



Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2089A -

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Aimar Mauro

MATERIA: Geomatica - Prof. Manzino

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

FOTOGRAHMETRIA

1 Fotogrammetria:

essa è una **tecnica di rilevamento metrico tridimensionale**, cioè è una tecnica che consente di determinare metricamente posizione e forma di un oggetto a partire da 2 o più prese fotografiche da punti distinti nello spazio.

↳ non si può partire da più foto fatte nello stesso punto (eccetto se l'oggetto è in moto)

In realtà, non si usano fotografie ma **fotogrammi**, siccome si vuole che il risultato sia metrico.

In fatti, in essi si assume che la geometria di presa corrisponda alla **PROIEZIONE CENTRALE**, ossia gli angoli di ingresso alla camera siano uguali agli angoli che partono dalla camera principale e vanno a impressionare l'immagine.

⇒ il sistema è metrico dal punto di vista angolare (non ci sono distorsioni angolari) ma non nelle lunghezze

Ciò si ottiene usando macchine apposite oppure usando macchine semplici, calcolando le aberrazioni e rimuovendole, in modo da portarsi alle condizioni ideali.

2 **STORIA**: la Fotogrammetria nacque prima della fotografia a livello della teoria, in parte nacque con la teoria delle proiezioni e della prospettiva. In seguito Van Orrel inventò il restitutore che, da 2 immagini, riesce a ottenere una cartografia tridimensionale.

3 PROCESSO LOGICO

→ **MATERIALE OCCORRENTE** → almeno 2 fotogrammi distinti

→ qualche misura sull'oggetto

→ **restitutore**: è uno strumento che da 2 immagini bidimensionali passa a un oggetto tridimensionale.

→ **RISULTATO** → CARTA al tratto, numerica od ortofotocarta (carta che riporta la fotografia con misure - non ha distorsioni e si possono fare direttamente misure metriche)

→ **TERRENO DIGITALE**

→ **GEOMETRIA** x modelli geografici

→ si possono fare modelli tridimensionali

Funzionamento della fotogrammetria

La fotogrammetria si basa sui cosiddetti **Fotogrammi**:

queste non sono semplici fotografie ma sono **fotogrammi metrici**, ossia l'angolo IN INGRESSO E L'ANGOLO IN USCITA DALLA FOTOCAMERA SONO UGUALI.

In questo senso, non si può misurare sull'immagine con il righello ma gli angoli si mantengono (come nel teodolite, dove si posiziona un punto azimuthalmente e zenitalmente).

Non si può misurare con il righello perché, anche se gli angoli si mantengono, si riprendono oggetti aventi punti più vicini (hanno scala maggiore) e con punti più distanti (scala minore) del punto di presa.

Se poi interessa avere una cartografia e dunque si proietta sul piano tangente (l'approssimazione è buona nella planimetria entro i 15 km), di fatto nel fotogramma si proiettano i punti ad es. AA in A" e E su E". Se però si costruisce la cartografia sul campo con uno scalimetro, invece di A" si avrebbe A'. Pertanto, eccetto nel punto nadirale, ci sono delle aberrazioni nella posizione planimetrica. In questo senso, si può parlare di **scala media del fotogramma**, in cui si considera un piano medio e si ha

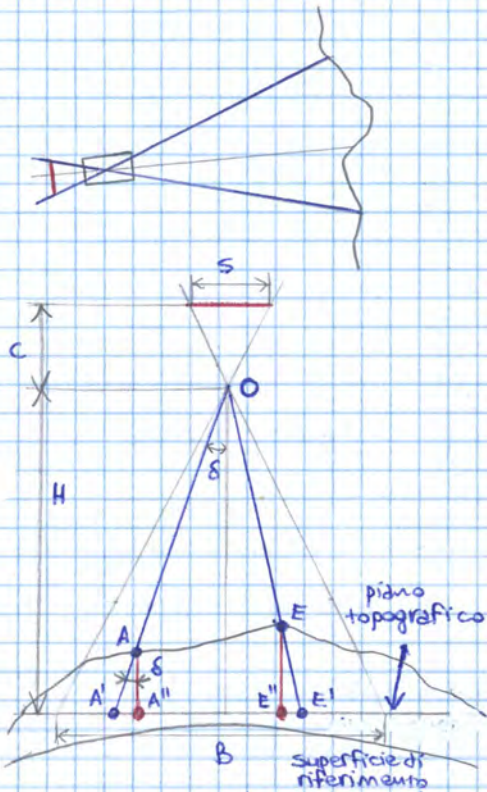
$$\frac{S}{B} \cdot \frac{1}{n} = \frac{C}{H}$$

S = dimensione del fotogramma (dimensione nella foto) } $\Rightarrow \frac{S}{B} = \text{SCALA MEDIA}$
 B = abbracciamento del terreno (dimensione reale)
 C = distanza focale
 H = quota relativa media del volo
 n = FATTORE DI SCALA MEDIA

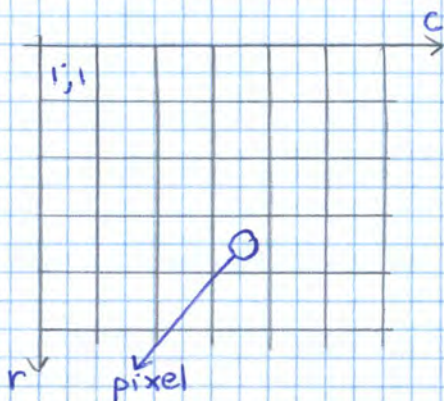
Dunque la scala media del fotogramma è anche rapporto tra focale e quota media del volo.

Si parla però di scala "media" perché i punti più vicini sono a scala più grande e i più lontani a scala più piccola.

PROPRIETÀ → l'immagine si può ottenere anche con fotocamere semplici e, x ottenere il fotogramma, la si **CONTRADEFORMA**.
 In altri termini, si calcolano le aberrazioni e poi le si rimuovono.



3 La conversione avviene mediante il **restitutore**



Esso è un sistema che consente di partire da 2 fotogrammi. Questi, digitalmente, sono 2 matrici aventi un certo numero di righe e di colonne in cui gli elementi sono i pixels. I pixels possono essere in

→ scale di grigio

→ Rosso - Giallo - Blu (toni di colore)

A partire da queste matrici, il restitutore restituisce la tridimensionalità dell'oggetto. Ciò avviene a patto di inserire alcune informazioni

→ dove sono collocati nello spazio i 2 fotogrammi? Questo si dice **orientamento esterno** che implica la conoscenza di

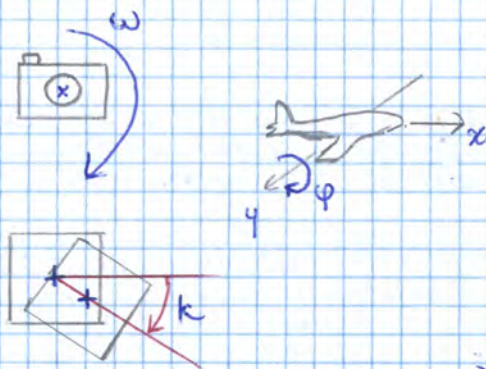
→ POSIZIONE dei 2 punti di presa

→ ANGOLO DI ASSETTO delle fotocamere. Detta α la direzione di volo o l'asse di presa, si parla di

→ **rollio** ω = rotazione attorno all'asse x

→ **beccheggio** φ = rotazione attorno all'asse y , in direzione perpendicolare a x

→ **sbandamento** k = è l'angolo che ha la fotocamera se rivolta più a questo o a est della direzione di volo.



→ quali sono le caratteristiche della macchina di presa?

La loro conoscenza si dice **orientamento interno**, che è la ricostruzione geometrica dell'interno della camera fotogrammetrica.

Numericamente, occorre conoscere la focale, la posizione del PUNTO PRINCIPALE nella matrice (cioè il piede del punto di presa sul piano della matrice) espressa secondo coordinate in pixels ed eventuali distorsioni.

Da qui, note le posizioni dei punti P' e P'' , si costruiscono le rette omologhe. La loro intersezione darà le coordinate Est E , Nord N e quota Q del punto P .

Qualora interessi solo la scala e non la sua posizione, l'intersezione delle rette omologhe avviene anche se si conosce la posizione relativa del II fotogramma rispetto al primo. Dopo di che, l'insieme dei 2 fotogrammi è ruotato nello spazio x essere sistemato nella posizione corretta.

Ora il limite è meno stringente e perché è semplice muoversi dritti.

In base a queste indicazioni, si esegue un progetto del rilievo (sia x un oggetto, sia x un territorio).

5 Precisione dei fotogrammi:

È chiaro che il rilievo debba avere una certa precisione. Come si è visto, la precisione dipende dalla scala media del fotogramma e, in particolare, dal rapporto base-distanza.

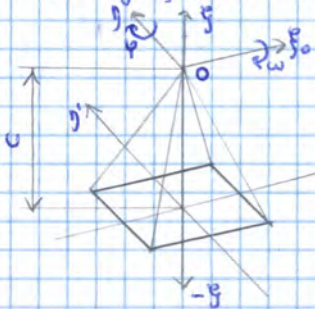
Ad es., avendo 2 occhi posti a distanza molto più grande rispetto alla distanza interpupillare si possono valutare sia dal punto di vista qualitativo che quantitativo le 3 dimensioni anche a grandi distanze.

Ragionando sulla cartografia, nei fotogrammi si ha un rapporto scala fotogramma - scala della carta non lineare

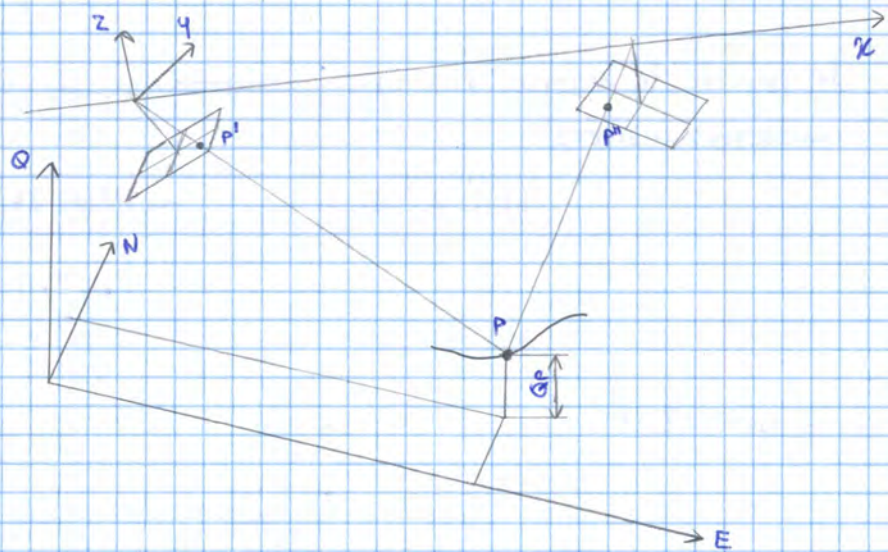
	$n = \frac{1}{SC_{carta}}$	$m = \frac{1}{SC_{fg, media}}$	
	500	6000	
più importante perché usata in campo tecnico x progetti	2000	8000	→ il rapporto n/m segue una legge di tipo radice
	50000	50000	

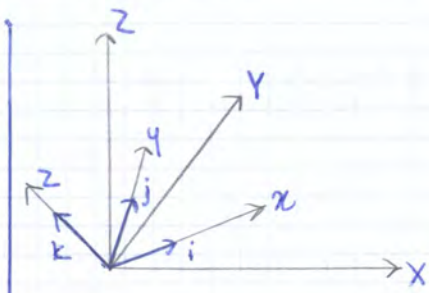
6 Restituzione dai fotogrammi

Per costruire le rette (i raggi analoghi) che dai punti di presa passano x i punti analoghi, occorre definire un unico sistema di riferimento in cui computarle,



Non si può fare ricorso al sistema di riferimento interno della macchina, ossia a quello definito nella matrice di pixels e origine nel punto principale, poiché è un sistema di riferimento piano.





Nello spazio, l'operazione è più complessa perché ci sono più coseni direttori

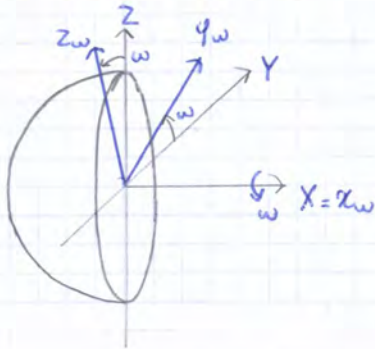
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_X & \cos \alpha_Y & \cos \alpha_Z \\ \cos \alpha'_X & \cos \alpha'_Y & \cos \alpha'_Z \\ \cos \alpha''_X & \cos \alpha''_Y & \cos \alpha''_Z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

In questo caso, le rotazioni sono

- ω : attorno all'asse x
- φ : attorno all'asse y
- k : attorno all'asse z

Per ricavare in modo corretto la matrice di rotazione in funzione degli angoli di assesto, occorre dare queste rotazioni con un certo ordine

ROTAZIONE PRIMARIA

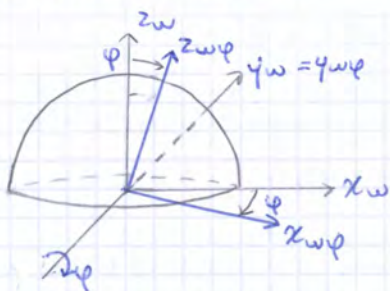


Si applica inizialmente una rotazione ω attorno all'asse X .

In questo modo, l'asse $X = X_w$ rimane invariato mentre Y e Z variano. Pertanto, la matrice di rotazione è una matrice 3×3 avente nella 1ª riga e colonna il vettore $(1 \ 0 \ 0)$

$$\{X\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} = [R_\omega] \{x_w\}$$

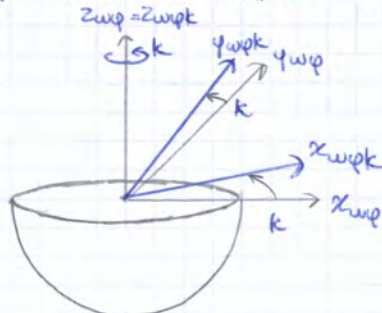
ROTAZIONE SECONDARIA



In seguito, si ruota di un angolo φ ma non attorno all'asse Y originario, bensì al nuovo asse Y_w

$$\{x_w\} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{wp} \\ y_{wp} \\ z_{wp} \end{pmatrix} = [R_{\varphi}] \{x_{wp}\}$$

ROTAZIONE TERZIARIA



Si applica una rotazione attorno all'asse Z , cui si aveva dato una rotazione sia di ω sia di φ

$$\{x_{wp}\} = \begin{bmatrix} \cos k & -\sin k & 0 \\ \sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{wpk} \\ y_{wpk} \\ z_{wpk} \end{pmatrix} = [R_{k}] \{x_{wpk}\}$$

→ lungo ξ

$$\frac{\xi - \xi_0}{c} = \frac{X' - X_0'}{Z_0' - Z_1'} \Rightarrow \xi = \xi_0 + c \frac{X' - X_0'}{Z_0' - Z_1'}$$

→ lungo η

$$\frac{\eta - \eta_0}{c} = \frac{Y' - Y_0'}{Z_0' - Z_1'} \Rightarrow \eta = \eta_0 + c \frac{Y' - Y_0'}{Z_0' - Z_1'}$$

Nei termini a destra compaiono delle differenze di coordinate, cioè dei vettori. Questi sono valutati nel sistema di riferimento $X'Y'Z'$ e, x indicarli nel sistema di riferimento XYZ (cioè ENQ), si ricorre a una rotazione

$$\begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix} = [R] \begin{pmatrix} X' - X_0' \\ Y' - Y_0' \\ Z' - Z_0' \end{pmatrix}$$

→ la traslazione era già stata fatta, siccome $X'YZ'$ e $X'Y'Z'$ hanno la stessa origine

Si ricava il vettore a destra

$$\begin{pmatrix} X' - X_0' \\ Y' - Y_0' \\ Z' - Z_0' \end{pmatrix} = {}^+ [R] \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

A questo punto, si sostituisce nelle equazioni di similitudine^e ricordando che ad es. $X' - X_0'$ corrisponde alla 1^a riga di ${}^+ [R]$ (cioè la 2^a colonna di $[R]$) moltiplicata x $X - X_0$, $Y - Y_0$ e $Z - Z_0$, si ottiene

$$\xi = \xi_0 - c \frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} = \xi_0 - c \frac{Zx}{N}$$

$$\eta = \eta_0 - c \frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} = \eta_0 - c \frac{Zy}{N}$$

$$\xi = \xi_0 - c \frac{Zx}{N}$$

$$\eta = \eta_0 - c \frac{Zy}{N}$$

Equazioni di collinearità da oggetto a immagine

Queste equazioni legano le coordinate immagine alle coordinate del terreno:

con esse, date le coordinate oggetto del punto (posizione del punto a terra), si ottengono le coordinate del punto nell'immagine.

Ciò però richiede di conoscere l'orientamento esterno (posizione del punto di presa e parametri di rotazione) e orientamento interno (focale e punto principale).

Note queste informazioni, a 1 punto oggetto corrisponde 1 punto immagine (corrispondenza univoca).

Si parla di "collinearità" poiché punto di presa, punto a terra e punto immagine sono allineati

⇒ con un unico Fotogramma non si può ricostruire l'immagine e, x risolvere il problema, occorrono ALMENO 2 FOTOGRAFMI (e conoscerne il relativo orientamento esterno ed interno).

CASO PARTICOLARE:

esiste un caso in cui con un unico Fotogramma si riesce a ricostruire la metrica dell'oggetto.

Questo è il caso di un **oggetto piano** nel quale, da una sola immagine, si può passare a una carta metrica (in questo senso, si ricava da un piano un altro piano).

Si consideri l'equazione collineare da immagine a oggetto relativa alla X

$$\Delta X = X - X_0 = (Z - Z_0) \begin{matrix} r_{11}(\xi - \xi_0) + r_{12}(\eta - \eta_0) - r_{13}C \\ r_{31}(\xi - \xi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33}C \end{matrix}$$

L'equazione si riscrive come

$$\Delta X = \frac{\bar{a}_1 \xi + \bar{a}_2 \eta + \bar{a}_3}{\bar{c}_1 \xi + \bar{c}_2 \eta + \bar{c}_3}$$

dove

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= r_{11}(Z - Z_0) & \bar{a}_2 &= r_{12}(Z - Z_0) \\ \bar{a}_3 &= -(Z - Z_0)(r_{11}\xi_0 + r_{12}\eta_0 + r_{13}C) \quad \text{no termine noto} \\ \bar{c}_1 &= r_{31} & \bar{c}_2 &= r_{32} \\ \bar{c}_3 &= -(r_{31}\xi_0 + r_{32}\eta_0 + r_{33}C) \end{aligned}$$

Si nota che, essendo l'oggetto è piano, la quota Z è costante. Pertanto la differenza $Z - Z_0$ è costante e l'equazione si semplifica, poiché ci si focalizza solo su X e Y.

In modo simile, si ottiene l'espressione x ΔY

$$\Delta Y = \frac{\bar{b}_1 \xi + \bar{b}_2 \eta + \bar{b}_3}{\bar{c}_1 \xi + \bar{c}_2 \eta + \bar{c}_3}$$

Si dividono poi le espressioni x \bar{c}_3

$$\begin{aligned} \Delta X &= \frac{a_1 \xi + a_2 \eta + a_3}{c_1 \xi + c_2 \eta + 1} & \rightarrow a_i &= \frac{\bar{a}_i}{\bar{c}_3} \\ \Delta Y &= \frac{b_1 \xi + b_2 \eta + b_3}{c_1 \xi + c_2 \eta + 1} & \rightarrow b_i &= \frac{\bar{b}_i}{\bar{c}_3} \end{aligned} \quad c_i = \frac{\bar{c}_i}{\bar{c}_3}$$

Si nota che X e Y richiedono la conoscenza di 8 quantità. Sapendo che ogni punto misurato riporta 2 misure (una x X e una x Y) delle quali sono noti ξ e η , basta conoscere 4 PUNTI sull'immagine (cioè bisogna conoscere le coordinate).

Da qui, x qualunque altro punto si ricavano X e Y.

↓

se i punti noti sono più di 4, si ricorre ai minimi quadrati

Si indica con **parallasse** la differenza lungo la riga

$$p_f = f_2 - f_1$$

In questo modo, la Z si esprime come

$$Z = \frac{cB}{p_f}$$

Sostituendo, si ricavano le coordinate X e Y

$$X = \frac{B f_1}{p_f} \quad Y = \frac{f_1 B}{p_f} = \frac{f_2 B}{p_f}$$

Questo risultato, anche se riferito a un caso semplice, è importante x definire la precisione.

Si consideri infatti l'espressione della coordinata Z

$$Z = \frac{cB}{p_f}$$

Si nota che, in genere, non si fanno prese molto vicine all'oggetto ma a una certa distanza, si nota che **le coordinate X, Y e Z hanno la stessa precisione**.
 Ci si può allora focalizzare sulla sola coordinata Z, la quale dipende da focale, base di presa e differenza di coordinate.

L'unica misura fatta sul fotogramma è il parallasse p_f e dunque, sfruttando il teorema di propagazione della varianza, si ottiene

$$\begin{aligned} \sigma_Z &= \frac{cB}{p_f^2} \sigma_{p_f} = \rightarrow \text{derivata rispetto alla misura (in valore assoluto) } \times \text{varianza della misura} \\ &= \frac{Z}{p_f} \sigma_{p_f} = \frac{Z^2}{cB} \sigma_{p_f} \end{aligned}$$

$$\sigma_Z = \frac{Z^2}{cB} \sigma_{p_f}$$

La precisione della fotogrammetria dipende dalla precisione con cui si collimano i punti e con cui si misurano i pixel sui due fotogrammi e dalla precisione della loro differenza.

Essa inoltre è proporzionale alla distanza Z dell'oggetto e inversamente proporzionale alla base B di presa.

Del resto, la sensazione di tridimensionalità che si ha con gli occhi (che hanno piccola base) scade all'aumentare della distanza.

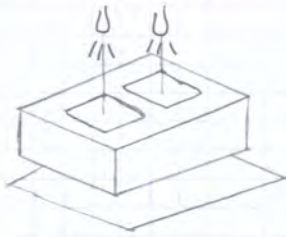
Così, anche nel caso dei fotogrammi, la precisione con cui si ricavano le quote dipende, fissata la focale c, dal rapporto

$$\frac{Z^2}{B}$$

⇒ x aumentare la precisione, occorre avvicinarsi all'oggetto o aumentare la base di presa.

Restitutori

1 Restitutori analogici



Sono strumenti analogici inventati nel 1909, i quali realizzano fisicamente l'intersezione dei raggi analoghi mediante un sistema ottico-meccanico, in cui si inseriscono i fotogrammi su un porta lastre illuminato.

Mediante un percorso ottico, si osservano un punto del fotogramma 1 e un punto sul fotogramma 2 e questi sono rototraslati in modo che i punti assumano la stessa posizione relativa e assoluta (eccetto lo scalo) che avevano contemporaneamente al momento della presa.

2 Restitutori analitici e digitali:

I restitutori analitici nacquero negli anni '60 e sfruttavano fotogrammi reali e un'ottica vera ma ora il fotogramma è controllato da un calcolatore e lo spostamento in ξ e η avviene mediante servomotori.

Oggi si usano software digitali ma questi seguono il funzionamento dei restitutori analitici poiché prendono gran parte degli algoritmi analitici. Per capire come funzionano e l'analitica che sta dietro, si considerano le equazioni di collinearità sia da immagine a oggetto:

queste sono 6 equazioni siccome esprimono una coppia di equazioni di rette nello spazio:

→ 2 equazioni x il fotogramma I

$$X = X_0' + (Z - Z_0') \frac{r_{11}(\xi' - \xi_0) + r_{12}(\eta' - \eta_0) - r_{13}c}{r_{31}(\xi' - \xi_0) + r_{32}(\eta' - \eta_0) - r_{33}c}$$

$$Y = Y_0' + (Z - Z_0') \frac{r_{21}(\xi' - \xi_0) + r_{22}(\eta' - \eta_0) - r_{23}c}{r_{31}(\xi' - \xi_0) + r_{32}(\eta' - \eta_0) - r_{33}c}$$

r_{ij} = parametri di orientamento del fotogramma I

→ 2 equazioni x il fotogramma II

$$X = X_0'' + (Z - Z_0'') \frac{s_{11}(\xi'' - \xi_0) + s_{12}(\eta'' - \eta_0) - s_{13}c}{s_{31}(\xi'' - \xi_0) + s_{32}(\eta'' - \eta_0) - s_{33}c}$$

$$Y = Y_0'' + (Z - Z_0'') \frac{s_{21}(\xi'' - \xi_0) + s_{22}(\eta'' - \eta_0) - s_{23}c}{s_{31}(\xi'' - \xi_0) + s_{32}(\eta'' - \eta_0) - s_{33}c}$$

↓
il punto osservato è lo stesso sia x I sia x II

Si può notare che, avendo 2 fotogrammi, dalle coordinate ξ', η' e ξ'', η'' si può passare alle coordinate X, Y e Z poiché si hanno 6 equazioni.

Si potrebbe dunque immaginare che il restitutore digitale sia un software che fa vedere contemporaneamente i 2 fotogrammi in visione analogica:

il fotogramma I è intoni di verde e il II è intoni di rosso e vengono osservati in modo che all'occhio sinistro arrivi solo l'immagine a sinistra e all'occhio destro arrivi solo l'immagine di destra e si vede così in stereoscopia.

si passano allora a misurare le coordinate ξ', η' del punto sul fotogramma I e le coordinate ξ'', η'' dello stesso punto sul fotogramma II e da qui, noti l'orientamento esterno e quello interno, calcolare X, Y, Z del punto attraverso le 6 equazioni.

Così nei restitutori digitali ci si sposta non sul fotogramma ma sullo spazio oggetto e ciò costituisce un miglioramento nella precisione tra i sistemi analitici

- APPLICAZIONI → si può fissare la coordinata Z e spostarsi in più direzioni con la marca, in modo che essa sia sempre appoggiata sul terreno.
In tal modo, si costruiscono le **curve di livello**.
- si fanno variare in modo automatico le coordinate X e Y secondo un certo passo regolare e, spostandosi, si alza e abbassa la rotella in modo da appoggiare la marca sul terreno. Lì si clicca.
In tal modo, si costruisce un **modello di terreno digitale (DTH)**.

PROPRIETÀ: i sistemi analitici che spostano i fotogrammi destro e sinistro si dicono A 4 controlli perché spostano entrambi i fotogrammi.
Esiste un sistema introdotto prima da Inghilleri, che è a 2 controlli, poiché sposta un solo fotogramma.

Si sa però che la fotogrammetria è costituita da almeno 2 fotogrammi e dunque, x ogni punto collimato a terra, ci sono 6 equazioni; con un totale di

$$6p \text{ equazioni} \quad \rightarrow \text{si hanno le misure } \begin{matrix} p_1, \eta_1, \rho_1 \\ p_2, \eta_2, \rho_2 \end{matrix}$$

A livello di incognite, aumentano quelle relative a posizione e assetto dei fotogrammi (ci sono 2 camere), mentre il numero di incognite x ogni punto è lo stesso (coordinate X; Y; Z).

$$12 + 3p \text{ incognite}$$

Il sistema è chiuso quando si ha

$$6p = 12 + 3p \Rightarrow p = 12$$

Di conseguenza, se con 12 punti analoghi e 2 fotogrammi, sembra che si possa risolvere il calcolo dell'orientamento esterno e addirittura le coordinate di ogni punto.

Il problema è che, in questo modo, si ottiene almeno un sistema di 48 equazioni in 48 incognite, nel quale si vede una deficienza di rango 7:

è come se, di fatto, si conoscesse l'orientamento di un fotogramma a rispetto all'altro (ORIENTAMENTO RELATIVO) ma non si conoscano posizione, assetto e scala del modello.

Così si è costruito un modello che occupa una posizione e qualunque nello spazio.

Ciò accade perché non c'è il sistema di riferimento e così non si può invertire il sistema.

\Rightarrow non si può risolvere il problema senza punti a terra ma l'orientamento esterno si calcola solo avendo noti alcuni punti a terra.

OSSERVAZIONE: se non si avessero informazioni sull'ORIENTAMENTO INTERNO, è chiaro che aumenta il numero di incognite. In questo caso, basta documentare il numero di punti di appoggio a terra nei quali si misurano le proprietà.

Fotogrammetria digitale

1. Essa nacque negli anni '80 ed è molto diffusa.
2. Si sa che la fotogrammetria analitica consente di capire come funzionano i restitutori digitali, ma in questo caso si usano dei veri fotogrammi, ossia delle diapositive di grandi dimensioni illuminate e portate a degli oculari mediante un percorso ottico.

Oggi, l'elemento analogico è abbattuto, siccome i fotogrammi digitali sono matrici digitali che contengono informazioni radiometriche.

Da una parte, con la fotografia tradizionale l'operatore misurava le posizioni p e q del pixel e del suo pixel analogo. Ora, parte della misura è già fatta perché avviene già una DISCRETIZZAZIONE da parte dello scanner (prima operazione di misura). La seconda operazione di misura è la SCELTA DEL PIXEL da parte dell'operatore.

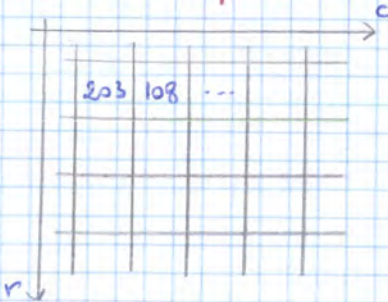
→ non c'è più una misura da parte dell'operatore ma solo una scelta (la vera misura sta nella discretizzazione).

Ciò avviene sia quando si ha un'acquisizione diretta tramite fotocamera digitale sia quando l'acquisizione è indiretta (tramite scanner).

In questo senso, la radiometria dell'oggetto è sintetizzata nei pixels e la misura è già fatta.

3. Fotogrammi digitali:

L'immagine digitale è costituita da una matrice bidimensionale, i cui elementi si dicono **pixel**.



Tale matrice contiene dei numeri, che forniscono l'informazione radiometrica, ad es. quanto il colore è bianco o nero (questo deriva dall'acquisizione diretta o indiretta).

È evidente che qui interviene una quantizzazione, che è già un'operazione di misura e ciò è avvenuto non solo perché si è scelta una certa dimensione dei pixels ma anche nella radiometria, che è stata discretizzata secondo una certa scala di grigi (se l'immagine è in bianco e nero).

⇒ sono presenti una **discretizzazione geometrica** (divisione in pixels) e una **discretizzazione radiometrica**.

In questo senso, si fa già una misura dell'oggetto, perché si discretizza la geometria in 2 dimensioni e la III dimensione è la radiometria.

→ palette:

anche se si ha un'immagine colorata, si può occupare 1 solo byte invece di 3 x ogni pixel se si utilizza un certo modo di riempire il byte, cioè la tavolozza di colori.

R	G	B	Palette
27	132	83	0
32	74	254	1
			⋮
			⋮

In fatti, ci sono moltissime sfumature ma ne possono bastare di meno.

Allora, si sa che in ogni colore le intensità di R, G e B vanno da 0 a 255 e dunque ogni colore è definito da una terna di numeri da 0 a 255.

Se c'è un primo colore (definito da una certa terma) che si usa, allora esso è inserito nella tavolozza come colore 0.

Il secondo colore è poi inserito come colore 1 nella tavolozza e così via.

Il vantaggio è che normalmente ci sono 256^3 possibilità, mentre nella palette ci sono solo 256 colori.

⇒ si riduce alla radice cubica la possibilità di colori

Quanti colori servono però per fare un fotogramma?

Ci si potrebbe riportare all'occhio umano ma ciò è errato a livello di:

→ quantizzazione geometrica: quanto dpi usare?

→ quantizzazione radiometrica:

quale profondità radiometrica si usa? L'occhio umano riesce a percepire le differenze tra i toni di grigio fino a una presenza di 30 toni al massimo - se ci sono già 50 toni, non si riconoscono quelli più vicini. Dunque non ha senso usare 256^3 toni se l'occhio non li distingue. In realtà, prima occorre capire a cosa serve la profondità radiometrica e solo dopo si può limitarla e scegliere la discretizzazione.

PROPRIETÀ: la discretizzazione porta a definire un sistema di riferimento discreto in cui ogni pixel ha coordinate (i, j) x posizionarlo.

Se si vuole passare dal sistema righe-colonne alle coordinate (i, j) , siccome ci si riferisce al centro del pixel (e non al bordo), si sfruttano le relazioni

$$i = \text{INT} \left(\frac{x}{\delta} + \frac{1}{2} \right) \quad j = \text{INT} \left(\frac{y}{\delta} + \frac{1}{2} \right)$$

δ = dimensione del pixel

si aggiunge $1/2$ perché ci si riferisce al centro

$$x = \left(i - \frac{1}{2} \right) \delta \quad y = \left(j - \frac{1}{2} \right) \delta$$

ci si porta indietro di $1/2$ pixel, poiché l'origine è in alto a sinistra

Le coordinate, secondo queste formule, presentano una tolleranza pari a metà pixel, cioè $\delta/2$.

Tipicamente, la distanza focale vale 150 mm e, nella fotogrammetria aerea, la distanza è 2 volte la base di presa, cioè

$$\frac{H}{B} = 2$$

Passando alla precisione con cui si collimano il punto sul fotogramma 1 e il punto sul fotogramma 2, sapendo che la tolleranza vale mezzo pixel, si può immaginare che esso coincida con σ_{px}

$$\sigma_{px} = \frac{1}{2} \delta \quad \rightarrow \sigma_{px} = \sigma_2 - \sigma_1$$

Adottando allora diverse risoluzioni, si può ricavare la precisione in funzione della distanza H

dpi	δ	σ_2
600	42	$2,8 \cdot 10^{-4} H$
1200	21	$1,4 \cdot 10^{-4} H$
2400	10	$0,7 \cdot 10^{-4} H$

Pertanto, se si progetta un rilievo fotogrammetrico con gli strumenti attuali, si riesce a raggiungere una precisione dell'ordine di

$$\sigma_2 \sim 10^{-4} H \quad \rightarrow \text{se il rilievo è ben progettato}$$

⇒ occorre usare risoluzioni comprese tra 1200 e 2400 dpi e non a 3600 dpi cioè, ragionando sulla precisione della fotocamera e non sulla pellicola

Inoltre, con opportuni ragionamenti, si può abbattere il termine σ_p a mezzo pixel (anche se è un quanto non divisibile) e interessa la risoluzione radiometrica (che può aiutare la risoluzione geometrica e si scende a

$$\sigma_2 = \pm 0,2 \delta$$

Così addirittura con risoluzione di 600 dpi e $\delta = 42$, si ha

$$\sigma_2 = 1,2 \cdot 10^{-4} H$$

Bastano così 800 dpi a arrivare alla stessa precisione della fotogrammetria analogica.

In realtà, prima di individuare punti omologhi, l'elaboratore deve INDAGARE DUE INTORNI SIGNIFICATIVI DEL PUNTO (delle aree sufficientemente grandi). Allora, nel confronto, quando si trova la massima correlazione allora la piccola area dell'immagine a sinistra è molto simile alla piccola area a destra.

In particolare, in base all'area su cui si lavora, si definiscono 2 processi di autocorrelazione

→ autocorrelazione a pixel intero:

→ autocorrelazione sub pixel

I 2 processi sono applicati a cascata

→ l'autocorrelazione a pixel intero dà un valore approssimato in partenza

→ l'autocorrelazione sub pixel si applica nella zona dove s'aveva buona correlazione a pixel intero e in essa si cerca la massima somiglianza. Poiché ora si opera in una piccola zona di immagine, si può assumere che la funzione di riferimento (si vedrà poi quale) sia continua (e non discreta) e si cerca uno spostamento minore rispetto alle dimensioni del pixel.

OSSERVAZIONE: se si considerano una porzione di oggetto nell'immagine a sinistra e una porzione dello stesso oggetto nell'immagine a destra, anche se le porzioni piccole, le porzioni non sono mai identiche poiché

→ dal punto di vista geometrico, sono riprese da punti diversi nello spazio

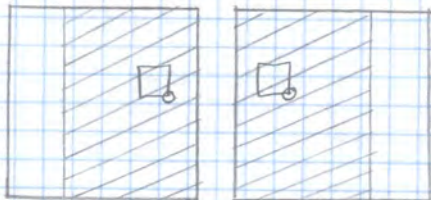
→ poiché sono ripresi da punti diversi nello spazio, la quantità di luce che arriva al fotogramma I è diversa da quella che arriva al fotogramma II

⇒ DIVERSA GEOMETRIA e DIVERSA RADIOMETRIA che fanno sì che le immagini non possano essere uguali;

le immagini però si somigliano.

Come avviene l'autocorrelazione?

Per semplicità, si assume di lavorare in toni di grigio.



Si considerino l'immagine a sinistra e a destra, che si sovrappongono x il 60% definendo delle zone omologhe (le zone tratteggiate). Dati un oggetto e il suo omologo, siccome si collimano punti, non si osserva tutto l'oggetto ma si ragiona punto x punto, valutando se si sceglie allora uno spigolo e si vede se è simile al suo omologo.

Avendo scelto uno spigolo, si esamina una matrice di un certo tipo. Siccome si vuole cercare qualcosa che assomigli ai toni radiometrici, conviene scegliere una zona più vasta nella II immagine

Pertanto, in questo caso occorre applicare 3 "salti" alla sagoma perché somigli al vettore ricerca.

In questo modo funziona la collimazione a pixel intero.

Si è però visto che x motivi geometrici (danno un errore sistematico) e radiometrici (danno un errore accidentale - illuminazione), le immagini non sono mai identiche e dunque i valori numerici nella matrice ricerca possono non essere identici di valori nella matrice sagoma.

Tornando al caso monodimensionale, si può prendere il seguente vettore ricerca

$$(1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 3 \ 8 \ 8 \ 5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$$

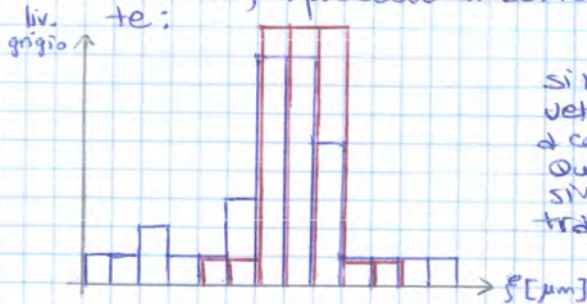
Il valore medio è

$$\bar{g}_r = \frac{36}{13}$$

In questo caso, la massima correlazione si ha dalla II casella (ma non vale 1)

Posizione	1	2	3	4	5	6	7
Indice ρ	-0,40	-0,51	0	0,73	0,92	0,24	0

Detto ciò, il processo di correlazione può essere interpretato graficamente:



si rappresentano in un istogramma i valori del vettore ricerca e, tramite una curva spezzata a colonne, i valori del vettore sagoma. Quest'ultima è spostata fino a trovare la massima correlazione che, a livello visivo, si traduce nel ricoprimento ottimale tra i profili.

Dal diagramma si può poi notare che, se ci si sposta di meno di 1 pixel, si possono sfruttare delle piccole correlazioni che si hanno a destra o a sinistra della posizione ottimale.

In effetti, finora nella ricerca della massima correlazione, ci potersi spostare, si è assunta l'ipotesi che vettore sagoma e vettore di ricerca coincidano a meno di una traslazione, espressa da un numero intero α , a partire dalla posizione indicata con l'intero i .

$$g_r(i) = g_s(i + \alpha)$$

Se però si assume che i e α siano reali, si può allora cercare lo spostamento ideale (che è un numero reale) che soddisfi al meglio questa condizione.

$$g_r(f) = g_s(f + \alpha)$$

Dal punto di vista radiometrico, IL VETTORE (matrice) DI RICERCA È IL PIÙ POSSIBILE SIMILE AL VETTORE (matrice) SAGOMA e la relazione definisce la correlazione sub pixel.

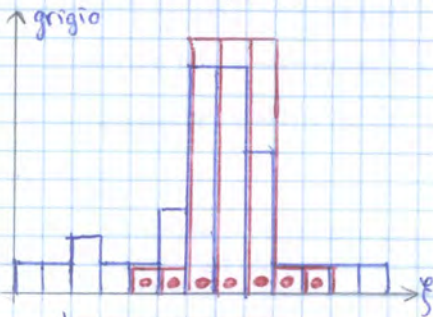
Combinando i 2 aspetti, i toni della matrice ricerca sono uguali alla luminosità più un fattore di contrasto moltiplicato x i toni della matrice sagoma.

$$g_r(\xi) = b g_s(\xi + a) + c$$

Si ottengono dunque 3 incognite

- a = spostamento (espresso da un numero reale) che bisogna fare alla matrice sagoma rispetto alla matrice di ricerca
- b = valore di contrasto (differenza tra l'immagine sagoma e l'immagine ricerca)
- c = valore di luminosità (differenza tra l'immagine sagoma e l'immagine ricerca).

Quante equazioni si possono scrivere x risolvere le incognite?



Chiaramente, si possono scrivere e cercare le somiglianze x diversi pixels. Nel caso in esempio, si possono cercare 7 somiglianze tra sagoma e ricerca

⇒ IL NUMERO DI EQUAZIONI È DATO DALLA DIMENSIONE PIÙ PICCOLA DELLA SAGOMA (perché si confrontano il grigio della sagoma e il grigio della ricerca)

In realtà, le equazioni non sono lineari e, inoltre, il termine g_s è calcolato nella posizione $\xi + a$, dove a è una porzione più piccola del pixel.

Si può dunque ipotizzare che I TONI RADIOMETRICI DELLA SAGOMA SIANO UNA FUNZIONE CONTINUA (non sono più discontinui), cioè g_s è una funzione.

In questo modo, si può sviluppare secondo Taylor il termine $g_s(\xi + a)$

$$g_s(\xi + a) = g_s(\xi) + a g_s'(\xi)$$

Sostituendo questo termine, si riscrivano le equazioni portando poi tutto a sinistra

$$g_r(\xi) - b [a g_s'(\xi) + g_s(\xi)] - c = 0$$

Si esegue un cambio di variabile, in cui si impone

$$\bar{a} = b a$$

Si ottiene così

$$\bar{a} g_s'(\xi) + b g_s(\xi) + c - g_r(\xi) = 0 \rightarrow 7 \text{ equazioni in questo caso}$$

I termini a destra sono i termini ^{della} ricerca che presentavano la migliore correlazione a pixel intero:

si è già fatto il posizionamento a pixel intero e ora bisogna trovare uno spostamento da quei valori a pixel intero di una quantità subpixel.

A questo punto, si trova la matrice normale nei minimi quadrati, che si ottiene moltiplicando fra di loro le colonne.

→ l'elemento N_{11} è somma dei quadrati della prima colonna.

→ l'elemento N_{12} è ^{summa dei} prodotti tra I e II colonna (vale 0 x simmetria)

→ l'elemento N_{13} è somma dei prodotti tra I e III colonna.

In tal modo, si ottiene una Matrice simmetrica.

Il vettore dei termini noti normalizzati presenta elementi che sono somma delle colonne della matrice di segno moltiplicate x il vettore noto.

$$\begin{bmatrix} 0,64 & 0 & 0 \\ 0 & 247 & 31 \\ 0 & 31 & 7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 195 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Invertendo la matrice, si ottengono i valori delle incognite.

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5625 & 0 & 0 \\ 0 & 0,091 & -0,0406 \\ 0 & -0,0406 & 0,3216 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 195 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,125 \\ 0,6875 \\ 0,8125 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \rightarrow \text{contrasto} \\ \rightarrow \text{luminosità} \end{matrix}$$

Per conoscere la precisione dei risultati, si calcola il vettore degli scarti

$$\{v\} = (0,5 \quad -0,25 \quad 0,25 \quad -1 \quad 0,75 \quad -0,75 \quad 0,5)$$

Da qui si ottiene il termine σ_0^2 , cioè il sqm dell'unità di peso

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= \frac{\{v\}\{v\}}{r} = \frac{2,75}{4} = 0,6875 \\ &\rightarrow \text{somma degli scarti al quadrato} \\ &\rightarrow \text{ridondanza} = (n. \text{equazioni}) - (n. \text{incognite}) \end{aligned}$$

In questo modo, la matrice di varianza-covarianza delle incognite vale

$$C_{xx} = \sigma_0^2 N^{-1} = \begin{bmatrix} 1,0762 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0063 & -0,0278 \\ 0 & -0,0278 & 0,2211 \end{bmatrix}$$

→ quanto toni di grigio bastano?

Si sa che, in presenza di tanti toni, l'occhio non riesce a distinguere i toni più vicini.

In realtà, si ragiona su 256 toni, poiché l'operazione di correlazione di pixel intero o subpixel non è fatta dall'occhio umano, bensì dall'elaboratore che ha maggiore profondità radiometrica.

Ciò si traduce in un MIGLIOR FUNZIONAMENTO DELLA CORRELAZIONE:

si consideri una matrice normale, invertita e semplice, di tipo diagonale.

$$C_{xx} = \begin{bmatrix} 1,5625 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0091 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3216 \end{bmatrix}$$

Sapendo che ogni elemento rappresenta una varianza almeno di 50^2 (moltiplicando $\times 50^2$, si ottiene C_{xx}), il termine \bar{a} è più preciso quanto è più piccolo N_{ii} .

Si come la matrice è diagonale, N_{ii} è tanto più piccolo quanto è più grande N_{ii} .

Si sa però che N_{ii} rappresenta la somma dei quadrati degli elementi della i -esima colonna, una tale colonna presenta le derivate, ossia le variazioni dei toni radiometrici.

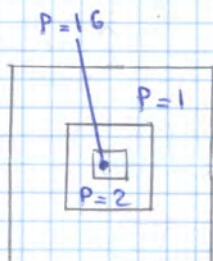
Dunque occorre che la radiometria vari molto, il modo che la i -esima colonna sia grande.

⇒ la radiometria deve variare molto x ottenere una buona collimazione, a livello di sagoma (nella matrice interviene solo la sagoma)

↓ del resto, anche con gli occhi non si vede se la radiometria è simile

Siccome si ragiona sulla matrice sagoma, si può dire a priori che una certa zona si presta bene per la collimazione supixel, cioè se in essa si raggiunge una buona precisione nella collimazione.

Questo ragionamento si può poi fare su tutto il fotogramma, cioè non solo x un punto specifico (es. spigolo di una casa) ma ci si può spostare e nell'intero fotogramma e vedere in esso dove funzionerà bene la collimazione e dove non.



→ siccome interessa collimare un punto, i pixels vicini al punto sono pesati di più e quelli via via più lontani sono pesati di meno.

In questo senso, si segue un METODO DEI MINIMI QUADRATI PESATI, in cui il peso più forte ricade dove c'è l'oggetto di interesse.

→ si possono introdurre nel metodo delle ipotesi più complicate sul legame gr-gs, inserendo altre incognite di tipo prospettico (es. fattore di scala geometrico)

Si procede dunque al contrario:

si assegna al pixel considerato dell'immagine di output un valore interpolato secondo un certo criterio di pixel.

Dunque, se si vuole creare l'output, si parte da esso cioè si parte dall'elemento $(r; c)$ della matrice output secondo la funzione che lega output a input (non si usa la relazione ma il contrario).

$$\begin{cases} c' = f_1^{-1}(c; r) = g_1(c; r) \\ r' = f_2^{-1}(c; r) = g_2(c; r) \end{cases}$$

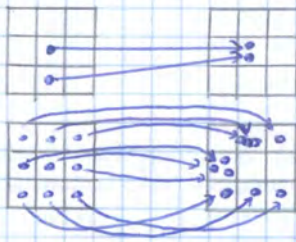
Si inseriscono così le coordinate $(r; c)$ dell'output e si vede dove si finisce nell'input.

Si legge poi il valore radiometrico corrispondente e tale valore è assegnato all'elemento in esame.

Questo metodo si dice **trasporto del baricentro** perché si passa dal baricentro $(r; c)$ dell'output all'elemento $(r; c)$ dell'input (non è detto che questo sia il baricentro).

Il colore che si trova nell'output è ottenuto senza interpolazione.

Il metodo di trasporto del baricentro presenta 2 problemi:



→ è possibile che 2 pixels di output finiscano nello stesso input

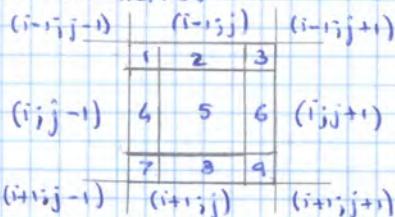
→ alcuni pixels di input non trovano alcuna corrispondenza nell'output, il che significa che alcuni toni non sono mai riprodotti.

Questo si dice **effetto blocking** e, a livello di immagine, esso rende i bordi dell'immagine seghettati.

Tale effetto si limita ricorrendo all'**interpolazione**.
Essa può essere eseguita in diversi modi

→ **zone di influenza**

L'approccio prevede di partire dall'output e di vedere dove si finisce nell'input. Se si finisce fuori dall'immagine di input, come al solito, si mette un colore arbitrario.



Se si finisce dentro l'immagine, bisogna vedere in quale zona del pixel si finisce.

→ Se si finisce nella zona 5, non cambia nulla rispetto al metodo del baricentro.

Altrimenti, si esegue un'interpolazione.

Si assume x semplicità di operare con toni di grigio (in caso contrario, si interpolano rosso, verde e blu) e si hanno numeri compresi tra 0 e 255.

→ se si finisce nella zona 2; 4; 6 o 8, si usa il valore radiometrico del pixel $(i; j)$ interpolato con quello adiacente.

III Raddrizzamento dell'immagine

Si sa che esiste un unico caso in cui, con un solo fotogramma, si riesce a ottenere un oggetto fotometrico.

Questo è il caso di un oggetto piano, in quanto le equazioni di collinearità si semplificano (la Z è nulla o costante e si elide) e si ottengono le equazioni dell'omografia.

$$\xi' = \frac{a\xi + b\eta + c}{g\xi + h\eta + 1}$$

$$\eta' = \frac{d\xi + e\eta + f}{g\xi + h\eta + 1}$$

In queste equazioni intervengono 8 parametri, che si ricavano sfruttando i sistemi

$$\begin{cases} X = \frac{a\xi + b\eta + c}{g\xi + h\eta + 1} \\ Y = \frac{d\xi + e\eta + f}{g\xi + h\eta + 1} \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = \frac{a'X + b'Y + c'}{g'X + h'Y + 1} \\ \eta = \frac{d'X + e'Y + f'}{g'X + h'Y + 1} \end{cases}$$

Per risolvere il sistema, occorrono 4 punti oppure si possono anche imporre 4 condizioni su un punto (scala, orizzontalità e verticalità, parallelismo e perpendicolarità tra le linee) con alcune misure di distanza.

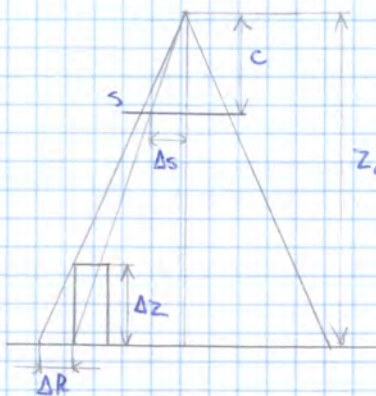
In questo modo, si realizza l'operazione di raddrizzamento, in cui si trasforma un'immagine digitale che rappresenta la prospettiva centrale di un oggetto in un'immagine digitale in prospettiva centrale avente piano di proiezione parallelo al piano dell'oggetto e questa coincide con una proiezione ortogonale a meno di un fattore di scala.

Analiticamente, questo si risolve con una trasformazione omografica, che collega biunivocamente il sistema di riferimento piano XY dell'oggetto e il riferimento piano $\xi\eta$ della prospettiva. La trasformazione piana è l'equazione di collinearità a Z = cost (detta OMOGRAFIA GENERALE).
A livello di procedura, è simile al resampling:

- si genera l'immagine digitale del sistema oggetto XY
- si trasporta il baricentro mediante le equazioni dell'omografia nel sistema $\xi\eta$
- a ogni pixel si associa la radiometria mediante interpolazione bicubica sull'immagine originale.

Il raddrizzamento si può eseguire anche su superfici non piane ma sviluppabili su un piano.

OSSERVAZIONE



Se l'oggetto non è perfettamente piano, si compie un errore planimetrico Δs che dipende da

→ quanto l'oggetto non è piano (Δz)

Z_0 → angolo di campo visuale, in posizione nadirale non c'è errore mentre al bordo c'è errore e, se l'immagine è grandangolare (fascio a 90°), si ha $\Delta R = \Delta z$

Dalla proporzione dei triangoli, si ha

$$\frac{\Delta s}{c} = \frac{\Delta R}{Z_0} \quad \begin{aligned} \Delta s &= \text{errore di altezza} \\ Z_0 &= \text{cm}_b, \text{ m}_b = \text{inversa della} \\ &\quad \text{scala di raddrizzamento} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta s = \frac{\Delta R c}{Z_0}$$

Rispetto all'ortofoto generata con metodo fotografico, l'ortofoto digitale ha dei vantaggi

- maggiore precisione perché si usa un grigliato molto fitto (25 μm contro 100 μm)
- è facile variare la qualità dell'immagine
- ottima mosaicatura dell'immagine
- si può inserire in un GIS

6 Operatori di interesse:

In un fotogramma digitale si possono individuare punti omologhi mediante correlazione, ma si possono anche individuare sul fotogramma quali possano essere le zone in cui la correlazione su pixel intero o subpixel può essere più precisa.

Si è visto che nella correlazione ^{sub-pixel} intervengono S_{og} e ricerca e, fondamentalmente, la precisione dipende dalla matrice S_{og} . Tale precisione è tanto più alta quanto più c'è variazione radiometrica.

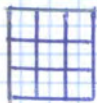
In realtà, nella ricerca del punto omologo, si può anche ignorare cosa ci sia sul II fotogramma ma lo si può spazzare interamente, andando a vedere dove teoricamente ci siano zone in cui la correlazione potrebbe avere ottima precisione.

Queste sono zone in cui si ha la massima variazione radiometrica e, salvo eccezioni, (es. ombre), queste sono zone in cui c'è il BORDO DI UN OGGETTO, cioè sono le zone che interessa restituire.

⇒ se si spazza l'immagine con la matrice S_{og} , si può dire a priori se in un punto c'è un oggetto da restituire perché lì funziona meglio la correlazione.

Queste finestre che scorrono in tutta l'immagine non sono altro che dei FILTRI che servono a capire quali siano le zone dell'immagine che possono interessare la restituzione.

I filtri producono poi un'immagine di output, in cui il valore radiometrico rappresenta usualmente i bordi che interessa restituire.



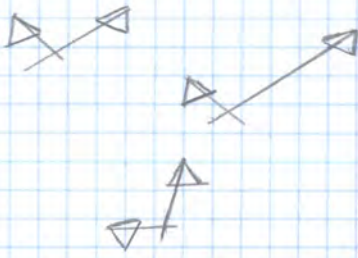
Un filtro semplice è il laplaciano.

Un altro filtro molto usato è il laplaciano della gaussiana. Essa consente di ridurre il rumore presente nell'immagine, cioè di eliminare le frequenze molto alte (onde corte), che tipicamente non sono oggetti di interesse.

quando ci si sposta tra più pixels adiacenti e si trova una forte variazione di tono entro una distanza planimetrica ravvicinata, ciò è dovuto a elementi come erba.

Questi oggetti non interessano a la restituzione ma interessano solo variazioni radiometriche in cui gli oggetti hanno una certa dimensione.

In questo senso, si vogliono variazioni radiometriche rapide che poi si mantengano costanti (non devono variare pixel x pixel)



In particolare, il sistema può essere ruotato e traslato e l'intersezione tra i raggi omologhi si realizza sempre, ma non più su un punto del terreno, bensì su un punto qualsiasi nello spazio. Infatti, è sufficiente che un fotogramma sia orientato rispetto all'altro nella stessa posizione relativa (non assoluta) che aveva nel momento di presa. Inoltre, un fotogramma può essere allontanato o avvicinato e si realizza sempre l'intersezione, ma non si conserva la scala.

In questo senso, la deficienza di rango si lega a una mancanza del sistema di riferimento e bisogna fissare i 6 gradi di libertà del sistema di fotogrammi + 1 scala ($6+1=7$).

Del resto, nella fotogrammetria, si può orientare un fotogramma rispetto all'altro e mettere in scala, nel caso che non interessi la posizione ma la posizione relativa dei punti.

↓
Il non serve la misura sull'oggetto

Per questo motivo, l'orientamento esterno (x ogni fotogramma consiste in 6 informazioni x, y, z, w, φ e k) si può spezzare in 2 step

→ **orientamento relativo**, dove si calcolano 5 parametri sufficienti x l'intersezione dei raggi omologhi.

→ **orientamento assoluto** in cui si ruota, trasla e si scala il sistema in modo che si "allinei" al meglio al punto di terreno e lì si arriva a 7 parametri

Nell'orientamento relativo bastano solo le misure f e g , mentre x l'orientamento assoluto occorrono misure sull'oggetto x ruotare e scalare: modello qualsiasi alla posizione che esso deve avere sulla cartografia.

Tipicamente, si ricostruisce prima il modello (orientamento relativo) e poi lo si posiziona correttamente sulla base di almeno 3 punti (orientamento assoluto).

In realtà, x l'orientamento assoluto bastano anche 2 punti planimetrici (e' nota solo la planimetria) e 3 punti altimetrici perché

$$2 \cdot 2 + 3 = 7$$

planimetrici (x, y)

Con 3 punti, si guadagnano 2 informazioni.

OSSERVAZIONE: i 5 parametri di orientamento relativo sono a scelta e si basano sul fatto che l'intersezione dei raggi omologhi deve avvenire in un sistema qualunque.

Il sistema più semplice prevede di dire che il punto di presa è a sinistra già e sull'origine e il piano a sinistra abbia w, φ e k nulli.

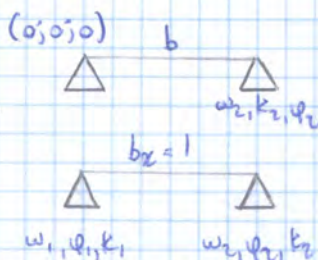
Così si sono già bloccati 6 parametri e il settimo può essere la distanza b fra i fotogrammi o una componente b_x, b_y o b_z .

In questo modo, il I fotogramma è bloccato e unitario e si ruota e trasla il II in modo che l'intersezione dei raggi omologhi avvenga nel punto omologo. Si parla di **orientamento relativo simmetrico** e le incognite sono w_2, φ_2, k_2, b_x e b_z .

In alternativa, si lavora sulla distanza imponendo

$$b_x = 1 \quad b_y = 0 \quad b_z = 0$$

e si impone $w_1 = 0$ (x arrivare a 7). Si parla ora di **orientamento relativo simmetrico**, dove si ruotano entrambi i fotogrammi e la distanza relativa è bloccata.



A livello di equazioni, siccome il ricevitore fa una misura di pseudo distanza, si esplicita questo termine (che è noto)

$$p_r^i = \sqrt{(x^i - x_r)^2 + (y^i - y_r)^2 + (z^i - z_r)^2} - c \tau_r$$

$$p_r^j = \sqrt{(x^j - x_r)^2 + (y^j - y_r)^2 + (z^j - z_r)^2} - c \tau_r$$

$$p_r^k = \sqrt{(x^k - x_r)^2 + (y^k - y_r)^2 + (z^k - z_r)^2} - c \tau_r$$

$$p_r^p = \sqrt{(x^p - x_r)^2 + (y^p - y_r)^2 + (z^p - z_r)^2} - c \tau_r$$

Il problema può poi essere linearizzato e, a comodità, si assume come incognita non τ_r , bensì l'incognita metrica $c \tau_r$.
Si ottiene così la matrice di segno.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{x^i - x_r}{\sqrt{(x^i - x_r)^2 + (y^i - y_r)^2 + (z^i - z_r)^2}} & \frac{y^i - y_r}{\sqrt{(x^i - x_r)^2 + (y^i - y_r)^2 + (z^i - z_r)^2}} & \frac{z^i - z_r}{\sqrt{(x^i - x_r)^2 + (y^i - y_r)^2 + (z^i - z_r)^2}} & -1 \\ \frac{x^j - x_r}{\sqrt{(x^j - x_r)^2 + (y^j - y_r)^2 + (z^j - z_r)^2}} & \frac{y^j - y_r}{\sqrt{(x^j - x_r)^2 + (y^j - y_r)^2 + (z^j - z_r)^2}} & \frac{z^j - z_r}{\sqrt{(x^j - x_r)^2 + (y^j - y_r)^2 + (z^j - z_r)^2}} & -1 \\ \frac{x^k - x_r}{\sqrt{(x^k - x_r)^2 + (y^k - y_r)^2 + (z^k - z_r)^2}} & \frac{y^k - y_r}{\sqrt{(x^k - x_r)^2 + (y^k - y_r)^2 + (z^k - z_r)^2}} & \frac{z^k - z_r}{\sqrt{(x^k - x_r)^2 + (y^k - y_r)^2 + (z^k - z_r)^2}} & -1 \\ \frac{x^p - x_r}{\sqrt{(x^p - x_r)^2 + (y^p - y_r)^2 + (z^p - z_r)^2}} & \frac{y^p - y_r}{\sqrt{(x^p - x_r)^2 + (y^p - y_r)^2 + (z^p - z_r)^2}} & \frac{z^p - z_r}{\sqrt{(x^p - x_r)^2 + (y^p - y_r)^2 + (z^p - z_r)^2}} & -1 \end{bmatrix}$$

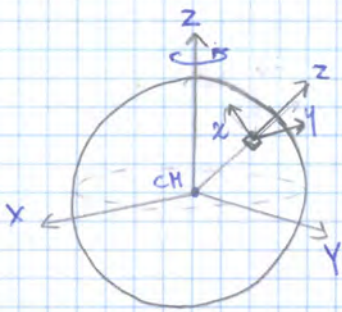
In tutto il problema, si sono fatte 3 IPOTESI FONDAMENTALI

→ è nota la posizione $(x^i; y^i; z^i)$ del satellite in qualunque istante (poiché non si sa quando il satellite trasmetta il segnale che poi è ricevuto).
Cio' si può giustificare perché i satelliti trasmettono al ricevitore le loro **effemeridi** che esprimono la loro posizione in un certo istante nel sistema di riferimento globale (cioè rispetto al centro di massa attorno cui ruotano i satelliti).
Siccome la posizione deve essere conosciuta in modo continuo, si può entrare nelle effemeridi con la scala dei tempi (tempo del satellite) e si esce con la posizione istantanea.

→ tutti i satelliti emettono il segnale allo stesso istante di tempo e il segnale è un impulso.
In realtà, il segnale è continuo e bisogna sapere in quale parte del segnale continuo si inizia a ricevere. In altri termini, i segnali non sono allineati.
Inoltre, ciascun satellite trasmette a una certa frequenza

→ i satelliti sono stati mandati su orbite particolari in un certo modo, affinché in ogni punto, in ogni ora del giorno, in ogni anno, ogni osservatore può vedere almeno 6 satelliti, perché 6 è il minimo necessario.

OSSERVAZIONE: sistema di riferimento



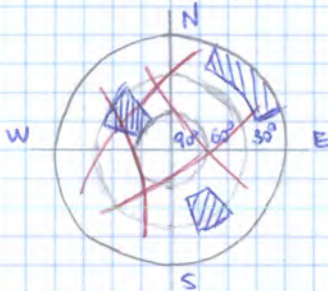
Siccome il moto del satellite si lega alla gravità, il sistema di riferimento idoneo è quello stellare o, se il moto avviene solo attorno alla Terra, ci si riferisce al centro della Terra con assi

→ Z = asse istantaneo di rotazione

→ XY = piano equatoriale

Il sistema di riferimento è scomodo x il posizionamento e dunque, prima ancora di scrivere la matrice di segno, occorre rototraslare i termini x portarsi dal sistema di riferimento globale a uno locale, valido solo nel punto di rilievo (COORDINATE EULERIANE). In tal modo, i DOP vengono espressi rispetto al piano locale e assumono l'effettivo significato di precisione verticale, orizzontale, etc.

Dopo di che, grazie alle effemeridi o all'almanacco, si conosce la posizione dei satelliti a livello azimutale e zenitale.



Se si ragiona sul piano, l'elevazione può essere definita tramite cerchi concentrici e si possono tracciare le orbite dei satelliti.

Al centro si posiziona il ricevitore. In seguito, si ripartano gli eventuali ostacoli che non permettano di ricevere il segnale del satellite, ad es. uno a N-E con 20° di elevazione.

Dunque il progetto della precisione con cui si ottengono le coordinate GPS di un punto deve essere fatto x un certo giorno, x una certa ora e con una posizione approssimata sia di dove si fa la misura sia degli ostacoli in elevazione presenti nei dintorni.

EFFEMERIDI:

nelle costellazioni GPS, Galileo e Baidu, si usano effemeridi con parametri kepleriani, ossia si danno i parametri delle orbite kepleriane e le deviazioni del satellite rispetto all'orbita kepleriana ideale.

In fatti, x sapere dove si trovi nello spazio un satellite in un certo istante, occorre dare 6 gradi di libertà.

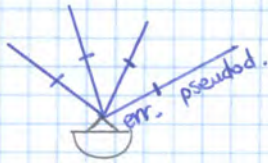
Questi possono essere dati in 2 modi

→ POSIZIONE E VELOCITÀ (su questo si basa il sistema GLONASS)

→ PARAMETRI KEPLERIANI E PERTURBAZIONI:

le perturbazioni sono dovute al fatto che la Terra e il satellite non siano masse puntuali e interviene poi il disturbo della radiazione solare.

3 CONCETTI BASE



Il posizionamento si basa sulle PSEUDODISTANZE, cioè su distanze a meno di errori incogniti comuni a tutti i satelliti (a meno di tutte le misure). Le misure sono riferite al centro di fase dell'antenna.

Qui si adottano 2 ipotesi base

→ satelliti sincroni

→ stessa scala temporale per i satelliti

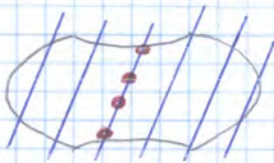
Tali ipotesi sono assunte perché i satelliti hanno orologi al rubidio (precisione 10^{-11} s) o rubidio-cesio (precisione 10^{-13} s), che sono molto precisi. Dunque, in prima approssimazione, l'errore d'orologio del satellite è nullo. Inoltre, tale errore è monitorato e controllato dal sistema di controllo, che ha orologi precisi a 10^{-15} s e il satellite ritrasmette a terra l'errore d'orologio oltre alle effemeridi.

Inoltre, data una posizione approssimata di misura e l'istante di misura, si può prevedere a priori il DOP, cioè la scorta in planimetria, altimetria, etc.

4 Segmento satellitare:

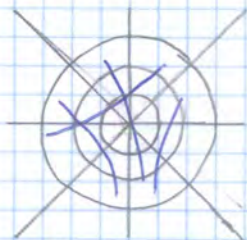
esso è costituito oggi da 32 satelliti a circa 20.200 km dalla superficie e della Terra. Essendo 3 volte il raggio terrestre dalla superficie, sono abbastanza in alto e si parla di MEAN EARTH ORBIT (MEO), cioè distanza media dalla Terra

↓
i LEO (Low Earth Orbit) sono più bassi e monitorano fenomeni atmosferici o rilevano il campo terrestre; quelli più distanti (es. satelliti televisivi) sono geostazionari perché ruotano con la stessa velocità angolare della Terra e, rispetto a un osservatore terrestre, sono fissi. Sono anche equatoriali, cioè orbitano a tramo all'Equatore.



I satelliti GPS non sono né geostazionari né equatoriali perché orbitano con un angolo di 55° rispetto all'Equatore. Il loro periodo orbitale è di 12 h siderali (tiene conto anche del moto di rivoluzione della Terra) e dunque in ogni giorno un satellite passa 2 volte sull'osservatore. Inizialmente, c'erano 24 satelliti perché si era previsto di disporre 4 satelliti su 6 piani orbitali. Siccome oggi ce ne sono 32, alcuni piani hanno 6 satelliti.

Ciascun satellite ha un nome che è un pseudorandom code (PRN CODE) e infatti, i satelliti trasmettono alla stessa frequenza e il ricevitore radio è passivo e dunque c'è il rischio di non capire da quale satellite arriva il segnale. Con questo codice, si possono distinguere i satelliti.



La costellazione GPS può essere rappresentata attraverso lo skyplot, che è un diagramma in cui si hanno azimuth e inclinazione (data da cerchi concentrici che si muovono dallo zenit).

Grazie alle effemeridi o all'almanacco (da meno informazioni), si può prevedere e tracciare la traiettoria dei satelliti.

Una volta noti gli ostacoli presenti nella zona di rilievo, si possono definire le zone in cui non si può vedere il satellite. In base a ciò, si può progettare la precisione del rilievo.

RINEX: file di osservazione

```

2      OBSERVATION DATA
OBSTORNX      Version 2.2      20-JAN-99 19:57
4
4      SR399
2768      internal
273467      5.2
4472972.4191 589974.7476 4493753.9778
1.1360      0.0000 0.0000
1      1
4      P1 I1 P2 I2
1999      1 20 8 43 50.000000
99 1 20 8 43 50.000000 0 6G27G10G 2G13G26G 9
22072509.379 115991799.54248 22072502.737 90383182.28148
22587385.190 118697483.31348 22587378.809 92491508.22748
21286934.351 11863594.40749 21286927.321 87166406.58949
22688201.632 119227282.66748 22688194.752 92904338.34748
21018852.453 110454811.58948 21018845.507 86068652.12349
23727842.380 124690652.73946 23727836.874 97161523.91947
99 1 20 8 43 55.000000 0 6G27G10G 2G13G26G 9
22074744.605 116003545.67348 22074737.964 90392335.09848
22590498.560 118713844.18348 22590492.194 92504256.95548
21287317.873 11865609.82749 21287310.858 87167977.04548
22690815.190 119241016.82148 22690808.301 92915040.26747
21017277.537 110446535.35048 21017270.592 86062203.11048
23724887.293 124675123.77546 23724881.813 97149423.43746
.....

```

NB: esiste oggi anche una recente versione compressa (RINEX formato Hatanaka)

GPS – formati dei dati

OGNI RICEVITORE GNSS PUÒ FORNIRE IN OUTPUT:

Dati di codice e fase (per postprocessamento)

formato proprietario della casa costruttrice (binario)

formato indipendente RINEX (Receiver Independent Exchange)
(ASCII)

file osservazioni **.OBS**

File navigazione con effemeridi **.NAV**

Coordinate in tempo reale: tramite protocollo NMEA (*National Marine Electronics Association*) via seriale

RTCM (Input/output) per tempo reale: correzioni differenziali di codice o di fase (*Radio Technical Commission for Maritime [Service]*).

PROPRIETÀ → la pseudorange è simile al range, perché i satelliti si trovano a circa 22.000.000 m dal centro di massa (20000 Km dalla superficie). Questo è il valore tipico di misura (a meno dell'errore di orologi e del ricevitore) di distanza tra satellite e centro di fase dell'antenna.

→ si possono prendere misure ogni 5", 30", 1", 20 volte al secondo, a seconda del tipo di rilievo fatto

→ la misura di fase è più precisa ma anche più ambigua perché anche essa è una distanza a meno di un'ambiguità.

Così alla fine del rilievo, dentro il ricevitore GPS ci sono i dati di osservazione e i dati di navigazione in formato binario e convertibili in RINEX. Ciò consente il post-processing.

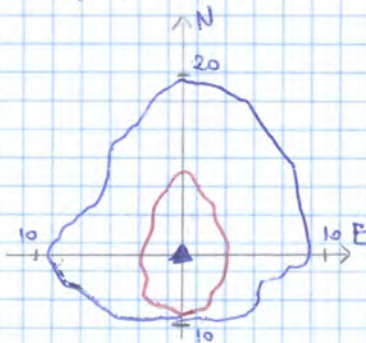
6 Errori nel rilievo:

La pseudorange tra ricevitore r e satellite i si può esprimere come

$$p_r^i \approx c \Delta t_r^i = \rho_r^i + e$$

e = in primis, essa è l'errore di orologio del ricevitore, cioè lo sfasamento tra le scale temporali del satellite e del ricevitore. Se questi sono sincroni, in teoria $e=0$ ma in realtà intervengono altri errori sistematici e accidentali.

Da qui, con almeno 6 pseudorange, si può procedere al posizionamento.



In realtà, la pseudorange ha uno scarto minimo nella misura pari a 1-2% della lunghezza d'onda del segnale, cioè 36 m nel codice C/A e 3060 cm nel codice P, che sono minori rispetto all'errore e .
Faccendo comunque una misura a 24 h, c'è una certa dispersione dei risultati con un errore massimo del posizionamento che va

→ da -10 m a +20 m nella direzione Nord

→ da -10 m a +10 m nella direzione Est

L'errore è comunque inferiore rispetto ai telefoni ^{in cui} che, anche se hanno dei software x ottimizzare la posizione con sistemi GIS, l'imprecisione è maggiore rispetto a ciò che si vede (il posizionamento avviene in base agli elementi vicini) perché l'errore massimo (non squ) è maggiore.

L'errore di posizionamento si lega soprattutto a un ERRORE ATMOSFERICO, legato alla non propagazione del vuoto. Il satellite infatti si trova a 20.000 km dalla Terra e il segnale trasmesso deve attraversare ionosfera e troposfera, a cui il segnale inizialmente si propaga alla velocità della luce e poi rallenta. Se si considerasse un modello dell'atmosfera, la posizione migliore sarebbe perché si ridurrebbe il termine e (in cui non c'è solo l'errore d'orologio)

↓ il POINT-POSITIONING (in tempo reale) ha errore sui 5-10 m; con post-processing e misura di fase invece la precisione migliora molto.

7 Classificazione dei biases

I biases possono essere correlati nello spazio o meno (anche nel tempo, ma è meno importante) e possono poi dipendere o no dalla frequenza del segnale. La distinzione su queste dipendenze è importante perché, in base a essa, tali errori si possono eliminare.

- **DIPENDENZA DALLA FREQUENZA** no i satelliti trasmettono su diverse frequenze
 - **natura dispersiva**: c'è dipendenza dalla frequenza
 - ritardo ionosferico, legata al contenuto di elettroni che il segnale incontra nell'attraversare l'atmosfera
 - multipath
 - variazione del centro di fase (cambia il centro di fase al variare della frequenza)
 - **natura non dispersiva**: non c'è dipendenza dalla frequenza
 - effemeridi (è un errore di posizione del satellite)
 - errore troposferico
 - errore d'orologio

→ CORRELAZIONE SPAZIALE

Essa valuta quanto siano simili i bias nello spostarsi di 1 m, 10 m o 1 km. Se i valori sono molto simili, si parla di **ERRORI MOLTO CORRELATI SPAZIALMENTE**.

- errore d'orologio: non è correlato perché è solo un errore temporale ed è uguale sulla stessa stazione
- errore d'orologio del satellite: vale la stessa cosa perché è uguale sullo stesso satellite
- multipath: non è correlato perché dipende solo dal sito e dagli ostacoli presenti in esso
- variazione del centro di fase: non è correlato perché dipende solo dal sito
- errori atmosferici: sono correlati spazialmente, con correlazione regionale (decine di km) perché, spostandosi di poco, l'atmosfera è uguale
- effemeridi: c'è correlazione elevata su grandi distanze (oltre 100 km)

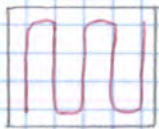
Si come si parla di errori sistematici, un modo molto efficace consiste nel fare una differenza tra più misure. Se si hanno 2 ricevitori in diverse posizioni che ricevono contemporaneamente lo stesso satellite e produce 2 files di dati, anziché fare il posizionamento dei ricevitori, si fa un **posizionamento relativo** in cui si sottraggono i dati e si eliminano così tali errori. Riducendo questi errori, si riesce a passare da precisioni metri che a centimetri che.

Questo metodo è oggi favorito dalla presenza di stazioni permanenti da cui si possono scaricare gratuitamente i dati. In tal modo, si può fare posizionamento relativo anche con una sola stazione.

L'errore varia più lentamente rispetto a quello ionosferico e dunque non si deve aggiornare in pochi secondi ma ogni $10 \pm 30''$, perché il tempo meteorologico varia meno velocemente.
 ↳ il giorno si legge dal file RINEX

10 Errore di variazione del centro di fase dell'antenna

Esso è un errore di natura dispersiva ma ora dipende dalla frequenza in maniera abbastanza "statica".
 Siccome il posizionamento si basa sulla ricezione di segnali radio, la pseudo-distanza che si misura è tra il centro di fase dell'antenna trasmettente e il centro di fase dell'antenna del ricevitore.



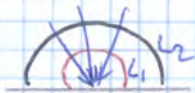
Tipicamente, le antenne sono dei circuiti in rame caratterizzate da un centro di fase la cui posizione varia in funzione della direzione con cui il segnale arriva, cioè essa varia in funzione dell'ELEVAZIONE e dell'AZIMUT DEL SATELLITE.

Tale variazione è simmetrica e può essere prevista nelle stazioni permanenti mediante diagrammi che indicano la quantità da aggiungere alla misura (in genere, sono pochi mm).

Si può anche notare che, a elevazioni di 90° , il calcolo della variazione è perfetto. Quando ci si avvicina a 15° , invece, i calcoli sono sempre più imprecisi poiché, a piccoli valori di elevazione, l'errore troposferico influenza il calcolo della variazione del centro di fase dell'antenna.

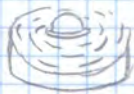
Pertanto, se il segnale è allo zenit, il calcolo è semplice; se il segnale è basso, l'errore si confonde con il ritardo troposferico.

Siccome bisogna anche considerare l'elevazione 0° rispetto all'antenna, l'antenna è ruotata mediante robot automatici e precisi che impediscano imprecisioni nella variazione del centro di fase a quelle elevazioni.



In ogni caso, l'errore è comunque dispersivo perché ci sono diversi cerchi di riferimento e il centro di fase si varia della frequenza.

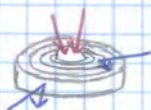
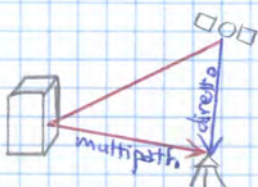
Le antenne delle stazioni permanenti presentano variazioni del centro di fase molto piccole e note, siccome esse sono complesse e presentano una protezione con più circonferenze.



Tali antenne si dicono **choke ring** e limitano la variazione del centro di fase, proteggono con un duomo dalla neve e riducono anche l'errore di multipath.

11 Multipath

Esso è un errore dovuto alla RIFLESSIONE DEL SEGNALE RADIO su superfici riflettenti.



Tali superfici possono essere superfici speculari o rinate (es. recinzioni metalliche) e producono un segnale riflesso che viaggia con limitata elevazione.

Pertanto, un modo per proteggersi da questo errore è ricorrere ad antenne choke ring che presentano elementi che riflettono i segnali bassi.

Esistono anche antenne particolari, che però funzionano in modo diverso.

→ **effemeridi calcolate:**

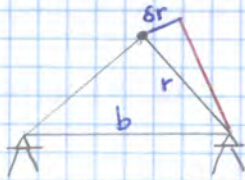
esse sono effemeridi calcolate in modo finale, rapido, ultra-rapido osservato e ultra-rapido predetto (queste si possono usare dopo un po' di tempo perché predicono).

Esse sono gestite da una rete molto fitta di centri di ricerca che, grazie alle stazioni permanenti, calcolano a posteriori (non in tempo reale) la posizione delle stazioni e anche la posizione dei satelliti. Poi trasmettono i dati di satelliti perché li ritrasmettano a terra.

Il centro di ricerca più famoso è l'International GNSS Service (IGS). Tali centri, di fatto, fanno la stessa cosa del segmento di controllo ma sono più numerosi e calcolano la posizione del satellite (e l'errore d'orologio) con precisione centimetrica.

↓ i dati sono liberamente scaricabili

Le effemeridi broadcast contengono un errore e, per eliminarlo, si sfrutta il **POSIZIONAMENTO RELATIVO**.



Nel posizionamento relativo, i 2 ricevitori A e B (o ricevitore + stazione permanente) ricevono contemporaneamente lo stesso satellite. Siccome si fa la differenza tra le misure di A e B, si ottiene il vettore AB (non una distanza ma le componenti Δx , Δy e Δz).

si dimostra che l'errore di effemeridi δr è legato alla base

$$\frac{\delta r}{r} = \frac{\delta b}{b}$$

→ l'errore di effemeridi sulla distanza terra-satellite è l'errore sulla posizione relativa sulla base

Così se si sbaglia di 1 m la posizione del satellite, essa ha influenza di 1 m / 20000 km sulla posizione relativa delle stazioni.

È chiaro che l'errore si sente solo se si calcolano basi di 2000 km, dove l'errore è del 10%

⇒ il massimo errore nelle effemeridi broadcast è del 10%

OSSERVAZIONE: vista l'entità dell'errore, si potrebbe limitarsi all'uso delle sole effemeridi broadcast.

In realtà, si usano anche quelle calcolate perché non sempre si può fare il posizionamento relativo (può mancare la stazione permanente) e, inoltre, siccome i biases sono sempre più studiati grazie alla diffusione delle stazioni permanenti, si sta migliorando anche la precisione del point positioning e dunque si cerca di eliminare l'errore metrico delle effemeridi.

13. ALTRI ERRORI → **errore d'orologio del ricevitore**; è calcolato come IV incognita

→ **interferenze elettromagnetiche** e **JAMMING** (disturbo intenzionale)

→ **ERRORE D'ELETTRONICA DEL RICEVITORE** (raro)

→ **SALTI DI FASE** nella misura di fase

→ fino a Maggio 2000, c'era un errore intenzionale sia nelle effemeridi che nell'orologio dei satelliti, cioè si sporcava il segnale.

Dunque, sapendo che la lunghezza d'onda della portante è circa 20 cm, con la misura di fase si ottiene una precisione di 1 ÷ 2 mm (bias esclusi).

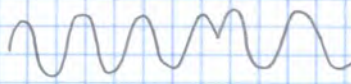
Il problema è che la fase è ambigua perché bisogna passare dallo sfasamento alla pseudo-distanza (numero intero di cicli + sfasamento moltiplicati x lunghezza d'onda) e, a fare ciò, bisogna conoscere il numero di cicli interi tra il centro di fase dell'antenna ¹ trasmettente e il centro di fase del ricevitore.

4 Codici:

queste portanti sono modulate con onde quadre dette codici e ce ne sono di diversi tipi

→ sulla frequenza L1 interviene il **codice C/A** (Code Acquisition), con

$$f_{C/A} = \frac{1}{10} f_0 \quad \lambda_{C/A} \approx 300 \text{ m}$$



Questo codice ~~invece~~ inverte la fase dopo un certo numero di cicli interi in quanto il codice cambia il segno alla portante dopo n cicli.

→ sulla frequenza L2 interviene il **codice L2C**, con

$$f_{L2C} = f_0 \quad \lambda \approx 30 \text{ m}$$

→ sulla frequenza L5 esiste un altro codice.

Esistono anche altri codici, che però sono usati solo ai militari.

Anche nel caso dei codici, interviene la questione dell'ambiguità perché, avendo ad es. $\lambda = 300 \text{ m}$, il codice si ripete ogni 300 m. Occorre dunque sapere quante volte ci sono 300 m tra satellite e ricevitore.

PROPRIETÀ: tutti i satelliti emettono alle stesse frequenze e, a riconoscerli, si sfruttano i codici.

In fatti, su ogni frequenza, i codici sono diversi da satellite a satellite e rappresentano il loro nome. Ciò implica 2 cose

→ il RICEVITORE DEVE CONOSCERE I NOMI DEI SATELLITI e dunque deve avere una replica esatta dei nomi. Così a confronto (correlazione) dei segnali in tempo reale, il ricevitore riconosce i satelliti da cui riceve i segnali e li memorizza in modo diverso.

→ i codici non sono casuali ma sono codici PSEUDOCASUALI lunghi ad es. 300 m ($\lambda = 300 \text{ m}$) e che non presentano ripetizioni al loro interno né presentano ripetizioni l'uno rispetto all'altro, a evitare che il ricevitore faccia confusione.

5 Messaggio navigazionale:

è un'altra componente che modula le onde. Essa è a bassa frequenza (50 Hz) e può essere di tipo D o CNAV

$\epsilon =$ ERRORE ACCIDENTALE (infatti non c'è l'indice "r" o "j") e dipende dalla lunghezza d'onda del codice.

$$\epsilon \approx \frac{1}{100} \lambda$$

Si possono scrivere tante equazioni quante sono le frequenze perché a ogni frequenza si ha un codice (L1 \rightarrow C/A; L2 \rightarrow L2C; L5 \rightarrow C5) e dunque si ha uno pseudorange.

Tra l'altro, l'ambiguità di codice (300m) si risolve allo stesso modo del distanziometro a onde, mediante l'uso di onde a codici a diversa frequenza, con le quali si ricava uno pseudorange approssimato.

Misura dello pseudorange con misure di fase

Questo metodo di misura sfrutta le onde sinusoidali L1, L2 e L5 (1.20 cm) e il range si lega al valore dello sfasamento φ + numero N di cicli dal tempo t_0 . Questa misura presenta 2 problemi (che devono essere risolti).

\rightarrow Ambiguità di fase N

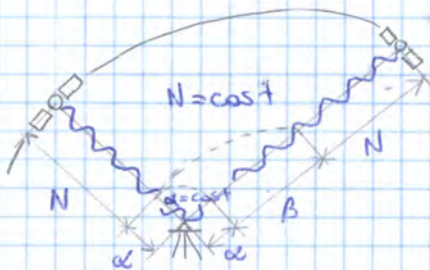
\rightarrow ASINCRONIA DELL'OROLOGIO $\sigma_r(t)$

Cosa succede nel ricevitore GPS durante la misura di fase?

Il ricevitore riesce a misurare nella portante

\rightarrow SFASAMENTO che, in termini di cicli, è compreso tra 0 e 2π

\rightarrow INCREMENTO DI SFASAMENTO nel tempo.

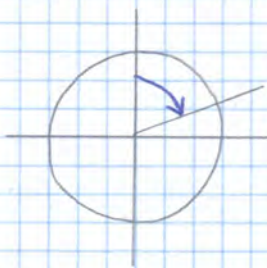


In particolare, si nota che in 20.000 km il numero N di cicli della portante tra satellite e ricevitore è molto alto.

D'altra parte, il ricevitore riceve un segnale, ne genera un altro avente la stessa lunghezza d'onda e li correla. In questo modo, esso misura lo sfasamento.

Questa però è una misura istantanea perché i satelliti si muovono lungo le loro orbite con una velocità di 4 km/s. Così, in 1 secondo, il satellite si sposta di 400 m e cambia il numero di cicli.

\Rightarrow all'inizio, si ha una misura di sfasamento e un certo numero di cicli; un istante dopo, si ha un'altra misura di sfasamento e un altro numero di cicli (ciò complica la questione).



In realtà, se si assume che il ricevitore sia fermo (anche se non è in un sistema di riferimento inerziale) e il satellite si sposti, il ricevitore è in grado di rilevare la VARIAZIONE DI FASE durante il moto del satellite, con valori anche superiori a 2π .

All'inizio (tempo t_0) quando si accende il ricevitore e si stabilisce il primo contatto, si misura un certo sfasamento α . Poi il satellite si sposta e il ricevitore continua a tracciarlo, valutando lo sfasamento in ogni istante e dunque la variazione β (che può anche superare 2π). Si nota che

\rightarrow lo sfasamento aumenta se il satellite si allontana.

8 Tecniche di eliminazione o mitigazione dei biases

Per arrivare a una precisione di millimetri, occorre calcolare i biases poiché questi sono errori molto maggiori.

In genere, per ottenere un posizionamento di precisione si usano 3 tecniche (anche assieme)

→ **modellazione**: si usano i modelli degli errori. Alcuni di essi, infatti, possono essere modellizzati perché ad es. l'errore troposferico dipende da temperatura e pressione. Altri errori modellizzabili sono l'errore ionosferico e l'errore di orologio del satellite. Essendo però dei modelli, questi sono semplificati e riescono a rimuovere solo parte dell'errore e non tutto.

→ **combinazione**: si possono usare codici e fasi su più frequenze, quindi i ricevitori ricevono su più frequenze. Ad es. si possono confrontare lo pseudorange e la fase (se si hanno le misure) e si fa la differenza.

$$P_r^j = p_r^j - c dT_r + c dT^j + I_r^j + T_r^j + E_r^j + \mu_r^j + \varepsilon$$

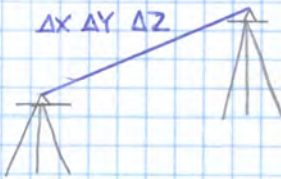
$$\Phi_r^j = p_r^j - c dT_r + c dT^j - I_r^j + T_r^j + E_r^j + \mu_r^{\Phi} + \varepsilon - \lambda_r^j$$

$$P_r^j - \Phi_r^j = 2I_r^j$$

Da questa equazione si può ricavare un valore approssimato dell'errore ionosferico, che poi si può togliere.

→ **differenziazione**: è un metodo dove si usano le differenze tra misure di stazioni o satelliti diversi e dunque non si fa un posizionamento assoluto ma uno relativo con almeno 2 ricevitori che vedono lo stesso satellite. In questo caso, l'incognita non è più la posizione assoluta delle stazioni ma la posizione relativa, cioè il vettore tra una stazione e l'altra, detto BASELINE $(\Delta X; \Delta Y; \Delta Z)$.

Si nota che la baseline è ricavata a partire dalle effermeridi e dunque dalle coordinate $(x^j; y^j; z^j)$. Allora la baseline è ricavata nel sistema di riferimento dei satelliti e dunque nel sistema di riferimento geocentrico.



Questo metodo è efficace perché i biases sono difficili da modellizzare ma sono correlati spazialmente e dunque sono simili a punti vicini sulla superficie terrestre. Se si esegue un posizionamento differenziale e si fa la differenza dei vettori, in questa differenza si eliminano o si riducono gli errori nelle osservazioni. Ci si pensa è più utile da quando i punti a terra sono vicini rispetto alla distanza satellite-stazione, cioè sul centinaio di km. In questo caso, però, intervengono differenze di pseudorange o differenze di fase.

Da qui si passa al posizionamento assoluto eseguito mediante vincolamento della rete locale in una rete nazionale dove le coordinate nel sistema di riferimento globale sono note con maggiore precisione.

Così, attraverso il range ρ_{AB}^j , si può ricavare il vettore AB e interviene solo la differenza di errore d'orologio del ricevitore, che si può considerare come unica incognita perché ci sono solo 2 ricevitori.

⇒ con 4 satelliti si può fare il posizionamento relativo alle differenze prime di codice e ricavare in modo abbastanza preciso, con precisione

$$\frac{\lambda c/A}{100} = 3 \text{ m}$$

il vettore tra A e B.

A livello di FASE, si ha invece (trascurando multipath ed errore accidentale)

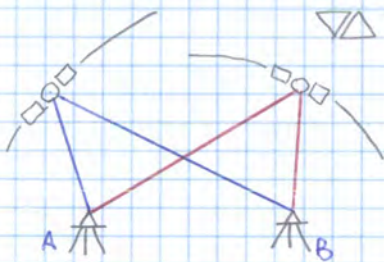
$$\Phi_A^j = \rho_A^j - cdT_A + cdt^j - I_A^j + T_A^j + E_A^j - \lambda N_A^j$$

$$\Phi_B^j = \rho_B^j - cdT_B + cdt^j - I_B^j + T_B^j + E_B^j - \lambda N_B^j$$

$$\Phi_{AB}^j = \Phi_B^j - \Phi_A^j = \rho_{AB}^j - cdT_B + cdT_A - I_{AB}^j + T_{AB}^j + \cancel{E_{AB}^j} - \lambda N_{AB}^j$$

≈ 0

Grazie alla differenza, intervengono solo gli errori di orologio dei ricevitori, la differenza tra errori ionosferici e troposferici, l'errore di effemeridi (trascurabile) e la differenza di ambiguità, che è un numero intero poiché è differenza di numeri interi.



Si può anche fare una differenza di differenza. Infatti, con un posizionamento relativo alle differenze prime, occorrono almeno 4 satelliti perché bisogna determinare le componenti del vettore baseline e l'errore d'altra parte, con almeno 2 satelliti si può fare un **posizionamento relativo alle differenze doppie**:

2 ricevitori A e B osservano 2 satelliti j e k. Da qui si possono scrivere 6 equazioni di osservazione e un'equazione di differenze doppie, mediante differenza delle singole differenze.

Si parte dalle differenze doppie di codice

$$\rho_{AB}^j = \rho_{AB}^j - cdT_B + cdT_A + I_{AB}^j + T_{AB}^j$$

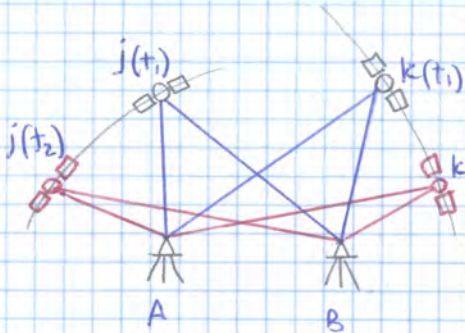
$$\rho_{AB}^k = \rho_{AB}^k - cdT_B + cdT_A + I_{AB}^k + T_{AB}^k$$

$$\rho_{AB}^{kj} = \rho_{AB}^{kj} + I_{AB}^{kj} + T_{AB}^{kj}$$

Nella sottrazione si elimina l'errore d'orologio e così la differenza doppia presenta la differenza doppia relativa a range, ionosfera e troposfera. Queste ultime 2 componenti possono essere trascurate se i ricevitori sono vicini.

⇒ con almeno 3 differenze doppie si può fare il posizionamento relativo alle differenze doppie di codice, cioè ricavare il vettore baseline tra le stazioni.

Oltre alle differenze doppie, si può fare un **posizionamento relativo alle differenze triple**.



Esse sono delle **DIFFERENZE DOPPIE NEL TEMPO**, calcolate con l'ipotesi che l'ambiguità N sia costante nel tempo (ipotesi valida perché il ricevitore misura l'angolo β).

In particolare, si considerano la differenza doppia all'epoca t_1 e la differenza doppia all'epoca t_2 e se ne fa la differenza. Nelle singole differenze doppie si omettono le componenti ionosferiche e troposferiche perché la misura è limitata a pochi secondi.

$$\begin{aligned} \Phi_{AB}^{Ej}(t_1) &= \rho_{AB}^{Ej}(t_1) - \lambda N_{AB}^{Ej} \\ \Phi_{AB}^{Ej}(t_2) &= \rho_{AB}^{Ej}(t_2) - \lambda N_{AB}^{Ej} \\ \hline \Phi_{AB}^{Ej}(t_{12}) &= \rho_{AB}^{Ej}(t_2) - \rho_{AB}^{Ej}(t_1) \end{aligned}$$

Anche se la posizione dei satelliti E e j cambia, questa è nota agli istanti t_1 e t_2 e così, siccome si elimina l'ambiguità, da questa differenza si **RICAVA IL VETTORE AB**.

↳ vantaggio delle differenze triple

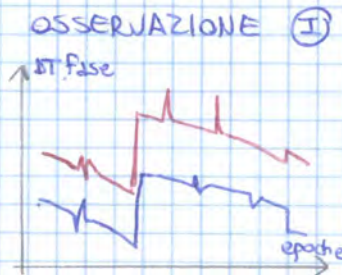
Però, questa è il miglior sistema, ma è meno preciso rispetto alle differenze doppie perché le differenze triple sono fortemente correlate, poco ridondanti e poco precise. Inoltre, si richiedono due epoche per formare una differenza triple e dunque la tecnica non può essere applicata al posizionamento **cinematico**.



Del resto, passando dall'epoca t_1 a t_2 , i satelliti j e k si spostano poco. La soluzione così è poco precisa perché è come se si cercasse di calcolare bene la posizione di un punto a 20.000 km di distanza da 2 punti posti secondo una base di pochi km (nel caso dei satelliti, il discorso è uguale e ribattuto).

Le differenze triple sono comunque fatte perché danno una soluzione **APPROSSIMATA** che, inserita nelle differenze doppie, permette di ricavare un valore più approssimato di ambiguità di fase.

Se invece si facesse passare più tempo tra t_1 e t_2 (es. 1h), la posizione iniziale e la posizione finale dei satelliti sarebbero molto diversi e dunque la precisione sarebbe maggiore. Ciò però conviene poco dal punto di vista della misura perché impone di aspettare molto tempo.



l'errore (ostacolo) può anche essere in un solo ricevitore

OSSERVAZIONE (I): l'ipotesi che l'ambiguità iniziale sia la stessa tra epoche iniziali e finali non è sempre verificata.

Infatti, le differenze triple hanno un andamento parabolico e siccome la base AB è nota e fissa, queste curve rappresentano la variazione di spostamento dei satelliti (e rispetto a j). Queste curve però presentano dei picchi. Infatti, se nel mezzo c'è un ostacolo (o ci sono problemi elettronici), si perde il contatto e dunque il ricevitore ricalcò la fase (tra 0 e 2π) e risaliva. Si ha così il così detto **salto di fase (cycle slip)** e si perde l'ambiguità di fase iniziale, cioè

$$N_{AB}^{jk}(t_2) \neq N_{AB}^{jk}(t_1) \rightarrow \text{è diverso x via del riconteggio}$$

Ciò determina un'incognita in più e fa sì che non si possa semplificare il termine N nelle differenze triple.

VI) SI RICALCOLA LA SOLUZIONE ALLE DIFFERENZE DOPPIE ($\Delta X; \Delta Y; \Delta Z$) INT, che costituisce la vera soluzione di base-line ed è la più precisa.

Si nota che qui si è parlato di 1 satellite e di 1 differenza doppia. Se però ci sono 4 satelliti, si calcolano 3 differenze doppie indipendenti e se ci sono 10 satelliti, si calcolano 9 differenze doppie. Queste 9/9 devono porta a soluzioni base-line tutte intere (cioè con tutti i valori N_{10} interi). Inoltre, nelle differenze doppie compare la lunghezza d'onda. Sapendo che ci sono 3 frequenze, allora questo deve avvenire a tutte le frequenze.

⇒ con 10 satelliti, bisogna fissare 9 interi per ciascuna frequenza (9 x L1; 9 x L2, etc.)

OSSERVAZIONE: occorre prestare attenzione perché nel fissaggio d'intero si approssima N con l'intero più vicino ma in realtà il problema è multidimensionale.

In altri termini, se si fissa l'intero più vicino a una differenza doppia, la differenza doppia degli altri satelliti si "sposta" e assume un valore diverso da quello calcolato. Ad es, si può avere

Valore iniziale	Si impone che	Valore finale
28,15		⇒ 28,00
33,45	28,15 → 28,00	33,90
-78,25		-78,45

L'insieme dei valori deve essere intero e, siccome le differenze doppie sono correlate non è detto che l'approssimazione all'intero più vicino sia il sistema migliore perché può peggiorare la situazione.

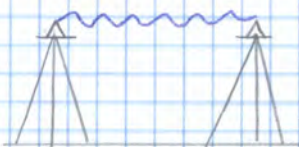
Detto ciò, l'algoritmo del DGPS si applica a misure di codice e di fase e richiede almeno 2 ricevitori, cioè il **base** e il **rover**:

oggi i ricevitori GPS sono delle radio riceventi che ricevono sempre la stessa frequenza, visto che sono di tipo C/A (lavorano sui codici). I ricevitori moderni, però, non solo riescono a ricevere codice e fase, bensì sono dei veri computer. Infatti, oltre a poter calcolare codice e fase, essi possono memorizzare i dati e possono seguire l'algoritmo del posizionamento differenziale. Inoltre, insieme al ricevitore GPS, è incluso un radiomodem o un GPS che si collega a Internet e permette di ricevere i dati di un'altra stazione.

Pertanto, a fare posizionamento e calcolo differenziale, occorrono:

→ dati del ricevitore A

→ dati del ricevitore B



Se A trasmette i dati a B e B ha un radio che riceve in tempo reale i dati da A, la stazione B può fare la differenza doppia poiché dispone dei dati di A. Da qui la stazione B inizia a fare la procedura, con point-positioning, differenze prime, differenze doppie, differenze triple, differenze doppie A+B e, dopo alcuni minuti, si fissa l'ambiguità.

In questo caso, la stazione B è il rover e la stazione A è il master. Infatti, se B riceve i dati del satellite e dell'altra stazione e fa tutta la procedura fissando l'ambiguità, non occorre più elaborare i dati in post-processing e si legge sul monitor il risultato Δ_{AB} .

Se poi A trasmette anche la propria posizione, si ottiene pure la posizione di B.

$$PRC^j(t) = PRC^j(t_0) + RRC(t-t_0) \quad t-t_0 = \text{latenza}$$

Per semplicità, si assume che RRC sia nullo e si applica la correzione allo pseudorange del ricevitore B con il satellite j all'epoca t. In particolare, si somma al suo pseudorange questa correzione, che prende il nome di **COLLEZIONE DIFFERENZIALE**.

$$\begin{aligned} P_{B, \text{corretta}}^j &= P_B^j(t) + PRC(t) = \\ &= \rho_B^j(t) + \cancel{cdT^j(t)} - cdT_B(t) - \cancel{cdT^j(t)} + cdT_A(t) + \\ &\quad + [E_B^j(t) - E_A^j(t)] + [I_B^j(t) - I_A^j(t)] + [T_B^j(t) - T_A^j(t)] + \\ &\quad + [E_B^j - E_A^j] = \\ &= \rho_B^j(t) - c \Delta dT_{AB}(t) + \Delta E_{AB}^j(t) + \Delta I_{AB}^j(t) + \Delta T_{AB}^j(t) + \varepsilon_{AB}^j \end{aligned}$$

$$P_{B, \text{corretta}}^j = \rho_B^j(t) - c \Delta dT_{AB}(t) + \Delta E_{AB}^j(t) + \Delta I_{AB}^j(t) + \Delta T_{AB}^j(t) + \varepsilon_{AB}^j$$

Con questa operazione, si nota che

- si elimina l'errore d'orologio del satellite
- si riducono secondo delle differenze prime gli errori ionosferico, troposferico e di orologio del ricevitore. Se poi le stazioni sono vicine, questi possono essere eliminati
- rimane l'errore ε , nella forma di differenza prima.

Si nota che è come se si fosse fatta una differenza prima, ma si è semplicemente sommato il segnale che si riceve (che è numericamente piccolo).

Il rover calcola poi il range e l'errore combinato di orologio del ricevitore $\Delta dT_{AB}(t)$ (gli errori sono trascurati)

→ DGPS di Fase

In modo simile a prima, si considera la pseudorange di Fase, data da

$$\Phi_A^j(t_0) = \rho_A^j(t_0) + cdT^j(t_0) - cdT_A(t_0) + \lambda N_A^j + E_A^j(t_0) + I_A^j(t_0) + T_A^j(t_0) + \varepsilon_A^j$$

Il range è sempre dato da Pitagora

$$\rho_A^j(t) = \sqrt{(X^j(t) - X_A)^2 + (Y^j(t) - Y_A)^2 + (Z^j(t) - Z_A)^2}$$

In modo simile, si calcola la **correzione differenziale di fase CPC**

$$\rho_A^j(t_0) - \Phi_A^j(t_0) = CPC_A^j(t_0)$$

In questo caso, essa vale

$$CPC_A^j(t_0) = -cdT^j(t_0) + cdT_A(t_0) + \lambda N_A^j + E_A^j(t_0) + I_A^j(t_0) + T_A^j(t_0) + \varepsilon_A^j$$

Si applica la correzione alla misura di Fase di B.

Il tempo richiesto x il posizionamento RTK (esse' il tempo in cui il ricevitore a cui si trasmette la correzione differenziale ~~è~~ fissa l'ambiguità) oggi richiede 10-15 ~~meno~~ secondi, se c'è una buona costellazione.

Stazioni permanenti GNSS

1 Si è già visto che le stazioni permanenti sono utili x il post-processing e x il posizionamento in tempo reale (perché possono trasmettere i dati di correzione differenziale)

2 PROPRIETÀ DELLE STAZIONI PERMANENTI

- esse presentano un buon ricevitore geodetico che acquisisce in modo continuo più frequenze e costellazioni. In fatti, siccome i dati sono diffusi a livello mondiale, bisogna lavorare su più costellazioni
- esse hanno una materializzazione stabile e di precisione, cioè una collocazione fisica netta.
- esse hanno un collegamento ex centro GPS e topografico, x eventuale ripristino
- esse forniscono i dati all'utenza mediante Internet
- molte sono dotate di un buon orologio. A volte, si può usare un orologio esterno collegato e molto più preciso, invece di quello interno.
- alcune forniscono le correzioni differenziali e i dati in tempo reale.

3 SCOPI DELLE STAZIONI PERMANENTI

→ mantenimento del sistema di riferimento:

è l'applicazione più importante e di fatto si realizza un sistema di riferimento insieme alle varie stazioni permanenti o altri tipi di stazione.

Inanzitutto, il SISTEMA DI RIFERIMENTO contiene la teoria fisica e le approssimazioni x definire gli assi coordinati e il sistema di riferimento in cui è nato il GPS è il World Geodetic System (WGS) 1984.

In seguito, la comunità internazionale si è organizzata e ha definito un sistema di riferimento più preciso e fondato non solo sul GPS ma anche altri tipi di misura (es. misure interferometriche). Di fatto, questo è un sistema di riferimento legato alla Terra e si dice International Terrestrial Reference System (ITRS).

Questo sistema di riferimento si materializza in una serie di punti a terra che costituiscono l'INTERNATIONAL TERRESTRIAL REFERENCE FRAME (ITRF), aggiornato al 2016.

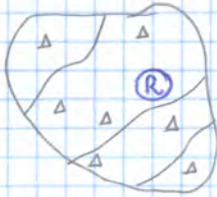
↳ x FRAME si intende la realizzazione pratica del sistema di riferimento, costituita da una rete di punti di cui sono note coordinate e velocità.

Oltre a questo sistema di riferimento internazionale, esistono dei sistemi di riferimento continentali.

In Italia, il primo riferimento è dato da

→ ETRS = European Terrestrial Reference System

→ ETRF2000 = European Terrestrial Reference Frame 2000 (quello usato oggi)



In realtà, gli errori ionosferico e troposferico sono spazialmente correlati (molto simili). Pertanto, si potrebbe calcolare e modellare questi errori x curve di livello (ad es. un modello di differenze doppie, che dà il bias residuo ionosferico) e, in questo modo, si possono allontanare di molto le stazioni permanenti, poiché si interpola l'errore su tutta la superficie di riferimento.

In questo modo, se si fornisce al rover il valore di ritardo ionosferico e troposferico, esso può fare il posizionamento in tempo reale tenendo conto del vero valore dell'errore. L'aspetto interessante è che l'errore non è più trascurato, bensì è calcolato e interpolato.

⇒ **aumenta molto la precisione del posizionamento in tempo reale** e questo è reso quasi indipendente dalla posizione rispetto alla stazione permanente, poiché in ogni punto è noto il valore dell'errore.

Più nel dettaglio, le stazioni permanenti sono dislocate nel territorio e non devono ricalcolarsi le loro coordinate (sono note) ma ricalcolano gli errori ionosferico e troposferico, li modellano su una superficie e trasmettono all'utente. Così l'utente può conoscere i valori interpolati e fare un posizionamento anche a distanze master-rover superiori a 15 km.

In particolare, le stazioni permanenti possono essere usate in una rete di stazioni permanenti che contemporaneamente osservano gli stessi satelliti, note le coordinate corrette e anche a distanze di 40-80 km. Un centro di controllo raccoglie i dati delle stazioni permanenti e ricava non le coordinate, bensì gli errori sistematici in quei punti, interpola i valori e li trasmette agli utenti. In questo modo, esso può fare il posizionamento.

Questo sistema di posizionamento in network di stazioni si dice **NRTK** (Network RTK).

In Piemonte, esiste un sistema gratuito detto SPIN GNSS = Servizio di Posizionamento Interregionale GNSS.

→ calcolo dei biases

→ modellazione dei biases:

si fa un modello dei biases sull'area della rete e, tipicamente, l'errore varia

→ nello spazio, di circa 1m ogni 100 km (cioè 10 ppm)

→ nel tempo, di 15 cm in 1 minuto (cioè 15 ppm)

Tra l'altro, gli errori variano in modo diverso, poiché l'errore ionosferico può variare più velocemente rispetto a quello troposferico e, di conseguenza, i due errori possono essere trasmessi anche a tempi diversi.

La modellazione può seguire diversi metodi di interpolazione

→ INTERPOLAZIONE LINEARE:

è la modalità più generale x fare l'interpolazione e prevede di applicare alla stazione di ciascuna stazione un coefficiente dipendente dalla posizione del rover rispetto alla stazione permanente.

→ MEDIA PESATA, in cui il peso è il reciproco della distanza

→ INTERPOLAZIONE SU SUPERFICIE, con polinomio di basso ordine

→ COLOCAZIONE AI MINIMI QUADRATI (più complessa).

Quello che è importante è che l'interpolazione è fatta in tempo reale.

dal centro di controllo o dal ricevitore

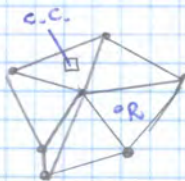
2 Funzionamento dei centri di controllo e dei ricevitori:

il sistema classico prevede che il centro di controllo, una volta acquisiti i dati delle stazioni permanenti, calcoli e fissi a intero l'ambiguità di fase x tutta la rete e da qui esso

→ si modella i biases all'interno delle stazioni

→ calcola le correzioni differenziali da trasmettere nella posizione del rover

Da qui si calcola la posizione del rover.



È chiaro però che, se il software di sistema calcola la correzione x ogni utente, esso deve conoscere la posizione dell'utente

⇒ è richiesta la conoscenza della posizione dell'utente, che deve essere trasmessa da parte dell'utente.

In questo modo, l'utente non solo deve richiedere i dati al centro di controllo, ma deve anche inviare una propria posizione approssimata, ad es. ottenuta con il ricevitore da telefonino, con un errore di 10 m.

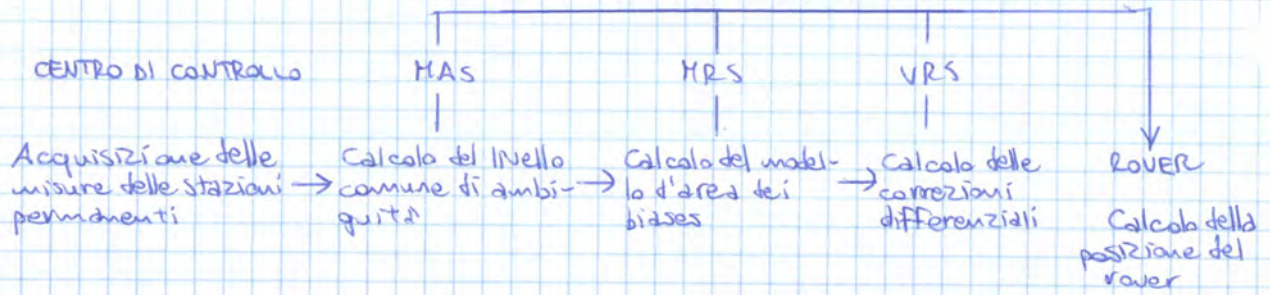
Il sistema così trasmette l'informazione a una stazione "fittizia" posta a 10 m di distanza dal rover.

Questo modo si dice **virtual reference station (VRS)** perché è come se il rover avesse una stazione di riferimento virtuale nella sua posizione o lì vicino (riceve la correzione dell'altra stazione nella sua posizione o lì vicino)

⇒ il centro di correzione controllo interpola le correzioni differenziali della rete GPS in una posizione prossima al rover, ottenendo quello che si avrebbe in una stazione virtuale posta nella posizione di chiamata.

Da qui, il rover vede una stazione di base virtuale posta a meno di 1 m e con essa realizza una base-line quasi nulla, annullando così gli errori spazialmente correlati.

SCHEMA



3 Calcolo dei biases:

una volta fissata l'ambiguità di Fase, come si calcolano i biases?

Si considerino le equazioni di codice e di fase su 2 frequenze.

$$P_k^p(1) = \rho_k^p - cdT_k + cd + I_k^p + T_k^p + \epsilon_1$$

$$P_k^p(2) = \rho_k^p - cdT_k + cd + \alpha I_k^p + T_k^p + \epsilon_1$$

$$\Phi_k^p(1) = \rho_k^p - cdT_k + cd + I_k^p + T_k^p + \epsilon_1^{\Phi} - \lambda_1 N_{1,k}^p$$

$$\Phi_k^p(2) = \rho_k^p - cdT_k + cd + \alpha I_k^p + T_k^p + \epsilon_2^{\Phi} - \lambda_2 N_{2,k}^p$$

Innanzitutto, a semplicità si sono trascurati l'errore di orbitale e il multipath (esso è un errore sistematico ma, dopo 1 ora di rilievo, diventa errore accidentale a media nulla).

Inoltre, nella misura di fase, l'errore ionosferico rappresenta un anticipo di fase e si riporta dunque con segno "-".

La cosa importante è che, avendo frequenze diverse, l'errore ionosferico presenta comportamento diverso e la II equazione presenta una percentuale di errore ionosferico.

Si sa che l'errore ionosferico si può esprimere con uno sviluppo

$$I = \frac{1}{f^2} - \frac{1}{f^4} + \frac{1}{f^6} + \dots \quad f = \text{frequenza del segnale}$$

Trascurando i termini successivi, si può dire che l'intensità sia ~~pro~~ inversamente proporzionale al quadrato della frequenza e dunque la percentuale vale

$$\alpha = \frac{f_1^2}{f_2^2}$$

Ricordandosi che il segnale L1 ha frequenza $154f_0$ e il segnale L2 ha frequenza $120f_0$, si ottiene

$$\alpha = \left(\frac{154f_0}{120f_0} \right)^2 \approx 1,647$$

A questo punto, visto che si hanno n misure sullo stesso satellite (2 di codice e 2 di Fase), si eliminano i biases si può procedere alla COMBINAZIONE DELLE EQUAZIONI.

Innanzitutto, si esegue una combinazione del tipo

$$P_{IF} = \beta P(1) + \gamma P(2)$$

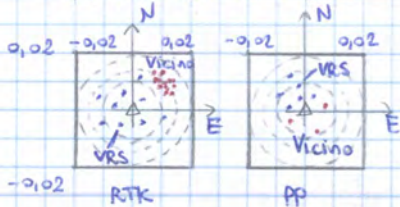
$$\Phi_{IF} = \beta \Phi(1) + \gamma \Phi(2)$$

Così l'utente trova il proprio rilievo quadrato in un sistema di riferimento e le coordinate sono ottenute in tempo reale.

SVANTAGGIO: il posizionamento RTK è meno preciso rispetto al posizionamento statico.

VANTAGGIO: questo sistema permette di avere una GUIDA in tempo reale (ad es. x picchettare).

PRECISIONE:



Si può notare che, con il posizionamento VRS, si ottiene una precisione di $\pm 1,5$ cm. Viceversa, se si usa la stazione più vicina e non si sfrutta dunque la correzione derivante dal VRS, i dati sono ancora abbastanza precisi ma molto più devianti. In point positioning, c'è maggior dispersione.

OSSERVAZIONE: alla rete si può associare un TEMPO PER RAGGIUNGERE IL FISSAGGIO NELL'AMBITO DI FASE con un ricevitore a 2 frequenze. Oggi, grazie al miglioramento della costellazione e del software di rete, sono sufficienti 10 secondi a tale operazione. Ciò permette di usare strumenti a una frequenza e a basso costo (Mass Market Products) e ottenere comunque una buona precisione.

2 TIPOLOGIE DI GIS:

le tipologie si legano alle possibili situazioni in cui il GIS è usato

→ esso può essere utilizzato x ATTIVITÀ DI PIANIFICAZIONE a livello nazionale o regionale, in cui non si sa dove si vuole arrivare di preciso ma si vuole orientare la decisione. In questo caso, si parla di **GIS descrittivo** e si caratterizza di dati eterogenei e non molto accurati.

↳ è un sistema di supporto alla decisione, ad es. x l'attuazione di politiche di governo.

→ essa si può usare anche x ATTIVITÀ DI GESTIONE dei dati interni all'utente (es. una società che fornisce servizi).

Si parla di **GIS gestionale** e qui si sanno gli oggetti e le informazioni su cui collegarsi. I dati sono così omogenei.

3 Dati:

essi costituiscono il cuore del GIS e possono essere di tanti tipi

→ **dati geometrici**

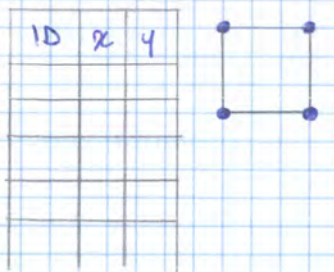
→ **dati descrittivi**

→ **dati descrittivi**, che descrivono i dati (cioè **METADATI** = dati dei dati).

4 Dati geometrici:

i dati geometrici descrivono la forma dell'oggetto e ciò può avvenire in 2 forme

→ **modalità vettoriale** (DATI VETTORIALI):



si utilizzano solo delle linee spezzate che, chiuse, formano delle aree. Tali linee sono un insieme di vertici e, x ogni vertice, si hanno delle coordinate precise. Dunque OGNI FORMA È INTERPRETATA COME UNA SEQUENZA DI PUNTI

⇒ un dato vettoriale è un insieme di coordinate scritte secondo una certa sequenza x disegnare gli oggetti

→ **modalità raster** (DATI RASTER - es. ortofotocarta)

essa prevede di sovrapporre un reticolo all'oggetto, ad es. una linea, e a ogni elemento del reticolo si associa un unico colore. Dove si trova la linea, si colora tutto.

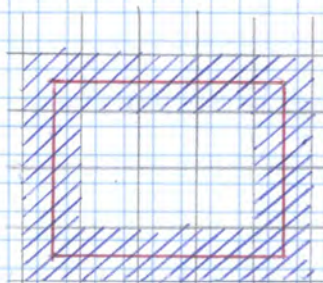
All'interno dell'elaboratore, ogni cella non presenterà un colore, bensì un numero che rappresenta tale colore

⇒ il dato raster è una **MATRICE DI NUMERI** in cui ogni cella (pixel), corrisponde a una porzione di spazio

Questo dato è molto più semplice ma è meno logico perché ogni pixel non è in relazione con quelli vicini

In altri termini, il calcolatore non può capire che i pixel allineati formano una linea e dunque non può conoscere l'oggetto. Occorre così una descrizione del contesto.

↳ l'elaboratore, in teoria non può fare calcoli (es. area) sull'oggetto



255	255	255	255	255
255	0	0	0	255
255	0	0	0	255
255	255	255	255	255

In questo modo, la cartografia ^{numerica} presenta stessi requisiti, stessa funzione e stesso contenuto della cartografia tradizionale ma presenta una profonda differenza

→ la cartografia tradizionale è un prodotto in forma di disegno che contiene dei dati e, in forma implicita, le coordinate.

→ la cartografia numerica è un archivio di coordinate che contengono in forma implicita la visualizzazione sotto forma di disegno.

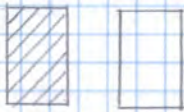


Inoltre, nella cartografia tradizionale, si segue un certo schema logico

→ ci si trova di fronte a una porzione di realtà che si dice OGGETTO. Essa è un elemento naturale/artificiale non ulteriormente suddivisibile (es. casa)

→ l'oggetto è riportato in carta e si parla di ENTITÀ, che è la rappresentazione cartografica dell'oggetto

→ a tracciarlo, si sfruttano degli ELEMENTI GEOMETRICI, ad es. una linea continua che forma l'entità con cui si descrive l'oggetto reale.



Nella cartografia numerica questa schematizzazione può essere superata e si parla di **cartografia numerica orientata all'oggetto**:

l'oggetto reale è rappresentato da un oggetto cartografico caratterizzato da dei dati (attributi) e questo è un'entità autoconsistente, nella cui definizione sono insite anche le operazioni eseguibili (oltre agli attributi).

In questo modo, all'oggetto si possono associare diversi tipi di rappresentazione cartografica (es. 3D, 1:2000, 1:1000, etc.) e si possono eseguire calcoli di volume e di superficie.

PROPRIETÀ → TIPOLOGIE DI CARTOGRAFIA NUMERICA:

la distinzione è più o meno simile a quella delle carte al tratto

→ **carta planimetrica**:

tutte le entità e gli elementi geometrici sono a quota zero. Questa carta descrive solo gli elementi caratteristici della planimetria mediante coordinate EN e relativo codice

→ **carta plano-altimetrica**:

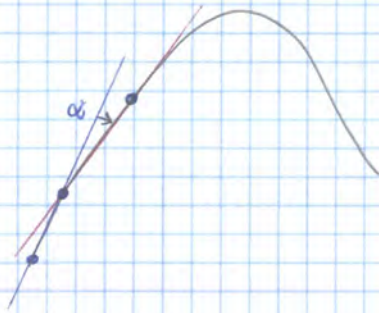
tutte le entità e gli elementi geometrici sono a quota zero, eccetto i punti quotati e le curve di livello. Ora intervengono le coordinate ENQ.

→ **carta tridimensionale**:

tutti gli oggetti della realtà sono descritti con entità tridimensionali su una base di appoggio tridimensionale (non più a quota zero).

Intervengono le coordinate ENQ

→ **tecnica a vettore:**



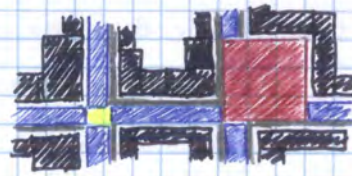
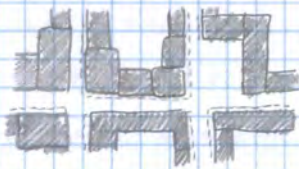
essa permette di scegliere punti più densi in curva e meno densi in curva perché si fissa

→ spostamento minimo S_{min} , che permette di evitare di fare tanti rilievi vicino a un punto, nel caso non ci si possa muovere (es. semaforo)

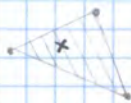
→ angolo minimo α_{min} tra la direzione precedente e la direzione attuale, al di sopra di cui si acquisisce il punto. In questo modo, si acquisiscono pochi punti in rettilineo e tanti punti in curva.

A livello di risultato, nella cartografia tradizionale l'utente può individuare tutte le entità (es. edifici e marciapiedi) e anche desumere altre informazioni non direttamente disegnate e aggregazione logica (es. piazze e incroci).

Nella cartografia numerica tutte le entità devono essere definite (oggetto), descritte (elementi geometrici) e rappresentate (entità e codici). In altri termini, si definiscono in modo esplicito ~~tutte~~ le entità, cioè tronchi stradali, nodi, etc.



→ **INFORMAZIONE ALTIMETRICA**



Nella cartografia tecnica, per descrivere la quota di un punto dalle curve di livello, si sfrutta la retta di massima pendenza, che è perpendicolare alla curva di livello superiore.

Per definire la quota di un punto interno a punti quotati, si esegue un'interpolazione lungo il piano passante a tali punti.

Nella cartografia numerica, l'informazione altimetrica è data in 4 categorie

→ PUNTI QUOTATI

→ CURVE DI LIVELLO

→ **quota dei punti** che descrivono la planimetria

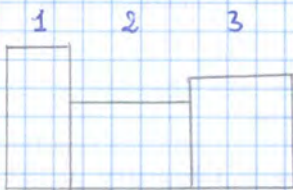


Tutti questi punti sono memorizzati con un codice e le coordinate ENA dove q è la quota del terreno.

In presenza di un oggetto, a convenzione l'altimetria è descritta con la quota di piede, ossia l'intersezione dell'oggetto con il terreno.

Se l'oggetto non si interseca con il terreno, lo si descrive con la quota effettiva.

→ **quota delle unità volumetriche**



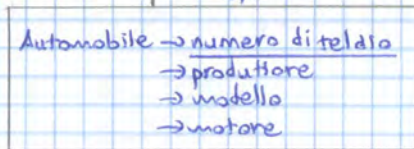
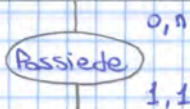
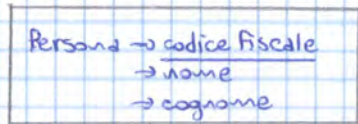
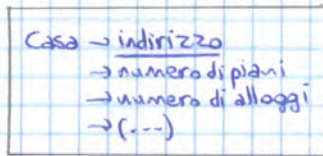
Nella cartografia numerica è anche presente una rappresentazione tridimensionale che evidenzia la volumetria, importante per la tassazione.

Ad es. un edificio si spezza in 3 parti descritte da elementi geometrici rettangolari ad altezze costanti e diverse (UNITÀ VOLUMETRICHE) e sono separati dalle DIVISORI VOLUMETRICHE. Per ogni entità volumetrica, esiste un punto quotato con la quota della gronda.

Questo punto, detto centroide, si accompagna alle coordinate dei punti che definiscono il contorno dell'edificio.

Focalizzandosi sulla formalizzazione, essa avviene tipicamente secondo il **modello entità e relazioni**:

la realtà si rappresenta mediante entità (oggetti), attributi (proprietà) e relazioni (associazioni), secondo una rappresentazione grafica in diagrammi.



L'entità è la rappresentazione di un oggetto del mondo reale di cui si vuole registrare l'informazione.

A essa si associano diversi attributi, dei quali il più importante è l'IDENTIFICATORE, che deve essere unico tra tutte le entità appartenenti a quella classe.

Ad es. x le case, con l'entità non si descrive una casa, bensì tutte le case. Qui l'identificatore è l'indirizzo (è diverso di casa in casa).

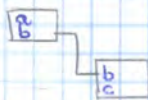
Tipicamente, l'entità si rappresenta con un rettangolo.

In seguito, si riportano le RELAZIONI, che legano più entità. Queste si rappresentano come un ellisse che collega le entità, contenente al suo interno un verbo.

A ciascuna relazione, si associano 2 numeri che sono la **CARDINALITÀ DELLE RELAZIONI** e rappresentano il minimo e massimo numero di possibili relazioni fra le due entità. Ad es. una persona può possedere da 0 auto a n auto (tante, ma non si sa fino a quanto). Invertendo, un'automobile è posseduta almeno da 1 persona ed è posseduta al massimo da 1 persona, x il codice della strada.

Passando invece alla schematizzazione, essa rende le entità più prossime alla macchina.

Studente
Nome
Cognome
Matricola
(descrizione)



In particolare, si utilizza un modello rettangolare e, x ogni attributo, si indica il dato che è contenuto.

In seguito, si indicano le relazioni tra queste tabelle mediante delle linee che collegano gli attributi comuni. Su queste linee si riportano anche la cardinalità delle relazioni.

In realtà, la realizzazione del modello logico può essere complicata dalla presenza di attributi particolari:

→ **ATRIBUTI COMPLESSI**:

essi sono attributi formati da molti pezzi, ad es. un indirizzo.

Questi possono essere scritti in modo diverso e dunque possono essere interpretati come campi diversi. Pertanto, x risalire in modo automatico a tale componente, bisognerebbe scriverli secondo un'apposita procedura.

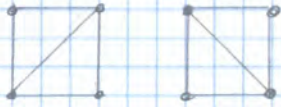
In alternativa, si può semplificare il lavoro a chi compila i dati, spezzando l'attributo nelle singole componenti (es. via, città, CAP, etc.)

→ **ATRIBUTI MULTIVALENTI**:

un esempio è un campo nome che presenta nomi diversi (doppio o triplo nome). Come prima, si potrebbe inserire un numero sufficiente di attributi x ospitare tutti i possibili nomi. In tal modo, però, nella maggioranza dei casi quei campi rimangono vuoti e si spreca memoria. Pertanto, conviene spezzare la tabella e creare 2 entità

→ entità del cognome

→ entità del nome



Inoltre, non bisogna più memorizzare i triangoli perché, grazie alla griglia regolare, ci sono solo 2 possibili triangoli tra 4 punti.

↳ con i triangoli, in ogni caso, la superficie è interpretata come piana

Spesso i punti non bastano e occorre definire altri elementi

→ **breaklines**



Esse sono linee caratteristiche che rappresentano discontinuità sia nella superficie (es. burroni) sia nella derivata prima (variazioni di pendenza).

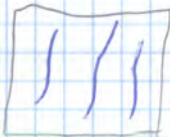
In corrispondenza di esse, si interrompono i triangoli, altrimenti il modello non approssimerebbe più la superficie del terreno.

In certe situazioni, ci sono molte linee di discontinuità (es. DEM di montagne o DSM di città).

Per limitare l'uso delle breaklines, si può allora costruire un **modello denso** di elevazione (DDEM o DDTM) o di superficie (DDSM).

Esso presenta una densità adeguata del seminato di punti, affinché si possa descrivere la superficie del territorio in modo completo senza dover descrivere direttamente le discontinuità o altri elementi.

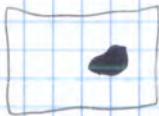
→ **elementi corografici**



Ad es. si evidenziamo la parte più bassa di una valle e la parte più alta di una catena montuosa.

Questi si possono evitare nel caso che si usi un modello denso.

→ **aree non incluse nel modello**



Esse sono aree in cui non c'è dato acquisito (es. superficie di un lago) e vanno evidenziate in modo da evitare che si estrapoli un dato laddove questo non c'è.

→ **limiti del modello**, cioè il suo bordo

↓
le aree non incluse e i limiti si riportano anche nei modelli densi

Con questi elementi, si può usare al meglio il modello altimetrico.

UTILIZZO DEL MODELLO ALTIMETRICO



Il modello altimetrico consente di descrivere la quota di ogni punto, mediante l'uso di metodi analitici e rigorosi.

In particolare, si assegna un valore a un punto non campionato attraverso i punti vicini.

Si come il terreno non è una superficie matematica, si usano delle tecniche approssimate di

→ **interpolazione**, se il punto è all'interno dell'area coperta dal modello

→ **estrapolazione**, se il punto è all'esterno dell'area coperta dal modello (sconsigliato)

Infatti, la quota di un punto è influenzata da quella dei punti più vicini.

Ciò però vale A MENO DI DISCONTINUITÀ e dunque bisogna tenerne conto perché lì si interrompe l'interpolazione (si ignorano i punti che stanno dall'altra parte).

VANTAGGI → sistema veloce ed efficiente

→ all'aumentare dell'esponente r , si ottiene una superficie liscia

SVANTAGGI → la distribuzione dei punti deve essere uniforme a causa dell'instabilità numerica, poiché

$$d_i \rightarrow 0 \Rightarrow z_i d_i^r \rightarrow \infty$$

In questi modi, si può usare il modello altimetrico e da qui generare curve di livello, carta delle pendenze (a ogni porzione di territorio si associa una pendenza), reticolo idrografico, esposizione dei versanti, zone d'ombra, irradiazione solare, etc.

+

si possono generare GIS tridimensionali.

Il principio base è comunque la conservazione del momento delle quantità di moto (o momento angolare)



se si fa ruotare un corpo (es. ruota) attorno a un asse, il vettore momento delle quantità di moto non varia in senso vettoriale (non scalare) nello spazio, rispetto a un sistema di riferimento inerziale.

Si può intuire che, sulla superficie della Terra, questo non accade. Infatti, supponendo assenza di attrito, rispetto a un osservatore solidale alla Terra nota che l'asse della ruota gira perché questo non cambia direzione e rispetto al sistema di riferimento inerziale ma non rispetto a quello dell'osservatore.

Assumendo che l'osservatore si trovi su uno sgabello girevole inizialmente fermo, se questo cerca di fare stare fermo l'asse della ruota, di fatto impone una ~~una~~ variazione di momento angolare e, a reazione, nasce un momento angolare nell'altra direzione che fa ruotare lo sgabello.

⇒ oltre a essere tangibile, si può misurare il sistema di riferimento inerziale. Infatti, si può misurare il momento torcente (quello attorno allo sgabello) che bisogna applicare se si vuole mantenere la ruota nella stessa posizione relativa e da qui ~~essi~~ si ricava il discostamento del sistema di riferimento locale rispetto a quello inerziale.

Dal fatto che la ruota non mantiene la stessa direzione, si capisce che LA TERRA NON È UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE.

Perché la Terra non è un sistema di riferimento inerziale?

Perché sulla superficie della Terra si è disturbati da delle forze, che si legano ai moti della Terra

- forze di gravità (unica non legata ai moti)
- rotazione (è il moto principale, cioè produce l'accelerazione più grande)
- rivoluzione
- precessione e nutazione
- moti millenari

Si può capire che, se si fissa un sistema di riferimento avente origine coincidente con il centro della Terra e solidale alla Terra, si vedrebbero tutti i moti eccetto la rotazione (che è di 5° ogni 20 minuti).

In realtà, un sistema di riferimento inerziale deve poter vedere ^{tutti} questi moti e dunque il sistema di riferimento ~~de~~ è sempre centrato sulla Terra ma non si muove con essa, in modo da vedere il moto di rotazione e l'accelerazione dei punti sulla superficie della Terra.

A essere più precisi, se con questo sistema di riferimento centrato sulla Terra si vede la rotazione di un punto sulla Terra, non si vede la rivoluzione ossia la rotazione completa in 365 giorni.

Allora, un migliore sistema di riferimento è fissato al centro del Sole, in modo da vedere il moto di rotazione e i piccoli moti di avvicinamento e allontanamento dal Sole da parte della Terra.

In questo modo, non si vede però il moto del Sole all'interno della galassia.

Dunque si fissa il sistema di riferimento al centro della galassia in modo da vedere il moto del Sole e i moti di rotazione e rivoluzione della Terra.

Così però non si vedono gli spostamenti della galassia a rispetto alle altre.

⇒ occorre così definire

→ SISTEMA DI RIFERIMENTO CONVENZIONALE (system), che si definisce attraverso 6 parametri che costituiscono l'**International Terrestrial Reference System (ITRS)**

a = semiasse maggiore dell'ellissoide

GM = costante gravitazione di massa della Terra

J = parametro legato ai momenti d'inerzia

ω = velocità di rotazione

→ LISTA DI COORDINATE (Frame) di alcuni punti come ad es. stazioni permanenti. Essa costituisce l'**International Terrestrial Reference Frame (ITRF)**

In questo modo/cioè con questi due elementi, si realizza il sistema di riferimento.

Si può notare che questo sistema di riferimento, basato sui satelliti, è di tipo globale e internazionale.

In realtà, esistono anche SISTEMI DI RIFERIMENTO CONTINENTALI:

Se da una parte si vuole uniformare il sistema di riferimento in tutto il mondo, dall'altra conviene ancora usare sistemi di riferimento più locali.

Ad es., infatti, l'Europa si muove di 3 cm/anno verso Nord-Est e, siccome il GPS presenta precisione millimetrica nel metodo differenziale, questo movimento si vede. Così nel 1989 quando la precisione degli strumenti cominciava ad essere elevata, si è deciso di fare la seguente procedura

→ fino al 1988 compreso, si impone che il sistema di riferimento europeo coincida con quello globale

→ dal giorno 01/01/1989, i 2 sistemi di riferimento si distaccano

In questo modo, i punti del frame presentano le coordinate sia nel sistema di riferimento internazionale sia nel sistema di riferimento continentale (oltre a questo, si riportano le velocità e il nome della placca).

CONSEGUENZA: si consideri ad es. la stazione permanente di Medicina che, nel sistema di riferimento internazionale, presenta le seguenti componenti di velocità

x via delle deformazioni della Terra ←

$$V_x = 1 \text{ cm/anno} \quad V_y = 2 \text{ cm/anno} \quad V_z = 1 \text{ cm/anno}$$

Dati questa velocità, le coordinate dovrebbero essere aggiornate ogni anno e ciò è poco pratico.

Se però si passa al sistema di riferimento continentale e si toglie dunque dalla stazione la velocità media della placca, si ottiene che

$$V_x', V_y', V_z' \rightarrow 0$$

e dunque non bisogna più aggiornare ogni anno (al più, ogni 10 anni)

Il sistema di riferimento europeo è costituito da

EUROPEAN TERRESTRIAL REFERENCE SYSTEM = ETRS

EUROPEAN TERRESTRIAL REFERENCE FRAME = **ETRF**

il sistema di riferimento europeo si dice è aggiornato da una rete di stazioni permanenti della EUREF

4 Sistemi di riferimento altimetrici

Questi si legano alle seguenti domande

→ dove va l'acqua?

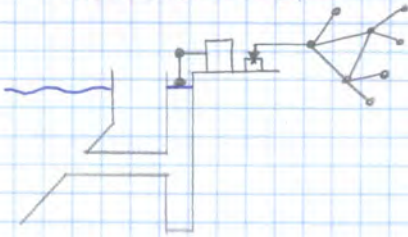
→ come si uniformano i sistemi di riferimento?

→ come si ottengono facilmente le quote da misure GNSS?

La prima domanda si lega al fatto che esistono 2 sistemi di riferimento, uno planimetrico e uno altimetrico, che sono connessi poiché il migliore ellissoide (superficie di riferimento x la planimetria) è quello che approssima meglio il geode (superficie di riferimento x l'altimetria).

D'altra parte, in ingegneria civile il progetto di un'opera non può avvenire senza la conoscenza delle forze che agiscono su di essa e conviene dividere la forma base a questi aspetti, si definiscono i sistemi altimetrici.

In Italia, il sistema di riferimento altimetrico si basa su quote dette **quote ortometriche**.



Tale sistema è convenzionale perché si riferisce al livello medio del mare M quiete, misurato mediante mareografo.

A esso si associa un caposaldo fondamentale, posto nelle vicinanze, cui si attribuisce la quota 0.

Da qui si realizzano più reti che si muovono in corrispondenza delle strade statali e le quote presentano un'approssimazione di $1/10$ mm.

In particolare, l'Italia continentale è servita dal mareografo di Genova.

Le Isole sono servite da altri mareografi poiché, al tempo in cui si sono realizzate le reti altimetriche, non esistevano reti GPS e dunque non si poteva fare il collegamento.

Oggi però esistono anche altri mareografi.

PROBLEMI → gli altri Stati hanno usato altri mareografi x quotare i loro punti e hanno istituito diversi sistemi di riferimento. Ancora oggi, rispetto alla media, i sistemi di riferimento differiscono di $30 \div 60$ cm, che è un valore molto alto. Ciò significa che ad es., partendo da un mareografo in Italia e andando a un mareografo in Germania, il dislivello finale non è nullo, anche se si è al livello del mare. Il motivo di questo problema è la convenzione.

→ il mareografo fornisce una misura del livello della superficie del mare M quiete a una certa data, a meno di maree, moto ondoso normale e anomalo e differenze di pressione atmosferica.

La superficie del mare è però posta su un solido in rotazione (la Terra) e si può trovare in spazi non simmetrici. Inoltre, intervengono differenze di salinità, che si traducono in differenti densità e differenti quote (x il principio dei vasi comunicanti), e correnti sottomarine.

Tutto ciò si traduce in fenomeni detti "QUASI STAZIONARI" perché la quota si mantiene uguale x anni, x poi cambia. Per gli stessi motivi, la superficie del mare varia x anni. Infatti, valutando la SUPERFICIE TOPOGRAFICA DEL MARE (SST - si rileva con metodi satellitari), essa può porsi a ± 20 cm rispetto alla superficie media.

Per quanto riguarda la quota, si ha invece

$$\oint dn \neq 0$$

e dunque in un percorso chiuso il dislivello non è nullo e ciò fa sì che la quota ortometrica non sia una grandezza adeguata a descrivere l'altimetria.

→ errore pratico: anche se si ignorasse il potenziale e ci si focalizzasse solo sulla quota, siccome muovendosi con una livella da A_0 ad A , si troverebbe la quota di A H_A . Muovendosi da A a B , si troverebbe invece un dislivello nullo e dunque si dedurrebbe che

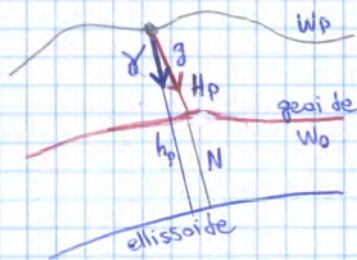
$$H_A = H_B$$

Ciò è falso perché le distanze dei punti A e B dal geode sono diverse. In particolare, usando la livella e andare da un punto all'altro, si trovano altezze errate, poiché si ignora il fatto che la gravità varia.

Di fronte a questi problemi, si delineano due possibilità

→ se si vuole ancora usare la quota ortometrica, occorre correggerla lungo la livellazione, tenendo conto che la gravità può variare. Questa correzione si dice **correzione gravimetrica** (questa però non dice dove va l'acqua ma dà solo la distanza dal geode).

→ si ricorre al **POTENZIALE** o, meglio, a qualcosa di simile al potenziale che abbia significato di altezza e distanza, ma si parla in questo caso di **dislivelli di potenziale**.



In particolare, la differenza di potenziale tra 2 punti si esprime come

$$C = W_0 - W_P = \int_{P_0}^P g \, dn \quad C = \text{numero geopotenziale}$$

L'integrale diventa sommatoria perché le misure sono fatte ogni 100 m.

$$C = \sum g \, \delta H \quad dN \rightarrow \delta N = \delta H$$

Si moltiplica e divide l'espressione x la quota ortometrica H

$$C = H \left(\frac{1}{H} \sum g \, \delta H \right)$$

Il termine tra parentesi corrisponde alla media pesata della gravità

$$C = H \bar{g}$$

Da qui si può ricavare la quota corretta, poiché si è tenuto conto della variazione di gravità attraverso la sua media pesata.

$$H = \frac{C}{\bar{g}}$$

In alternativa, si può fare riferimento al valore medio della gravità normale, che si può predire sull'ellissoide (è una costante).

$$H^N = \frac{C}{\bar{g}}$$

→ si può sfruttare il **posizionamento GNSS**, con il quale si misura l'altezza ellissoïdica h .
Da qui, si ricava l'altezza normale

$$H^N = h - \xi$$

dove

$$\xi = \frac{\gamma_{nom} T(P)}{\gamma_P} = \frac{W(P) - W_0}{\gamma_P} \quad \rightarrow \text{differenza di potenziale} \\ (W_0 = \text{valore di riferimento - v. dopo})$$

Su questi principi, si basa il **NUOVO SISTEMA DI RIFERIMENTO ALTIMETRICO EUROPEO**:

si è istituita una commissione dell'associazione internazionale di geodesia sulla materializzazione del riferimento verticale, con i seguenti obiettivi

→ unificare i sistemi di riferimento altimetrici

Ad es., se si vogliono unificare i sistemi di riferimento dell'Italia continentale (Genova) e della Sardegna (Cagliari), basta ricordarsi che il telluroide è una superficie unica. Pertanto, con il GNSS si misura la differenza di altezza ellissoïdica Δh tra Genova e Cagliari. Nota la differenza di anomalia di altezza $\Delta \xi$ tra le 2 città, si ricava la differenza di altezza normale ΔH^N

$$\Delta H^N = \Delta h - \Delta \xi$$

Con questa quantità, si unificano i 2 sistemi di riferimento, poiché le altezze normali si riferiscono a un'entità fissa, cioè il telluroide (e non alla superficie del mare che varia).

→ proporre, definire e realizzare un sistema di riferimento altimetrico mondiale

→ ottenere le relazioni di trasformazione tra i sistemi di riferimento "regionali" (cioè quelli continentali e nazionali)

→ ottenere le relazioni di trasformazione tra i sistemi di riferimento "regionali" e i sistemi di riferimento internazionali.

In particolare, a livello internazionale, si è stabilito il valore medio del potenziale della Terra W_0 e, rispetto a esso, si valuta la differenza di potenziale.

$$C_p = W_0 - W_p$$

Da qui, l'altezza normale si stabilisce come

$$H^N = \frac{C_p}{\gamma}$$

Inoltre, come nei sistemi di riferimento planimetrici, si assumono alcuni valori e i parametri necessari al calcolo delle diverse grandezze. Questi valori ignorano l'effetto delle maree e la pressione atmosferica media.

→ semiasse maggiore dell'ellissoïde a

→ Flattening

→ costante gravitazionale della Terra GM

→ valore di potenziale normale U_0

TRATTAMENTO DELLE MISURE

OBIETTIVI → progetto e verifica di spostamenti / deformazioni:

si tratterà il progetto di reti e il controllo strutturale (ad es. cedimenti) e gli strumenti devono poter rilevare questi elementi con buona precisione.

In particolare, prima della misura, l'ingegnere deve sapere che esiste un target (non si può avere uno spostamento o una deformazione superiore a una certa quantità) e lo spostamento deve essere rilevato con una rete e con strumenti idonei, in relazione alla sua entità e natura (es. spostamento uniforme o relativo)

⇒ prima di misurare, occorre elaborare il **PROGETTO DELLA MISURA**

→ capire come funziona un rilievo cinematico integrato multi-service.

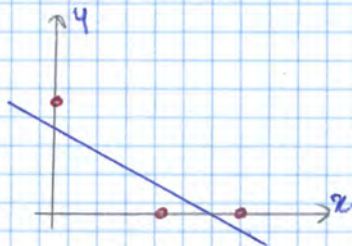
oggi il rilievo geometrico è sempre più integrato, cioè si utilizzano molti strumenti che sono integrati in maniera cinematica.

Ad es., il rilievo fotogrammetrico si esegue con fotocamera, sensore inerziale e GPS connessi alla fotocamera e si ottengono subito i parametri di orientamento (prima bisognava fare misure sull'oggetto).

Richiami sul metodo dei minimi quadrati

Del metodo dei minimi quadrati, il problema presenta un certo numero di parametri da calcolare (es. coordinate di una rete) e un certo numero di misure legate a questi parametri, numero che è ridondante rispetto al numero di parametri.

L'esempio più classico è il **FITTING DI UNA RETTA**:



Una retta, x essere definita nel piano, necessita di 3 punti. In questo caso, ce ne sono 3

$$A(0; 6) \quad B(1; 0) \quad C(2; 0)$$

Si può subito vedere che non esiste nessuna retta che passi x tutti e 3 i punti e ci sono 3 diverse rette che passano x le coppie di punti A e B, B e C e A e C.

Per tanto, siccome non si può subito trovare la retta giusta, bisogna cercare la retta "migliore":

nel piano, la retta assume equazione

$$y = x_1 x + x_2$$

Note le coordinate x e y dei punti (sono le misure), x trovare la retta, bisogna trovare i parametri x_1 e x_2 (sono le incognite). In particolare, bisogna trovare i valori migliori di x_1 e x_2 .

Per fare ciò, si scrivono le equazioni x ogni punto

$$A \quad 6 = 0 + x_2$$

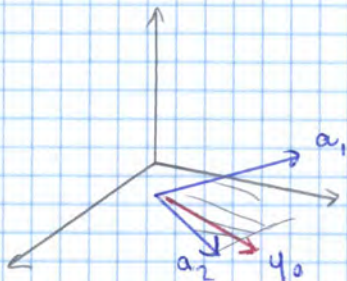
$$B \quad 0 = x_1 + x_2$$

$$C \quad 0 = 2x_1 + x_2$$

Come opera il metodo dei minimi quadrati?

La matrice di disegno presenta 2 colonne, che sono 2 vettori a_1 e a_2 che moltiplicano rispettivamente x_1 e x_2 .
Così la relazione con la stima si può scrivere come

$$\{a_1\}\{x_1\} + \{a_2\}\{x_2\} - \{\hat{y}\} = \{0\}$$



Le due colonne possono essere viste come vettori tridimensionali che giacciono su uno certo piano. Le migliori stime che soddisfano questa relazione sono rappresentate da un vettore che giace in quel piano perché sono combinazione lineare dei due vettori colonna (che sono le basi del piano).
D'altra parte, le misure $\{y_0\}$ non soddisfano la relazione del piano, siccome la differenza $y_0 - AX$ non è nulla. Pertanto, le misure sono rappresentate da un vettore fuori piano.

Il principio del metodo dei minimi quadrati prevede che, tra le infinite possibili stime, si sceglie una stima di $\{y_0\}$ (indicata con $\{\hat{y}\}$) che è la più vicina alla misura $\{y_0\}$ e che appartiene al piano delle misure ammissibili.
In altri termini, si sceglie la proiezione della misura $\{y_0\}$ sul piano, poiché appartiene al piano ed è posta alla minima distanza da $\{y_0\}$.

In questo modo, la misura $\{y_0\}$ può essere vista come costituita da 2 parti

→ stima $\{\hat{y}\}$ appartenente al piano, che soddisfa la relazione

$$\{\hat{y}\} - [A]\{x\} = \{0\}$$

→ componente perpendicolare al piano, che corrisponde alla minima distanza misura-piano ed è lo scarto $\{\hat{v}\}$

$$\{\hat{v}\} = \{y_0\} - \{\hat{y}\}$$

Questa considerazione permette di calcolare i parametri:

lo scarto $\{\hat{v}\}$ è ortogonale al piano e dunque è ortogonale ai vettori $\{a_1\}$ e $\{a_2\}$.

$$\{a_1\} \cdot \{\hat{v}\} = 0 \quad \{a_2\} \cdot \{\hat{v}\} = 0$$

$$\Rightarrow {}^+ [A] \{\hat{v}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad {}^+ \{\hat{v}\} [A] = (0 \ 0)$$

Detto ciò, si sa che

$$\{\hat{y}\} = \{y_0\} - \{\hat{v}\}$$

Pertanto, la stima dei parametri si può esprimere come (sapendo che $\{\hat{y}\} = [A]\{x\}$)

$$[A]\{\hat{x}\} = \{y_0\} - \{\hat{v}\}$$

Si premoltiplica l'equazione x ${}^+ [A]$

$${}^+ [A][A]\{\hat{x}\} = {}^+ [A]\{y_0\} - \underbrace{{}^+ [A]\{\hat{v}\}}_{\{0\}} = {}^+ [A]\{y_0\}$$

PROPRIETÀ → si dimostra che la soluzione così trovata rende minima la norma, definita come

$$L_2 = \left\| [A] \{x\} - \{y_0\} \right\|^2$$

→ si dimostra che, se le misure presentano una distribuzione di tipo normale, la stima che si ottiene corrisponde anche alla stima di massima verisimiglianza.

Inoltre, la norma sarà distribuita come χ^2 con r gradi di libertà

↳ i gradi di libertà non sono pari al numero m di misure perché, durante la compensazione (cioè l'applicazione dei minimi quadrati), le misure sono di fatto legate tra di loro in modo da ricavare i parametri.

A questo punto, occorre osservare che, in genere, non tutte le misure che si hanno a disposizione sono ugualmente precise e, in questo caso, si fa intervenire la matrice dei pesi $[P]$.

In questo caso, la soluzione si esprime come

$$\{x\} = \left([A]^T [P] [A] \right)^{-1} [A]^T [P] (\{y_0\} - \{a\})$$

si assume una relazione generale del tipo $y = Ax + b$

Il vantaggio di questo sistema è che non occorre conoscere a priori la varianza delle misure, cioè la loro precisione, ma il metodo prevede che si possa giungere alla soluzione conoscendo anche solo la PROPORZIONE DELLE VARIANZE. Infatti, la matrice peso si esprime come

$$[P]^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} [C_{yy}]$$

Il termine σ_0^2 è una costante e nella matrice di varianza e covarianza delle misure $[C_{yy}]$ si riportano i rapporti di precisione tra le misure. Ad es. se le misure sono tutte ugualmente precise, nella matrice si pone tutto pari a 1. Nel caso semplice di misure indipendenti ($[C_{yy}]$ diagonale) e in correlate, i pesi valgono

$$P_j = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_j^2}$$

Si nota che la varianza cade al denominatore perché se la varianza è piccola (misura precisa), il peso della misura è maggiore nella compensazione.

Quanto vale però la costante σ_0^2 ?

Si potrebbe immaginare che questo sia pari al valore di varianza σ_0^2 che c'è nelle misure.

In realtà, si può stimare la precisione delle stime delle misure e delle stime dei parametri, ossia si può ricavare il valore più probabile (la stima) di σ_0^2 , indicata con $\hat{\sigma}_0^2$.

Questa corrisponde a quanto si riesce a minimizzare con la stima e si dimostra che è pari alla somma pesata dei quadrati degli scarti.

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum \hat{v}_i^T [P] \hat{v}_i}{n - v}$$

Si nota che la precisione delle stime aumenta quando

→ le misure hanno simile precisione ($[P] \rightarrow [I]$ e dunque il numeratore diminuisce)

Inoltre, anche gli scarti sono più precisi rispetto alle misure (nel caso che $\hat{\epsilon}_0^2 < \epsilon_0^2$) perché, siccome il termine $[A][N]^{-1} + [A]$ è una forma quadratica definita positiva, si riduce $[P]^{-1}$. Pertanto, la precisione degli scarti è maggiore rispetto a quella precisione a priori delle misure.

Lo scarto costituisce poi una grandezza fondamentale a capire se le misure possono darsi d'accordo o meno tra di loro:

• a capire se le misure sono corrette (cioè affette solo da errore accidentale), si confronta lo scarto quadratico medio della scarto (preso dall'a diagonale della matrice $C_{\hat{\hat{v}}}$) con lo scarto stesso.

$$\frac{\hat{\sigma}}{\epsilon_0}$$

Infatti, è necessario che la media degli scarti sia nulla, in modo tale che lo scarto rappresenti quello che rimane nella misura a effetto di un errore accidentale (che ha media nulla)

↳ in questo modo, si capisce se i punti sono compatibili tra di loro a effetto di un errore accidentale.

Siccome la matrice di ridondanza è piena, nell'ambito dello studio delle deformazioni questo porta a una conseguenza. Infatti, lo scarto si esprime come

$$\{V\} = [R]\{\epsilon_0\}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = R_3^3 \begin{pmatrix} \epsilon_0^1 \\ \epsilon_0^2 \\ \epsilon_0^3 \end{pmatrix}$$

Si supponga ora che, nel punto ϵ_0^2 , avvenga un cedimento di entità $\Delta 1$. Lo scarto (che si assume a media nulla) ora vale

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = R_3^3 \begin{pmatrix} \epsilon_0^1 \\ \epsilon_0^2 + \Delta 1 \\ \epsilon_0^3 \end{pmatrix} = R_3^3 \begin{pmatrix} \epsilon_0^1 \\ \epsilon_0^2 \\ \epsilon_0^3 \end{pmatrix} + R_3^3 \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nel II membro, il primo addendo ha media nulla mentre il II presenta una variazione sugli scarti e, siccome la matrice è piena, questa variazione è applicata su tutti e 3 gli scarti v_1, v_2 e v_3 .

⇒ dopo la compensazione ai minimi quadrati, IL CEDIMENTO SI PROPAGA SU TUTTI GLI SCARTI e, non agendo su uno scarto solo, esso è difficile da trovare.

Pertanto, occorre prestare attenzione a come individuare gli spostamenti e le deformazioni in base agli scarti che si trovano sulle misure.

⇒ una misura errata sporca tutti gli scarti

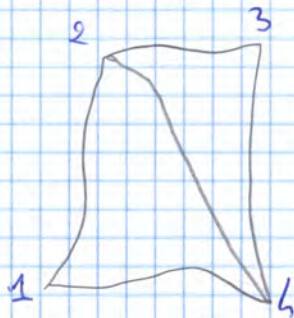
Così, se si vede un errore molto elevato su una misura, non è detto che questa sia errata o riporti il cedimento, la deformazione, etc. perché le misure sono tutte sporcate.

Però, anche se la matrice di ridondanza è piena, se la ridondanza locale di quella misura è forte e tende a 1, l'errore sporca soprattutto quella misura

⇒ è più facile che a una misura errata corrisponda un valore elevato del suo scarto, se la sua ridondanza locale è elevata

Dunque l'errore sporca tutte le misure, ma soprattutto sporca quella con ridondanza maggiore e, in tal caso, è più facile trovare l'errore di misura.

→ SISTEMA DI RIFERIMENTO



Si consideri una rete di livellazione. Questa è una rete ridondante, poiché ci sono 5 misure di dislivello e 4 quote incognite e il sistema di equazione è

$$\begin{cases} \Delta_{21} = Q_1 - Q_2 \\ \Delta_{24} = Q_4 - Q_2 \\ \Delta_{23} = Q_3 - Q_2 \\ \Delta_{14} = Q_4 - Q_1 \\ \Delta_{34} = Q_4 - Q_3 \end{cases}$$

La matrice disegno è la seguente

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sembra che si possano ottenere le incognite, poiché il sistema ha 5 equazioni e 4 incognite.

In realtà, non è così perché le 4 colonne non sono una base di vettori indipendenti (il suo rango è diverso da 4) e, infatti, la matrice

$$[N] = {}^t[A][A]$$

non è invertibile.

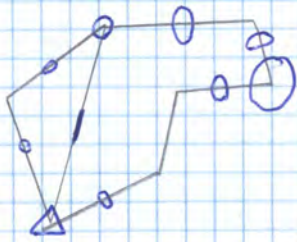
Ciò è dovuto al fatto che manca il sistema di riferimento e, in effetti, i dislivelli sono invarianti a traslazioni lungo z e non si può pensare di calcolare la quota avendo solo dei dislivelli. occorre così fissare un sistema di riferimento, detto datum:

in questo caso, ciò corrisponde a fissare la quota di un punto e così il sistema ha solo più 3 incognite e diventa determinato.

↓ di fatto, fissare il sistema di riferimento corrisponde a fissare i gradi di libertà

Occorre però osservare un aspetto, legato alla precisione:

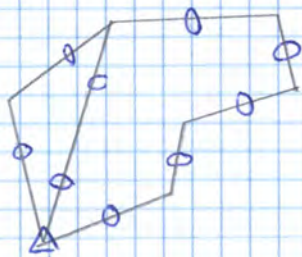
Le componenti principali dell'ellisse d'errore non indicano esattamente quanto siano precise le coordinate o il loro scarto quadratico medio (cioè che si vuole dare di committente) poiché l'ELLISSE D'ERRORE DIPENDE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO.



In fatti, se si fissa un punto di origine, questo non ha ellisse d'errore.

Se poi si è fissata una direzione come invariante, l'ellisse d'errore è degenera perché è un segmento parallelo a tale direzione (è nullo l'errore nella direzione perpendicolare). Però, in una rete estesa, l'ellisse d'errore è piccola vicino all'origine e cresce man mano che ci si allontana.

Pertanto, l'ellisse d'errore dipende dal sistema di riferimento fissato.



D'altra parte, la DIFFERENZA DI ELLISSE D'ERRORE cioè l'ellisse relativo d'errore tra 2 punti non è dipendente dal sistema di riferimento fissato.

L'ellisse relativo corrisponde alla differenza di 2 sottomatrici nell'è matrice di varianza-covarianza e indica quanto l'ellisse d'errore aumenta o diminuisce rispetto all'origine.

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{x1}^2 & \sigma_{xy1} & \dots \\ \sigma_{xy1} & \sigma_{y1}^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

In realtà, si vuole un altro metodo x ottenere qualcosa che sia indipendente dalla traslazione

gli ellissi di errore non dipendano dalla rotazione del sistema di riferimento, poiché questi ruotano ma non cambiano di dimensioni.

Per rendere indipendente dalla traslazione, si sa che le basi euloriane della traslazione formano, a ogni punto, una matrice identità I_i .
Da qui si costruisce una matrice di proiezione

$$[P] = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} I_1 \\ \dots \\ I_n \end{bmatrix}$$

Si applica poi questa la propagazione della varianza alla matrice $[C_{xx}]$ questa matrice.

$$[C_{FF}] = [P][C_{xx}][P] \rightarrow \text{si nota che } [P] = {}^t[P]$$

In questo modo, si ottiene non più una rete a vincoli minimi, bensì degli ELLISSI DI ERRORE A RETE LIBERA.

d'altra parte, dalla somma dei quadrati degli scarti si ottiene la costante $\hat{\sigma}_0^2$ a posteriori.
 Rapportata alla deviazione standard $\hat{\sigma}_{V_j}^2$ degli scarti, si definisce il peso o peso di compensazione.

$$q_j = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_{V_j}^2}$$

Una volta definite queste 2 quantità, si nota che la ridondanza locale è pari al rapporto tra peso a priori e peso a posteriori.

$$r_{j3}^j = \frac{\sigma_0^2 \sigma_{V_j}^2}{\sigma_{y_j}^2 \sigma_0^2} = \frac{p_j}{q_j}$$

$$r_{j3}^j = \frac{p_j}{q_j}$$

Questa formula può essere applicata nella valutazione della ridondanza

→ in progetto, dove non è noto $\hat{\sigma}_0^2$. In questo caso, si assume l'ipotesi semplificativa che

$$\hat{\sigma}_0^2 \sim \sigma_0^2$$

e si ottiene

$$\hat{\sigma}_{V_j}^2 = r_{j3}^j \sigma_{y_j}^2$$

Si possono così stimare i valori di varianza degli scarti prima della compensazione.

→ in verifica, il calcolo è immediato perché è noto $\hat{\sigma}_0^2$

Una volta stimata la varianza dello scarto, si può capire che uno spostamento o un errore nella misura fanno sì che il valore atteso dello scarto non sia nullo. Per semplicità, conviene sottoporre a test il rapporto tra lo scarto e il suo scarto quadratico medio

$$w_j = \frac{\hat{v}_j}{\hat{\sigma}_{V_j}}$$

Se questo è diverso da zero, è successo qualcosa alla rete. Si è però appena visto che

$$\hat{\sigma}_{V_j} = \sqrt{r_{j3}^j} \sigma_{y_j}$$

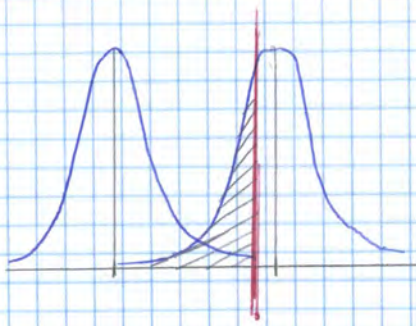
e si può anche assumere che r_{j3}^j sia la ridondanza prevalente, in modo che un eventuale errore o spostamento nella misura Δy_j alteri significativamente solo lo scarto \hat{v}_j , cioè

$$\hat{v}_j = r_{j3}^j \Delta y_j$$

In tal modo, si ottiene

$$w_j = \frac{r_{j3}^j \Delta y_j}{\sqrt{r_{j3}^j} \sigma_{y_j}} = \frac{\sqrt{r_{j3}^j} \Delta y_j}{\sigma_{y_j}}$$

Pertanto, w dipende dai valori α e β che si fissano.



Assumendo x semplicità di avere 2 distribuzioni identiche, tipicamente si pone

$$\alpha = 1\%$$

Pertanto, anche se la misura è molto al di fuori rispetto alla media 0, la si accetta.

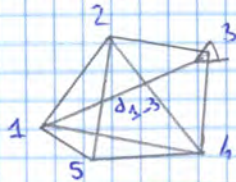
Per vedere se questa ha media non nulla, invece, si vuole che questa cada ben dentro l'altra distribuzione e sia vicino all'altra media, x cui si pone

$$\beta = 10\%$$

Nel caso di distribuzioni gaussiane,

$$w_j = 4,75$$

Una volta determinato il minimo errore scovabile Δy_j , occorre trattare un altro aspetto.



Se si considera ad es una rete topografica, su cui si fa una misura lungo la direttrice 1-3, si può ottenere l'errore $\Delta y_{1,3}$ di tale misura ma non si può ancora dire quanto possono essere errate le coordinate ad es. del punto 3

Pertanto, bisogna capire come il minimo errore scovabile nella misura si comporti sull'errore delle coordinate.

Cio si traduce nel trovare l'**affidabilità esterna**, cioè il **MINIMO ERRORE SCOVABILE NELLE COORDINATE DI RETE** (i parametri).

A tal scopo, si sa che i parametri si esprimono come

$$\{\hat{x}\} = [H] (\{y_0\} - \{a\})$$

Se c'è un errore Δy_j nelle misure, ciò si traduce in un errore nei parametri nel seguente modo.

$$\{\Delta \hat{x}\} = [H] \{\Delta y_j\}$$

L'errore nei parametri, cioè l'**affidabilità esterna**, è pari all'**affidabilità interna** x la matrice di proiezione (nota a priori).

Pertanto, si può già dire in fase di progetto lo spostamento minimo che si può trovare

⇒ si può progettare la rete x valutare la deformazione

In realtà, il progetto della rete si esegue non solo secondo l'**affidabilità interna ed esterna**, ma anche con **criteri geometrici**.



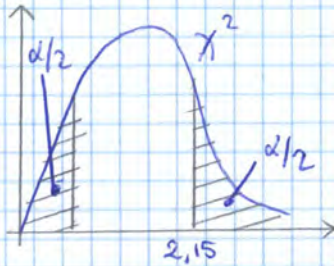
Per fissare le idee, si consideri una rete costituita da 2 punti di coordinate note e un terzo punto non noto che è quasi allineato.

Se si eseguono misure di distanza, si nota che

→ x_3 si ricava con precisione

→ y_3 non è nota perché è labile

In particolare, si ottiene un'ellisse d'errore molto allungata nella direzione y .

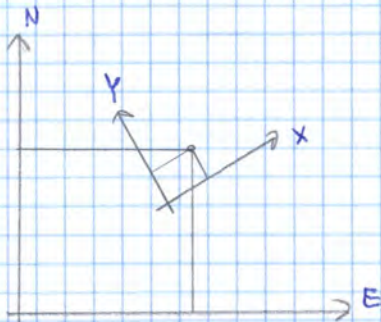


In particolare si sa che una distribuzione χ^2 a basso grado di libertà parte da 0 (è definita positiva). Fissata una certa probabilità (es. 1%), ~~si~~ a essa corrisponde un certo valore (es. 2,15). Se dopo la compensazione si trova un valore più grande rispetto a quel valore limite, significa che la somma dei quadrati degli scarti è elevata e c'è qualcosa che non va nelle misure.

⇒ dopo la compensazione, bisogna testare se la quantità prima definita rientra in quel limite (una volta definita la probabilità corrispondente). Nel caso che sia superato, allora non si sa quale misura presenti il problema ma si può dire che globalmente la rete non funziona.

Non a caso, questa verifica prende il nome di **test globale**, che valuta il **FUNZIONAMENTO GLOBALE DELLA RETE**. Se questo non è superato, allora in senso globale la somma dei quadrati degli scarti non è corretta.

OSSERVAZIONE



Nonostante la χ^2 sia una distribuzione definita positiva, il test globale è un test a 2 code. In altri termini, non si accetta neanche un valore piccolo di $\hat{\sigma}_0^2$, nonostante sembri una cosa buona (lo scarto è piccolo).

Si consideri però un problema di rototraslazione tra il sistema EN e il sistema XY. I parametri sono

$$E_0, N_0, \alpha, \lambda$$

e sono note le coordinate di 3 punti.

È chiaro che la ridondanza è piccola e anche lo scarto sarà piccolo, perché c'è poco controllo e i punti vanno sempre più o meno bene. Essendo piccoli gli scarti, sarà anche piccola la somma dei loro quadrati, ma non si può comunque accettare perché la ridondanza deve essere aumentata.

Oppure, è possibile che si sia sbagliata la matrice dei pesi perché è possibile che le misure siano fatte bene e lo scarto sia minore della varianza reale delle misure.

In tal caso, occorre tarare la matrice dei pesi.

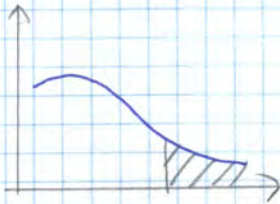
↓
questo è raro

Nel caso che il test globale dia esito negativo, non si conosce a priori se il problema sia dovuto a qualche misura e a quale di esse.

Per capire se ciascuna misura sia accettabile o meno, occorre testare il rapporto tra scarto e il suo scarto quadratico medio.

$$z_j = \frac{\hat{v}_j}{\hat{\sigma}_{v_j}}$$

|| In fase di progetto, si era previsto un certo scarto $\hat{\sigma}_{v_j}$ a priori. Dopo la compensazione, si è ottenuto il valore dello scarto \hat{v}_j e si può assumere che questo abbia distribuzione normale.



In questo caso, si esegue solo un TEST A UNA CODA:

fissata una certa probabilità (assi a un valore di significatività), se si supera il valore corrispondente, significa che c'è stata una deformazione e la rete finale è diversa da quella iniziale.

In realtà, non interessa sapere soltanto se c'è stata deformazione, ma anche dove c'è la deformazione:

in realtà, il test può essere eseguito anche componente per componente (ad es. le coordinate di un punto).

Ad es., si immagina che la verifica di deformazione si esegua nei punti 2 e 5 e si definisce dunque un sottovettore $\{P\}$ di tutti i parametri, che è estratto mediante prodotto matriciale.

$$\{P\} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = [E]\{x\}$$

Si esegue dunque lo stesso test sul vettore $\{P\}$, applicando la matrice E sulla matrice normale

$$\frac{(\{\hat{P}\} - \{P\}) ([E][N]^{-1}[E])^{-1} (\{\hat{P}\} - \{P\})}{r\sigma_0^2} = F_{k, m-n, \alpha}$$

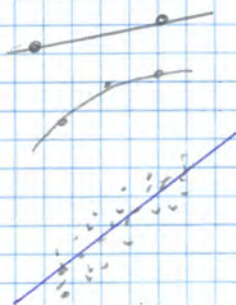
In questo caso, si testano due componenti alla volta secondo una probabilità α e si scrive dunque $F_{2, r, \alpha}$ (r=ridondanza).

Se il punto non soddisfa il test, significa che probabilmente si è spostato

OSSERVAZIONE:

Se il test è a un solo parametro, il test si semplifica perché la distribuzione diventa una t-Student.

Questo test può anche essere utilizzato per capire SE UN PARAMETRO È SIGNIFICATIVO.



Ad es., se si interpolano due punti, si usa una retta e per 3 punti si usa una parabola. Con n punti, si usa una curva del tipo

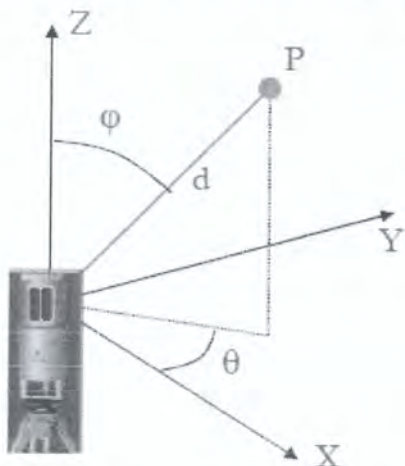
$$y = \sum a_i x^i$$

In questo caso, i parametri sono i termini a_i ed è possibile che alcuni di essi siano poco significativi poiché hanno varianza elevata. Pertanto, si potrebbe interpolare con curve più semplici.

Questo fenomeno (detto SURAPARAMETRIZZAZIONE) può essere evidenziata da questo test.

LASER A IMPULSI TERRESTRI

Dal punto di vista teorico, una volta che si hanno a disposizione un distanziometro che funziona anche senza prisma e un teodolite, attraverso le coordinate sferiche è possibile misurare tutte le caratteristiche topografiche di un oggetto.



Se si considera un teodolite dotato di distanziometro che sia in grado di misurare le distanze in maniera automatica e soprattutto veloce, è immediato ricavare molteplici misure dell'angolo azimutale, dell'angolo zenitale e della distanza relativi a un punto.

Ciò è possibile perché il teodolite è motorizzato ed è in grado di muovere automaticamente in maniera costante il cerchio azimutale e cerchio zenitale.

Le misure corrispondono alle coordinate sferiche del punto secondo un sistema di riferimento centrato sullo strumento. Da queste è possibile ricavare le coordinate cartesiane, tipicamente ponendo l'asse z nella direzione opposta alla direzione del filo di piombo.

LASER A SCANSIONE AEREA

Nel LIDAR aereo il funzionamento è simile ma presenta performance maggiori.

Sulla carlinga dell'aereo si trova lo strumento e, insieme a esso, è montata un'antenna GNSS che fornisce la posizione XYZ del velivolo e un *Inertial Measurement Unit*, che permette di ottenere gli angoli di assetto, che costituiscono gli angoli di orientamento esterno (non a caso, la fotogrammetria diretta nasce in 2000).

Da qui, con lo strumento si possono ricavare la posizione e in seguito i coseni direttori vettore, che dipendono dagli angoli di assetto dell'aereo. Noti il modulo, l'orientamento e l'origine del vettore, si possono ricavare le coordinate del punto.

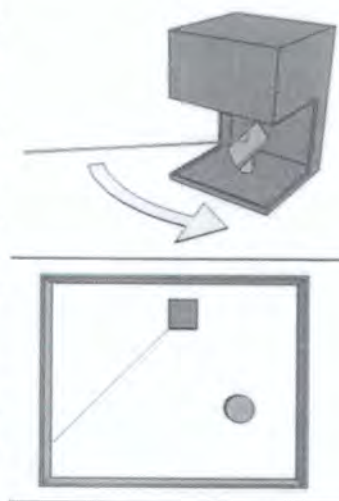
Rispetto al LIDAR terrestre, occorrono ora 3 angoli e non più 2 perché l'asse z del sistema di riferimento non è più fisso.

Viceversa, in una misura di scala non interessa conoscere la posizione, perché basta sapere la posizione relativa dei punti.

Come avvengono lo spostamento azimutale e zenitale? È necessario usare un motore per il cerchio zenitale e un motore per il cerchio azimutale?

In ogni caso sono necessari due motori, ma questi possono essere organizzati in un certo modo: un motore ruota il cerchio azimutale e un motore ruota uno specchio zenitale in modo che, a seconda della rotazione dello specchio, il laser colpisca un dato punto. Siccome la velocità di rotazione dello specchio è costante, la variazione di angolo zenitale è costante.

Il sistema, dal punto di vista costruttivo, è molto meno complicato rispetto a un teodolite perché presenta solo un distanziometro (con la sua parte trasmittente e quella ricevente) e due motori.



Un esempio è il Riegel. Questo modello presenta delle finestrelle che costituiscono l'elemento di trasmissione e ricezione, i quali sono protetti da vetri. All'interno della parte di emissione è presente un sistema di specchi rotanti che permette di cambiare l'angolo azimutale e l'altra componente rotante è costituita da una sorta di alidada situata nella parte inferiore dello strumento.



PROPRIETÀ

- Nel rilievo laser a scansione non è importante la posizione da cui si parte, poiché intanto lo strumento si muove secondo differenze di angoli.
- È possibile eseguire un rilievo laser a scansione denso (come nella fotogrammetria densa) perché, insieme al rilievo, avviene anche l'acquisizione di immagini.
- Lo strumento ha una portata elevata (fino 1 km).
Ad es. la marca FARO presenta una portata che, in condizioni ottimali, arriva a 300 m (è adatta per il rilievo di monumento ma non per una parete rocciosa)
- Dall'inizio degli anni 2000, è avvenuta una miniaturizzazione (si sono ridotti peso e dimensioni) e si sono ridotti i costi (oggi valgono circa 20000 €).
- Gli strumenti scaricano i dati in una memoria interna e dunque non occorre un elaboratore con una memoria.
- Questi strumenti richiedono una *ritaratura frequente* (ogni 2 anni) perché le variazioni angolari tendono a non mantenersi più costanti.

PORTATA DEI LIDAR

Essi sono strumenti molto sensibili (arrivano fino a 0,01-0,1 mm) ma la loro portata è limitata e si impiegano tipicamente per il rilievo di opere d'arte.

cambia radiometricamente l'oggetto, individuando così in modo automatico o semiautomatico i punti significativi.

Oggi usualmente, insieme a rilievo laser scansione, è presente una camera fotografica, che ha lo scopo di realizzare riprese e "vestire" (dal punto di vista radiometrico) i punti con una fotografia, ossia colorare i punti. In seguito, dalla nuvola di punti colorati si può ricostruire la superficie densa.

OSSERVAZIONE

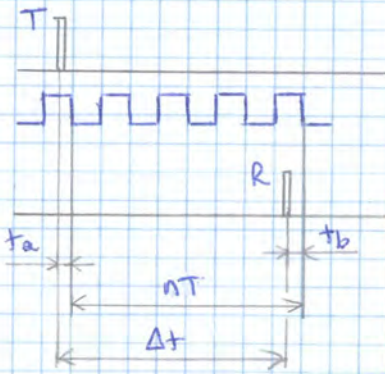
Le nuvole di punti presentano le coordinate espresse in un sistema di riferimento qualsiasi e, usualmente, per rilevare un oggetto non basta una sola scansione. Un caso tipico è il rilievo interno ed esterno di un edificio per sapere lo spessore dei suoi elementi (qui la fotogrammetria fallisce).

Siccome le scansioni devono essere espresse nello stesso sistema di riferimento, prima di fare il rilievo occorre realizzare un inquadramento per fissare sull'oggetto un certo numero di punti le cui coordinate siano espresse in un unico sistema di riferimento, in modo da legare le diverse scansioni.

In questo caso, il software riconosce automaticamente i *markers* perché esso registra l'intensità del segnale di ritorno e, in base a essa, esegue un *matching* tra una scansione e l'altra: se ci sono punti in comune tra più scansioni, il software esegue in automatico l'orientamento relativo tra le nuvole di punti nel sistema di riferimento strumentale. In seguito, con l'aiuto di una stazione totale, si riporta tutto al sistema di riferimento di interesse.



In alternativa, l'orientamento si esegue sulla base di punti naturali (spigoli, etc.) come punti di appoggio.



In questo sistema, la distanza è ottenuta mediante MISURA DEL TEMPO DI VOLO:

Si emette un'onda quadra, la quale è ricevuta dopo un certo intervallo di tempo.

Non si riceve la stessa onda, a causa del rumore dovuto all'atmosfera e all'oggetto colpito dal fascio.

Il tempo di volo si costituisce di una parte intera (cioè cicli completi), che è misurata mediante un contatore in seno di lunghezze d'onda, il quale dà il valore n .

A questa si aggiungono due parti frazionarie t_a e t_b , legati ai segnali di start e stop, che sono misurate mediante un circuito micrometrico in cui un condensatore si carica e scarica (la misura deriva dalla variazione di tensione).

$$\Delta t = nT + t_a - t_b$$

Da qui la distanza si ricava mediante la relazione

$$d = \frac{v \Delta t}{2}$$

v = velocità della luce corretta con la rifrazione atmosferica

La precisione dei distanziometri a impulsi è elevata, grazie alla precisione del sistema di misura del tempo (10^{-8} s), e arriva a 10^{-6} (cioè l'errore è di poche ppm). In realtà, la precisione dipende anche dal rapporto tra l'intensità del segnale e il rumore. Quest'ultimo è legato all'oggetto colpito e alla sua distanza, poiché influenza la quantità di segnale che è riflessa dall'oggetto nella direzione di trasmissione.

$$S_d = \frac{1}{\sqrt{S/N}}$$

S = segnale
 N = rumore

Per questo motivo, i distanziometri possono essere usati al massimo per distanze di $1000 \div 5000$ m.

Viceversa, i distanziometri con misura di fase misurano lo sfasamento tra

→ onda sinusoidale emessa

$$S_e(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

→ onda sinusoidale rientrante

$$S_r(t) = A \sin[\omega(t + \Delta t) + \varphi_0]$$

e a questo sommiamo il numero intero di lunghezze d'onda.

$$d = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} \frac{\Delta \varphi}{2\pi}$$

4 Caratteristiche del rilievo terrestre

La qualità dello strumento non è definita solo da precisione e portata, ma anche da altri aspetti

→ VELOCITÀ DI RILEVAZIONE, importante per il rilievo in movimento (≥ 1000 punti/sec)

→ RISOLUZIONE DELLA SCANSIONE, che in teoria è uguale all'ampiezza dell'angolo di rotazione del raggio laser tra due punti adiacenti, e DIVERGENZA DEL RAGGIO.

→ DIVERGENZA DEL RAGGIO LASER, che permette di attraversare ostacoli come la vegetazione e colpire il terreno

→ PORTATA REALE, legata al mezzo ossia a rifrazione, rugosità dell'oggetto, tipo di materiale e radiazioni di disturbo.

→ CAMPO DI MISURA:

a seconda della frequenza di invio delle onde quadre, esistono una distanza minima e una distanza massima per non avere ambiguità, ossia per non ricevere due volte lo stesso segnale e interpretarlo come il primo segnale.

→ possibilità di riconoscere in automatico il segnale

→ ACQUISIZIONE RGB:

esistono strumenti che, oltre alle intensità, acquisiscono la lunghezza d'onda del segnale di ritorno e associano a ogni punto acquisito la radiometria rilevata sull'area di impatto del laser.

In alternativa, essi possono presentare una camera digitale esterna solidale al laser scanner (sistema migliore)

→ autonomia dello strumento

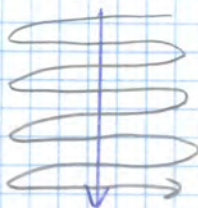
→ trasportabilità.

5 Laser scanner aereo

Nel laser scanner aereo, si seguono gli stessi principi del rilievo terrestre, ma ora il raggio laser è emesso in un punto di coordinate note nel sistema di riferimento GNSS e misura la distanza, mentre le 3 componenti del vettore di distanza sono note grazie alla presenza di un inerziale.

Il raggio laser cade nell'infrarosso, anche perché questo corrisponde a una delle poche lunghezze d'onda che penetrano per grandi distanze nell'atmosfera e presentano un segnale di ritorno sufficientemente potente.

Modificando opportunamente la lunghezza d'onda, il segnale penetra anche nell'acqua e si può restituire un segnale di ritorno fino a profondità di 10-20 m, a seconda della potenza utilizzata. In questo modo, è possibile eseguire anche BATHYMETRIA.



Tipicamente, gli strumenti aerei realizzano delle scansioni a spirale per terra creando una sorta di serpentina, in modo da rilevare dei profili.

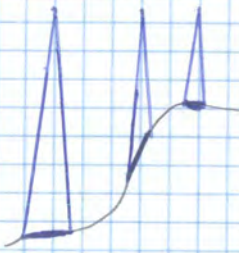
Infatti, il committente richiede sempre un certo numero di punti per m^2 e, siccome il LIDAR ha una velocità di rotazione costante, per ottenere una buona densità bisogna variare la distanza aereo-terreno e il terreno deve essere rilevato con molte strisciate.

Questo ricorda molto la fotogrammetria, con la sola differenza che ora l'angolo di campo è più stretto e il numero di passi da fare è maggiore.

→ echi di risposta

A causa della divergenza del raggio laser, la superficie di impatto non è puntuale e la sua estensione aumenta all'aumentare della distanza dell'oggetto.

Tale estensione diventa significativa nel rilievo aereo, in cui sono coinvolte distanze pari a $3000 \div 6000$ m.



Se poi la superficie presenta asperità, una porzione del raggio è riflessa prima della restante (è quella che incide sulle parti più in alto della superficie).

Il risultato è una serie di segnali di ritorno, che prendono il nome di ECHI DI RISPOSTA.

Questo aspetto è molto importante in presenza di vegetazione perché, grazie alla sua divergenza, il raggio laser penetra attraverso gli spazi lasciati dalla vegetazione e tocca il terreno.

Sono così presenti molti echi di risposta, relativi sia alla chioma sia al terreno e da qui si può produrre un DTM o un DSM.

D'altra parte, non tutti gli echi possono essere registrati dallo strumento.

Alcuni strumenti possono registrare un solo impulso, altri registrano anche l'ultimo impulso, e altri ancora registrano pure due impulsi intermedi.

Se però la differenza tra di essi è minima, lo strumento si limita a registrare un impulso e calcola la distanza come la media delle distanze relative ai singoli echi.

6 Progetto del rilievo laser

→ RILIEVO AEREO

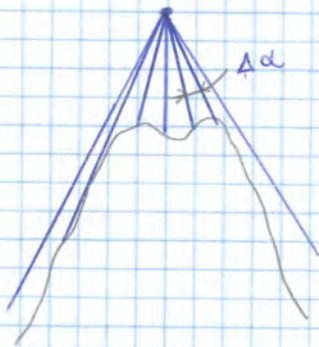
Il parametro chiave è il **numero di punti al metro quadro**, che è dato dal committente.

In base a questo, ma anche alla distanza di presa e all'angolo di campo, si selezionano gli strumenti opportuni e si progetta il volo.

Il progetto si articola in più aspetti:

→ **DIREZIONE DI VOLO**, che deve essere tale che si ricopra la totalità del terreno da rilevare (come nella fotogrammetria, si fanno più strisciate).

→ **RICOPRIMENTO DELLE STRISCIE ADIACENTI**



Se si vuole garantire un'adeguata copertura in planimetria, occorre tenere conto dell'altimetria.

In fatti, a parità di variazione di angolo, i punti più vicini al punto di presa compaiono planimetricamente più ravvicinati. La conseguenza è che le strisciate in planimetria subiscono una distorsione.

Occorre così garantire un ricoprimento trasversale delle striscie adiacenti pari a

$$15 \div 25\%$$

e questo sale a 50% in presenza di variazioni di quota.

→ il rilievo è supportato da stazioni permanenti a terra ed eventuali ricevitori aggiuntivi.

→ In 2 scansioni adiacenti, devono essere visibili almeno 3 markers in comune perché solo così si stimano i parametri di allineamento (traslazioni e rotazioni).
In effetti, nel rilievo terrestre si adotta un ricoprimento tra scansioni del 30%.

Una volta fatta la scansione, il software riconosce automaticamente i centri degli elementi (sfruttando la riflettività) e rototrasla in maniera automatica.

In alternativa, si possono mettere tutte le scansioni in un unico sistema di riferimento qualunque (simile all'orientamento interno) e poi l'insieme di scansioni laser è fissato in un sistema di riferimento assoluto, mediante misure d'appoggio.

A questa operazione, segue il **filtraggio**:

questa è un'operazione mirata soprattutto a eliminare gli outliers (errori sistematici) e gli errori di rumore.
Inoltre, siccome il LIDAR collima in modo "automatico" e predefinito, è possibile che la scansione non prenda il punto di interesse, ma lì vicino ci sono tantissimi punti. Pertanto, si eseguono delle medie tra i valori, riducendo il numero di punti ma questi ora sono filtrati, corrispondono ai punti di interesse e sono depurati dagli errori.

In seguito, si può procedere alla **classificazione**, ossia al riconoscimento degli oggetti gli uni dagli altri (ad es. il terreno da ciò che non è terreno (ad es. la vegetazione è indicata dal primo impulso e il terreno dall'ultimo impulso).

Da qui si esegue la **segmentazione**, in cui si identificano gli oggetti singoli.

↓ ad es. si usa il **CRITERIO DELLA VARIANZA** per distinguere gli oggetti dal terreno, sfruttando la variazione delle quote.

Il risultato è una classificazione di buon livello (errore limitato al 4%), anche se a volte ci possono essere errori di interpretazione, ad es. mescolanza di colori.

APPLICAZIONI DEL LIDAR

→ rappresentazione 3D di città

→ realizzazione di DTM e DSM

→ catasto strade

POSIZIONAMENTO E NAVIGAZIONE INERZIALE

1. PREMESSA

La navigazione inerziale si inserisce nell'attività di rilievo cinematico.

In fatti, molte applicazioni GNSS sono legate a problemi che richiedono il posizionamento statico di un punto, ossia rilievo topografico di superfici a fini catastali, monitoraggio di strutture e versanti caratterizzati da lente deformazione e definizione e mantenimento di sistemi di riferimento (questo si lega alla deformazione lenta perché se interviene il moto del frame - si muove tutto il sistema - questo viene tolto e rimane solo più la vera deformazione).
Queste applicazioni sono eseguite con rilievo statico (precisione millimetrica) o RTK (precisione centimetrica).

D'altra parte, il GNSS può anche essere usato per il posizionamento di un corpo in movimento.
Questo è utile per tracciare strade, determinare rotte, collaudare i DTM, fare rilevazioni batimetriche e anche fare fotogrammetria diretta.
Per fare ciò, però, il GNSS non è ancora sufficiente.

2. Navigazione:

La navigazione è un insieme di **metodi o tecniche per determinare uno o più stati**, ossia

- POSIZIONE (3 coordinate)
- VELOCITÀ (3 velocità)
- ASSETTO (3 angoli w/pk)

di un oggetto in moto in un certo sistema di riferimento.

Nella navigazione, è presente un sistema di misurazione che può misurare parte di queste grandezze in ogni istante di tempo.
L'obiettivo è calcolare le 4 grandezze agli istanti voluti (magari anche predire al tempo voluto).
Questo processo può avvenire secondo due **FILOSOFIE DI NAVIGAZIONE E GEODETICA**

→ **position fixing**: lo strumento di riferimento è il ricevitore GNSS.
Secondo questo approccio, da ogni dato GNSS si può calcolare la posizione in ogni istante e si assume che tutti questi dati siano indipendenti tra di loro (anche se l'ambiguità è fissata).

→ **dead reckoning**: in questo approccio, ogni dato dipende da quello precedente e anche dalle misure effettuate.
In questo caso, lo strumento matematico usato è il filtro di Kalman e lo strumento che consente questo tipo di posizionamento è l'**INS**.

questo è un sistema costituito da un software e da un'unità di misura inerziale (IMU) e consente di ottenere dati di navigazione inerziale.

Navigazione inerziale

La navigazione inerziale si basa sul principio che, in un sistema di riferimento, si può determinare il moto di un corpo osservando le forze esterne agenti su di esso.

In particolare, si fa riferimento alla I Legge di Newton:

ogni corpo rimane in stato di quiete o moto rettilineo uniforme, a meno che non sia costretto a cambiare il proprio stato per l'applicazione di forze impresse.

In realtà, questo vale in alcuni sistemi di riferimento, ~~tra~~ detti SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI.

Si come la navigazione inerziale mira a definire lo stato di un corpo in movimento, essa si basa sulla misura delle forze esterne agenti sul corpo. D'altra parte, a parità di forze agenti, all'aumentare della massa del corpo diminuisce la sua accelerazione, secondo la II Legge di Newton:

L'accelerazione di un corpo è proporzionale alla risultante delle forze applicate e inversamente proporzionale alla massa del corpo.

$$F = ma$$

Questo vale sempre in un sistema di riferimento inerziale.

Così, nel posizionamento interessa misurare le forze perché, supposta nota la massa, si può ottenere l'accelerazione.

La misura avviene mediante **accelerometri**, che sono in 3 (uno per direzione). L'accelerazione è la grandezza fisica di base perché da essa, mediante integrazione, si possono ottenere velocità e posizione del corpo.

$$v = v_0 + \int a dt$$

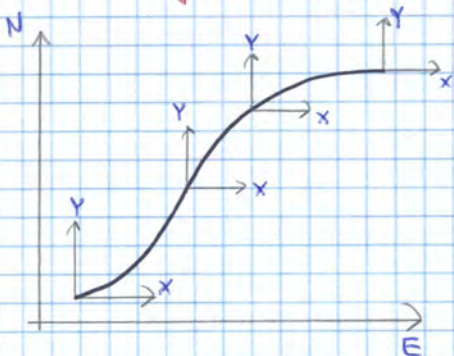
$$P = P_0 + \iint a dt^2$$

Il calcolo è fatto dal software accoppiato all'IMU.

Perché si possano calcolare velocità e posizione, occorre però conoscere la direzione delle accelerazioni (non basta il modulo).

La direzione è determinata con l'uso di **girascopi**, che possono essere usati in 2 configurazioni, a seconda del tipo di strumento.

→ **configurazione gimbal:**



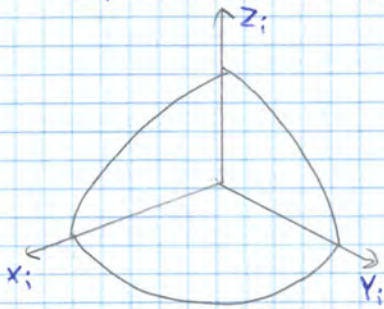
La piattaforma mantiene sempre gli assi paralleli al sistema di riferimento di base, cioè il sistema di riferimento inerziale.

Ciò avviene per mezzo di GIRASCOPI TRIASSIALI, cioè girascopi meccanici che monitorano le variazioni azimutali e le correggono mediante un servomotore a essi collegati.

In questa situazione, poiché il sistema di riferimento si mantiene sempre parallelo a se stesso nel tempo, le accelerazioni che si misurano rispetto agli assi sono già le accelerazioni nel sistema di riferimento inerziale.

del corpo. Questi sono i sistemi di riferimento inerziali.

A rigori, un sistema di riferimento inerziale è quello delle stelle fisse, poiché è depurato dai moti della Terra, del Sole e della galassia.



In realtà, si adotta un sistema di riferimento pseudo-inerziale avente

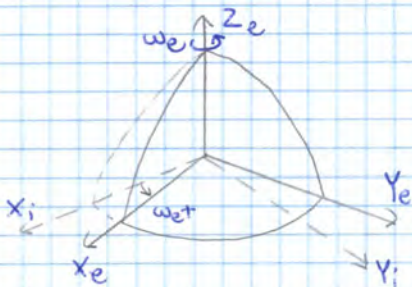
→ origine coincidente con il centro della Terra e Solidale a essa

→ asse Z_i dato dall'asse polare terrestre, asse X_i dato dall'intersezione dell'eclittica con il piano equatoriale e asse Y_i dato di conseguenza (completa la terna destrorsa).

I 3 assi non ruotano rispetto alle stelle fisse e dunque si mantengono paralleli a se stessi.

Questo sistema è accettato perché è affetto da moti che sono piccoli e non misurabili.

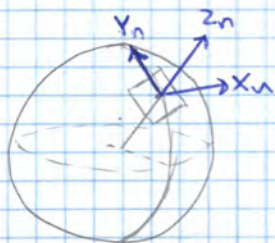
→ sistema di riferimento terrestre (E-FRAME)



Esso è il sistema di riferimento ECEF ed è un sistema di riferimento geocentrico, in cui l'asse Z_e è l'asse di rotazione terrestre e l'asse X_e è l'intersezione tra il piano equatoriale e il meridiano di Greenwich (Y_e viene di conseguenza).

Questo è in rotazione con velocità ω_e rispetto al sistema di riferimento inerziale ed è usato nelle applicazioni della navigazione geodetica.

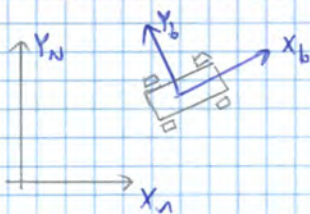
→ sistema di riferimento navigazionale (N-FRAME)



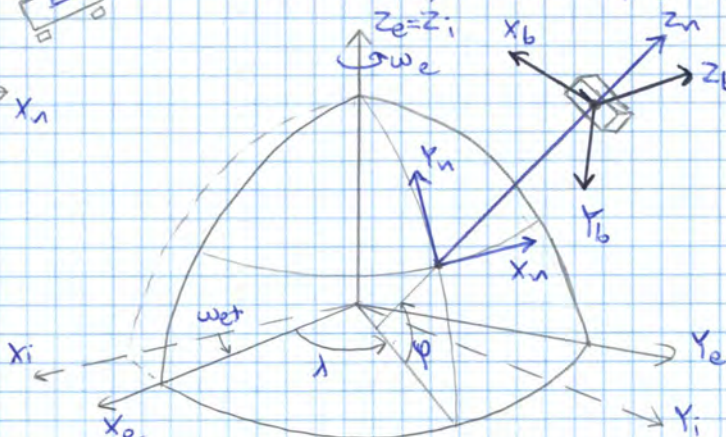
Esso è il sistema di riferimento locale, definito dal piano euleriano, ossia dal piano tangente all'ellissoide nel punto di interesse.

Questo è una terna cartesiana avente origine e nella posizione del sistema di navigazione e, asse Z_n diretto come la normale all'ellissoide e asse Y_n tangente al meridiano e diretto a Nord (X_n viene di conseguenza). Questo sistema segue il moto del corpo.

→ sistema di riferimento strumentale o BODY-FRAME (b-FRAME)



Esso è una terna cartesiana solidale con il corpo in movimento, con assi X_b , Y_b e Z_b .



$$[R_n^b] = [R_x][R_y][R_z] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos w & \sin w \\ 0 & -\sin w & \cos w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos w \cos k & \cos w \sin k & -\sin w \\ \sin w \sin \varphi \cos k - \cos w \sin k & \sin w \sin \varphi \sin k - \cos w \cos k & \sin w \cos \varphi \\ \cos w \sin \varphi \cos k - \sin w \sin k & \cos w \sin \varphi \sin k - \cos w \cos k & \cos w \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Nel passaggio $b \rightarrow n$ interviene la matrice inversa che, grazie all'ortogonalità della matrice di rotazione, corrisponde alla trasposta.

$$[R_n^b]^{-1} = {}^t[R_n^b] = {}^t[R_x]{}^t[R_y]{}^t[R_z]$$

In realtà il giroscopio misura non angoli, bensì velocità di rotazione \dot{w} , $\dot{\varphi}$ e \dot{k} . È possibile però esprimere la matrice con questi termini e ciò corrisponde alla derivata della matrice di rotazione nel tempo (assi a la velocità di cambiamento della matrice di rotazione).

Si dimostra che la velocità di cambiamento è uguale alla matrice di rotazione moltiplicata per una matrice contenente le velocità angolari (di b rispetto a n)

$$[\dot{R}_n^b] = [R_n^b][\Omega_n^b]$$

$$[\Omega_n^b] = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{k} & \dot{\varphi} \\ \dot{k} & 0 & -\dot{w} \\ -\dot{\varphi} & \dot{w} & 0 \end{bmatrix}$$

Siccome il giroscopio fornisce velocità angolari, la matrice $[R]$ non contiene in genere angoli, bensì variazioni angolari.

Siccome poi la misura è frequente, le differenze angolari sono riferite a stati molto vicini ($\Delta t = 1/200$ secondi) e dunque le variazioni angolari sono piccole. Ciò è comodo perché permette di sfruttare la forma linearizzata della matrice di rotazione.

$$[R_n^b] = \begin{bmatrix} 1 & k & -\varphi \\ -k & 1 & w \\ \varphi & -w & 1 \end{bmatrix} \quad [R_b^n] = \begin{bmatrix} 1 & -k & \varphi \\ k & 1 & -w \\ -\varphi & w & 1 \end{bmatrix}$$

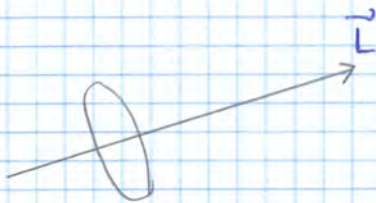
↳ l'espressione è scritta in termini di angoli, ma dentro vanno inserite le variazioni angolari

3 Girascopi

Essi sono strumenti che misurano VELOCITÀ ANGOLARI.

Possano essere di 2 tipologie

→ girascopi meccanici



Essi sono dispositivi rotanti attorno a un asse e tendono a mantenere l'asse di rotazione orientato in una direzione fissa.

Ciò è dovuto al PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO DELLE QUANTITÀ DI MOTO:

in un sistema di riferimento inerziale, il momento delle quantità di moto L è costante se il momento delle forze esterne agenti su di essa è nullo

Il principio è stato utilizzato da Foucault per dimostrare la rotazione della Terra attorno al proprio asse:

egli realizzò un pendolo di massa rilevante e lunghezza elevata, il quale avrebbe dovuto oscillare lungo un piano per rispettare il principio. In realtà, il piano cambia e ciò è dovuto alla rotazione della Terra. Questo pendolo rappresenta un primo esempio di girascopo meccanico.



I girascopi meccanici sono costituiti da una ruota posta in rotazione attorno al suo asse ed è installata su una sospensione cardanica, che le permette di orientarsi liberamente nello spazio, indipendentemente dall'orientamento del supporto cardanico.

Il principio di misura dei girascopi meccanici si basa proprio sul principio di conservazione del momento delle quantità di moto:

questo è pari a

$$L = m \omega r^2$$

e, in un sistema di riferimento inerziale, questo è costante se non il girascopo non è perturbato e l'asse di rotazione si mantiene parallelo a se stesso. Invece, se si applica un momento e si perturba il moto, il girascopo risponde creando un momento applicato nella direzione perpendicolare all'asse di rotazione e all'asse del momento perturbante. L'entità di questo momento torcente è proporzionale alla velocità angolare del corpo nel sistema di riferimento inerziale.

Nel caso della navigazione inerziale, l'asse di rotazione tende a mantenersi ^{uguale} nel sistema di riferimento inerziale.

Pero, sulla superficie della Terra, non si è su un sistema di riferimento inerziale e dunque si osserva che tende a nascere un momento che è proporzionale alla velocità angolare della ruota.

Da qui, sapendo che il girascopo "lavora" nel sistema inerziale, si ottiene la misura della velocità angolare della Terra e dell'eventuale velocità angolare impressa (questa somma è la velocità angolare nel sistema inerziale).

Per questo motivo, il girascopo dà una misura di velocità angolare e non una rotazione e la misura è espressa nel sistema di riferimento inerziale (infatti, questa è una configurazione gimbal).

Nell'INU, sono presenti 3 girascopi, per misurare la velocità di rotazione rispetto a 3 assi.

In realtà, il meccanismo è più complesso dal punto di vista costruttivo, perché si vuole evitare che la massa oscilli rispetto alla posizione di quiete. È pertanto presente un meccanismo che, quando la massa inizia a muoversi, ne misura lo spostamento e ~~la~~ imprime lo spostamento opposto alla parete dello chassis, alla quale è vincolata la molla (tale spostamento è applicato con un servomeccanismo). In questo modo, la massa è riportata nella posizione iniziale all'interno dello chassis.

⇒ la massa è immobile, mentre la reazione nella molla cambia

Cosa restituisce l'accelerometro?

Quando l'accelerometro si trova su un piano soggetto alla forza di gravità, la massa è attratta verso il basso rispetto alla posizione di equilibrio. Secondo il principio di funzionamento, l'output dell'accelerometro dev'essere opposto rispetto all'accelerazione locale (ha lo stesso segno della forza che subisce la molla). Pertanto l'accelerometro misura la cosiddetta **forza specifica**

$$\{f\} = \{a\} - \{g\}$$

a = accelerazione ~~del~~ sul corpo espressa nel body-frame

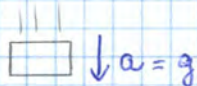
g = componente di gravità agente sull'accelerazione

CASI TIPO → **SENSORE FERMO**: in questo caso, il sensore deve misurare la forza di gravità nel body-frame



$a = 0 \Rightarrow f = -g$

→ **SENSORE IN CADUTA LIBERA**: se il sensore cade sotto la forza di gravità, l'accelerazione è



$a = g$

e si misura

$f = 0$

Questa convenzione di misura permette di tenere conto della gravità (ad es. quando il sensore è fermo in un sistema di riferimento non inerziale, si misura quello che non è inerziale).

Nel dettaglio, il contributo g tiene conto sia della gravità sia dell'azione centrifuga.

Nei sistemi MEMS, si sfrutta sempre il principio della massa sospesa, ma ora il sistema è microscopico.

Errori nella misura

1 Dal punto di vista pratico, i sensori presentano molti errori, che fondamentalmente sono di 2 tipi

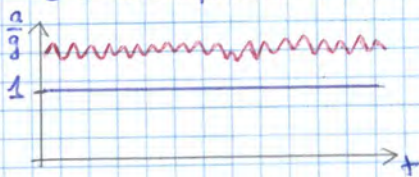
→ **ERRORI SISTEMATICI** = errori che mantengono segno e caratteristiche (sono legati a errori di modello)

→ **ERRORI ACCIDENTALI** = errori non prevedibili a priori e sono a media nulla.

Entrambi questi errori sono elevati e dunque devono essere modellati e, possibilmente, eliminati.

2 Errori sistematici

L'errore tipico è il BIAS.

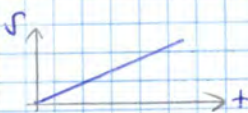
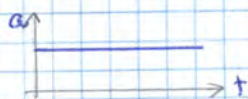


Esso è una traslazione dei valori di accelerazione e velocità angolare misurati dai sensori. Ad es., se ci si riferisce all'accelerazione, ad accelerometro fermo bisognerebbe misurare un'accelerazione relativa unitaria, ma in realtà la media non è 1.

Oltre ai biases traslativi, esistono biases di scala, di non ortogonalità degli assi e dovuti a variazioni di temperatura.

I biases traslativi sono quelli più significativi.

→ **BIAS SULL'ACCELERAZIONE**



Se l'accelerazione è affetta da un bias non compensato (ad es. la misura è maggiore di 0 a corpo fermo), l'errore si propaga sulla velocità e sulla posizione. In particolare, l'errore che nasce sulla velocità è proporzionale al tempo.

$$e_v = \int b_a dt = b_a t$$

L'errore nella posizione è proporzionale al quadrato del tempo

$$e_p = \frac{1}{2} b_a t^2$$

Un bias tipico sull'accelerazione vale $0,05 \text{ m/s}^2$ e ciò provoca un errore di 2 m dopo 10 secondi di navigazione e un errore di 1800 m dopo 5 minuti.

→ **BIAS SULLA VELOCITÀ ANGOLARE**

In questo caso, si parla di **deriva giroscopica** e si misura in deg/s . Siccome la velocità angolare è integrata per ottenere l'angolo di rotazione e viene applicata all'accelerazione, si può capire che questo errore

→ influenza l'accelerazione con un errore lineare nel tempo

→ influenza la velocità con un errore quadratico nel tempo

→ influenza la posizione con un errore cubico nel tempo

⇒ IL BIAS SUL GIROSCOPIO È PIÙ DANNOSO RISPETTO AL BIAS SULL'ACCELEROMETRO

Calibrazione degli errori

Si come gli errori in accelerazione e velocità angolare sono significativi e possono rendere pessimo il risultato (se si usa l'INS da solo), si può pensare di modellare il segnale in output in funzione degli errori sistematici e accidentali:

a livello internazionale, si scrivono le equazioni di misura

→ ACCELERAZIONI

$$\{P_a\} = \{F\} + \{b_a\} + [S_1]\{F\} + [N]\{F\} + \{\epsilon_f\}$$

→ VELOCITÀ ANGOLARI

$$\{P_w\} = \{w\} + \{b_w\} + [S_2]\{w\} + [N]\{w\} + \{\epsilon_w\}$$

$\{b_i\}$ = errore traslativo

$[S_i]$ = Fattore di scala, poiché in sensore può misurare $1/f$ anziché f .
Si come per ogni componente esiste una scala che può dipendere dalle direzioni x, y, z , esso si esprime con una matrice

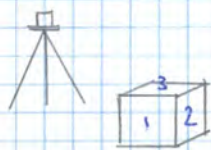
$[N]$ = Fattore di non ortogonalità tra gli assi dei sensori

$\{\epsilon\}$ = errore accidentale (rumore di misura)

OSSERVAZIONI: in teoria, nella formula dell'accelerazione interviene il termine $\{d\}$ che è l'effetto della variazione di gravità da un punto all'altro, ma è trascurabile.

Una volta esplicitati i vari contributi degli errori, si nota che alcuni sono eliminabili

→ alcuni errori sistematici si possono eliminare eseguendo un test statico (si fa una misura sufficientemente lunga - sui 20 minuti), detto **test statico delle 6 facce**.



Su un treppiede posto in una zona stabile di un edificio, ad. es. l'angolo di un muro portante (per evitare l'influenza del calpestio), si livella una bassetta.

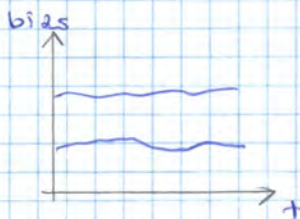
In seguito, si poggia il sensore su ogni sua faccia, registrando l'output di accelerazione e ~~asse~~ velocità angolare. Eseguendo il confronto tra gli output, si può ricavare il valore dei bias traslativi e di scala, in modo simile alla regola di Bessel.

$$b_a = \frac{\ddot{z}_{up} + \ddot{z}_{down}}{2}$$

$$S_{a1} = \frac{\ddot{z}_{down} - \ddot{z}_{up} - 2g}{2g}$$

$$b_g = \frac{w_{up} + w_{down}}{2}$$

$$S_2 = \frac{w_{up} - w_{down} - 2\omega_E \sin\varphi}{2\omega_E \sin\varphi}$$



Se questa procedura è ripetuta nel tempo, si può notare che alcuni bias sono stabili, mentre altri variano da misura a misura poiché cambiano all'accensione dello strumento.

↓ l'ideale è avere errori anche elevati ma stabili nel tempo, poiché sono eliminabili mediante il test a 6 facce

→ gli errori accidentali, avendo media zero, si riducono grazie all'elevata frequenza di misura dello strumento.

5 Navigazione assistita:

essa consiste nell'**AFFIANCAMENTO** DI PIÙ STRUMENTI DI NATURA DIVERSA e nasce dal problema per il quale i sensori inerziali, a causa degli errori non eliminabili, non consentono una navigazione autonoma e precisa per tempi lunghi.

Infatti, se lo strumento presenta errori diversi a ogni accensione, questi non possono essere determinati solo mediante un altro strumento.

Tipicamente, l'altro strumento è il GNSS poiché esso fornisce la posizione, che è legata all'accelerazione, e da qui si possono determinare i bias.

⇒ nell'integrazione INS-GNSS, agli assetti e alla posizione, si possono aggiungere come incognite i bias che cambiano a ogni accensione.

Il ragionamento funziona anche con altri sensori ma l'integrazione più efficace è INS-GNSS poiché i due sensori sono complementari.

Di fatto, l'integrazione porta a un aumento di incognite (si aggiungono i bias), anche se alcune possono essere determinate in modo immediato.

→ il bias traslativo dell'accelerazione si può ricavare seguendo il percorso a velocità costante.

→ il bias di scala dell'accelerazione si può ricavare accelerando e frenando.

→ i bias del giroscopio si possono ricavare facendo rotazioni.

⇒ in genere, prima di fare un rilievo integrato, si esegue una **calibrazione**, che consiste in fare accelerazioni, frenate, rotazioni, etc. in modo che il software calcoli subito alcuni bias e le incognite si riducano. L'operazione si ripete a ogni accensione.

La navigazione assistita necessita però di **algoritmi di integrazione**, che fanno sì che la soluzione GNSS sia impiegata per correggere la soluzione INS dall'accumulo di errori sistematici non compensati e di stimare traiettoria ed errori sistematici dei due sistemi (se l'integrazione è in post-processing) o controllare il mezzo in movimento (integrazione in tempo reale).

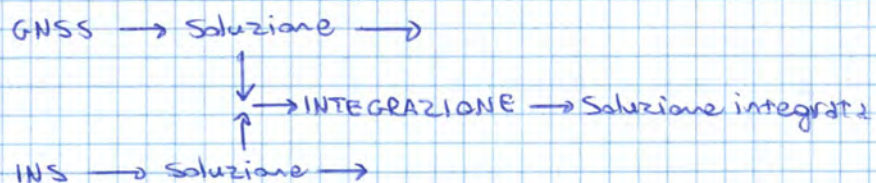
Dal punto di vista dell'algoritmo, ci sono 2 strumenti che devono essere integrati in modo sinergico e ciò avviene in 2 modi:

→ **integrazione sinergica lasca:**

essa prevede di **UTILIZZARE I RISULTATI** dei due sistemi in un unico filtro, ossia di unire le due soluzioni.

Di fatto, dall'INS arrivano le informazioni su accelerazione e velocità angolare e dal GNSS arrivano le posizioni, che entrano nell'algoritmo di integrazione in modo quasi indipendente. In esso, la soluzione GNSS si limita a filtrare gli errori nella navigazione.

Il sistema è semplice, ma richiede della soluzione GNSS (cioè la posizione) per correggere i bias e dunque occorrono almeno 4 satelliti. Inoltre, è difficile ricucire i cycle-slip.



→ UAV: è un quadricottero o drone che porta un sensore IMU e GNSS e una camera fotogrammetrica calibrata ed è controllato in remoto. Esso usa sensori MEMS, meno precisi e poco costosi.

→ navigazione pedestre:

è un sistema di integrazione tra GPS e IMU applicata sul pedone per valutare il moto, la postura e coordinare attività di soccorso.

OSSERVAZIONE: se si opera in un ambiente chiuso, nel quale l'INS non può essere integrato con altri strumenti, per tempi lunghi, il posizionamento presenta un errore che aumenta con il cubo del tempo. Per limitarlo e migliorare il risultato finale, si può far fermare il sensore su un punto di coordinate note, detto **Zero Update Times (ZUPT)**:

in esso la velocità è nulla e, se si rileva una velocità o accelerazione, quello è l'errore.

In questo modo, si può azzerare l'errore accumulato nel sensore inerziale e reinizializzare il sistema di calcolo.

Tra l'altro, questo può essere applicato alla navigazione pedestre in cui, grazie all'alta frequenza di misura (200 Hz), quando si posa il piede lo strumento rileva che si è fermi. Così, se si compie un percorso e si ritorna su un punto già battuto ma per lo strumento il punto è diverso, si ottiene l'errore sistematico.

$$= [N] + \begin{bmatrix} m_1^2 & m_1 m_2 & m_1 m_3 & \dots \\ & m_2^2 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ \text{simm} & & & m_6^2 \end{bmatrix}$$

Questa si può riscrivere come

$$[N_{t+1}] = [N_t] + [\Delta N]$$

L'obiettivo è riuscire a esprimere i parametri di nuovo tempo \hat{X}_{t+1} in funzione di questa matrice ΔN :

al fine, sapendo che la matrice N_{t+1} è somma di 2 matrici quadrate e definite positive (cioè N_t e ΔN), si dimostra che esiste una formula che permette di invertire in modo diretto N_{t+1} dalle due matrici N_t e ΔN .

Grazie a questo, si dimostra che è possibile scrivere i nuovi parametri come

$$\{X_{t+1}\} = \{X_t\} + \{\Delta X\}$$

dove

$$\{\Delta X\} = F([N_t]; [A_{t+1}])$$

↳ matrice di segno con le nuove misure

In questo modo, diventa semplice correggere i parametri in funzione di misure che, per qualche motivo, non potevano essere acquisite subito e sono acquisite a una certa epoca.

Questo approccio, che permette di correggere i parametri mediante inversione della matrice con le nuove misure, si dice **metodo dei minimi quadrati sequenziali**.

La questione si complica quando, a un'epoca successiva, non arrivano solo nuove misure, ma anche nuove incognite.



Questa è una situazione tipica del posizionamento inerziale poiché, a ogni epoca, ci sono \otimes misure in più e anche incognite in più.

In questo caso, nella matrice di segno si aggiungono nuove righe e colonne e, in questo caso, si fa ricorso a un sistema generale, detto **filtro di Kalman**.

OSSERVAZIONE: il problema dell'aggiornamento della stima (sia con minimi quadrati sequenziali che con Kalman) può essere eseguito in

→ tempo reale, quando bisogna guidare qualcosa (es. pilotaggio)

→ post-processing, nel caso di navigazione geodetica.

Tra l'altro, negli strumenti moderni aggiungono molti dati ogni secondo ma, ogni secondo, ci sono nuove incognite perché nel frattempo lo strumento può aver cambiato posizione.

Kalman ha poi notato che le 2 matrici k e L possono essere ridotte a un'unica matrice.
Imponendo infatti:

$$[L] = [I] - [K][A_{i+1}]$$

si ottiene l'espressione

$$\{\hat{x}_{i+1}\} = \{\hat{x}_i\} + [K] (\{b_{i+1}\} - [A_{i+1}]\{\hat{x}_i\})$$

$$\{\hat{x}_{i+1}\} = \{\hat{x}_i\} + [K] (\{b_{i+1}\} - [A_{i+1}]\{\hat{x}_i\})$$

Secondo questa relazione, i nuovi parametri corrispondono a quelli vecchi e all'applicazione lineare delle nuove misure, ridotte dal prodotto tra la nuova matrice disegno e le vecchie misure.

Questa relazione è significativa per più motivi:

→ c'è solo da determinare la matrice K che rappresenta l'aggiornamento che bisogna dare ai parametri per passare dall'epoca i all'epoca $i+1$.
In questo senso, essa è una **MATRICE DI AGGIORNAMENTO** e prende il nome di **matrice di Kalman** o **matrice guadagno** (poiché indica quanto variano i parametri all'epoca $i+1$)

$$n = p_0 - p$$

→ il termine tra parentesi contiene le nuove misure e la matrice disegno nuova moltiplicata per i vecchi parametri.
Nel caso che, a ogni epoca, si aggiunga una sola misura, questo termine diventa uno scalare e K deve essere un vettore per passare dalla dimensione 1 delle nuove misure alla dimensione n dei parametri (a volte, anche K può essere uno scalare).
Se ci sono più misure, il termine diventa un vettore e K è una matrice, le cui dimensioni possono però essere molto piccole, a differenza della matrice normale N (molto più estesa).
Ad es. se a ogni epoca si misurano 3 valori in più e 3 parametri in più, la matrice K ha dimensioni 3×3 .

⇒ LA MATRICE GUADAGNO HA PICCOLE DIMENSIONI

→ scritta in questo modo, la formula è valida anche per i minimi quadrati sequenziali.
In realtà, anche se l'espressione è identica, il principio è diverso perché i minimi quadrati sequenziali prevedono la sola aggiunta di misure e non di parametri.

→ **Dimostrazione**

La formula è dimostrata in modi diversi, ad es. da base statistica (Kalman) o per via matriciale.

Innanzitutto, la formulazione prevede che nel problema intervengano

→ **equazioni di misura**, cioè le classiche equazioni che intervengono nei minimi quadrati (assunte linearizzate).

$$\{b_k\} = [A_k]\{x_k\} + \{v_k\} \quad v_k = \text{errore accidentale}$$

→ **equazioni di stato** (assunte linearizzate)

$$\{x_k\} = [T_{k-1}]\{x_{k-1}\} + \{z_k\} \quad z_k = \text{errore accidentale (es. rumore)}$$

→ APPLICAZIONI DELLA FORMULAZIONE DI KALMAN

- studio della traiettoria di un oggetto, in cui si misura lo stato ad ogni epoca e si hanno nuove incognite
- studio dell'andamento di un fenomeno fisico (es. andamento del ritardo troposferico).

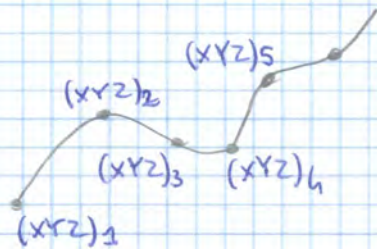
3 Differenze minimi quadrati - filtro di Kalman

La Formula Fondamentale

$$\{\hat{z}_{i+1}\} = \{\hat{z}_i\} + [k] (\{b_{i+1}\} - [A_{i+1}]\{\hat{z}_i\})$$

indica due cose

- ogni volta che si aggiunge una misura, si aggiornano i parametri
- si immagini di applicare la formula a una traiettoria, nella quale ci sono solo 3 incognite (le coordinate di posizione) a ogni epoca.



All'epoca 1, si ottiene una certa misura e si può ottenere la posizione $(x; y; z)$.
 All'epoca 2, poiché il punto si è spostato, intervengono 3 nuove incognite, che sono compensate da 6 nuove misure (es. 3 velocità angolari e 3 accelerazioni).
 con la formula di Kalman, si ricavano gli aggiornamenti dei parametri all'epoca 2.
 Allo stesso modo, all'epoca 3, si ottengono nuove misure e dunque nuovi parametri.

Si può però notare che la posizione 1 è ricavata solo con le misure fatte all'epoca 1.

Viceversa, la posizione 2 è ricavata ~~solo~~ con le misure fatte all'epoca 2 e anche con i parametri che derivano dalle misure compiute all'epoca precedente. In altri termini, i parametri all'epoca 2 sono ricavati dalle misure fatte nelle epoche 1 e 2.

La posizione 3 è ricavata dai parametri d'epoca 2 e dalle misure d'epoca 3, ossia è ricavata dalle misure delle epoche 1, 2 e 3.

Infine, gli ultimi parametri sono ricavati dalle misure di tutte le epoche, cioè solo gli ultimi parametri usano tutte le misure.

↳ ad es. la posizione 4 non usa la misura d'epoca 5 perché questa misura non è ancora stata fatta

Per tanto, solo l'ultima epoca fornisce una soluzione identica alla soluzione di minimi quadrati, poiché in essa sono disponibili tutte le misure.

Se si usassero i minimi quadrati (ad es. in post-processing), di fatto si metterebbero insieme tutte le misure e dunque, in qualunque epoca, si userebbero tutte le misure.

⇒ IL FILTRO DI KALMAN USA LE MISURE PRECEDENTI ALL'EPOCA DI RIFERIMENTO;
 I MINIMI QUADRATI USANO, IN MANIERA INDISTINTA & INDIPENDENTE DALL'EPOCA, TUTTE LE MISURE

Le soluzioni coincidano solo se si riferiscono alle ultime epoche.

Di fatto, grazie alle ipotesi di moto (equazioni di stato), si prevede la posizione.
In seguito si usano le misure e si corregge la posizione.

Questa è l'operazione di filtraggio che, in questo modo, è divisa in predizione e correzione.

All'epoca 2, si ottengono

$$\{x_{2|1}\} = [T_1] \{x_{1|1}\}$$

$$\{x_{2|2}\} = \{x_{2|1}\} + [K_2] (\{b_2\} - [A_2] \{x_{2|1}\})$$

↳ il primo pedice dice a quale epoca appartengono i parametri, il secondo pedice indica da dove arrivano le misure.

Una volta eseguite tutte le misure e calcolati tutti i parametri, si può procedere al lisciamento mediante minimi quadrati.
In questo caso, si possono usare i 2 pedici ancora una volta e i parametri si esprimeranno come $x_{6|6}$, $x_{5|6}$, $x_{4|6}$, etc.

↳ Scarto predetto

Nella formula di Kalman interviene un termine

$$\{b_k\} - [A_k] \{x_{k|k-1}\}$$

In generale, lo scarto si può esprimere come

$$v = b - Ax$$

dove b è la misura, A è la matrice disegno e x è il parametro.

Si può allora capire che il termine della formula di Kalman rappresenta una forma particolare di scarto.

Questa è particolare perché coinvolge le nuove misure, la nuova matrice disegno e i parametri predetti (dati dall'equazione di moto).

In altri termini, questo è lo scarto che si immagina di avere a una certa epoca per effetto del moto predetto e si dice **scarto predetto** v_k .

$$\{v_k\} = \{b_k\} - [A_k] \{x_{k|k-1}\}$$

Questo scarto costituisce un ulteriore elemento di vantaggio (oltre alle matrici di piccole dimensioni) del metodo Kalman:

quando si esaminano epoche per epoche e si aggiungono delle nuove misure all'epoca, se si calcola uno scarto v_k elevato, si può immaginare che ci sia un errore nella misura e questo può essere identificato subito.

⇒ SI PUÒ FARE UN TEST SULLO SCARTO PREDETTO A OGNI EPOCA, anziché prendere tutto il sistema e poi non sapere dove si trovi l'errore.

Per tanto, il sistema è conveniente non solo dal punto di vista computazionale ma anche in termini di DATA SWEEPING (individuazione di anomalie).

Per risolvere questo problema numerico, è stata dimostrata una formulazione equivalente, detta **formulazione di Joseph**, in cui è evidente la forma quadratica.

$$[Q_{k|k}] = ([I] - [K_k][A_k])[Q_{k|k-1}]^+ ([I] - [K_k][A_k]) + [K_k][C_{ek}]^+[K_k]$$

Esiste poi la **Formulazione di Bayes**, che dà l'inverso.

$$\begin{aligned} [Q_{k|k}]^{-1} &= [Q_{k|k-1}]^{-1} + [A_k][C_{ek}]^{-1}[A_k] = \\ &= [N_{k|k-1}] + [A_k][C_{ek}]^{-1}[A_k] \end{aligned}$$

Si può notare che quest'ultima Formulazione non presenta la matrice K_k e dunque consente di ricavare la matrice informazione prima di aver ricavato l'altra.

L'unica complessità è che si ricava una matrice inversa, ma questa ha piccole dimensioni. Inoltre, la matrice inversa all'interno è sostituita con la matrice normale. Infatti, l'inverso della matrice di varianza-covarianza è uguale alla matrice normale, a meno di una costante.

VANTAGGI: se all'epoca 0 non si hanno informazioni sulla precisione dei parametri e delle misure (situazione tipica - non si sono ancora fatte le misure), per indicare l'assenza di informazioni si può imporre

$$[N] = [0]$$

Ragionando in senso contrario, cioè equivale a dire

$$[Q] = [\infty]$$

Con la formula, a partire dall'epoca 0, si può correggere e migliorare le stime alle epoche successive.

Tra l'altro, Bayes dimostra una formula per calcolare la matrice guadagno.

$$\begin{aligned} [K_k] &= [Q_{k|k}]^+[A_k][C_{ek}]^{-1} = \\ &= [N_{k|k}]^{-1}[A_k][C_{ek}]^{-1} \end{aligned}$$

Si è così visto che il Filtro di Kalman permette di eseguire il filtraggio, in cui si predicano i valori e in seguito li si correggono, sulla base delle equazioni di misura.

$$x_{1|0}; x_{1|1}; x_{2|1}; x_{2|2}; \dots; x_{N|N-1}; x_{N|N}$$

↓
valore corrispondente
alle misure all'epoca
0 (anche non esistenti)

Questa operazione è utile per le attività in tempo reale.

Nell'attività di liscio, si usano tutte le misure e si ricalcolano i parametri (mediante equazioni qui non trattate)

$$x_{N-1|N}; x_{N-2|N}; x_{N-3|N}; \dots; x_{1|N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^3 (b_i - \bar{x})^2}{3 \cdot \textcircled{2}}$$

↳ m-n = 2

Si nota che la varianza della media è più piccola, secondo un fattore rispetto alla varianza del singolo valore, cioè la media è più precisa del singolo valore.

OSSERVAZIONE: se si esegue lo stesso ragionamento con la matrice dei pesi diversa dall'identità, si trova la formula della media pesata e il suo scarto quadratico medio.

Ora si ripete il procedimento usando il filtro di Kalman, che richiede di usare da

→ equazioni di misura:

ad ogni epoca, è presente una nuova misura e la precisione è data dalla varianza (sarebbe la matrice di varianza-covarianza) ed è assunta pari a 1, per semplicità.

→ equazioni di stato:

queste permettono di predire quanto vale x_k rispetto a x_{k-1} .

MISURA $x_k = b_k$ $\sigma_b^2 = 1$

STATO $x_k = x_{k-1}$ $\sigma_x = 1$

Nel filtraggio, di fatto si applica il metodo dei minimi quadrati usando le equazioni di stato e di misura (come si è visto nella dimostrazione della formula di Kalman)

Se ci si limita all'epoca 1, intervengono le equazioni

Misura a k=0 $x_0 = b_0$ no epoca 0

Predizione a k=1 $x_1 = x_0 \Rightarrow -x_0 + x_1 = 0$

Misura a k=1 $x_1 = b_1$

Ciò si traduce nel sistema matriciale.

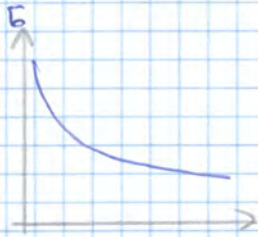
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix} \rightarrow [A] \{x\} = \{b\}$$

Se ci si riferisce fino all'epoca 2, il sistema presenta altre equazioni in più

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \\ b_1 \\ 0 \\ b_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Si sono messe tutte e 3 le misure}$$

in maniera perfetta.
 Favendo tale condizione, si sarebbe ottenuta la formula ^{della} dei minimi quadrati (cioè la formula della media).

PROPRIETÀ → PRECISIONE DELLE STIME



Se si aggiunge una misura, la matrice normale $A^T A$ aumenta, nei suoi valori e la sua inversa diminuisce.

Epoca 1 $[N]^{-1} = \frac{2}{3} [A_{ij}]^{-1}$ → Epoca 2 $[N]^{-1} = \frac{5}{8} [A_{ij}]^{-1}$

Pertanto, aumenta la precisione (proporzionale a N)

⇒ anche se lo scarto quadratico medio è inizialmente alto, questo si riduce secondo un'iperbole quadratica.

ES (PROBLEMA A PIÙ DIMENSIONI)

Si vogliono calcolare posizione e velocità $(x; \dot{x})$ a diverse epoche t_i (con $\Delta t_i = 10s$) di un punto in moto rettilineo uniforme.
 Sono state fatte 3 misure di ascissa x_i , con uguale precisione.

$b_0 = 110,1m$ $b_1 = 120,6m$ $b_2 = 130,8m$ $\sigma_x = \pm 0,2m$

Si come la velocità è costante, si possono costruire subito le equazioni del moto

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} + \dot{x}_{k-1} \Delta t_k + \epsilon_x \\ \dot{x}_k = \dot{x}_{k-1} + \epsilon_{\dot{x}} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \text{velocità costante} \\ \sigma_{\dot{x}} = \pm 0,001m/s \end{matrix}$$

In questo caso, la matrice T diventa

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Novamente, si può iniziare con i minimi quadrati usando equazioni di misura e equazioni di stato.

$$\begin{matrix} \text{stato} \\ \text{misura} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ESERCITAZIONE 1: FOTOGRAMMETRIA E StereoCAD

Fonte dei fotogrammi: volo regionale della Regione Piemonte, camera fotografica Zeiss.

Il programma StereoCAD è un software di fotogrammetria digitale che permette la restituzione in modalità stereoscopica, a partire da coppie di fotogrammi orientati direttamente.

Nella rielaborazione di un fotogramma, occorre innanzitutto disporre di tre informazioni.

- Certificato di calibrazione della fotocamera.
- Orientamento interno, cioè come è fatta la camera di presa ed eventuali contro-distorsioni
- Orientamento esterno, nel quale possono essere subito noti i 6 parametri di posizione della fotocamera nello spazio oppure questi si ricavano partendo da un certo numero di punti di appoggio. In questo caso, i fotogrammi sono stati scattati in un volo con presenza di GPS e inerziale e dunque sono noti a priori i parametri di posizione.

Come si riportano i dati di orientamento nel software?

Certificato di calibrazione della fotocamera e orientamento interno

Si eseguono i comandi *Orientation > New*.

Nella finestra che si apre, si riportano i dati caratteristici della fotocamera

- Tipologia.
- Larghezza e altezza dell'immagine, espresse in pixel.
- Distanza focale.
- Posizione del punto principale, le cui coordinate corrispondono a metà della larghezza e della altezza e si esprimono in pixel.
- Origine del sistema di riferimento interno dell'immagine, posta non al centro del fotogramma bensì nel punto in alto a sinistra del fotogramma.
- Parametri correlati alle eventuali distorsioni dell'immagine. Nel caso non vi siano aberrazioni, essi sono nulli.

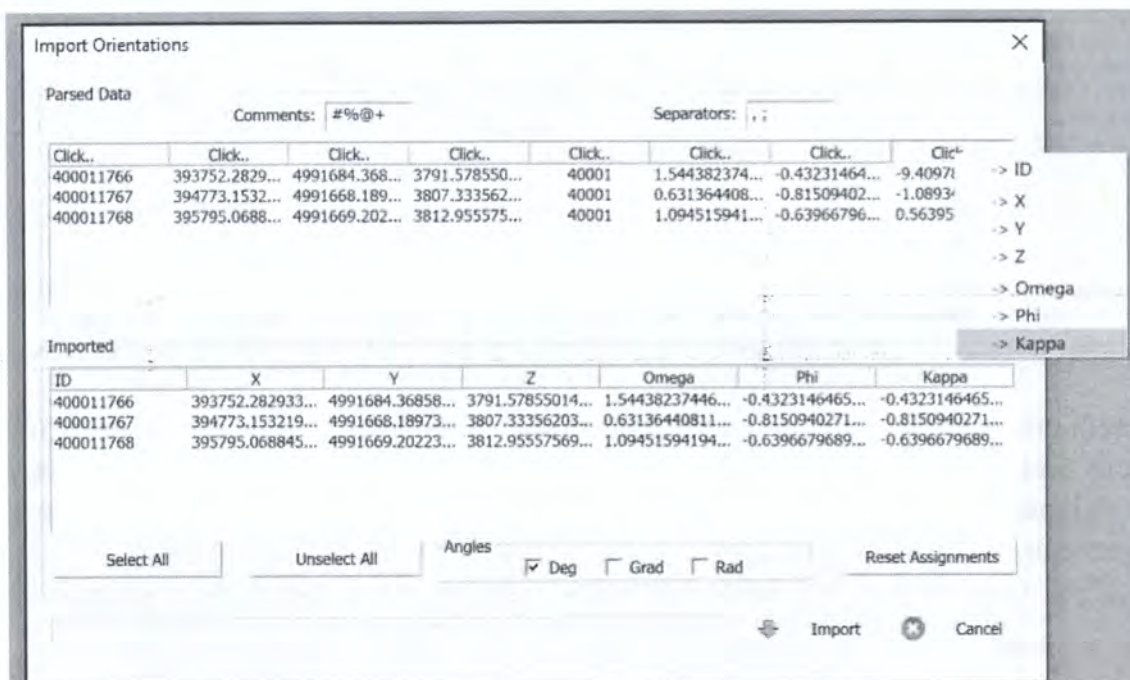


Figura 2. Parametri di orientamento esterno

In seguito, si selezionano i fotogrammi con il comando *Select all* e si importano i parametri con il comando *Import*.

A valle di questa operazione viene creato un file di orientamento interno *.int* e uno di orientamento esterno *.est*.

Il file di orientamento interno contiene la distanza principale, le coordinate dei 4 spigoli dell'immagine digitale espresse in pixel dal punto in alto a sinistra e in millimetri dal centro del fotogramma, oltre ai parametri della trasformazione affine da sistema immagine a sistema fiduciale.

```
Larghezza in pixel = 7680
Altezza in pixel = 13824
Focale = 120.000000
Rotazione scansione = 0.000000
```

Nome file camera - Zeiss DMC

```
Collimazioni fiduciali - 4
mm dal centro          Pixel dal Top left
LeftTop - -46.080000, 82.944000 <-> 0.000000, 0.000000 (0.000000, 0.000000)
RightTop - 46.080000, 82.944000 <-> 7680.000000, 0.000000 (0.000000, 0.000000)
RightBottom - 46.080000, -82.944000 <-> 7680.000000, 13824.000000 (0.000000, 0.000000)
LeftBottom - -46.080000, -82.944000 <-> 0.000000, 13824.000000 (0.000000, 0.000000)
```

```
Matrice Pixel->Fiduciale
Trasformazione = AFFINE
1_1 = 0.012000
1_2 = 0.000000
1_3 = -46.080000
2_1 = 0.000000
2_2 = -0.012000
2_3 = 82.944000
3_1 = 0.000000
3_2 = 0.000000
3_3 = 1.000000
```

Matrice Fiduciale->Pixel

Il restitutore digitale

Una volta inseriti i fotogrammi ed eseguito l'orientamento, si visualizza nello schermo una nuvola di punti omologhi relativi alle immagini e, a destra, si può leggere la posizione espressa in coordinate topografiche Est-Nord-Quota.

Se si vuole vedere semplicemente un fotogramma basta cliccare su uno dei punti verdi. Si può poi ingrandire con il tasto sinistro del mouse tenendolo premuto, si esegue la stessa operazione premendo il tasto destro per tornare indietro.

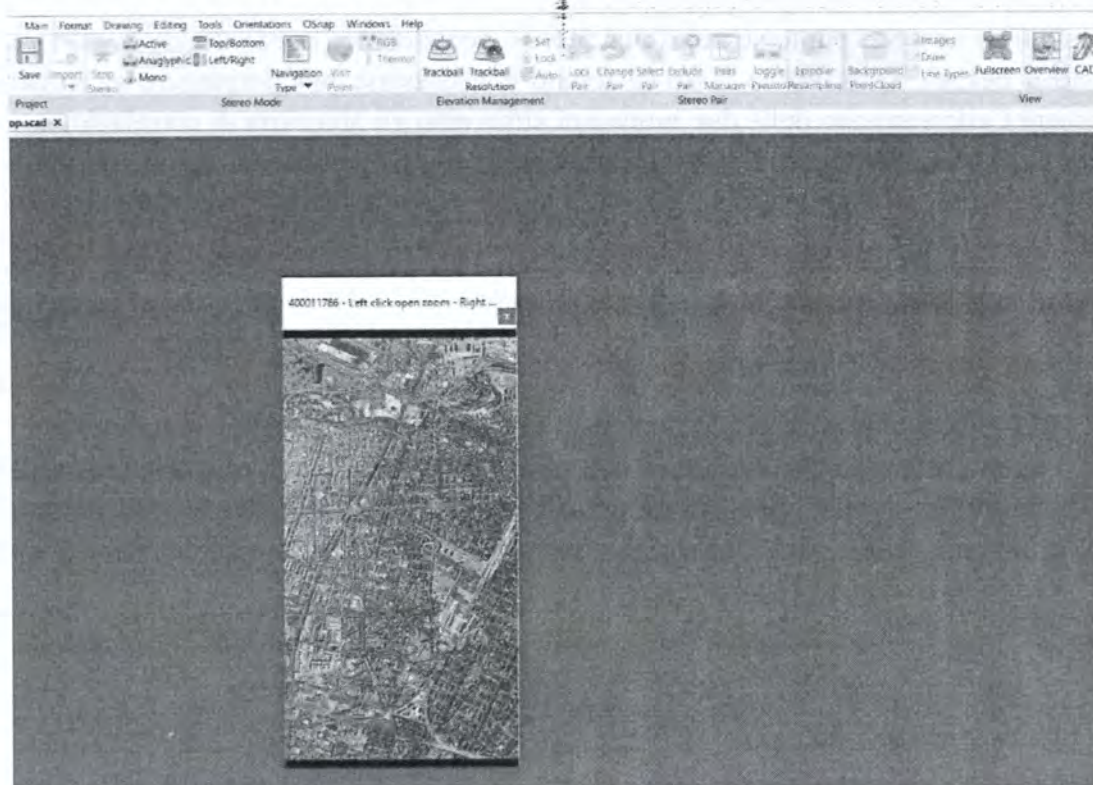


Figura 3. Fotogramma

Se il colore del punto è diverso, questo indica come il software si è trovato bene nella correlazione e come è riuscito a riconoscere i punti omologhi.

Cliccando su un punto bianco, invece, si apre la finestra stereoscopica e a destra si vedono sempre le coordinate Est-Nord-Quota.

A questo punto, per attivare la visione stereoscopica anaglifica, si seleziona il comando *Main > Anaglific*: in questo modo le immagini dei fotogrammi di sinistra e destra si presentano in colori complementari. La stereoscopia e dunque la tridimensionalità può essere allora percepita inforcando gli appositi occhialini con filtri del medesimo colore.

Per poter restituire un oggetto è necessario che il cursore collimi lo stesso punto su entrambe le immagini (rossa e ciano) ovvero che il punto abbia la corretta coordinata Q.

Se questo non avviene, una volta posizionata la marca sul punto di interesse, si deve modificare la quota utilizzando la rotella del mouse (così si elimina la parallasse tra i due fotogrammi) fino a quando il puntatore non si "appoggia" sull'oggetto. A tal proposito, prima di variare la quota è buona norma verificarne la sensibilità ed eventualmente regolarla con il

OSSERVAZIONE:

Cosa c'entra la stereoscopia con la fotogrammetria?

La stereoscopia non è necessaria per fare fotogrammetria ma è la tecnica che consente di ricostruire un oggetto a partire da due prese poste in punti distinti nello spazio. Del resto, questo è quanto viene fatto in tempo reale con gli occhi, che sono due camere di presa poste in due punti distinti dello spazio. In questo modo, si riesce a percepire anche la tridimensionalità dell'oggetto e si ha una maggiore sensibilità.

Con il software vale lo stesso perché è come se si vedesse contemporaneamente con l'occhio sinistro la camera da presa sinistra e con l'occhio destro la camera da presa destra. Esse si vedono contemporaneamente perché sono proiettate entrambe.

Ciò che conta è che le due immagini giungano in maniera distinta agli occhi sinistro e destro e questo è il modo più semplice per vedere in stereoscopia (lo stereoscopio prevede di inserire infatti una barriera visiva in modo che l'occhio sinistro veda solo la camera da presa sinistra e con l'occhio destro la camera da presa destra). Il cervello poi fonde le immagini e pensa di osservare la stessa cosa e fondendole le vede a tre dimensioni.

La necessità di far vedere l'immagine a sinistra solo all'occhio a sinistra spiega l'utilizzo dei colori complementari, in cui un colore annerisce l'altro (rosso annerisce il verde e viceversa il verde annerisce il rosso) però rosso fa passare rosso e verde fa passare verde. In realtà, l'immagine è a 3 colori e, infatti, per "colori complementari" si intende dire che a una delle due immagini è stato sottratto un colore fondamentale (verde) e all'altra un altro.

Vale poi un aspetto fondamentale.

La percezione della tridimensionalità è funzione dell'angolo parallattico, cioè l'angolo compreso tra i due occhi e diminuisce con il quadrato della distanza. Dunque in un oggetto molto distante si nota poco la profondità.

Nel software è come se si avesse tra un fotogramma e l'altro la base di presa, con un occhio e l'altro a 1 km di distanza tra di loro. Avendo così un parallasse estremamente elevato, la percezione tridimensionale è molto forte, quasi esagerata.

Questo è importante perché non solo è grande la percezione stereoscopica ma anche la precisione delle coordinate restituite, che è funzione dell'angolo parallattico, ossia del rapporto base di presa-distanza dell'oggetto. In genere nella fotogrammetria, salvo casi in cui la base di presa è bene proporzionata alla distanza (rapporto 1:2 o 1:3), le 3 coordinate hanno infatti la stessa precisione perché il rilievo è stato progettato bene. In questo caso, la precisione è 5000 perché i fotogrammi servivano a costruire una cartografia al 5000 e quindi l'errore di graficismo è 0,2.

Detto ciò, il software è un restitutore digitale e dunque su di esso si possono tracciare linee, polilinee, determinate geometrie, etc.

ESERCITAZIONE 2a: FOTOGRAMMETRIA E AGISOFT LENS

Il software AGISOFT Lens è un'applicazione che permette di calcolare i parametri di distorsione della camera che si impiega nel rilievo fotogrammetrico.

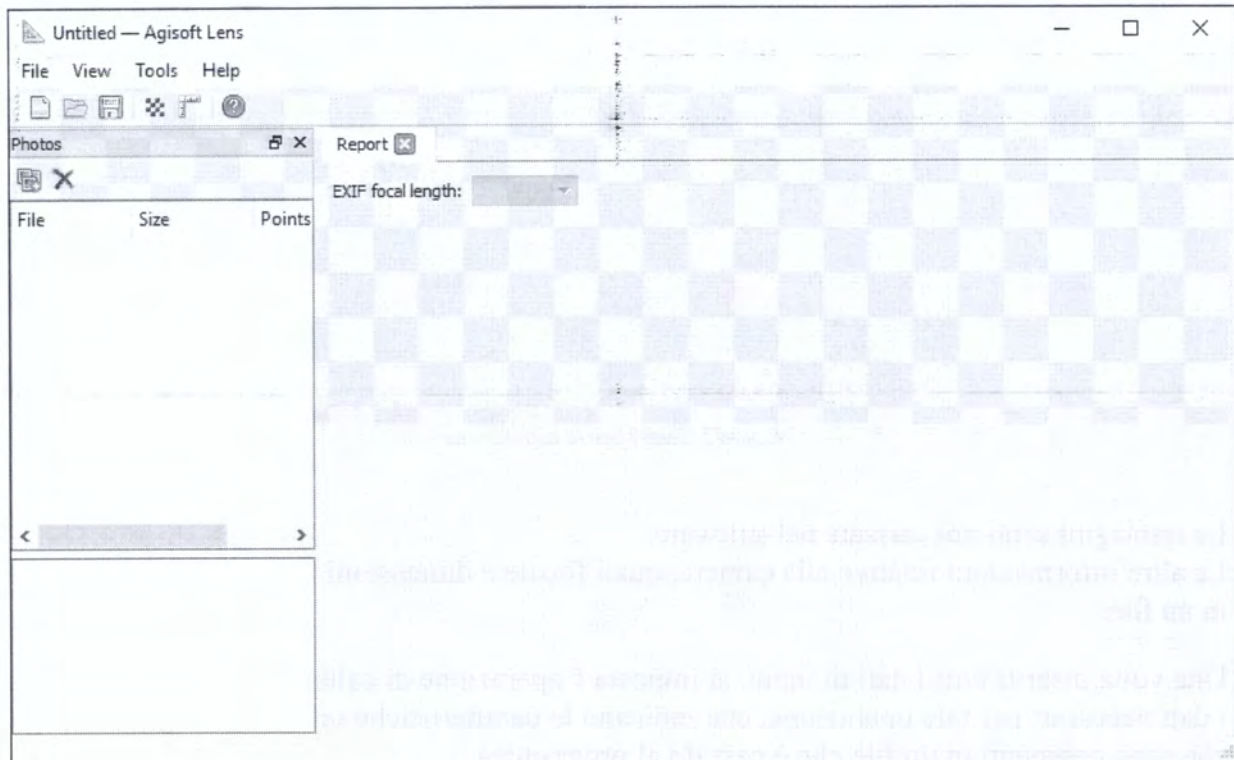


Figura 1. Interfaccia del software AGISOFT Lens

Essa mette a disposizione un'immagine standard, data da una scacchiera a caselle bianche e nere, che è fotografata con la fotocamera in esame a partire da diversi punti nello spazio e con diverse angolazioni, ottenendo almeno una dozzina di immagini.

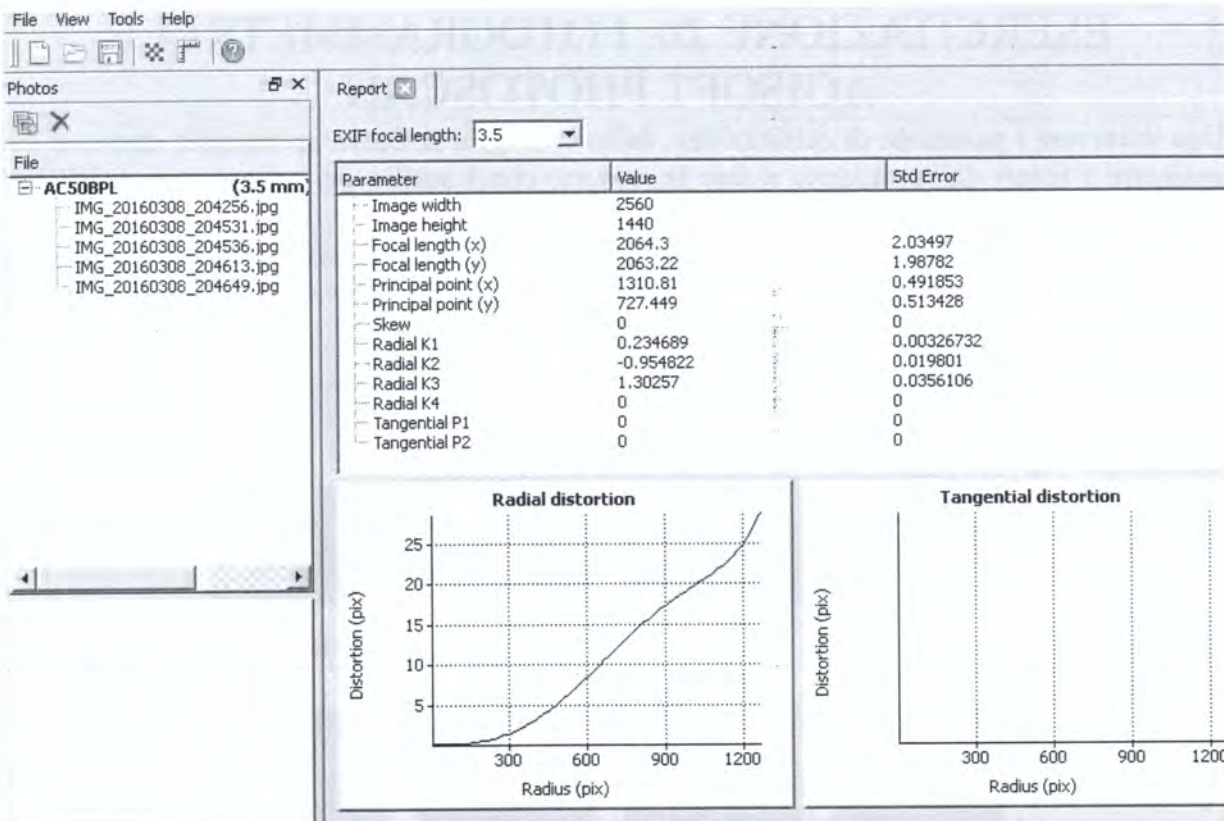


Figura 3. Risultato della calibrazione

Si è così effettuata la fase di calcolo delle distorsioni presenti nelle immagini e il metodo che si è impiegato prende, non a caso, il nome di metodo a scacchiera.

Il risultato è un file di calibrazione, che è utilizzato nella fase successiva, ossia la contro-deformazione delle immagini. In seguito si riporta il suo contenuto.

```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"?>
<calibration>
<projection>frame</projection>
<width>7360</width>
<height>4912</height>
<fx>5090.6282321233057</fx>
<fy>5090.6282321233057</fy>
<cx>3695.7315308271832</cx>
<cy>2424.4464761362738</cy>
<k1>-0.033991005965029832</k1>
<k2>-0.040438149401390455</k2>
<k3>0.036132139808562926</k3>
<date>2016-03-21T12:41:41Z</date>
</calibration>
```

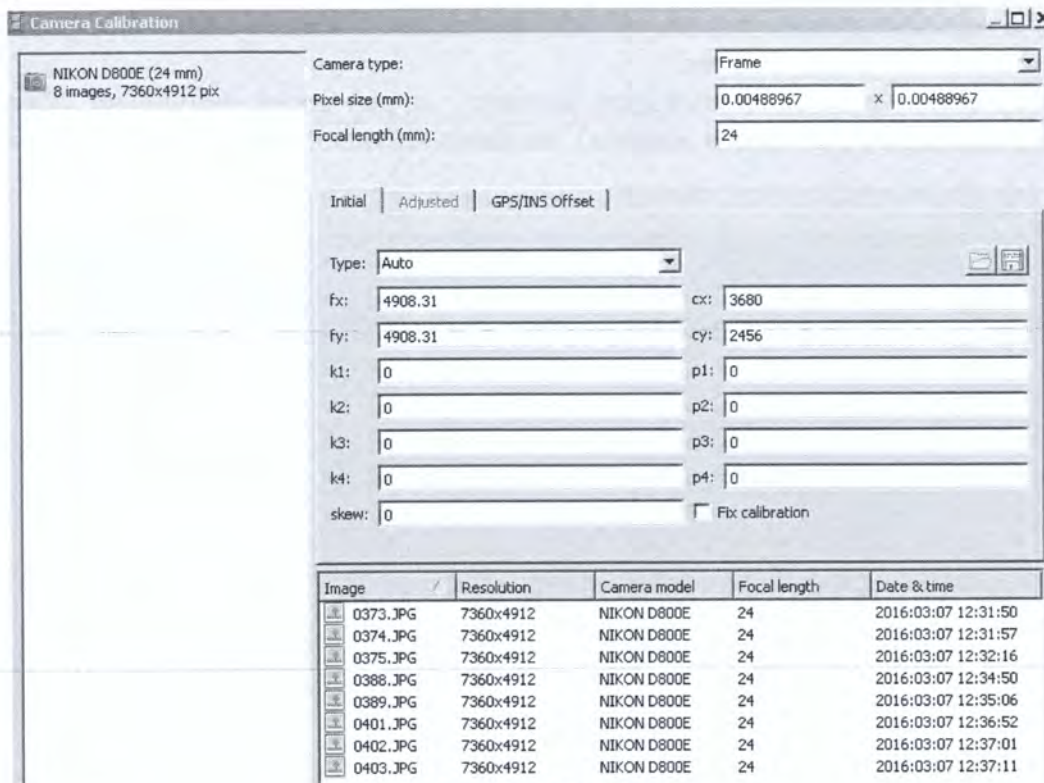



Figura 5. Parametri di calibrazione

Una volta preparate e calibrate le immagini, la prima cosa da fare nel flusso di lavoro è l'orientamento relativo, detto anche allineamento delle immagini, con il comando *Align photos*.

L'orientamento relativo consiste nel costruire un'unica immagine digitale a partire da quelle a disposizione che, però, è raddrizzata. In questa operazione, il software sceglie un certo numero di key-points, che sono dei punti dotati di certe caratteristiche cromatiche (es. differenze di contrasto con i pixels adiacenti) e che facilitano l'individuazione dei punti omologhi, ossia dei punti corrispondenti tra più immagini. È possibile impostare il numero limite dei key-points e fare così una stima più o meno robusta, ottenendo una diversa accuratezza.

Mediante l'attivazione dell'opzione *Pair preselection*, si può selezionare la coppia di fotogrammi di partenza per l'orientamento relativo e il software estende poi l'operazione a sinistra e a destra.

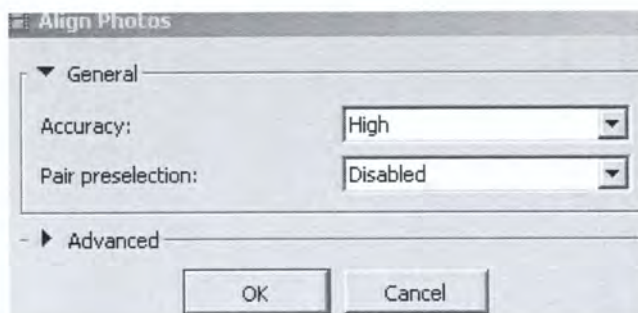


Figura 6. Align Photos

L'elaboratore dunque sceglie dei punti comuni a ogni fotogramma ed effettua l'orientamento

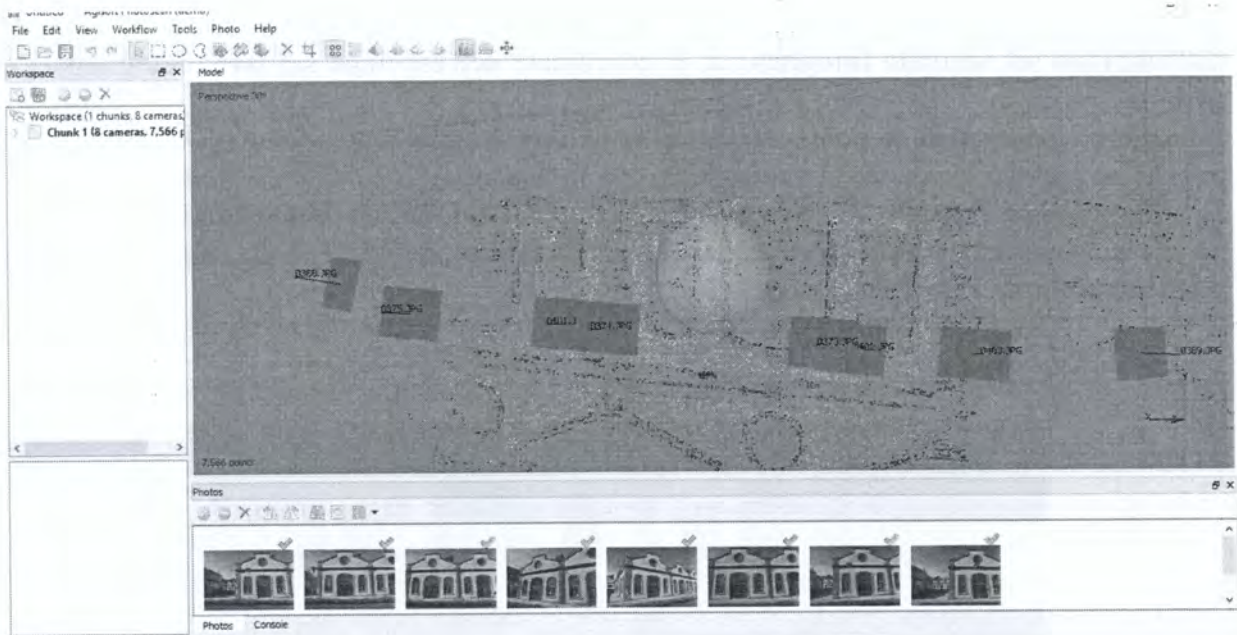


Figura 8. Allineamento e posizione delle camere (2)

Una volta noto l'orientamento relativo di un fotogramma rispetto all'altro, si può procedere alla costruzione del modello denso, attraverso il comando *Workflow > Build dense cloud*. In particolare, dopo l'allineamento si procede alla definizione della qualità del modello. La modalità suggerita è la qualità media, dove si definisce un punto ogni 4 pixels, soprattutto per questioni di onere computazionale. Nelle opzioni avanzate, invece, si danno indicazioni sull'operazione di filtraggio che elimina gli errori grossolani. Le opzioni di default si possono ritenere adeguate per la fotogrammetria di edifici; potrebbero invece cambiare per fotogrammetria aerea.

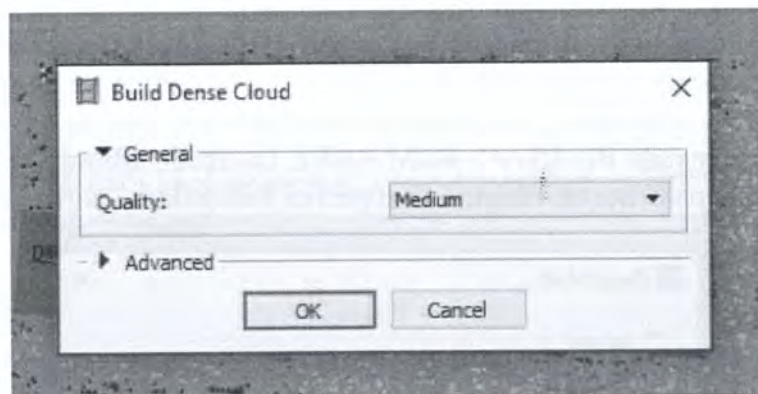


Figura 9. Build Dense Cloud

Da qui si procede alla ricostruzione del modello denso e questa è l'operazione che richiede maggiore tempo.

In essa, innanzitutto, il software ricostruisce le profondità dell'oggetto. In altri termini, esso ricostruisce le parallassi ξ_1 - ξ_2 : per ogni pixel, il software cerca il suo omologo e calcola la differenza. Da qui si ricava la profondità z , sempre calcolata nel sistema di riferimento relativo, z e in seguito si generano i punti in modalità densa, con un processo più rapido.

L'operazione a qualità media prevede di considerare un punto ogni 4 pixels e dunque non si ragiona più sui key-points, bensì si individua il punto omologo su tutto il fotogramma. In

riconosce come piatte, è sufficiente un triangolo. In questo caso, però, sono presenti molti punti disposti su una superficie piana ed è chiaro che tanti di essi saranno eliminati. Si ha così una sorta di “pulizia” della mesh. Il risultato è il seguente.



Figura 12. Mesh

Siccome la mesh appena ottenuta non presenta ancora i colori dell'immagine, su di essa si realizza la tessitura (cioè la colorazione) mediante il comando *Workflow > Build texture*.

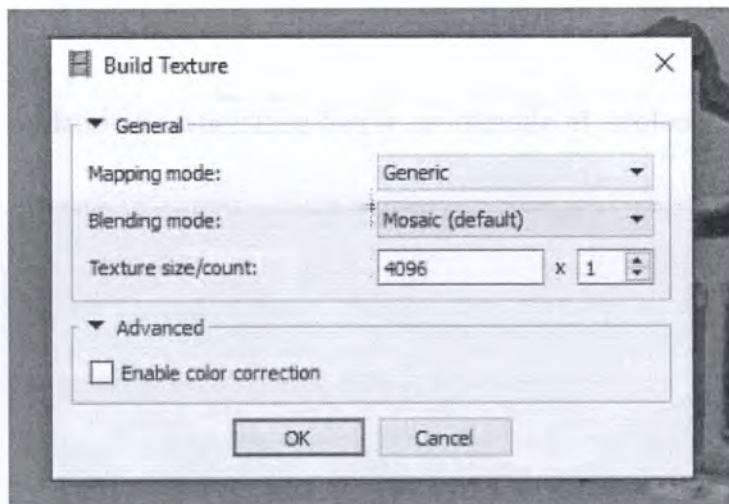


Figura 13. Build Texture

Per visualizzare il risultato, si attiva l'opzione *View > textured*. In questo modo, si è ricostruito un unico modello di elementi comuni ad almeno due fotogrammi.