diversi modi a arrivare a terra, in funzione dello schema strutturale.



A volte si può avere un piano terra con grandi spazi e colonne distanziate, mentre ai piani superiori le colonne sono rauvicinate.

Nella parte inferiore è presente un'altra trave di ripartizione.

In questo caso, una volta arrivato alle colonne, il carico scende fino a trovare la trave di ripartizione. Da qui, il carico si muove lungo essa fino a incontrare le colonne principali.

A volte, la trave di ripartizione può essere in alto e, in questo senso, si adotta la stessa soluzione architettonica con una diversa disposizione degli elementi strutturali.

Essendo la trave di ripartizione in alto, le forze non scendono più nelle colonne. Anzi, le travi sono appese, poi i carichi si muovono lungo la trave e scendono verso il basso lungo le colonne principali.

In questo modo, non si hanno più tante colonne che lavorano in compressione ma quelle secondarie sono in trazione, mentre le principali sono in



Per realizzare questo, esistono più sistemi

→ si prendono le azioni orizzontali mediante un comportamento a telaio, cioè si realizza una struttura a telaio.

Essa è adatta x azioni orizzontali non elevate

→ il telaio può essere accoppiato alla parete, in modo da ottenere una struttura molto più rigida.



Gli elementi x assorbire le azioni orizzontali possono essere

→ MURI DI TAGLIO (cemento armato)

→ STRUTTURE CONTRAVVENTATE (acciaio)

→ TELAI (cemento armato)

#### 4 Criteri di costruzione

Finora si sono fatte delle considerazioni su strutture esistenti.

Esistono poi dei criteri x definire la struttura, che sono assolutamente generali poiché non esiste un unico modo, ma è funzionale all'opera che si realizza.

I criteri così sono adatti a qualunque caso e spesso si provano più soluzioni, x vedere quale sia la più idonea.

Di si cura, quando si realizza una struttura, occorre rispondere a 3 domande.

① Secondo quale schema occorre inserire gli elementi verticali?

⇒ disposizione degli elementi verticali

Gli elementi verticali possono essere

→ ELEMENTI PUNTUALI (colonne)

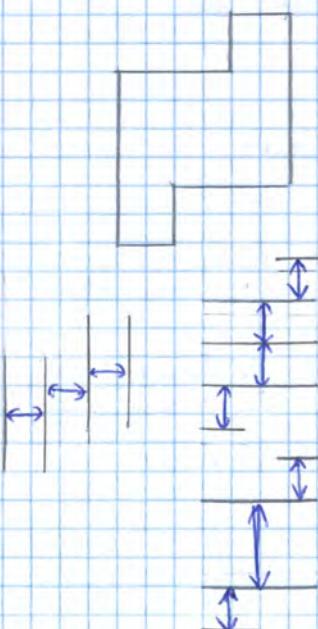
→ ELEMENTI BIDIMENSIONALI (pareti a taglio), che possono essere erosi. Se gli spazi sono molto grandi, si arriva a un sistema a telaio.

Occorre poi pensare a come si mettano gli impalcati (cioè i piani), che possono avere un comportamento monodimensionale (one way system) o bidimensionale (two way system).

Il dato di input fondamentale x la loro disposizione è rappresentato da telle distanze funzionali minime, cioè delle distanze minime tra gli elementi verticali che l'opera in progetto necessita.

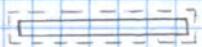
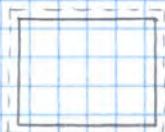
Assegnate le distanze minime e nota il tipo di piano, si possono adottare diverse soluzioni:

→ si usano pareti in una direzione con solai a comportamento monodimensionale nella direzione perpendicolare.  
A volte, si può togliere la parete intermedia.



Nella soluzione, occorre poi operare una scelta tra elementi a comportamento monodimensionale o bidimensionale.  
ciò dipende essenzialmente da

### → FORMA DEL CAMPO



Se la forma è quadrata, si ottiene la massima efficienza con elementi a comportamento bidimensionale, ad es. una lastra quadrata appoggiata su 4 lati.

Viceversa, se la forma è allungata, non c'è differenza tra appoggiare la lastra solo su 2 lati o su 4 lati.

Assumendo  $L_2 > L_1$ , conviene un elemento a comportamento bidimensionale se

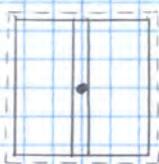
$$\frac{L_2}{L_1} < 1,5$$

### → DIMENSIONI DEL CAMPO

I campi aventi dimensioni inferiori a  $10 \div 12$  m si possono coprire efficacemente con elementi bidimensionali.

Oltre, conviene ricorrere a elementi monodimensionali.

### → TIPO DI CARICO



In presenza di carichi di distribuiti, sono preferibili elementi bidimensionali.

Se ci sono forze concentrate e fisse, conviene collocare in corrispondenza di esse elementi monodimensionali. Ad es. in presenza di una lastra quadrata, invece di fare grossi spessori per prendere il carico, si mette una trave fuori spessore.

Se il carico concentrato è mobile, conviene lo schema bidimensionale.

Qualora si scegliersero elementi monodimensionali, occorre stabilirne la disposizione:

la trave principale si posne sulla campata più lunga o più corta?

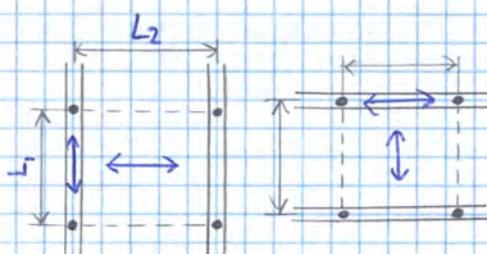
Date 2 luci  $L_1$  e  $L_2$ , si dispone di elementi prefabbricati e di travi gettate in opera.

Ce travi gettate in opera potrebbe essere infinite nella direzione corta con gli elementi prefabbricati nella direzione lunga o viceversa.

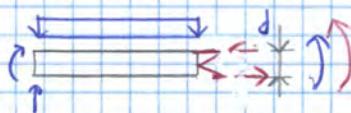
Per luci  $L_2$  GRANDI, conviene disporre le travi principali nella direzione corta e avere tanti elementi secondari lunghi che sono però soggetti a piccoli carichi (essendo in tanti, si dividono il carico).

Per luci  $L_2$  PICCOLE, meglio invertire l'orfitura tra travi principali e secondarie.

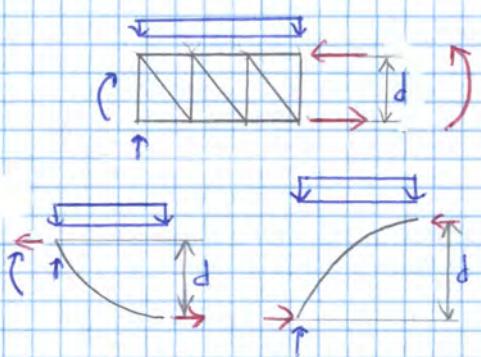
Per essere sicuri, si predimensionano entrambe le soluzioni e poi si confrontano.



OSSERVAZIONE: nella scelta del sistema di pilastri, la **luce della campata** ha un ruolo fondamentale perché è il fattore principale x individuare il sistema strutturale.  
In genere gli elementi strutturali sono soggetti a un carico perpendicolare e dunque sono soggetti a flessione.  
Per tutte le tipologie, tale sollecitazione è assorbita nello stesso modo, così da creando delle forze di compressione e trazione all'interno della sezione.



→ **TRAVE**: nasce una coppia intorno di trazione e compressione che va a equilibrare il momento flettente.



→ **TRAVATURA RETICOLARE**:

come prima, nascono 2 forze di trazione e compressione. Le forze però sono più lontane e dunque aumenta la coppia.  
Dunque, x avere un valore di forza compatibile con la resistenza del materiale, occorre allontanare le forze interne, all'aumentare della luce della trave.

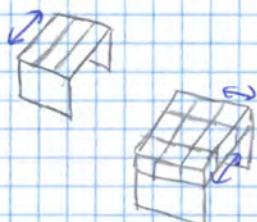
→ **FUNI**: ci sono 2 forze orizzontali che però non sono nella stessa posizione.

→ **ARCHI**: funzionano all'opposto delle funi;

⇒ all'aumentare della luce, gli elementi atti ad assorbire i carichi cambiano e si cerca di allontanare la risultante delle tensioni di trazione dalla risultante delle tensioni di compressione.

Tra i diversi sistemi x assurdo, la scelta è immediata in presenza di grandi luci, poiché ci sono poche possibilità.  
Viceversa, x pochi metri di luce, ci sono tante soluzioni e la scelta è complicata.

La soluzione più adatta si trova solo sviluppando le alternative e scegliendo in base alla struttura, ai costi e gli aspetti funzionali.



+

all'aumentare della luce, si incrementa il numero di livelli strutturali.

### III. Come si realizzano i piani?

#### Realizzazione dei solai

Esistono più soluzioni:

→ Piastra a spessore costante (più semplice)

Un solao a comportamento monodimensionale poggia su 2 pareti di appoggio.  
La piastra è a spessore costante.

#### PROPRIETÀ

→ i casseri (elementi x contenere il calcestruzzo fluido) molto semplici, con tavole in legno affiancati sono

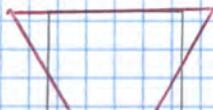
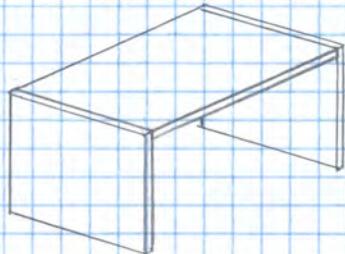
→ va bene x luci contenute; x luci grandi lo spessore è dunque il peso proprio diventano eccessivi;

→ la struttura presenta un comportamento monodimensionale perché lavora x strisce perpendicolari alle pareti, x cui l'armatura disposta è perpendicolare alle pareti.  
In realtà la struttura è bidimensionale e, con la sola armatura principale, si sviluppano nel tempo delle fessure parallele all'armatura. Il solao sta in piedi, ma le fessure lo dividono in fette indipendenti che corrispondono a quelle concuse si è calcolato il solao (tengono perché sono state calcolate).  
Del resto, se lo stato deformativo è piano, non lo è lo stato tensionale (si è assunto piano x semplicità) ed esiste una tensione nell'altra direzione.

In particolare, la sezione evorrebbe deformarsi trasversalmente ma è ostacolata da quelle adiacenti. Nasce così una tensione trasversale che è ignorata nel calcolo.

In realtà tale tensione esiste e si tiene conto in modo indiretto, disponendo l'armatura secondaria:

x convenzione, essa ha dimensione pari al 25% della dimensione dell'armatura principale  
ma, in genere, il ferro fuori calcolo è dettato dall'esperienza o dai criteri



anche se la struttura ha comportamento monodimensionale, si posiziona sempre l'armatura in 2 direzioni

## → Pan joist system



È un'alternativa che consente di semplificare la realizzazione:

il cassero, anziché seguire la forma della nervatura, è mantenuto a livello più basso, facendo un semplice cassero piano.

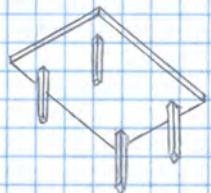
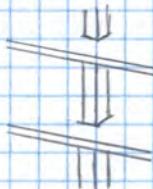
Sopra il cassero si posizionano poi degli ALLEGGERIMENTI in acciaio o vetroresina, cioè zone x creare dei vuoti.

In seguito, si getta e si riempiono le zone comprese tra i vuoti. Dunque si scassefa e si rimuovono gli alleggerimenti, che sono elementi modulari riutilizzabili in dimensioni standard.

In questo modo, si ottiene una struttura nervata.

- PROPRIETÀ
- si possono creare travi trasversali più importanti della singola costola semplicemente eliminando una fila di alleggerimenti (si riempie tutto)
  - si possono creare travi di collegamento semplicemente distanziando in maniera opportuna gli elementi di alleggerimento
  - si calcolano come singole travi a T affiancate (come nelle piastre nervate)
  - soluzione valida x LUCI IMPORTANTI e CARICHI PESANTI

## → Piastra a spessore costante appoggiata alle colonne



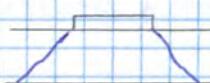
Dal punto di vista della realizzazione, è simile alla piastra a spessore costante. Ora però non c'è più appoggio su muri (vincolo lineare) ma in pochi punti, x cui il comportamento è bidimensionale.

### PROPRIETÀ

- soluzione valida x PICCOLE LUCI e CARICHI LIMITATI (civile abitazione)

→ il sistema non consente di trasferire <sup>un</sup> momento significativo alle colonne, x cui occorrono pareti controvento x resistere alle azioni orizzontali.

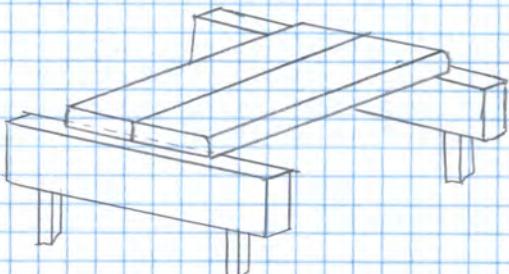
→ lo spessore contenuto rende sensibile la struttura al rumorzamento



è un meccanismo di rottura che si ha in presenza di carico concentrato sulla lastra e, in questo caso, si apre una superficie conica in tutte le direzioni e si stacca una porzione limitata.

In questo caso, la Forza concentrata è trasmessa dai pilastri.

### → Hollow core



Essi sono elementi estrusi ottenuti mediante macchine vibrofinittrici che, avanzando, fanno venire fuori degli elementi modulari. Questi presentano degli alleperimenti, in modo da risparmiare materiale e peso, rimuovendo il materiale che non lavora.

Gli elementi vengono appoggiati su un telaio piano affidato uno a uno.

Sopra si realizza poi un getto in opera di collegamento dello spessore di 5-10 cm in funzione della luce.

Il calcostruzzo si infiltra nei lati e realizza delle chiavi di taglio che fanno sì che ci sia collaborazione di carico (si realizza un piano rigido in cui gli spostamenti sono gli stessi).

Gli elementi poi lavorano, a seconda delle armature, con un certo schema statico

→ schema con semplice appoggio

→ si può anche far lavorare con continuità una, in questo caso, la realizzazione è più complicata.

Per ripristinare la continuità strutturale, allora, una soluzione semplice può essere il realizzare un comportamento a diaframma facendo un getto continuo (da un diaframma rigido).

PROPRIETÀ → soluzione valida x CARICHI LIMITATI (civile abitazione)

### → Channels & Double Tees



Essi sono elementi a T di altezza variabile tra 35 e 100 cm e di diverse tipologie, in funzione di larghezza e versatura.

Spesso la larghezza vale 250 cm, siccome questa è la massima larghezza trasportabile (pari alla larghezza del camion).

Se il solaio non fosse un multiplo di 2,50, occorrebbero elementi particolari x completare lo spazio. Spesso si taglia la trave o si crea una sponda (mediante getto) x occupare tale porzione.

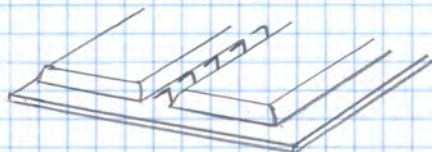
In seguito, in opera si realizza un getto di completamento.

→ esigenze funzionali

**PROPRIETÀ** → in corrispondenza delle curvature c'è un punto termico, in cui si muove il calore che si porta dietro l'umidità.

→ dunque si può realizzare un sistema di tipo waffle slab con le pignatte, in modo che le curvature siano perpendicolari tra di loro.

→ predalles



È un'altra soluzione tipica, usata anche in Italia, e presenta delle lastre prefabbricate in calcestruzzo tralicciato, che formano dei casseri a pendere. La larghezza tipica è 1,20 m o 2,40 m. Guardando in sezione, si notano degli elementi di alleggerimento a pendere ad es. in polistirolo.

Rispetto alle altre soluzioni, la lastra in calcestruzzo fa da cassero e si ottiene così una struttura autoportante che non necessita di puntelli e banchiaggi su cui poggiare.

In questo caso, per realizzare il solaio si crea un cassero puntellato da sotto, nel quale si realizzerà la trave.

Al bordo del cassero si poggia la predalles.

Siccome è poco spessa (in genere 6 cm) e quindi essa si realizzerà un getto di calcestruzzo e dovrà poi portare i carichi, essa non può stare in piedi con quella luce.

Pertanto, la si rinforza annegando in essa un traliccio, ossia un reticolare in acciaio con barre.

ESSO si costituisce di 3 fili e fa sì che la predalles sia portante lungo la luce.

→ il filo superiore è libero e più grande ( $\phi = 10-12 \text{ mm}$ )

→ 2 fili inferiori più piccoli sono annegati nella luce.

I fili sono collegati da ulteriori ferri.

Siccome la struttura non dev'essere premuta, sopra la lastra prefabbricata si incollano degli elementi che realizzano i vuoti.

Quando poi si fa il getto, si ottiene un insieme di sezioni a T affiancate che lavorano in una certa direzione e lungo esse ci sono dei tralicci.

**PROPRIETÀ: tralicci**

Fondamentalmente, i tralicci servono solo nella fase di costruzione per portare il peso del calcestruzzo fluido (durante la costruzione, il calcestruzzo è solo un peso e non porta resistenza).

Il ferro può però anche essere usato nelle fasi successive, visto che è comunque presente.

La sua utilizzabilità però dipende dalla SPESSEZZE DEL COPRIFERRO:

il calcestruzzo protegge le barre di armatura dalla corrosione ed è tanto più efficiente quanto lo spessore è maggiore

⇒ se la predalles è sufficientemente spessa, si può considerare il traliccio come un ferro resistente nella struttura.

## Criteri generali di progettazione

SCHEMI RIASSUNTIVI DI UTILIZZO



POLITECNICO  
DI TORINO  
DISEG

**Luca GIORDANO**  
Teoria e Progetto

55

#### Criteri generali di progettazione

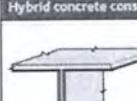
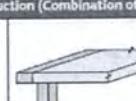
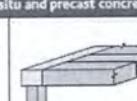
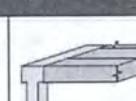


POLITECNICO  
DI TORINO  
DISEG

**Luca GIORDANO**  
**Teoria e Progetto**

56

## Criteri generali di progettazione

Concrete option	Span range			
	Min Reinforced or prestressed conc.	Max Reinforced or prestressed conc.	Min Post-tensioned concrete	Max Post-tensioned concrete
Precast twin wall and lattice girder soffit slab with in-situ infill and topping	4	7.5	X	X
Precast columns and edge beams with in-situ floor slab	4	10	6	12
Precast columns and floor units with in-situ beams <sup>a</sup>	4	14	X	X
In-situ columns and beams with precast floor units <sup>b</sup>	4	14	X	X
In-situ columns and floor topping with precast beams and floor units	4	7.5	X	X
<b>Speed of construction</b>				
Economy	✓	✓	✓	✓
Ease of service distribution	✓	✓	✓	✓
Minimises storey height	✓	✓	✓	✓
Flexibility for partitions	✓	✓	✓	✓
Suitability for holes	✓	✓	✓	✓
Punching shear capacity	✓	✓	✓	✓
Deflection control	✓	✓	✓	✓
Minimises self-weight	✓	✓	✓	✓
Soffit can be exposed	✓	✓	✓	✓
Suitable for open plan space	✓	✓	✓	✓
Dispensing action of floor	✓	✓	✓	✓
Interest robustness of frame	✓	✓	✓	✓
Off-site construction	✓	✓	✓	✓
<b>Hybrid concrete construction (combination of in-situ and precast concrete)</b>				
Precast twin wall and lattice girder soffit slab with in-situ infill and topping	4	7.5	X	X
Precast columns and edge beams with in-situ floor slab	4	10	6	12
Precast columns and floor units with in-situ beams <sup>a</sup>	4	14	X	X
In-situ columns and beams with precast floor units <sup>b</sup>	4	14	X	X
In-situ columns and floor topping with precast beams and floor units	4	7.5	X	X
<b>Key</b>				
✓ Excellent	○	Can be used, but may require further consideration		
✗ Good	✗	Not applicable or not appropriate		
a Requires 100 'tunnels' for maximum economy. Special curing methods required to obtain early age concrete strengths				
b Temporary props required				
<b>Hybrid concrete construction (Combination of in-situ and precast concrete)</b>				
				
Precast twin wall and lattice girder soffit slab with in-situ infill and topping	Precast columns and edge beams with an in-situ floor slab	Precast columns and floor units with in-situ beams	In-situ columns and beams with precast floor units	In-situ columns and floor topping with precast beams and floor units



**Luca GIORDANO**  
**Teoria e Progetto delle Strutture in cemento armato e cemento armato precompresso**

59

## **PRE-DIMENSIONAMENTO**

## → Beams

Condition	Span-to-depth ratio
Simply supported	15 (20)
End-bay	17 (25)
Cantilever	6 (8)
Campata intermedia di trave continua	20 (30)

➡ One-way spanning slabs (tabella valida per  $4m \leq L \leq 10m$ )

Imposed load, $Q_k$ (kN/m $^2$ )	Single span	Multiple span	Cantilever
2.5	27	32	10
5.0	25	30	9
7.5	24	28	8
10.0	23	27	7

→ Two-way spanning slabs ( $4m \leq L \leq 10m$ )

Imposed load, $Q_x$ (kN/m <sup>2</sup> )	1:1 panel		2:1 panel (based on shorter span)	
	Single span	Multiple span	Single span	Multiple span
2.5	34	39	30	34
5.0	32	37	28	32
7.5	30	35	26	30
10.0	28	34	25	29

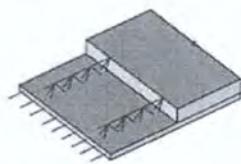


**Luca GIORDANO**  
**Teoria e Progetto delle Strutture in cemento armato e cemento armato precompresso**

60

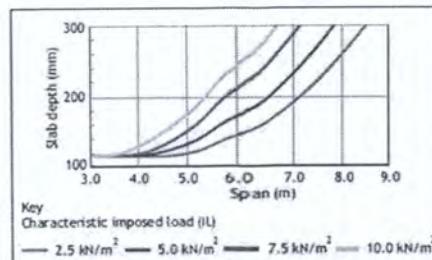
### Criteri generali di progettazione

#### ➡ Composite lattice girder slabs

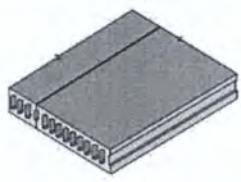


##### Notes

- 1 Depth includes topping
- 2 Props required at mid-point

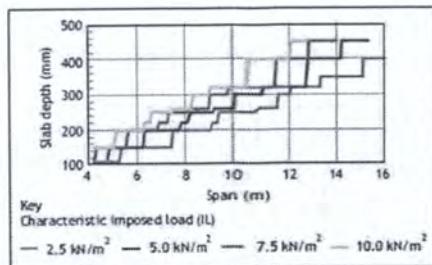


#### ➡ Precast hollowcore slabs



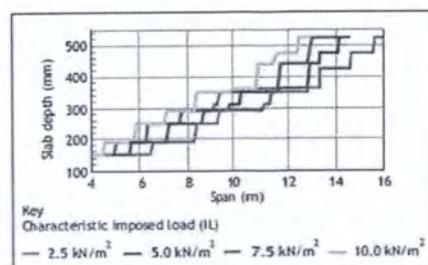
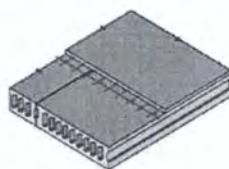
##### Note

Depth excludes topping

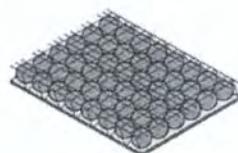


### Criteri generali di progettazione

#### ➡ Composite hollowcore slabs

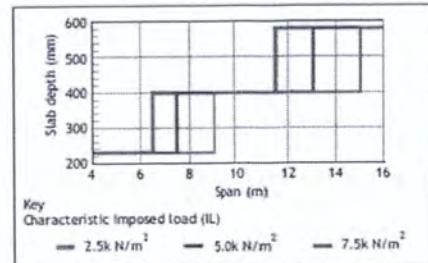


#### ➡ Voided slabs



##### Notes

- 1 Depth includes topping
- 2 Props required



## Prestidimensionamento degli elementi strutturali

1 Si sa che il prestidimensionamento è importante nelle strutture in cemento armato, poiché il peso proprio ha ruolo importante nei carichi.

2 In mancanza di esperienza, occorre fissare dei CRITERI:

un criterio di dimensionamento univocamente accettato x le strutture in cemento armato si basa sul rapporto di snellezza, cioè il rapporto luce dell'elemento strutturale - altezza dell'elemento strutturale.

$$\lambda = \frac{l}{h}$$

In fatti, nota la snellezza e assegnata la luce, si può stabilire subito l'altezza.

Esistono tante soluzioni utili x il pre dimensionamento, con vantaggi e svantaggi, i cui valori non sono assoluti ma utili.  
Del resto non esiste un'unica soluzione perché si ottiene la stessa resistenza con

- snellezza superiore e minore armatura
- snellezza inferiore e maggiore armatura.

Detto ciò, si valutano i diversi casi strutturali

(I) **Trave**: il rapporto di snellezza di riferimento (valore iniziale che al termine dei calcoli può essere modificato oppure no) dipende dallo schema statico

Semplice appoggio

$$\lambda = 15 \div 20$$

Campata terminale di una trave continua

$$\lambda = 17 \div 25$$

Campata intermedia di una trave continua

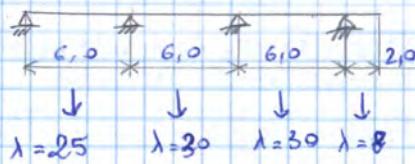
$$\lambda = 20 \div 30$$

Sbalzi

$$\lambda = 6 \div 8$$

Es

Si consideri una trave avente un certo schema statico.  
In essa si riconoscano 3 situazioni



a) Campata terminale di una trave continua in cui, considerando il massimo, si ha  $\lambda = 25$

b) Campata intermedia di una trave continua con  $\lambda = 30$  (ai suoi estremi ha momento negativo e non nullo)

c) Sbalzo con  $\lambda = 8$

In base alle luci, si ottengono i seguenti valori di altezza

- a)  $h = 26 \text{ cm}$
- b)  $h = 20 \text{ cm}$
- c)  $h = 25 \text{ cm}$

## (I) Colonne

Il meccanismo è lo stesso, ma ora ci sono più variabili perché si aggiunge anche la quantità di armatura.

Ragionando x telai a nodi fissi e colonne caricate (in cui sono trascurabili gli effetti del secondo ordine), i valori sono definiti x

→ colonne centrali

→ colonne di bordo

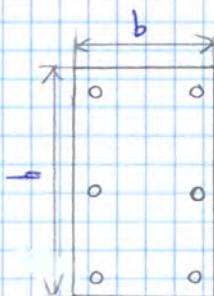
→ si partano aree diverse e diversi momenti flettenti sulle colonne

→ colonne di spigolo

Le tabelle sono distinte in funzione di

→ CLASSE DI RESISTENZA DEL CALCESTRUZZO

→ PERCENTUALE CONGIGTUDINALE DI ARMATURA:



dato un pilastro rettangolare di dimensioni  $b \times h$  e armato con un certo numero di barre di armatura, se si indicano con  $A_s$  l'area delle armature e con  $A_c$  l'area del calcestruzzo, la percentuale di armatura si definisce come

$$\rho = \frac{A_s}{A_c}$$

Tipicamente, il calcestruzzo è armato con una quantità di 1-2% di armature. Se il costo è piccolo, si va sotto il 1%; x alleggerire, si può superare il 1% ma aumentano i costi.

La scelta della sotterezza si opera in base ai carichi ultimi (sono noti gli sforzi normali che ricadono sulle colonne in ogni piano) e allo percentuale di armatura.

Secondo le norme europee e italiane, l'analisi strutturale del cemento armato si esegue attraverso 5 modalità:

→ calcolo elastico lineare

→ calcolo elastico lineare con redistribuzione

→ calcolo elasto-plastico

→ calcolo non lineare

} modelli non lineari con diversi gradi di complicazione

Nel calcolo delle sollecitazioni, si ignorano i modelli non lineari (intervengono solo nella resistenza) e si usa solo il modo elastico lineare.

Del resto, tutti i metodi di calcolo non lineare non sono metodi di progetto ma METODI DI VERIFICA. Infatti, per fare un'analisi non lineare, non solo occorrono le dimensioni del pilastro o della trave ma anche esattamente quali armature si inseriscono. Solo da lì si può avviare l'analisi non lineare.

⇒ L'analisi non lineare è uno strumento di verifica per vedere se la struttura funziona bene.

Al più, si può fare il progetto con un calcolo elastico lineare ed eventualmente raffinare i calcoli con un'analisi non lineare.

Mai tipicamente, l'analisi non lineare si usa con strutture esistenti per giustificare o meno la demolizione.

Inoltre, con l'analisi lineare vale il principio di sovrapposizione degli effetti che fa sì che la combinazione delle azioni equivalga alla combinazione delle sollecitazioni.

Così, moltiplicare il peso  $\times \gamma_G$  equivale a moltiplicare le sollecitazioni indotte dal peso  $\times \gamma_G$ , siccome si analizza in un modello lineare.

In tal modo, con l'analisi lineare si ottengono le sollecitazioni che sono usate sia per lo SLE che lo SLU.

In particolare, le verifiche fatte confrontano resistenze e sollecitazioni.

$$R \geq S$$

Più nel dettaglio, nella valutazione delle sollecitazioni si fanno delle assunzioni semplificative

→ SEZIONE NON FESSURATA

→ LEGGE COSTITUTIVA LINEARE

→ si usa il valor medio del modulo elastico del calcestruzzo

Da qui, con gli strumenti della Scienza delle Costruzioni, dalle azioni si definiscono le sollecitazioni.

Note le sollecitazioni, si definiscono le combinazioni di carico

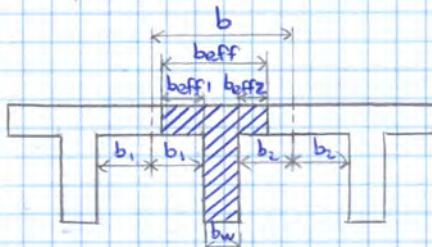
→ COMBINAZIONE FONDAMENTALE

→ combinazioni relative allo SLE → azioni caratteristiche

→ azioni frequenti

→ azioni quasi permanenti

→ piastra nervata



In una piastra avente elementi in sporgenza rispetto al piano di calpestio (cui si applica il carico), si trova una porzione di soletta che collabora con ciascuna nervatura nell'assorbimento degli sforzi.

La porzione di soletta collaborante si dice larghezza efficace  $b_{eff}$ .

⇒ la sezione resistente è una SEZIONE A T costituita da nervatura e porzione di soletta.

La larghezza efficace si calcola a partire da dati geometrici di base e dati strutturali.

$$b_{eff} = b_w + \sum b_{eff,i}$$

$b_w$  = larghezza dell'anima

$b_{eff,i}$  = semilarghezza efficace, che vale

$$\begin{cases} b_{eff,i} = 0,2b_i + 0,1p_0 \leq 0,2p_0 \\ b_{eff,i} \leq b_i \end{cases}$$

$b_i$  = larghezza disponibile dal lato i (metà della luce netta o, meglio, semidistanza tra i fili interni della nervatura).

Il termine  $b_{eff,i}$  parte dal 20% di  $b_i$  e non può superare  $b_i$ , altrimenti si avrebbe un pezzo che collabora con 2 anime.

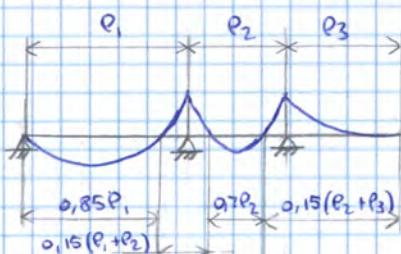
$p_0$  = distanza tra i punti a momento nullo.

Infatti la sezione appartiene a una trave avente un certo schema statico e caricata in un certo modo e, dal diagramma di momento, si determina  $p_0$ .

⇒ in linea di principio, LA LARGHEZZA EFFICACE DIPENDE DALLE CONDIZIONI DI CARICO.

Infatti, se la lunghezza  $p_0$  varia lungo lo sviluppo della trave, allora la lunghezza efficace  $b_{eff}$  varia lungo la trave.

Si trova così una trave a T avente sezione resistente che varia di zona in zona.



In realtà, siccome intervengono carichi variabili, non è semplice individuare i punti a momento nullo. Esiste dunque un metodo approssimato che fornisce il valore di  $p_0$  nelle diverse campate di una struttura tesa, che ha

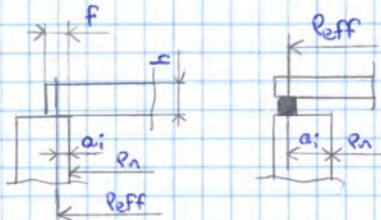
→ luce dello sbalzo, se esiste, uguale inferiore a metà della luce adiacente (lo sbalzo non è troppo importante)

$$P_3 < \frac{1}{2}P_2$$

→ il rapporto tra luci adiacenti è compreso tra  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{3}{2}$ , cioè le luci sono simili

### 3 Lunghezza efficace di travi e pilastri

Il problema della lunghezza di travi e pilastri è importante poiché i vincoli non sono vincoli teorici.



Ad es., l'intersezione trave-colonna non è un punto ma in realtà ha un'area.  
C'è dunque il problema di dove collocare il nodo in tale area.

La lunghezza efficace si calcola come

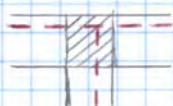
$$P_{eff} = P_n + \alpha_1 + \alpha_2$$

enz = lunghezza netta, valutata tra i fili interni degli appoggi

$\alpha_i$  = termine aggiuntivo x l'appoggio a destra o sinistra, pari a

$$\alpha_i = \min\left(\frac{h}{2}; \frac{t_i}{2}\right)$$

$h$  = spessore della trave



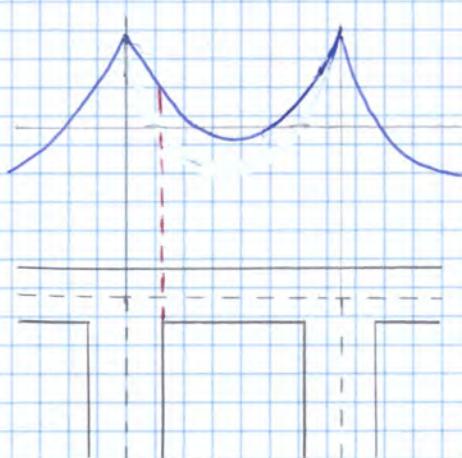
$t_i$  = lunghezza dell'appoggio x elementi non continui (non c'è un unico getto); lunghezza totale dell'elemento che dà l'appoggio x elementi continui

Per semplicità, si assume che il nodo coincida con l'intersezione tra gli assi delle travi e delle colonne e dunque la luce della trave sia pari alla distanza tra gli assi delle colonne.

Ovviamente, si varia il risultato di qualche cm ma almeno si semplifica.

In questi schemi, inoltre, esiste una serie di situazioni in cui si possono ridurre le sollecitazioni

→ TRAVI MONOLITICHE NEGLI APPOGGI



Si consideri una trave collegata alle colonne. Si è visto che il nodo coincide con l'intersezione degli assi e su questo si traccia il diagramma delle sollecitazioni.

Siccome c'è una colonna, il momento continua senza variare tra prima e dopo la colonna.

Nel calcolo della trave, si può non prendere il momento massimo al centro dell'asse ma riferirsi al MOMENTO CALCOLATO A FILO DELLA COLONNA.

Siccome ci si sposta dal picco, si ottiene un momento più piccolo.

E' richiesto che però quel momento non sia inferiore al 65% del momento che si ottiene nella schema di incastro perfetto.

Tipicamente, si ottiene una riduzione del 5-6% e dunque non conviene tanto questo passaggio.

## Le Edifici alti

**DEFINIZIONE:** cos'è un edificio alto?

Il Council of Tall Buildings ha definito diverse "fonti di altezza"

→ CONTESTO:



L'edificio può avere avere un'altezza molto superiore rispetto agli altri, tenendo conto che così l'azione del vento non è schermata.

→ PROPORZIONE:



ci si basa sul rapporto base-altezza x definire se un edificio è alto, poiché insorgano problemi diversi.

→ TECNOLOGIE ALL'INTERNO DELL'EDIFICIO (funzionalità):

un edificio alto presenta determinate tecnologie (es. movimentazione verticale di persone) diverse da quelle presenti negli edifici normali.

In generale, si definisce come edificio alto un edificio in cui l'altezza determina aspetti di comportamento strutturale e non esistono problemi progettuali e costruttivi che negli edifici ordinari non intervengono o sono in genere trascurabili.

Ad es., nelle strutture in cemento armato, gli effetti del II ordine sono trascurabili se controventate. oltre una certa altezza, tali effetti sono più importanti.

Tipicamente, si parla di

→ edificio alto  $h > 100 \text{ m}$

→ edificio super-alto  $h > 300 \text{ m}$

→ edificio mega-alto  $h > 600 \text{ m}$

**COSTRUZIONE:** in genere, gli edifici alti sono realizzati in

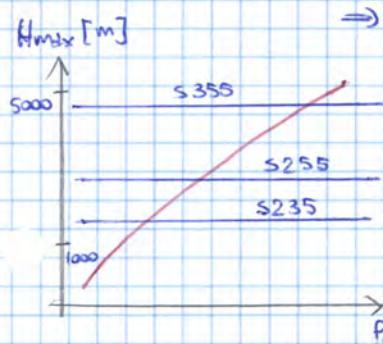
→ acciaio (dominò fino al 1980 - oggi è solo x il 20%)

→ calcestruzzo

→ composti acciaio - calcestruzzo

Gli ultimi 2 materiali si sono imposti perché si sono sviluppate tecnologie importanti che hanno permesso di ottenere calcestruzzi a elevata resistenza senza troppe difficoltà.

⇒ il calcestruzzo è diventato paragonabile in termini di resistenza con l'acciaio



Si consideri ad es. l'altezza  $H_{\max}$  di colonna che può determinare rottura, immaginando che la rottura avvenga solo x peso proprio, x cui

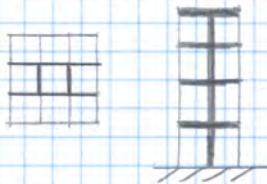
$$H_{\max} = \frac{F_y}{\gamma} \quad \gamma = \text{peso specifico}$$

### → TELAIO 3D:

e' lo schema più semplice il calcestruzzo e si può usare fino a 20 piani (escludendo alzamenti sistematici).

Oltre, si usano pareti a taglio

### → STRUTTURA A NUCLEO:

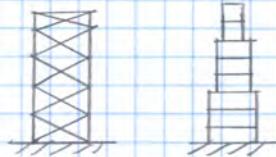


essa presenta degli **outriggers**, cioè strutture molto rigide usate in un numero di piani crescente, in modo da usare efficacemente le colonne laterali. Infatti, quando il nucleo si inflette x le azioni laterali, le fibre vanno in trazione.

Se il nucleo si aggiunge una traversa infinitamente rigida, nell'inflessione le colonne d'acciaio vanno in trazione e limitano gli spostamenti.

⇒ grazie all'irrigidimento, il momento si riduce

### → strutture periferiche:



la maggioranza del sistema strutturale che resiste alle azioni laterali è lungo la periferia. Però, portare la resistenza alla periferia dell'edificio è più complicato.

## 5 Edifici industriali:

sono edifici che presentano caratteristiche particolari

→ in genere sono edifici monopiano, in cui si realizza semplicemente una copertura

→ diventa importante, ciò che si fa dentro, ossia la struttura è in subordine rispetto alle attività che si svolgono al suo interno.

In particolare, nel progetto strutturale, occorre tenere conto del **plant layout**, che indica la presenza di macchinari, uffici, zone di servizio, vie di corsa, mezzi di trasporto sopraelevati, eventuale presenza di carichi appesi, eventuale presenza di banchine di carico e scarico (c'è materiale che entra ed esce e ciò condiziona le chiusure laterali e i sistemi di controvento), carichi su pavimento

+

possibilità di futuri ampliamenti (bisogna prevedere che lo stabilimento si duplicherà)

### PROGETTAZIONE

(la prima cosa da fare quando si definisce la struttura di un edificio industriale è definire

→ **maggia** = distanziamento delle colonne nelle 2 direzioni perpendicolari (spaziatura che è mantenuta nello sviluppo)

→ **altezza sotto il filo della catena** = altezza limite al di sotto del filo inferiore della struttura portante della copertura (definisce lo spazio libero).

## 6 Edifici industriali monopiano:

queste strutture (cioè le coperture) si devono portare

→ PESO PROPRIO

→ NEVE sulla copertura

→ eventuali carichi appesi

Fondamentalmente, queste strutture sono suddivise in funzione di:

→ TIPLOGIA DELLA TRAVE PRINCIPALE

→ TIPLOGIA DI COPERTURA, realizzata con tegoli appoggiati sulla trave principale

In fatti, la struttura si caratterizza tipicamente di colonne prefabbricate che finiscono in plinti a bicchieri prefabbricati, collegate in una direzione tramite una trave a I.

Sopra ci sono degli elementi secondari di copertura (tegoli), posizionati in direzione perpendicolare alla trave e che poggiano sulla trave.

Si nota che gli edifici industriali sono concepiti solo x azioni verticali, ma non x azioni laterali importanti come i sismi (il vento conta poco poiché l'altezza è piccola).

Esistono diverse soluzioni strutturali:

→ trave a doppia pendenza (soluzione più usata)

Essa è una trave a intradosso piano ed estradosso a doppia pendenza e altezza variabile, in modo da seguire il diagramma di momento.

In fatti questa è una trave a 2 appoggi, avente massimo momento al centro, x cui si dà un'alta altezza e dunque maggiore resistenza al centro.

⇒ si conciliano esigenze funzionali (allontanamento delle acque) et esigenze strutturali.

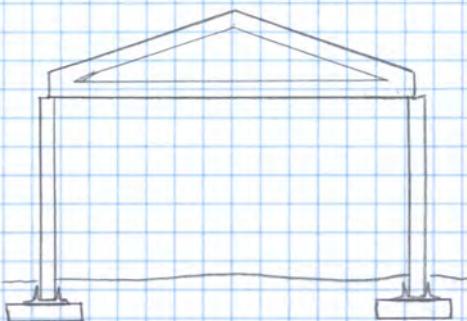
La trave è precompressa e presenta una sezione a I, avente

→ BULBO INFERIORE, che è allargato x ospitare tutta l'armatura (zona tesa)

→ ANIMA, che porta il carico

→ BULBO SUPERIORE, allargato poiché serve avere del calcestruzzo compresso (occorre grande resistenza)

Le travi sono posizionate con un interasse tipico di  $6 \div 12$  m e portano luci x un raggio ampio da 10 m a 60 m (vincolo di trasporto). La luce è tarata in base ad altezza, precompressione, etc.



→ travi piene ad altezza costante

Esse sono travi a I o a H (base più ampia) prive di doppia pendenza, x cui

→ strutturalmente, non si sfrutta l'altezza variabile e dunque funziona di meno. Infatti essa si usa x luci minori.

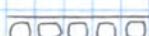
→ è più pesante (l'altezza è unica)

→ occorre concepire l'allontanamento delle docce in modo diverso (ad es conferendo una pendenza longitudinale)



A volte si può usare una trave a H realizzata in modo tale che si forma una cuspida. Qui l'acqua è convogliata con un massetto di pendenza realizzato anche in calcestruzzo alleggerito non strutturale (con aggregati in argilla espansa - fa solo da materiale di riempimento x fare pendenza, con  $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$ ) o strutturale ( $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ ).

La copertura si realizza con elementi secondari impermeabilizzati



→ tegoli a T

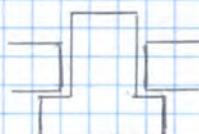
→ tegoli con profilo alare (possono anche essere usati su travi a doppia pendenza, ma li hanno problemi di ribaltamento)

→ pannelli alveolari

→ TRAVI A Y, su cui possono poggiare dei lucernari. Però hanno problemi di collegamento, carenze nell'effetto diaframma e ridotta rigidezza torsionale poiché sottili;

→ ELEMENTI SHED, cioè elementi prefabbricati che permettono l'illuminazione ma hanno bassa resistenza a torsione.

→ trave rovescia (soluzione molto usata)



Essa è una trave a T rovescia e funziona in modo sbagliato dal punto di vista strutturale. Infatti, in una struttura in cemento armato che lavora in semplice appoggio, occorre avere tanto materiale nella zona compressa e poco in quella tesa (qui lavora poco), in modo da ottimizzare la risposta strutturale.



Facendo una sezione, si nota che il tegolo poggia direttamente sull'ala della trave e dunque si riduce il pacchetto della struttura, poiché il tegolo sta all'interno dell'ala trave e non poggia sopra

⇒ SI RIDUCE L'ALTEZZA COMPLESSIVA DELL'OPERA

## DURABILITÀ DELLE STRUTTURE IN CEMENTO ARMATO

1 Esso è un aspetto fondamentale, che si è però introdotto solo negli ultimi 20 anni, mentre prima non si immaginava che il cemento armato avesse problemi di durabilità.

Il grosso del problema, in questo caso, si lega alla corrosione delle armature presenti al suo interno.

### 2 Durabilità:

essa indica la conservazione nel tempo delle caratteristiche fisiche e meccaniche del materiale e della struttura e si parla di

→ durabilità del materiale:

essa è la capacità di durare nel tempo e a resistere alle azioni aggressive dell'ambiente in cui si trova.

Un calcestruzzo di buona qualità, se non ci sono aggressioni, migliora lentamente nel tempo a livello di modulo elastico e resistenza (crescono di un ordine del 10%), grazie al continuo processo di reazione acqua-cemento che produce sempre più cemento idratato.

→ durabilità della struttura (interessa di più):

essa è la capacità di garantire il servizio per cui la struttura è progettata e la relativa sicurezza per il periodo di vita attesa.

La struttura infatti deve avere determinate caratteristiche di deformabilità, fessurazione, probabilità di insuccesso, etc. e deve mantenerle nel tempo x essere durevole.

Il tempo non è illimitato ma si progetta la struttura x una certa durata di vita attesa, relativamente a cui si definiscono azioni e resistenze.

PERIODO DI VITA ATTESA → strutture ordinarie 50 anni;

→ strutture importanti 100 anni;

→ strutture Fondamentali (es. centrali nucleari) 200 anni;

OSSERVAZIONE: la durabilità del materiale è condizione necessaria ma non sufficiente x garantire la durabilità della struttura.  
Ciò è dovuto alla presenza di cause di degrado strutturale non imputabili alla bassa durabilità del materiale.

In riferimento alle strutture esistenti, esistono diverse cause di degrado x i vari casi:

→ 42% x calcestruzzo non bene confezionato

→ 22% x cattiva messa in opera

→ 12% x errori di progettazione

→ 8% x sovraccarichi non adeguati

→ 7% x fondazioni

→ 6% x incendi

→ 5% x altro

## Scelta del calcestruzzo

Imanzitutto, il calcestruzzo è composto (se è  $1 \text{ m}^3$ ) da

- 300 kg di cemento
- aggregati (quantità non univoca)
- 150 kg di acqua

→ additivi, cioè sostanze aggiunte per variare le caratteristiche fisiche o chimiche del calcestruzzo.

Queste quantità sono definite dal preconfezionatore (che progetta la miscela), il quale necessita di alcuni dati che devono essere specificati dal progettista e riportati nella tavola progettuale

- classe di resistenza (il confezionatore non sa la resistenza voluta)
- classe di esposizione (il confezionatore non sa in quale ambiente si trova)
- dimensione nominale massima degli aggregati (il confezionatore non sa la dimensione dell'elemento strutturale)
- classe di consistenza
- classe di contenuto di cloruri

Il confezionatore, in base a queste indicazioni e alle norme, progetta la ricetta definendo il calcestruzzo.

Il progettista poi controlla se essa è messa in opera in modo adeguato.

## 2 Classe di resistenza

Il calcestruzzo è un materiale avendo un ampio range di resistenza e si classifica in funzione della **resistenza a compressione**.

Questa è misurata sperimentalmente su dei campioni che, a livello di norma (essa fissa le condizioni di controllo per confrontare le diverse prove), hanno diverse dimensioni

→ CILINDRO  $h = 300 \text{ mm}$   $\phi = 150 \text{ mm}$

⇒ si misura la resistenza cilindrica  $f_c$

→ CUBO  $l = 150 \text{ mm}$

⇒ si misura la resistenza cubica  $R_c$

In realtà, dal punto di vista progettuale, si usano i valori caratteristici  $f_{ck}$  e  $R_{ck}$ , ossia il frattile al 5% della distribuzione delle resistenze del calcestruzzo (il 95% dei provini supera quel valore).

La classe di resistenza del calcestruzzo si identifica dunque come

$$C [f_{ck}] / [R_{ck}]$$

L'Eurocodice prevede diverse classi di resistenza e, siccome in molti paesi europei ci si riferisce a  $f_{ck}$ , le classi di resistenza hanno saltanti di 5 in 5 nella  $f_{ck}$  (eccetto le prime).

Durabilità delle strutture in cemento armato

EN1992.1 - EN206



Classe di resistenza a compressione	Resistenza caratteristica cilindrica minima $f_{ck, cyl}$ N/mm <sup>2</sup>	Resistenza caratteristica cubica minima $f_{ck, cube}$ N/mm <sup>2</sup>
C8/10	8	10
C12/15	12	15
C16/20	16	20
C20/25	20	25
C25/30	25	30
C30/37	30	37
C35/45	35	45
C40/50	40	50
C45/55	45	55
C50/60	50	60
C55/67	55	67
C60/75	60	75
C70/85	70	85
C80/95	80	95
C80/105	90	105
C100/115	100	115

NTC2008



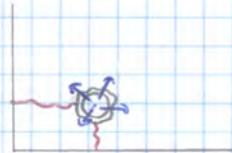
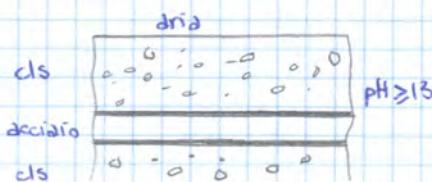
CLASSE DI RESISTENZA
C8/10
C12/15
C16/20
C20/25
C25/30
C28/35
C 32/40
C35/45
C40/50
C45/55
C50/60
C55/67
C60/75
C70/85
C80/95
C90/105



POLITECNICO  
DI TORINO  
DISEG

Luca GIORDANO

Teoria e Progetto delle Strutture in cemento armato e cemento armato precompresso



Quando il pH scende a 12, la strato passivante che si forma sulla barra può essere alterato e può causare la rottura del film protettivo. Da qui, in determinate condizioni ambientali, può avvenire corrosione.

La corrosione consiste nell'ossidazione della barra d'armatura (arrugginimento) e l'ossido occupa un volume maggiore rispetto all'acciaio originale.

→ man mano che l'ossidazione progrede, nascono delle pressioni verso l'esterno dovute all'aumento di volume delle barre ossidate. Tali pressioni inducono localmente in compressione il calcestruzzo e nascono delle FESSURE LONGITUDINALI PARALLELE ALLE BARRE.

↳ la fessura è conseguenza della corrosione e non il motivo.

Alla lunga, avvengono rigonfiamenti e distacchi del copriferro originati che espangono maggiormente l'armatura e peggiorano la situazione.

Esistono 2 fattori ambientali importanti che promuovono il processo di corrosione:

→ carbonatazione:

è un fenomeno chimico che varia la composizione chimica del calcestruzzo a diretto contatto con l'anidride carbonica.

Di per sé il calcestruzzo carbonatato non è meno resistente rispetto a quello normale (anzi, è più duro), ma c'è una RIDUZIONE DEL pH.

Pertanto, può avvenire la rottura del film passivante e, in presenza di altre condizioni ambientali, può determinare la corrosione.

↳ la carbonatazione non crea problemi se non c'è l'armatura.

Si dimostra che l'anidride carbonica penetra all'interno del calcestruzzo secondo una legge di radice.

$$s = k \sqrt{t}$$

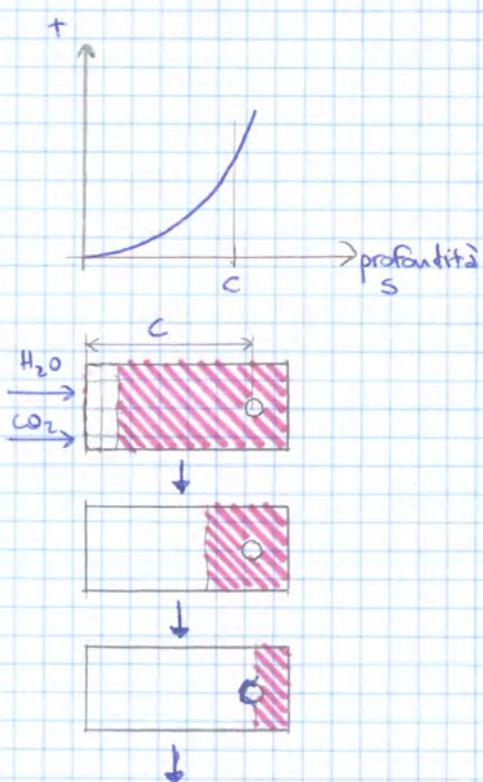
$k$  = costante dipendente dalle caratteristiche meccaniche del calcestruzzo (porosità)

Sperimentalmente, la carbonatazione si valuta con il test della fenolftaleina:

si tratta una carota di calcestruzzo con la sostanza e la zona non carbonatata assume color rosa, mentre la zona carbonatata non cambia colore. In tal modo, si legge visivamente la zona di penetrazione.

Nella carbonatazione, l'acqua e l'anidride carbonica presenti nell'atmosfera penetrano gradualmente all'interno della struttura e si accresce la parte carbonatata.

Quando affiora



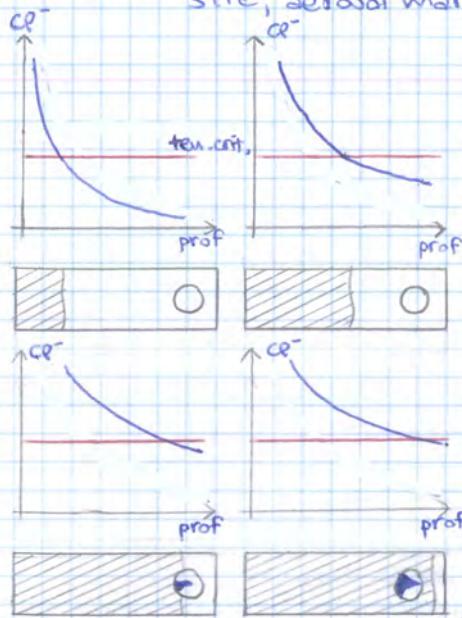
## → cloruri:

è un altro fenomeno che rompe il film protettivo e causa la corrosione delle armature.

I cloruri sono presenti all'interno del calcestruzzo x 2 motivi

- all'interno x via dell'confezionamento, poiché sono presenti in una componente (acqua), aggregati non lavati in modo da rimuovere i sali additivi non conformi).
- Il confezionamento delle garanzie che non ci sia una grande quantità di cloruri.

- PENETRAZIONE DALL'AMBIENTE ESTERNO (più tipico) poiché la struttura può essere a diretto contatto con acque marine o salmastre, aerosol marino o sali disgelanti.



La situazione è simile alla carbonatazione e si definisce un **tenore critico di cloruri**:

quando gli ioni cloruri sono al di sotto di tale tenore, non c'è corrosione perché il film non è intaccato.

Quando penetrano, la zona in cui si supera il tenore aumenta sempre di più, fino ad arrivare in corrispondenza dell'armatura e innescare la corrosione.

Tra l'altro, se nella carbonatazione la corrosione è diffusa e uniforme, con cloruri avviene una **corrosione localizzata** (pitting) in cui c'è un danneggiamento localizzato.

Il pericolo è maggiore poiché, se la corrosione è graduale e uniforme nella carbonatazione, ora è locale (difficile da trovare) e insidiosa.

questa è la situazione tipica, ma se ci sono molti cloruri, la corrosione è più uniforme

Questo problema si verifica nelle zone a intermittezza (ZONA DI SPLASH)

## III Cicli di gelo-disgelo:

nel passaggio liquido-solido, l'acqua aumenta il suo volume del 9%. I cicli di variazione di volume possono danneggiare il calcestruzzo.

Il problema è difficile da risolvere.

→ si può impedire l'ingresso d'acqua e evitare ecedenze d'acqua durante la costruzione

→ si inserisce un adeguato SISTEMA DI MICROBOLLE D'ARIA, che lascia uno spazio che sarà occupato dall'acqua quando aumenterà di volume.

→ Fondazioni: XC2

In realtà, le diverse strutture possono essere raggruppate

→ XD: le sottoclassi si definiscono in base all'UMIDITÀ

→ XD1: umidità moderata

→ XD2: bagnato

→ XD3: bagnatura ciclica

In base alla classe di esposizione ambientale, la norma impone dei limiti in  
EQUANTITÀ

→ TIPO DI CEMENTO

→ RAPPORTO a/c

{ definiti dal confezionatore

→ copriferro → definito dal progettista

In generale, all'aumentare dell'intensità delle azioni ambientali, si ha

→ AUMENTO DELLA QUANTITÀ DI CEMENTO

→ MINOR RAPPORTO a/c (così il calcestruzzo è meno poroso)

→ AUMENTO DELLO SPESORE DEL COPRIFERRO

↓

questi parametri si agiscono per aumentare la durabilità

In particolare, la norma EN206 definisce in funzione della classe di esposizione

→ massimo rapporto a/c che il confezionatore può usare

→ minima classe di resistenza:

se si usasse una classe inferiore, nascerebbero problemi contabili poiché tale miscela sarebbe bocciata e il progettista dovrebbe pagare la resistenza.

Pertanto, quando si seleziona il calcestruzzo, dalla classe di esposizione si trova la classe minima di resistenza

→ contenuto minimo di cemento

→ contenuto minimo di aria

$\Delta C_{dur, \gamma}$  = incremento legato a un contributo x la sicurezza dell'elemento (in Italia, il valore raccomandato è 0), x acciai inox (vale 0) e protezioni addizionali (vale 0)

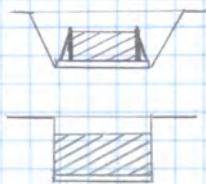
$\Delta C_{dev}$  = TOLLERANZA tipicamente compresa tra 0 e 10 mm e legata ai controlli di qualità

→ controlli sulla misura del copriferro in fase di realizzazione

$$\Delta C_{dev} = 5 \div 10 \text{ mm}$$

→ controlli di qualità con eliminazione dell'elemento, se non conformi

$$\Delta C_{dev} = 0 \div 10 \text{ mm} \rightarrow x \text{ gli elementi prefabbricati si parte da } 5 \text{ mm}$$



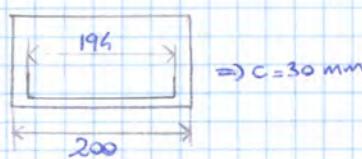
→ getti di contatto con superfici irregolari, dove la deviazione è importante (es. madrone e fondazioni senza casserini o pali di fondazione).

$$\Delta C_{dev} = 60 \div 75 \text{ mm}$$

Tipicamente, il copriferro vale  $20 \div 60$  cm.

Come si assicura il copriferro?

Sui casserini si mettono dei **distanziali**, cioè elementi che staccano il ferro dalla base e danno una certa distanza da esso.



In altre situazioni, ciò è già garantito dalla lunghezza del ferro che, in progetto, tiene conto del copriferro.

#### 6. Errori progettuali e costruttivi:

La durabilità non è determinata solo dall'ambiente ma anche da errori progettuali (dal progettista) e costruttivi (interessano come costruttori).

Esistono alcuni problemi tipici

→ sistemi di raccolta acque:

esso è un problema tipico delle strutture aventi parti esposte.

Ogni volta che si costruisce una struttura all'aperto e che è soggetta a piogge, infatti, occorre pensare come accogliere le acque e allontanarle, tenendo poi conto che le opere strutturali preposte alla gestione dell'acqua abbiano durata di vita ben inferiore rispetto alla struttura.

Inoltre, occorre anche gestire l'allontanamento delle acque, evitando che ci sia percolazione lungo i pilastri e cercando di trattare le acque sporche prima di rilasciarle.

## Durabilità delle strutture in cemento armato

prospetto 4.3N Classificazione strutturale raccomandata

Classe Strutturale		Classe di esposizione secondo il prospetto 4.1						
Criterio		X0	XC1	XC2 / XC3	XC4	XD1	XD2 / XS1	XD3 / XS2 / XS3
Vita utile di progetto di 100 anni	aumentare di 2 classi	aumentare di 2 classi	aumentare di 2 classi	aumentare di 2 classi	aumentare di 2 classi	aumentare di 2 classi	aumentare di 2 classi	aumentare di 2 classi
Classe di resistenza <sup>1)2)</sup>	$\geq C30/37$ ridurre di 1 classe	$\geq C30/37$ ridurre di 1 classe	$\geq C35/45$ ridurre di 1 classe	$\geq C40/50$ ridurre di 1 classe	$\geq C40/50$ ridurre di 1 classe	$\geq C40/50$ ridurre di 1 classe	$\geq C45/55$ ridurre di 1 classe	$\geq C45/55$ ridurre di 1 classe
Elemento di forma simile ad una soletta (posizione delle armature non influenzata dal processo costruttivo)	ridurre di 1 classe	ridurre di 1 classe	ridurre di 1 classe	ridurre di 1 classe	ridurre di 1 classe	ridurre di 1 classe	ridurre di 1 classe	ridurre di 1 classe
È assicurato un controllo di qualità speciale della produzione del calcestruzzo	ridurre di 1 classe	ridurre di 1 classe	ridurre di 1 classe	ridurre di 1 classe	ridurre di 1 classe	ridurre di 1 classe	ridurre di 1 classe	ridurre di 1 classe

## Note al Prospetto 4.3N

- 1) Si considera che la classe di resistenza e il rapporto a/c siano correlate. È possibile considerare una composizione particolare (tipo di cemento, valore del rapporto a/c, fini) con l'intento di ottenere una bassa permeabilità.
- 2) Il limite può essere ridotto di una classe di resistenza se si applica più del 4% di aria aggiunta.

## Durabilità delle strutture in cemento armato

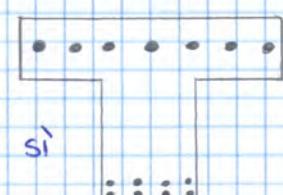
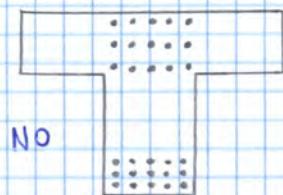
prospetto 4.4N Valori del coprifero minimo,  $c_{min,dur}$  (mm), requisiti con riferimento alla durabilità per acciai da armatura ordinaria, in accordo alla EN 10080

Requisito ambientale per $c_{min,dur}$ (mm)		Classe di esposizione secondo il prospetto 4.1						
Classe strutturale		X0	XC1	XC2 / XC3	XC4	XD1 / XS1	XD2 / XS2	XD3 / XS3
S1	10	10	10	15	20	25	30	
S2	10	10	15	20	25	30	35	
S3	10	10	20	25	30	35	40	
S4	10	15	25	30	35	40	45	
S5	15	20	30	35	40	45	50	
S6	20	25	35	40	45	50	55	

prospetto 4.5N Valori del coprifero minimo,  $c_{min,dur}$  (mm), requisiti con riferimento alla durabilità per acciai da precompressione

Requisito ambientale per $c_{min,dur}$ (mm)		Classe di esposizione secondo il prospetto 4.1						
Classe strutturale		X0	XC1	XC2 / XC3	XC4	XD1 / XS1	XD2 / XS2	XD3 / XS3
S1	10	15	20	25	30	35	40	
S2	10	15	25	30	35	40	45	
S3	10	20	30	35	40	45	50	
S4	10	25	35	40	45	50	55	
S5	15	30	40	45	50	55	60	
S6	20	35	45	50	55	60	65	

## → disposizione delle armature



Se si adattano bene le armature, il sistema funziona dal punto di vista teorico ma non da quello pratico in quanto, essendo le armature troppo vicine e in numero eccessivo, il calcestruzzo non riesce a coprire l'intera sezione.

Il calcestruzzo, infatti, non scorre come l'acqua (anche nel caso che sia ben lavorabile), ma è sempre un materiale viscoso e faticoso a superare determinati ostacoli e ad arrivare agli angoli.

In particolare, quando arriva al cantiere, il calcestruzzo presenta il 10% di volumetria di aria e causa del continuo rimescolamento durante il trasporto.

Questa è eliminata dopo il getto nella vibrazione del calcestruzzo, in cui si inserisce un ago in modo che il calcestruzzo occupi tutto lo spazio a disposizione e l'aria intrappolata fuoriesca (questa non è gradita perché non ha resistenza). Perché è avvenuta la vibrazione, deve poter entrare nell'azione uno spillone avente diametro di 4 cm. Se l'armatura fosse distanziata a meno di 6 cm, questa impedirebbe la vibrazione.

⇒ SI DISPONE L'ARMATURA SUPERIORE IN MODO CHE PASSI IL VIBRATORE;  
SI DISPONE L'ARMATURA INFERIORE IN MODO CHE SI INFILI IL CALCESTRUZZO.

Per allontanare le barre, si cerca di creare dei GRUPPI DI BARRE DISTANZIATE sia nell'armatura inferiore che in quella superiore.

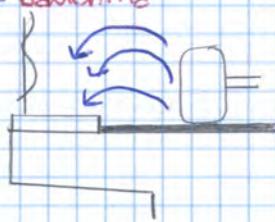
Queste saranno penalizzate x via della minore aderenza (occorre mettere più barre) ma la struttura funziona molto meglio.

## → spigoli



Questi sono elementi che, negli ambienti costruttivi, devono essere possibilmente eliminati.

## → bauchini



Siccome il blocco costruttivo è impermeabilizzato, il cordolo laterale è soggetto a schizzi e si trova nella situazione peggiore (occasionalmente bagnato). Occorre dunque utilizzare calcestruzzi a maggiori prestazioni e copriferra più alto.

⇒ accorgimenti progettuali che anticipano le problematiche

## 6 Classe di consistenza:

essa è direttamente collegata alla lavorabilità.

Il calcestruzzo deve essere di buona qualità, sia dal punto di vista della risposta nei confronti della carbonatazione o dell'ingresso di sostanze aggressive. Per questo motivo, deve presentare un massimo rapporto  $a/c$ , che si riduce in funzione della classe di esposizione. In questo modo, però, il calcestruzzo è meno fluido ed è più difficile fargli assumere la configurazione finale.

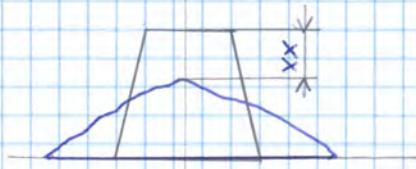
Esistono tanti metodi standard x misurare la lavorabilità, tra cui c'è l'abbassamento del cono.

Il metodo prevede di riempire un cono con il calcestruzzo e successivamente di rovesciarlo. Sotto il peso proprio, il cono si abbassa e sprofonda.

In funzione dell'entità dell'abbassamento, si definisce la classe di consistenza e la si indica come

$S \text{ } XX$

$XX = \text{abbassamento in mm}$



Esistono diverse classi di consistenza, da quelle asciutte a quelle più umide.

Si può notare che l'aggiunta di acqua comporta un incremento della lavorabilità, e scatta di una serie di prestazioni.

Per gestire questo problema, a partire dalla classe di esposizione si definisce il massimo rapporto  $a/c$ .

In base poi al contesto in cui si lavora, si ricava la classe di consistenza. Sapendo che il rapporto  $a/c$  è vincolato a un valore massimo, occorre inserire dei FLUIDIFICANTI.

- costo maggiore
- esistono problemi, occorre dare tutti i parametri
  - se ci si focalizza sulla sola classe di esposizione, si ottiene un calcestruzzo troppo duro
  - se ci si focalizza sulla sola classe di consistenza, si ottiene un calcestruzzo poco resistente e poco duraturo.

### TIPICHE CLASSI DI CONSISTENZA

- solette di rampe di scale
- elementi orizzontali
- pilastri

$S3 \div S4$

$S4 \div S5$

$S5 \rightarrow \text{facile da vibrare}$

### → calcestruzzi autocompattanti (SCC):

un calcestruzzo, x essere compattato in maniera adeguata, necessita della vibrazione.

Negli SCC non è necessario perché questi sono molto fluidi (simili all'acqua) e possono occupare liberamente tutti gli spazi compresi tra i sassetti.

Essi presentano un cemento a granulometria molto fine con superfluidificante.

Siccome sono molto fluidi, non si usa la prova del cono x valutare la consistenza poiché non si può misurare l'altezza del calcestruzzo dopo lo spandimento. Si misura invece il diametro del cono.

VANTAGGI → risparmio di tempo

→ risparmio di manodopera

→ minori rischi x la salute degli operatori

SVANTAGGI → il costo superiore (30-40% in più rispetto ai calcestruzzi ordinari) si può recuperare con il risparmio che si ha x la mancata vibrazione

} poiché non c'è vibrazione

SVANTAGGI → calcestruzzi più sensibili, ossia questi presentano una dispersione maggiore rispetto a quelli tradizionali tra il calcestruzzo che entra nella betoniera e il calcestruzzo che esce.

### → calcestruzzi fibro-rinforzati:

sono calcestruzzi in cui, x risolvere il problema della bassa resistenza a trazione del calcestruzzo, si inseriscono fibre di acciaio, vetro o polimeriche.

Le fibre hanno diverse dimensioni e diverse forme.

Ciò consente di AUMENTARE LA DURITÀ A TRAZIONE del calcestruzzo



→ serve sempre un'armatura, ma si migliorano alcune caratteristiche come il comportamento a trazione, non tanto a livello di resistenza massima ma come duttilità a trazione del calcestruzzo

→ senza le fibre, si ha comportamento fragile. In particolare, si ha un picco ma poi cominciano a nascere fessure e la resistenza a trazione diminuisce

→ con le fibre, se queste hanno un determinato comportamento e riescono a "coprire" le fessure in modo adeguato, si ottiene un comportamento praticamente plastico e duttile in trazione

Il comportamento dipende poi da quantità e tipo di fibra.

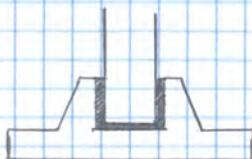
VANTAGGI → resistenza a fessurazione

→ maggiore tenacità

→ maggiore resistenza agli urti

SVANTAGGI → nel caso delle fibre in acciaio, ci sono problemi con il fuoco

## APPLICAZIONI



Essi si usano ogni volta che occorre fare un GETTO DI COMPLETAMENTO.

In questo caso, si usa una malta espansiva che, essendo fluida, occupa tutto lo spazio disponibile e poi si espande. Così si garantisce il perfetto contatto tra gli elementi.

→ calcestruzzo proiettato



Essa è un calcestruzzo molto fluido e a comportamento tixotropico (ad attacco verticale) e con aggregato molto fine.

Essa è iniettata da un ugello e con essa si realizzano strati di calcestruzzo di piccola spessore ( $2 \frac{1}{2}$  cm). Nei casi di pareti più spesse, si fanno più passate.

Essa si usa tipicamente nelle GALLERIE durante la fase di scavo, siccome occorre gettarla subito in modo da evitare il distacco di porzioni di roccia.

VANTAGGI → non servono casseri

SVANTAGGI → Forte variabilità delle caratteristiche meccaniche e, per questo, il calcestruzzo proiettato va bene solo per un trasitorio.

## 8 Acciaio

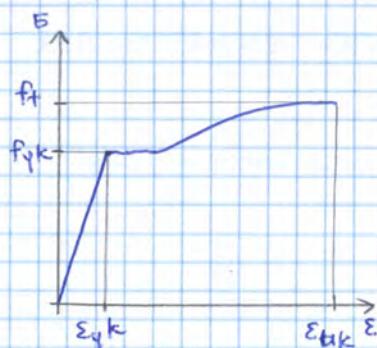
È il II materiale che interviene nelle strutture in cemento armato. Ci si focalizza sugli acciai ordinari.

Gli acciai ordinari sono definiti nell'EN 10080 e l'EC2 riporta una tabella con le caratteristiche degli acciai

→ TENSIONE DI SNERVAMENTO

$$f_yk = 600 \text{--} 600 \text{ MPa}$$

→ CLASSE DI DURITÀ, indicata con una lettera alla fine (es. B450 B) che si lega all'allungamento a rottura.



La legge costitutiva è una legge di tipo elasto-plastico con un tratto elastico fino a  $f_yk$ . Segue un tratto a tensione costante dove la deformazione aumenta. C'è poi un tratto di incrinamento fino a una tensione di rottura.

$$f_t = k f_yk$$

è una deformazione caratteristica ultima  $\epsilon_{u,k}$ . Il tratto discendente finale è fittizio perché, durante la prova, una barra d'acciaio di sezione  $A_0$  è soggetta a una forza  $F$ .

La tensione che si calcola è

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

In funzione della duttilità, si individuano 2 tipi di acciaio

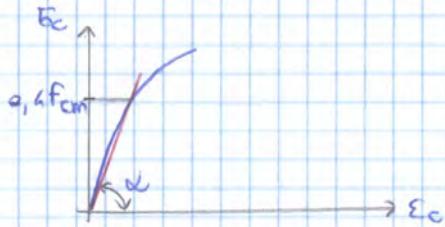
→ B450C : si usa in barre di diametro  $6 \div 60$  mm e x le strutture principali  
(è molto duttile ed è idoneo nelle zone sismiche)

→ B450A

→ B450A : si usa solo in barre di diametro  $5 \div 10$  mm e x le reti:

In genere, si usano barre aventi diametro compreso tra 6 mm e 60 mm.  
Tipicamente, si usano diametri fino a 26 mm; oltre i 30 mm, è difficile trovare tutti i diametri.

### → MODULO ELASTICO



Per convenzione, non ci si riferisce al modulo tangentiale iniziale ma al modulo secante corrispondente al valore di tensione 0,6f<sub>cm</sub>. Il modulo elastico vale

$$E_{cm} [\text{GPa}] = 22 \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{0,3}$$

### GRANDEZZE CARATTERISTICHE DI DEFORMAZIONE

I valori in campo strutturale sono negativi; (corrispondono ad accorciamenti - lo stesso vale x le resistenze) e sono valutati in %

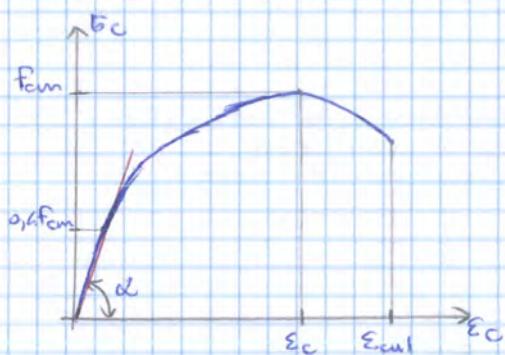
#### → DEFORMAZIONE ALLA MASSIMA TENSIONE

$$\varepsilon_{c1} = 0,7 f_{cm}^{0,31} < 2,8$$

#### → DEFORMAZIONE ULTIMA

$$\varepsilon_{cul} = \begin{cases} 2,8 + 27 \left( \frac{98 - f_{cm}}{100} \right)^6 & f_{ck} \geq 50 \text{ MPa} \\ 3,5 & f_{ck} < 50 \text{ MPa} \end{cases}$$

### LEGGE COSTITUTIVA



La legge costitutiva del calcestruzzo è complessa. Se si valuta in compressione, si nota che il legame è non lineare anche x bassi livelli di carico. D'altra parte, fino a una tensione di circa 0,5f<sub>ck</sub>, la non linearità può essere trascurata dal punto di vista del calcolo

Si in realtà, nello SCU si considera la non linearità fin dall'inizio; nello SLE, siccome si è in esercizio, si considera comportamento elastico-lineare

Il legame costitutivo presenta poi un ramo di SOFTENING, cioè a un certo punto si riduce la tensione necessaria x applicare la deformazione. Per ottenere una curva durevole questa forma, si ricorre alla prova a controllo di deformazione:

si schiaccia il campione tra 2 piatti e si impone un accorciamento del provino (controllo degli spostamenti). La macchina dà poi la tensione di risposta (letta dalla pressione e dell'olio) che è necessaria x ottenere quello spostamento. Per questo motivo, la deformazione

Per questo motivo, la deformazione si trova sull'asse delle ascisse in quanto è la variabile indipendente.

Del resto, il legame deformazione-tensione  $\varepsilon = \varepsilon(f)$  non è una funzione (a una tensione non si associa un unico valore di deformazione). Viceversa, il legame  $f = f(\varepsilon)$  è una funzione.

Se si eseguisse una prova a controllo di tensione, non si vedrebbe il ramo di softening.

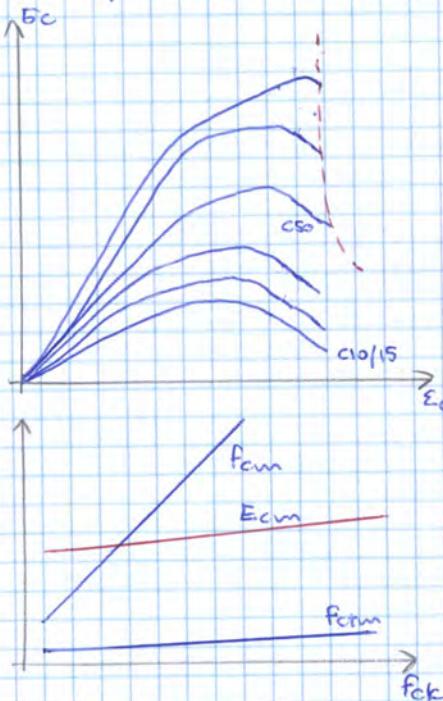
La curva sforzo-deformazione è descritta dall'equazione di Sargini

$$\frac{E_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \quad \text{per } 0 < |\varepsilon_{el}| < |\varepsilon_{crit}|$$

$$\eta = \frac{E_c}{E_{cl}}$$

$$k = 1,05 E_{cm} \frac{|\varepsilon_{el}|}{f_{cm}} \rightarrow \text{basta conoscere } f_{ck}$$

L'equazione è tipicamente usata x il calcolo non lineare.



Se si traccia la legge costitutiva di Sargini, si ottiene un grafico che varia al variare della resistenza a compressione, cioè di  $f_{ck}$ .

In particolare, all'aumentare della classe di resistenza

→ aumenta il modulo elastico

→ aumenta la deformazione a cui si arriva al picco di resistenza e aumenta il massimo ( $f_{cm} = f_{ck} + 8$ )

→ diminuisce la deformazione ultima, cioè quella a cui avviene rottura. Il materiale è dunque più fragile

Valutando nel dettaglio la variazione dei parametri di resistenza in funzione della resistenza caratteristica  $f_{ck}$ , si ha

→  $f_{cm}$ : varia da 1 a 5 in modo quasi lineare

→  $E_{cm}$ : varia da 27 a 46 GPa in modo quasi lineare

→  $f_{cm}$ : varia linearmente poiché essa vale  $f_{ck} + 8$

## INVECHIAMENTO

Il calcestruzzo è un materiale invecchiante e i parametri di resistenza variano nel tempo.

Inoltre, i valori con cui si definiscono le classi di resistenza e si fanno le verifiche, sono riferite a un tempo convenzionale di 28 giorni.

Se si volesse sapere come evolve la resistenza del calcestruzzo e dunque avere la resistenza in tempi diversi (sia superiori che inferiori a 28 giorni), si può usare la relazione

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) f_{cm}$$

$f_{cm}$  = resistenza a 28 giorni

$$\beta_{cc}(t) = e^{s \left[ 1 - \left( \frac{28}{t} \right)^{1/2} \right]}$$

s = coefficiente che è funzione del tipo di calcestruzzo.

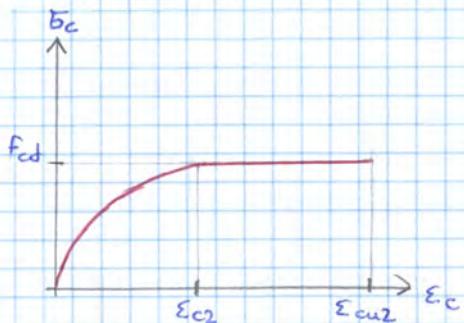
I calcestruzzi confezionati hanno una diversa evoluzione della resistenza nel tempo e, a questo, si definiscono le classi NORMALE N, RAPIDO R e LENTO S.

A 3 giorni, il rapido ha già il 66% della resistenza a 28 giorni, il Normale ne ha il 60% e il lento il 68%.

A 28 giorni, tutti hanno la resistenza  $f_{ck}$ .

A 1 anno, il rapido ha il 15% di resistenza in più rispetto a  $f_{ck}$ , il normale ne ha il 14% e il lento ne ha il 31%.

## LEGGE COSTITUTIVA DI RIFERIMENTO



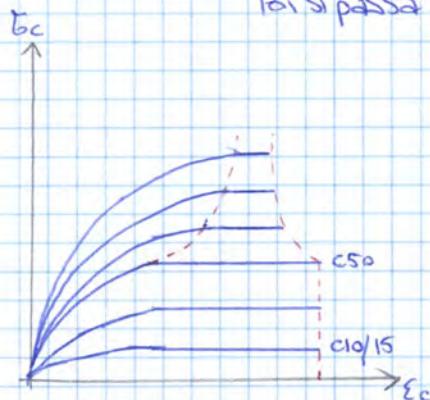
Nel calcolo allo SLU, si considera un legame costitutivo di tipo semplificato rispetto a Sarginne, con la legge parabola - rettangolo. Essa presenta un tratto parabolico da 0 a deformazione  $\epsilon_{c2}$ , seguito da un tratto a tensione costante pari a  $f_{cd}$  fino alla deformazione  $\epsilon_{cu2}$ .

$$\sigma_c = \begin{cases} f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] & \epsilon_c \leq \epsilon_{c2} \\ f_{cd} & \epsilon_{c2} < \epsilon_c < \epsilon_{cu2} \end{cases}$$

$$\epsilon_{c2} = \begin{cases} 2,0 + 0,085 (f_{ckm} - 50)^{0,53} & f_{ck} > 50 \text{ MPa} \\ 2,0 & f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\epsilon_{cu2} = \begin{cases} 2,6 + 35 \left( \frac{f_{ck} - f_{ck}}{100} \right)^6 & f_{ck} > 50 \text{ MPa} \\ 3,5 & f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \end{cases}$$

n : fino a  $f_{ck} = 50 \text{ MPa}$ , esso vale 2 e si ha una parabola.  
Poi si passa a una curva con potenza inferiore a 2.



Questa è una legge costitutiva riferita non ai valori caratteristici ma ai valori di calcolo e tiene conto degli effetti a lungo termine e del coefficiente di sicurezza, che intervengono nell'approccio semiprobabilistico.

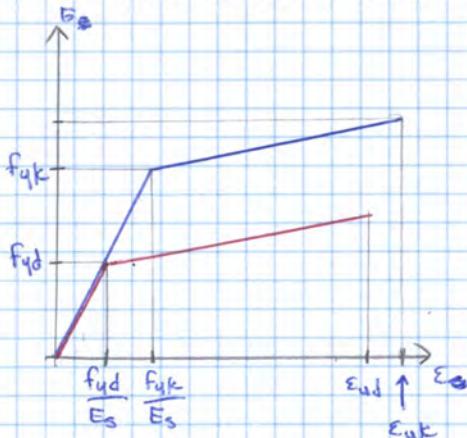
Tipicamente, si opera con calcestruzzi sotto C50, x cui si ha

$$\epsilon_c = 2,0 \%$$

$$\epsilon_{cu} = 3,5 \%$$

## 2 Acciaio

### LEGGE COSTITUTIVA DI RIFERIMENTO



La legge costitutiva che si considera è di tipo elasto-plastico.

Se ci si riferisce ai valori caratteristici, il comportamento è elastico lineare fino a  $f_{yk}$ . In seguito, la pendenza si riduce e ciò indica che si è passati a un comportamento plastico.

La curva procede con andamento lineare fino alla deformazione ultima  $\epsilon_{uk}$ .

Si può anche ragionare con i valori di calcolo, dividendo le tensioni caratteristiche x  $\gamma_s$ , con

$$\gamma_s = 1,15$$

Nel calcolo, infatti, si usa  $f_{yd}$ . Il modulo elastico vale tipicamente

$$E_s = 200 \cdot 10^3 \text{ MPa}$$

### Stato limite ultimo perfezione e sforzo normale

I come in tutti i modelli resistenti che si usano, esistono delle IPOTESI BASE che devono essere rispettate

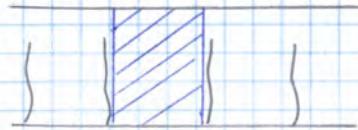
→ conservazione della planarità delle sezioni fino a collasso:

è un'ipotesi tipicamente fatta in campo elastico, come anche in campo plastico e le strutture in cemento armato.

In realtà, per le strutture in cemento armato c'è qualche dubbio sulla correttezza dell'ipotesi:

se si considera un concio di trave in cemento armato soggetto a momento costante, sperimentalmente si può vedere che nasce una serie di fessure.

Il comportamento delle sezioni è diverso a seconda che si consideri la sezione in corrispondenza della fessura o la sezione dove non c'è.



→ in corrispondenza della fessura, la sezione non è piana perché c'è uno scorrimento relativo tra armatura e calcestruzzo per poter creare la fessura. Inoltre, non vale l'ipotesi di continuità.

→ quando ci si allontana dalla fessura, l'ipotesi di planarità è sempre più valida.

Con buona approssimazione, se si mette che cosa succede nel campo compreso tra 2 fessure consecutive, l'ipotesi di planarità è verificata fino a collasso. In questo senso, l'ipotesi non è valida puntualmente in corrispondenza di tutte le sezioni, ma è valida globalmente come comportamento medio sul tratto compreso tra 2 fessure.

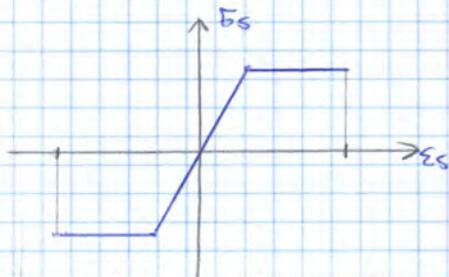
→ l'ipotesi di planarità implica una coincidenza della deformazione tra acciaio e calcestruzzo circostante, sia in trazione che in compressione.

Ciò è dovuto alla perfetta aderenza calcestruzzo-acciaio.

Tale aspetto vale mediamente ma non localmente poiché, in corrispondenza delle fessure, avviene scorrimento relativo.

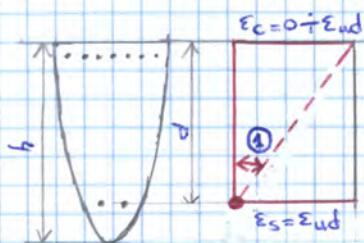
→ nonostante il calcestruzzo abbia una deformazione a trazione, si ignora la resistenza a trazione del calcestruzzo.

→ la risposta del materiale avviene in termini delle leggi costitutive di progetto (legge parabola-rettangolo x il calcestruzzo; legge elastico-perfettamente plastica in trazione e compressione x l'acciaio)



In base a questo, si può definire una serie di configurazioni di SLU che delimitano una serie di **Campi**, cioè diverse situazioni dove può lavorare la sezione in cemento armato.

### → Campo 1



Si consideri una sezione simmetrica rispetto all'asse verticale e armata superiormente e inferiormente.

Si assume che il lato più teso sia quello inferiore.

Si indicano con  $h$  l'altezza complessiva della sezione e con  $d$  la distanza tra l'armatura più tesa e il lembo opposto della trave.

Un campo non è altro che un campo compreso tra 2 configurazioni deformate.

→ La prima corrisponde ad avere tutte le fibre della sezione che lavorano a  $\varepsilon_{ud}$ .

→ La seconda corrisponde ad avere l'armatura inferiore che lavora a  $\varepsilon_{ud}$  e il calcestruzzo superiore che non lavora.

Qualunque configurazione deformata passante per  $\varepsilon_{ud}$  e compresa tra le 2 configurazioni di riferimento è una configurazione deformata di campo 1.

In questo senso, si parla di campo 1 quando l'acciaio teso lavora a  $\varepsilon_{ud}$  e la fibra di calcestruzzo meno tesa lavora a una deformazione compresa tra 0 e  $\varepsilon_{ud}$ .

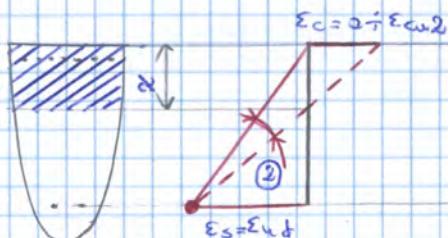
Il campo 1 è definito dalla variazione tra  $\varepsilon_{ud}$  e 0 nel calcestruzzo.

**PROPRIETÀ** → La sezione lavora in campo 1 quando è soggetta a SFORZO NORMALE DI TRAZIONE CON PICCOLA ECCENTRICITÀ

→ Lo SLU è raggiunto lato acciaio

→ Si ha massimo sfruttamento dell'acciaio inferiore, poiché lavora oltre lo svenamento.

### → Campo 2



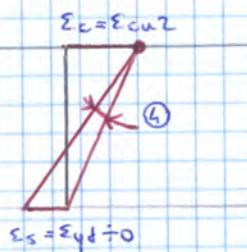
Esso inizia quando si supera il campo 1.

In particolare, la configurazione deformata di inizio del campo 2 corrisponde alla configurazione deformata di fine campo 1, dove l'acciaio inferiore lavora a  $\varepsilon_{ud}$  e il calcestruzzo superiore lavora a 0.

Nel campo 2, questa deformazione varia tra 0 e  $\varepsilon_{c2}$ .

In questo senso, la sezione di cemento armato lavora in campo 2 quando l'acciaio inferiore lavora a  $\varepsilon_{ud}$  e il calcestruzzo superiore lavora tra 0 e  $\varepsilon_{c2}$  (deformazione negativa).

→ campo 4



La deformazione dell'acciaio continua a diminuire, mentre quella del calcestruzzo non varia. In questo senso, la sezione in cemento armato lavora in campo 4 quando il calcestruzzo lavora a  $\epsilon_{cu2}$  e l'acciaio lavora a una deformazione compresa tra 0 e  $\epsilon_{yd}$ .

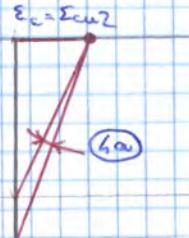
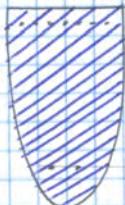
PROPRIETÀ → l'asse neutro è interno alla sezione

→ il campo 4 si ha x SFORZI NORMALI DI COMPRESSIONE MOLTO ECCENTRICI o x flessione semplice con eccessiva percentuale di armatura, cioè con GRANDE ARMATURA

→ lo SLU è raggiunto lato calcestruzzo

→ si ha massimo sfruttamento del calcestruzzo, le cui fibre lavorano alla tensione massima, mentre l'acciaio non è sottoposto e lavora a una deformazione inferiore a quella massima (con rischio di problemi di duttilità)

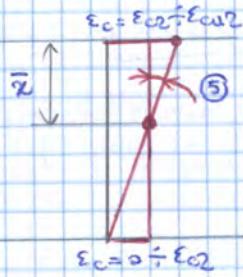
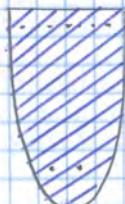
→ campo 4a



Esso corrisponde al campo dove non c'è più porzione tensa, nel campo 4a c'era la piccola porzione di calcestruzzo sotto la barra) ma tutta la sezione è portata in compressione, mentre la deformazione dell'acciaio inferiore diventa negativa. Il campo 4a si ha quando l'asse neutro si trova in corrispondenza di  $h$ , cioè tutta la sezione è compressa.

Valgono le stesse proprietà del campo 4.

→ campo 5



Per definirlo, si introduce una nuova ipotesi sul modello:

In presenza di sola compressione, la deformazione del calcestruzzo è limitata a  $\epsilon_{c2}$ ; se la sezione è soggetta a tensioni di compressione, essa è limitata a un valore compreso tra  $\epsilon_{c2}$  e  $\epsilon_{cu2}$ . Dunque, con sola compressione, si ha SLU con  $\epsilon_{c2}$ .

In base a questa ipotesi, il polo cambia nuovamente e va a posizionarsi in corrispondenza della fibra che ha deformazione  $\epsilon_{c2}$  alla fine del campo 4a. La posizione è la seguente

$$\bar{x} = \left(1 - \frac{\epsilon_{c2}}{\epsilon_{cu2}}\right)h \quad \rightarrow \text{se } \epsilon_{c2} = -2\% \text{, } \epsilon_{cu2} = -3,5\% \text{, si ha } \bar{x} = 3/7h$$

In questo caso, la sezione in cemento armato lavora in campo 5 quando la fibra superiore lavora tra  $\epsilon_{cu2}$  e  $\epsilon_{c2}$  e la fibra inferiore lavora tra 0 e  $\epsilon_{c2}$ . Alla fine del campo 5, tutte le fibre sono compresse a  $\epsilon_{c2}$  (il corrisponde lo sforzo normale massimo perché si ha la tensione massima)

Siccome le sollecitazioni interne corrispondono alla stessa configurazione di SLU, queste rappresentano la resistenza della sezione, poiché non si vuole superare questa configurazione.

I domini di resistenza dipendono da:

→ FORMA DELLA SEZIONE TRASVERSALE (geometria)

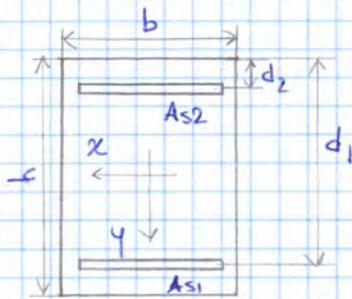
→ POSIZIONE e AREA DELL'ARMATURA

→ CARATTERISTICHE MECCANICHE DEL MATERIALE

↓  
non si legano alle sollecitazioni agenti sulla sezione

I domini di resistenza sono usati x fare verifiche di resistenza di sezioni, in genere in presenza di **presso-torsioflessione** (1 sforzo normale e 1 momento flettente - es. PILASTRI), in quanto sono curve che rappresentano in termini di resistenza le infinite configurazioni di SLU.

### TRACCIAMENTO DEI DOMINI DI RESISTENZA (caso piano: un solo momento flettente)



Per tracciarli, occorre conoscere

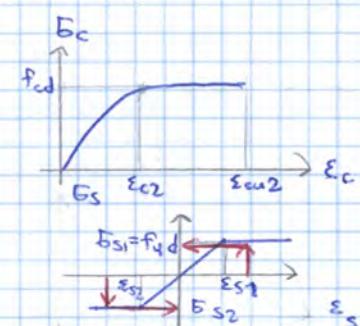
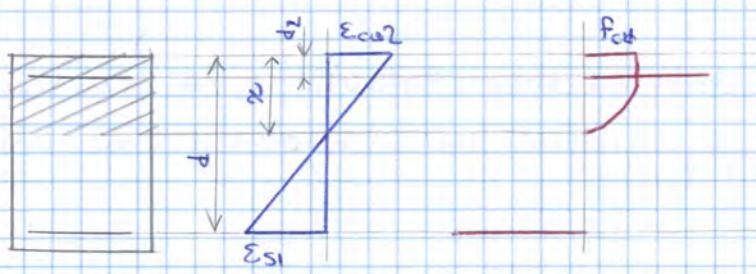
→ forma della sezione (es. sezione rettangolare  $b \times h$ )

→ area e posizione delle armature (es. armatura inferiore tesa di area  $A_{s1}$  con baricentro a distanza  $d_1$  dal bordo superiore; armatura superiore meno tesa di area  $A_{s2}$  con baricentro a distanza  $d_2$  dal bordo superiore)

Si definisce un sistema di riferimento duente origine coincidente con il baricentro della sezione in solo calcestruzzo (del resto, in fase progettuale non si sa ancora quant'è armatura ci sia) e dove y rivolto verso il basso.

Come si valuta il dominio di resistenza?

Si considera un certo numero finito tra le infinite configurazioni di SLU, poiché il dominio non si può ottenere in forma chiusa e bisogna seguire un procedimento numerico.



Ad es. si considera la configurazione SLU di campo 3, dove il calcestruzzo lavora a una deformazione  $\epsilon_{c2}$  e l'acciaio lavora a una deformazione  $\epsilon_{s1} > \epsilon_{y1}$ .

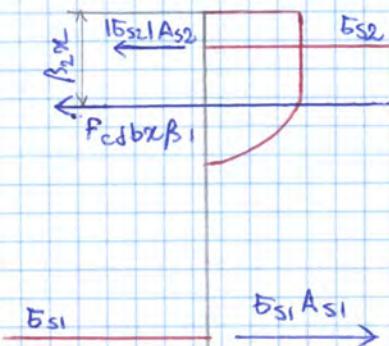
Siccome si considera una configurazione di SLU, x le ipotesi fatte, è nota la deformazione in tutta la sezione perché la sezione è piana. Sono anche note le leggi costitututive dei materiali.

⇒ è nota lo stato tensionale in tutti i punti.

→ x il calcestruzzo, si trascura la resistenza a trazione e dunque la tensione al di sotto dell'asse neutro è nulla, mentre sopra c'è parabola-rettangolo.

## → MOMENTO FLETTENTE INTERNO $M_{Rd}$ :

esso si calcola in riferimento al baricentro della sezione e



$$M_{Rd} = \int_A E_y dA =$$

$$= \int_{A_c} E_c y dA + \int_{A_s} E_s y dA =$$

$$= \int_{A_c} E_c y dA + E_{s1} A_{s1} \left( d - \frac{h}{2} \right) - E_{s2} A_{s2} \left( \frac{h}{2} - d_2 \right)$$

↓  
l'acciaio inferiore  
teso dà  $H > 0$

↓  
l'acciaio superiore com-  
presso da  $H > 0$  ma  
 $E_{s2} < 0$  (e dunque  
serve il segno "-")

Si può di nuovo evitare di sviluppare l'integrale x il calcestruzzo

$$\int_{A_c} E_c y dA = F_{cd} b zeta beta_1 (\varepsilon_c) \cdot \left( \frac{h}{2} - \beta_2 z \right)$$

Il braccio è legato al baricentro dell'asse di distribuzione delle tensioni del calcestruzzo, intuito come rispetto al tempo superiore come  $\beta_2(\varepsilon_c)z$ , dove

$$\beta_2(\varepsilon_c) = \begin{cases} \frac{8 - 1\varepsilon_c}{4(6 - 1\varepsilon_c)} & 1\varepsilon_c \leq 2\% \\ \frac{3\varepsilon_c - 4 + 2/\varepsilon_c}{6\varepsilon_c - 4} & 1\varepsilon_c > 2\% \end{cases}$$

→ sotto classe C50/60

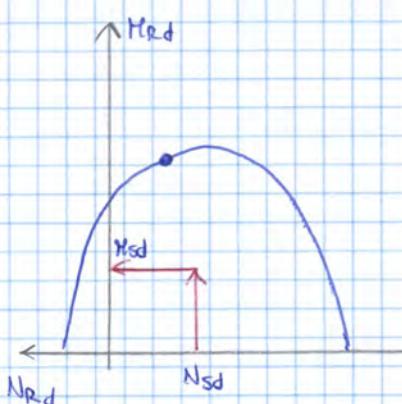
OSSERVAZIONE: a ogni configurazione di SLU corrisponde un'unica profondità dell'asse neutro.

⇒ le infinite configurazioni SLU corrispondono a un asse neutro che va da  $-\infty$  (campo 1), attraversa la sezione (campi 2, 3 e 4), va fino in fondo alla sezione (campo 4a) fino ad andare a  $+\infty$  (campo 5).

è tutto collegato



A ogni profondità dell'asse neutro corrisponde una deformazione della fibra superiore in calcestruzzo e a questa  $\varepsilon_c$  corrisponde un valore di  $\beta_1$  e  $\beta_2$ .



Una volta trovati  $N_{Rd}$  e  $M_{Rd}$ , si considera un piano cartesiano avente

→ asse  $x = N_{Rd}$

→ asse  $y = M_{Rd}$

Per ogni configurazione di SLU, si trova una coppia di valori  $N_{Rd}$  e  $M_{Rd}$ , che corrisponde a un punto. Allora con infinite configurazioni SLU (si sposta l'asse neutro da  $-\infty$  a  $+\infty$ ), si ottiene una curva.

↳ la curva può essere conosciuta solo x punti (non c'è una forma analitica)

## → DEFORMAZIONI

$$\varepsilon_{c2} = 2\%$$

$$\varepsilon_{eu2} = 3,5\% \rightarrow \text{valori tabulati}$$

→ acciaio B450

→ RESISTENZA

Il valore caratteristico è

$$f_yk = 450 \text{ MPa}$$

dunque il valore di calcolo è

$$f_{yd} = \frac{f_yk}{\gamma_s} = \frac{450 \text{ [MPa]}}{1,15} = 391,3 \text{ [MPa]}$$

→ RIGIDEZZA

$$E_s = 200'000 \text{ MPa}$$

→ DEFORMAZIONI

La deformazione di calcolo a snervamento è

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} = \frac{391,3 \text{ [MPa]}}{200'000 \text{ [MPa]}} = 1,96\%$$

La deformazione ultima di calcolo è

$$\varepsilon_{uk} = 7,5\% \Rightarrow \varepsilon_{ud} = 0,9 \cdot \varepsilon_{uk} = 0,9 \cdot 7,5\% = 6,75\%$$

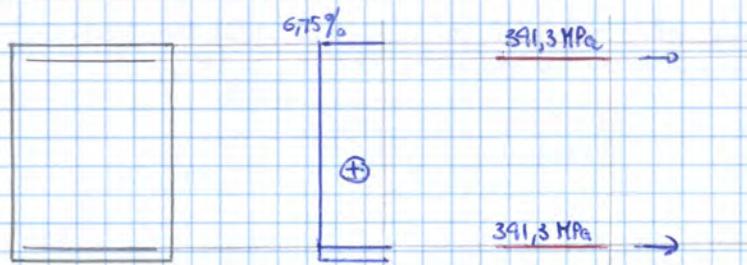
→ AREA DELL'ARMATURA

$$\rightarrow \text{Armatura inferiore} \quad A_{s1} = 4 \cdot 3,16 \text{ [cm}^2\text{]} = 12,56 \text{ cm}^2$$

$$\rightarrow \text{Armatura superiore} \quad A_{s2} = 3 \cdot 3,16 \text{ [cm}^2\text{]} = 9,42 \text{ cm}^2$$

Ora che si hanno tutti gli elementi, si calcola il diagramma di interazione con il criterio dei limiti dei campi

CAMPO 1



Il limite prevede di avere una deformazione costante pari a  $\varepsilon_{ud}$  e dunque si calcola il diagramma delle tensioni attraverso le leggi costitutive.

Per integrazione, si trovano le sollecitazioni

$$N_{Rd} = 391,3 \text{ [MPa]} \cdot (1256 \text{ [mm}^2\text{]} + 942 \text{ [mm}^2\text{]}) \cdot 10^{-3} \text{ [kN]/[EN]} = 860 \text{ kN}$$

↓  
siccome le tensioni sono uguali si moltiplica  
la tensione x l'area totale delle armature

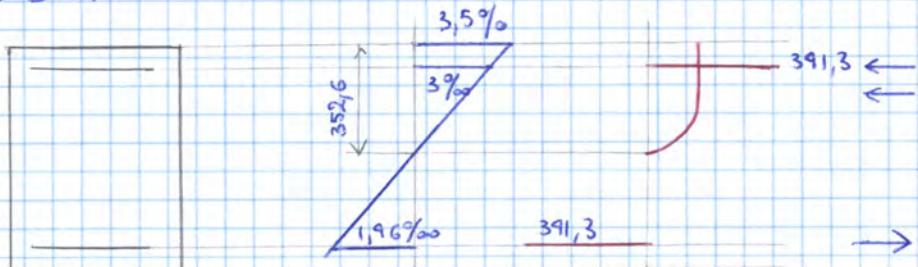
Per il momento  $M_{Rd}$ , occorre  $\beta_2$

$$\beta_2 = \frac{3|\varepsilon_{cl}| - 4 + 2/|\varepsilon_{cl}|}{6|\varepsilon_{cl}| - 6} = \frac{3 \cdot 3,5 - 4 + 2/3,5}{6 \cdot 3,5 - 6} = 0,416$$

Il momento vale così:

$$M_{Rd} = \left[ 203,9 \text{ [kN]} \cdot 10^3 \text{ [N/kN]} \cdot \left( \frac{600}{2} - 0,416 \cdot 27,1 \right) \text{ [mm]} + \rightarrow \text{calcestruzzo} \right. \\ \left. + 391,3 \text{ [MPa]} \cdot 1256 \text{ [mm}^2\text{]} \cdot \left( 550 - \frac{600}{2} \right) \text{ [mm]} + \rightarrow \text{l'armatura} \right. \\ \left. - 391,3 \text{ [MPa]} \cdot 462 \text{ [mm}^2\text{]} \cdot \left( \frac{600}{2} - 50 \right) \right] \cdot \rightarrow \text{l'armatura compressa} \\ \cdot 10^{-6} \text{ [kNm/Nmm]} = 91 \text{ kNm} \rightarrow \text{superiore da } H < 0$$

CAMPO 3-h



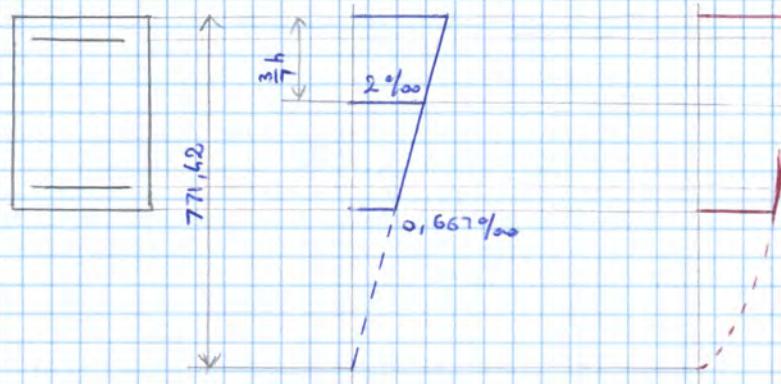
Le sollecitazioni valgono

$$N_{Rd} = (391,3 \text{ [MPa]} \cdot 1256 \text{ [mm]} - 391,3 \text{ [MPa]} \cdot 462 \text{ [mm]}) \cdot 10^{-3} \text{ [kN/N]} + \\ - 21,17 \text{ [MPa]} \cdot 450 \text{ [mm]} \cdot 352,6 \text{ [mm]} \cdot 0,809 \cdot 10^{-3} \text{ [kN/N]} = \\ \downarrow 2171,5 \text{ kN} \quad \Rightarrow \beta_1 \text{ è lo stesso perché } \varepsilon_c \text{ non è cambiato.}$$

$$= -2594,6 \text{ kN}$$

$$M_{Rd} = \left[ 2171,5 \text{ [kN]} \cdot 10^3 \text{ [N/kN]} \cdot \left( \frac{600}{2} - 0,416 \cdot 352,6 \right) \text{ [mm]} + \rightarrow \text{calcestruzzo} \right. \\ \left. + 391,3 \text{ [MPa]} \cdot 1256 \text{ [mm}^2\text{]} \cdot \left( 550 - \frac{600}{2} \right) \text{ [mm]} + \rightarrow \text{acciaio} \right. \\ \left. + 391,3 \text{ [MPa]} \cdot 462 \text{ [mm}^2\text{]} \cdot \left( \frac{600}{2} - 50 \right) \text{ [mm]} \right] \cdot \rightarrow \text{acciaio} \\ \cdot 10^{-6} \text{ [kNm/Nmm]} = 631,7 \text{ kNm} \rightarrow \text{superiore}$$

## CASO PARTICOLARE



S'immagina di essere in campo 5 e dunque simola fibra a  $\frac{3}{7} h = 257,6$  mm si trova alla deformazione  $\epsilon_{c2}$ .  
 Si considera poi un piano in moto che la fibra superiore abbia deformazione 3%.

Di conseguenza, l'ipotetico asse neutro si trova al di sotto della sezione, a una distanza di 771,62 mm dal lembo superiore.

L'aumento delle tensioni è costituito da un'ipotetica parabola che parte dall'asse neutro e va fino alla fibra a  $\frac{3}{2}h$  (dopo  $\varepsilon_c = 2\%$ ), poi la tensione è costante.

Per calcolare la risultante  $\int_A \vec{v} dA$ , si può fare la differenza tra l'area totale e l'area della porzione sovrastante.

Anche per  $M_{\text{ed}}$  si opera per sottrazione, considerando il barycentro dell'ipotetica distribuzione di tensioni fino all'asse neutro e si toglie il contributo di momento della porzione esterna alla sezione.

Occorre solo fare attenzione alla posizione della porzione esterna poiché, se la risultante è sopra o sotto il baricentro della sezione, il contributo di momento è positivo o negativo.

Si indica con  $\lambda_{Rd}$  il cosiddetto sforzo normale adimensionizzato.

$$\lambda_{Rd} = \frac{N_{Rd}}{bhF_{cd}} \quad \rightarrow \text{pedice Rd perché si parte da } N_{Rd}$$

Si indica con  $w$  la percentuale meccanica di armatura.

$$w_i = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

Essa è il rapporto tra le aree moltiplicate x le relative resistenze ed è utile a esprimere la percentuale delle armature.

Si può anche esprimere come percentuale geometrica, cioè come rapporto tra le aree:

$$\rho = \frac{A_s}{A_c}$$

Si ottiene così:

$$\lambda_{Rd} = -\frac{\chi}{h}\beta_1 + \frac{5s_1}{f_{yd}} w_{s1} + \frac{5s_2}{f_{yd}} w_{s2}$$

Si esegue la stessa operazione x  $M_{Rd}$

$$M_{Rd} = f_{cd} b x \beta_1 \left( \frac{h}{2} - \beta_2 \chi \right) + 5s_1 A_{s1} \left( d - \frac{h}{2} \right) - 5s_2 A_{s2} \left( \frac{h}{2} - d_2 \right)$$

Si divide x  $bh^2 F_{cd}$

$$\frac{M_{Rd}}{bh^2 F_{cd}} = \frac{f_{cd} b x \beta_1}{bh^2 F_{cd}} \left( \frac{h}{2} - \beta_2 \chi \right) + \frac{5s_1 A_{s1}}{bh^2 F_{cd}} \left( d - \frac{h}{2} \right) - \frac{5s_2 A_{s2}}{bh^2 F_{cd}} \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) \cdot \frac{f_{yd}}{f_{yd}}$$

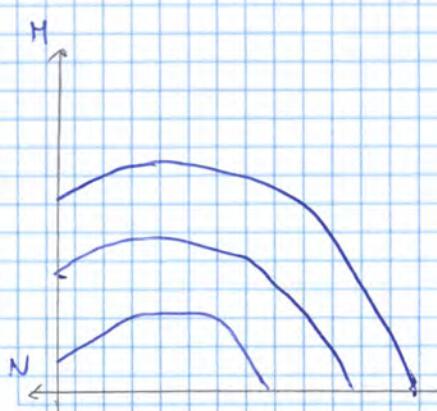
Si ottiene così:

$$\mu_{Rd} = \frac{\chi}{h} \beta_1 \left( \frac{1}{2} - \beta_2 \frac{\chi}{h} \right) + \frac{5s_1}{f_{yd}} w_{s1} \left( \frac{d}{h} - \frac{1}{2} \right) - \frac{5s_2}{f_{yd}} w_{s2} \left( \frac{1}{2} - \frac{d_2}{h} \right)$$

Il termine  $\mu_{Rd}$  è il momento adimensionizzato.

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Rd}}{bh^2 F_{cd}}$$

Da qui si può calcolare il diagramma di interazione, che è realizzato in un certo modo.



Ciascun diagramma vale in una situazione ben precisa e dipende da:

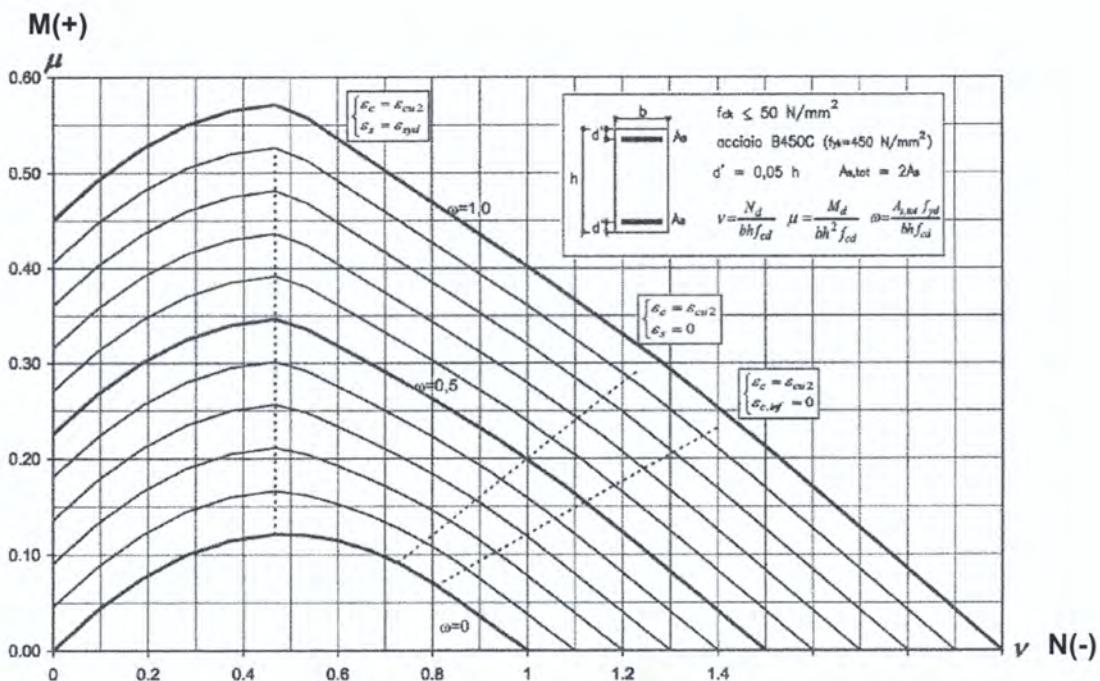
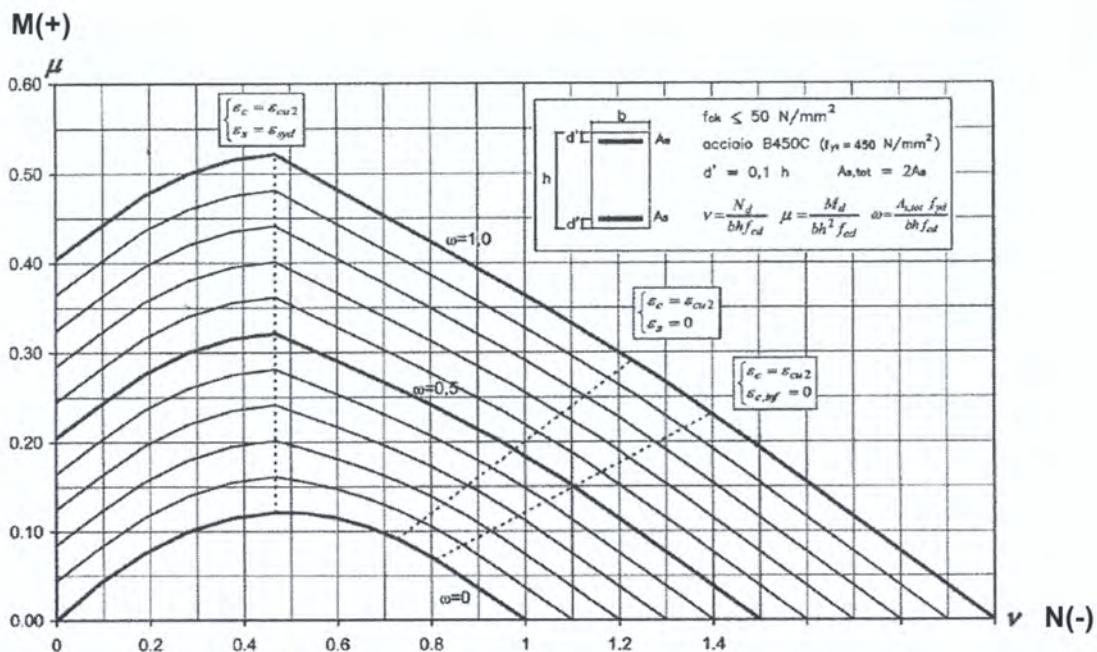
→ forma della sezione

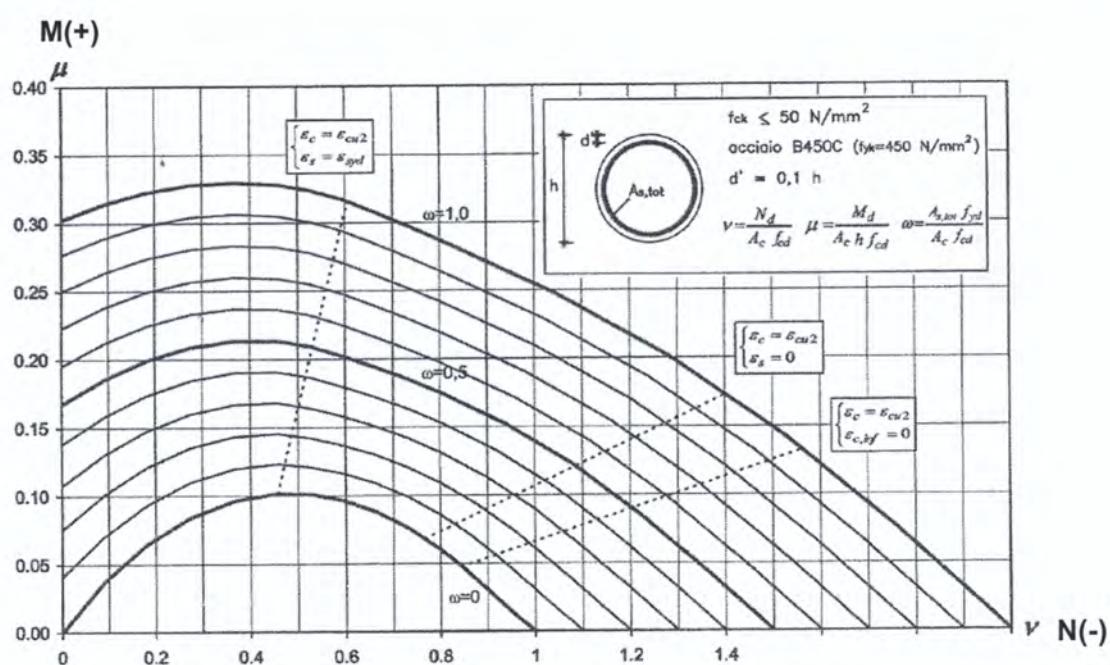
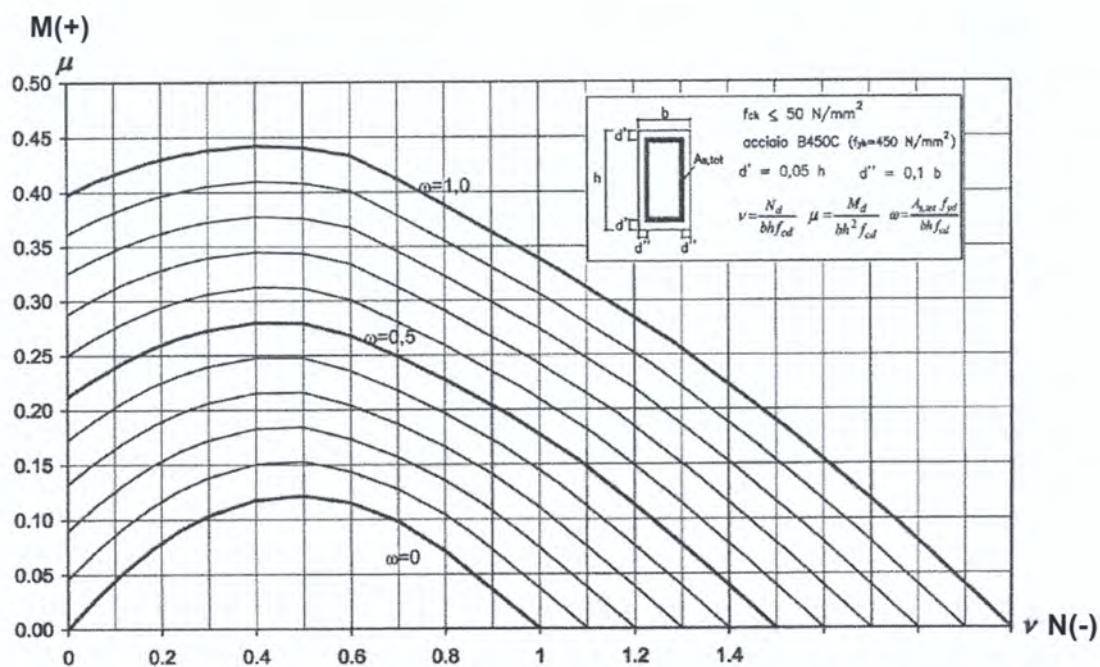
→ resistenza del calcestruzzo  $f_{cd}$

→ tipo di acciaio ( $f_{yd}$ )

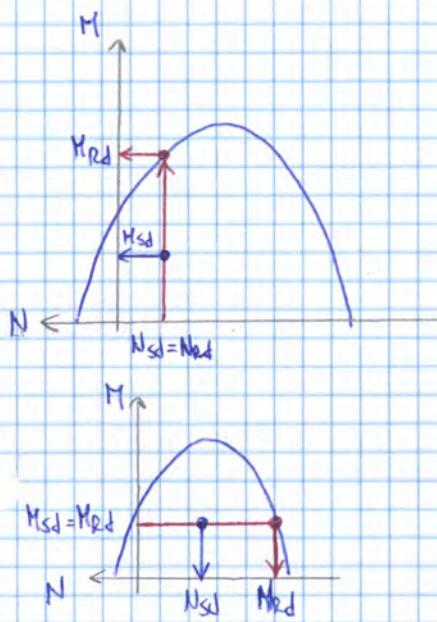
→ posizione e disposizione delle armature (es. simmetrica)

Il diagramma presenta più curve che sono tracciate x valori crescenti di  $w$ , cioè x armature crescenti.





Il metodo individuato è efficace ma ha lo svantaggio di essere un metodo grafico. Si vuole allora trovare un metodo analitico che permetta di capire se un punto sia interno o no al diagramma di interazione. Questo metodo si usa sul diagramma dimensionale e dunque si leverifiche.



Dato il diagramma di interazione  $M-N$ , si consideri un punto interno di coordinate  $(N_{sd}; M_{sd})$ . In questo punto, si nota che il momento resistente relativo a  $N_{sd}$  è maggiore di  $M_{sd}$ . Ciò equivale a dire che un punto è interno se

$$N_{sd} = N_{rd} \Rightarrow M_{rd} \geq M_{sd}$$

Non vale invece l'opposto, ossia  $M_{sd} = M_{rd}$  non basta avere  $N_{rd} \geq N_{sd}$  perché il punto può ricadere all'esterno del diagramma.

In termini analitici, si può fare un'analisi via iterativa:

iterativamente, occorre trovare la configurazione deformata ossia la profondità  $\chi$  dell'asse neutro tale che sia abbia  $N_{rd} = N_{sd}$ . Una volta trovato  $\chi$ , si calcola il momento  $M_{rd}$  corrispondente e si verifica che

$$M_{rd} \geq M_{sd}$$

non interessano tutti i punti del diagramma ma solo uno

### Es (calcolo)

Si consideri una sezione armata rettangolare avente

$$b = 600 \text{ mm} \quad h = 700 \text{ mm}$$

L'armatura ha posizione  $c + \phi/2 = 50 \text{ mm}$  (posizione del baricentro) e

$$\rightarrow \text{armatura inferiore} \quad A_{s1} = 5\phi 26 = 2655 \text{ mm}^2$$

$$\rightarrow \text{armatura superiore} \quad A_{s2} = 3\phi 26 = 1593 \text{ mm}^2$$

Le grandezze meccaniche sono

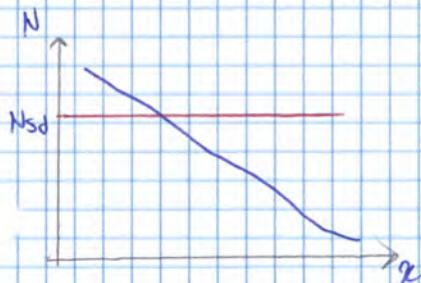
$$f_{cd} = 30 \text{ MPa} \quad f_{yd} = 391,3 \text{ MPa} \quad E_s = 200.000 \text{ MPa} \quad \epsilon_{uf} = 6,75\%$$

Verificare la sezione, sapendo che è soggetta a  $N_{sd} = -5000 \text{ kN}$  e  $M_{sd} = 1200 \text{ kNm}$ .

Per una sezione di questo tipo, non esiste un diagramma di interazione noto.

Si adotta allora il procedimento analitico, in cui si cerca una configurazione deformata tale che

$$N_{rd} = N_{sd}$$



Si può allora notare che, all'aumentare di  $\chi$ , lo sfarzo  $N_{rd}$  diminuisce continuamente, cioè è monotono.

Se la funzione è monotona, si può trovare numericamente l'intersezione attraverso il metodo di bisezione.

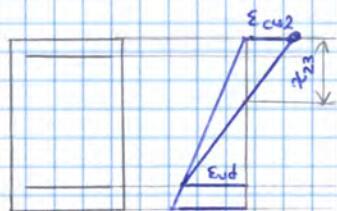
In questo caso, siccome  $N_{rd}(x_2) \leq N_{sd} \leq N_{rd}(x_3)$ , allora  $x$  è compreso tra  $x_2$  e  $x_3$

$$x_1 \leq x \leq x_2 \quad \rightarrow \text{se non fosse così, si prende un intervallo più ampio}$$

1) Si inizia a dimezzare

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 350 \text{ mm}$$

In quale campo ci si trova?



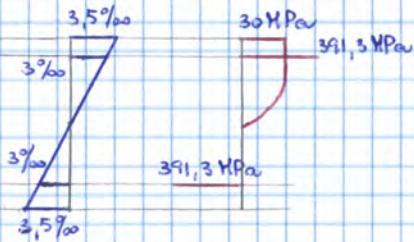
Ciò dipende da  $\varepsilon_{cu2}$  e  $\varepsilon_{yd}$  e si può essere nel campo 2; 3; 4; 6a.

Si sa che nel campo 2, la profondità  $x$  dell'asse neutro si trova tra 0 e il valore definito tra  $\varepsilon_{cu2}$  e  $\varepsilon_{yd}$ , che vale

$$\frac{x_{23}}{|\varepsilon_{cu2}|} = \frac{d}{|\varepsilon_{cu2}| + \varepsilon_{yd}} \Rightarrow x_{23} = 32 \text{ mm}$$

Siccome  $x_3 > x_{23}$ , il campo è di tipo 3 e da qui si deduce  $\beta_1 (\beta_c = 3,5\%) \Rightarrow \beta_1 = 0,809$

$$N_{rd}(x_3) = -f_{cd} b x \beta_1 + \bar{t}_{s1} A_{s1} + \bar{t}_{s2} A_{s2} =$$



$$= -30 \text{ [MPa]} \cdot 400 \text{ [mm]} \cdot 350 \text{ [mm]} + 0,809 + \\ -391,3 \text{ [MPa]} \cdot 1593 \text{ [mm}^2] + \\ + 391,3 \text{ [MPa]} \cdot 2655 \text{ [mm}^2] = -2982 \text{ kN} > N_{sd} \\ = -2982 \text{ kN} > N_{sd}$$

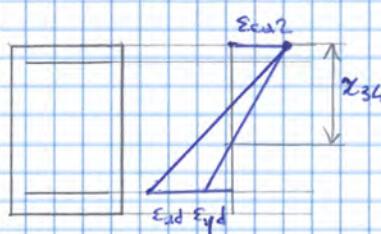
Siccome  $N_{rd}(x_2) \leq N_{sd} \leq N_{rd}(x_3)$ , allora  $x$  è compreso tra  $x_2$  e  $x_3$

$$x_2 \leq x \leq x_3 \quad \rightarrow \text{in } x_1 \text{ è troppo lontano il valore}$$

2) Si dimezza

$$x_4 = \frac{x_2 + x_3}{2} = 525 \text{ mm}$$

In quale campo ci si trova?



Di sicuro, si è almeno al campo 3 perché

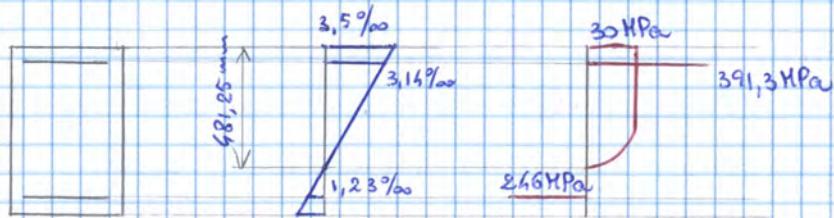
$$x_4 > x_3 > x_{23}$$

Per capire se si è nel campo 3, 4 o 6a, si ricorda che nel campo 3 la profondità  $x$  dell'asse neutro si trova tra  $x_{23}$  e il valore definito da  $\varepsilon_{cu2}$  e  $\varepsilon_{yd}$ . Quest'ultimo vale

$$\frac{x_{34}}{|\varepsilon_{cu2}|} = \frac{d}{|\varepsilon_{cu2}| + \varepsilon_{yd}} \Rightarrow x_{34} = 418,7 \text{ mm}$$

Siccome

$$x_4 > x_{34}$$



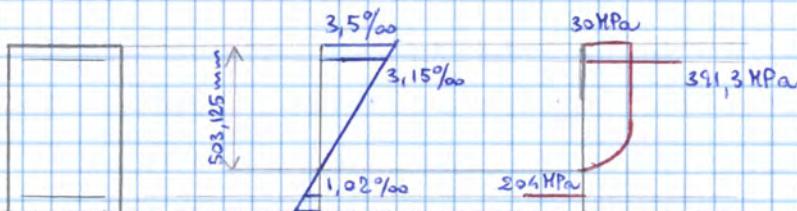
$$\begin{aligned}
 N_{Rd} &= \varepsilon_{s1} A_{s1} + \varepsilon_{s2} A_{s2} + f_{cd} b x \beta_1 = \\
 &= -391,3 \text{ [MPa]} \cdot 1593 \text{ [mm}^2\text{]} + 246 \text{ [MPa]} \cdot 2655 \text{ [mm}^2\text{]} + \\
 &- 30 \text{ [MPa]} \cdot 400 \text{ [mm]} \cdot 481,25 \text{ [mm]} \cdot 0,809 = \\
 &= -4642 \text{ kN} > N_{sd}
 \end{aligned}$$

Siccome  $N_{Rd}(x_4) \leq N_{sd} \leq N_{Rd}(x_6)$ , allora  $x$  è compreso tra  $x_4$  e  $x_6$

$$x_6 \leq x \leq x_4$$

5) Si dimezza

$$x_7 = \frac{x_4 + x_6}{2} = 503,125 \text{ mm}$$



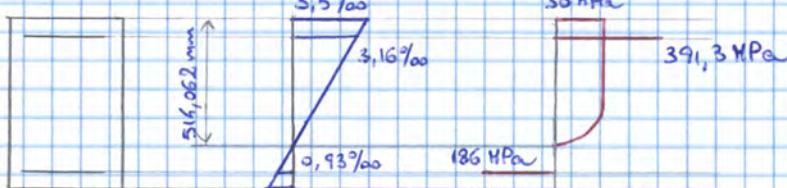
$$\begin{aligned}
 N_{Rd} &= \varepsilon_{s1} A_{s1} + \varepsilon_{s2} A_{s2} - f_{cd} b x \beta_1 = \\
 &= -391,3 \text{ [MPa]} \cdot 1593 \text{ [mm}^2\text{]} + 246 \text{ [MPa]} \cdot 2655 \text{ [mm}^2\text{]} + \\
 &- 30 \text{ [MPa]} \cdot 400 \text{ [mm]} \cdot 503,125 \text{ [mm]} \cdot 0,809 = \\
 &= -4966 \text{ kN} > N_{sd}
 \end{aligned}$$

Siccome  $N_{Rd}(x_4) \leq N_{sd} \leq N_{Rd}(x_7)$ , allora  $x$  è compreso tra  $x_4$  e  $x_7$

$$x_7 \leq x \leq x_4$$

6) Si dimezza

$$x_8 = \frac{x_4 + x_7}{2} = 514,062 \text{ mm}$$

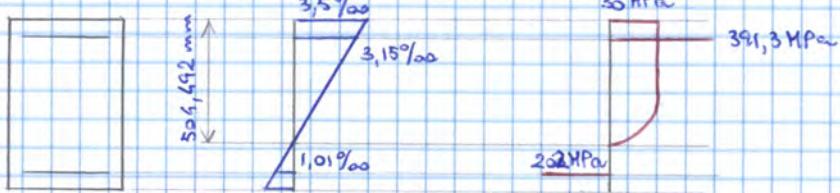


Siccome  $N_{Rd}(\chi_{10}) \leq N_{sd} \leq N_{Rd}(\chi_7)$ , allora  $\chi$  è compreso tra  $\chi_7$  e  $\chi_{10}$ .

$$\chi_7 \leq \chi \leq \chi_{10}$$

9) Si dimezza

$$\chi_{11} = \frac{\chi_7 + \chi_{10}}{2} = 504,492 \text{ mm}^{175}$$



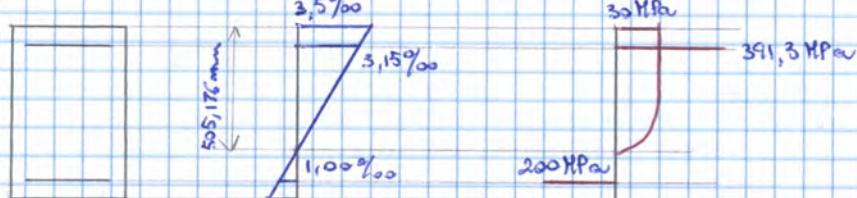
$$\begin{aligned} N_{Rd} &= E_{S1} A_{S1} + E_{S2} A_{S2} - f_{cd} b \chi \beta_i = \\ &= -391,3 \text{ [MPa]} \cdot 1593 \text{ [mm}^2\text{]} + 202 \text{ [MPa]} \cdot 2655 \text{ [mm}^2\text{]} + \\ &\quad - 30 \text{ [MPa]} \cdot 400 \text{ [mm]} \cdot 504,492 \text{ [mm]} \cdot 0,809 = \\ &= -4985 \text{ kN} > N_{sd} \end{aligned}$$

Siccome  $N_{Rd}(\chi_{10}) \leq N_{sd} \leq N_{Rd}(\chi_{11})$ , allora  $\chi$  è compreso tra  $\chi_{10}$  e  $\chi_{11}$ .

$$\chi_{11} \leq \chi \leq \chi_{10}$$

10) Si dimezza

$$\chi_{12} = \frac{\chi_{10} + \chi_{11}}{2} = 505,176 \text{ mm}^{17578125}$$



$$\begin{aligned} N_{Rd} &= E_{S1} A_{S1} + E_{S2} A_{S2} - f_{cd} b \chi \beta_i = \\ &= -391,3 \text{ [MPa]} \cdot 1593 \text{ [mm}^2\text{]} + 200 \text{ [MPa]} \cdot 2655 \text{ [mm}^2\text{]} + \\ &\quad - 30 \text{ [MPa]} \cdot 400 \text{ [mm]} \cdot 505,176 \text{ [mm]} \cdot 0,809 = \\ &= -4997 \text{ kN} \approx N_{sd} \end{aligned}$$

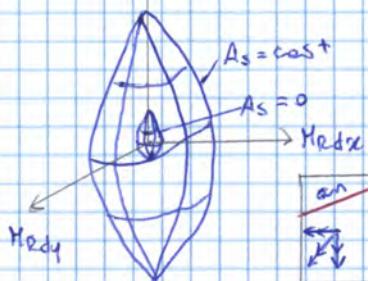
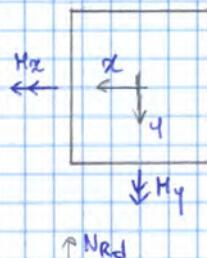
Il metodo numerico può essere arrestato quando la variazione di  $N_{Rd}$  è sotto 1%. Intanto, negli ultimi tratti, l'asse neutro si sposta poco.

Visto che

$$\chi \approx \chi_{12} = 505,2 \text{ mm}$$

si valuta il momento  $M_{Rd}$  corrispondente e lo si confronta con  $M_{sd}$

## 5 Presso - Flessione deviata



Essa riguarda sezioni in cemento armato che, oltre allo sforzo normale, sono soggette a

→ momento  $M_{dx}$ , positivo se tente le fibre con  $y > 0$

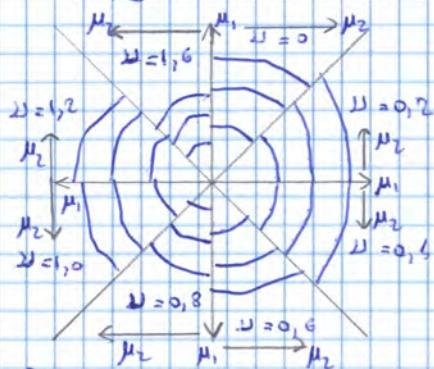
→ momento  $M_{dy}$ , positivo se tente le fibre con  $x < 0$

Si sa che in flessione semplice ( $M_y = 0$ ), si costruisce il diagramma di interazione, che è una curva che definisce un dominio di sicurezza.

Ora invece si costruisce una SUPERFICIE DI INTERAZIONE e il dominio di sicurezza è dato dal volume al suo interno. Tra l'altro, ora l'asse neutro non è più parallelo né all'asse  $x$  né perpendicularare al momento, neanche in sezioni rettangolari e dunque non si possono dare indicazioni circa il suo orientamento.

→ aumentano le variabili e il problema è più complesso dal punto di vista analitico (non si sanno né posizione né direzione dell'asse neutro)

In realtà, dal punto di vista dell'utilizzo, si può usare la superficie di interazione restituuta sotto forma di curve di UNELLA, con il diagramma a rossetto.



I diagrammi valgono per sezioni 2 volte simmetriche divise in un certo modo.

Essi sono costituiti da 4 fette corrispondenti a diversi valori di sforzo normale  $N_{sd}$  in forma adimensionalizzata

$$U = \frac{N_{sd}}{A_c F_{cd}}$$

In ciascuna fetta si definiscono diverse curve corrispondenti a percentuali meccaniche  $\mu$  di armatura.

Per usare il diagramma, dette  $a$  e  $b$  le dimensioni della sezione, si adimensionizzano i 2 momenti

$$\mu_a = \frac{M_{d,a}}{A_c a F_{cd}}$$

$$\mu_b = \frac{M_{d,b}}{A_c b F_{cd}}$$

Sfruttando la doppia simmetria, scelta la fetta di competenza, si entra con 2 valori  $\mu_1$  e  $\mu_2$  dove

$$\mu_1 = \max(\mu_a; \mu_b) \quad \mu_2 = \min(\mu_a; \mu_b)$$

si entra nel diagramma e si trova la percentuale di armatura necessaria per la sezione.

**OSSERVAZIONE:** per le sezioni circolari non esiste un diagramma a rossetto perché essa presenta infiniti assi neutri.

In altri termini, non c'è pressoflessione deviata ma questa è sempre retta.

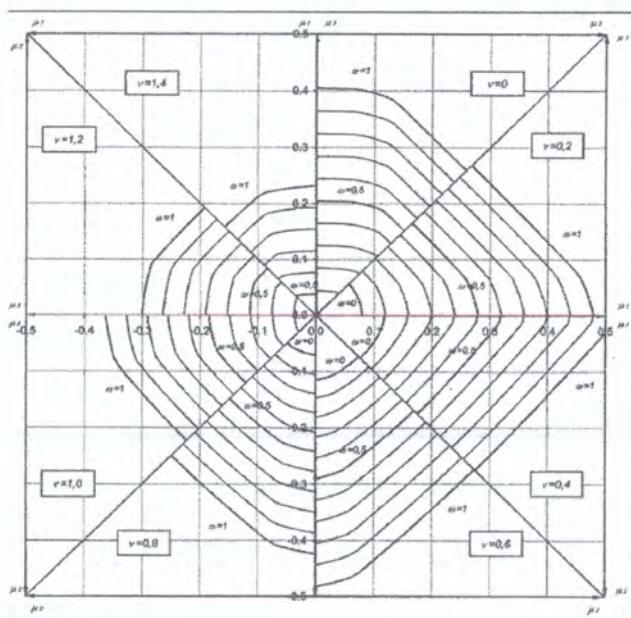
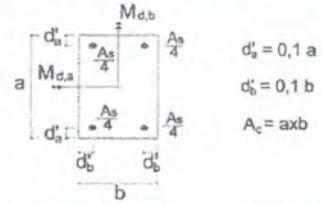


Diagramma di interazione  
per flessione deviata

calcestruzzo  $f_{ck} < 50 \text{ N/mm}^2$   
acciaio B450C  $f_{yk} = 450 \text{ N/mm}^2$



$$\nu = \frac{N_d}{A_c f_{cd}} \quad \omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu_a = \frac{M_{d,a}}{A_c a f_{cd}} \quad \mu_b = \frac{M_{d,b}}{A_c b f_{cd}}$$

se  $\mu_a > \mu_b : \mu_l = \mu_a \quad \mu_2 = \mu_b$

se  $\mu_b > \mu_a : \mu_l = \mu_b \quad \mu_2 = \mu_a$

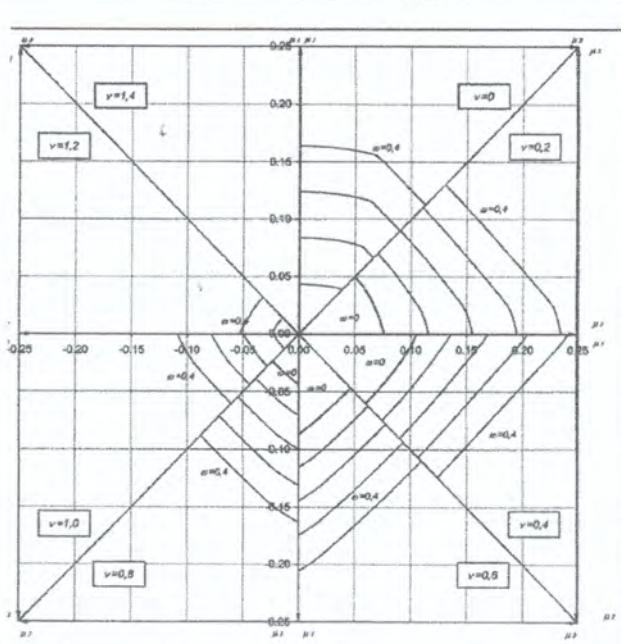
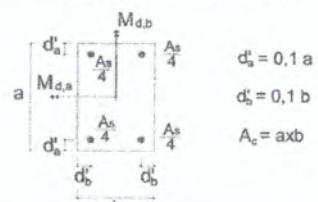


Diagramma di interazione  
per flessione deviata

calcestruzzo  $f_{ck} = 80 \text{ N/mm}^2$   
acciaio B450C  $f_{yk} = 450 \text{ N/mm}^2$

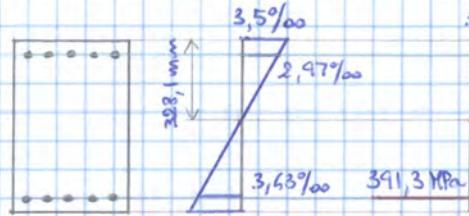


$$\nu = \frac{N_d}{A_c f_{cd}} \quad \omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu_a = \frac{M_{d,a}}{A_c a f_{cd}} \quad \mu_b = \frac{M_{d,b}}{A_c b f_{cd}}$$

se  $\mu_a > \mu_b : \mu_l = \mu_a \quad \mu_2 = \mu_b$

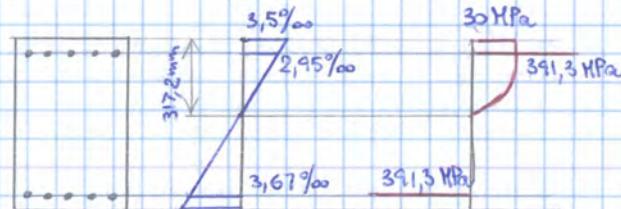
se  $\mu_b > \mu_a : \mu_l = \mu_b \quad \mu_2 = \mu_a$



30 MPa

$$x = 328,1 \text{ mm} \Rightarrow \text{campo 3}$$

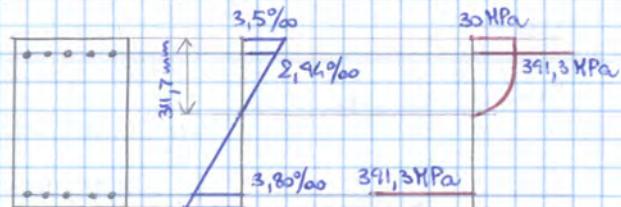
$$N_{Rd} = E_{s1} A_{s1} + E_{s2} A_{s2} - f_{cd} b x \beta_1 = \\ = -3185 \text{ kN} < N_{sd}$$



30 MPa

$$x = 317,2 \text{ mm} \Rightarrow \text{campo 3}$$

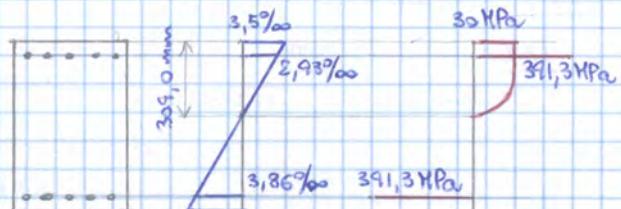
$$N_{Rd} = E_{s1} A_{s1} + E_{s2} A_{s2} - f_{cd} b x \beta_1 = \\ = -3079 \text{ kN} < N_{sd}$$



30 MPa

$$x = 311,7 \text{ mm} \Rightarrow \text{campo 3}$$

$$N_{Rd} = E_{s1} A_{s1} + E_{s2} A_{s2} - f_{cd} b x \beta_1 = \\ = -3026 \text{ kN} < N_{sd}$$



30 MPa

$$x = 309,0 \text{ mm} \Rightarrow \text{campo 3}$$

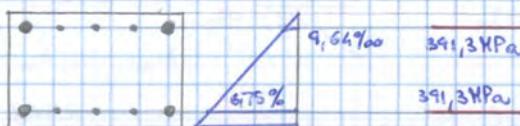
$$N_{Rd} = E_{s1} A_{s1} + E_{s2} A_{s2} - f_{cd} b x \beta_1 = \\ = -3000 \text{ kN} \approx N_{sd}$$

Si calcola il momento corrispondente, sapendo che  $\beta_2 (\varepsilon_0 = 3,5\%) = 0,416$

$$M_{Rd,x} = E_{s1} A_{s1} \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) + E_{s2} A_{s2} \left( d - \frac{h}{2} \right) + f_{cd} b x \beta_1 \left( \frac{h}{2} - \beta_2 x \right) = \\ = 391,3 \text{ [MPa]} \cdot 5 \cdot 531 \text{ [mm}^2] \cdot \left( \frac{700}{2} - 50 \right) \text{ [mm]} + \\ + 391,3 \text{ [MPa]} \cdot 5 \cdot 531 \text{ [mm}^2] \cdot \left( 650 - \frac{700}{2} \right) \text{ [mm]} + \\ + 30 \text{ [MPa]} \cdot 600 \text{ [mm]} \cdot 309,0 \text{ [mm]} \cdot 0,416 \cdot \left( \frac{700}{2} - 0,416 \cdot 309,0 \right) \text{ [mm]} = \\ = 1288 \text{ kNm}$$

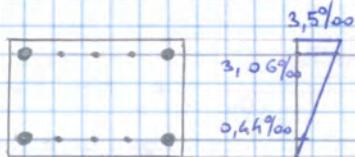
$M_{Rd,4}$

Si procede sempre al ciclo di cattomi e si trascurano i ferri più vicini all'asse neutro. Ciò è sempre a favore di sicurezza ma, se come si rimuovono solo Ferri  $\phi 26$ , l'errore è maggiore.



$x = 0 \text{ mm} \Rightarrow \text{campo 1}$

$$N_{Rd} = E_{s1} A_{s1} + E_{s2} A_{s2} - f_{cd} b x \beta_1 = \\ = 1568 \text{ kN} > N_{sd}$$



$x = 2700 \text{ mm} \Rightarrow \text{campo 6a}$

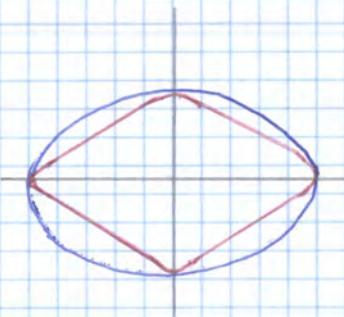
$$N_{Rd} = E_{s1} A_{s1} + E_{s2} A_{s2} - f_{cd} b x \beta_1 = \\ = -5835 \text{ kN} < N_{sd}$$

$$\begin{aligned}
 &= 391,3 \text{ [MPa]} \cdot \left( 2 \cdot 531 + 3 \cdot 314 \right) \text{ [mm}^2] \cdot \left( \frac{600}{2} - 50 \right) \text{ [mm]} + \\
 &+ 391,3 \text{ [MPa]} \cdot \left( 2 \cdot 531 + 3 \cdot 314 \right) \text{ [mm}^2] \cdot \left( 350 - \frac{600}{2} \right) \text{ [mm]} + \\
 &+ 30 \text{ [MPa]} \cdot 700 \text{ [mm]} \cdot 176,6 \text{ [mm]} \cdot 0,809 \cdot \left( \frac{600}{2} - 0,416 \cdot 176,6 \right) \text{ [mm]} = \\
 &= 615 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

A questo punto, si applica la Formula di interazione.

$$\left( \frac{M_{sd,x}}{M_{rd,x}} \right)^{\alpha} + \left( \frac{M_{sd,y}}{M_{rd,y}} \right)^{\alpha} = \left( \frac{750}{1288} \right)^{1,135} + \left( \frac{300}{615} \right)^{1,135} = 0,984 \leq 1,0$$

La sezione è verificata.



La procedura dell' EC2, basata su questa espressione non è altro che un'approssimazione della superficie esatta che si troverebbe studiando il dominio d'interazione. Ora però le curve che delimitano la zona approssimata sono simili a rette perché l'esponente  $\alpha$  è 1. Se il punto ricade al suo interno, la verifica è soddisfatta.

↪ si ha una curva perché questa è la sezione  $\times N = -3000 \text{ kN}$   
+

la curva approssimata è più interna rispetto a quella reale e ciò è a favore di sicurezza.

OSSERVAZIONE: se l'espressione viene 1,05 (poco maggiore di 1,0), si ripete il calcolo considerando anche l'armatura che era stata ignorata e si rifa la verifica.

da

Un istante prima della fessura, il calcestruzzo si era preso una certa risultante di trazione, data dall'integrale della distribuzione sull'area tesa. Quando si forma la fessura, questa risultante passa all'acciaio. Però, siccome c'è così poco acciaio che questo non è in grado di prendere quella risultante di trazione, la struttura crolla.

⇒ si ha che

$$M_{R,\text{strutt}} < M_{cr}$$

perché  $M_{R,\text{strutt}}$  è calcolato senza considerare la resistenza a trazione del calcestruzzo (è già assunto già fessurato).

In realtà, il calcestruzzo ha una certa resistenza a trazione e sopporta un certo momento che è assorbito. Si vuole poi trasferire questo momento all'acciaio ma ciò non è possibile perché è durevole (non rottura di schianto (la rottura è fragile perché si ha immediatamente quando si raggiunge la resistenza a trazione del calcestruzzo))



un meccanismo duttile ha ampi spostamenti prima della rottura (c'è molta fessurazione ad alti livelli tensionali);  
un meccanismo fragile crolla immediatamente.  
E' chiaro che bisogna progettare strutture con comportamento duttile, poiché danno un preavviso del crollo.

⇒ occorre INSERIRE UN CERTO QUANTITATIVO DI ARMATURA in modo che

$$M_{Rd} > M_{cr}$$

indipendentemente dalla sollecitazione. In realtà, non si arriva mai a  $M_{cr}$  (cioè non si fessura mai) poiché si inserisce un'armatura minima x avere duttilità.

b) Si aumenta il quantitativo di armatura e si nota che il comportamento presenta rigidezza fino a un certo punto.

In seguito, la rigidezza diminuisce fino a un picco e successivamente c'è ancora uno spostamento.

⇒ struttura con COMPORTAMENTO DUTILE perché, una volta raggiunto il picco, lo spostamento disponibile è ancora alto.

c) Aumentando l'armatura tesa, la resistenza e duttilità sono maggiori

A un certo punto, se il carico di collasso aumenta, in parallelo la duttilità (spostamento massimo) diminuisce.  
Così in C<sub>2</sub> e D la resistenza aumenta mentre comincia a ridursi la duttilità.  
Infine, in E la resistenza è molto elevata ma la duttilità è molto piccola.  
Il comportamento è dunque fragile:

La curva ha comportamento elastico fino al carico di rottura e dunque non c'è nessuna evidenza che si è vicini al tale carico.

Dire che  $N_{sd}$  è nullo significa che la risultante delle tensioni di compressione è uguale alla risultante delle tensioni di trazione.

$$F_{cd} b \times \beta_1 = F_{so} A_{so} \quad A_{so} = \text{armatura tesa}$$

Per avere adeguata duttilità, la sezione lavora in campo 2 o 3, in cui

$$\sigma_{so} = f_y d$$

$$\Rightarrow F_{cd} b \times \beta_1 = f_y d A_{so}$$

$\xrightarrow{\text{Si}}$  Si adimensionalizza l'equazione

$$\frac{F_{cd} b \times \beta_1}{bd F_{cd}} = \frac{f_y d A_{so}}{bd F_{cd}}$$

$$\Rightarrow \beta_1 \xi = w_0$$

$d$  = altezza utile nella flessione.  
(distanza armatura tesa - lembo compresso) e non altezza totale

$$\beta_1 \xi = w_0$$

$\xi$  = profondità adimensionalizzata  $\xi = \frac{x}{d}$   
 $w_0$  = percentuale meccanica di armatura

Si ha così una relazione tra asse neutro e armatura ossia, in funzione dell'armatura, ci sarà una certa posizione dell'asse neutro tale che trazione e compressione diano risultante nulla ( $N=0$ ).

Passando al momento  $M_{rd}$ , finora si è scritta la risultante di tutti i contributi rispetto al baricentro della sezione (così non interviene il contributo di  $N$ ).

Siccome  $N=0$ , calcolare rispetto al baricentro o a un altro punto non cambia nulla.  
Il momento vale

$$M_{rd} = T z = \frac{f_y d A_{so} \cdot (d - \beta_2 x)}{z = \text{distanza tra le risultanti di trazione e compressione}} \quad \beta_2 x = \text{distanza dall'estradossa}$$

Si adimensionalizza l'equazione

$$M_{rd} = \frac{M_{rd}}{bd^2 F_{cd}} = \frac{f_y d A_{so}}{bd F_{cd}} \cdot \frac{d - \beta_2 x}{d} = w_0 (1 - \beta_2 \xi)$$

Usando la relazione

$$\beta_1 \xi = w_0$$

si ottiene

$$M_{rd} = \beta_1 \xi (1 - \beta_2 \xi)$$

$$M_{rd} = \beta_1 \xi (1 - \beta_2 \xi)$$

EC2			
$\xi = x/d$	$\mu$	$\omega_0$	$\delta$
[-]	[-]	[-]	[-]
0,653	0,383	0,557	0,288
0,660	0,385	0,578	0,291
0,666	0,387	0,600	0,294
0,672	0,390	0,624	0,296
0,679	0,392	0,649	0,299
0,685	0,394	0,676	0,302
0,692	0,396	0,704	0,305
0,699	0,399	0,735	0,308
0,706	0,401	0,768	0,311
0,713	0,403	0,803	0,315
0,721	0,406	0,841	0,318
0,728	0,408	0,883	0,321
0,736	0,410	0,928	0,324
0,744	0,413	0,976	0,328
0,752	0,415	1,029	0,331
0,760	0,418	1,088	0,335
0,768	0,420	1,152	0,339
0,777	0,422	1,222	0,342
0,785	0,425	1,300	0,346
0,794	0,427	1,388	0,350
0,803	0,430	1,486	0,354
0,813	0,432	1,596	0,358
0,822	0,434	1,721	0,363

Campo 4

$$0.641 = \frac{|\mathcal{E}_{cu2}|}{|\mathcal{E}_{cu2}| + \mathcal{E}_{yd}}$$

$$0.641 = \frac{0.0035}{0.0035 + 450/1.15/2E5}$$



→ VERIFICA: è verificata anche l'armatura, edunque si conosce tutto.  
In questo caso, bisogna verificare che

$$\mu_{rd} \geq \mu_{sd}$$

Pertanto, si calcola  $\mu_{rd}$ . Partendo da  $A_{so}$ , si calcola la percentuale  $\omega_0$ .

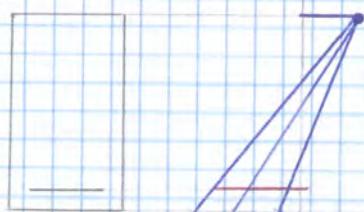
$$\omega_0 = \frac{A_{so} f_{yd}}{bd f_{cd}}$$

Tramite le tabelle si trova  $\mu_{rd}$  e da qui si fa il confronto.

VERIFICA  $M_{sd}, b, d, f_{cd}, f_{yd}, A_{so} \Rightarrow \omega_0 = \frac{A_{so} f_{yd}}{bd f_{cd}} \Rightarrow \mu_{rd}$

### 3 Duttilità di una sezione:

In flessione, essa si può definire come la capacità di sopportare variazioni di curvatura in campo non elastico senza un'eccessiva variazione di momento flettente. Siccome si vuole che la struttura abbia comportamento duttile, occorre che l'armatura sia sussidata.



Siccome si è in campo 3, all'aumentare della profondità  $\chi$  dell'asse neutro, la deformazione dell'acciaio diminuisce e dunque si riduce la duttilità della sezione.

→ Si può controllare la duttilità della sezione in modo indiretto mediante un controllo DELLA PROFONDITÀ DELL'ASSE NEUTRO.

Visto che la norma richiede una certa duttilità x le sezioni in strutture iperstatiche (si può estendere anche x quelle isostatiche), x far sì che la defformazione dell'acciaio sia superiore a certi valori, si limita il valore  $\chi$ .

#### PREMESSA: livelli di importanza nell'Eurocodice

Tutti gli Eurocodici si organizzano secondo Frasi aventi diversi livelli di importanza, cioè ci sono più livelli di regole.

→ P ("shall"): indica un principio, tipicamente di carattere generale; che è un'assunzione e un'ipotesi che bisogna sempre rispettare.

→ null o ("Should"): indica un'affermazione e un punto meno forte rispetto al precedente e spesso è applicato ai metodi che si usano x soddisfare i principi.

→ "May": sono note.

Questi diversi livelli hanno lo scopo di non sia troppo rigida e permettono l'uso di nuove conoscenze.

Si ottiene così un criterio per prediminuzionare la larghezza  $b$  della zona compressa

$$b \geq \frac{M_{sd}}{\mu_{lim} d^2 f_{cd}}$$

$\mu_{lim}$  è dato dalla classe di resistenza,  
 $d$  è dato dal predimensionamento dell'altezza della sezione sulla  
base della deformabilità.

Se si deve usare una larghezza  $b$  inferiore, allora non basta la semplice armatura  
ma si usa quella doppia.

È possibile avere una situazione in cui la sezione è soggetta a  
un momento flettente dimensionalizzato superiore al valore limite

$$M_{sd} > \mu_{lim}$$

Come ci si comporta?

La soluzione più immediata consiste nell'abbassare  $M_{sd}$ , sapendo che

$$M_{sd} = \frac{M_{sd}}{bd^2 f_{cd}}$$

Si può allora agire su

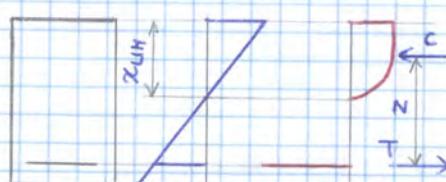
- $M_{sd}$ : si riduce il carico, ad es. adottando materiale alleggerito
- $d$ : può convenire aumentare lo spessore poiché è compare al quadrato
- $f_{cd}$ : si cambia calcestruzzo
- $b$ : si allarga la sezione

La soluzione più economica consiste nel lavorare sulle DIMENSIONI  
DELLA SEZIONE.

Infatti, si predimensiona la larghezza  $b$  in modo che

$$M_{sd} > \mu_{lim}$$

Esistono però situazioni in cui non si può modificare la geometria della sezione, migliorare le prestazioni dei materiali, etc.  
In tal caso, si ragiona in questo modo:



data una sezione, il problema è la posizione  $x$  dell'asse neutro, che deve essere limitata a  $x_{lim}$ .  
Per  $x = x_{lim}$ , la distribuzione delle tensioni è nota ed è nota la risultante di compressione, che è pari alla risultante di trazione (si è in flessione).

Se si aumentasse ancora  $x$ , secondo Muntoja occorrebbe più armatura e  
dunque  $T$  aumenta. Di conseguenza, anche  $C$  aumenta e questa

avviene così una perdita di braccio.

Da queste forze bisogna passare all'area dell'acciaio e dunque si divide x la tensione.

→ ARMATURA INFERIORE:

L'armatura tesa è incrementata a partire dal valore  $A_{s0}$ . Essa sicuramente lavora a  $f_{yd}$  perché  $\epsilon = \epsilon_{UM}$  e dunque si è in campo 3.

$$A_s = A_{s0} + \frac{\Delta T}{F_{yd}}$$

→ ARMATURA SUPERIORE:

questa nuova area  $A'_s$  che viene a nascere si calcola tenendo conto che non è detto che tale armatura lavori a  $f_{yd}$ .

In realtà, la tensione dell'armatura compressa dipende dalla posizione di tale armatura.

Ad es. se essa si trova in alto, essa è soggetta a una deformazione maggiore e dunque la tensione è maggiore.

Pertanto, bisogna valutare la tensione  $\epsilon'_s$  dell'armatura compressa a partire dalla deformazione nel diagramma.

$$A'_s = \frac{C}{E'_s}$$

In genere, l'area è diversa rispetto all'armatura tesa perché le tensioni a cui lavorano sono diverse.

Moltre, x facilitare il calcolo di  $\epsilon'_s$ , nelle tabelle di Montaña si introduce anche LA PROFONDITÀ ADIMENSIONALIZZATA  $s$  DELL'ARMATURA COMPRESSA IN CORRISPONDENZA DELLA QUALE L'ARMATURA COMPRESSA È SNERVATA.

In questo modo, nota la posizione  $s$  dell'armatura compressa, si può subito sapere se lavora a  $F_{yd}$  o meno.

$$\frac{d'}{d} < s \Rightarrow \text{armatura compressa snervata}$$

### PROCEDIMENTO

$$\rho_{LH} \rightarrow M_{LM} \left\{ \begin{array}{l} \Delta M \\ A_{s0} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A'_s \\ \Delta A_{s0} \end{array} \right. \rightarrow A_s \\ A_s = A_{s0} + \Delta A_{s0}$$

3 Prevalente trazione nel piano di simmetria (raro):

esiste un approccio semplificato che parte dalla valutazione dell'eccentricità.

Si sa infatti che applicare uno sforzo normale  $N_{sd}$  e un momento  $M_{sd}$  a una sezione corrisponde ad applicare uno sforzo normale  $N_{sd}$  con eccentricità data dal rapporto momento - sforzo normale.

Si calcola innanzitutto l'eccentricità



$$e = \frac{M_{sd}}{N_{sd}}$$

Ci possono essere 2 casi:

①  $e > y_{s1}$   $y_{s1}$  = distanza dell'armatura più tesa dal baricentro

In questo caso, la sezione non è tutta tesa ma ha una parte tesa e una parte compresa.

Qui si proceste come nel caso di PRESSIONE CON PREVALENTE FLESSIONE, traslando  $N_{sd}$  sull'armatura tesa e calcolando  $y_{s1}^*$ .

②  $e < y_{s1}$

La sezione è completamente tesa.

In questo caso, se si considera un concio di trave soggetto a  $N_{sd}$  e  $M_{sd}$  (questo corrisponde al concio soggetto a uno sforzo normale eccentrico). Lo sforzo normale è assorbito con uno sforzo di trazione nell'armatura superiore e inferiore.

Per equilibrio alla traslazione si ha

$$T_1 + T_2 = N_{sd}$$



Si può poi scrivere l'equazione di equilibrio alla rotazione attorno a un punto qualsiasi, come ad es. l'armatura superiore

$$T_1 (y_{s1} + y_{s2}) = N_{sd} (y_{s2} + e)$$

Questo è un sistema di 2 equazioni in 2 incognite, cioè le forze  $T_1$  e  $T_2$  nell'armatura superiore e inferiore.

Dà qui si ricadono le forze e poi si passa alle aree.

A tal proposito, si assume che le entrambe le armature siano snervate.

$$A_{s1} = \frac{T_1}{f_{yd}} = \frac{N_{sd}(y_{s2} + e)}{f_{yd}(y_{s1} + y_{s2})} \quad A_{s2} = \frac{T_2}{f_{yd}} = \frac{N_{sd}(y_{s1} - e)}{f_{yd}(y_{s1} + y_{s2})}$$

$$A_{s1} = \frac{N_{sd}}{f_{yd}} \frac{y_{s2} + e}{y_{s1} + y_{s2}}$$

$$A_{s2} = \frac{N_{sd}}{f_{yd}} \frac{y_{s1} - e}{y_{s1} + y_{s2}}$$

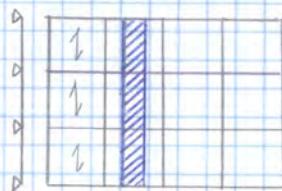
## 5. Soluzioni approssimate

un tempo queste servivano perché non esistevano sistemi di calcolo, oggi servono x avere un controllo del problema!

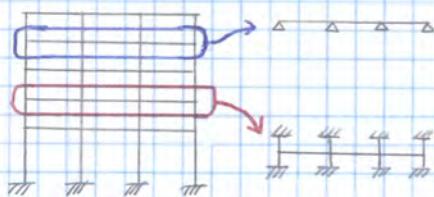
Ogni organo strutturale è complesso e non sempre può essere rappresentato bene dal punto di vista analitico. Se noi ci sono difficoltà con travi e pilastri, con solai e pareti si potrebbero usare elementi bidimensionali ma in essi ci sono 5 o 8 sollecitazioni ed è complicato passarle all'armatura, x cui il modello non è adatto a calcolare queste strutture.

D'altra parte, se il modello è complesso, aumenta il numero di dati di input e dunque la probabilità di errori sui dati. Così aumenta il rischio di errori nei risultati e gli strumenti di calcolo perdono efficienza.

⇒ bisogna introdurre dei METODI APPROSSIMATI e delle SEMPLIFICAZIONI x capire il comportamento della struttura nel suo complesso, in particolare x il controllo quantitativo dei risultati finali e x intercettare errori significativi.  
Lo stesso vale x il dimensionamento della sezione e il calcolo delle armature.



Per semplificare l'analisi, ad es., un telaietto tridimensionale sufficientemente regolare è diviso in campi di solai che sono analizzati in modo indipendente e in serie di telsi più indipendenti. Considerando poi i carichi verticali, un telaietto piano può essere semplificato in sottotelaio o travi continue:



se si considera un telaietto trasversale (o longitudinale), si prende una fetta di solao di larghezza unitaria o data da un modulo. Tale fetta poggia su travi ed è soggetta ai carichi di sua competenza. Quando si è calcolata tutta l'armatura di sua competenza, bisogna ricordarsi che i vincoli non sono fermi e ostacolano la libera rotazione (ma a questo si pensa alla fine).

In seconda battuta, le fette di solao trasferiscono il carico ai telai, che possono essere studiati in modo indipendente (se la struttura è regolare e soggetta ad azioni statiche)

↳ i telsi centrali si portano i carichi corrispondenti alle fette di solao

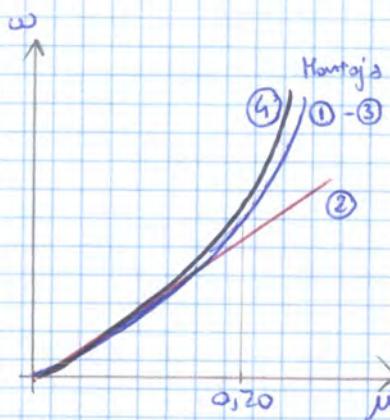
In questo modo, si porta la struttura a un telaietto piano, che può essere studiato come tale o con ulteriori semplificazioni;

→ l'ultimo piano è studiato come un sottotelaio

→ il piano intermedio è studiato come un telaietto.

In alternativa, si può ignorare l'effetto telaietto x carichi verticali dicendo che ogni piano, dal punto di vista del carico verticale, si comporti come una trave appoggiata.

↳ altri aspetti sono poi sistemati nei dettagli costruttivi



Si possono confrontare le soluzioni in funzione del momento adimensionale  $\mu$ .

→ soluzione corretta ① (Montaja)

→ la I formula (②) dà una soluzione lineare in  $M$  e  $\mu$  perché si assume che il braccio  $z$  sia costante. Essa coincide con quella reale fino a  $\mu = 0,2$  (sollecitazione elevata) e poi tende a sovastiendone l'ampiezza rispetto a quella reale (è leggermente a sfavore di sicurezza).

→ la II formula (③) coincide con Montaja e funziona sempre.

→ la III formula (④) è sempre a favore di sicurezza.

OSSERVAZIONE: lo stesso block è valido tutte le volte che la deformazione del lembo superiore vale  $\Sigma_{xz}$  (CAMPO 3) ma fornisce buoni risultati anche nel campo 2.

Esso si può usare indipendentemente dalla presenza di sforzo normale, con singola o doppia armatura (in questo caso si può scrivere un'equazione di equilibrio senza iterazioni perché, avendo assunto tensioni costanti, si elimina la non linearità x integrazione).

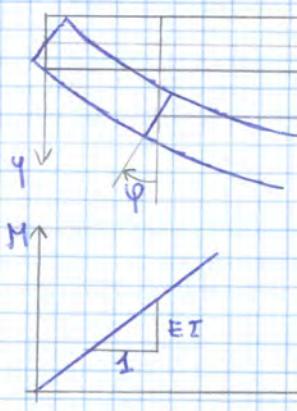
Esso si può usare nel campo 6, dove le armature sono non snellute. Qui si assume che siano snellette, si posiziona l'asse neutro e poi si verifica.

## 6) Diagramma momento-curvatura

Esso si utilizza in ingegneria strutturale in 2 situazioni:

→ x calcolo non lineare strutturale

→ valutazione di stabilità strutturale (problema delle colonne snelle compresse).



Per definizione, data puntualmente la deformazione di una sezione secondo un certo raggio di curvatura, si definisce come curvatura il reciproco di tale raggio.

$$\chi = \frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{dx} \quad \rightarrow \text{derivata seconda dello spostamento (con buona approssimazione)}$$

Il diagramma momento-curvatura si presenta come una retta di inclinazione data da  $EI$  in campo elastico-ideale, in virtù dell'equazione della linea elastica

$$\chi \approx \frac{d^2q}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

In realtà, una sezione in cemento armato non presenta comportamento elastico ideale e, inoltre, non si è ancora visto il contributo dello sforzo normale. Questo, intervenendo, fa diventare il diagramma una superficie.

⇒ si valuta il diagramma  $\chi$  assegnati valori di sforzo normale e si ottiene una CURVA DI CIEVOLLO.

$\rightarrow \lambda < \lambda_{Rd}$   
 Si può notare che non si ragiona più allo SLU (questo corrisponde all'ultimo punto del diagramma) e dunque il II parametra non è più dato dai poli.

Esistono altri modi x dare il II parametro

→ deformazione in corrispondenza del baricentro, cioè  $x = 0$

$$\varepsilon(x=0) = \lambda$$

→ fissata la profondità dell'assecentro, si lavora sulla deformazione dell'estradossa.

L'importante è che ci sono 2 parametri da definire e bisogna fissarne uno.

Una volta trovata la configurazione deformata, si tratta il momento  $M$  corrispondente alla curvatura imposta.

$$\int_A b y dA = M$$

Si ripete l'operazione x diverse curvature e si traccia la curva Momento-curvatura x punti.

A livello numerico, quindi, l'operazione si svolge in più fasi

① Note la sezione e  $N_{Rd}$ , si calcolano i valori limite  $N_{Rd}$  e  $\lambda_{Rd}$

② Si divide l'intervallo  $[0; \lambda_{Rd}]$  in un numero assegnato di intervalli;

③ Per ogni curvatura intermedia, si trova la configurazione avente quell'a deformazione cui corrisponde un integrale delle tensioni pari allo sforzo normale.

Se si ragiona sulla deformazione in corrispondenza del baricentro, x trovare il valore  $\lambda$  corretto, si usa il metodo di bisezione in modo che  $N_{Rd} = N_{St}$ :

si trovano i valori iniziali  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tali che la differenza  $N_{St} - N_{Rd}$  sia positiva e negativa.

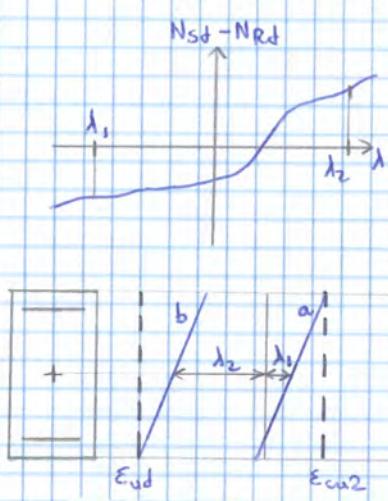
Per trovarli, si considerano le configurazioni limite dei materiali (calcestruzzo e acciaio).

Assegnata una certa curvatura, si ottiene un fascio di rette parallele che vanno da  $a$  a  $b$ , cioè le rette passanti x il polo del calcestruzzo e il polo dell'acciaio.  
 A queste rette si associano 2 valori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e sicuramente il valore reale  $\lambda$  cade in mezzo.

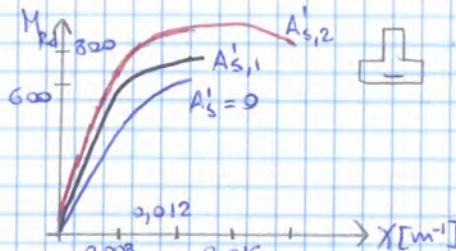
⇒ note le deformazioni limite dei materiali, si ottiene il range di valori  $\lambda$

Da qui si dimezza due i campi, fino a soluzione.

④ Si trova il momento resistente corrispondente.



## INFLUENZA DELL'EVENTUALE ARMATURA COMPRESSA



In una sezione a T rovesciata, aggiungendo armatura in estradosso, la curva cambia e si ottengono valori simili alla sezione a T, dove c'è tanto calcestruzzo compresso.

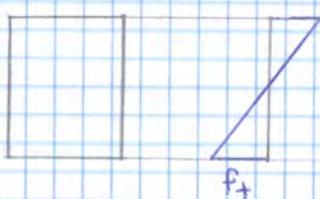
Infatti, non avendo tanto calcestruzzo compresso, si inserisce dell'armatura compressa e si torna così a un comportamento duttile.

## TRACCIAMENTO DEL DIAGRAMMA MOMENTO - CURVATURA

Il suo tracciamento è oneroso a livello computazionale e dunque spesso si usa un **DAGRAMMA SEMPLIFICATO** che si basa su 3 punti corrispondenti a 3 diversi comportamenti della sezione al crescere della curvatura.

- I** Per curvature molto basse, si considera la resistenza a trazione del calcestruzzo e dunque il primo comportamento è quello relativo alla **seziona non fessurata**.

Pertanto, il primo punto  $(X_f; M_f)$  è quello di passaggio comportamento non fessurato - comportamento fessurato.



Per volutarlo, data una sezione rettangolare in cemento armato, si tiene conto che prima della fessurazione non interviene l'armatura (e come se non esistesse). Per questo motivo, la distribuzione delle tensioni è il diagramma bitriangolare proprio dell'elasticità lineare. In incipiente fessurazione, la tensione nel lembo più teso vale  $f_{ct}$ .

Pertanto, il momento  $M_f$  vale

$$M_f = f_{ct} \cdot W \quad W = \text{modulo resistente elastico della sezione}$$

Se poi è applicato uno sforzo normale di compressione  $N$ , la distribuzione cambia e si ha

$$f_{ct} = \frac{N}{A} + \frac{M_f}{W} \Rightarrow M_f = W \left( f_{ct} - \frac{N}{A} \right)$$

$$M_f = W \left( f_{ct} - \frac{N}{A} \right)$$

La curvatura corrispondente vale

$$X_f = \frac{M_f}{EI} = \frac{f_{ct} W}{EI} = \epsilon_{ct} \frac{W}{I}$$

$$X_f = \epsilon_{ct} \frac{W}{I}$$

- II** Il campo fessurato si dice **CAMPO 2** e, all'aumentare della curvatura, il calcestruzzo è fessurato mentre l'acciaio lavora in campo elastico. Così il momento è lineare nella curvatura, ma la pendenza è minore, poiché c'è minore rigidità. Ciò avviene fino al nuovo passaggio  $(X_y; M_y)$ , dove avviene smorzamento dell'acciaio.

Il punto si trova in modo simile, imponendo che la tensione nell'armatura tesa valga  $f_y$  e trovando la profondità  $\zeta$  dell'asse neutro corrispondente.

## STATO LIMITE ULTIMO ALLE TENSIONI TANGENZIALI

Lo SLU x flessione è un problema consolidato, cioè i metodi di progetto x sezioni soggette a tensioni normali sono consolidati e presentano la stessa impostazione in tutto il mondo.

Ciò non vale x il taglio, in quanto il problema relativo ai modelli usati nel cemento armato x valutare la resistenza al taglio e calcolare l'armatura a taglio è ancora un problema aperto.

Infatti, si nota che il comportamento di una sezione in cemento armato soggetta a taglio è complesso.

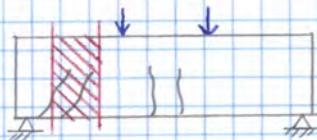
Cioè avviene x più motivi:

→ in una sezione, le tensioni tangenziali sono sempre accompagnate da tensioni normali, mentre non è vero il contrario.

Pertanto, non è corretto parlare di SLU al taglio.

→ un problema fondamentale nel comportamento di una sezione a taglio è che non ci si può riferire a un comportamento seriale, cioè non si può valutare sezione x sezione, bensì bisogna riferirsi a un trancio finito di trave.

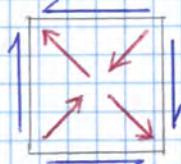
Sperimentalmente, se una trave è soggetta a 2 forze concentrate poste a una certa distanza, si nota che



→ nella parte centrale (dove  $M = \text{cost}$ ) si sviluppano fessure perpendicolari all'asse longitudinale.

→ nella parte laterale, invece, le fessure partono perpendicolari e poi si inclinano o partono direttamente inclinate.

Perché le fessure sono inclinate?



Se si considera un elemento infinitesimo in corrispondenza del baricentro della sezione, in assenza di fessure non ci sono tensioni normali (in flessione pura, x il baricentro passa l'asse neutro) ma solo tensioni tangenziali.

Le tensioni tangenziali provocano delle tensioni principali di trazione e compressione che sono inclinate.

Sapendo allora che le fessure si formano perpendicolarmente alle tensioni principali di trazione (cioè parallelamente alle tensioni di compressione), nascono fessure inclinate.

Così, anche se le fessure nascono perpendicolarmente all'asse della trave in corrispondenza dell'intradosso teso (x flessione), queste poi si inclinano x effetto del taglio. Se queste nascono dove il momento è piccolo, esse si formano già inclinate.

Siccome la fessura di taglio si inclina, non si può più studiare il comportamento di una sezione (non ci si mette più sulla sezione fessurata) ma bisogna considerare un concio di struttura.

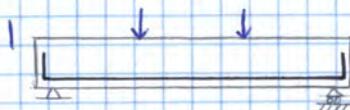
Il fatto di considerare un concio finito complica però di molto il problema analitico e, x questo, bisogna trovare dei CRITERI SEMPLIFICATI x ridurre la trattazione.

↳ bisogna realizzare modelli di calcolo semplici e che diano un risultato approssimato la sicurezza

→ la rottura a taglio è pericolosa perché ha carattere di **fragilità** e dunque deve essere evitata.

Il problema è che, in flessione, basta giudicare con la forma della sezione e l'armatura tesa e compressa x conferire duttilità; x la rottura a taglio invece si può fare ben poco.

## Elementi non armati a taglio



Iniziatutto, se si considera una trave con sola armatura flessionale, questa presenta comunque una certa resistenza a taglio.

In caso di ELEMENTI STRUTTURALI IMPORTANTI, è richiesta la presenza di armatura minima a taglio anche se, dal punto di vista analitico, questa non serve (la resistenza a taglio supera il taglio sollecitante).

D'altra parte, esistono elementi strutturali in cui, se si dimostra che non serve, si può OMETTERE L'ARMATURA A TAGLIO

→ piastre piane (hanno grande capacità di redistribuzione)

→ travetti di salao (es. travetti raccicinati come nel latero-cemento)

→ travi sopraporta e travi soprafinestra, che sono elementi secondari che prendono solo il peso della tamponatura sopra l'elemento e riportano a lato il carico.

Moltre, se si dimostra che la struttura non è fessurata allo SW, si può omettere il calcolo dell'armatura a taglio ma bisogna disporre comunque l'armatura minima. Ciò è raro, poiché si verifica solo in strutture poco caricate, e la verifica di fessurazione è difficile, a cui conviene calcolare l'armatura.

Se invece si ha una trave fessurata (accade sempre), si può omettere il calcolo dell'armatura tesa se

$$V_{sd} \leq V_{Rd}$$

mettendo però l'armatura minima.

## 2) MECCANISMO DI RESISTENZA DI UN ELEMENTO NON ARMATO A TAGLIO

Come resiste a un'azione di taglio una trave non armata a taglio?



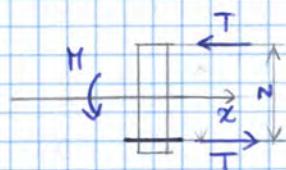
Dal punto di vista del modello, il meccanismo resistente si può descrivere con un modello arco-tirante, in cui si immagina che si formi un arco a spinta eliminata all'intero della trave e la spinta d'arco è eliminata dalla presenza di un tirante. In particolare, l'arco è costituito dal calcestruzzo compresso e il tirante dall'armatura tesa inserita e resistere al momento flettente. I due elementi sono ancorati all'estremità dell'elemento strutturale.

In realtà, il comportamento è di tipo misto:

si consideri l'equilibrio del concio infinitesimo

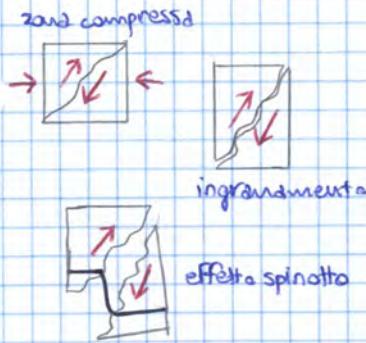
$$V = \frac{dM}{dx}$$

Nelle tensioni normali, il momento è dato dalla risultante di trazione T x il braccio z.



$$V = \frac{dM}{dx} =$$

$$= \frac{d}{dx} (Tz) = z \frac{dT}{dx} + T \frac{dz}{dx}$$



→ effetto di ingranamento degli aggregati nella fessura, perché le fessure sono scabre e spesso seguono gli aggregati. Esiste così un comportamento attrattivo sulle fessure e ciò si traduce in tensioni tangenziali sulla loro superficie.

→ con barre di armatura continue, quando tende a esserci una dislocazione tra 2 denti consecutivi di calcestruzzo, la barra flette e si oppone alla dislocazione. Così la barra tende a portare una porzione di taglio e si parla di effetto spinotto.

Con questa serie di meccanismi si passa in taglio e, al variare del comportamento della trave (entità dei carichi, apertura delle fessure, sciacchezza, etc.), varia la percentuale di meccanismo e si può avere

→ effetto arco dominante, dove aumenta il contributo della zona compressa

→ effetto trave dominante, dove aumenta il contributo degli altri elementi.

Si può allora capire che il comportamento è molto complicato e dunque non si possono realizzare modelli analitici.

### 3 Resistenza a taglio di un elemento privo di armatura a taglio

vista che non si può individuare un modello analitico per determinare la resistenza a taglio per questi elementi, gli Eurocodici definiscono una formulazione empirica che fa sì che si assuma un APPROCCIO SEZIONALE (nonostante il comportamento a taglio sia più complesso)

$$V_{Rd,c} = [C_{Rd,c} K (100 \rho_e f_{ck})^{1/3} + k_1 E_{sp}] \cdot b_w d$$

$V_{Rd,c}$  = taglio resistente di calcolo, legato perciò al calcestruzzo.  
Esso è dato dal termine tra parentesi quadre, che è una tensione, moltiplicato per l'area.

$C_{Rd,c}$  = sorta di tensione tangenziale resistente a taglio (RESISTENZA A TAGLIO DEL CALCESTRUZZO), il cui valore raccomandato dall'Eurocodice e dalle NTC è

$$C_{Rd,c} = \frac{0,18}{\gamma_c}$$

$$\gamma_c = 1,15$$

$K$  = rappresenta una sorta di EFFETTO SCALA perché si nota che travi prive di armatura a taglio più alte ( $d >$ ) manifestano minore resistenza a taglio.

Pertanto, siccome sembrerebbe dall'espressione che  $V_{Rd}$  sia proporzionale a  $d$ , con il termine  $K$  si elimina tale proporzionalità.

$$K = 1 + \sqrt{\frac{200}{d[\text{mm}]}} \leq 2,0$$

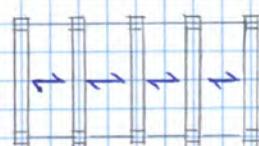
teorico

$\rho_e$  = percentuale di armatura longitudinale tesa che, nel meccanismo V, costituisce il tirante.

Questa però non è riferita all'area complessiva di calcestruzzo bensì si esprime come

$$\rho_e = \frac{A_{s,1}}{b_w d} \leq 0,02$$

## APPLICAZIONE



Si consideri una struttura con un telai in una certa direzione e il solle è ordito in una direzione.

Il solle presenta un certo schema statico e, dalle condizioni di carico, si trova un inviluppo del diagramma di taglio.

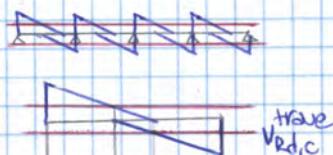
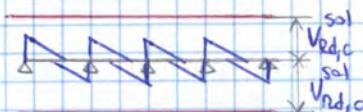
Fatto ciò, con la formulazione si calcola  $V_{Rd,c}$  dopo aver fatto il calcolo flessionale e deciso l'armatura longitudinale (che dà  $\rho_e$ ).

Confrontando  $V_{Rd,c}$  con il diagramma di taglio, sembra che non serva armatura a taglio.

Siccome si sta parlando di un travetto, non si inserisce armatura a taglio.

In caso contrario, dove in alcuni tratti si ha  $V_{sd} > V_{Rd,c}$ , si dovrebbe mettere l'armatura a taglio.

Siccome in genere non si mette armatura a taglio nei travetti, si farà qualcosa d'altro.



$$V_{Rd,c} \ll V_{sd}$$

Si individuano così 2 zone:

(I)  $|V_{sd}| > |V_{Rd,c}| \Rightarrow$  qui si calcola l'armatura a taglio

(II)  $|V_{sd}| < |V_{Rd,c}| \Rightarrow$  teoricamente, si potrebbe non mettere armatura a taglio. Siccome non è un elemento secondario, bisogna comunque mettere l'ARMATURA MINIMA A TAGLIO.

### OSSERVAZIONE (I):

il coefficiente  $C_{Rd}$  è stato tirato da una serie di prove sperimentali di cui si sono ottenuti dei risultati molto dispersi.

A livello di inviluppo di tutti i risultati (valore di calcolo), si ottiene 0,18.

Applicando il fattore  $\chi_c$ , si finisce a 0,12.

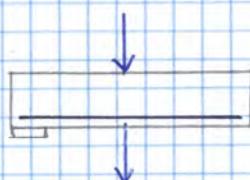
### OSSERVAZIONE (II): carichi applicati superiormente in prossimità degli appoggi

Inizialmente, in una struttura in cemento armato una forza applicata superiormente o inferiormente nello stesso punto produce effetti diversi (sebbene il taglio sia lo stesso)

→ la forza superiore schiaccia il calcestruzzo, cioè la manda localmente in compressione

→ la forza inferiore manda localmente in trazione il calcestruzzo (es. carichi appesi).

Le formule introdotte x la resistenza a taglio valgono solo x FORZE APPLICATE SUPERIORMENTE, mentre in presenza di carichi appesi occorre applicare una correzione.



## Elementi che richiedono armatura a taglio

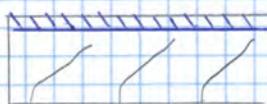
I Essi sono tutti gli elementi dove

$$V_{sd} > V_{Rd,c}$$

2 Modello di CALCOLO:

il modello che si usa x valutare questi elementi strutturali si basa su ipotesi semplificative.

Tali ipotesi derivano dal comportamento sperimentale.

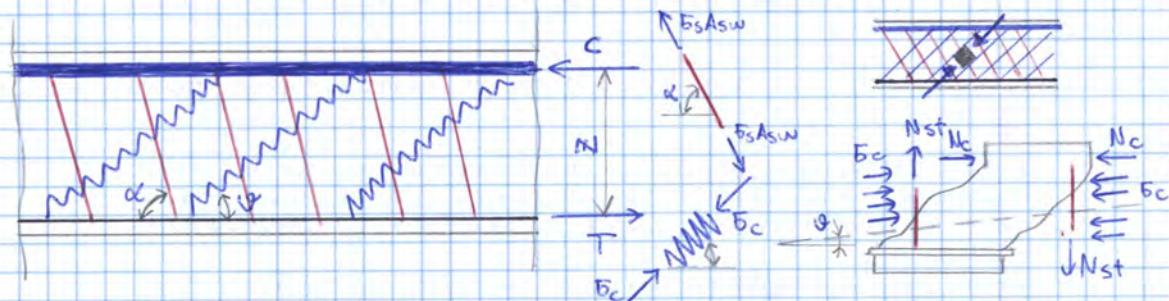


Quando l'elemento si fessura x effetto del taglio, nascono fessure inclinate di 45°.

Si è allora immaginato di studiare la struttura ricordandola da una continua a una discreta, di tipo reticolare.

Così è nato il concetto di TRASFORMAZIONE DA TRAVE CONTINUA A TRAVE RETTICOLARE e il concetto di traliccio.

Oggi il modello è un po' diverso ma il modello di calcolo della resistenza prevede comunque l'assunzione che si formi un traliccio isostatico all'interno della trave, costituito da correnti paralleli uniti da aste di parete.



In particolare, x effetto del momento flettente (assunto positivo), si sa che si creano una zona compressa (non fessurata) e una zona tesa rappresentata dall'armatura longitudinale. Si individuano così:

→ **corrente compresso** (quello superiore, in questo caso), che porta la compressione C ed è rappresentato dal calcestruzzo compresso x effetto del momento flettente e dell'eventuale sforzo normale.

→ **corrente tesa** (quello inferiore, in questo caso), che porta la trazione T ed è rappresentato dall'armatura longitudinale tensa x effetto del momento flettente e dell'eventuale sforzo normale.

Per quanto riguarda le aste di parete che collegano i due correnti, questi erano inizialmente costituiti dalle staffe e dai denti di calcestruzzo compresso tra le fessure consecutive.

Oggi si è un po' cambiato.

→ **aste di parete compresse**:

esse sono aste ideali rappresentate dal CALCESTRUZZO COMPRESO D'ANIMA e presentano una generica inclinazione  $\psi$  (non è detto che sia 45°) rispetto alla direzione longitudinale della trave.

Queste aste lavorano alla tensione  $B_c$ .

In realtà, non si parla tanto di "asta" ma piuttosto di campi di compressione che attraversano le fessure.

Se si indicassero con il termine "asta", si penserebbe più ai denti.

## 2 Valutazione della resistenza:

una volta individuato il traliccio, si proceste a valutare la resistenza al taglio.  
Si è visto che il traliccio presenta più elementi:

- corrente compresso
  - corrente teso
  - aste di parete
- $\left. \begin{array}{l} \text{→ già visti in tensione} \\ \text{→ elemento nuovo} \end{array} \right\}$

Siccome ci sono 2 elementi strutturali nelle aste di parete, la rottura x taglio può avvenire in 2 modi

- si raggiunge la resistenza massima delle staffe
- si raggiunge la resistenza massima dei campi di compressione.

⇒ si valutano 2 VALORI DI RESISTENZA AL TAGLIO  
e la resistenza a taglio della trave è data dal valore minimo.

Per definire le due resistenze, si sa che la meccanica del continuo si basa su 3 tipi di equazioni: equazioni di equilibrio, congruenza e costitutive.

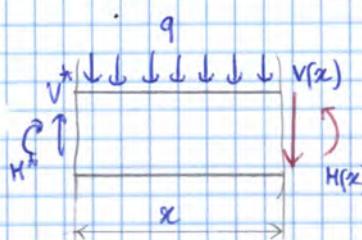
Con queste 3 famiglie di equazioni, in linea teorica, si potrebbe risolvere ogni problema strutturale.

Siccome la risoluzione è complessa nei casi reali, si esegue un'approssimazione:

se la struttura ha comportamento plastico, valgono i teoremi <sup>del</sup> limite superiore e inferiore, che permettono di trovare il carico approssimato di rottura usando solo le equazioni di congruenza (teorema cinematico) o le equazioni di equilibrio (teorema statico).

In questo caso, x lo studio della SLU si usa solo il metodo statico e dunque le equazioni di equilibrio. In questo modo, si trova una soluzione approssimata x difetto e si è a favore di sicurezza

↓ LOWER BOUND SOLUTION

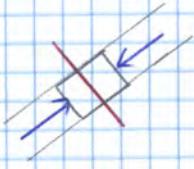


Al proposito, dato un cancio di lunghezza  $x$ , e noti il taglio  $V^*$  e momento  $H^*$  all'estremo a sinistra, grazie alle equazioni di equilibrio si riesce a trovare il valore delle sollecitazioni a destra.

$$H(x) = H^* + V^*x - \frac{1}{2}qx^2$$

$$V(x) = V^* - qx$$

In realtà, in questo caso, non si usa più la classica resistenza a calcestruzzo di tipo monosassiale.  
 Infatti, il cubetto di calcestruzzo nell'anima è attraversato dalle staffe tese e queste, x aderenza, mandano trasversalmente in trazione il calcestruzzo dell'anima. In questo modo, l'anima è indebolita e mostra resistenza minore.  
 Pertanto, essa è ridotta con il fattore  $\psi_1$ .

  
 Si nota poi che il valore re  $f_{cd}$  è diverso da quello usato nella valutazione della resistenza a flessione, poiché nella resistenza a taglio non interviene più  $\alpha_c$ .

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$$

Il Fattore  $\psi_1$ , che riduce la tensione nel calcestruzzo fissurato a taglio attraversato dall'armatura tesa, vale

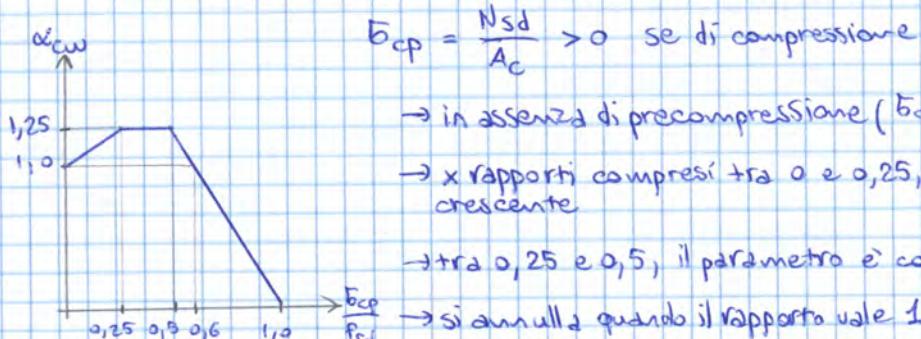
$$\psi_1 = 0,6 \left[ 1 - \frac{f_{ck} [\text{MPa}]}{250} \right]$$

→ in Italia, indipendentemente dal valore di  $f_{ck}$ , si pone  $\psi_1 = 0,5$  (del resto, varia poco)

→ IN PRESENZA DI COMPRESSIONE, si impone che

$$\alpha_{cw} \leq \alpha_{cw} \psi_1 f_{cd}$$

Il coefficiente  $\alpha_{cw}$  tiene conto dell'effetto della compressione semplice (es. colonne) o della precompressione e dipende dal rapporto  $\frac{f_{cp}}{f_{cd}}$ , dove



→ in assenza di precompressione ( $\frac{f_{cp}}{f_{cd}} = 0$ ), il parametro vale 1

→ x rapporti compresi tra 0 e 0,25, si ha un andamento lineare crescente

→ tra 0,25 e 0,5, il parametro è costante e vale 1,25

→ si annulla quando il rapporto vale 1.

A livello di equazioni, si ha

$$\alpha_{cw} = \begin{cases} 1 + \frac{f_{cp}}{f_{cd}} & 0 \leq \frac{f_{cp}}{f_{cd}} \leq 0,25 \\ 1,25 & 0,25 < \frac{f_{cp}}{f_{cd}} \leq 0,5 \\ 2,5 \left( 1 - \frac{f_{cp}}{f_{cd}} \right) & 0,5 < \frac{f_{cp}}{f_{cd}} \leq 1,0 \end{cases}$$

Così la presenza di uno sforzo normale non troppo elevato è positiva nei confronti della resistenza a taglio nei campi compressi d'anima, poiché aumenta  $\sqrt{R_d}$  nel calcestruzzo. Del resto, all'inizio lo sforzo normale chiude le fessure che si sono formate x il taglio.

In particolare,  $\alpha_{cw}$  è maggiore di 1 fino a  $\frac{f_{cp}}{f_{cd}} = 0,6$ .

Quando poi lo sforzo normale è elevato, la resistenza a taglio è penalizzata perché il calcestruzzo d'anima, oltre a resistere al taglio, deve portare anche lo sforzo normale di compressione.

Il numero  $n_w$  di staffe tagliate dal piano parallelo ai campi di compressione è dato dal rapporto tra la lunghezza  $AB$  della sezione

$$\frac{AB}{s} = 2(\cotan\theta + \cotan\alpha) \sin\alpha$$

e il passo  $s_{\text{sin}\alpha}$  delle staffe.

L'equazione così diventa

$$V_{sd} = \sigma_s A_{sw} \frac{2(\cotan\theta + \cotan\alpha) \sin\alpha}{s_{\text{sin}\alpha}} \cdot \sin\alpha$$

Il massimo taglio che si può applicare, che sarà il taglio resistente  $V_{Rd,s}$ , è quello che corrisponde a

$$\sigma_s = f_y \Rightarrow V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s_{\text{sin}\alpha}} 2 f_{ywd} (\cotan\theta + \cotan\alpha) \sin^2\alpha$$

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s_{\text{sin}\alpha}} 2 f_{ywd} (\cotan\theta + \cotan\alpha) \sin^2\alpha$$

La verifica è soddisfatta se

$$V_{Rd,s} \geq V_{sd}$$

e qui la tensione delle staffe d'acciaio è minore di  $f_{ywd}$ .

A questo punto, occorre introdurre un altro vincolo legato alla duttilità:

il quantitativo di staffe da inserire e la resistenza a taglio dipendono dall'angolo  $\varphi$ .

In particolare, in progetto è nota  $V_{sd}$  e si impone

$$V_{Rd} = V_{sd}$$

e si trova la quantità di staffe al metro  $A_{sw}/s$ .

Il valore  $\varphi$  è a scelta.

Si sa che le fessure si formano con un angolo di  $45^\circ$  e nel momento in cui si formano, si vuole che LA RESISTENZA DEI CAMPI DI COMPRESSIONE SIA SUPERiore ALLA RESISTENZA DEI CAMPI DI TRAZIONE x evitare rottura fragile;

quando si forma la fessura ( $\varphi = 45^\circ$ ), si vuole che la staffa (e non il calcestruzzo) arrivi allo SCU.

Per questo motivo, non bisogna mettere troppe staffe, altrimenti queste non sineranno e il calcestruzzo va a rottura.

Dunque si impone a  $\varphi = 45^\circ$  la disegualanza tra le resistenze

$$V_{Rd,max} (\varphi = 45^\circ) \geq V_{Rd,s} (\varphi = 45^\circ)$$

$$\frac{\frac{1}{2} \alpha_{cw} \varphi, f_{cd}}{\sin\alpha} \geq \frac{A_{sw,max} f_{ywd}}{b \cdot s}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \alpha_{cw} \varphi, f_{cd}}{\sin\alpha} \geq \frac{A_{sw,max} f_{ywd}}{b \cdot s}$$

Nella pratica, è impossibile mettere così tante armature e, al più, il problema può accadere con un'armaia molto sottile.

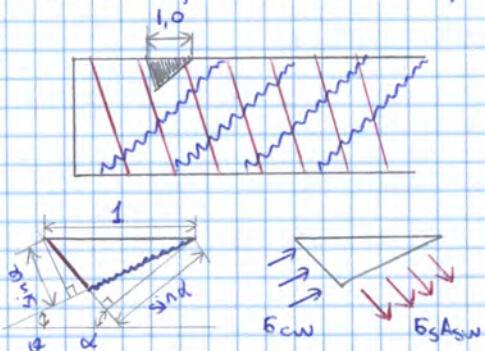
Oggi, se si usano spessori di armatura adeguati, la verifica non è importante (comunque deve essere fatta).

Per quanto riguarda i bracci relativi alle risultanti delle distribuzioni, si è assunto che le distribuzioni fossero costanti e dunque la risultante cada a metà della lunghezza di competenza.

Si ottiene così:

$$M_{sd} = Tz - \frac{1}{2} b_{cw} b_w z^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \frac{A_{sw}}{s} b_{sw} \frac{z^2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$$

Si nota che le tensioni  $b_{cw}$  dell'acciaio e le tensioni  $b_{sw}$  del calcestruzzo non sono indipendenti tra di loro, ma sono legate.



Si potrebbero sfruttare le altre equazioni ma, per ottenere un legame diretto, si considera un concio di lunghezza unitaria, tagliato parallelamente alle staffe e ai campi di compressione.

In questo caso, intervengono:

→ i campi di compressione con tensione  $b_{cw}$  agente sulla lunghezza  $\ell \sin \alpha$

→ le staffe con le forze  $b_{sw} A_{sw}$  sulla lunghezza  $\ell \sin \alpha$ .

↳ si ignorano le componenti longitudinali (i correnti)

Si scrive l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale

$$b_{cw} A_{cw} \sin \varphi = b_{sw} A_{sw} - n_{sw} \sin \alpha$$

I termini trigonometrici posti alla fine di ogni membro servono a passare alla componente verticale della risultante.

L'area dell'anima compressa vale

$$A_{cw} = b_w \sin \alpha$$

La forza in ciascuna staffa  $b_{sw} A_{sw}$  è moltiplicata × il numero di staffe, che vale

$$n_{sw} = \frac{\sin \alpha}{s \sin \alpha}$$

Si ottiene così la correlazione tra le tensioni del calcestruzzo d'anima e le tensioni delle staffe.

$$\begin{aligned} b_{cw} b_w \sin \varphi \cdot \sin \alpha &= b_{sw} A_{sw} \frac{\sin \alpha}{s \sin \alpha} \cdot \sin \alpha \\ \Rightarrow b_{cw} b_w &= b_{sw} A_{sw} \frac{\sin \alpha}{s \sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

Si sostituisce il tutto nell'equazione di partenza e si ottiene

$$M_{sd} = Tz - \frac{1}{2} b_{sw} \frac{A_{sw}}{s} \sin \alpha z^2 (\cotan^2 \varphi - \cotan^2 \alpha)$$

" "   
  $V_{sd} (\cotan \varphi - \cotan \alpha)$  (v. equazione delle staffe)

$$\Rightarrow M_{sd} = z \left[ T - \frac{1}{2} V_{sd} (\cotan \varphi - \cotan \alpha) \right]$$

Il tiro nella sezione a distanza  $x$  vale

$$T(x) = \frac{V_{sd}x}{z} + \frac{1}{2}V_{sd}(\cotan\theta - \cotan\alpha) = \\ = \frac{V_{sd}\left(x + \frac{z}{2}(\cotan\theta - \cotan\alpha)\right)}{z} = \frac{V_{sd}(x+a)}{z}$$

S'nota che il numeratore corrisponde al momento flettente valutato non in  $x$ , bensì in  $x+a$ , dove

$$a = \frac{z}{2}(\cotan\theta - \cotan\alpha)$$

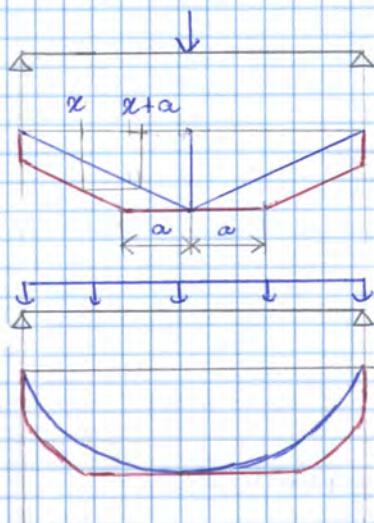
Il tiro in  $x$  così vale

$$T(x) = \frac{V_{sd}(x+a)}{z} = \frac{M_{sd,x+a}}{z}$$

$$T(x) = \frac{M_{sd,x+a}}{z} \quad \text{Regola di traslazione del diagramma di momento flettente}$$

La relazione dice che il tiro che è presente nell'armatura nella sezione  $x$  non è calcolato con taglio e momento presenti nella sezione  $x$ , ma dipende solo dal momento che si ha in un altro punto, di coordinata  $x+a$ . La posizione di tale punto  $a$ , meglio, il termine  $a$  dipende dai parametri  $z$ ,  $\theta$  e  $\alpha$ .

### Esempio (TRAVE APPOGGIATA)



Dato il diagramma di momento, secondo questa formula,  $x$  calcolare il tiro in  $x$ , non si prende il momento nell'ascissa  $x$  ma il momento nell'ascissa  $x+a$

→ si prentano tutti i punti del diagramma e si trasbano verso l'esterno di una quantità  $a$ .

In questo modo, non bisogna lavorare su momento e taglio ma solo sul momento, visto che si è dimostrato che ci si può riferire al momento di un'altra sezione. Si possono notare 2 aspetti:

→ il momento corretto è sempre maggiore del momento originale

→ la regola non intacca i valori massimi di momento, che rimangono sempre uguali.

Esempio



Si immagini di tracciare un traliccio costituito da cerniere superiori e inferiori, staffe verticali e una serie di campi di compressione inclinati in un certo modo e speculari e simmetrici. Se si risolve il traliccio, si nota che il tiro tra B e C è costante e corrisponde al valore del momento di picco (riso  $z$ ), cioè è come se ci fosse stata la traslazione (solo che non è puntuale ma è mantenuta x una certa distanza).

Come si possono disporre?

Si potrebbe mettere 6 barre  $\varnothing 20$  in tutta la zona a flessione positiva e 7 barre  $\varnothing 20$  nella zona a flessione negativa, ma la soluzione è migliorabile.

Per fare ciò, sul diagramma di prima, si riportano i MOMENTI RESISTENTI oltre a quelli sollecitanti:

le 6 barre  $\varnothing 20$  (l'armatura che si è calcolata) danno un momento resistente  $M_{Rd,1}$  (ovviamente maggiore di  $M_{sd}$ ).

Siccome il momento è grande solo nella zona centrale e diminuisce man mano che ci si sposta verso gli appoggi (x poi diventare negativo), si potrebbe ridurre l'armatura.

Pertanto, si valutano i momenti ~~corrispondenti~~ resistenti corrispondenti a

$$\rightarrow 6 \varnothing 20 \Rightarrow M_{Rd,2}$$

$$\rightarrow 2 \varnothing 20 \Rightarrow M_{Rd,3}$$

Da qui, confrontando il momento sollecitante e il momento resistente, si può tracciare il diagramma di momento resistente necessario per l'elemento:

i 2 filetti, cioè  $M_{Rd,3}$ , possono essere inseriti solo nel piccolo tratto centrale, mentre occorre più armatura nella parte restante.

In seguito, occorre inserire 6 barre  $\varnothing 20$  quando si supera  $M_{Rd,3}$ .

Quando poi il momento sollecitante supera  $M_{Rd,2}$ , si è obbligati a usare 6 barre  $\varnothing 20$  in quei punti.

↓ sotto  $M_{Rd,2}$ , ne bastano 6

Una volta tracciato il diagramma dei momenti resistenti che occorrono, sulla base di questo si possono disegnare le armature che servono.

→ si inseriscono 2 barre  $\varnothing 20$  che vanno dall'inizio alla fine e all'estremo si inseriscono dei pieghi d'ancoraggio.

A tal proposito, occorre prestare attenzione al fatto che le barre prodotte sono lunghe al più 12 m e dunque occorre che la lunghezza dell'armatura, comprensiva dell'ancoraggio, sia inferiore a 12 m. In caso contrario, l'armatura è spezzata e bisogna sovrapporre i 2 pezzi.

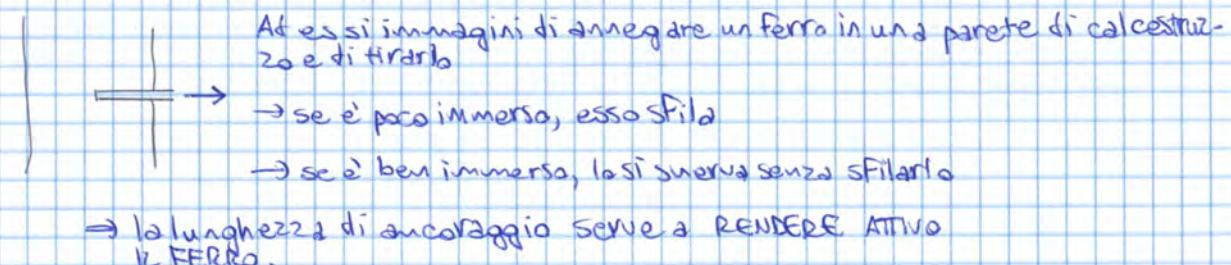
→ si aggiungono 2 barre  $\varnothing 20$  dall'appoggio interno alla fine, in entrambe le parti.

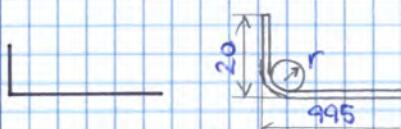
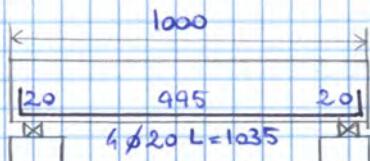
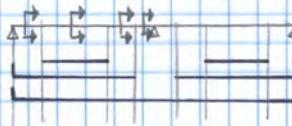
→ si aggiungono altre 2 barre  $\varnothing 20$  al centro delle campate.

In questo modo, in tutti i posti dove occorrono 6 barre, si sono inserite 6 barre. Stesso discorso vale x 4 e 2.

Lo stesso ragionamento si può seguire x le armature sopra.

Il discorso finora fatto non tiene però conto della cosiddetta lunghezza d'ancoraggio  $L_{bd}$  poiché il Ferro, x essere attivo, necessita di una certa lunghezza all'interno del calcestruzzo.





In seguito, per capire come si dispongono i ferri, si rappresenta una sezione per ciascuno tratto. I grafici sono fondamentali perché permettono di passare conoscenze e indicazioni dagli attetti di lavori (soggetti terzi con una certa esperienza) su come costruire l'opera. Ad es., per posizionare l'armatura, si danno la lunghezza della barra e il punto d'inizio (o di fine).

Però, quanto vale la lunghezza di un ferro?

Ad es., data una trave lunga 10 m, il copriferro vale tipicamente 25 mm e dunque il ferro è lungo 995 cm. Aggiungendo i pieghi di 20 cm, si ottiene

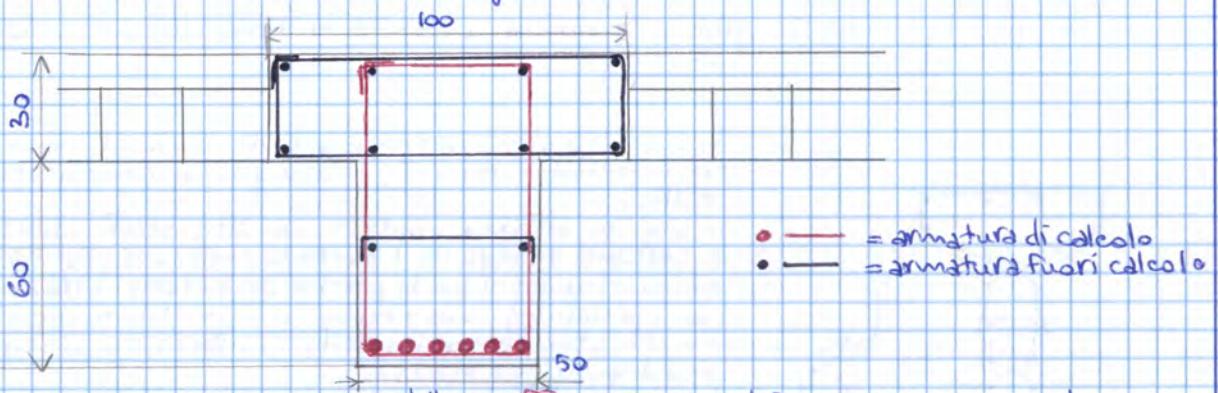
$$L = 1035 \text{ cm}$$

In realtà, i pieghi non sono a  $90^\circ$  ma si sviluppano attorno a un elemento cilindrico detto MANDRINO, il cui diametro dipende dal diametro del ferro. Per convenzione, i 995 cm sono contati dal filo esterno in avanti e i 20 cm dal filo esterno in su.

→ la lunghezza totale non è esattamente 1035 cm perché c'è una curva e la lunghezza corretta è un po' più piccola. Pertanto, il piego sarà leggermente più lungo ma si può comunque lavorare con i valori approssimati, poiché l'errore è contenuto entro le tolleranze.

### Disposizione delle armature all'interno della sezione di elementi infissi

Si consideri ad es. una trave a T, che costituisce una trave fuori spessore da cui partono dei salai in latero-cemento. Per tale trave, si adotta il precedente schema delle armature longitudinali.



Come prima cosa, si parte dalla staffa perché è il ferro più esterno che racchiude tutto e tiene i ferri longitudinali. In altri termini, il copriferro è definito sulla staffa. Le dimensioni sono date dalle dimensioni della sezione meno il copriferro (assunto pari a 25 mm) e sono

$$45 \text{ cm larghezza} + 85 \text{ cm altezza}$$

In seguito, all'interno della staffa si inseriscono i ferri longitudinali:

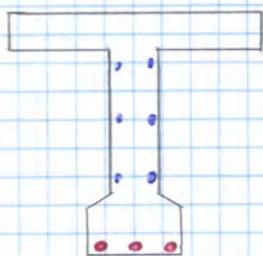
Nella parte inferiore, sapendo che ci sono 2 ferri che vanno dall'inizio alla fine della trave, li si inseriscono ai bordi della staffa. A questi si accompagnano gli altri 6 ferri.

Facendo poi l'equilibrio alla rotazione attorno al punto B, si ottiene la forza C

$$C = \frac{M_{sd}}{z} - \frac{V_{sd}}{2} (\cotan\alpha - \cotan\delta)$$

La forza C presente sulla parte compressa non è data solo dal momento  $M_{sd}$ , ma è ridotta di un contributo dovuto al taglio.

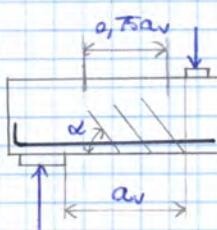
⇒ il taglio genera uno sforzo di trazione su tutta la sezione e questo sforzo è diviso nel corrente teso e nel corrente compresso.



In realtà, in presenza di TRALI ALTE, si può immaginare che tale sforzo sia assorbito con l'armatura longitudinale diffusa sull'area anziché essere distribuita. Infatti, si sa che esiste un'armatura fuori calcolo e si può dire che lo sforzo di trazione generato dal taglio sia assorbito localmente da essa. Questa armatura così dovrà sopportare un tiro che è pari alla somma dei contributi dei correnti e vale dunque

$$T_w = V_{sd} (\cotan\alpha - \cotan\delta) \quad \Rightarrow \quad V_{sd}/2 (\cotan\alpha - \cotan\delta) \text{ è la trazione indotta dal taglio in ciascun corrente.}$$

### OSSERVAZIONE: sollecitazione presso gli appoggi



Valgono le medesime considerazioni fatte per gli elementi non armati a taglio.

In particolare, in presenza di carichi applicati superiormente a una distanza dal bordo  $a_v$  con

$$0,5d \leq a_v \leq 2d$$

il relativo contributo allo sforzo di taglio è moltiplicato x il fattore

$$\beta = \frac{a_v}{2d}$$

In questo caso, bisogna soddisfare la relazione

$$V_{sd} \leq A_{sw} f_y w d \sin\alpha \quad \rightarrow \text{resistenza dell'armatura di taglio (solo armatura compressa nella zona centrale di estensione } 0,75a_v).$$

### Parametri di resistenza al taglio:

In tutte le equazioni, intervengono i parametri  $\alpha$  e  $d$  che il progettista stabilisce secondo alcuni criteri.

#### → INCLINAZIONE DELLE STAFFE $\alpha$



Si può notare che, se  $\alpha$  è più piccolo di  $90^\circ$ , la resistenza aumenta.

Infatti, le fessure sono inclinate ( $\approx 65^\circ$ , se non c'è sforzo normale) e, inclinando le staffe, queste cuciano le fessure perpendicolarmente alla loro direzione.

Dunque, questa disposizione è efficace dal punto di vista strutturale.

Tra questi valori, si opera liberamente la scelta di  $\vartheta$  e ciò determinerà un diverso funzionamento della struttura.

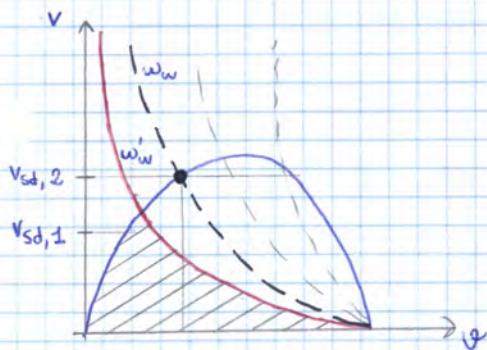
Il funzionamento dipende dalla scelta del progettista e la soluzione che si trova è a favore di sicurezza, poiché rispetta la resistenza del calcestruzzo.

Da qui si considera l'equazione lato acciaio e, eguagliando a  $V_{sd}$ , si trova la percentuale meccanica d'armatura  $w_w$ .

$$V_{Rd,s} = V_{sd} = w_w \cotang \vartheta \Rightarrow w_w$$

### → RESISTENZA LATO ACCIAIO:

Per riportarla nel grafico, si immagina di avere una certa armatura data e si fissa  $w_w$ . In particolare, in funzione di  $w_w$ , si ottiene un fascio di curve.



Ora, assegnati  $V_{Rd,max}$  e una certa armatura  $w_w$ , si può definire una porzione di piano che rappresenta il DOMINIO DI RESISTENZA, in cui ogni punto è sotto la resistenza del calcestruzzo e la resistenza offerta dall'armatura.

Così,

→ se  $V_{sd} = V_{sd,1}$ , l'armatura  $w'_w$  funziona

→ se  $V_{sd} = V_{sd,2}$ , l'armatura  $w'_w$  non funziona poiché, per soddisfare la resistenza del calcestruzzo, bisogna scegliere un certo valore  $\vartheta$ , in corrispondenza del quale  $V_{Rd,s} < V_{sd,2}$ .

→ In questo caso, bisogna scegliere un altro valore  $w_w$ , che corrisponde alla curva che passa per il punto definito dall'intersezione tra la retta  $x = V_{sd}$  e la curva relativa a  $V_{Rd,max}$ . Questo corrisponde all'operazione fatta poco prima, in cui si sceglie  $\vartheta$  e si impone  $V_{Rd,s} = V_{sd}$ , trovando l'armatura  $w_w$ .

Si può poi notare che si trascurano i valori  $\vartheta$  maggiori di  $45^\circ$ , poiché la resistenza offerta dal calcestruzzo comincia a ridursi e occorrebbe così avere valori di resistenza dell'armatura troppo alti, ad es.

$$V_{sd} = 0,4 \Rightarrow w_w = 0,2 \quad \vee \quad w_w = 0,8$$

È chiaro che conviene prendere meno armatura possibile. In realtà, la norma impone un'ulteriore limitazione nella scelta di  $\vartheta$  in quanto deve valere che

$$1,0 < \cotang \vartheta < 2,5 \quad \approx \quad 22,5^\circ < \vartheta < 45^\circ$$

Questo è un modo indiretto per limitare l'apertura di fessure in esercizio per effetto del taglio.

Il taglio, infatti, ha un effetto sull'ampiezza delle fessure ma è difficile valutare tale effetto. Pertanto, si agisce in modo indiretto limitando a monte l'apertura delle fessure.

In questo caso, tali componenti sono concordi con  $V^*$  e dunque

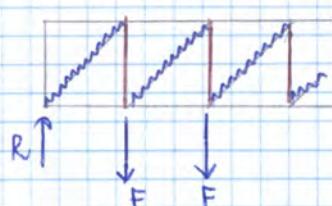
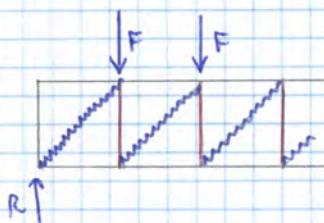
$$V^* < V_{sd}$$

Pertanto, se si ignora il loro contributo, si è a favore di sicurezza.  
Esistono però anche situazioni dove i contributi aumentano il taglio.

→ ogni volta che i correnti non sono paralleli, si fa uno schema x capire se i contributi aumentano o riducono la sollecitazione

→ carichi appesi

Tutte le considerazioni finora fatte valgono x carichi applicati in modo da mandare in compressione la superficie di calcestruzzo su cui sono applicate.  
Se questa va in trazione, si parla di CARICO APPESO.



Si consideri il traliccio soggetto a carichi non appesi, nel quale si osserva un certo sforzo nelle staffe.  
Nello stesso traliccio soggetto a un carico appeso, si nota che

→ lo sforzo diagonale diminuisce un pochino e si può ignorare questo aspetto (a favore di sicurezza)

→ lo sforzo nelle staffe aumenta esattamente di  $F$ , ossia il carico applicato.

Dunque, di fatto, il fenomeno interessa solo le armature di staffe, che sono soggette a uno sforzo

$$N_{s,2} = N_{s,1} + F$$

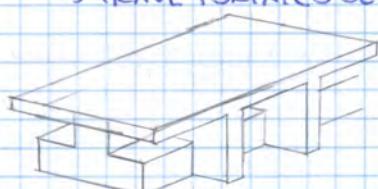
Infatti, se la forza applicata non è appesa, questa scende direttamente lungo la diagonale verso l'appoggio e non interessa le staffe.  
Con un carico appeso, invece, questa forza deve prima salire lungo la staffa e poi scendere lungo la diagonale x arrivare all'appoggio.

In questo caso, si inserisce nelle staffe un'armatura aggiuntiva deputata a prendere e partire su  $F$ , che è data da

$$A'_{sw} = \frac{F}{f_{yd}}$$

ESEMPI DI CARICHI APPESI:

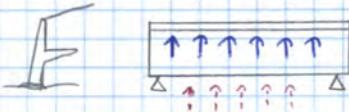
→ TRAVE PORTATEGOLI A "T" ROvescia"



Il carico è applicato sull'ala e manda questa in compressione ma, dall'altra parte, esso è applicato nella parte bassa dell'animale.

Dunque, di fatto questo è come se fosse un carico appeso.

→ MURI DI SOSTEGNO PREFABBRICATI



La pressione del terreno agisce sull'ala della trave ed è come se si avesse una trave a "T" caricata sull'ala.  
Dunque si è in presenza di carico appeso (Se non fosse così, allora il carico sarebbe applicato sotto).

Si consideri infatti un concio di trave d' T, soggetto

→ a sinistra al momento  $M$ , che determina sui lati del corrente compresso 2 forze  $F_d$

→ a destra al momento  $M + \Delta M$ , che determina una forza più grande  $F_d + \Delta F_d$ .

Queste sono le forze indotte dal momento sul lato superiore compresso.

Se si considera la semiala separata dall'anima d', questa non è in equilibrio perché è soggetta a una distribuzione uniforme di tensioni con risultante  $F_d$  e  $F_d + \Delta F_d$ . Per ripristinare l'equilibrio alla traslazione longitudinale, devono svilupparsi delle tensioni tangenziali all'interfaccia ala-anima.

Tali tensioni, cioè la sollecitazione di taglio longitudinale nella giunzione fra un lato della flangia e l'anima, corrispondono alla variazione di forza longitudinale  $\Delta F_d$ .

$$v_{sd} = \frac{\Delta F_d}{h_f \Delta x}$$

$\Delta F_d$  = componente di forza non equilibrata

$h_f$  = altezza della flangia d'

$\Delta x$  = lunghezza del tratto di trave considerato, che è minore della semidistanza del punto di momento nullo e il punto a massimo momento e della distanza dei punti d'applicazione del carico.

Per sopportare questo sforzo, si inserisce un'altra armatura in flessione trasversale, aggiuntiva rispetto a quella flessionale, tale che

$$\frac{A_{sf}}{s_f} f_{yd} \geq v_{sd} \frac{h_f}{\cotan \varphi_f}$$

$s_f$  = passo delle armature

$\varphi_f$  = angolo delle bielle e compresse che si generano a causa dell'armatura

→ se l'ala è compressa, deve valere

$$1,0 \leq \cotan \varphi \leq 2,0$$

→ se l'ala è tesa, deve valere

$$1,0 \leq \cotan \varphi \leq 1,25$$

Alllo stesso modo, si verifica la resistenza delle bielle compresse in calcestruzzo (meno importante)

$$v_{sd} \leq u_{fc'd} \sin \varphi_f \cos \varphi_f$$

nella flangia si usa uno schema isostatico di aste compresse in calcestruzzo collegate da aste trasversali tese.

Si può capire poi che spesso avviene una COMBINAZIONE DI TAGLIO (al collegamento ala-anima) E FLESSIONE TRASVERSALE, siccome il loro meccanismo di interazione è complicato, tuttavia si richiede che l'armatura valga

$$A_s = \max \left( A_{s,taglio}; \frac{1}{2} A_{s,flex} + \frac{1}{2} A_{s,taglio} \right)$$

Inoltre, se

$$V_{sd} < 0,6 f_{ctd}$$

L'effetto del taglio può essere trascurato e si mette solo l'armatura a flessione all'interfaccia

## → RESISTENZA

Essa si calcola con la relazione

$$v_{rd,i} = c f_{cd} + \mu \sigma_n + p f_{yd} (\mu \sin \alpha + \cos \alpha) \leq 0,51 f_d$$

$c f_{cd}$  = contributo dell'ADESIONE tra i getti (non serve che ci sia una tensione normale)

$\mu \sigma_n$  = contributo dell'ATTRITO, che interviene se esiste una forza esterna agente all'interfaccia che schiaccia (genera la tensione  $\sigma_n$ ), in simultanea alla forza di taglio.  
La tensione  $\sigma_n$  è positiva se di compressione, ma questa deve rispettare la condizione

$$\sigma_n \leq 0,6 f_{cd}$$

Se di trazione, è negativa e li si raccomanda di annullare il contributo di adesione.

$p f_{yd} (\mu \sin \alpha + \cos \alpha)$  = contributo dell'ARMATURA che attraversa le superfici di interfaccia

$$\rho = \frac{A_s}{A_i}$$

$A_s$  = armatura adeguatamente ancorata che attraversa l'interfaccia, inclusa l'ordinaria  
 $A_i$  = area dell'interfaccia  
 $\alpha$  = inclinazione dell'armatura rispetto all'interfaccia.

I termini  $c$  e  $\mu$  dipendono dalla scabrezza della superficie dell'interfaccia

→ superfici molto lisce, ad es. superfici gettate su casseri in acciaio, plastica o legno.

$$c = 0,25 \quad \mu = 0,5$$

→ superfici lisce, ad es. ottenute con casseri scaninati, estruse o superfici libere non lavorate ("pelo libero" del getto).

$$c = 0,35 \quad \mu = 0,6$$

→ superfici scabre con asperità di dimensioni superiori a 3 mm e passo di 40 mm, ottenute con graffiatura, esposizione di aggregati o altre lavorazioni aggiuntive.

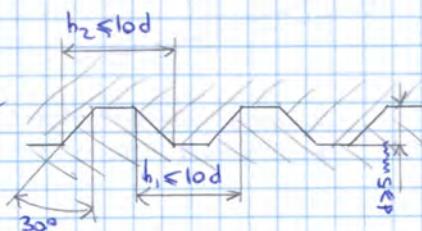
$$c = 0,45 \quad \mu = 0,7$$

→ superfici dentate, che presentano dentature (o chiavi di taghi) con una certa geometria

$$c = 0,5 \quad \mu = 0,9$$

Si può comunque notare che, indipendentemente dal fatto che questa formula indichi da necessità o meno di tali armature, si inseriscono comunque queste armature x evitare distacchi in presenza di vibrazioni.

↳ vonci si può affidare solo alla coesione



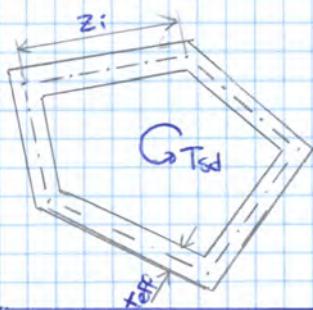
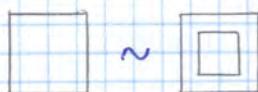
Occorre infine tenere conto che il momento scambiato dipende dalla rigidezza relativa trave-solaio.

Nel comportamento lineare, il calcolo della rigidezza è semplice; siccome il calcostruzzo si fessura in esercizio, il calcolo diventa complicato e non preciso. Inoltre, questo momento è piccolo.

⇒ si ignora la torsione di compatibilità, poiché l'equilibrio sussiste anche senza rigidezza torsionale), e non si fa la verifica allo SUL.  
Ci si limita solo ad adottare accorgimenti costruttivi x limitare l'apertura di fessure in esercizio.

## 2 Meccanismo resistente:

In questo ambito, come già accennato, si fa riferimento solo alla torsione di equilibrio.



Dato una sezione compatta soggetta a momento torcente, in campo elastico lineare le tensioni tangenziali di torsione crescono molto dal centro (sono piccole) verso la periferia. Di fatto, il materiale lavora solo nella periferia della sezione. Inoltre, l'evidenza sperimentale dimostra che travi massicce e travi cave manifestano momento torcente massimo quasi coincidente. Pertanto, qualunque sezione massiccia si può trasformare in una sezione cava.

In base a questo, il meccanismo resistente ultimo prevede la formazione di una sezione cava a pareti sottili, caratterizzata da

$$A = \text{area effettiva}$$

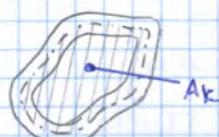
$$u = \text{perimetro esterno}$$

$$t_{eff,i} = \text{spessore effettivo della } i\text{-esima parete}$$

$$t_{eff,i} \leq \frac{A}{u} \leq t_{red} \quad e \quad t_{eff,i} \geq 2c$$

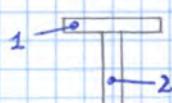
$$A_k = \text{area racchiusa dalla linea media delle pareti}$$

### PREMESSA: Formula di Bredt



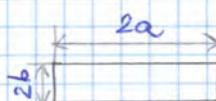
Essa esprime le tensioni tangenziali di torsione in una sezione cava.

$$\tau = \frac{T_{sd}}{2A_k t}$$



Tipicamente, lo spessore  $t$  è costante lungo la sezione e vale  $t_{eff}$ .

Moltre, se la sezione è costituita da più elementi, si immaginare di separare il momento torcente in contributi vari sui diversi elementi, proporzionali alla rigidezza torsionale calcolata in campo elastico.



$$T_{sd,1} = T_{sd} \frac{J_{T,1} z}{J_{T,1} + J_{T,2}} \quad T_{sd,2} = T_{sd} \frac{J_{T,2} z}{J_{T,1} + J_{T,2}}$$

$$J_T = ab^3 \left\{ \frac{16}{3} - 3,3G \frac{b}{a} \left[ 1 - \frac{1}{12} \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] \right\} \text{ sezione rettangolare}$$

OSSERVAZIONE (I) : siccome il momento torcente viaggia con il taglio, si usala stesso angolo. Poiché le tensioni tangenziali che si generano, anche se sono trattate come distinte, si sommano. Per questo motivo, serve anche una VERIFICA' DI INTERAZIONE.

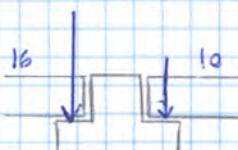
→ le staffe calcolate x il taglio si sommano con quelle x la torsione.

→ x il calcestruzzo si verifica l'interazione x evitare che non risponda a una sola delle due sollecitazioni.

$$\frac{T_{sd}}{T_{Rd,max}} + \frac{V_{sd}}{V_{Rd,max}} \leq 1,0 \quad T_{Rd,max} = 2W_{ewfcd} A_{teff}; \sin \theta \cos \theta \\ V_{Rd,max} = \frac{\alpha_{ewb} w_{2D} f_{ct}}{\cot \theta + \tan \theta}$$

OSSERVAZIONE (II) : a causa del diverso angolo con cui le bielle compresse incontrano gli spigoli, esiste il pericolo di una locale espulsione del ricoprimento. Pertanto, si dispone almeno un ferro in ogni angolo della sezione.

### Es (TORSIONE DI EQUILIBRIO)



In una sottrave a T rovescia che porta due solai di lunghezza

$$L_1 = 16 \text{ m} \quad L_2 = 10 \text{ m}$$

nasce un momento torcente di equilibrio perché le reazioni sono diverse.

Riepilogando, nel dimensionamento a taglio e torsione

→ lato acciaio, si ottengono 2 quantità di staffe x unità di lunghezza

$$V_{sd} \rightarrow \left( \frac{A_{sw}}{s} \right)_v \quad T_{sd} \rightarrow \left( \frac{A_{sw}}{s} \right)_T$$

Anna di trasformarle in staffe effettive, si sommano le 2 quantità

$$\left( \frac{A_{sw}}{s} \right)_v + \left( \frac{A_{sw}}{s} \right)_T = \frac{A_{sw}}{s}$$

→ lato calcestruzzo, occorre stare attenti perché non si è calcolata direttamente la tensione  $\sigma_c$  e c'è il rischio che le risorse resistenti siano "mangiate" dal solo taglio (o torsione) e non ci sia più nulla x l'altra sollecitazione. Pertanto, occorre soddisfare una formula di interazione.

$$\frac{T_{sd}}{T_{Rd,max}} + \frac{V_{sd}}{V_{Rd,max}} \leq 1,0$$

### Stato limite ultimo per punzonamento

La rottura per punzonamento è molto pericolosa perché è una rottura generata da taglio e dunque è di tipo fragile.

Moltre, le fessure che si creano e che segnalano il fenomeno sono in zone non visibili (fess. estradossi di solai o Fondazioni) e dunque è difficile individuare il Fenomeno.

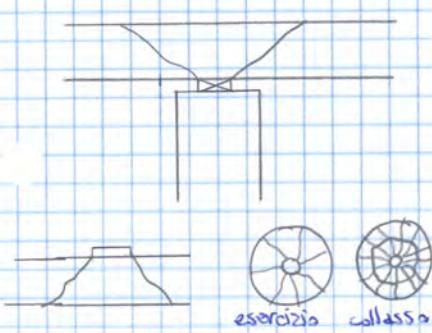
### 2 MECCANISMO DI ROTURA

Si nota che il punzonamento è una rottura indotta dall'applicazione di forze concentrate distribuite su un'area limitata.

Ad es. in presenza di un solai che poggia su colonne (o in corrispondenza di un carico concentrato), dal bordo della zona di applicazione della forza concentrata da parte della colonna, si sviluppano fessure radiali inclinate e di  $30 \pm 35^\circ$  attorno alla zona di impronta del carico.

Questo avviene in esercizio.

Al collasso, si sviluppa una fessura circonferenziale e avviene così il distacco della porzione.



Ovviamente, se si formasse una potenziale fessura, ci sarebbero 2 situazioni:

→ la trave resiste senza armatura specifica a taglio, cioè

$$V_{sd} < V_{Rd,c}$$

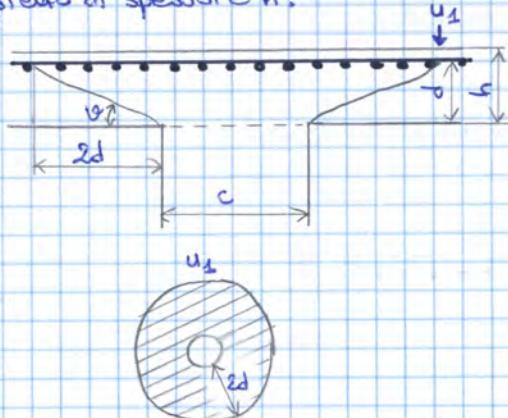
Sapendo che  $V_{Rd,c}$  dipende dalle armature longitudinali, significa che ci sono sufficienti armature longitudinali nelle 2 direzioni (il problema è bidimensionale) poiché la struttura riesce a risolvere il problema del punzonamento.

→ la trave da sola non resiste e allora bisogna inserire delle armature specifiche che cuciscono le fessure che si vengono a creare.

il problema è simile al taglio, ma ora è bidimensionale e più complicato da gestire.

### 3 GEOMETRIA DI ROTURA

Si consideri un tipico caso, cioè una colonna spessa  $c$  che si innesta su un solai pieno di spessore  $h$ .



Evidentemente, si nota che le potenziali fessure si formano con un angolo  $\theta$  tale che

$$\tan \theta = 0,5 \quad \rightarrow \theta = 26,6^\circ$$

Pertanto, la fessura raggiunge l'armatura superiore a una distanza dal bordo della colonna pari a  $2d$ .

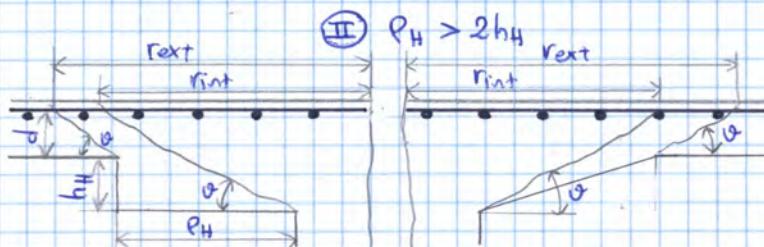
Questo angolo permette così di individuare il perimetro della zona di interesse, detto perimetro di controllo  $u_1$ .

Partendo dal bordo della colonna, la superficie di controllo passa nel vuoto prima di finire nella piastra. Dunque non può nascere una superficie di rottura dal capitello.

Il perimetro di controllo è invece calcolato dal primo punto dove la piastra ha spessore costante e ciò si traduce in un MAGGIOR PERIMETRO DI CONTROLLO

$$r_{uz} = 2d + \rho_H + 0,5c$$

$$r_{uz} = \min (2d + 0,5G\sqrt{\rho_1 \rho_2}; 2d + 0,69\rho_1), \quad \rho_1 = c_1 + 2\rho_{H1}, \quad \rho_1 \leq \rho_2 \\ \rho_2 = c_2 + 2\rho_{H2}$$



$$r_{ext} = \rho_H + 2d + 0,5c$$

$$r_{int} = 2(d + h_H) + 0,5c$$

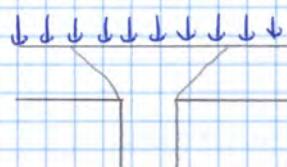
In questo caso, intervengono 2 superfici di controllo.

→ la prima parte dal bordo ed è tutta contenuta nel calcestruzzo, x cui può avvenire rottura

→ la seconda parte dal primo punto dove la piastra ha spessore costante ed è un'altra possibile superficie di rottura

Si devono così effettuare DUE VERIFICHE, una su una superficie con maggiore tensione tangenziale e spessore superiore a quello del capitello; l'altra su una superficie a maggior perimetro, minor tensione tangenziale e spessore minore.

### → plinto di fondazione



In un solido soggetto a carico distribuito, l'azione punzonante non è dovuta esattamente alla reazione unica (anche se si è detto che il punzonamento avviene con carichi concentrati), ma al carico sulla porzione esterna al perimetro di controllo, poiché questa tende a provocare il distacco.

Siccome lo spessore è piccolo rispetto alla lunghezza, quel carico sull'area di interesse è piccolo e, a favore di sicurezza, non lo si toglie.

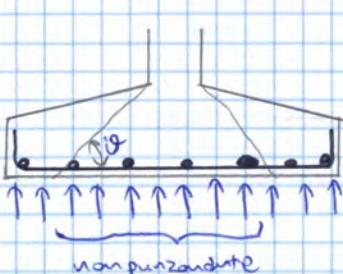
Nei plinti di fondazione, la situazione è diversa:

il carico punzonante è sempre esterno alla fondazione, ma ora dedurre dalla reazione scaricata dalla colonna le tensioni tangenziali significa dedurre una forza importante. Dunque il carico punzonante è dato dalla tensione di contatto x l'area di interesse.

Tra l'altro, se il plinto è molto tozzo

$$\rho \leq c + qd$$

la superficie cade all'esterno del plinto e non c'è punzonamento.





Nel III caso, l'armatura si dispone verticalmente x cucire le fessure e radialmente lungo la superficie di rottura. La disposizione può seguire indifferentemente 2 o n fessure direzioni preferenziali, poiché cambia poco  $u_1$ .

L'area  $A_{sw}$  dell'armatura si calcola a partire dalla resistenza del calcestruzzo correttamente.

$$V_{Rd,cs} = 0,75 V_{Rd,c} + 1,5 \frac{d}{s_r} A_{sw} \cdot f_{ywd,eff} \cdot \frac{1}{u_2 d} \sin \alpha$$

$\downarrow$   
75% della resistenza del  
solo calcestruzzo       $\downarrow$   
contributo delle armature

$s_r$  = interasse radiale tra le circonferenze delle armature

$A_{sw}$  = area delle armature di punzonamento disposte lungo una circonferenza ( $\rightarrow$  il numero delle barre deve essere lo stesso sulle diverse circonferenze)

$f_{ywd,eff}$  = tensione effettiva di calcolo nelle armature x punzonamento

$$f_{ywd,eff} [\text{MPa}] = 250 + 0,25 d \leq f_{ywd}$$

$\alpha$  = inclinazione delle armature

La verifica è soddisfatta quando

$$V_{sd} = \beta \frac{V_{sd}}{u_2 d} \leq V_{Rd,cs}$$

e, in base a questa, si calcola l'armatura.

Si può anche calcolare il perimetro della circonferenza in cui non è più richiesta l'armatura, che corrisponde al valore  $u$  in cui la resistenza è soddisfatta dal solo calcestruzzo

$$V_{Rd,c} \geq V_{sd}(u) = \beta \frac{V_{sd}}{u d}$$

$$\Rightarrow u \geq \beta \frac{V_{sd}}{V_{Rd,c} d}$$

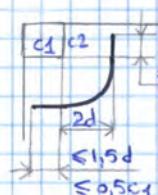
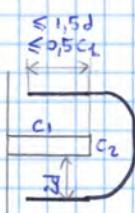
$$u_{LH} = \beta \frac{V_{sd}}{V_{Rd,c} d}$$

D'altra parte, occorre verificare la tensione nei CAMPI DI CALCESTRUZZO al perimetro della colonna, secondo il criterio

$$V_{sd} \leq V_{Rd,max}$$

$V_{sd}$  è ora riferito al perimetro  $u_0$

$$V_{sd} = \beta \frac{V_{sd}}{u_0 d}$$

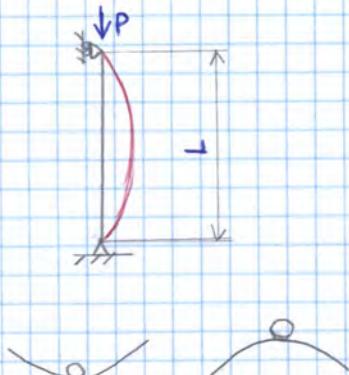


$$u_0 = \begin{cases} P & P = \text{perimetro della colonna} \\ c_2 + 3d \leq c_2 + 2c_1 \\ 3d \leq c_1 + c_2 \end{cases}$$

$c_1, c_2$  = dimensioni della colonna

## STATO LIMITE ULTIMO PER INSTABILITÀ

Si consideri un'asta soggetta a sforzo normale.



All'aumentare di tale sforzo, si può avere a un certo punto un fenomeno di instabilità.

In fatti, in ingegneria civile si cercano le soluzioni equilibrate, cioè che non danno luogo a moti rigidì.  
Esistono però diverse forme di equilibrio

→ **EQUILIBRIO STABILE**, che si può schematizzare con una pallina posta in una concavità. Se si sposta la pallina e la si lascia andare, questa oscilla attorno alla configurazione di equilibrio e vi ritorna a causa della dissipazione energetica indotta dai fenomeni di attrito e smorzamento.

→ **EQUILIBRIO INSTABILE**, che si può schematizzare con una pallina posta su una convessità. Se si sposta la pallina e la si lascia andare, questa si allontana dalla configurazione di equilibrio e ne cerca un'altra diversa.

A livello strutturale, la trave può abbandonare la configurazione iniziale e bisogna verificare se la configurazione alternativa è compatibile con le esigenze strutturali.

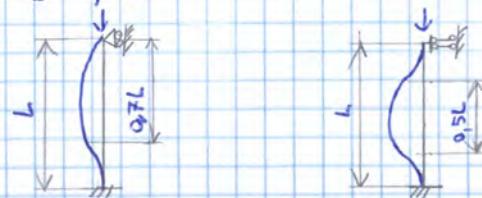
In questo caso, la configurazione alternativa è caratterizzata da uno spostamento laterale.

È possibile individuare il valore del carico  $P$  applicato alla struttura che divide le configurazioni di equilibrio stabile e non stabile, valido nel caso di trave rettilinea soggetta a carico centrale e a comportamento elastico lineare.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_0^2}$$

$L_0$  = lunghezza libera di inflessione, dipendente dallo schema statico (vincoli)

$$L_0 = \beta L$$



Si può anche valutare la tensione critica  $\sigma_{cr}$ , definita come

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A}$$

rispetto alla sottrazione  $\lambda$

$$\lambda = \frac{L_0}{i}$$

$i$  = raggio d'inerzia nella direzione in cui si considera lo sbilanciamento

La curva che si ricava vale solo nel caso di corpo elastico lineare infinito ma, nel caso più semplice, il materiale è elasto-plastico e dunque la tensione non può superare il valore  $f_y$ .  
Così, si passa alla curva reale.

In essa si può notare il fenomeno di biforcazione dell'equilibrio perché, entro il valore critico, si ha un'unica configurazione di equilibrio, mentre oltre succede qualcosa.

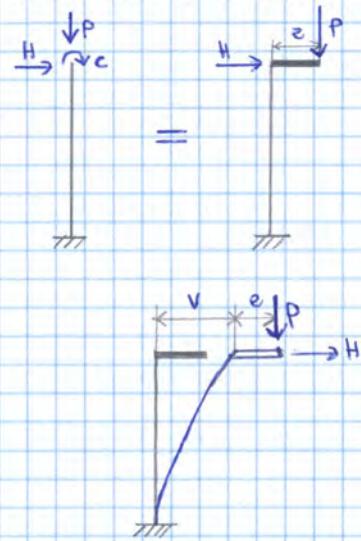
## Stato limite ultimo per effetti del II ordine

I L'Eurocodice, nei confronti dell'instabilità, impone come principio di considerare gli **effetti del II ordine**, cioè gli effetti addizionali indotti dalla deformazione strutturale, qualora questi influiscano molto la stabilità globale della struttura o influiscano il raggiungimento della SLU in una sezione critica.

Vale anche la seguente regola:

si trascurano gli effetti del II ordine se questi sono inferiori al 10% degli effetti del primo ordine, cioè gli effetti calcolati in riferimento alla configurazione indefinita, tenendo conto delle imperfezioni geometriche.

### 2 Effetti del II ordine



Per introdurli, si consideri un colonna soggetta a una forza verticale  $P$ , una orizzontale  $H$  (indotta dal vento e dalle imperfezioni geometriche) e una coppia  $C$  (coppia di incastro e dell'eccentricità dei carichi). La coppia si può trasformare in un'eccentricità del carico  $P$ .

Per valutare il momento alla base, a semplicità si fa riferimento alla configurazione indefinita della struttura e si ottiene

$$M = C + H L$$

Per alcuni elementi strutturali, questa ipotesi può portare a risultati errati e, dal punto di vista teorico, l'equilibrio si scrive in configurazione deformata.

Questa però non è nota a priori poiché la deformata dipende dal momento flettente ma questo si ricava dall'equilibrio. Per fare l'equilibrio, occorre però conoscere la deformata.

In questo caso, la struttura si sposta lateralmente di una quantità  $V$  (non nota) e così il carico  $P$  non presenta solo l'eccentricità  $e$ , ma anche il termine  $V$  e nasce così un effetto del II ordine

$$M^{\text{II}} = P V$$

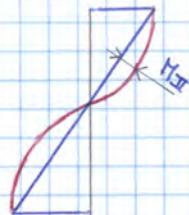
Il momento totale che agisce alla base è dato dalla somma del momento valutato con la configurazione indefinita (effetto del I ordine) e dell'effetto del II ordine

$$M^{\text{I}} + M^{\text{II}}$$

Tra l'altro, nelle strutture in cemento armato, il calcolo dello spostamento  $V$  è complesso perché dipende dalla fissurazione del calcestruzzo, viscosità del calcestruzzo e fenomeni realogici.

+

nelle strutture in cemento armato, il problema dell'instabilità non esiste ma si parla più propriamente di effetti del II ordine, che nascono già solo dalle imperfezioni geometriche nelle strutture.

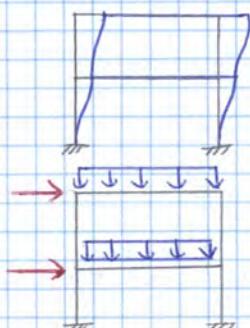


Se si considera il momento del I ordine, questo è bitriangolare. Viceversa, il momento del II ordine nasce dal fatto che la struttura si deforma e si nota allora che l'eccentricità non varia linearmente lungo l'asse perché l'asse si sposta. Dunque il momento totale è non lineare e la differenza restituisce il momento del II ordine.

$$M_{tot} - M_I = M_{II}$$

Questo è un momento del II ordine di tipo LOCALE perché è dovuto a un EFFETTO DELLA DEFORMAZIONE LOCALE della colonna tra piano e piano.

Il fatto che l'elemento strutturale presenta i nodi estremi fissi fa sì che conti solo l'effetto del II ordine di tipo locale.



Si passi ora a un telaio a nodi mobili, in cui lo spostamento interpiano è elevato e non si inseriscono più i vincoli laterali, cosa che si traduce in una deformata.

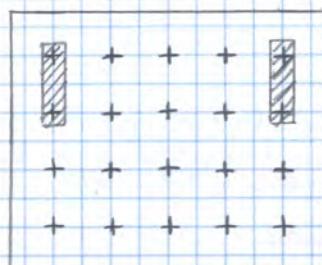
Da una parte, intervengono sempre gli effetti locali del II ordine, poiché i pilastri si deformano sempre tra piano e piano.

D'altra parte, gli effetti del II ordine dipendono anche da quanto i nodi estremi delle colonne (alla base e in sommità della struttura) si spostano l'uno rispetto all'altro. Infatti, tutti i carichi verticali si spostano come si sposta la struttura e nasce un momento complessivo nella struttura rispetto alle fondazioni, se si considera la struttura nella configurazione deformata.

⇒ L'effetto GLOBALE è un EFFETTO DELLA DEFORMAZIONE GLOBALE DELLA STRUTTURA.

Esso interviene insieme all'effetto locale del II ordine

→ elementi strutturali verticali, che attraggono la grossa parte delle azioni strutturali (PARETI DI CONTRAVENTO).



Dato un edificio non controventato, sotto le azioni laterali il piano si sposta rigidamente e le colonne sono soggette alla stessa sollecitazione, se uguali.

Se si inserisce una parete di taglio che collega più pilastri, le forze orizzontali finiscono sull'elemento rigido. Infatti, lo spostamento del solaio è lo stesso ma la sollecitazione finisce tutta sull'elemento rigido.

In generale, se i controventi sono inseriti correttamente, le strutture controventate sono STRUTTURE A NODI FISSI.

In caso contrario, la struttura può essere a nodi fissi o a nodi mobili.

In particolare, secondo l'Eurocodice, ~~non~~ in un edificio si possono TRASCURARE GLI EFFETTI GLOBALI DEL II ORDINE (cioè lo si può considerare a nodi fissi) se si rispetta la seguente diseguaglianza.

$$F_{v, sd} \leq k_1 \frac{n_s}{n_s + 1,6} \cdot \frac{\sum E_{cd} I_c}{L^2}$$

$F_{v, sd}$  = carico verticale totale sull'elemento controventato e sul controvento

$n_s$  = numero di piani

$E_{cd} I_c$  = rigidezza dell'elemento verticale di controvento

$E_{cd}$  = modulo di rigidezza del calcestruzzo

$I_c$  = momento d'inerzia della sezione dell'elemento dro

Se l'equazione non è soddisfatta, occorre procedere al calcolo degli effetti globali e ciò può avvenire mediante

→ ANALISI NON LINEARE in grandi spostamenti

→ relazione H2 dell'Eurocodice, che permette di amplificare le forze orizzontali sulla struttura in modo da dare alla base lo stesso effetto del carico  $P$  con lo spostamento  $v$  (cioè di tenere conto degli effetti del II ordine di tipo globale).

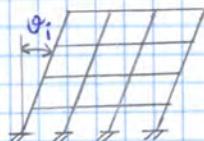
#### ↳ Imperfezioni geometriche:

essesi considerano nelle combinazioni di sforzo persistente e accidentale e non si considerano nella SLE.

Esse sono importanti perché danno luogo a effetti del II ordine.

Valutando l'edificio nel suo insieme, l'imperfezione geometrica si può rappresentare come angolo  $\theta_i$  di inclinazione rispetto alla verticale.

$$\theta_i = \theta_0 \alpha_h \alpha_m$$



$$\theta_0 = \text{Valore di base} \quad \theta_0 = \frac{1}{200} \text{ (valore raccomandato)}$$

$\alpha_h$  = parametro legato all'altezza  $h$  dell'edificio

$$\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{R}} = \frac{2}{3} \div 1$$

$\alpha_m$  = numero di elementi verticali controventati dal sistema di controvento (cioè colonne)

$$\alpha_m = \sqrt{0,5 \left( 1 + \frac{1}{m} \right)}$$

Se c'è un solo elemento ( $m=1$ ), si ottiene  $\alpha_m = 1$ .

All'aumentare di  $m$ , il parametro  $\alpha_m$  diminuisce perché, con tante colonne, le imperfezioni geometriche tendono a compensarsi tra di loro (altrimenti, l'errore è sistematico).

All'infinito, con tante colonne ( $m \rightarrow \infty$ ), si ottiene  $\alpha_m = 0,71$ .  
Dunque

$$\alpha_m = 0,71 \div 1$$

Unendo i 2 intervalli di variazione (di  $\alpha_h$  e  $\alpha_m$ ), si ottiene che

$$\theta_i = \frac{1}{600} \div \frac{1}{200}$$

Dal punto di vista globale, le imperfezioni hanno effetto sul dimensionamento solo se le azioni trasversali sono piccole (non c'è vento, etc.)

Occorre però calcolare la lunghezza libera di inflessione,  
si sa che questa si può esprimere come

$$P_0 = \beta P$$

Quanto vale il termine  $\beta$ ?

→ TELAI A NODI FISSI:

Ragionando con configurazioni limite, la lunghezza libera di inflessione della colonna dipende dal grado di incastro che essa trova con la trave.  
Tutte le configurazioni che si vedranno sono a nodi fissi perché i punti di estrema sono allineati.

- ① La trave è infinitamente rigida, x cui la colonna non può ruotare rispetto alla trave e dunque si trova incastrata.  
Si ottiene così una cerniera deformata con

$$\beta = 0,5 \quad \rightarrow \text{rigidezza colonna} \ll \text{rigidezza trave}$$

- ② La trave è molto flessibile e non costituisce un vincolo alla rotazione x la colonna (la rigidezza della colonna è ben maggiore rispetto a quella della trave).  
Al limite, si può immaginare che ci sia una cerniera che lascia ruotare liberamente la colonna e si ha

$$\beta = 0,7$$

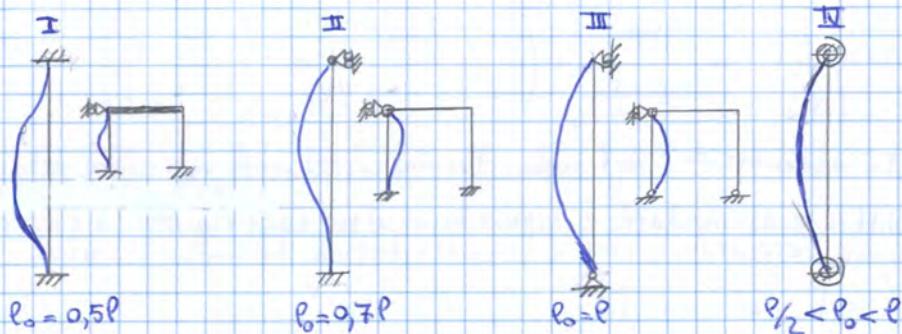
- ③ C'è sempre la cerniera e c'è un collegamento così una fondazione debole, x cui c'è una cerniera anche sotto e si ha

$$\beta = 1,0$$

⇒ nelle STRUTTURE A NODI FISSI, si ha che

$$\beta_{\text{NF}} = 0,5 \div 1$$

Questo è evidente se si considera la situazione più generale (IV), in cui i nodi sono allineati e i collegamenti hanno una certa rigidezza, secondo delle molle rotazionali.



→ TELAI A NODI MOBILI

In questo caso, i nodi non sono più allineati.

- ① La rigidezza della trave è ben maggiore rispetto alla rigidezza della colonna, x cui la trave è assunta infinitamente rigida e la colonna è incastrata.

$$\beta = 1,0$$

doppio pendolo

Il problema consiste però nel valutare le flessibilità.

Un metodo semplificato e a favore di sicurezza (dà valori di  $\beta$  superiori a quelli reali) è quello della norma BS 8110, che ~~dà~~ definisce delle condizioni di vincolo all'estremo.

1 = INCASTRO cioè connessione monolitica con una trave (o un piano appropriato) avente altezza almeno pari alla dimensione della colonna.  
Se c'è doppio incastro, la norma dà

$$\beta = 0,8$$

anziché 0,5 perché questo è un valore teorico legato allo schema ideale di incastro perfetto.

2 = connessione monolitica con una trave di altezza minore rispetto alle dimensioni della colonna (minore rigidità).

3 = MINIMO VINCOLO, cioè una connessione elementare non progettata x affr. un vincolo alla rotazione della colonna ma che ne offre un po'.

4 = ESTREMO LIBERO di ruotare e traslare (es. sbalzo)

Da qui, si riportano in una tabella i corrispondenti valori di  $\beta$ .

#### → NODI FISSI

		Base		
		1	2	3
Soggiorni	1	0,8	0,8	0,9
	2	0,8	0,9	1,0
	3	0,9	1,0	1,0

#### → NODI MOBILI

		Base			
		1	2	3	4
Soggiorni	1	1,2	1,3	1,6	
	2	1,3	1,5	1,8	
	3	1,6	1,8	-	
	4	2,2	-	-	

→ dove ci sono i trattini, il metodo non funziona

In questo modo, si calcola la lunghezza libera di inflessione e dunque il contributo dell'imperfezione geometrica sugli effetti locali del II ordine.

Nel caso in cui  $\lambda > \lambda_{LH}$ , occorre valutare l'effetto locale del II ordine e il momento sollecitante con cui si studia la colonna si calcola come

$$M_{sd} = \max \{ M_{o2}; M_{oe} + M_i + M_2 \}$$

Per calcolarlo, innanzitutto si definiscono i momenti  $M_{o2}$  e  $M_{oe}$  che, come prima, valgono

$$M_{o2} = \max \{ |M_{top}|; |M_{bottom}| \}$$

$$M_{oe} = \begin{cases} \min \{ |M_{top}|; |M_{bottom}| \} & \text{se } M_{top} \text{ e } M_{bottom} \text{ sono concordi} \\ -\min \{ |M_{top}|; |M_{bottom}| \} & \text{se } M_{top} \text{ e } M_{bottom} \text{ sono discordi} \end{cases}$$

Da qui, si definisce il momento del I ordine equivalente  $M_{oe}$

$$M_{oe} = 0,6M_{o2} + 0,4M_{o1} \geq 0,4M_{o2}$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\text{in questo caso}} \\ &M_{oe} = 0,6 \cdot 100 + 0,4 \cdot (-70) = 32 < 40 \\ &\Rightarrow M_{oe} = 40 \end{aligned}$$

$M_i$  = contributo x le imperfezioni costruttive

$$M_i = e_i |N_{sd}| \quad e_i \text{ è noto} (e_i = P_0 / G_0)$$

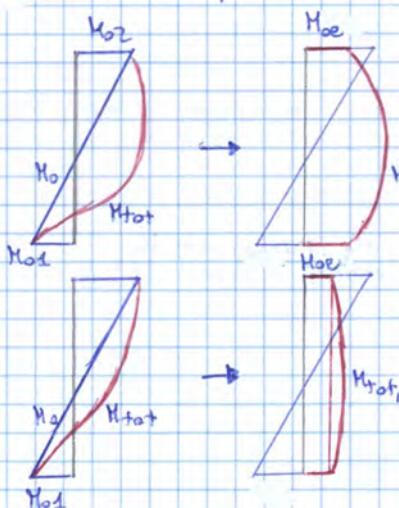
$M_2$  = momento del II ordine

$$M_2 = e_2 |N_{sd}|$$

$e_2$  = eccentricità del II ordine, da calcolare



In questa relazione, dal punto di vista fisico, si passa da una colonna soggetta ai momenti del I ordine  $M_{o1}$  e  $M_{o2}$  agli estremi a una soggetta a un momento equivalente  $M_{oe}$  costante. A questo si aggiunge l'effetto del II ordine, dato dallo sforzo normale x la relativa eccentricità. Se i momenti sono equivalenti, cioè hanno segno opposto, il momento  $M_2$  è nullo agli estremi e non nullo in tutte le altre sezioni.



Fatto ciò, si valuta se il momento del II ordine in una sezione generica è maggiore che si ha agli estremi

→ COLONNA SNELLA ( $\lambda \gg \lambda_{LH}$ ):

nella sezione in mezziera è sicuro il superamento, cioè

$$M_{oe} + M_i + M_2 > M_{o2}$$

→ COLONNA POCO SNELLA ( $\lambda > \lambda_{LH}$ ):

il massimo momento nella colonna è sempre quello all'estremo perché l'effetto del II ordine è piccolo.

usato

Per questo motivo, il momento sollecitante può essere il momento del I ordine all'estremo o il momento del II ordine, a seconda della snellezza.

Quest'ultimo poi non è calcolato in riferimento al valore effettivo di momento, bensì a un valore equivalente tirato sulla base di procedure numeriche.

La curvatura è calcolata alla base ( $x=0$ ), poiché in quella sezione è massimo il momento del II ordine (quello del I ordine è costante).  
Ciò non garantisce automaticamente che questa sia la sezione più pericolosa ma, siccome

→ la base è la sezione più sollecitata

→ ipotesi, lo sforzo normale è costante, la sezione è costante e l'armatura longitudinale è costante, a cui il momento resistente è costante in tutta la colonna

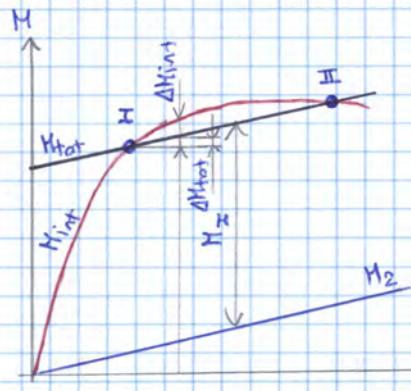
allora in questo caso è la base che può andare in crisi

$$\frac{d^2\epsilon}{dx^2}|_{x=0} = \frac{\pi^2}{L_0^2} e_2 \sim \frac{1}{r}$$

Sì può notare che l'eccentricità  $e_2$  è funzione lineare della curvatura  $\epsilon$ , siccome il momento del II ordine vale

$$M_2 = Nsd e_2$$

Allora anche il momento  $M_2$  è lineare con la curvatura.



Pertanto, in virtù dell'ipotesi di una deformata del II ordine di tipo sinusoidale, la relazione momento del secondo ordine - curvatura si esprime con una retta.

Sullo stesso grafico si può tracciare la risposta della sezione x curvature crescenti e x disegnato sforzo normale  $Nsd$ , cioè il DIAGRAMMA MOMENTO-CURVATURA. Si può anche tracciare la curva relativa al momento totale, che vale

$$M_{tot} = M_I + M_2$$

→ Siccome il momento del I ordine non dipende dalla curvatura, esso è costante e dunque  $M_{tot}$  è una retta.

L'equilibrio sussiste quando

$$M_{tot} = M_{int}$$

e si individuano nel diagramma 2 condizioni di equilibrio.

Occorre però anche specificare il tipo di equilibrio (stabile o instabile), ossia dire cosa succede quando si interrompe una perturbazione che allontana dalla posizione di equilibrio.

(I) si immagina di applicare una perturbazione, che ad es. corrisponde a un aumento di curvatura.

Di conseguenza, avviene un incremento della sollecitazione esterna  $\Delta M_{tot}$  ma, a questo, la sezione risponde con un incremento di momento interno  $\Delta M_{int}$  all'incremento di curvatura.

Siccome

$$\Delta M_{int} > \Delta M_{tot}$$

allora l'equilibrio è stabile

(II) aumentando la curvatura, aumentano la sollecitazione e il momento interno, ma ora

$$\Delta M_{int} < \Delta M_{tot}$$

## STATO LIMITE DI ESERCIZIO

In campo strutturale, esistono 3 + 1 tipi di SLE

- SLE DI TENSIONE
- SLE DI FESSURAZIONE
- SLE DI DEFORMAZIONE
- SLE di vibrazione

La procedura di calcolo prevede che si dimensioni allo SLU e si controlli allo SLE, ossia la parte di SLE è un CALCOLO DI VERIFICA:

una volta trovata la soluzione che soddisfi tutte le condizioni allo SLU, si verificano anche le condizioni di esercizio.

Nello studio allo SLE, si usa l'impostazione classica del METODO DELLE TENSIONI AMMISSEIBILI (una volta usate anche x il progetto, mentre qui solo x verifica).

## Stato limite di tensione

Occorre controllare le tensioni nel materiale che costituisce la struttura e LIMITARE LE TENSIONI IN ESERCIZIO.

### 2 TENSIONI NEL CALCESTRUZZO:

PREMESSA: combinazioni di carico in esercizio

In esercizio, esistono 3 combinazioni di carico

- combinazione caratteristica
- combinazione frequente
- combinazione quasi permanente

L'azione di calcolo, in genere, si esprime come

$$A = \sum G_i + q_{k,1} + \sum \psi_{i,k} q_{k,i}$$

nel caso di combinazione caratteristica (l'azione principale è al 100%, mentre le altre sono ridotte di  $\psi_{i,k}$ ). Nelle altre combinazioni, l'espressione è simile e intervengono altri parametri  $\psi_1$  e  $\psi_2$ . I parametri  $\psi$  si dicono COEFFICIENTI DI COMBINAZIONE.

Il controllo delle tensioni nel calcestruzzo si esegue in 2 combinazioni

- COMBINAZIONE CARATTERISTICA
- COMBINAZIONE QUASI PERMANENTE

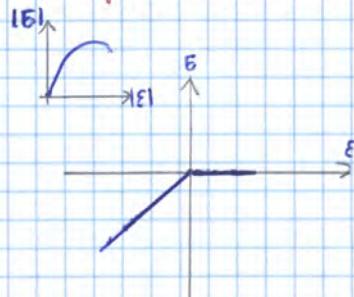
## 6 Calcolo delle tensioni:

per calcolare le tensioni in esercizio nel calcestruzzo e acciaio, si assumono alcune ipotesi

→ conservazione della planità della sezione

→ coincidenza delle deformazioni del calcestruzzo e dell'acciaio in trazione e compressione

→ comportamento elastico-lineare del calcestruzzo in compressione



Il comportamento corretto sarebbe dato dalla parabola di Sarginé però, siccome in esercizio la tensione è limitata a  $0,6f_{ck}$ , in quel tratto la non linearità è trascurabile. Pertanto, non si considera né quella legge né la legge parabolica - rettangolo, ma si assume una legge elastico-lineare. D'altra parte, si TRASCURA LA RESISTENZA A TRAZIONE DEL CALCESTRUZZO

⇒ il calcestruzzo presenta un comportamento non lineare, perché è lineare a tratti

→ comportamento elastico-lineare dell'acciaio in trazione e compressione



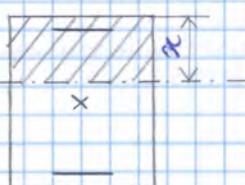
Inoltre, la tensione nell'acciaio in esercizio non può andare oltre al valore  $F_y$  e dunque non interessa il tratto incrinante.

→ si può considerare la sezione non fessurata se la tensione di trazione  $\sigma_t$  nell'armatura non supera il valore  $f_c,_{eff}$ , definito come

Oltre questo valore, non si considera più l'armatura.

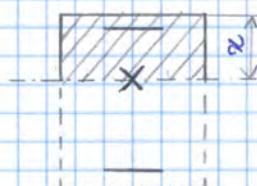
→ in genere, si assume sempre sezione fessurata

Passando al calcolo, occorre innanzitutto osservare che, siccome la legge costitutiva del calcestruzzo è non lineare, il calcolo potrebbe essere complesso. In realtà, non è così.



Si consideri infatti una sezione in cemento armato, della quale è nota la posizione  $X$  dell'asse neutro. Nella parte in calcestruzzo, tutto ciò che sta sotto l'asse neutro è come se non esistesse poiché, essendo in trazione, la sua tensione è nulla

⇒ è possibile introdurre una NUOVA SEZIONE, COSTITUITA DALL'ARMATURA E DAL SOLO CALCESTRUZZO COMPRESSO.



In questo modo, si passa da una sezione a comportamento non lineare a una sezione a comportamento lineare, poiché

→ l'acciaio ha comportamento lineare

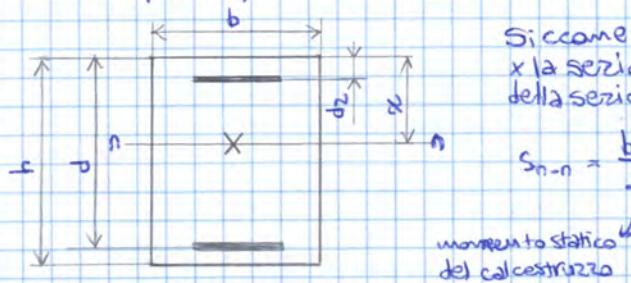
→ il calcestruzzo in compressione ha comportamento lineare.

Tra l'altro, in caso di flessione pura, l'asse neutro passa per il baricentro e dunque SULL'ASSE NEUTRO SI TROVA IL BARICENTRO DELLA SEZIONE RESISTENTE.

Si distinguono così il baricentro della sezione non fessurata e il baricentro della sezione fessurata (dove si ignora il calce-

za del calcestruzzo.

Detto questo, si cerca l'asse neutro.



Siccome in flessione pura l'asse neutro è bicantrico per la sezione, si può impostare che il momento statico della sezione resistente rispetto a questo asse sia nullo.

$$S_{n-n} = \frac{b^2}{2} + nA_{s2}(z-d_2) - nA_{s1}(d-z) = 0$$

momento statico  
del calcestruzzo

momento statico dell'acciaio  
(si annulleranno)

Da questa equazione, si ricava la posizione  $x$  dell'asse neutro.

Da qui, si può ricavare il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse bicantrico (cioè l'asse neutro) della sezione resistente.

$$I = \frac{b^3}{3} + nA_{s2}(z-d_2)^2 + nA_{s1}(d-z)^2$$

Siccome il comportamento è elastico-lineare, si può ricavare la tensione in ogni punto attraverso la formula di Navier.

$$\sigma = \frac{M}{I} y \quad y = \text{coordinate dell'asse bicantrico}$$

Le tensioni che interessano sono

→ TENSIONE DEL CALCESTRUZZO AL LEMBO SUPERIORE

$$\sigma_{c,max} = -\frac{M}{I} z \quad \text{il segno ``-'' perché è di compressione}$$

→ TENSIONE NELLE BARRE D'ARMATURA

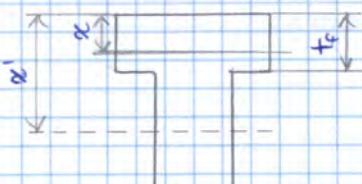
$$\sigma_{s1} = n \frac{M}{I} (d-z)$$

con Navier si calcola la tensione nel calcestruzzo ma la tensione nell'acciaio è in volte quella nel calcestruzzo

$$\sigma_{s2} = -n \frac{M}{I} (z-d_2)$$

Questo ragionamento, anche se è stato fatto per una sezione rettangolare, si può estendere ad altri tipi di sezione:

annullando il momento statico, si trova il punto la posizione dell'asse neutro e da qui, con la formula di Navier, si ricavano le tensioni.



Nel caso di una sezione a T, si può calcolare la posizione  $x$  dell'asse neutro e poi verificare il risultato.

→ se  $x < t_p$ , il calcolo è corretto

→ se  $x > t_p$ , si rifa il calcolo del momento statico, tenendo conto delle curvature.

Le formule sopra scritte e le tensioni sono invece valide per qualsiasi sezione soggetta a flessione semplice.

Queste possono essere poi riferite a casi comuni.

→ SEZIONE RETTANGOLARE E ARMATURA SEMPLICE (cioè  $A_{s2}=0$ )

$$x = \frac{nA_s}{b} \left( -1 + \sqrt{1 + 2 \frac{bd}{nA_s}} \right) \quad \rightarrow \text{se } x < 0, \text{ si scarta}$$

Mettendo insieme le 2 relazioni, si ottiene un'equazione del III grado nell'incognita  $x$ .

Una volta ricavato  $x$ , si calcola il momento d'inerzia e da qui si trovano la tensione al lembo più compresso del calcestruzzo e la tensione nell'acciaio teso.

$$E_{c,\max} = \frac{Nv}{J_{nn}} x$$

$$\sigma_{si} = n \frac{N}{S_{nn}} (d - x)$$

Nell'acciaio compresso non ci sono problemi, ossia non giungerà mai allo snervamento perché è limitato dalla tensione nel calcestruzzo (che non va oltre  $0,6 f_{ck} < f_y$ )

## 5 Valore del coefficiente di omogeneizzazione:

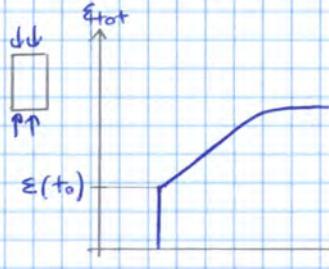
si è definito il coefficiente di omogeneizzazione come rapporto tra i moduli di rigidezza.

$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

Il modulo di rigidezza dell'acciaio è  $210\ 000$  MPa, mentre il modulo di rigidezza del calcestruzzo dipende dalla classe di resistenza ma vale circa  $30\ 000 \div 35\ 000$  MPa. Pertanto, si ha

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{210\ 000}{30\ 000 \div 35\ 000} = 6 \div 7$$

In realtà, il calcestruzzo è un materiale viscose e la viscosità modifica la distribuzione delle tensioni all'interno della sezione.



Infatti, dato un provino in calcestruzzo soggetto a una tensione costante, la deformazione misurata cambia nel tempo. Se si applica un carico all'istante  $t_0$ , in quell'istante si legge una deformazione

$$\epsilon(t_0) = \frac{\epsilon_c}{E_c(t_0)} \quad \sim \text{deformazione elastica istantanea}$$

→ In seguito, la deformazione evolue

Siccome però il corpo non è omogeneo, si ricorre a metodi approssimativi. Il metodo più usato è il METODO DELLA RIGIDEZZA EQUIVALENTE:

la deformazione al tempo  $t$  si può esprimere come

$$\epsilon(t) = \frac{\epsilon_c}{E_c^*}$$

Il termine  $E_c^*$  è un modulo fittizio che tiene conto in modo infinietto della viscosità del calcestruzzo e vale

$$E_c^* = \frac{E_c}{1 + \varphi}$$

Il termine  $\varphi$  si dice coefficiente di viscosità e dipende dall'istante di applicazione del carico.

Per  $t \rightarrow \infty$ , si ha

$$\varphi = 2, t \rightarrow \infty$$

## Stato limite di fessurazione

1 La fessurazione è un aspetto importante nelle strutture in cemento armato perché è inevitabile e, nel dimensionamento, si può solo limitarla.

⇒ l'obiettivo è verificare che non ci sia un'eccessiva apertura delle fessure perché ciò incide su

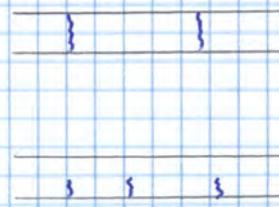
→ durabilità: le fessure hanno un certo effetto sulla durabilità, anche se non è molto forte (basta già la porosità)

→ funzione statica: le fessure riducono l'area resistente e dunque la resistenza e modificano anche il modello di calcolo (non valgono più le ipotesi)

→ estetica

Tipicamente, l'apertura delle fessure è limitata a 0,6 mm e, nei casi più estremi, ci si spinge fino a 0,1 mm.

## 2 FESSURE TIPO



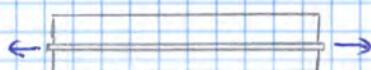
Se l'elemento lavora a taglio, la fessura è passante e interrompe tutto l'elemento.

Se l'elemento lavora a flessione, la fessura interessa solo la parte tesa. In questo caso, si può mettere un'armatura di pelle che permette di controllare le fessure, riducendone le dimensioni.

↳ nascano tante fessure di piccola entità

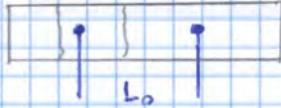
## 3 Comportamento di una struttura fessurata:

x descrivere il comportamento di un elemento in cemento armato che passa dallo stato non fessurato allo stato fessurato, si considera un caso semplice, ossia un tirante con barra di armatura soggetto a uno sforzo normale di trazione.



Nel processo, si valuta la deformazione, la cui valutazione non è semplice, perché è rapporto tra allungamento e la lunghezza di base.

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$



Si possono allora mettere 2 basi a distanza L<sub>0</sub> ma si può capire che, se nascano fessure in punti diversi, si ottengono diverse letture. Queste infatti si leggono alla posizione delle fessure rispetto alle basi.

Fortunatamente, nelle strutture in cemento armato, la base su cui si legge L<sub>0</sub> è sempre una base grande, in modo da cogliere più fessure possibili.

⇒ si legge una DEFORMAZIONE MEDIA  $\varepsilon_m$ , "media" perché coinvolge più fessure.

→ ora le rigidezze sono le stesse ma, in compenso, la deforunzione media è minore della deformazione della barra a parità di sforzo normale. La differenza di allungamento tra il comportamento reale e quello della barra nuda si dice **tension stiffening** e rappresenta l'effetto irrigidente del calcestruzzo teso compreso tra fessure consecutive, che dà un certo contributo. Ciò si traduce nel fatto che la rigidezza secondaria ~~non~~ è maggiore nel tirante, mentre la rigidezza tangenziale è uguale.

Questo è garantito dalle tensioni di aderenza acciaio - calcestruzzo.

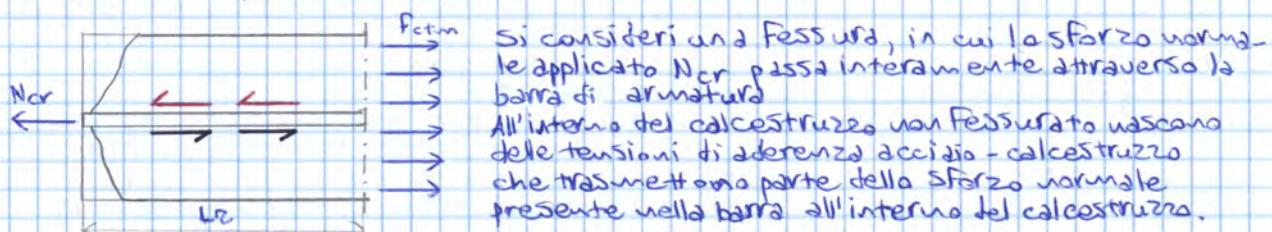
D'altra parte, all'aumentare dello sforzo normale, non aumenta il numero di fessure (esse si trovano sempre alla stessa distanza) ma cresce la loro ampiezza.

La valutazione è spinta fino allo sforzo normale  $N_y$  che porta la barra nuda a sviluppo e non si va oltre, poiché interessa studiare la fessurazione in esercizio, dove la tensione è minore di  $f_y$ .

Questo è il comportamento di untirante.

### 3 Studio delle fessure:

In prima battuta, interessa analizzare la **distanza tra le fessure** o, meglio, quali meccanismi determinano la formazione di una fessura successiva alla formazione di una flessura.



A una certa distanza  $L_z$  dalla fessura, lo sforzo è passato integralmente nel calcestruzzo e questo si troverà a lavorare alla tensione di prima fessurazione  $f_{fattm}$ .

Dunque, in quel punto, può crearsi una nuova fessura.

⇒ le fessure non si formano in qualunque punto, bensì le fessure si formano a una certa distanza, che si lega alle tensioni di aderenza che il calcestruzzo scambia con l'acciaio.

In particolare, si possono vedere le tensioni di aderenza sulla barra ( $\rightarrow$ ) e le tensioni di aderenza sul calcestruzzo ( $\leftarrow$ ), che sono uguali e contrarie e si equilibrano con la tensione  $f_{fattm}$ .

Da qui è possibile determinare la distanza tra le fessure:

quando si sta a sviluppare la fessura, in corrispondenza di essa è applicato lo sforzo  $N_{cr}$ , che vale

$$N_{cr} = f_{fattm} \cdot A_{c,eff}$$



$A_{c,eff}$  = area di calcestruzzo efficace nei confronti dell'aderenza, poiché a una certa distanza il calcestruzzo non risente più della sua presenza.

Passando all'acciaio, nelle fessure lo sforzo normale è tutto preso dall'acciaio e poi la tensione diminuisce, poiché parte dello sforzo è passato al calcestruzzo.

A queste tensioni corrispondono delle deformazioni  $\varepsilon_c$  e  $\varepsilon_s$  che, x i livelli di carico in gioco, sono anche esse lineari (il comportamento è lineare).

Allora l'apertura è la differenza delle elongazioni che subiscono acciaio e calcestruzzo, cioè l'integrale della differenza di deformazione sullalunghezza  $L_2$ . Questa è moltiplicata x 2 perché si è nella situazione peggiore in cui, a partire dal centro, si ha  $L_2$  a sinistra e  $L_2$  a destra.

$$w_{max} = 2 \int_0^{L_2} [\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x)] dx$$

A favore di sicurezza, si può trascurare la deformazione del calcestruzzo.

$$\begin{aligned} w_{max} &= 2 \int_0^{L_2} \varepsilon_s(x) dx = \\ &= 2 \int_0^{L_2} \frac{1}{E_s} \left[ \delta_s - \frac{\pi \phi \varepsilon_{bun}(x)x}{A_s} \right] dx = \\ &\quad \downarrow \end{aligned}$$

la tensione nell'acciaio è data dalla tensione  $\delta_s$  in corrispondenza della fessura che è ridotta linearmente lungo  $x$ , secondo un incremento dato dalla forza di aderenza diviso l'area dell'armatura

$$\begin{aligned} &= 2 L_2 \frac{\delta_s}{E_s} \left[ 1 - \frac{\pi \phi \varepsilon_{bun} L_2}{2 \frac{\pi \phi^2}{4} \cdot \delta_s} \right] = \\ &= 2 L_2 \frac{\delta_s}{E_s} \left[ 1 - \frac{\varepsilon_{bun} k}{2 p_{eff} E_s} \right] = \quad \rightarrow \varepsilon_{bun} k = f_{adm} \\ &\quad \leftarrow L_{max} \\ &= L_{max} \frac{\delta_s}{E_s} \left[ 1 - \frac{f_{adm}}{2 p_{eff} \delta_s} \right] \end{aligned}$$

Il termine tra parentesi x  $\delta_s/E_s$  rappresenta la deformazione media dell'acciaio

$$\varepsilon_{sum} = \frac{\delta_s}{E_s} \left[ 1 - \frac{f_{adm}}{2 p_{eff} \delta_s} \right]$$

Si ottiene così

$$w_{max} = L_{max} \varepsilon_{sum}$$

$$w_{max} = L_{max} \varepsilon_{sum}$$

APERTURA MASSIMA  
DELLE FESSURE

In base a questa espressione, si possono trovare dei METODI X LA RIDUZIONE DELLA AMPIEZZA DELLE FESSURE

→ LIMITARE IL DIAMETRO  $\phi$  DELLE BARRE, cioè conviene usare barre piccole rauvidamente x contenere l'apertura.

Infatti, in questo modo si limita  $L_2$  a parità di quantità armatura si intensifica ( $p_{eff}$ )

→ AUMENTARE L'ADERENZA  $\varepsilon_{bun}$ , riducendo così  $L_2$ .

Ciò si può eseguire passando da barre lisce a barre ad aderenza migliorata, che presentano delle costole.

Questa equazione indica che, a meno di coefficienti, la forza di trazione nell'armatura subito dopo la fessurazione è uguale alla forza nel calcestruzzo immediatamente prima della fessurazione.

$\sigma_s = \text{tensione massima ammessa nell'armatura subito dopo la fessura, calcolata nella sezione fessurata.}$   
In genere, si ha

$$\sigma_s = f_yd$$

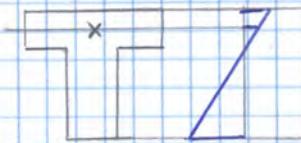
$A_{ct} = \text{area del calcestruzzo nella zona tesa prima della formazione della fessura.}$

In sezioni a T o scatolari, essa è l'area delle assine e delle piastrelle.

$k = \text{parametro legato alla deformazione di ritiro}$

$k_c = \text{parametro legato alla distribuzione delle tensioni all'interno della sezione } \cancel{\text{flessa}} \text{ prima della formazione della fessura (viscosità)}$

$\sigma_{ct,eff} = \text{valore medio della tensione nel calcestruzzo nell'istante in cui insorge la fessura.}$   
Si può imparare



$\sigma_{ct,eff} = f_{cm} \rightarrow \text{ma anche un valore inferiore}$

### Calcolo dell'ampiezza delle fessure:

L'Eurocodice prevede di partire dalla distanza massima  $s_{r,max} = 2l_r$  e di moltiplicarla x il termine di deformazione, x ottenere l'ampiezza di progetto delle fessure.

$$w_k = s_{r,max} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$$

$\varepsilon_{sm} = \text{deformazione media dell'acciaio nella combinazione di carico pertinente (quasi permanente nel calcestruzzo armato)}$

$\varepsilon_{cm} = \text{deformazione media del calcestruzzo tra le fessure}$   
(la norma considera questo termine)

### → CONTRIBUTO DI DEFORMAZIONE:

rispetto all'espressione teorica, si aggiunge un coefficiente  $k_t$

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \frac{\sigma_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + n \rho_{p,eff})}{k_s} \geq 0,6 \frac{\sigma_s}{E_s}$$

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s \frac{E_s^2}{E_g} A_p}{A_{c,eff}} \quad \text{Percentuale geometrica efficace di armatura}$$

$A_p = \text{area dell'armatura di precompressione}$

$\frac{A_p}{A_{c,eff}}$

In realtà, questa formulazione è valida solo se le barre d'armatura aderenti o poste nella zona tesa sono sufficientemente vicine tra di loro.  
In altri termini, la spaziatura  $s_s$  deve valere

$$s_s \leq 5 \left( c + \frac{\phi}{2} \right)$$

Altrimenti, è possibile stimare l'apertura delle fessure se si assume come distanza massima la seguente

$$s_{r,max} = 1,3(h-2)$$

In realtà, conviene distanziare poco le armature perché, in caso contrario, la spa distanza diventa molto elevata ed è difficile superare la verifica.

#### RIEPILOGO: CALCOLO DELL'APERTURA DELLE FESSURE

- si calcola il momento in combinazione di carico quasi perpendicolare  $M_{ap}$
- si calcola la tensione dell'armatura in esercizio  $\sigma_s$
- si calcola l'area totale efficace  $A_{c,eff}$
- si calcolano la differenza di deformazione  $\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm}$  e la distanza  $s_{r,max}$ .

#### 5 Calcolo indiretto dell'apertura delle fessure

Il Eurocodice consente anche di calcolare in modo indiretto l'apertura delle fessure, senza considerare le grandezze coinvolte.

Esistono delle tabelle che sono tarate x due condizioni

- FESSURAZIONE dovuta principalmente a CARICHI ESTERNI:

occorre rispettare le disposizioni del prospetto A o del prospetto B, cioè la verifica è soddisfatta se uno dei prospetti è soddisfatto.  
Le tensioni dell'acciaio sono calcolate nella sezione fessurata sotto la combinazione delle azioni pertinente

- FESSURAZIONE dovuta principalmente a DEFORMAZIONI IMPRESSE (deformazione di ritiro impedito):

occorre rispettare le disposizioni del prospetto A.

Nei due prospetti, si entra con la tensione  $\sigma_s$  nell'acciaio subito dopo la fessurazione e si balzano su certi valori di geometria della sezione, etc.  
Se questi non sono rispettati, non si possono usare le tabelle (queste coprono le situazioni comuni).

Le tabelle forniscono il DIAMETRO MASSIMO che permette di garantire una certa apertura delle fessure e il diametro delle barre usate deve essere minore di questo valore.  
Viceversa, il prospetto B fornisce l'INTERASSE MASSIMO delle barre, in modo da avere l'apertura richiesta.

↳ si regola la geometria delle barre

In particolare, data la lunghezza L,

→ la quota  $\frac{g}{L} L$  è assunta completamente fessurata (~~sezione parzializzata~~)

→ la quota complementare  $(1 - \frac{g}{L}) L$  lavora come non fessurata

In questo modello, occorre individuare il valore corretto di  $\frac{g}{L}$ , che si può calcolare come

$$\frac{g}{L} = 1 - \beta \left( \frac{E_{sr}}{E_s} \right)^2 = 1 - \beta \left( \frac{H_{cr}}{H} \right)^2$$

$E_{sr}$  = tensione nell'acciaio tesa corrispondente al momento di fessurazione

$E_s$  = tensione nell'acciaio <sup>tesa</sup> corrispondente alla combinazione quasi permanente (o pertinente)

$\beta$  = coefficiente legato all'effetto della durata del carico sulla deformazione media

Singola applicazione × carichi di breve durata  $\beta = 1,0$

Carico permanente (tipico)  $\beta = 0,5$

In questo modo, si trasforma la struttura in una struttura a inerzia variabile e, se è iperstatica, è difficile calcolare la ~~distribuzione~~ delle sollecitazioni

⇒ nelle strutture reali è COMPLESSA LA VALUTAZIONE DEGLI SPOSTAMENTI perché in realtà occorre fare un calcolo non lineare

### 3 Calcolo indiretto degli spostamenti.

l'Eurocodice consente, in prima approssimazione, di calcolare gli spostamenti come

$$f = (1 - \frac{g}{L}) f_I + \frac{g}{L} f_{II}$$

$f$  = freccia

$f_I$  = freccia allo stadio I (spostamento della sezione non fessurata)

$f_{II}$  = freccia allo stadio II (quunque è fessurato)

Pertanto, si calcolano 2 spostamenti in 2 situazioni e li si combinano.

In realtà, in questa relazione non si considera la viscosità ma questa può essere considerata in modo indiretto

→ la freccia  $f_I$  è moltiplicata direttamente × il coefficiente di viscosità  $\varphi(\infty, t_0)$

→ la freccia  $f_{II}$  si calcola considerando la rigidità della sezione non fessurata con il modulo elastico equivalente

$$E_c^* = \frac{E_c}{1 + \varphi}$$

A favore di sicurezza, il Fattore si può scrivere come

$$\frac{310}{E_s} = \frac{500}{f_y k} \frac{A_{s,req}}{A_{s,prou}}$$

$A_{s,req}$  = armatura richiesta allo SLU

$A_{s,prou}$  = armatura effettivamente presente nella sezione considerata

ALTRI CORREZIONI (x casi particolari - poco usuali)

→ SEZIONE A T, con rapporto larghezza dell'ala - larghezza dell'anima superiore  $\geq 5$

⇒ si raccomanda di usare  $0,8 P/d$

→ TRANI E PIASTRE ~~non~~ nervate con luce superiore a 7 m caricate con tramezzi che rischiano danni x inflessione eccessiva

⇒ si raccomanda di usare

$$\frac{7}{P_{eff}[m]} \cdot \frac{P}{d}$$

→ PIASTRE non nervate con luce superiore a 8,5 m e con tramezzi che rischiano danni x inflessione eccessiva

⇒ si raccomanda di usare

$$\frac{8,5}{P_{eff}[m]} \cdot \frac{P}{d}$$

Nel caso che la verifica non sia soddisfatta, si può

→ AUMENTARE L'ALTEZZA DELLA SEZIONE

→ AUMENTARE L'ARMATURA che, lavorando a una tensione minore, fa salire automaticamente il limite.

## Aderenza:

L'aderenza dipende dal profilo della barra, dalla dimensione dell'elemento strutturale, dalla posizione dell'armatura nel getto e dall'orientamento dell'armatura rispetto alla direzione di getto.

Il primo aspetto non è governabile, poiché esiste un unico tipo di risalto nel profilo delle armature.

Pertanto, si calcola l'aderenza in funzione degli altri 3 fattori.

Inizialmente, si definiscono 2 condizioni di aderenza

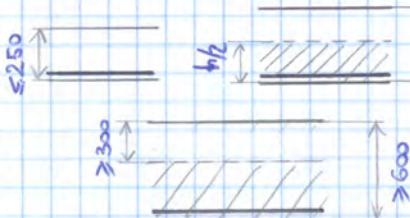
→ buona aderenza

→ aderenza mediocre

Si considera una condizione di BUONA ADERENZA quando



→ le barre sono inclinate di un angolo compreso tra  $45^\circ$  e  $90^\circ$  rispetto all'orizzontale.



→ le barre sono inclinate di un angolo compreso tra  $0^\circ$  e  $45^\circ$  e sono inserite in elementi di spessore inferiore a 25 cm, nella metà inferiore del getto di elementi di spessore compreso tra 25 e 60 cm o a una distanza superiore a 30 cm dalla superficie superiore del getto di elementi di spessore superiore a 60 cm.

Dentro ciò, x le barre nervate la norma fornisce la tensione ultima di aderenza

$$f_{bd} = 2,25 \gamma_1 \gamma_2 f_{ctd}$$

$f_{ctd}$  = resistenza a trazione di calcolo

$$f_{ctd} = \frac{F_{ck} k_{0,05}}{\gamma_c}$$

$\gamma_1$  = coefficiente legato alle condizioni di aderenza

Barra in condizioni di buona aderenza

$$\gamma_1 = 1,0$$

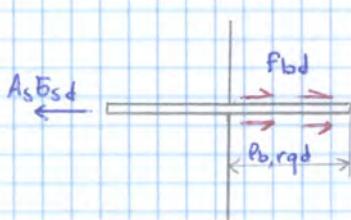
Barra in condizioni di mediocre aderenza

$$\gamma_1 = 0,7$$

$\gamma_2$  = coefficiente legato al diametro della barra

$$\gamma_2 = \begin{cases} 1,0 & \text{se } \phi \leq 32 \text{ mm} \\ \frac{132 - \phi}{100} & \text{se } \phi > 32 \text{ mm (raro)} \end{cases}$$

Sulla base della tensione limite di aderenza acciaio-calcestruzzo, si può valutare la lunghezza di ancoraggio necessaria di base, che si definisce come la lunghezza necessaria x ancorare una barra soggetta a una forza  $F_{bd}$  che produce la tensione  $E_{sd}$  nel punto da cui si misura l'ancoraggio.



In particolare, si consideri una barra di armatura immersa in una parete.

Questa è munita in trazione applicando una forza  $A_s E_{sd}$ , che genera la tensione  $E_{sd}$  nella barra.

La lunghezza di ancoraggio necessaria di base è la lunghezza minima di immersione della barra nel muro affinché questa non sfili.

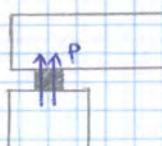
$\alpha_2$  = coefficiente x effetto del ricoprimento minimo di calcestruzzo.

$\alpha_3$  = coefficiente legato al confinamento dato da all'armatura trasversale, poiché le staffe confinano e comprimono il calcestruzzo, aumentando l'aderenza. Aumenta così la tensione  $f_{bd}$  e si può ridurre la lunghezza d'ancoraggio.

$\alpha_4$  = coefficiente legato all'uso di barre trasversali saldate come sistema d'ancoraggio

$\alpha_4 = 0,7 \rightarrow$  se non si usa questo sistema, si ignora

$\alpha_5$  = coefficiente legato alla pressione trasversale al piano di spacco (piano parallelo alla barra) lungo la lunghezza di ancoraggio.



Ad es. in un appoggio, è presente un elemento che determina una pressione.

Così stesso vale nel caso di forza concentrata

$$\alpha_5 = 1 - 0,04 p [\text{MPa}]$$

$p_{b,rqd}$  = lunghezza d'ancoraggio necessaria di base

$p_{b,min}$  = è la lunghezza minima di ancoraggio, se non sussistono altre limitazioni, che vale

→ barre tese

$$p_{b,min} \geq \max \{ 0,3 p_{b,rqd}; 10\phi; 100 \text{ mm} \}$$

→ barre compresse

$$p_{b,min} \geq \max \{ 0,6 p_{b,rqd}; 10\phi; 100 \text{ mm} \}$$

Tutti questi parametri sono tabulati, anche se si possono assumere delle ipotesi semplificative x ridurre la complessità del problema

→  $F_{sd}$  : è la tensione dell'armatura che si vuole ancorare e, x semplicità, si può assumere che sia smentita (anche se non è detto che lo sia)

$$F_{sd} = f_y \phi$$

→ eccetto nel caso di sistema di ancoraggio con barre trasversali (dove si usa  $\alpha_4$ ), ci si focalizza solo sul parametro  $\alpha_3$  legato alla forma della barra.

Così la lunghezza d'ancoraggio si può scrivere come

$$p_{bd} = \begin{cases} \alpha_2 p_{b,rqd} \\ \alpha_4 p_{b,rqd} \end{cases}$$

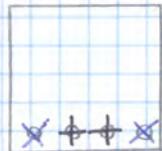
Pertanto, in funzione della classe di calcestruzzo, denta possibile calcolare una volta x tutte la lunghezza d'ancoraggio.

In fatti, il termine  $p_{b,rqd}$  dipende solo dalla tensione  $f_{bd}$  (si è fissato  $F_{sd} = f_y \phi$ ), che dipende solo dalla classe di calcestruzzo e dalle caratteristiche d'aderenza. In questo modo, si può calcolare la lunghezza d'aderenza d'ancoraggio x ogni diametro nel calcestruzzo.

## Valori dei coefficienti $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\alpha_3$ , $\alpha_4$ e $\alpha_5$

Influencing factor	Type of anchorage	Reinforcement bar	
		In tension	In compression
Shape of bars	Straight	$\alpha_1 = 1,0$	$\alpha_1 = 1,0$
	Other than straight (see Figure A (b), (c) and (d))	$\alpha_1 = 0,7$ if $c_d > 3\phi$ otherwise $\alpha_1 = 1,0$ (see Figure B for values of $c_d$ )	$\alpha_1 = 1,0$
Concrete cover	Straight	$\alpha_2 = 1 - 0,15 (c_d - \phi)/\phi$ $\geq 0,7$ $\leq 1,0$	$\alpha_2 = 1,0$
	Other than straight (see Figure A (b), (c) and (d))	$\alpha_2 = 1 - 0,15 (c_d - 3\phi)/\phi$ $\geq 0,7$ $\leq 1,0$ (see Figure B for values of $c_d$ )	$\alpha_2 = 1,0$
Confinement by transverse reinforcement not welded to main reinforcement	All types	$\alpha_3 = 1 - K_A$ $\geq 0,7$ $\leq 1,0$	$\alpha_3 = 1,0$

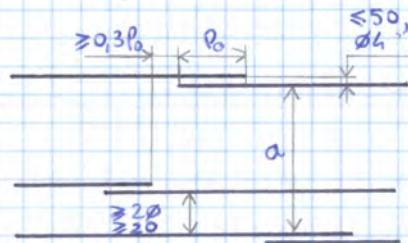
→ Se in una singola sezione si sovrappongono più barre, bisogna far sì che la sovrapposizione agisca in modo simmetrico.



Se ci sono solo 2 barre, bisogna rispettare solo la prima raccomandazione -

Se ci sono 6 barre, queste sono sovrapposte a coppie in una e in un'altra sezione, mantenendo la simmetria. In questo modo, in una sezione si sovrappone solo il 50% dei ferri e si rispetta la 2^ raccomandazione.

→ le barre sovrapposte devono essere vicine in modo da limitare il cammino dei campi di compressione (tendenzialmente, devono essere attaccate)



In parti colari, la distanza trasversale netta deve essere minima

$$d_t, \text{netta} < 4\phi, 50 \text{ mm}$$

Se supera questo valore, si incrementa la lunghezza di sovrapposizione di una quantità pari al superamento dello spazio libero rispetto al minimo tra  $4\phi$  e 50 mm.

→ La distanza longitudinale tra le sovrapposizioni adiacenti sfalsate, x evitare che cadano tutte in un'unica sezione, deve essere superiore a  $0,3P_0$ .

Inoltre, se le sovrapposizioni sono adiacenti (cioè ci sono coppie di barre affiancate), tra esse è richiesta una distanza trasversale netta superiore a  $2\phi$  e 20 mm.

Detto ciò, si calcola la lunghezza di sovrapposizione  $P_0$ , che dipende dalla lunghezza di ancoraggio necessaria di base.

$$P_0 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 P_{b, \text{req}} \geq P_{0, \text{min}}$$

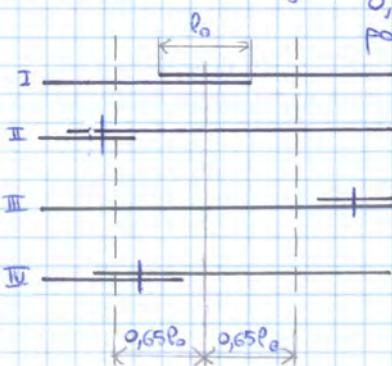
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  e  $\alpha_5$  sono gli stessi coefficienti definiti x la lunghezza di ancoraggio. Nel caso di  $\alpha_3$ , che indica l'effetto delle barre trasversali, si raccomanda di porre

$$\sum A_{st, \text{min}} = 1,0 A_s \frac{F_{sd}}{F_{yd}} \quad A_s = \text{area della singola barra sovrapposta}$$

$\alpha_6$ : si calcola come

$$\alpha_6 = \left( \frac{P_1}{25} \right)^{0,5}, \quad 1,0 \leq \alpha_6 \leq 1,5$$

$P_1$  = percentuale di armatura sovrapposta entro la distanza  $0,65P_0$ , calcolata a partire dal centro della lunghezza di sovrapposizione.



In altri termini, ci si pone al centro della lunghezza di sovrapposizione e si valuta quante armature si sovrappongono x una lunghezza superiore a  $0,65P_0$ . In questo caso, si sovrappone il 50% delle armature (I e IV) e dunque

$$\rho = 50\%$$

## 7 Armature minime:

la loro presenza serve a garantire la validità dei modelli di calcolo x gli elementi soggetti a prevalente compressione (es. pilastri) e gli elementi soggetti a prevalente flessione (es. travi).

### → ELEMENTI SOGGETTI A PREVALENTE COMPRESSIONE (es. pilastri):

si definiscono un diametro e un'area minima e massima x l'ARMATURA LONGITUDINALE.

$$\phi_{min} = 8 \text{ mm}$$

$$A_{s,min} = \max \left( \frac{0,10 N_{sd}}{f_y d}; 0,002 A_c \right)$$

$$A_{s,max} = 0,05 A_c \quad \rightarrow \text{il limite è portato a } 0,08 A_c \text{ nelle zone di sovrapposizione}$$

Occorre poi almeno una barra x spigolo (6 barre se la sezione è circolare)

Passando all'ARMATURA TRASVERSALE, si richiede

$$\phi_{min} = \max \left( 6 \text{ mm}; \frac{\phi_{long}}{4} \right)$$

$$S_{cl, tmax} \leq \min \left( 20 \phi_{long}; b_{min}; 400 \text{ mm} \right)$$

Il vincolo sull'interasse si giustifica osservando che, se il pilastro è compresso, si rischia l'instabilità dell'armatura e la conseguente espulsione del coprifero. Pertanto, indipendentemente dal valore del taglio, si collegano le barre con staffe x impedire questo fenomeno.

Tra l'altro, l'interasse è limitato ulteriormente da un fattore 0,6

→ in prossimità delle giunzioni di sovrapposizione, se il diametro massimo delle barre è limitato a 16 mm e ci sono almeno 3 barre

→ agli estremi delle colonne, x un tratto pari alla dimensione massima della sezione<sup>v</sup> del pilastro.

In realtà, conviene ridurre di un fattore 0,5, in modo da avere un passo che è sempre multiplo di qualcosa.

In particolare, tipicamente si dimezzano 2 o 3 campi di staffe.

### → ELEMENTI SOGGETTI A PREVALENTE FLESSIONE (es. travi):

L'area minima delle barre longitudinali vale

$$A_{s,min} = 0,25 \frac{f_{ckm}}{f_y k} b + d \geq 0,0013 b + d$$

$b +$  = larghezza media della zona tesa

In base alla classe del calcestruzzo, può comandare il primo o il secondo termine (in genere, comanda il secondo).

Nel caso che l'area dell'armatura sia inferiore al valore minimo, la sezione non è più studiata come sezione in cemento armato, bensì come sezione in solo calcestruzzo.

Pertanto, occorre mettere una quantità maggiore di armatura, in modo da poter considerare la sezione come armata.

Passando dall'ARMATURA DI TAGLIO x le travi, si richiede che almeno il 50% del taglio sia assorbito con staffe, mentre il resto può essere assorbito con altri sistemi. In questo ambito, si assume che il 100% del taglio sia assorbito dalle staffe.

Esistono più limitazioni:

→ inclinazione

$$\alpha = 45^\circ \div 90^\circ$$

→ area minima da inserire (se  $V_{sd} < V_{Rd, c}$  - eccetto elementi secondari)

$$f_w = \frac{0,08 \sqrt{f_{ck}}}{f_y k}$$

$$n_0 f_s = \frac{A_{sw}}{s_{bw} s_{ind}}$$

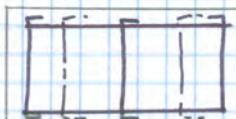
→ interasse in direzione longitudinale

$$s \leq 0,75 d (1 + \cotan \alpha)$$

→ interasse in direzione trasversale

$$s_{t,max} = 0,75 d \leq 600 \text{ mm}$$

### OSSERVAZIONE



Si consideri ad es. una solletta con una trave secondaria che collega i pilastri nella direzione parallela ai travetti.  
Le grandezze sono

$$d = 20 \text{ cm} \Rightarrow s \leq 0,75 d \approx 15 \text{ cm}$$

Siccome sicuramente si inseriscono staffe con passo di 15 cm in direzione longitudinale, d'altra parte in direzione longitudinale occorrebbe mettere molti bracci.

Questi però non sono fondamentali (è una trave secondaria) e dunque si può assumere

$$s_{t,max} = 600 \text{ mm} = 60 \text{ cm}$$

e mettere solo un braccio intermedio

Nel caso di ARMATURA A TORSIONE (x torsione di equilibrio), si utilizzano staffe chiuse e ancorate per mezzo di ganci piegati a  $135^\circ$  all'interno del nucleo (anziché a  $90^\circ$ ) o mediante sovrapposizione su tutta la lunghezza. Se c'è un ferro continuo, in alternativa si può usare una staffa aperta e garantire la chiusura con il ferro superiore. Occorre rispettare le seguenti indicazioni:

→ interasse

$$s \leq \frac{u_k}{8}$$

$u_k$  = lunghezza della lama media

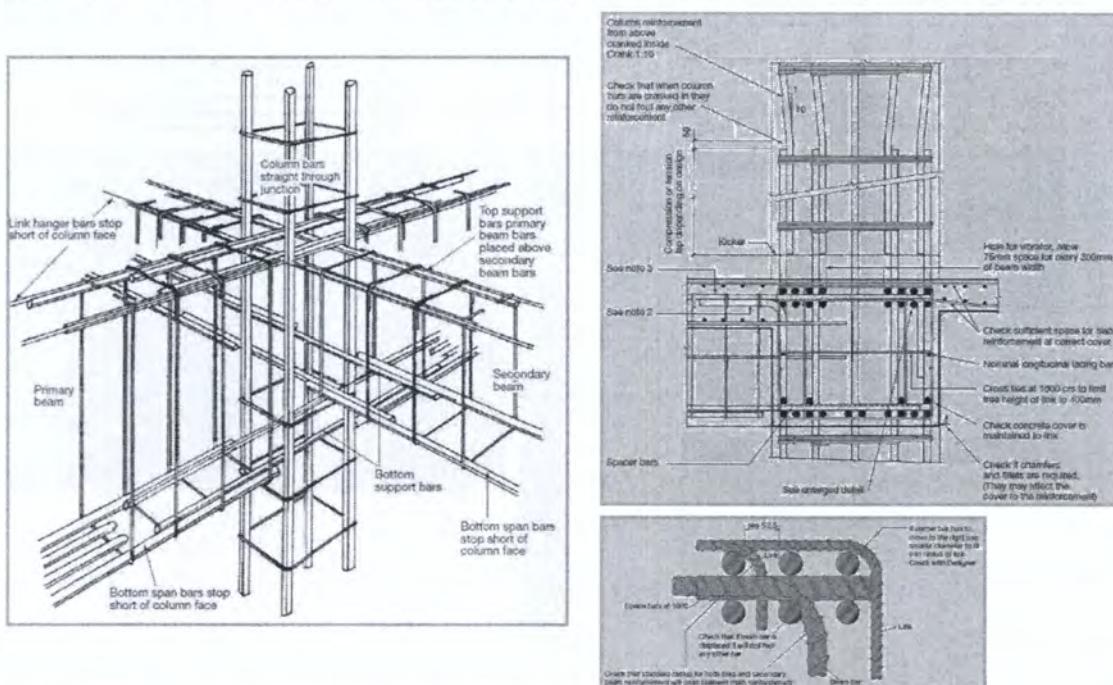
→ inclinazione

$$\alpha = 90^\circ$$

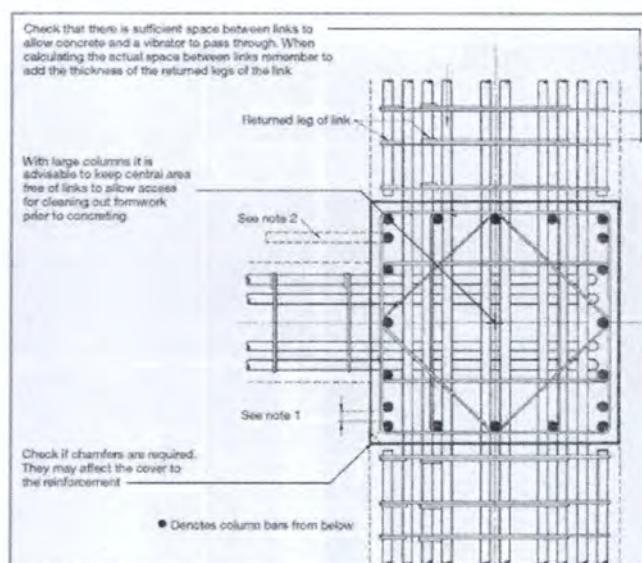
→ le barre longitudinali devono essere disposte in ogni angolo, a una distanza inferiore a 300 mm.

### Disposizioni costruttive

#### Particolari di armature: intersezione colonna interna – travi princ. / second.



### Disposizioni costruttive



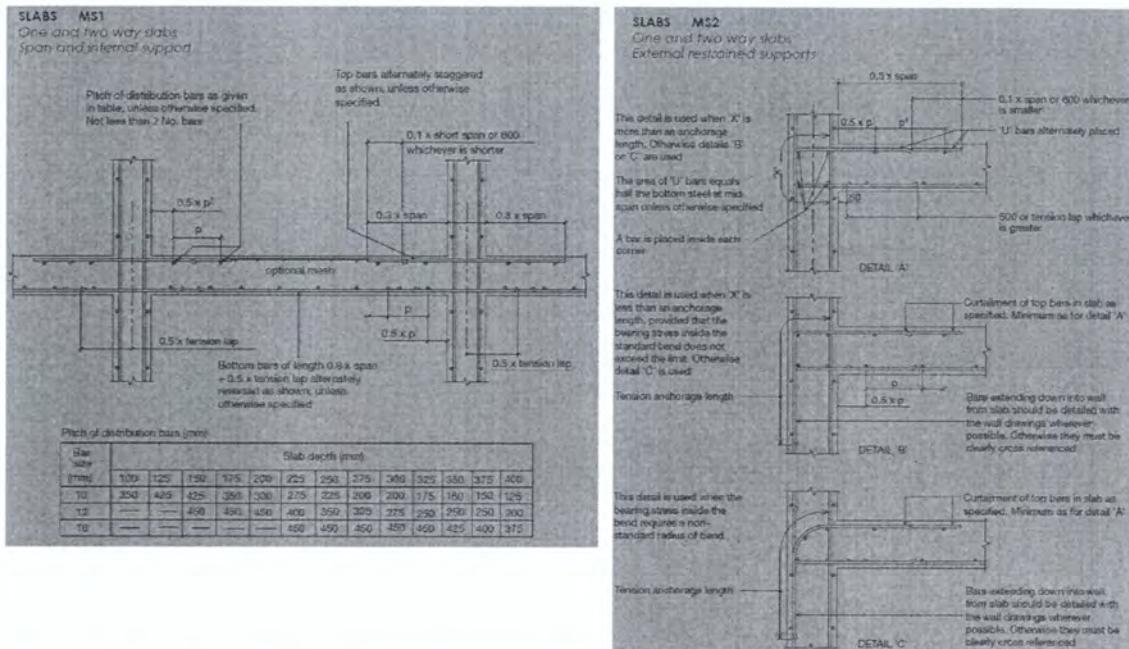
1 Every column bar must be retained by a link except where the distance between column bars is 150mm or less, in which case every other bar should be retained by a link.

2 Where column reinforcement is bent-out, e.g. top lift of column, the position should be clearly shown in order to maintain the correct concrete cover and clearance for slab and beam reinforcement.

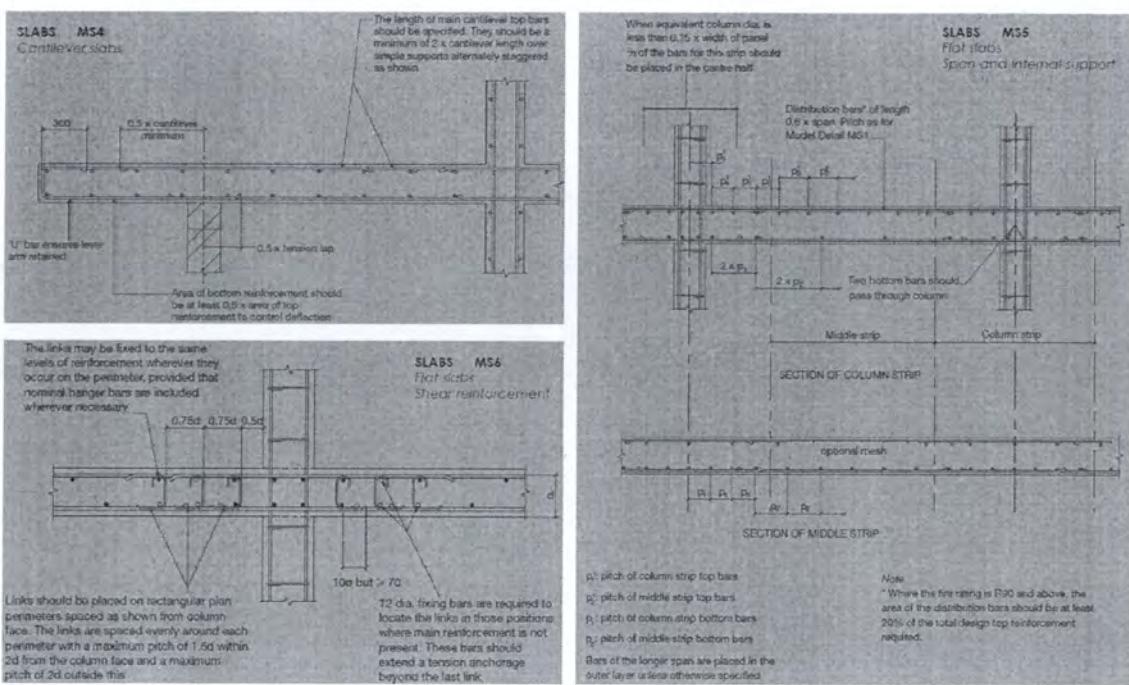
3 Where the secondary-beam reinforcement has increased top cover check that the resulting reduction in lever arm is satisfactory (see also 5.15).

## Disposizioni costruttive

### Particolari di armature: slabs

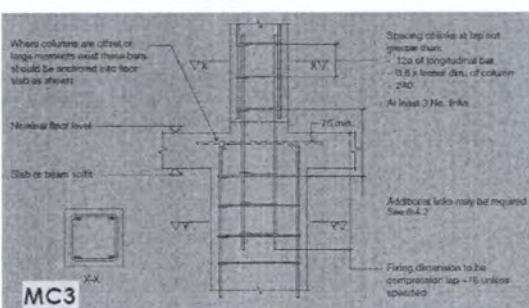
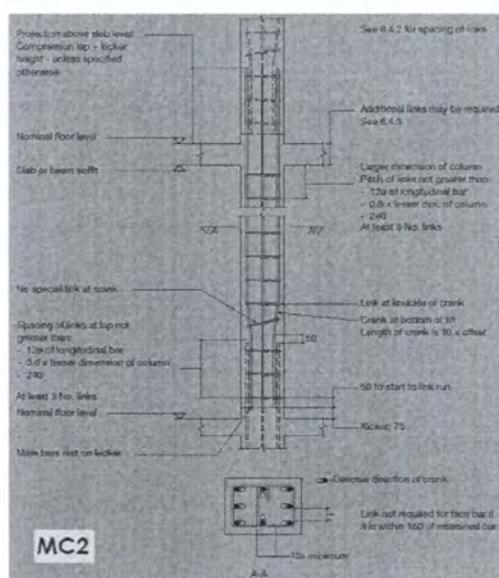
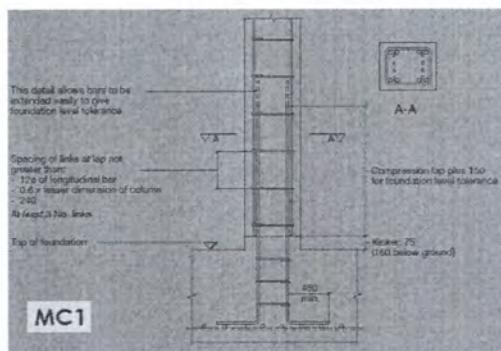


## Disposizioni costruttive



### Disposizioni costruttive

#### Particolari di armature: colonne

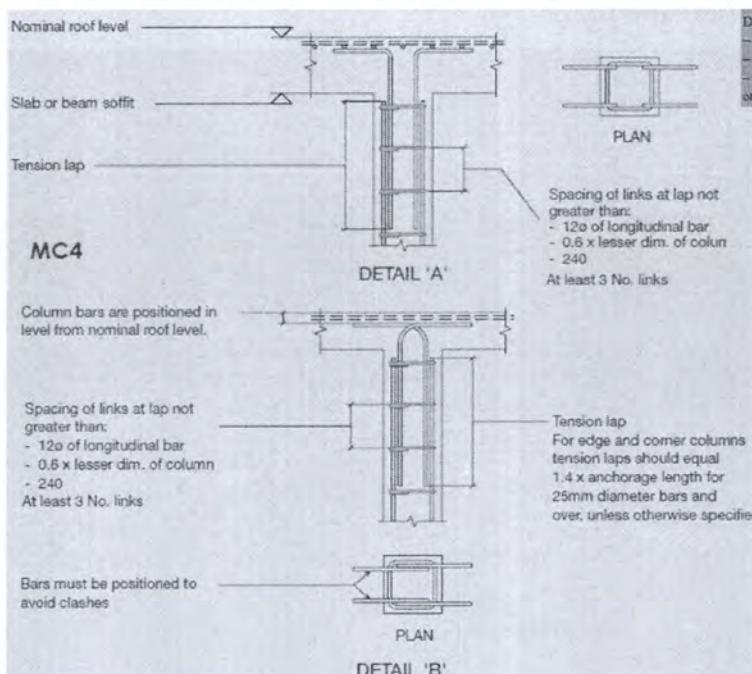


POLITECNICO  
DI TORINO  
DISEG

**Luca GIORDANO**  
**Teoria e Progetto delle Strutture in cemento armato e cemento armato precompresso**

31

### Disposizioni costruttive



POLITECNICO  
DI TORINO  
DISEG

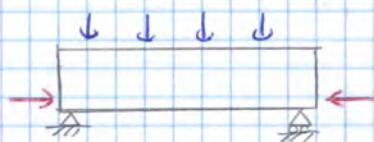
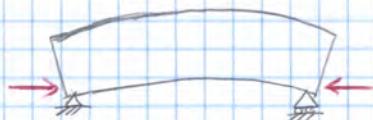
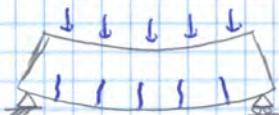
**Luca GIORDANO**  
**Teoria e Progetto delle Strutture in cemento armato e cemento armato precompresso**

32

## STRUTTURE IN CEMENTO ARMATO PRECOMPRESSO

### 1 Precompressione:

essa consiste in un particolare stato tensionale e deformativo artificialemente indotto nella struttura x migliorare il comportamento strutturale.  
Di fatto, la precompressione introduce uno stato tensionale opposto rispetto a quello cui la struttura è soggetta x effetto dei carichi esterni.



Ad es., una trave appoggiata soggetta a un carico verticale tende a fessurarsi in esercizio in un certo modo, con conseguente riduzione di rigidità, perdita di durabilità, etc.

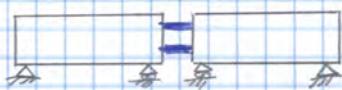
Se prima di applicare il carico si riesce a introdurre ~~verso l'interno~~ all'interno della struttura uno stato di compressione, si può immaginare che la somma delle tensioni di trazione applicate e delle tensioni di compressione indotte artificialmente sia inferiore alla resistenza a trazione o affrettura portata uno stato globale di compressione.  
In questo modo, non nascono più fessure in esercizio.

L'ideale è andare verso l'annullamento delle tensioni di trazione e, infatti, nella precompressione si applica una forza eccentrica che genera un momento opposto al momento dovuto di carichi esterni. Così la somma degli stati tensionali è minore della resistenza a trazione del calcestruzzo.

### 2 MODALITÀ DI APPLICAZIONE DELLA PRECOMPRESSIONE

L'obiettivo consiste nell'indurre nella struttura delle tensioni di segno opposto a quelle cui è soggetta la struttura per effetto del carico applicato.  
Questo è fatto tramite la precompressione e questa si può eseguire con diversi sistemi.

→ spostamento impresso ai vincoli:



Il sistema fu introdotto da Fraissinet che, invece di realizzare una struttura a 2 campate in semplice appoggio in cui il vincolo fisso è posto su un lato, realizzò 2 campate separate con 2 vincoli mobili che si guardano e, nello spazio compreso tra le due basi, si inserì un martinetto.

In esso si pompa dell'olio e, allungandosi, induce in compressione la trave.

⇒ La precompressione è ottenuta mediante un MARTINETTO, con il quale si è imposta una tensione uniforme  $F_c$ .

In realtà, monitorando il comportamento della struttura, si osserva la formazione di fessure. Allora egli aggiunse pressione e dunque aggiunse sforzo normale e le fessure furono richiate.

Il problema si ripeté, come anche il conseguente aumento di precompressione, fino a che la situazione non si stabilizzò e non si aprirono più fessure.

In seguito, egli studiò cosa accadeva a questa struttura in calcestruzzo e scoprì la viscosità:

mediante il martinetto, si è imposto alla trave uno spostamento, il quale ~~si~~ ha determinato un certo stato tensionale.  
Questo stato tensionale è destinato a ridursi nel tempo.

→ non si possono usare gli acciai da precompressione per le strutture in cemento armato ordinario, altrimenti diventa condizionante lo SLE e, tra l'altro, l'armatura non lavora allo sverramento e dunque il materiale ha comportamento fragile.

Oggi gli acciai da precompressione sono presenti in commercio in 3 forme

→ **fili**, che sono barre lisce con diametro di  $2 \div 3$  mm.

→ **treffoli**, che sono intrecci di fili e sono venduti in bobine.

I treffoli possono essere di 2 tipi



→ TREPOLI A 7 FILI, costituiti da un filo centrale con 6 fili ~~attorno~~ attorno

→ TREPOLI A 6 FILI, senza il filo centrale

Le aree tipo sono  $139 \text{ mm}^2$  (treffolo standard),  $150 \text{ mm}^2$  (treffolo super) e  $165 \text{ mm}^2$  (treffolo compatto)

Spesso i treffoli sono accoppiati in modo da formare barre da precompressione.

→ **barre** (simili a quelle usate nel cemento armato), con diametri di 32, 36 e 38 mm.

### PRESCRIZIONI SULLE BARRE (Eurocodice 2)

→ le armature da precompressione devono presentare una sensibilità alla corrosione sotto tensione, ossia un **infragilimento da idrogeno**, accettabilmente basso.

Inoltre, quando gli acciai sono soggetti a elevati livelli di tensione, prossimi allo sverramento, essi possono presentare rottura fragile e l'effetto dell'infragilimento da idrogeno.

~~Questo~~

↳ questione metallurgica

→ gli acciai conformi all'Eurocodice sono descritti secondo i valori caratteristici di tensione di rottura  $f_yk$ , tensione di sverramento  $f_{p0,1}, k$  e deformazione ultima  $\epsilon_{uk}$ .

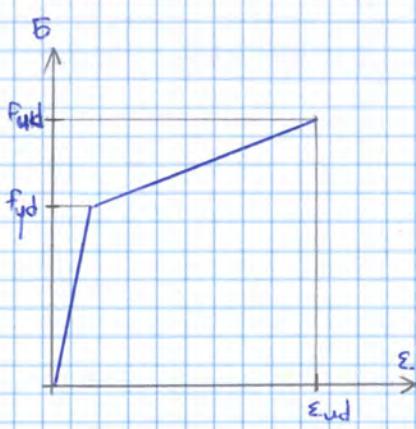
A livello di LEGGE COSTITUTIVA, gli acciai da precompressione non presentano un punto di sverramento specifico ma avvengono un passaggio graduale da elasticità a plasticità.

In questa situazione, si prende ~~la~~ la tensione in corrispondenza della quale, allo scarico, si ottiene una deformazione residua dello 0,1%. Questa tensione di sverramento fittizia si indica con  $f_{p0,1}, k$ .

Nella legge costitutiva di progetto si assume un comportamento di tipo elasto-plastico, caratterizzato da un preciso valore di tensione di sverramento.

→ l'acciaio ha comportamento elasto-lineare fino all'attenzione

$$f_{yd} = \frac{k f_y k}{\gamma_s} = f_{p0,1}, k$$



### 3 Sistemi di precompressione

Quando si progetta la precompressione, questa può essere progettata in modo che essa sia

→ **precompressione integrale:**

essa necessita di una precompressione maggiore e permette di garantire che, sotto il carico di esercizio, non si manifestino tensioni di trazione nella direzione di ~~pre~~ precompressione.

In altri termini, si progetta in modo che la trave lavori tutta allo stato compresso.

→ **precompressione a sezione interamente reagente:**

In essa si possono avere tensioni di trazione nella trave, ma le tensioni di trazione non possono superare in corrispondenza del carico di esercizio, un valore limite ritenuto accettabile di tensione, in genere la resistenza di trazione caratteristica di calcolo.

→ **precompressione parzializzata:**

In questo caso, non si fissano limiti alla tensione di trazione nel calcestruzzo e dunque l'opera può operare in regime fessurato.

L'Eurocodice segue proprio questa impostazione, ossia si limita a impostare un limite all'entità della fessurazione (una cosa dice che questa non debba esserci).

→ spesso però, x semplicità, il calcolo è fatto nelle prime 2 situazioni

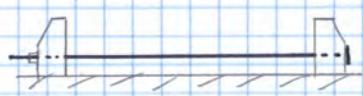
Si nota che, in caso di precompressione a sezione interamente reagente o parzializzata, occorre inserire delle armature aggiuntive ordinarie x soddisfare le verifiche di resistenza ultima e possono essere fuori calcolo.  
Viceversa, nella precompressione integrale, basta l'armatura di precompressione.

### 4 Modalità di applicazione della precompressione

La precompressione può essere introdotta nella struttura con diverse modalità

→ **pre-tensionamento**

Questa tecnica si usa x gli elementi prefabbricati.



In stabilimento si realizzano 2 falle, ossia 2 punti che possono essere considerati fissi.

Si fa poi passare tra le falle un sistema di fili o di trefoli, bloccandolo contro una falla e mantenendolo in tensione attraverso un martinetto posto dall'altra falla.

Affatto a questo sistema si realizza poi la gabbia di armatura tradizionale e si installa un cassero. Da qui, si realizza il getto di calcestruzzo.



Segue la fase di maturazione del calcestruzzo, che può essere ridotta a poche ore mantenendo temperatura e umidità elevate, velocizzando così il processo di fabbricazione.

Una volta completata la maturazione, si taglia il trefolo mediante lama diamantata o fiamma assidra (in questo caso, la resistenza del trefolo nel

In questa operazione, occorre prestare attenzione all'eventuale presenza di difetti nella guaina:

se questa è forata, il suo interno si riempie di calcestruzzo e dunque il ferro non riesce ad acciogliere. In questo caso, si potrebbe demolire localmente la struttura ma questa è un'operazione complessa.



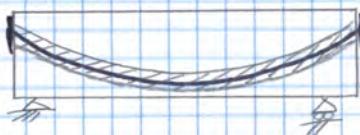
Una volta che è infilato, con un martinetto si tesa il cavo.  
In questo caso, il martinetto fa contrasto sulla struttura stessa, mentre nel pre-tensionamento faceva contrasto su un supporto esterno.

Dopo che il cavo è stato portato alla tensione voluta, esso è bloccato alla struttura attraverso una **testata di ancoraggio**.

Le testate di ancoraggio sono strumenti appositi per fissare il cavo alla struttura e possono essere di due tipologie

→ **TESTATE ATTIVE**: con esse si può teseare direttamente il cavo

→ **TESTATE PASSIVE**: con esse non si può teseare direttamente il cavo e, curiosamente, sono più costose.



In seguito, la guaina è riempita con **BOLACCIA CEMENTIZIA**, ossia un calcestruzzo molto fluido che è iniettato ad alta pressione in modo da occupare tutti i vuoti compresi tra guaina e cavo.

Questa è un'operazione delicata poiché se rimangono dei vuoti o delle sacche d'acqua, l'acciaio dal precompressione non è protetto dall'acqua e, tra l'altro, non si può neanche vedere se c'è questo problema.

Sì può capire che, in questo sistema, la precompressione è inizialmente trasferita mediante le forze applicate alle testate (che sono aree molto piccole) e poi x ADERENZA, grazie all'iniezione della bolaccia che rende solidali armatura e precompressione e calcestruzzo.

Questo sistema è più costoso rispetto alla pre-tensione ma presenta due importanti vantaggi

→ **possibilità di precompressione in sito**:

con il post-tensionamento, è possibile eseguire la precompressione direttamente in opera.

In questo modo, si risolvono i problemi legati al trasporto e si possono realizzare elementi di grosse dimensioni.

→ **possibilità di scelta del tracciato**:

Nel pre-tensionamento, i cavi devono un andamento necessariamente rettilineo. Nel post-tensionamento, siccome si inseriscono delle guaine all'interno dell'elemento prima del getto, si può scegliere un tracciato qualunque.

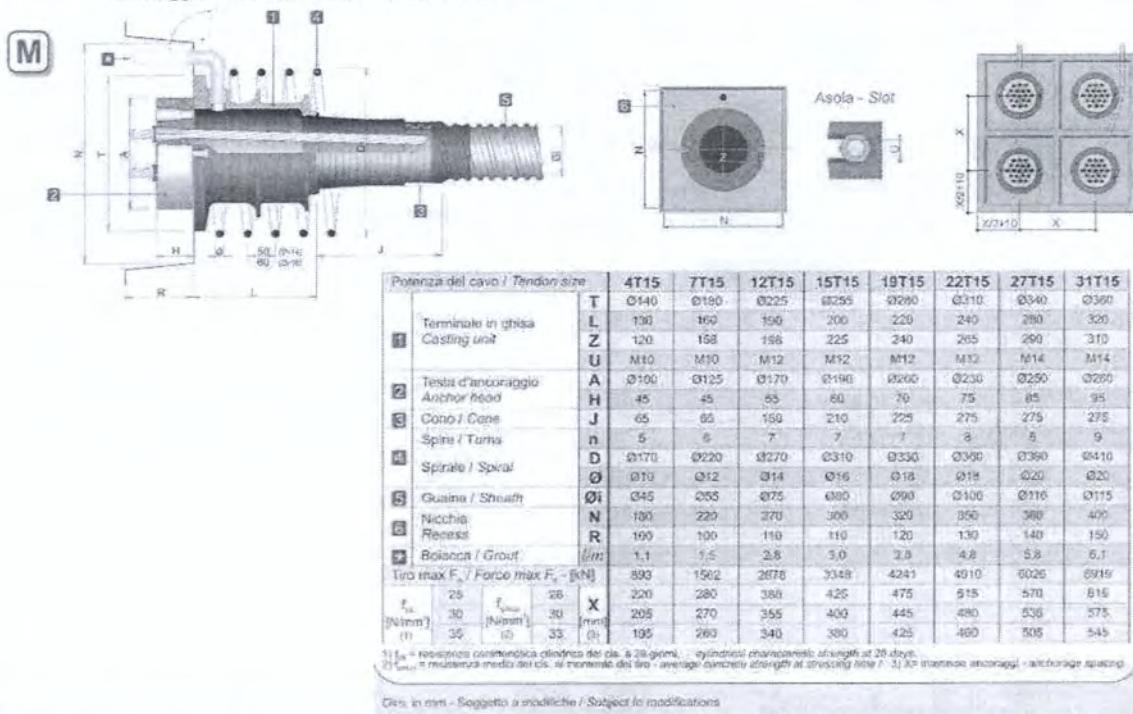


In particolare, nel caso di trave appoggio attivo, si può adottare un percorso parabolico in modo tale che l'eccentricità sia massima al centro, laddove il momento è massimo.

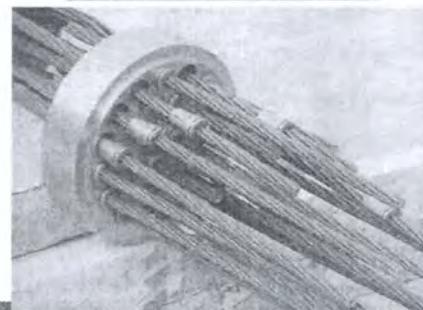
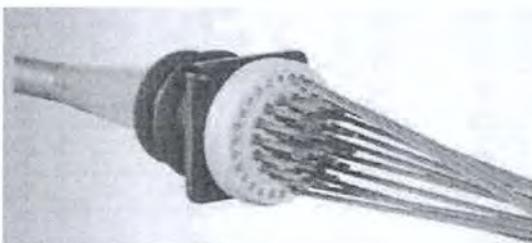
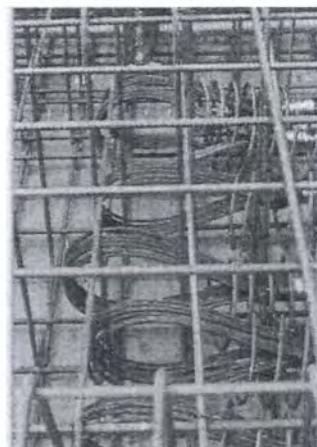
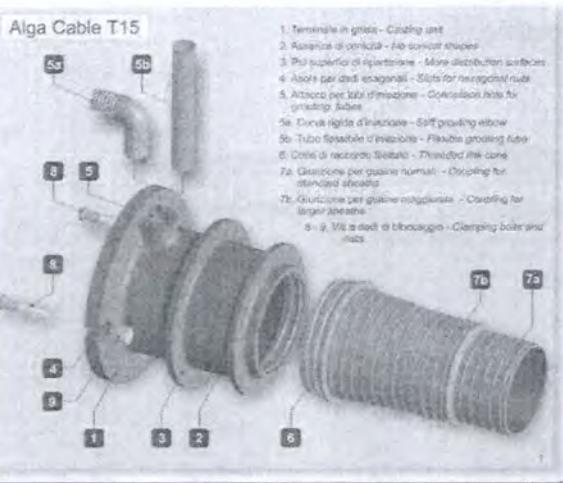
⇒ si può farare la sollecitazione interna mediante l'armatura di precompressione, grazie a un percorso opportuno del cavo perché, in questo modo, si contrasta più facilmente l'azione cui la struttura è soggetta.

### Cemento Armato Precompresso

Ancoraggio a tendere - Stressing anchorage

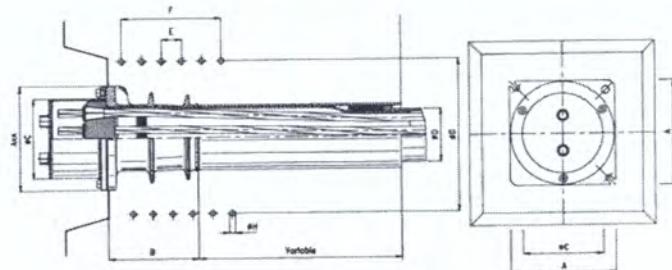
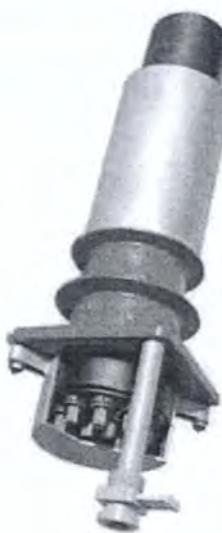


### Cemento Armato Precompresso



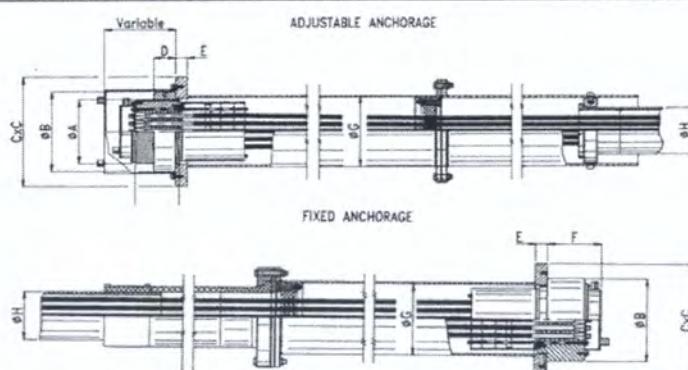
### Cemento Armato Precompresso

#### External post-tensioning



Type	A mm.	B mm.	C mm.	D mm.	E mm.	F mm.	G mm.	H mm.
4 MTAIE 15	150	100	115	63/3.6	50	300	170	10
7 MTAIE 15	180	120	125	75/4.3	60	360	220	12
9 MTAIE 15	200	180	156	90/5.1	60	360	250	12
12 MTAIE 15	220	190	170	110/6.3	60	420	310	14
15 MTAIE 15	250	208	186	110/6.3	65	455	350	14
19 MTAIE 15	280	225	210	125/7.1	70	490	400	16
22 MTAIE 15	300	240	240	140/8.0	70	560	430	16
27 MTAIE 15	325	250	260	160/9.1	80	640	470	20
37 MTAIE 15	400	360	290	180/10.2	80	720	580	20

### Cemento Armato Precompresso



Type	A mm.	B mm.	C mm.	D mm.	E mm.	F mm.	G mm.	H mm.
19 TSR 15	232	292	360x360	70	30	200	254.0/5	140/8.0
31 TSR 15	249	310	420x420	85	45	200	273.0/5	180/10.2
37 TSR 15	270	345	470x470	90	50	200	298.5/5	200/11.4
55 TSR 15	300	400	560x560	105	50	200	323.9/5	225/12.8
61 TSR 15	350	450	600x600	110	60	200	381.0/5	250/14.2
73 TSR 15	370	470	630x630	115	70	200	406.4/5	280/15.9
91 TSR 15	405	505	700x700	120	70	200	457.2/5	315/17.9
109 TSR 15	426	526	750x750	125	80	200	457.2/5	315/17.9
127 TSR 15	470	570	800x800	130	90	200	508.0/5	365/20.1

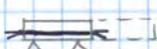
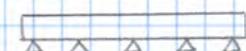
Il termine  $x$  dipende dalla resistenza del calcestruzzo al movimento della tessitura (non necessariamente dopo 28 giorni). Pertanto nella costruzione, è necessario che sia indicata la resistenza che il calcestruzzo deve avere  $\times$  fare la tessitura. Da qui, durante il getto, si ~~mette~~ confezionano più cubetti con il calcestruzzo di getto:

si fanno delle prove di compressione in giorni diversi e, quando la resistenza del cubetto è almeno uguale a quella voluta, si può procedere all'a tessitura.

### CASI PARTI COLARI

→ a volte l'ancoraggio avviene mediante cappio, ossia il cavo è girato a cappio all'estremità ed è riportato all'interno della guaina

→ accoppiamento:



si immagini di realizzare un ponte precompresso molto lungo. In questo caso, non si può fare un unico cassero ma si costruisce  $\times$  fasi. Ad es. si costruisce la prima campata e una porzione della seconda e si precomprime il pezzo. In seguito, si sposta il cassero e si esegue il getto. Occorre però qualcosa  $\times$  accoppiare i cavi

→ gli accoppiatori sono un sistema  $\times$  accoppiare cavi tesati in tempi diversi e presentano una doppia corona di fari

### → precompressione esterna (o " unbonded" - non aderente)

In questo caso, LE ARMATURE DI PRECOMPRESSIONE SONO NON ADERENTI AL CALCESTRUZZO  $\times$  TUTTA LA VITA DI PROGETTO della struttura e, in genere, sono esterne alla sezione in calcestruzzo.

↳ nella pre-tensione, c'era aderenza fin dal getto; nella post-tensione, l'aderenza arriva in un secondo momento



I cavi sono esterni al calcestruzzo e seguono un andamento spezzato, in cui la deviazione è garantita mediante l'inserimento di un deviatore, ossia un elemento in calcestruzzo che garantisce una certa resistenza alla spinta verso l'alto indotta dalla deviazione stessa del cavo (si resiste mediante un setto in calcestruzzo).

A livello tecnologico, il processo è uguale alla precompressione post-tesa, solo che la guaina ora è esterna al calcestruzzo;

una volta che sono inseriti e tesati, i trefoli sono bloccati mediante cure e testate di ancoraggio e si mette poi la boîte (oppure grasso o cerfa, intanto non bisogna guardare l'aderenza)  $\times$  proteggerli dalla corrosione.

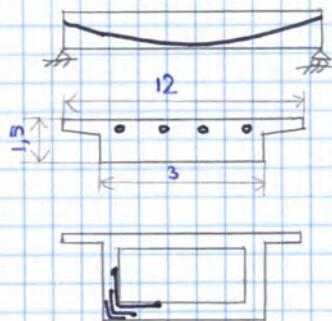
## Criteri generali di progettazione

I Tendenzialmente, la precompressione è individuata x tentativi.  
In particolare, il progetto della precompressione consiste sostanzialmente in:

→ valutazione della forza di precompressione, che si traduce in un certo numero di cavi o trefoli.

→ individuazione del tracciato dei singoli cavi:

se nella pre-tensione i cavi sono rettilinei, nella post-tensione il cavo si trova nella parte inferiore se la sezione è soggetta a momento positivo e nella parte superiore se la sezione è soggetta a momento negativo.  
Se sono poi presenti più cavi affiancati, questi hanno lo stesso andamento.



Si consideri ad es. un ponte che lavora su una luce di 30 m in semplice appoggio, con una sezione avente certe dimensioni e una certa geometria.

Questa sezione è precompresso con cavi aventi lo stesso andamento.

Se il ponte lavora su una luce di 60 m, bisogna mettere una sezione scatolare e ora non si può mettere più una serie di cavi affiancati.  
Pertanto, si adottano tracciati diversi x ciascun cavo, che iniziano e finiscono in punti diversi.

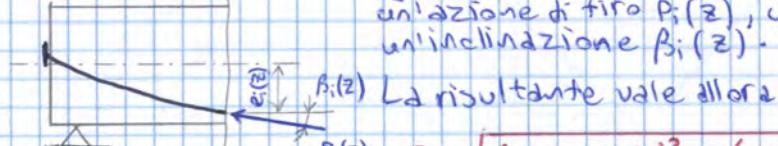
Si può capire che, avendo tanti cavi, il problema diventa complicato da gestire.

Pertanto, almeno x la fase di progetto preliminare, non ci si riferisce tanto ai singoli cavi, bensì al cavo risultante:

questo è un cavo che presenta in ogni sezione un TIRO PARI ALLA RISULTANTE DEI TIROI che si hanno nei singoli cavi e questo tiro è applicato nel baricentro del sistema dei cavi.

In questo modo anziché definire subito tutti i tracciati, si definisce un solo tracciato, si eseguono i calcoli su di esso e, se questo funziona, si spezza il tracciato nei singoli cavi x procedere ai calcoli più raffinati.

Per valutare il tiro del cavo risultante, si immagina un sistema costituito da n cavi aventi un'azione di tiro  $P_i(z)$ , un'eccentricità  $e_i(z)$  e un'inclinazione  $\beta_i(z)$ .



$$P_i(z) = \sqrt{(\sum P_i \cos \beta_i)^2 + (\sum P_i \sin \beta_i)^2}$$

→ si combinano componenti orizzontali e verticali;

Il cavo risultante ha le seguenti eccentricità e inclinazione.

$$\tan \beta = \frac{\sum P_i \sin \beta_i}{\sum P_i \cos \beta_i}$$

$$e = \frac{\sum P_i e_i \cos \beta_i}{\sum P_i \cos \beta_i}$$

→ momento dei singoli cavi  
rispetto al baricentro della sezione

In questo modo, da tanti cavi si passa a un unico cavo.

In questo caso semplice, il progetto della precompressione consiste nel calcolo dell'area dell'armatura da precompressione  $A_p$  e questa deve essere dimensionata in modo che, sia nella struttura scarica sia nella struttura completamente caricata, la tensione di trazione sia inferiore alla resistenza a trazione del calcestruzzo in tutte le sezioni.

Così, in generale, la precompressione è calcolata in modo da soddisfare le verifiche in esercizio, incluse le fasi costruttive.

→ nelle strutture a cavi aderenti, questo ragionamento è completamente valido.

→ nelle strutture a cavi non aderenti, in genere devono essere soddisfatte le verifiche di resistenza, ossia la resistenza ultima deve essere adeguata alle azioni agenti sulla struttura. In realtà, anche qui si progetta allo SLE e si fa tornare la verifica allo SLU mediante l'aggiunta di armatura ordinaria.

### 3 Scelta del tracciato dei cavi

Essa è un'operazione iterativa, in cui si ipotizza un percorso sulla base dell'esperienza, si valuta la sollecitazione su di esso e si controlla se le verifiche in esercizio sono soddisfatte.

Il tracciato dei cavi è condizionato da:

→ schema statico

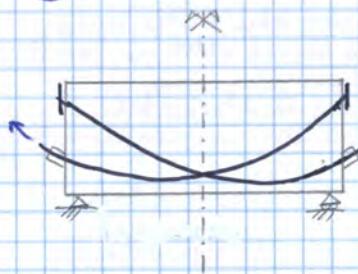
→ modalità costruttive: nelle strutture in cemento armato ordinario, queste non influenzano lo stato di sollecitazione e il progetto della struttura, poiché le sollecitazioni presenti durante la costruzione sono in genere inferiori alle sollecitazioni in esercizio. Pertanto, non occorre eseguire delle verifiche ~~dopo~~ nelle fasi costruttive.

Nelle strutture in cemento armato precompresso, viceversa, è importante il controllo di ciò che accade nelle fasi costruttive. Infatti, l'applicazione della precompressione a una struttura soggetta solo a peso proprio determina la fessurazione nel lato opposto rispetto a quello che si trova in trazione in esercizio.

⇒ si controlla che la tensione sia inferiore alla tensione limite in tutte le fasi.

Il problema della scelta del tracciato dei cavi si pone solo nel caso della post-tensione.

#### I) STRUTTURE ISOSTATICHE



Nella post-tensione in una trave a semplice appoggio, occorre scegliere un tracciato parabolico tale che ci sia la massima eccentricità nell'asse di simmetria e il momento sia nullo nella zona degli estremi (dunque il risultante delle forze deve passare nel baricentro della sezione).

In genere, si usano due testate attive e dunque si tesa da entrambe le parti con un tracciato simmetrico.

In alternativa, si possono usare testate attive e passive alternate.

In quali zone si esegue l'ancoraggio?

Si possono distinguere due casi:

→ se gli appoggi sono vicini agli estremi della trave, conviene eseguire l'ancoraggio nella parte superiore.

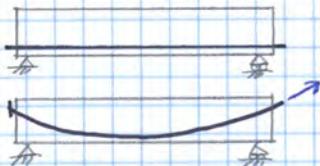
→ se gli appoggi sono lontani dagli estremi della trave, si esegue l'ancoraggio nel baricentro.

## II) STRUTTURE IPERSTATICHE

La precompressione è più complessa nelle strutture iperstatiche.

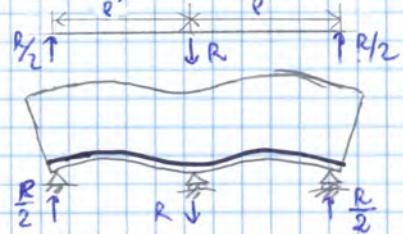
*Note:*

Nel caso di una trave continua, nasce il cosiddetto effetto iperstatico.



Quando si precomprime una trave isostatica, non nasce una reazione, indipendentemente dal tracciato e dallo schema statico. Infatti, la precompressione si può interpretare come una deformazione impressa.

Ciò non vale per le strutture iperstatiche.



Si consideri ad es. una trave continua tensata con un cavo rettilineo, per semplicità. Se non ci fosse il vincolo centrale, la struttura si deformerebbe in un certo modo e si avrebbe inflessione libera.

Quando si inserisce il vincolo centrale, questo impedisce il sollevamento e nasce una reazione R per ripristinare la compatibilità degli spostamenti.

Per equilibrio, se nasce questa reazione, nascono delle reazioni negli altri vincoli.

⇒ nelle strutture isostatiche, le sollecitazioni che nascono dipendono solo dalla forza del cavo, dalla sua inclinazione e dalla sua eccentricità ma non dal tracciato in particolare.

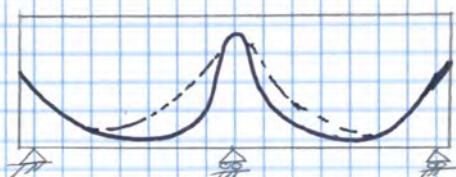
Nelle strutture iperstatiche, nascono delle reazioni che determinano lo sviluppo di sollecitazioni, ossia taglio e momento, con

$$H = \frac{R \cdot 2P}{L}$$

Così, a meno di particolari tracciati dei cani (scelti in modo da non generare sollecitazioni), nelle strutture iperstatiche precompresso nascono sempre delle reazioni per ripristinare la compatibilità e ulteriori sollecitazioni oltre a quelle indotte direttamente dal cavo.

Esiste così un'elevatissima differenza di operatività tra strutture isostatiche e strutture iperstatiche e, in queste ultime, la scelta del tracciato è complessa.

In particolare, l'effetto iperstatico è molto condizionato dalla scelta del TRACCIATO IN CORRISPONDENZA DELL'APPOGGIO CENTRALE



Intuitivamente, si parte con il cavo dal baricentro della sezione per passare alla massima eccentricità in basso e poi salire alla massima eccentricità in corrispondenza dell'appoggio centrale e così via.

L'effetto è molto condizionato dalla controcurvatura, ossia la curvatura in corrispondenza dell'appoggio centrale e si parla di

→ **cavo chiuso**: esso è stretto in corrispondenza dell'appoggio e determina un incremento del momento positivo in corrispondenza dell'appoggio iperstatico

⇒ il cavo chiuso dà un effetto favorevole sull'appoggio di continuità e un effetto sfavorevole in campata.

## Perdite e cadute di tensione

I Una volta noto il tracciato di un cavo, è possibile valutare come variano le tensioni in esso, in funzione dell'ascissa curvilinea lungo il cavo e del tempo.  
Infatti, la tensione non è costante in tutti i punti del cavo e nel tempo.

Dal punto di vista lessicale, in riferimento alla riduzione delle tensioni nel cavo, si parla di

→ **perdite di tensione**: corrispondono alla riduzione che avviene durante la messa in tensione, cioè al tempo  $t=0$ .

→ **cadute di tensione**: corrispondono alla riduzione che avviene in tempi successivi alla messa in tensione, cioè a un tempo  $t>0$ .

## 2 Perdite di tensione

Esistono 3 tipi di perdita di tensione

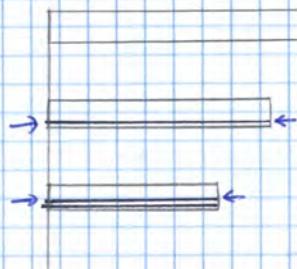
→ **EFFETTO MUTUO** (trascurabile)

→ **ATTRITO** (dominante)

→ **RIENTRO DEGLI ANCORA GGI** (non trascurabile in certe zone della trave)

Queste perdite sono tutte legate alla post-tensione, che prevede tesiature successive, etc.

## 3 Perdite per effetto mutuo



Si immagini di avere più cavi, che sono tesi uno alla volta.

Tensionando il primo cavo, la struttura si accorcia elasticamente per effetto della forza di compressione. In seguito, si ancora il cavo alla struttura.

Si tesa poi il secondo cavo e la struttura si accorcia ulteriormente a causa della nuova compressione.

L'accorciamento elastico della struttura per effetto della tesiatura nel secondo cavo determina l'accorciamento del cavo di prima tesiatura, che si traduce nella riduzione del suo allungamento.

Sapendo che la forza scaricata sulla struttura è uguale e contraria alla forza con cui si è eseguita la tesiatura e che la forza di tesiatura dipende dall'allungamento, allora con la seconda tesiatura si riduce la precompressione (rispetto al valore teorico).

⇒ ogni tesiatura eseguita in fasi successive determina la riduzione dell'allungamento elastico nel cavo, riducendone il tiro.  
Così si avviene una RIDUZIONE DELLA PRECOMPRESSIONE rispetto al valore teorico

La valutazione corretta dell'effetto mutuo è complicata e, in prima approssimazione, visto che il suo effetto è poco importante, si può usare la relazione

$$\Delta P_c = A_p E_{sp} \sum_{j=1}^n \frac{\Delta \epsilon_c(t)}{E_{cm}(t)} \quad \Delta P_c \approx 2 \div 3\%$$

$A_p$  = area del cavo

$\Delta \epsilon_c(t)$  = variazione di tensione indotta nel calcestruzzo dalla tesiatura successiva

$\Delta \epsilon_c/E_{cm}$  = deformazione dei cavi messi dopo

$$P(s+ds) = P(s) + dP(s)$$

Siccome  $ds \rightarrow 0$ , di fatto la variazione di tiro nel cavo coincide con l'attrito che nasce e dunque

$$P(s+ds) = P(s) + dP(s) \approx P(s) + dT(s)$$

Così si ottiene

$$dP(s) = P(s+ds) \Rightarrow P(s) = -\mu P(s) ds$$

Dividendo per il tiro  $P(s)$ , si ottiene l'equazione

$$\frac{dP}{P} = -\mu ds$$

Per ottenere la precompressione, si integra l'equazione

$$\log P(s) = -\mu s + \log C$$

$\alpha(s) =$  esso è la somma dei  $ds$  e rappresenta la variazione angolare che ha il cavo passando da  $s=0$  a  $s$ .  
Siccome  $ds$  non ha segno, questa variazione angolare non tiene conto della concavità del cavo.

Da qui si ottiene

$$P(s) = C e^{-\mu \alpha(s)}$$

Si nota che

$$\alpha = 0 \Rightarrow P(s) = C$$

Dunque il termine  $C$  corrisponde al valore di tiro nel cavo all'inizio dello stesso, ossia è il TIRO AL MARTINETTO  $P_0$ .

$$P(s) = P_0 e^{-\mu \alpha(s)}$$

Secondo questa relazione, se il cavo ha tracciato rettilineo ( $\alpha(s)=0$ ), la precompressione è sempre pari a  $P_0$  e la tensione è costante su tutto il cavo.  
In realtà, sperimentalmente non è così:

infatti, la gudina presenta all'interno del calcestruzzo una certa posizione ~~che~~ ed è fissata con l'aiuto di apposite staffe ma ci sono sempre degli errori costruttivi che fanno sì che il tracciato non sia perfettamente rettilineo.

Per tenere conto di questo, alla deviazione angolare reale si aggiunge una deviazione angolare non intenzionale

$$\alpha_i = ks \quad \rightarrow \text{è proporzionale alla distanza dal martinetto}$$

si ottiene così

$$P(s) = P_0 e^{-\mu [\alpha(s) + ks]}$$

I valori del coefficiente di attrito  $\mu$  assumo per l'EC2 i valori riportati in tabella.

Post-tensione <sup>1)</sup>	Precompressione non aderente			
	Condotto di acciaio non lubrificato	Condotto HDPE non lubrificato	Condotto di acciaio lubrificato	Condotto HDPE lubrificato
Filo laminato a freddo	0.17	0.25	0.14	0.18
Trefolo	0.19	0.24	0.12	0.16
Barra deformata	0.65	—	—	—
Barra lisca tonda	0.33	—	—	—

1) Valori validi per cavi che riempiono circa la metà della guaina

I valori di  $K$  variano nell'intervallo  $0.005 \div 0.01$  rad/m per la posttensione. Nel caso di precompressione esterna le deviazioni non-intenzionali possono essere trascurate.

→ ACCIAIO DA PRECOMPRESSIONE

Trefoli standard  $139 \text{ mm}^2$

Resistenza a trazione caratteristica

$$f_{ptk} = 1860 \text{ MPa}$$

Modulo elastico

$$E_{sp} = 196'000 \text{ MPa}$$

a causa dell'intreccio dei trefoli nel cavo,  
avviene un assottigliamento dei trefoli che  
determina un modulo elastico minore

Tensione di snervamento caratteristica

$$f_{po,1k} = 1660 \text{ MPa}$$

Coefficiente di sicurezza

$$\gamma_s = 1,65$$

Resistenza a trazione di calcolo

$$f_{ptd} = \frac{f_{ptk}}{\gamma_s} = 1'617 \text{ MPa}$$

Tensione di snervamento di calcolo

$$f_{po,1d} = \frac{f_{po,1k}}{\gamma_s} = 1'426 \text{ MPa}$$

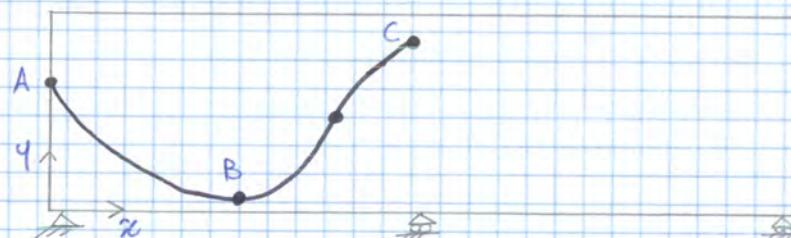
Deformazione ultima caratteristica

$$\varepsilon_{ulk} = 3,5\%$$

Classe di rilassamento

2

## TRACCIATO DEI CAVI



Quando si definisce un cavo, questo deve partire presso il bari centro e, in mezzanina, questo deve arrivare più in basso possibile tenendo conto del copriferro e del fatto che la distanza dall'aria deve essere almeno il diametro della guaina. Tipicamente, l'asse del cavo deve trovarsi ad almeno 1,5 Øguaina dall'aria. In corrispondenza dell'appoggio, il cavo deve risalire più in alto possibile, pur mantenendo una distanza dall'estradossa di almeno 1,5 Øguaina. Da lì in poi, l'andamento è simmetrico.

Per definire il tracciato, sono necessarie 2 curve

→ curva AB

→ curva BC

Sono note alcune informazioni relative a queste curve

→ curva AB

$$y(x=0) = y_A$$

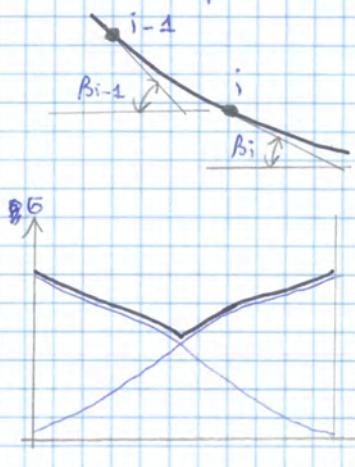
$$y(x=x_B) = y_B$$

$y'(x=x_B) = 0$  perché si vuole che in B il cavo risalgia e dunque questo deve essere un punto a tangente orizzontale

Aveendo 3 condizioni di contorno, al più si può definire una parabola.

$$y = ax^2 + bx + c$$

Il calcolo può essere esteso a molte sezioni.



In questo caso, occorre curare il calcolo della deviazione angolare che, noto  $\alpha_{i-1}$  ( $i-1$  è la sezione precedente a quella di interesse), vale

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} + |\beta_i - \beta_{i-1}|$$

Il risultato è un grafico che restituisce la perdita di tensione lungo lo sviluppo del cavo 1.

Questo è reso da entrambe le parti e dunque si ottengono 2 andamenti da destra a sinistra che sono simmetrici.

Il massimo delle 2 curve dà la saturazione effettiva del cavo:

si nota che, solo per attrito, nel cavo 1 avviene una perdita di tensione sul 17% ( $\Delta x = 35$  m)

Il termine  $P_2(x)$  è dovuto all'attrito e al rientro e si può esprimere in funzione della forza  $P_{2,0}$  nel cavo in corrispondenza del martinetto subito dopo il rientro più la variazione dovuta all'attrito (che è la stessa).

$$P_2(x) = P_{2,0} + P_{2,0} \left[ 1 - e^{-\mu(\alpha+kx)} \right] = P_{2,0} \left[ 2 - e^{-\mu(\alpha+kx)} \right]$$

effetto dell'attrito

La variazione di tiro per effetto del rientro così vale

$$\Delta P(x) = P_{1,0} e^{-\mu(\alpha+kx)} - P_{2,0} \left[ 2 - e^{-\mu(\alpha+kx)} \right]$$

Il termine  $P_{1,0}$  è noto, poiché corrisponde alla forza applicata dal martinetto. Per trovare la forza  $P_{2,0}$ , si può impostare che la variazione di tiro alla lunghezza  $l_p$  sia nullo (il si esaurisce l'effetto del rientro).

$$\Delta P(x = l_p) = 0 \Rightarrow P_{1,0} e^{-\mu(\alpha_{l_p} + k l_p)} = P_{2,0} \left[ 2 - e^{-\mu(\alpha_{l_p} + k l_p)} \right]$$

$$\alpha_{l_p} = \alpha(x = l_p) \quad \text{Deviazione angolare dalla testata a } l_p$$

Per ricavare la forza  $P_{2,0}$ , occorre conoscere  $\alpha_{l_p}$ . Non si sa però a quale lunghezza si annulli l'effetto del rientro dell'ancoraggio.

Siccome questa equazione non è lineare, la si risolve per tentativi:

Si ipotizza un valore  $l_p$  di primo tentativo, in modo da trovare un primo valore  $P_{2,0}$ . Da qui si ricavano  $P_2(x)$  e  $\Delta P(x)$ .

In seguito, mediante integrazione, si ricava un valore di rientro  $\Delta \alpha$ , che è confrontato con quello reale.

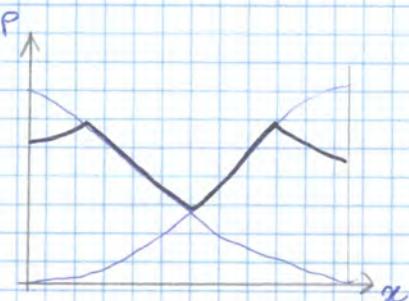
→ se essi coincidono, l'ipotesi è giusta e il problema è risolto.

→ se sono diversi, bisogna assumere un nuovo valore di  $l_p$  e ripetere il tutto.  
Ad es. se il valore ottenuto è superiore al rientro dichiarato, la lunghezza in cui si risente del rientro deve essere inferiore a quella ipotizzata.

Questa procedura però si applica in maniera diversa in funzione del rapporto tra lunghezza  $l_p$  e lunghezza  $L$  del cavo:

il caso tipico corrisponde a

$$l_p < \frac{L}{2}$$



In tal caso si considera dapprima l'andamento delle tensioni indotto dalla sola tensatura da sinistra. Mediante l'incunaggio, avviene poi un rientro dell'ancoraggio che determina una variazione delle tensioni in corrispondenza della zona di ancoraggio.

Quando si tesa dall'altra parte e si incunea, avviene lo stesso fenomeno ma ribaltato.

Si definisce così un andamento globale delle tensioni, in cui gli attriti avvengono in modo indipendente e si possono calcolare separatamente.

Viceversa, nel caso

$$l_p > L/2$$

le incunature non sono più indipendenti e il risultato è complesso.

## Cadute delle tensioni

A partire dall'andamento delle tensioni nel cao nell'istante di tenuta, queste subiscono anche una variazione nel tempo, a causa dei fenomeni reologici (ritiro e flusso del calcestruzzo e rilassamento dell'acciaio).

Per ricavare questa variazione nel tempo, si fa un ragionamento sezonale, ossia si valuta sezione per sezione la caduta di tensione.

Gli elementi che portano a una caduta di tensione sono

→ DEFORMAZIONE PER RITIRO DEL CALCESTRUZZO  $\epsilon_{c,sh}$  (positiva se di accorciamento)

$$\epsilon_{c,sh} = 0,6\%$$

→ DEFORMAZIONE VISCOSA DEL CALCESTRUZZO  $\epsilon_{c,v}$ , che è espressa in funzione della deformazione elastica iniziale attraverso un coefficiente  $\varphi$ , dipendente dall'istante di valutazione della deformazione e l'istante di applicazione del carico (precompressione e peso proprio)

$$\epsilon_{c,v}(t) = \frac{\delta_{c,0}}{E_c} \varphi(t; t_0) \quad \text{con } \varphi_0 \approx 2$$

→ VARIAZIONE  $\delta_t$  DI TENSIONE NELL'ACCIAIO PER EFFETTO DEL RILASSAMENTO, valutata con delle formulazioni legate al tipo di acciaio.

In realtà la relazione della deformazione viscosa è valida solo se la tensione nel calcestruzzo è costante ma questa tensione è figlia di azioni permanenti (peso proprio, permanente portato e precompressione), delle quali la precompressione non è costante nel tempo.

Siccome la tensione nel calcestruzzo  $\sigma_c$  varia nel tempo, la deformazione  $\epsilon_{c,v}$  si può calcolare in modo diverso.

In particolare, interessa conoscere la variazione di deformazione del calcestruzzo al livello del cao poiché, per la planarità della sezione, questa coincide con la deformazione dell'acciaio nel cao.

Questa variazione si può esprimere come somma di 3 contributi.

→ RITIRO  $\epsilon_{c,sh}$ . In teoria dovrebbe essere valutato dalla tenuta in poi ma, per sicurezza, si mette l'intero contributo

→ FLUACCE, il cui effetto è valutato come se la tensione nel calcestruzzo fosse costante (questa è positiva se di compressione)

→ EFFETTO DELLA VARIAZIONE DELLA TENSIONE NEL CALCESTRUZZO, dovuta alla variazione della tensione di precompressione nel tempo.

Il calcolo di questo effetto è complesso e si usa allora un metodo approssimato, detto Age-Adjusted Effective Modulus (AAEM).

Esso calcola l'effetto di deformazione immaginando che la variazione di tensione  $\Delta \sigma_c$  sia tutta applicata all'istante iniziale, dando un contributo

$$\frac{\Delta \sigma_c}{E_c}$$

Siccome questa variazione evolve nel tempo (perché la precompressione evolve nel tempo), si applica un coefficiente riduttivo  $\chi$  che tiene conto che la variazione di tensione è applicata gradualmente nel tempo.

$$\Delta \epsilon_c = \epsilon_{c,sh} + \epsilon_{c,0} \cdot \frac{\delta_{c,0}}{E_c} + \Delta \sigma_c \left[ \frac{1}{E_c} + \chi \frac{\varphi(t; t_0)}{E_c} \right]$$

## Es (CALCOLO)

Nella trave già introdotta, si vuole valutare la caduta di precompressione dei cavi 1 in corrispondenza della sezione di ... continuità, per effetto della combinazione di ritiro, viscosità e rilassamento.

Si utilizza la relazione

$$\Delta \delta_p = \frac{E_s \epsilon_{c,sh} + \alpha \delta_{co} \varphi(t; t_0) + 0,8 \Delta \delta_{ril}}{1 + \alpha \frac{A_p}{A_c} \left( 1 + \frac{A_c Z_{cp,f} Z_{cp,i}}{J_c} \right) (1 + 0,8 \varphi(t; t_0))} \rightarrow \varphi = 0,8$$

(La formula tradizionale con  $Z_{cp}^2$  (valida per un solo cavo), ora presenta il termine

$$Z_{cp,r} \cdot Z_{cp,i}$$

$Z_{cp,r}$  = eccentricità del cavo risultante

$Z_{cp,i}$  = eccentricità del cavo in esame

In questo modo si tiene conto della presenza di più livelli di cavi, ossia infatti, nella dimostrazione, il termine  $Z_{cp}^2$  è prodotto di 2 fattori, un termine  $Z_{cp}$  per calcolare la variazione del momento di precompressione e un termine  $Z_{cp}$  per calcolare la tensione a livello del cavo di interesse.

Se ci sono più livelli di cavi, invece, la variazione di momento flettente dovuta alla variazione di precompressione si calcola in riferimento al cavo di riferimento, per comodità, e alla sua eccentricità  $Z_{cp,r}$ . Per le tensioni, ci si riferisce poi ai singoli cavi e alla relativa eccentricità  $Z_{cp,i}$ .

Si valutano i vari termini

→ modulo elastico dell'acciaio da precompressione

$$E_s = 196\,000 \text{ MPa}$$

→ deformazione di ritiro (da norma)

$$\epsilon_{c,sh} = 2,653 \cdot 10^{-6}$$

→ coefficiente di omogeneizzazione

$$\alpha = \frac{\epsilon_{sp}}{\epsilon_{cum}} = 5,40$$

→ tensione nel calcestruzzo a livello dei cavi 1 nella combinazione quasi permanente al tempo iniziale

$$\delta_{co} = \frac{N_{QP}}{A_c} + \frac{M_{QP}}{J_c} Z_{cp,i}$$

$$N_{QP} = N_G + N_{p,1} + N_{p,2} =$$

$$= (0 + 0) - 4022 - 4169 = -8191 \text{ kN}$$

$$\downarrow \\ G_2 + G_1$$

$$M_{QP} = M_G + M_{p,1} + M_{p,2} =$$

$$= (-3997 - 5359) + 6895 + 3087 = -1374 \text{ kNm}$$

$$\Rightarrow \delta_{co} = 5,36 \text{ MPa}$$

→ tensione elevata perché questo è il cavo più interno ed è soggetto a compressione maggiore

## Analisi degli effetti di precompressione

I La precompressione induce lo sviluppo di tensioni all'interno del calcestruzzo e queste possono essere calcolate attraverso diverse tecniche, la cui convenienza dipende dal tipo di precompressione

→ TEORIA DELLE COAZIONI DI COLONNETTI, efficace nel caso che ci sia perfetta aderenza acciaio-calcestruzzo, ossia nella pre-tensione e, in parte, nella post-tensione.

→ METODO DEI CARICHI EQUIVALENTI, che ha validità generale.

### 2 Teoria delle coazioni di Colonnelli

PRINCIPIO: se si applica a una sezione una deformazione  $\bar{\varepsilon}$  non congruente (cioè non piana su tutta la sezione), la sezione risponde con delle deformazioni elastiche che ripristinano la congruenza.



In altri termini, la sezione sviluppa delle deformazioni elastiche tali che la deformazione totale sia piana e si possa quindi esprimere come

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{el} + \bar{\varepsilon} = \lambda + \mu \gamma$$

$\lambda$  = deformazione al baricentro  $\mu$  = curvatura

Se nasce una deformazione elastica, nascono anche delle tensioni

$$\sigma = E \varepsilon_{el}$$

Nel caso della pre-tensione, l'applicazione della deformazione  $\bar{\varepsilon}$  non congruente è dovuta all'accordiamento dei cavi (non avviene tutt'attorno alla sezione, ma solo al livello del singolo cavo).

Per ripristinare la planarità, nascono delle deformazioni elastiche.

Siccome la deformazione totale è piana, per definirla occorrono 2 parametri  $\mu$  e  $\lambda$ .

Per calcolarli, si impone la condizione di equilibrio.

Infatti, la deformazione elastica vale

$$\varepsilon_{el} = \varepsilon_{tot} - \bar{\varepsilon} = \lambda + \mu \gamma - \bar{\varepsilon}$$

La tensione corrispondente è dunque

$$\sigma = E (\lambda + \mu \gamma - \bar{\varepsilon})$$

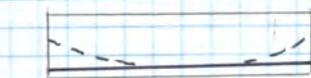
Nota l'espressione delle tensioni, si impone l'equilibrio della sezione e si ricavano i parametri  $\lambda$  e  $\mu$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \sigma dA = 0 \\ \int \sigma y dA = 0 \end{array} \right. \rightarrow \text{non ci sono carichi, bensì solo una deformazione impressa}$$

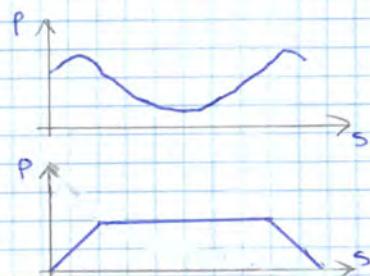
### 3 Metodo dei carichi equivalenti

Il metodo delle coazioni richiede che sussista aderenza fin dall'inizio per garantire la planarità della sezione ma ciò non vale per la post-tensione (non c'è aderenza per tutta la vita).

Il metodo dei carichi equivalenti è valido per qualunque sistema di precompressione e prevede di sostituire la precompressione (i cavi) mediante un sistema di forze equivalenti che generano sulla struttura lo stesso effetto della precompressione sia in termini di spostamento che di sollecitazioni.



È nota la distribuzione delle tensioni di precompressione in un punto, ossia l'andamento delle tensioni lungo il cavo



→ se è post-tesa, si valuta l'andamento per effetto delle perdite e delle cadute di tensioni

→ se è pre-tesa, l'andamento parte da 0 per poi crescere fino a un valore massimo e stabilizzarsi a esso. La tensione scende poi a zero all'estremo opposto.

Questo sono le forze di base sui cavi, da cui si possono valutare le forze equivalenti.

#### PRINCIPI DEL METODO

→ essendo la precompressione un sistema chiuso sulla struttura, le forze equivalenti devono risultare FORZE GLOBALMENTE EQUILIBRATE, cioè la risultante delle forze equivalenti agli effetti della precompressione deve essere nulla.

→ se questo sistema di forze è applicato a una struttura isostatica, non nascono reazioni per effetto della precompressione;

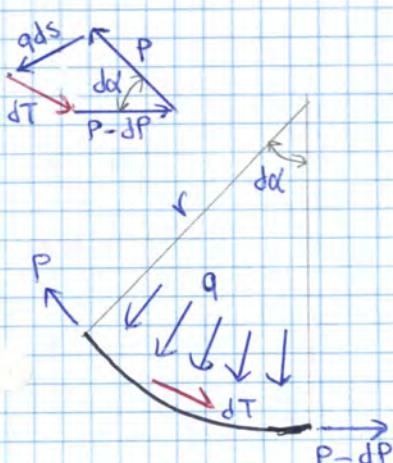
Se questo sistema di forze è applicato a una struttura iperstatica, in genere nascono delle reazioni per compatibilità dei vincoli, ma le reazioni devono essere un sistema autoequilibrato (la loro somma deve essere nulla).

→ coppia di forze

→ le forze equivalenti sono FORZE CONCENTRATE in corrispondenza di TESTATE DI ANCORA/CGO ed eventuali DEVIATORI

→ le forze equivalenti sono FORZE DISTRIBUITE se il cavo ha un PERCORSO CURVILINEO.

Come si valutano le forze equivalenti nel caso di un tracciato curvilineo?



Si consideri un tratto di cavo curvilineo di lunghezza infinitesima  $ds$  e avente una deviazione angolare  $d\theta$ . Questo è soggetto alle forze  $P$  e  $P-dP$ , soprattutto per effetto dell'attrito. Queste due forze  $P$  e  $P-dP$  sono nute.

L'variazione della forza di precompressione si lega all'attrito scambiato con il calcestruzzo e alla pressione  $q$  al contatto cavo-struttura. Se la concavità del cavo è rivolta verso l'alto, essa tende a spingere verso l'alto e dunque la struttura risponde con una forza rivolta verso il basso.

Le forze sono in equilibrio tra di loro e dunque il poligono delle forze è chiuso.

Si assume di poter trascurare l'attrito e dunque il tiro  $P$  è costante sul cavo. Questo è applicato con un'eccentricità  $e$  e un angolo  $\beta$  su entrambi gli estremi.

Il carico equivalente si calcola sapendo che

→ dove il cavo è curvilineo, si attribuisce un carico distribuito che è costante su ogni parabola poiché la curvatura è costante

→ a metà delle campate c'è presente una pressione verso l'alto pari a

$$\frac{8Pf_1}{r_1^2} \circ \frac{8Pf_3}{r_3^2}$$

→ dove la concavità è verso il basso, si genera una pressione verso il basso pari a

$$\frac{8P_2f_2}{r_2^2}$$

per qui  $r \rightarrow \infty \Rightarrow q = 0$

→ dove il cavo è rettilineo, lungo il suo sviluppo non agiscono forze.

→ in corrispondenza degli ancoraggi, c'è applicata una forza concentrata.

Questa è data dalle componenti  $P \cos \beta$  e  $P \sin \beta$ .

Siccome il tiro è eccentrico rispetto all'asse della trave, nasce anche una coppia pari a

$$M = He = P e \cos \beta$$

In questo modo, si ottiene lo schema statico della trave e, risolvendolo, si ottengono spostamenti e caratteristiche della sollecitazione indotte dalla precompressione (quando questa è assunta costante). Siccome la struttura è iperstatica, nascono delle reazioni ma queste sono autoequilibrate.

Come si valuta la forza equivalente in presenza di un deviatore?

Nel caso di una trave con deviatore, nell'ancoraggio sono presenti una forza equivalente orizzontale e verticale e una coppia.

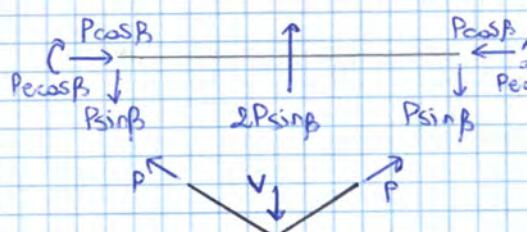
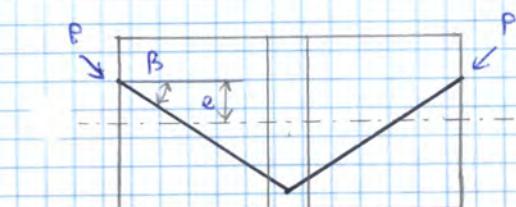
Nei tratti rettilinei, non c'è applicato alcun carico.

Viceversa, in corrispondenza dei deviatori, c'è applicata una forza perché il deviatore  $f_2$  contrasta sul cavo.

Cambiando i due tiri  $P$ , si ottiene una componente verticale. Per equilibrio, il cavo riceve verso il basso una forza  $V$  pari alla somma delle due componenti verticali.

La struttura è allora soggetta a una forza uguale  $P \cos \beta$  e contraria (rivolta verso l'alto), pari a

$$V = 2P \sin \beta$$

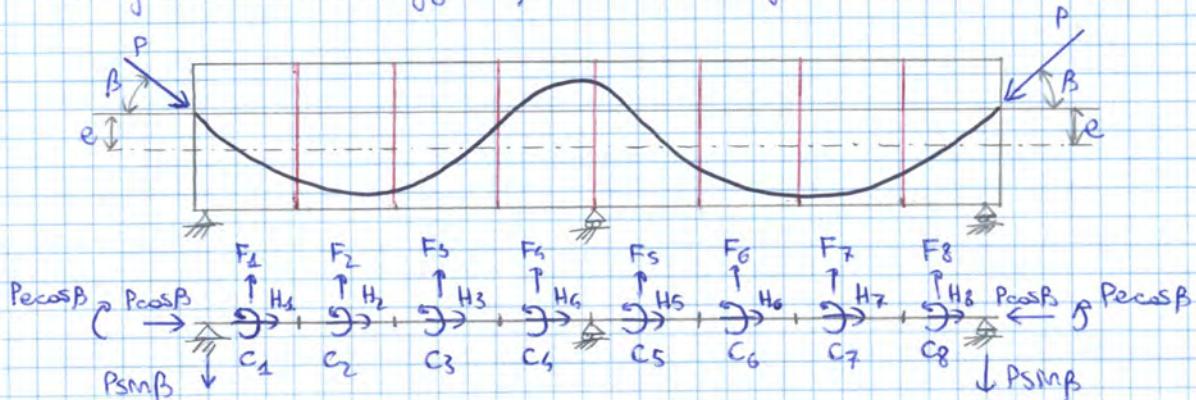


Così, questo metodo prevede di dividere la struttura in un numero adeguato di conci. Per ciascun concio, sono note le forze agenti a sinistra e a destra perché è noto il tracciato dei cavi (dà l'eccentricità e l'inclinazione) e l'andamento della tensione nei cavi.

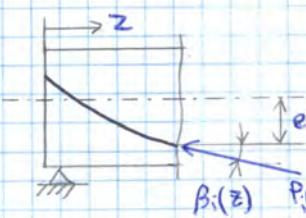
Da qui, mediante le equazioni di equilibrio, si possono valutare le forze

$$F_i \quad H_i \quad C_i$$

cui ogni concio è soggetto, oltre alle forze agli estremi.



### SEMPLIFICAZIONE: STRUTTURA ISOSTATICA



In questo caso, siccome non ci sono tensioni vincolari indotte dalla precompressione, la curva delle pressioni coincide con il tracciato del cavo.

Pertanto, in una generica sezione soggetta alla forza  $P_i(z)$  avente un'inclinazione  $\beta_i$  e un'eccentricità  $e_i$ , le sollecitazioni indotte dal cavo sono date dalle componenti della relativa forza.

$$N = \sum (-P_i \cos \beta_i)$$

$$V = \sum P_i \sin \beta_i$$

$$M = \sum (-P_i \cos \beta_i) e_i$$

### Esempio (CALCOLO)

Nella trave già introdotta, si immagina di considerare l'andamento delle tensioni per effetto dei soli attrito e rientro degli ancoraggi.

Si vuole valutare la sollecitazione indotta dalla precompressione dei cavi ± sulla struttura.

Inizialmente, siccome nella sezione di mezzaria la perdita di precompressione si attesta al 17%, non si può ritenere che la precompressione sia costante sulla struttura.

→ si applica il metodo generale e si divide la trave in un certo numero di conci, in questo caso 20 conci per campata (lunghezza 1,75 m)

Per ciascun estremo dei vari conci è nota la posizione del cavo, come anche l'inclinazione e la forza di precompressione.

Pertanto, si possono applicare le equazioni di equilibrio per ogni concio e definire

→ forze dagli estremi di ancoraggio

→ carichi a metà concio, sulla base delle informazioni geometriche di tracciato.

### Stato limite di esercizio

1 Una volta stabilita la precompressione (quantità di cavi, tracciato, etc.), si possono calcolare le sollecitazioni indotte dalla precompressione.

Queste sono combinate con le sollecitazioni indotte dalle altre azioni (la precompressione può essere vista come un'azione) e da qui si eseguono le verifiche allo SLE e allo SWL.

2 La precompressione è in genere progettata su verifiche di esercizio.

Nella SLU, in genere, si considerano 2 valori caratteristici della precompressione, dati dalla precompressione media al tempo di verifica per un coefficiente  $r$ .

→ VALORE CARATTERISTICO INFERIORE

$$P_{k,\text{inf}} = r_{\text{inf}} P_{m,+}$$

→ VALORE CARATTERISTICO SUPERIORE

$$P_{k,\text{sup}} = r_{\text{sup}} P_{m,+}$$

VALORI DI  $r$

→ armatura pre-tesa o non aderente

$$r_{\text{inf}} = 0,95 \quad r_{\text{sup}} = 1,05$$

→ armatura post-tesa aderente

$$r_{\text{inf}} = 0,90 \quad r_{\text{sup}} = 1,10$$

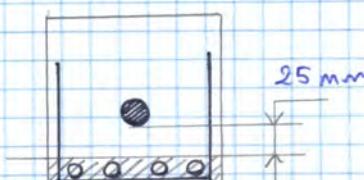
→ misure dirette di precompressione

$$r = 1,0$$

Quest'ultimo è un caso frequente perché esistono controlli in opera volti ad assicurare che la precompressione introdotta in opera sia quella definita in progetto. In particolare, visto l'allungamento delle tensioni prima dell'ancoraggio (interviene solo l'attrito), a questo corrisponde un certo allungamento. Se l'allungamento misurato è uguale al valore teorico, si può considerare direttamente il valore medio di precompressione.

Se nel caso che non si riesca a raggiungere in opera la precompressione di progetto, si prevede di inserire delle guaine di guardia prima del getto. Queste sono inizialmente vuote ma, se serve, in esse si può inserire un'altra cava in modo da aggiungere ulteriore precompressione.

## Cosa significa LIMITARE LA DECOMPRESSIONE?



Significa assicurarsi che ogni parte dell'armatura da precompressione (armatura pre-tesa o guaine) rimanga almeno 25 mm all'interno della zona del calcestruzzo compresso.

→ l'asse neutro deve passare almeno a una distanza di 25 mm dalla guaina.

La valutazione dell'apertura delle fessure avviene secondo la relazione già introdotta per il cemento armato ordinario.

L'unico termine che si usa oggi  $F_{cd}$  è la quantità

$$F_{peff} = \frac{A_s + \beta_1^2 A_p}{A_{c,eff}}$$

L'area  $A_p$  dell'acciaio da precompressione è penalizzata nel calcolo dell'apertura delle fessure da un coefficiente  $\beta_1$  che tiene conto della ridotta aderenza dei trefoli con il calcestruzzo.

L'area  $A_p$  è valutata considerando i cavi che ricadono all'interno di un quadrato di lato 300 mm dalle armature ordinarie, cioè si considerano i cavi interni sufficientemente vicini all'armatura ordinaria.

## 5 Stato limite di deformazione

Nonostante la norma non richiede alle strutture in cemento armato di non essere fessurate, si può comunque notare che tipicamente gran parte del volume non è fessurata.

Pertanto, la valutazione degli spostamenti può essere fatta con la teoria dell'elasticità. Occorre comunque tenere conto del comportamento viscoelastico della struttura e, per fare questo, basti moltiplicare lo spostamento per il coefficiente  $\varphi$ .

## 6 Stato limite di vibrazione

In questo caso, non interessa la vibrazione della struttura, bensì la VIBRAZIONE DEL CAVO DA PRECOMPRESSIONE.

Se il cavo da precompressione è aderente, questo non vibra o, meglio, vibra solo se vibra il calcestruzzo.

Se la precompressione è esterna, il cavo può vibrare e così nascono delle tensioni parassite, così a delle variazioni tensionali difficili da calcolare e che, allungate, provocano rottura per fatica.

→ con cavi esterni, è meglio controllare se esistano azioni che possano determinare vibrazioni

↳ problema tipico dei ponti ferroviari



In particolare, se di mostra che, se i deviatori sono disposti con un passo superiore a 10 m, occorre disporre un dispositivo intermedio di ritegno del cavo.

In alternativa, si potrebbe fare un'analisi dinamica per accettar quali effetti nascono nei cavi, ma ciò è complicato dal punto di vista numerico.

## 2 Verifica allo SW per tensioni normali

Inanzitutto, occorre distinguere 2 effetti della precompressione e

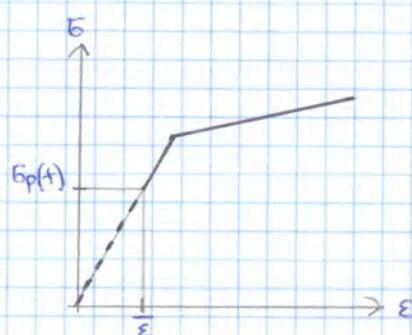
→ effetto agente:

esso è il contributo delle sollecitazioni immagazzinate nella struttura per effetto della pre-deformazione.

Infatti, siccome si è precompresso la struttura, quando questa è scaricata esiste comunque uno stato tensionale nell'acciaio e dunque esiste una QUOTA DI RESISTENZA CHE È GIÀ SFRUTTATA indipendentemente dalle azioni successive. Questo è l'effetto agente.

L'effetto agente si lega alla pre-deformazione  $\bar{\epsilon}$  e dunque dipende solo dalla forza nel cauo, dalla sua posizione e dalla sua inclinazione.

Esso genera le sollecitazioni:



$$\sigma_p = -E A_p \cos \beta$$

$$R_p = N_p \epsilon$$

→ x strutture isostatiche

A livello di legge costitutiva dell'acciaio da precompressione (elasto-plastica con ramo incrudente), al tempo di verifica c'è presente una pre-deformazione  $\bar{\epsilon}$ . La tensione corrispondente è l'effetto agente ed è la quota di resistenza già sfruttata.

→ effetto resistente:

esso si lega alle ulteriori RISORSE DISPONIBILI, al di là di quelle impegnate nella messa in tensione e della successiva caduta.

A seconda del modo in cui si tratta l'effetto agente, esistono 2 modi per fare la verifica alle tensioni normali.

I) La precompressione è vista in parte come effetto agente e in parte come effetto resistente.

Fino alla pre-deformazione  $\bar{\epsilon}$

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sigma_p(t)}{E_{sp}}$$

La precompressione è un effetto agente e si introduce tali sollecitazioni, poiché essa genera nella struttura uno sforzo normale e un momento che si sommano a quelli dati dalle azioni esterne.

$$N_{sd} = \gamma_g N_G + \gamma_p N_p + \gamma_Q (N_{Q,1} + \sum \psi_{Q,j} N_{Q,j})$$

$$M_{sd} = \gamma_g M_G + \gamma_p M_p + \gamma_Q (M_{Q,1} + \sum \psi_{Q,j} M_{Q,j})$$

Nella seconda espressione, il momento  $M_p$  è quello totale, cioè è somma del momento isostatico e del momento iperstatico.  
Si nota che, in genere

→  $N_p$  è di compressione e porta ad aumentare il momento resistente della sezione (v. curve di interazione)

→  $M_p$  è opposto a  $M_G$  e  $M_Q$  e dunque riduce il momento in valore opposto

⇒ l'effetto agente riduce la sollecitazione

Sul diagramma delle tensioni, interviene solo l'incremento di tensione nei caui precompressi, poiché il contributo di  $\bar{\epsilon}_i$  è già stato usato per ridurne le sollecitazioni.  
Questo equivale a dire che la legge costitutiva dell'acciaio precompresso è traslata nel punto

$$(\bar{\epsilon}_i; \bar{\sigma}_{p,i})$$

Per ciascun cau, gli incrementi  $\Delta\sigma_{p,i}$  sono legati alla deformazione  $\epsilon_i$  e  $\bar{\epsilon}_i$  nel punto e sono diversi tra di loro.

Da qui si può calcolare lo sforzo normale  $N_{rd}$ , che è l'integrale delle tensioni

$$\begin{aligned} N_{rd} &= \int_A \bar{\sigma} dA = \\ &= \int_{A_c} \bar{\sigma}_c dA + \sum_i \Delta\sigma_{p,i} A_{p,i} + f_y dA_s \end{aligned}$$

$\downarrow$  acciaio da pre-compressione       $\downarrow$  acciaio ordinario

$$N_{rd} = \int_{A_c} \bar{\sigma}_c dA + \sum_i \Delta\sigma_{p,i} A_{p,i} + f_y dA_s$$

Come di solito, si cerca la configurazione di SLU modificandola in modo iterativo finché non si ottiene

$$N_{rd} = N_{st}$$

Da qui si trova il corrispondente momento resistente, che vale

$$\begin{aligned} M_{rd} &= \int_A \bar{\sigma} y dA = \\ &= \int_A \bar{\sigma}_c y dA + \sum_i \Delta\sigma_{p,i} A_{p,i} y_i + f_y dA_s y_s \\ M_{rd} &= \int_A \bar{\sigma}_c y dA + \sum_i \Delta\sigma_{p,i} A_{p,i} y_i + f_y dA_s y_s \end{aligned}$$

## II) La precompressione è vista come un effetto resistente

Se prima l'effetto agente era messo lato azioni, ora è messo lato resistenze in modo fittozio.

⇒ le tensioni nell'acciaio precompresso sono calcolate considerando la deformazione totale, inclusa la pre-deformazione.

Ciò equivale a dire che non avviene la traslazione della legge costitutiva dell'acciaio precompresso.

Si consideri la struttura di prima nella stessa configurazione allo SLU e con uguale pre-deformazione  $\bar{\epsilon}_i$ .