



Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2086A -

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Massara Andrea

MATERIA: Misure - prof. Carullo

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

RIFERIMENTI e COMPATIBILITÀ

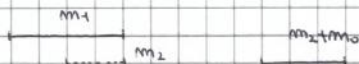
Misurare = Confrontare una misura con altre misure dello stesso parametro oppure con valori di riferimento

Dal momento che ad una misura non si assegna un valore, bensì un intervallo di valori, al concetto di uguaglianza si sostituisce quello di compatibilità. Tale condizione si verifica quando le serie di valore assegnate come misure della stessa grandezza nello stesso stato presentano un'intersezione non vuota.

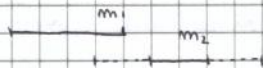
RIFERIBILITÀ \neq COMPATIBILITÀ

Perché 2 misure possono essere riferibili ma non compatibili?

- Effetto sistematico m_0



- Incertezza sotto stimata (non sono considerati dei contributi di incertezza)



A garantire la correttezza delle misure c'è l'ottimizzazione internazionale della metodologia:

CARATTERISTICHE METROLOGICHE DI DISPOSITIVI PER MISURAZIONE e PROCESSO DI TARATURA DELLA STRUMENTAZIONE DI MISURA

RELAZIONE TARATURA

Ogni dispositivo di misurazione è un sistema avente un ingresso (misurando) e un'uscita (lettura):



Per ottenere una stima del misurando incognito M è necessario conoscere la relazione uscita-ingresso del dispositivo!!!

Oltre all'ingresso dello strumento agiscono altre grandezze di influenza, dunque:

$$\hat{M} = f(L, g_1, g_2, \dots, g_m)$$

La relazione impiegata è quella dei CAMPI DI INFLUENZA:

Si fornisce una relazione di taratura che lega L a M ma sotto opportune condizioni per le grandezze di influenza.

$$\hat{M} = f(L) \quad \text{e} \quad \begin{cases} g_1 \in [g_{1i} - g_{1s}] \\ \vdots \\ g_m \in [g_{mi} - g_{ms}] \end{cases}$$

Come si fornisce la relazione di taratura?

- Grafica: diagramma di taratura
- Tabulazione
- Analitica \rightarrow Multimetro digitale $\rightarrow M_0 = L_0$ e $f(M) = (A \cdot L_0 + B \cdot \text{Portata})$

NS: occhio al fondo scala se sono nel sottosmazzato!

La notazione "dinamica" è dunque data vista la presenza e la volontà di calcolare parametri come:

- tempo morto (<10%)
- tempo di salita (>10% e <90%)
- tempo di smontamento
- sovravelongazione

PROCESSO DI TARATURA ~ insieme di operazioni che permettono la garanzia della ri-fidabilità tra misure usando e mantenendo nel tempo il legame tra strumenti e campioni primari!

Prevede 3 fasi:

① TARATURA (calibration):

Fase che stabilisce, in condizioni delle grandezze d'input specificate, la relazione tra:

- uscita strumento misurata e valore misurato d'input
- il valore nominale di un campione ed il valore effettivamente fornito

questa fase è generalmente fatta dal costruttore prima di fornire lo strumento all'utente finale.

A partire dai valori noti e riferibili ricavo le letture dello strumento che, interpolando i dati ottenuti consente di trovare la curva di taratura. Tenendo poi conto di tutti i possibili errori verificabili penso al diagramma di taratura che garantisce intervalli di valori e non valori discreti.

Tabularmente, in base ai campi d'impiego, trova le incertezze !!

② CONTROLLO DI TARATURA (verification)

Fase che permette di controllare le letture fornite da uno strumento misuratore in corrispondenza di misurati noti.

Viene periodicamente eseguita per garantire la relazione di taratura garantita inizialmente dal costruttore.

In fatti, il degrado delle caratteristiche dipende da una serie di fattori esterni. Il tempo non è fra questi, quindi la verification è periodicamente necessaria, perché il tempo non è controllabile o correggibile.

Tale fase è eseguita applicando misurati noti all'input (M) e verificando che ciascuna lettura L sia compresa nell'intervallo di tolleranza δL .

Ho diversi esiti possibili:

$\delta M = 0$ (ideale) ~ POSITIVO ~ tutte le letture sono comprese nella fascia di tolleranza e lo strumento si conforme alle specifiche

~ NEGATIVO ~ almeno una delle letture non è compresa e lo strumento non si conforme alle specifiche

$\delta M > 0$ (reale) ~ FALSO NEGATIVO ~ uno strumento conforme alle specifiche che non supera il controllo

~ FALSO POSITIVO ~ uno strumento non conforme alle specifiche che non supera il controllo

Per valutare la probabilità dei falsi e l'adeguatezza dei campioni usati si valuta un parametro detto TUR, test uncertainty ratio:

$$TUR = \frac{u(L)}{u(M)}$$

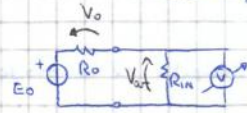
Si accettano $TUR \geq 3$ perché la probabilità del falso positivo è dello 0.15% per $TUR = 4$!!

NOZIONI DI BASE SULLE INCERTEZZE

TERMINOLOGIA



- **Errore**: attualmente usato per indicare la differenza tra una misura ed un valore di riferimento
- **Precisione**: capacità di un sistema di misurazione di fornire misure simili in condizioni specificate
- **Accuratezza**: capacità " " " " " " " " vicina al valore effettivo del misurando
- **Incertezza**: indica l'indeterminazione nella conoscenza del misurando
- **Effetto sistematico**: effetto, dovuto a diverse cause, che in misure ripetute rimane costante o varia in modo prevedibile. Se stimato può essere compensato correggendo la misura



$$V_{0f} = E_0 - V_0 = E_0 \cdot \frac{R_L}{R_0 + R_L}$$

tengo conto dell'errore sistematico con il partitore che mostra che R_0 toglie tensione.

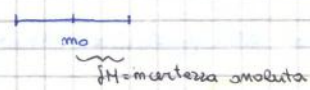
PRINCIPALI CONTRIBUTI DI INCERTEZZA

- No incertezza nulla! Gli strumenti non sono ideali e a "vuoto" non agisce l'effetto di carico
 - Le grandezze di stato, non note con estrema precisione, vanno specificate all'utilizzatore (es. T in un barometro di metallo)
 - Il limite inferiore all'incertezza è fissato all'incertezza "intrinseca del misurando"
- se $INC = 0.0$ allora $INF = 0.00$

RICHIAMI MODELLO DETERMINISTICO

È ancora accettato quando si conviene una sommatoria dell'incertezza. Esso assegna la misura del parametro sotto forma di fascia di valori limitati esattamente simmetrica e m_0 . Tutti gli elementi della fascia di valori sono ugualmente validi e rappresentano il misurando.

$$m = (m_0 \pm \Delta m) UM$$



$$EM = \frac{\Delta m}{m_0} = \text{incertezza relativa}$$

La propagazione dell'incertezza nel modello deterministico avviene combinando i diversi valori di incertezza. Per i metodi diretti si sommano i valori contribuiti così come sono (strumento, lettura, rumore, ecc...). Per i metodi indiretti:

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_{10} \pm \Delta x_1) UM \\ &\vdots \\ x_n &= (x_{n0} \pm \Delta x_n) UM \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow y_0 = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$$

$$\Delta y = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{(x_{10}, \dots, x_{n0})} \Delta x_1 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{(x_{10}, \dots, x_{n0})} \Delta x_n$$

Tale metodo garantisce alla misura il suo minimo perché il valore esadito toglie la possibilità di compensazione e inoltre ogni grandezza si considera collocata all'estremo della fascia di valore (Δx). Per tali motivi si è introdotto un nuovo modello di misura, quello probabilistico.

$$V_A(\bar{x}) = s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{m}}$$

$$V(\bar{x}) = k_p \cdot v_g(\bar{x})$$

$k_p=1 \rightsquigarrow p=69.3\%$
 $k_p=2 \rightsquigarrow p=95.4\%$
 $k_p=3 \rightsquigarrow p=99.7\%$

Sembra che al crescere di m lo diminuisca l'incertezza, ma in realtà al crescere di m aumenta anche notevolmente e proporzionalmente il tempo di misura facendo anche talvolta intervenire fenomeni di deriva del misurando, dunque facendo cadere l'ipotesi di indipendenza statistica. Per questi motivi è opportuno scegliere m con criterio. Solitamente ciò che si fa è fissare le osservazioni in modo tale per cui lo xunto tipo empirico sia trascurabile rispetto agli altri contributi di incertezza, e cioè:

$$\frac{s(x)}{\sqrt{m}} \ll \delta$$

Fissato poi un certo livello di fiducia p è possibile ottenere l'intervallo fiducioso per la media a partire dalle tabelle che riportano i percentili u della ddp Student-t.

METODI DI CATEGORIA B

Metodo basato su conoscenze pregresse o su info fornite da terze parti e permette di stimare i contributi di incertezza di natura sistematica, ossia quelli dovuti ad effetti sistematici!

Nel caso che i contributi aleatori siano preponderanti si può trascurare l'effetto dei metodi B!

A differenza dei metodi di categoria A non esistono regole di validità generale ma è necessario ipotizzare una funzione ddp per i contributi di incertezza considerati, considerando anche che le scelte dell'operatore sono influenti!

- Coni notevoli:
- 1) È data $v_g(x)$ ed anche $V(x)$ e $k_p \rightsquigarrow$ non ho valutazioni loggettive
 - 2) Tipica forse dei certificati di taratura che da k_p
 - 3) È data $V(x)$ e $p \rightsquigarrow$ stimo $v_g(x)$ solo se ipotizzo una particolare funzione ddp, dunque c'è influenza sulla scelta dell'operatore
 - 4) È data $\delta(x)$ (specifiche di incertezza dichiarate secondo il modello deterministico). In questo caso è necessario ipotizzare una funzione ddp \rightsquigarrow influenza dell'operatore

NORMALE: $v_g(x) = \frac{\delta(x)}{\sqrt{3}}$

TRAPEZIODALE: $v_g(x) = \delta(x) \cdot \sqrt{\frac{1+B^2}{6}}$

È comunque analiticamente possibile stimare la correlazione:

- stima della covarianza delle medie empiriche

$$s(\bar{x}_j, \bar{x}_k) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_{ji} - \bar{x}_j)(x_{ki} - \bar{x}_k)$$

- stima del coefficiente di correlazione

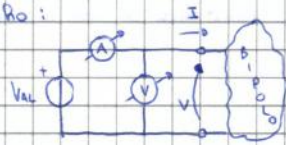
$$r(\bar{x}_j, \bar{x}_k) = \frac{s(\bar{x}_j, \bar{x}_k)}{s(\bar{x}_j) s(\bar{x}_k)}$$

MISURAZIONE RESISTENZE IN DC

1) METODO VOLTAMPEROMETRICO

misura indirettamente resistenza e potenza assoluta di un bipolo (parametri in continua) a partire da tensione e corrente nello stesso.

Idealmente R_0 :

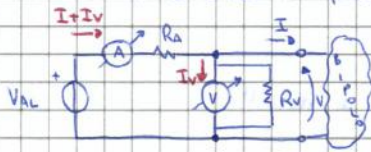


$\Rightarrow r = \frac{N}{i}$ è il modello matematico, dunque $E_x = E_i + E_m$ con il modello deterministico. Usando quello probabilistico invece ottergo, in caso di indep. statistica, che $U_r(x) = \sqrt{U_r^2(v) + U_r^2(i)}$

Iniziamo ad analizzare tutte le non idealità:

- ▲ Effetto del carico strumentale

il voltmetro e l'ampmetro fanno resistenze non trascurabili!

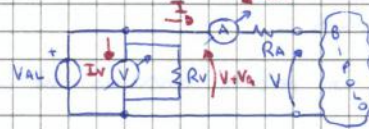


VOLTMETRO A VALLE

$$x = \frac{N}{i} = \frac{V}{I + I_v} = \frac{R \cdot R_v}{R + R_v} = R // R_v$$

l'effetto sistematico consiste nella modifica del modello, dunque avrà un effetto di carico strumentale che sarà quantificabile come:

$$\delta_{CSA} = x - R = -\frac{R^2}{R + R_v}$$



VOLTMETRO A MONTE

$$x = \frac{N}{i} = \frac{V + V_a}{I} = R + R_a$$

Anche in questo caso l'effetto sistematico modifica il modello di misura e dunque considererò l'effetto del carico strumentale come:

$$\delta_{CSA} = x - R = R_a$$

Operativamente, un contributo di incertezza residuo c'è, dunque, dopo aver cercato di eliminare quanto + possibile l'effetto del carico strumentale, occorre cercare di scegliere la configurazione che minimizza quanto + possibile tale contributo sistematico, secondo questa semplice regola:

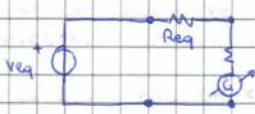


Scegli la configurazione valutata se è necessario combinare il modello di misura valutato agli ordini di grandezza del carico strumentale con quelli dei contributi di incertezza altri.

Si introducono anche in questo caso varie di non idealità:

A • Sensibilità ponte

Si valuta con un Thevenin ai capi del rivelatore



$$R_{eq} = (R_a \parallel R_b) + (R_c \parallel R_x)$$

$$V_{eq} = V_c - V_d = V_{AC} \left(\frac{R_b}{R_a + R_b} - \frac{R_c}{R_c + R_x} \right)$$

$$\Delta V_{eq} = \frac{\partial V_{eq}}{\partial R_x} \Delta R_x$$

Può aumentare la sensibilità in uno di questi modi:

- usare un rivelatore di zero con alta sensibilità
- aumento V_{AC} in modo da avere maggiori ΔV_{eq} a parità di ΔR del ponte
- diminuire R_{eq} per avere I_d alta
- usare $R_c \approx R_x$ in modo da massimizzare ΔV_{eq} .

Non sono applicabili tutti insieme!!!

In generale comunque la corrente nel galvanometro corrisponde a:

$$I_d = \frac{\Delta V_{eq}}{R_{eq} + R_w} \quad \sim \text{si calcola da qui il contributo di incertezza del ponte}$$

B • Resistenze di cavi e contatti

Comparsa i problemi che c'erano nel metodo voltampereometrico, dunque si cerca di minimizzare gli effetti. Il metodo dei 4 morsetti non si applica

C • Effetto delle forze termoelettromotrici

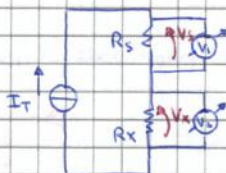
Causate dal contatto fra differenti metalli a diverse temperature (effetto Seebeck)!

Il valore delle \mathcal{E}_{tem} può essere ridotto cercando di uniformare il più possibile la T del circuito e usare materiali a basso \mathcal{E}_{tem} .

Inoltre, se si può invertire la alimentazione del ponte si riesce a compensare l'effetto delle \mathcal{E}_{tem} . Infatti, le \mathcal{E}_{tem} non dipendono dal verso dell'alimentazione perciò calcolando R_x come media dei due risultati ottenuti con diverse polarità di alimentazione ottego un risultato che elimina il contributo delle \mathcal{E}_{tem}

3 MISURAZIONE DI RESISTENZA CON METODO DI CONFRONTO

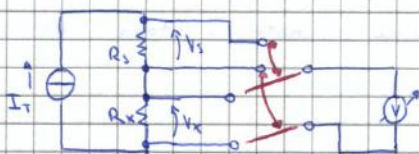
Confronto il misurando R_x con un campione di riferimento R_s con il circuito seguente:



$$I_T = \frac{V_s}{R_s} = \frac{V_x}{R_x} \quad \sim \rightarrow \quad R_x = \frac{V_x \cdot R_s}{V_s} \quad \sim \rightarrow \quad \mathcal{E}_{R_x} = \mathcal{E}_{V_x} + \mathcal{E}_{R_s} + \mathcal{E}_{V_s}$$

$$\sim \rightarrow \quad U_{R_x}(R_x) = \sqrt{U_{V_x}^2(R_x) + U_{V_s}^2(R_s) + U_{R_s}^2(R_s)}$$

Se utilizzo $R_s = R_x$ è possibile la semplificazione con il doppio commutatore



Usa un solo voltmetro con sistema puntato ma le misure sono ottenute in tempi diversi!

Questo indica che va tenuto conto, nel calcolo dell'incertezza, degli errori di non linearità del sistema.

Per avere info sulla potenza attiva erogata da un carico è sufficiente fare in modo che una bobina sia attraversata dalla corrente che va sul carico e l'altra da una corrente proporzionale alla tensione ai capi del carico:



è ciò che voglio ottenere $\Rightarrow C_m = k' \cdot I_L \cdot V_L = k' \cdot P$
 e quindi applicando la relazione in x vista prima

corrente e tensione sono in fase in AC

• se sono in regime alternato devo rifare con Z_L la I_L di φ rispetto V_L , quindi:

$$C_m = k' \frac{|I_L| |V_L| \cos(\varphi)}{R_{vw}} = k' \frac{|I_L| |V_L| \cos(\varphi)}{P_c} = k' \cdot P$$

corrente e tensione sono sfasate di φ in AC

Rispetto al caso ideale si inseriscono anche qui elementi dissipativi:

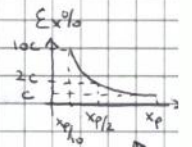
A - Incertezza strumentale

in generale: $\delta x = \frac{x_p}{x_0}$
 in generale: $E_{P\%} = \frac{\delta P}{P_0} = \frac{c \cdot x_p}{x_0}$

• $\delta P = c \cdot \frac{P_p}{100}$ per il regime continuo

portata potenza = portata I: portata

• $E_{P\%} = c \cdot \frac{I_p \cdot V_p}{P_0} = c \cdot \frac{I_p \cdot V_p}{V \cdot I \cos(\varphi)}$ per il regime alternato



in presenza di carichi induttivi o capacitivi l'incertezza strumentale aumenta molto anche se $V=V_p$ e $I=I_p$. Avere + portate diminuisce $E_{P\%}$ dato l'andamento

è tuttavia conveniente usare wattometri a "basso $\cos(\varphi)$ ", ossia strumenti con fattore di taratura $\cos(\varphi_0)$ tale per cui:

$$E_{P\%} = c \cdot \frac{I_p V_p \cos(\varphi_0)}{I \cdot V \cos(\varphi)}$$

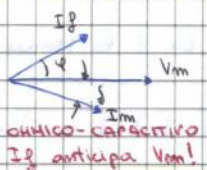
dove $P_0 = I_p V_p \cos(\varphi_0)$

usati quando φ è grande, ovvero tensione o corrente molto sfasate

B - Correzione strumentale

oltre al carico strumentale introdotto dalla resistenza interna delle bobine, un effetto sistematico si deve all'induttanza non nulla della bobina mobile che crea uno sfasamento tra V_m e I_m : denominato "errore di fase". Provoca un effetto sistematico

questo effetto c'è in AC solo!



$$P' = V_m I_m \cos(\varphi + \delta) = \underbrace{V_m I_m \cos(\varphi)}_P \cos(\delta) - \underbrace{V_m I_m \sin(\varphi)}_Q \sin(\delta)$$

$P' \approx P - \delta Q$ per δ piccoli!!!
 ecco dove finisce l'errore di fase!!!

POTENZA IN SISTEMI POLIFASE

Per sovrapposizione degli effetti, un sistema a m fasi ha come potenza P :

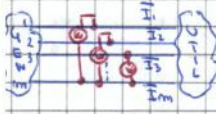
$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_m = \overline{E_1} \cdot \overline{I_1} + \overline{E_2} \cdot \overline{I_2} + \dots + \overline{E_m} \cdot \overline{I_m}$$

dove vengono usati m wattmetri comuni con la bobina ampereometrica nella fase i e la bobina voltmetrica in un punto "o" generico.

Variando "o" variamo E_i , dunque P_i ma P resta costante!

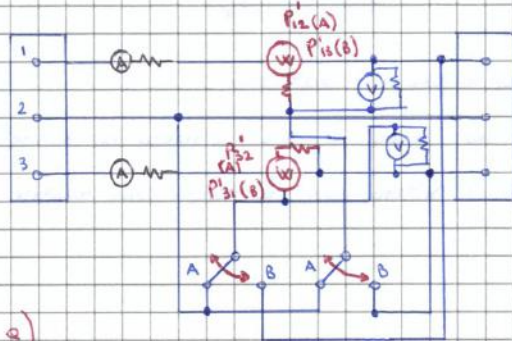
Se prendo "o" su una delle fasi del sistema avrò $m-1$ e non m wattmetri perché uno darà contributo nullo.

Tra i poli fase i più diffusi sono i trifase a 4 fili e i trifase a 3 fili.



POTENZA ATTIVA e REATTIVA IN UN TRIFASE SIMMETRICO e EQUILIBRATO

Si utilizza il metodo "Barchiaponti" o delle 4 potenze. Lo schema riproposto usa due wattmetri grazie ai doppi commutatori, due amperometri e due voltmetri che fanno il duplice scopo di sorvegliare gli effetti di carico ma anche di proteggere il wattmetro.



(COMPITO: TROVARE P e Q)

Apice "1" per indicare che la misura è affetta da carico strumentale!

- Posizione A: misura dei wattmetri di P_{12} e P'_{32} (Aron)
 " " voltmetri di V_{12} e V_{32}
- Posizione B: misura dei wattmetri di P'_{13} e P_{31}
 " " voltmetri di V_{13} e V_{31}

Tenendo conto dell'effetto di carico, prima di applicare le relazioni di prima per trovare P e Q, correggiamo quell'effetto sistematico:

Dato che non ci sono configurazioni miste, e cioè tutte le voltmetriche sono a valle delle ampereometriche, ragioniamo direttamente in termini di potenza, semplificando così la correzione dell'effetto:

• A $\leadsto P_V = \frac{V_{12}^2}{R_{V1}} \quad P_{RW1} = \frac{V_{12}^2}{R_{W1}} \quad \leadsto P_V + P_{RW1} = V_{12}^2 \left(\frac{1}{R_{V1}} + \frac{1}{R_{W1}} \right) = \frac{V_{12}^2}{R_{eq1}} \quad R_{eq1} = R_{V1} || R_{W1}$

$P_{12} = P_{12}^1 - \frac{V_{12}^2}{R_{eq1}}$

NB

$R_{W1} = R_{W2}$
 $R_{V1} = R_{V2}$

$\leadsto P_{V2} = \frac{V_{32}^2}{R_{V2}} \quad P_{RW2} = \frac{V_{32}^2}{R_{W2}} \quad \leadsto P_{V2} + P_{RW2} = V_{32}^2 \left(\frac{1}{R_{V2}} + \frac{1}{R_{W2}} \right) = \frac{V_{32}^2}{R_{eq2}}$

$P_{32} = P_{32}^1 - \frac{V_{32}^2}{R_{eq2}}$

• B $\leadsto P_{V1} = \frac{V_{13}^2}{R_{V1} || R_{V2}} \quad P_{RW1} = \frac{V_{13}^2}{R_{W1} || R_{W2}} \quad \leadsto P_{V1} + P_{RW1} = \frac{V_{13}^2}{R_{eq1}}$

$P_{13} = P_{13}^1 - \frac{2V_{13}^2}{R_{eq1}}$

$\leadsto P_{V3} = \frac{V_{31}^2}{R_{V1} || R_{V2}} \quad P_{RW3} = \frac{V_{31}^2}{R_{W1} || R_{W2}} \quad \leadsto P_{V3} + P_{RW3} = V_{31}^2 \left(\dots \right) = \frac{V_{31}^2 \cdot 2}{R_{eq2}}$

$P_{31} = P_{31}^1 - \frac{2V_{31}^2}{R_{eq2}}$

In definitiva trovo la potenza attiva P:

$P = P_{12} + P_{32}$ secondo Aron $\leadsto P_{23} = P - P_{13}$
 $\leadsto P_{21} = P - P_{31}$ \Rightarrow mi ruotisco al centro stella ideale del sistema e perciò trovo P e Q

CONVERSIONE ANALOGICO-DIGITALE

PRINCIPI DELLA CONVERSIONE

$x(t) \rightarrow x[k] = f[kT_c]$ ho dunque meno info rispetto all'analogico

Si usano segnali digitali perché sono + resistenti al rumore, + facilmente elaborabili, + facilmente memorizzabili e trasmissibili.

Il processo di conversione da analogico a digitale prevede:

① CAMPIONAMENTO

Estrazione, in istanti noti e precisi, del valore campione del segnale analogico

② QUANTIZZAZIONE

Suddividere in stati discreti del campo continuo e associazione di ciascun campione allo stato + vicino

③ CODIFICA

Associazione di un codice ad ogni valore discreto del campo continuo $\rightarrow 2^{Nbit}$

Al fine di rappresentare bene il segnale analogico, il campionamento deve essere sufficientemente fitto attraverso una serie di impulsi:

$$x[kT_c] = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_c) \xrightarrow{FT} X_c(\omega) = \omega_c \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_c)$$

La ricostruzione del segnale analogico di partenza avviene poi mediante l'utilizzo di un filtro LPF il + ideale possibile garantendo però che $f_c \geq 2 f_B$, ma la condizione di uguaglianza non ha interesse pratico perché LPF ideale non è realizzabile.

- $f_c > 20 f_B$ non devo interpolare
- $10 < \frac{f_c}{f_B} < 20$ interpolazione creativa
- $2.5 < \frac{f_c}{f_B} < 10$ " " sync

Scegliere f_c e $f_B < 2 f_B$ provoca sovrapposizione degli spettri \Rightarrow Aliasing \rightarrow non ricostruisco $x(t)$

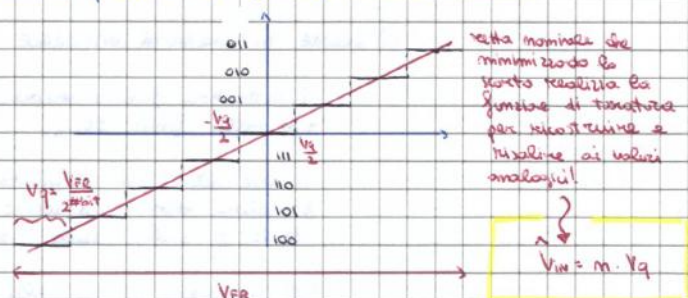
CONVERTITORI ANALOGICO-DIGITALI



idealmente presenta una caratteristica a scalinata!

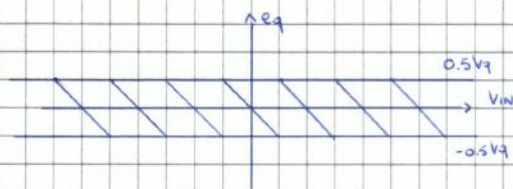
① • Caratteristica ideale

(grafico accanto)



② • Errore di quantizzazione

$$e_q = \hat{V}_m - V_m$$



D) ERRORE DI NON LINEARITÀ DIFFERENZIALE

Indica la differenza tra l'intervallo di quantizzazione reale associato al passo k e quello ideale data dalla tensione V_q

I due errori di linearità NON sono indipendenti; infatti se quello differenziale indica lo scostamento dalla linearità di un particolare gradino della caratteristica ideale, quello integrale (somma) non fa altro che integrare sommando tutti i differenziali.

4) • Incertezza e numero di bit effettivi

I contributi di incertezza da considerare son quelli dovuti agli errori, che con il modello deterministico si risumono in:

$$\delta V_{IN} = \delta E_q + \sqrt{V_{IN}^{E_0}} + \delta V_{IN}^{E_g} + \delta V_{IN}^{E_z}$$

Svolgendo i conti trovo che:

$$\begin{aligned} \delta V_{IN} &= 0.5 \cdot V_q + E_{0\max} \cdot V_q + E_{g\max} \cdot \frac{m}{2^{\#bit}} \cdot V_q + E_{z\max} \cdot V_q \\ &= \frac{V_q}{2^{\#bit}} (0.5 + E_{0\max} + E_{z\max}) + \frac{E_{g\max} \cdot m \cdot V_q}{2^{\#bit}} \\ &= V_q \cdot \underbrace{\left(\frac{0.5 + E_0 + E_z}{2^{\#bit}} \right)}_A + V_{IN} \cdot \underbrace{\frac{E_g}{2^{\#bit}}}_B \end{aligned}$$

che esprimendo l'incertezza con la formula binomica evidenzia A e B:

$$\delta V_{IN} = (A \cdot PORTATA + B \cdot LETTURA)$$

~ TOTAL UNADJUSTED ERROR (non ho compensato niente)
↓
TUTTO IN LSB!!

* Eventualmente, esiste un altro modo di esprimere l'incertezza assoluta, e cioè il #bit effettivi! Questo è un modo usato dai costruttori per confondere l'utente facendo credere che la risoluzione di 16 bit per esempio sia reale. In realtà è un'incertezza! Infatti, all'estremo del campo di misura, il numero di bit di un convertitore ideale è pari a:

$$N_{bit} = \frac{2^{\#bit}}{E_q'} \quad \text{dove } E_q' = E_q + E_0 + E_g + E_z$$

Dunque il numero effettivo di bit è il # che serve per esprimere N_{bit} :

$$N_b^E = \log_2 \left(\frac{2^{\#bit}}{2 \cdot E_q'} \right) = \#bit - \log_2 (2 \cdot E_q')$$

5) • Tempo di conversione

Per definizione è l'intervallo di tempo che intercorre tra l'istante in cui si preleva un campione dal segnale analogico e il momento in cui il codice digitale ad esso associato è disponibile all'uscita del convertitore.

È evidente come sia necessario MANTENERE il campione all'ingresso costante in modo da svolgere correttamente tutta l'operazione. Segue che vengono posti limiti alla massima frequenza di lavoro del convertitore.

ESEMPIO: $\Delta t = 10 \mu s$; $F_R = 10 V$; $N_b = 12 bit$; Calcolata f_{max} per un segnale sinusoidale con $A = 5V$ e $\omega = 2\pi f$

$$\begin{aligned} \Delta V_{max} &= \frac{d v(t)}{dt} \Big|_{MAX} \cdot \Delta t = \frac{d (A \sin(\omega t))}{dt} \Big|_{MAX} \cdot \Delta t \\ &= A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \Big|_{MAX} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

$$= \frac{V_0}{2}$$

$$\frac{V_0}{2} = A \cdot \omega \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad 2\pi f \cdot A \cdot \Delta t = 1.25$$

$$f \leq \frac{1.25 \cdot 2\pi}{A \cdot \Delta t} = 4 Hz$$

② A INTEGRAZIONE

- Convertitore a doppia rampa

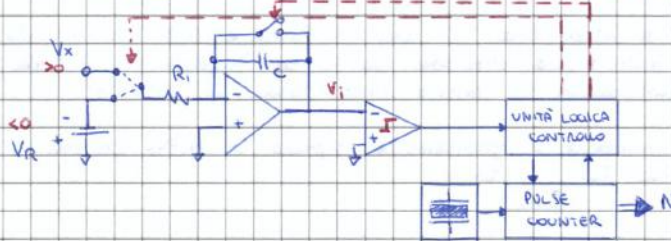
Ha due fasi di funzionamento

- RUN-UP: carico un condensatore attraverso V_x
- RUN-DOWN: scarico quel " " V_R

NB

V_x di segno opposto a V_R

Ne esce che la tensione V_x è stimata a partire dal rapporto fra τ_{up} e τ_{down}



→ Run up ~→



$$\begin{cases} V_i(t) = -\frac{1}{RC} \int V_x dt \\ V_i(T_c) = -\frac{1}{RC} V_x \cdot T_c \end{cases}$$

→ Run down ~→



$$\begin{cases} V_i(t) = -\frac{1}{RC} \int V_R dt \\ V_i(0) = V_i(T_c) = -\frac{1}{RC} V_x T_c \\ V_i(T_x) = \phi \end{cases}$$

$V_i(T_c) = -\frac{1}{RC} \int_0^{T_c} V_{Rif} dt$ per il bilancio delle cariche

$$\frac{V_x T_c}{RC} = \frac{V_{Rif} T_x}{RC} \quad \sim \quad V_x = V_{Rif} \cdot \frac{T_x}{T_c}$$

Calcolare V_x richiede la conoscenza di T_c e T_x

T_c) è calcolato in modo sincrono come multiplo del clk interno $\Rightarrow T_c = N_c \cdot T_c$
 Di fatto, a discrezione dell'utente, il conteggio di impulsi viene caricato ad un valore noto e attraverso un count-down decrementa fino allo zero, momento in cui monta un segnale allo U.L. che commuta gli interruttori

T_x) è calcolato in modo asincrono perché non è detto che esso sia multiplo del clk interno, quindi $T_x = (N_x \pm 1) T_c$

* Quanto detto pertanto, in condizioni di stabilità dell'oscillatore locale, diventa:

$$V_x = V_R \cdot \frac{T_x}{T_c} = V_R \cdot \frac{N_x T_c}{N_c T_c} = V_R \cdot \frac{N_x}{N_c}$$

che si ripresenta sull'incertezza di misura come:

$$\epsilon V_x = \epsilon V_R + \frac{1}{N_x} + \epsilon_{Non-sincrona}$$

* Calcoliamo la risoluzione di misura δV_x :

$$\delta V_x = \frac{\partial V_x}{\partial N_x} \cdot \delta N_x = \frac{V_R}{N_c} \cdot \pm 1 = \frac{V_R}{N_c} \quad \text{e se } V_x = V_R = P \quad \sim \quad \delta V_x = \frac{P}{N_{c,max}} = \frac{P}{N_{x,max}} = \frac{2 T_c}{t_{m,max}}$$

* Funzionamento in presenza di disturbi:

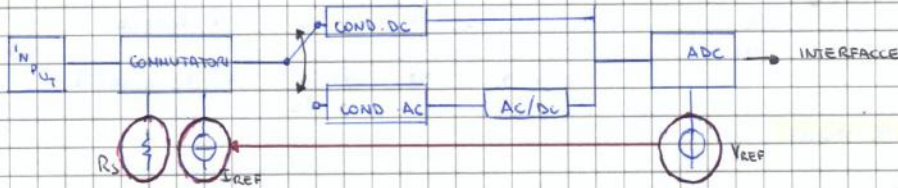
PUNTO DI FORZA DEL CONV. DOPPIA RAMPA

Sovrapporre alla tensione V_x un disturbo in alternata produce idealmente degli errori nella misura.

Go' non accade se $T_c = K T_d$ dove con K si intende che il tempo di carica T_c è multiplo del tempo T_d , periodo del disturbo.

DMM - DIGITAL MULTIMETER

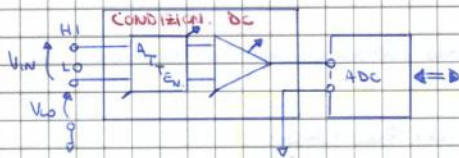
SCHEMA DI PRINCIPIO



l'elemento centrale è l'ADC a integrazione! Esso viene usato per le misurazioni in continua e per quelle in alternata ottenute per via indiretta usando un convertitore AC/DC. Resistenze e correnti sono calcolate sfruttando Ohm.

I circuiti di condizionamento attenuano o amplificano i segnali che giungono in modo da sfruttare la dinamica del convertitore ADC.

SEZIONE DCV → TENSIONI CONTINUE



Il circuito di condizionamento a monte dell'ADC è in grado di attenuare come di amplificare; opera al fine di ridurre l'incertezza di misura consentendo di ottimizzare il lavoro dell'ADC lavorando il + possibile cercando di sfruttare l'intera dinamica.

L'amplificatore, dal conto suo, viene è approssimamente differenziale ed è dunque caratterizzato dalle avere alta Z_{in} e alta reiezione ai disturbi. La sua struttura permette agli ingressi del multimetro di essere floating, dunque vedendo la misura (quasi) immutabile al valore V_{io} (≠ con gli oscilloscopi).

Pertanto mi aspetto che il multimetro valuti la tensione presente fra HI e LO, non sentendo V_{io} , in realtà così non è e la caratteristica reale si discosta dalla ideale per la presenza del contributo di modo comune:

$$V_{out} = A_d \cdot V_{in} + A_{cm} \cdot V_{cm}$$

$$\begin{cases} V_{in} = V_{HI} + V_{LO} \\ V_{cm} = \frac{V_{HI} + V_{LO}}{2} \end{cases}$$

Idealmente $A_{cm} \rightarrow 0$ ma non avendo così si valuta un parametro, CMRR, che definisce in dB il rapporto tra le amplificazioni:

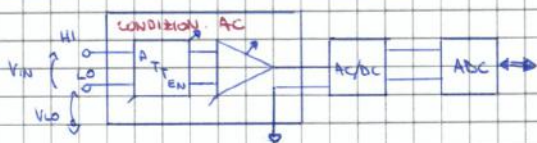
$$CMRR = 20 \log_{10} \left(\frac{A_d}{A_{cm}} \right)$$

Risultato: ottaga via lettura $\neq 0$ anche se $V_{in} = 0$!!! Impastante contributo di incertezza.

$$L_{cm} = V_{cm} \cdot 10^{\left(\frac{-CMRR}{20} \right)}$$

Infine, l'ADC è a integrazione a doppia rampa, dunque in base al tempo d'integrazione scelto + o meno i disturbi inversamente al tempo che intercorre per ottenere la misura.

SEZIONE ACV → TENSIONI ALTERNATE



Rispetto al regime in DC noto la presenza in + del blocco AC/DC.

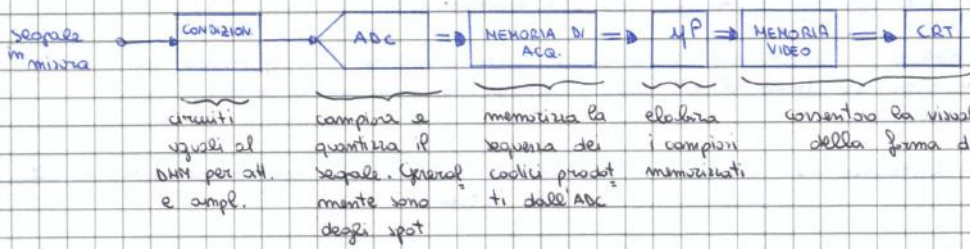
Il circuito di condizionamento svolge le stesse funzioni del DC, ma è accoppiato in AC (c'è $v_{in} = 110$) che elimina la componente continua del segnale, mantenendone l'alternata $\rightarrow V_{eff} = \sqrt{V_{ac}^2 + V_{cc}^2}$.

CMRR in AC è peggiore che per le misure in DC!!!

DSO - DIGITAL STORAGE OSCILLOSCOPE

SCHEMA DI PRINCIPIO

Architettura seriale:

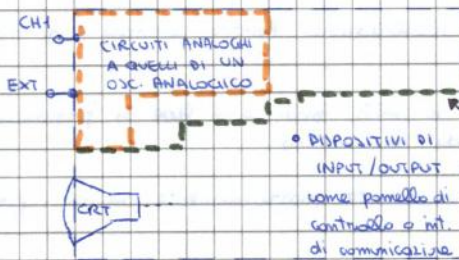


Tramite la seriale indica che l'oscilloscopio osserva il segnale ma talvolta è cieco infatti solo in certi intervalli temporali lui è sveglio

Vedremo analizzati due schemi di funzionamento.

SCHEMA OPERATIVO I

È lo schema dei primi oscilloscopi, quelli attuali usano principalmente il II:



Peculiarità degli strumenti digitali è la presenza di interfacce che controllano le operazioni e che trasmettono post-elaborazione

La linea distingue una zona che opera a tempi + punti (sotto) e una a tempi + veloci da cui dipendono banda, f_{camp} (sopra).

- I circuiti analogici di ingresso determinano il comportamento in frequenza dello strumento e si fornisce la banda a -3dB dello strumento che, se si vuole avere attenuazioni del 2%, va usata la regola del "3x": (~30%)

$$\begin{cases} \text{se } f_{\text{segnale}} = B & -30\% \\ \text{se } f_{\text{segnale}} = \frac{B}{3} & -2\% \end{cases}$$

Questa banda pone limiti anche al tempo di salita del segnale secondo la regola $t_{50} = \frac{0.35}{B}$ (sotto t₅₀ t₅₀ conti a vedere t₅₀)

Nell'insieme, questi circuiti iniziali contribuiscono all'incertezza del sistema sulle misure di ampiezza.

- Il mio solito ADC digitalizza il segnale nel tempo (campioni) e nell'ampiezza (quantizza). Solitamente nei DSO è di tipo flash, quindi alte f_{camp} e #bit ≤ 10, questi sono i parametri interessanti.

La frequenza di campionamento è impostata dall'operatore settando la rotella time/div, anche è scelta in modo indiretto attraverso essa.

Al verificarsi dell'evento di trigger si avvia la fase di conversione da analogico a digitale con una frequenza data dall'impostazione in time/div e periodo tale da garantire il # di campioni predefinito. È dunque l'evento di trigger quello determinante!

I campioni acquisiti sono dunque trasferiti alla memoria di acquisizione (FIFO), dunque si lavora a grandissima velocità (f_{max} = f_{sa/s} ~> t = 1 ns)

Trasferiti alla memoria, i campioni possono essere conservati per un tempo indefinito se non ci sono altri eventi di trigger. Aggiungo dunque il display in base alle richieste mie e posso anche vedere segnali transienti (peculiarità novità dei DSO)

Se il segnale è transitorio ho solo un campionamento reale → procurato i campioni ONE SHOT
 se il " " ripetitivo posso anche sfruttare la ripetitività → " " " in TEMPO EQUIVALENTE

come già detto il DSO con questo schema lavora questo c'è un evento di trigger. Ad ogni trigger i campioni vengono presi, ordinati nel tempo e poi diviso. → TECNICA SEQUENZIALE! Voglio dire che i circuiti interni impongono un ritardo interno (0, 1T, 2Δt, 3Δt, ...) in modo da garantire che vengono presi SEMPRE campioni non ancora catturati.

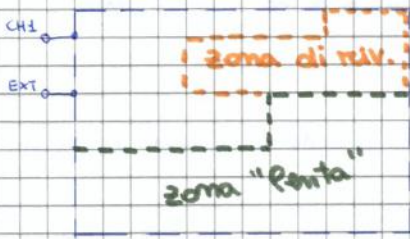
⇒ Vantaggio: opera il teorema del campionamento e il segnale è ripetitivo!

$$L \Rightarrow f_{\text{eq}} = \frac{1}{\Delta t} > f_c !!$$

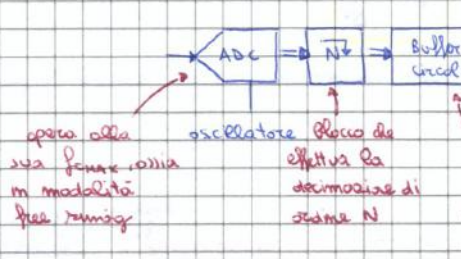


SCHEMA OPERATIVO 2

È uno schema + attuale e da certi punti di vista + moderno e avanzato.



La rivoluzione ha riguardato principalmente la gestione del processo di acquisizione e cambiato notevolmente la modalità di trigger.



opera alla sua frequenza in modalità free running
 oscillatore
 blocco da effettuare la decimazione di N
 la memoria di acq. è digitalizzata come un Buffer circolare

il campionamento sequenziale non è + la modalità che implementa il tempo equivalente. Questa è usata per superare il campionamento ma non va + la modalità sequenziale

⇒ L'acquisizione non è + determinata dall'evento di trigger!

Esaminiamo i blocchi:

- **Blocco decimatore:** riduce il # di sample punti dati della forma. Non potendo tenere tutti nel Buffer, a questo me modo solo quanti necessari. La formula time/div non influenza + la frequenza di campionamento come nello schema 1, ma regola indirettamente la decimazione $\frac{1}{N}$.
- **Buffer circolare:** il puntatore in scrittura avanza alla velocità dell'ADC, eventualmente ridotta dall'ordine N . Il puntatore in lettura invece scorre la porzione di memoria di acquisizione che è trasferita alla memoria interna. Evita così che si ritrovano le stesse cose nelle stesse celle.

È proprio l'evento di trigger che determina l'avvio del ciclo di lettura del Buffer. In quanto visto il trigger può quasi sempre perdere e salvare in memoria dando così il piccolo improvement di questo schema che è la possibilità di lavorare in modalità pre-trigger e post-trigger. È un vantaggio che si deve essenzialmente al fatto che l'ADC è free running. Esiste anche la modalità pre/post trigger selezionando l'avvio del Buffer in lettura in corrispondenza dell'evento di trigger.

Esaminiamo ora come avviene l'acquisizione in tempo equivalente:

come ricorda conseguenza del free running ADC abbiamo che la modalità sequenziale di campionamento è totalmente impedita. In questo caso per segnali in misura ripetitivi si adotta la tecnica del "random sampling". Infatti, introdurre un delay variabile inserito dato che il trigger non comanda l'acquisizione. Con la random sampling gli impulsi del campionamento sono asincroni rispetto al trigger. Ora quindi spero, non sono certo, di alcune compioni #.

se $T_{sample} = \# \cdot T_{clk}$
 L'evento di trigger ora genera da reset del contatore, e, per mezzo di un latch, conserva la posizione del primo campione. Prima li derivavo tutti ora no.
 Questo sempre | Finché non arriva un nuovo trigger continuo a campionare a pari del clock interno gli stessi campioni.

- Gli oscillatori digitali NON includono filtri anti-aliasing quindi le figure vanno analizzate con senso critico. se non ho info per evidenziarla mi accorgo che c'è una forma errata variando la base tempi e vedendo ad ogni sua variazione una forma d'onda diversa.



se $f_x < f_{CLK}$ conviene periodo
 se $f_x > f_{CLK}$ " frequenza

INCERTEZZA DI MISURA

$$f_x = \frac{m}{T_c} = \frac{m}{K \cdot T_{CLK}}$$

$$T_x = \frac{m \cdot T_{CLK}}{M}$$

$$\epsilon_{f_x} = \epsilon_m + \epsilon_{T_{CLK}}$$

$$\epsilon_{T_x} = \epsilon_m + \epsilon_{T_{CLK}}$$

misture di quant.

misture del compare interno

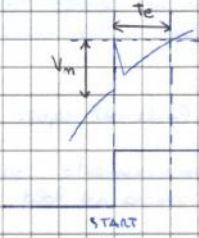
- nell'incertezza del compare interno: solitamente generato da un quoziente che ha:
 - Tolleranza) non importante perché può essere trascurata tenendo lo strumento DERIVA TEMPORALE) avendo il f_x con il tempo bisogna fare la taratura (SENSIBILITÀ TEMPERATURA e ALI.) alcuni modelli con GPS che si agganciano quasi costantemente all'oscillatore e ne fanno la media a punto
- nell'incertezza di quantizzazione: asincronismo tra impulsi contati e intervalli di misura ($\Delta m = \pm 1$)

EFFETTI NEL RUMORE

Misura in frequenza: SNR controllabile dal costruttore

" " periodo: il rumore sul segnale d'ingresso influenza istanti di inizio e fine conteggio

il contributo maggiore è dovuto al rumore sul segnale da cui ricavare la porta di misura.



$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{V_m}{t_e} \sim t_e = \frac{V_m}{dv_x/dt}$$

⇒ conviene mettere la soglia nel punto di massima pendenza per avere $t_e \rightarrow \phi$

$$\epsilon_{f_x} = \epsilon_m + \epsilon_{CLK} + 2 \frac{t_e}{M \cdot T_x}$$

via su start che su stop
 incertezza rumore

CONTRIBUTI DI INCERTEZZA

- Volendo separare i contributi di incertezza statici da quelli dinamici ci concentriamo inizialmente sul MUX in posizione fissa e analizziamo la catena di misura del singolo canale.



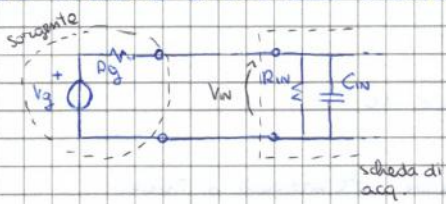
$$V_s = G \cdot H_0 \cdot [V_i(t_c) + V_{off}] + d(t_c)$$

GENERICO CAMPIONE che viene trasformato dall'ADC

Se come io voglio avere una stima del $V_i(t)$, devo tornare indietro e dire:

$$\hat{V}_i(t) = \frac{\int_0^t (m_i)}{G \cdot H_0} - V_{off} + d(t_c)$$

L'errore sistematico è dato dalla struttura



$$\frac{V_M(j\omega)}{V_G(j\omega)} = \frac{R_{in}}{R_{in} + j\omega R_{in} C_{in}}$$

~> al crescere di ω il C costituisce l'inerzia

Confronto tale errore con gli altri contributi per vedere se è grande.

- Poniamo ora ai contributi di incertezza così detti "dinamici":

misuro dunque N segnali analogici ~> il MUX si muove ciclicamente campionando uno alla volta (posso scandire K canali con $K \leq N$ purché siano K canali vicini) decidendo quali scandire.

① SETTLING TIME

È l'intervallo di tempo necessario al sistema per estinguere i transienti dovuti alle commutazioni del MUX.
Questo tempo va rispettato odevrtae l'acquisizione di qualsiasi di imprevedibile.
Quindi:

$$f_{c1} = \frac{f_c}{N} \text{ ma dovendo fare esaurire il settling time circa } f_{c1} < \frac{f_c}{N}$$

② CROSS-TALK

È l'interferenza tra canali adiacenti

$$\text{CROSS-TALK} = 20 \log_{10} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

→ segnali captati su canale 1 e 2

③ TIME-SKEW

È lo sfasamento temporale tra i campioni dei vari canali ovvero:

dove ho il campionamento di un canale non ho quello degli altri, ma c'è un piccolo sfasamento se li voglio simultanei sono da applicare degli algoritmi di interpolazione che fornisca una stima del segnale e dei suoi campioni negli istanti non disponibili.

in alternativa avere un ADC per ogni canale è molto costoso.



② Architettura sweep-tuned

Si elimina il problema dei tanti filtri impiegando un unico filtro passa-banda con frequenza centrale variabile all'interno del campo di frequenza d'interesse.
 Il principale difetto è il tempo di misura: è una architettura consigliata per segnali con frequenza fissa \rightarrow costi \downarrow , TEMPI \uparrow !!! Inoltre se la f varia è un problema!! (a f_c sbalza!)

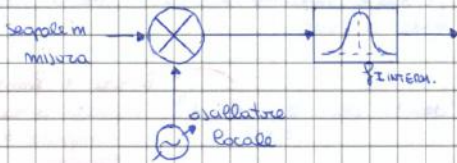
③ Architettura a conversione di frequenza

Voglio avere un solo filtro
 Non voglio avere f_c variabile

\rightarrow Metto un unico filtro che abbia f_c fissa e si fa scorrere lo spettro lungo l'asse della frequenza in modo che in tempi diversi cadano nella banda del filtro diverse porzioni di spettro. È il duale dello sweep-tuned che invece fissa lo spettro e muoveva il filtro.

Ma come faccio a muovere lo spettro?

Si usa un'architettura detta "super-eterodina" la quale compie un mix tra due segnali: il segnale di misura e il segnale generato da un oscillatore locale che genera una sinusoide a frequenza variabile che serve per shiftare il segnale.



Il mixer mescolerà i due segnali permettendo la translazione in frequenza di quello da analizzare. Invierà il mix al filtro BP con $f_{centrale} = f_I$ che presenterà in uscita porzioni diverse dello spettro in misura in istanti di tempo diversi.

Analizziamo come funziona il mixer:



$$f_u = m \cdot f_{lo} + n \cdot f_s \quad \text{dove } m, n = 0, \pm 1, \pm 2$$

COMBINAZIONE LINEARE DEI DUE SEGNALE (non si va mai ad m oltre 1)

$m=0$	$n=1$	$f_u = f_s$
$m=1$	$n=0$	$f_u = f_{lo}$
$m=1$	$n=-1$	$f_u = f_{lo} - f_s$
$m=-1$	$n=1$	$f_u = f_s - f_{lo}$

\rightarrow Le componenti all'uscita del filtro sono quelle a frequenza f_I

$$\begin{aligned} f_I = f_s &\rightarrow f_s = f_I \\ f_I = f_{lo} &\rightarrow f_{lo} = f_I \\ f_I = f_{lo} - f_s &\rightarrow f_s = f_{lo} - f_I \\ f_I = f_s - f_{lo} &\rightarrow f_s = f_I + f_{lo} \end{aligned}$$

\downarrow
 Rimane solo la frequenza pari a f_I !!!

(vedere nelle slides i grafici per le f)

questi dispositivi non danno mai la possibilità di osservare la continua perché se la componente utile è $f_s = f_{lo} - f_I$

$$f_s = f_{lo} - f_I \text{ è maggiore di zero sempre (spettrale)}$$

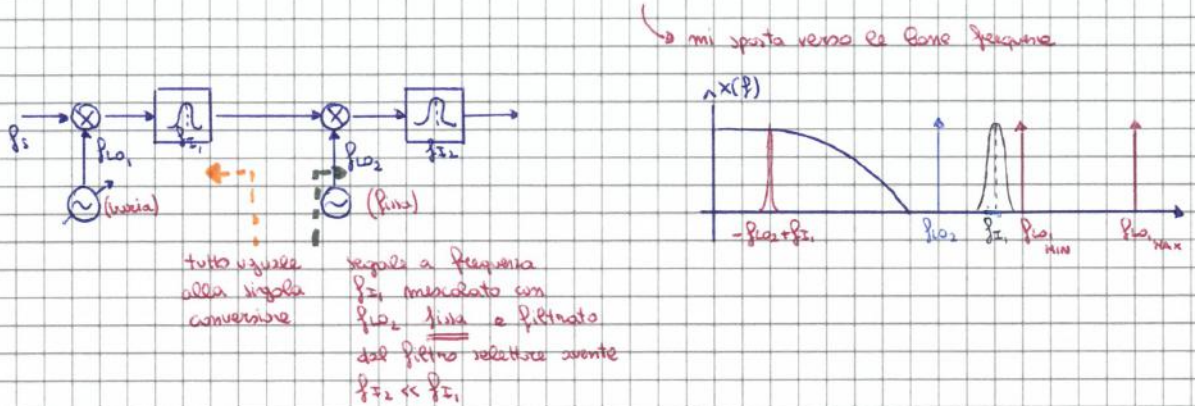


$$\begin{aligned} f_{s_{min}} &= f_{lo_{min}} - f_I \\ f_{s_{max}} &= f_{lo_{max}} - f_I \end{aligned} \quad \rightarrow f_s \text{ è esplorabile entro } f_{s_{min}} - f_{s_{max}}$$

NB: Non impostare correttamente il valore ΔT comporta che il filtro non "vada" a regime e che l'ampiezza delle componenti spettrali è errata! \leadsto si accende una spia sullo strumento!!

Dato che finora abbiamo usato uno schema che ottiene segnali a bassa frequenza ma con alta risoluzione oppure segnali ad alte frequenze ma con basse risoluzioni, possiamo pensare di ripetere + volte la tecnica della conversione di frequenza per ottenere buone risoluzioni anche ad alte frequenze:

"CONVERSIONE MULTIPLA DI FREQUENZA"



2

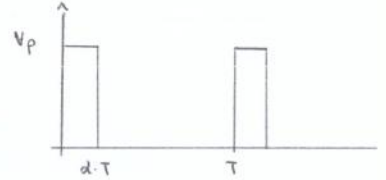
voltmetro a vero valore efficace 1.500 V
 " in continua 0.750 V

sapendo che l'incertezza garantita da entrambi gli strumenti è:

$$(0.15\% \cdot \text{LETTURA} + 1 \text{ mV})$$

Stimare d e V_p :

onda quadra $\Rightarrow V_p = V_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2}$



$$\left\{ \begin{aligned} V_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{d.T} V_p^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot d.T \cdot V_p^2} = V_p \sqrt{d} \Rightarrow d = \frac{V_{\text{eff}}^2}{V_p^2} \\ V_{\text{medio}} &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{d.T} V_p dt = V_p \cdot d \end{aligned} \right.$$

dalle due relazioni ricavare che:

$$d = \frac{V_{\text{medio}}}{V_p} = \frac{V_{\text{eff}}^2}{V_p^2} \Rightarrow V_p = \frac{V_{\text{eff}}^2}{V_{\text{medio}}}$$

• stima dei misurandi:

- il voltmetro a vero valore efficace potrebbe essere un multimetro a vero valore efficace, che dà, indipendentemente dal segnale, indicazioni sul valore efficace dello stesso.
- il voltmetro in continua invece darà info sul valore medio del segnale (multimetro in DC)

$$V_p = \frac{1.5^2}{0.750} = 3 \text{ V} \qquad d = \frac{0.750}{3} = 0.25$$

• stima incertezze:

$$\text{con modello deterministico} \Rightarrow \Delta V_{\text{eff}} = (0.15\% \cdot 1.5 + 1 \text{ mV}) = 3.25 \text{ mV}$$

$$\Delta V_{\text{medio}} = (0.15\% \cdot 0.750 + 1 \text{ mV}) = 2.125 \text{ mV}$$

$$\Delta V_p = \left| \frac{\partial V_p}{\partial V_{\text{eff}}} \right| \Delta V_{\text{eff}} + \left| \frac{\partial V_p}{\partial V_{\text{medio}}} \right| \Delta V_{\text{medio}} = \frac{2 V_{\text{eff}}}{V_{\text{medio}}} \cdot \Delta V_{\text{eff}} + \frac{V_{\text{eff}}^2}{V_{\text{medio}}^2} \cdot \Delta V_{\text{medio}} = 0.0215 \text{ V}$$

$$\Delta d = \left| \frac{\partial d}{\partial V_{\text{medio}}} \right| \Delta V_{\text{medio}} + \left| \frac{\partial d}{\partial V_p} \right| \Delta V_p = \frac{1}{V_p} \cdot \Delta V_{\text{medio}} + \frac{V_{\text{medio}}}{V_p^2} \cdot \Delta V_p = 2.5 \cdot 10^{-3}$$

• stima misure

$$\left\{ \begin{aligned} V_p &= (3.000 \pm 0.0215) \text{ V} \\ d &= (0.2500 \pm 0.0025) \end{aligned} \right.$$

② Il sistema di acquisizione mostrato è usato per misurare N canali di tensione collegati al MUX.
 Il PGA guadagna $G = 100 \pm 0.5\%$ quindi si acquisisce dal canale 1 e l'errore totale vale 20 LSB.
 Sapendo che $V_1 = 0.04V$ e che $V_2 = 2V$, stimare il massimo valore di cross-talk che rende trascurabile l'effetto dovuto all'interferenza tra canali.

$$\left(\text{cross-talk} = 20 \log_{10} \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \right)$$

$$D_{out} = \frac{V_{in} \cdot G}{V_{FR}} \cdot \frac{2^{\#bit}}{V_{FR}} \cdot \frac{1}{V_q} \quad \rightsquigarrow \quad D_{out} = \frac{V_{in}}{V_q} = \frac{V_{in} G}{V_{FR} \cdot \frac{1}{2^{\#bit}}} = \frac{(V_1 + V_1^{(2)}) G}{V_{FR}} \cdot 2^{\#bit}$$

$$E_{D_{out}} = E_V + E_G + E_{TVE} \quad \text{e io voglio che } E_V \ll E_G + E_{TVE} = \frac{0.5}{100} + 20 \cdot \frac{1}{2^{14}} = 6.22 \cdot 10^{-3}$$

$$E_V = \frac{V_1^{(2)}}{V_1} = 6.22 \cdot 10^{-3} \quad \rightsquigarrow \quad V_1^{(2)} = V_1 \cdot 6.22 \cdot 10^{-3} = 0.04 \cdot 6.22 \cdot 10^{-3} = 2.488 \cdot 10^{-4}$$

$$CT = 20 \log_{10} \left(\frac{V_1^{(2)}}{V_2} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{2.488 \cdot 10^{-4}}{2} \right) = -79 \text{ dB}$$

2

Sensore di pressione che fornisce un segnale ad onda quadra di periodo $T = T_0 + k \cdot P$
 dove $T_0 = 25 \mu s$ (inc. trascurabile) e $k = 0.025 \mu s / Pa$ (incertezza relativa percentuale di 0.5%)

Sapendo che $200 < P < 1000$ e che si usa un contatore a misura diretta di frequenza
 avente incertezza relativa di $1 \cdot 10^{-6}$, determinare il minimo tempo che rende trascurabile
 l'incertezza della misura del periodo T sulla misura della pressione P :

$$f = \frac{m}{\Delta t_{gate}}$$

$$\begin{cases} T_{MIN} = 25 \mu s + 0.025 \frac{\mu s}{Pa} \cdot 200 Pa = 30 \mu s & f_{MAX} = 33.33 \text{ KHz} \\ T_{MAX} = 25 \mu s + 0.025 \frac{\mu s}{Pa} \cdot 1000 Pa = 50 \mu s & f_{MIN} = 20 \text{ KHz} \end{cases}$$

$$\Delta t_{MIN} = \frac{m}{f_{MAX}}$$

$$P = \frac{T - T_0}{k} = \frac{1/f - T_0}{k} \quad \sim \quad \varepsilon_P = \varepsilon_f + \varepsilon_k \quad \sim \quad \delta P = \left| \frac{\partial P}{\partial f} \right| \delta f + \left| \frac{\partial P}{\partial k} \right| \delta k = \underbrace{\frac{1}{f^2 \cdot k} \cdot \delta f}_{\delta P_f} + \underbrace{\frac{1/f - T_0}{k^2} \cdot \delta k}_{\delta P_k}$$

voglio che $\delta P_f \ll \delta P_k$

$$\frac{1}{f^2 \cdot k} \cdot \delta f \ll \frac{1/f - T_0}{k^2} \delta k$$

devo minimizzare la ε_{Pk} in modo da avere il massimo di $\varepsilon_f \sim$ cio' è dato da $f = f_{MAX}$

$$\frac{\delta f}{f^2 \cdot k} \ll \frac{1/f - T_0}{k^2} \delta k \quad \sim \quad \left. \frac{1/f - T_0}{k^2} \delta k \right|_{MIN} = \frac{1}{f_{MAX}} - T_0 \cdot \delta k = 1.0006$$

$$\frac{\delta f}{f^2 \cdot k} \ll 1.0006 \quad \Rightarrow \quad f \gg \sqrt{\frac{\delta f}{1.0006 \cdot k}} = \dots \text{ di qui non trovo nulla!}$$

$$\varepsilon_f \ll 1.0006 \cdot k \cdot \frac{f}{f_{MAX}} = 933.7499 \cdot 10^{-6}$$

In una misura a frequenza diretta io so che:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{base} + \varepsilon_{temp} + \frac{1}{m} \ll 833.75 \cdot 10^{-6} \quad \sim \quad \frac{1}{m} \ll 833.75 \cdot 10^{-6} - \varepsilon_{bt} \quad \sim \quad m \gg 1200 \text{ conteggi}$$

Adesso io so che:

$$f = \frac{m}{\Delta t} \quad \sim \quad \Delta t = \frac{m}{f_{MAX}} = \frac{1200}{33.33 \text{ KHz}} = 36.003 \text{ ms}$$

2) si valuta l'impedenza di un bipolo con le seguenti prove:

- misurazione di R con metodo voltampometrico:
 - voltmetro magnetoelettrico 50V di portata e classe=0.5 $\leadsto V_{lett} = 40V$
 - amperometro " 2A " " e classe=0.2 $\leadsto I_{lett} = 1.0A$
 - (trascurare il carico strumentale)
- misurazione induttanza
 - $L = 2mH, 0.5\%$ a 5kHz

stimare modulo e incertezza di $|Z|$ a 5 kHz trascurando la variazione di R con f .

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (2\pi f \cdot L)^2}$$

• R:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{40V}{1.0A} = 40 \Omega \quad \text{nominali}$$

$$R = (40.00 \pm 0.410) \Omega$$

$$\delta R = \frac{0.5}{100} \cdot \frac{50}{40} + \frac{0.2}{100} \cdot \frac{2}{1} = 1.025\%$$

$$\delta R = \frac{1.025}{100} \cdot 40 = 0.410 \Omega$$

• L:

$$L = (2.00 \pm 0.01) mH$$

$$X_L = 2\pi f \cdot L = 62.83 \Omega$$

$$\leadsto \delta X_L = \left| \frac{\partial X_L}{\partial L} \right| \cdot \delta L = 2\pi f \cdot (0.01 mH) = 314.15 m\Omega$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2} = 76.483 \Omega$$

$$\delta |Z| = \left| \frac{\partial |Z|}{\partial R} \right| \cdot \delta R + \left| \frac{\partial |Z|}{\partial X_L} \right| \cdot \delta X_L = \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dots}} \cdot R \cdot \delta R + \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dots}} \cdot X_L \cdot \delta X_L$$

$$= \frac{R}{|Z|} \cdot \delta R + \frac{X_L}{|Z|} \cdot \delta X_L = 0.685 \Omega$$

$$|Z| = (76.483 \pm 0.685) \Omega$$

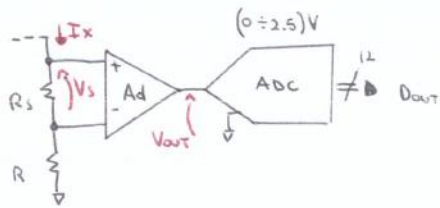
2

Il circuito è usato per misurare I_x attraverso la misura della caduta di tensione ai capi del derivatore di corrente R_s , avente valore nominale $100 \text{ m}\Omega$ e $\epsilon_{R_s} = 0.001$

Il guadagno differenziale dell'amplificatore è $A_D = 100$ con $\epsilon_{A_D} = 0.0005$, mentre il TUE = 5 LSB.

A

A) Stimare I_x nel caso di amplificatore ideale quando $D_{OUT} = 3100 \text{ LSB}$



$$I_x = \frac{V_s}{R_s} = \frac{V_{out}}{G} \cdot \frac{1}{R_s}$$

$$V_w = m \cdot V_q = D_{out} \cdot \frac{V_{FR}}{2^{\#bit}}$$

$$I_x = \frac{1}{G \cdot R_s} \cdot D_{out} \cdot \frac{V_{FR}}{2^{\#bit}}$$

Valore nominale:

$$I_x = \frac{1}{100 \cdot 100 \text{ m}\Omega} \cdot 3100 \cdot \frac{2.5}{2^{12}} = 0.189209 \text{ A}$$

incertezze:

$$\epsilon_{I_x} = \epsilon_G + \epsilon_{R_s} + \epsilon_{ADC} = 0.0005 + 0.001 + \frac{5}{3100} = 3.113 \cdot 10^{-3} \quad \rightarrow \quad \delta I_x = \epsilon_{I_x} \cdot I_x = 5.89 \cdot 10^{-4}$$

$$I_x = (0.18921 \pm 0.00059) \text{ A} = (189.2 \pm 0.6) \text{ mA}$$

B) Sapendo che $CHRR = 90 \text{ dB}$, stimare il massimo valore che può assumere R per poter trascurare il contributo dell'incertezza dovuto dalla tensione di modo comune.

$$V_{MC} = \frac{V^+ + V^-}{2} = \frac{V_s + R \cdot I_x + R \cdot I_x}{2} = \frac{V_s}{2} + R I_x = I_x \left(R + \frac{R_s}{2} \right)$$

$$V_{ADC} = A_D \cdot R_s \cdot I_x + A_{MC} \cdot I_x \left(R + \frac{R_s}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{I_x}^{PRIMA} \gg \epsilon_{I_x}^{ORA}$$

errore rispetto a prima

$$\delta I_x = \frac{A_{CH} I_x \left(R + \frac{R_s}{2} \right)}{A_D \cdot R_s} \quad \rightarrow \quad \text{divido il contributo di errore per } A_D, \text{ e poi lo converto in corrente! } \left(\frac{1}{A_D R_s} \right)$$

$$\delta I_x \ll 5.89 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{A_{CH}}{A_D} I_x \cdot \frac{R}{R_s} + \frac{A_{CH}}{A_D} I_x \cdot \frac{1}{2} \ll 5.89 \cdot 10^{-4}$$

$$CHRR = 20 \log_{10} \left(\frac{A_D}{A_C} \right) = 90$$

$$\frac{A_D}{A_C} = 10^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_C}{A_D} = 10^{-4}$$

$$R \ll \left(5.89 \cdot 10^{-4} - \frac{A_{CH}}{A_D} \cdot I_x \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{R_s A_D}{A_{CH} I_x}$$

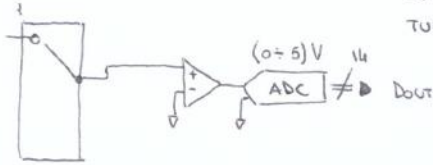
$$R \ll 3.06$$

2

$S = 10 \text{ mV}/^\circ\text{C}$ con un'incertezza relativa pari a 0.005

$G_1 = 20 \pm 0.1\%$

$TUE = 50 \text{ LSB}$



i) Stimare a quanto D_{OUT} fornisce 14250

$$D_{OUT} = V_G \cdot \frac{2^{\#bit}}{V_{FR}} \quad \leadsto \quad D_{OUT} = T \cdot G \cdot \frac{2^{\#bit}}{V_{FR}} = T \cdot S \cdot G \cdot \frac{2^{\#bit}}{V_{FR}} \quad \Rightarrow \quad T = 21.76^\circ\text{C}$$

$$ET = ES + EG + E_{ADC} = 0.005 + \frac{0.1}{100} + \frac{50}{14250} = 1.25\%$$

$$\delta T = \frac{1.25}{100} \cdot 21.76^\circ\text{C} = 0.27^\circ\text{C}$$

$$\Rightarrow T = (21.76 \pm 0.27)^\circ\text{C}$$

ii) Stimare il minimo valore ammissibile di tensione di offset all'uscita del HUX tale che non peggiori l'incertezza di temperatura

$$D_{OUT} = V_G \cdot \frac{2^{\#bit}}{V_{FR}} = \frac{(T \cdot S + V_{off}) \cdot G}{V_{FR}} \cdot 2^{\#bit} = \underbrace{\frac{T \cdot S \cdot G \cdot 2^{\#bit}}{V_{FR}}}_{D_{OUT}} + \underbrace{V_{off} \cdot \frac{G \cdot 2^{\#bit}}{V_{FR}}}_{\delta V_{off}}$$

vuolgo che:

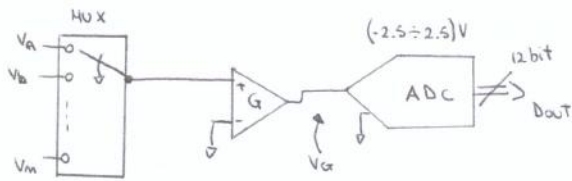
$$\frac{V_{off}}{S} \ll \delta T \quad \leadsto \quad T = \left(\frac{D_{OUT} \cdot V_{FR}}{2^{\#bit}} - V_{off} \right) \frac{1}{S}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{V_{off}}{S} \ll 0.27 \quad \leadsto \quad V_{off} \ll 0.27^\circ\text{C} \cdot \frac{10 \text{ mV}}{^\circ\text{C}} = 2700 \text{ } \mu\text{V}$$

$$V_{off_{MAX}} = 270 \text{ } \mu\text{V}$$

2



Il circuito è usato per stimare V_A . L'amplificatore è caratterizzato da $G=100$ ($E_G=0.002$) e da una massima tensione di offset riferita all'ingresso pari a 50 mV . C'è poi il TUE = 4 LSB

i) Stimare V_A quando l'ADC fornisce $D_{out} = -1300$ LSB

$$D_{out} = V_G \cdot \frac{2^{\#bit}}{V_{FR}}$$

$$\hat{V}_m = m \cdot V_q = m \cdot \frac{V_{FR}}{2^{\#bit}}$$

↓

$$V_G = D_{out} \cdot \frac{V_{FR}}{2^{\#bit}} \quad \text{dove } V_G = V_A \cdot G + V_{off}$$

$$V_A = \left(D_{out} \cdot \frac{V_{FR}}{2^{\#bit}} - V_{off} \right) \frac{1}{G} = -0.01587\text{ V} \approx -15.87\text{ mV}$$

valutiamo ora le incertezze:

$$E_{V_A} = E_{D_{out}} + E_G + E_{V_{off}} = \frac{4}{1300} + 0.002 + \frac{50\text{ mV}}{15.87\text{ mV}} = \frac{4}{1300} + 0.002 + 3.1509 \cdot 10^{-3} = 8.2277 \cdot 10^{-3}$$

$$\delta V_A = 0.1305 \cdot 10^{-3}\text{ V}$$

$$V_A = (-15.87 \pm 0.13)\text{ mV}$$

ii) Sapendo che V_b vale 0.2 V , stimare il CROSS-TALK tra canali adiacenti tale da introdurre incertezza trascurabile nella misura di V_A

$$\frac{V_{AB}}{V_A} = E_{CT} \ll 8.2277 \cdot 10^{-3}$$

$$V_{AB} \ll 8.2277 \cdot 10^{-3} \cdot (15.87\text{ mV}) = 0.13\text{ mV}$$

$$V_{AB} = 0.013\text{ mV} = 13.06\text{ }\mu\text{V}$$

$$CT = 20 \log_{10} \left(\frac{V_{AB}}{V_B} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{13.06\text{ }\mu\text{V}}{0.2} \right) = -84\text{ dB}$$

⚠ In tutto ciò non sta ancora vedendo se si usa il deterministico o il probabilistico. E' un caso che va fatto a prescindere dal metodo.

Torno alle incertezze e confronto con l'incertezza assoluta:

$$\Delta V = \pm (0.001\% \cdot 10 \text{ V} + 0.0005\% \cdot 20 \text{ V}) = 200 \mu\text{V}$$

↳ l'ordine di grandezza è uguale

L'ERRORE SISTEMATICO VA CORRETTO CAMBIANDO IL MODELLO DI MISURA:

$$V_G = \underbrace{V_{OUT}}_{\substack{\text{valore letto} \\ \text{con le} \\ \text{letture} \\ \text{ripetute}}} \cdot \underbrace{\left(\frac{R_W + R_G}{R_W} \right)}_{\text{fattore correttivo}} = V_{OUT} \left(1 + \frac{R_G}{R_W} \right)$$

STEP 2: calcolo la media empirica di ogni grandezza ottenuta in modo diretto:

$$\overline{v_{out}} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} v_{out,i} = 9.999007 \text{ V}$$

STEP 3: stima del misurando

NEL PASSO 1 e 2 ⇒ sostituisco $\overline{v_{out}}$ nel modello matematico

$$V_G = \overline{v_{out}} \left(1 + \frac{R_G}{R_W} \right) = 9.999007 \left(1 + \frac{50}{10^7} \right) = 9.999057 \text{ V}$$

≈ 50 μV in +!
corretto

STEP 4: incertezze fornite con lettura singola o da terze parti

parliamo di valore e incertezze di R_G e R_W con metodi di categoria B.

Non dato m_f sulle loro ddp si ipotizziamo uniformi e

avremo:

$$U_0(R_W) = \frac{\Delta R_W}{\sqrt{3}} = \frac{500 \text{ k}\Omega}{\sqrt{3}} \approx 290 \text{ k}\Omega$$

↳ 5% di 10 MΩ

$$U_0(R_G) = \frac{\Delta R_G}{\sqrt{3}} = \frac{2.5 \Omega}{\sqrt{3}} \approx 1.4 \Omega$$

↳ 5% di 50 Ω

5.3 Incertezza tipo della media empirica

$$U(\overline{v_{out}}) = \sqrt{U_A^2(\overline{v_{out}}) + U_G^2(\overline{v_{out}})} = \sqrt{(200 \mu V)^2 + (115 \mu V)^2} \approx 230 \mu V$$

STEP 6: Incertezza tipo combinata

metto assieme tutti i pezzi con modo indip. statistica

fa la misura delle variabili in gioco

$$U_c(v_{\alpha}) = \sqrt{\left(\frac{dv_{\alpha}}{d\overline{v_{out}}}\right)^2 U^2(\overline{v_{out}}) + \left(\frac{dv_{\alpha}}{dr_{\alpha}}\right)^2 U^2(r_{\alpha}) + \left(\frac{dv_{\alpha}}{dr_{in}}\right)^2 U^2(r_{in})}$$

dove:

$$\bullet \frac{dv_{\alpha}}{d\overline{v_{out}}} = 1 + \frac{r_{\alpha}}{r_{in}} = 1 + \frac{50}{10^3} = 1.00005 \frac{V}{V}$$

$$\bullet \frac{dv_{\alpha}}{dr_{\alpha}} = \frac{\overline{v_{out}}}{r_{in}} = \frac{9.999007 V}{10^3 \Omega} = 1 \cdot 10^{-6} \frac{V}{\Omega}$$

$$\bullet \frac{dv_{\alpha}}{dr_{in}} = -\frac{\overline{v_{out}}}{r_{in}} \frac{r_{\alpha}}{(r_{in})^2} = -\frac{9.999007 V \cdot 50}{(10^3)^2} \approx -5 \cdot 10^{-12} \frac{V}{\Omega}$$

$$\Rightarrow U_c(v_{\alpha}) \approx 230 \mu V$$

STEP 7: Incertezza estesa

Il fattore di copertura lo si considera di solito fra 2 e 3. Di solito si usa due in modo che:

$$v_{\alpha} = \underline{9.99906 V} \rightsquigarrow U(v_{\alpha}) = 2 \cdot 230 \mu V = 2 \cdot 0,23 \text{ mV} = \underline{0,46 \text{ mV}}$$

$$9.999057 \rightsquigarrow 9.99906$$

tenere il v_{α} in modo da tenere le cifre significative per l'incertezza

Nell'ipotesi che la variabile aleatoria sia distribuita come gaussiana, l'incertezza estesa fornita corrisponde ad un livello di fiducia pari a circa il 95%

I STEP → Modello di misura

$$R_x = \frac{V_x}{I_x}$$

Applicando la regola del modello deterministico:

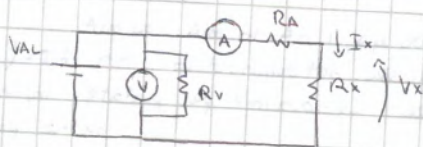
$$\epsilon R_x = \epsilon V_x + \epsilon I_x \approx 0.00016 + 0.00012 \approx 0.00028$$

Quindi:

$$\delta R_x = R_x \cdot \epsilon R_x = 300 \text{ k}\Omega \cdot 0.00028 = 84 \text{ }\Omega$$

Non è giusto questo conto xk le incertezze sono date in modo #! È però solo un conto approssimativo!

Considerando i carichi strumentali il circuito diviene:



- (A) misura una I_m che è effettivamente pari a I_x
- (V) misura una $V_m = V_x + V_A$

$$V_m = V_x + V_A = V_x + R_A I_x$$

$$R_m = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_x + R_A I_x}{I_x} = R_x + R_A$$

Di conseguenza l'effetto sistematico dovuto al carico strumentale è:

$$R_A = \frac{C_V}{\text{portata}} = \frac{0.5 \text{ mV}}{100 \text{ }\mu\text{A}} = 5 \text{ }\Omega$$

L'effetto del carico strumentale è trascurabile rispetto a quella sul misurando ($84 \text{ }\Omega \gg 5 \text{ }\Omega$)

II STEP → Medie empiriche

$$\overline{V_m} = 9.00257$$

$$\overline{I_m} = 30.01304 \cdot 10^{-6}$$

III STEP → Stima del misurando

$$\overline{V_x} = \frac{\overline{V_m}}{\overline{I_m}} = 299.955 \text{ k}\Omega$$

STEP VI → incertezza tipo combinata

H_0 di ind. statistica ($\rho(\overline{v_m}, \overline{i_m}) = 0$)

$$U_c(r_x) = \sqrt{\left(\frac{dr_x}{d\overline{v_m}}\right)^2 U^2(\overline{v_m}) + \left(\frac{dr_x}{d\overline{i_m}}\right)^2 U^2(\overline{i_m})} \approx 40 \Omega$$

- Le letture di tensione e corrente potrebbero non essere statisticamente indipendenti! Sono infatti calcolate contemporaneamente, per cui la correlazione potrebbe essere!
- Metto su un grafico lettura di corrente e tensione e vedo i punti!

Posso calcolare la covarianza delle media empirica di $\overline{v_m}$ e $\overline{i_m}$ è:

$$s(\overline{v_m}, \overline{i_m}) = \frac{1}{20-1} \sum_{i=1}^{20} (v_i - \overline{v_m})(i_i - \overline{i_m}) \approx 6.85 \cdot 10^{-13} \text{ V}\cdot\text{A}$$

Stimo il coefficiente di covarianza r :

$$r(\overline{v_m}, \overline{i_m}) = \frac{s(\overline{v_m}, \overline{i_m})}{s(\overline{v_m})s(\overline{i_m})} = 0.56$$

Ora:

$$U_c^2(r_x) = \left(\frac{dr_x}{d\overline{v_m}}\right)^2 U^2(\overline{v_m}) + \left(\frac{dr_x}{d\overline{i_m}}\right)^2 U^2(\overline{i_m}) + 2 \frac{dr_x}{d\overline{v_m}} \frac{dr_x}{d\overline{i_m}} s(\overline{v_m}, \overline{i_m})$$

$$U_c(r_x) = 34.5 \Omega$$

ok
 → H_0 ottenuto una piccola compensazione del contributo di incertezza grazie all'aver considerato una relazione tra le letture!

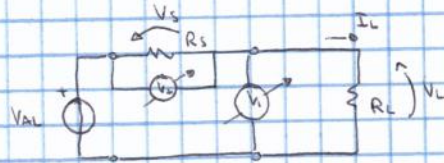
STEP VII → incertezza estesa

$$r_x = 299.96 \text{ k}\Omega$$

$$U(r_x) = 70 \Omega \quad (k_p = 2) \\ = 0.07 \text{ k}\Omega$$

ESERCITAZIONE

3) Misura di potenza in corrente continua su R_L



Non possediamo wattmetri, ma solo voltmetri

STEP 1) Modello di misura

$$P_L = V_L \cdot I_L = V_L \cdot \frac{V_S}{R_S}$$

una prima stima dell'incertenza relativa $\tilde{\epsilon}$ (con modello det.):

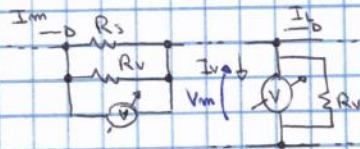
$$\epsilon_{P_L} = \epsilon_{V_L} + \epsilon_{V_S} + \epsilon_{R_S} \sim 0.0002 + 0.00015 + 0.001 = 0.00135$$

20% di
100V di
portata diviso
100V.

da cui segue che l'incertenza assoluta $\tilde{\epsilon}$:

$$\delta P_L = P_L \cdot \epsilon_{P_L} = 525 \text{ W} \cdot 0.00135 \sim 0.7 \text{ W}$$

Ma quanto influenza la R_v interna al voltmetro?



$$I_m = I_L + I_v = I_L + \frac{V_L}{R_v}$$

segue che:

$$P_L = V_m \cdot I_m = V_L \left(I_L + \frac{V_L}{R_v} \right) = V_L I_L + \frac{V_L^2}{R_v} = P_L + P_v$$

L'effetto sistematico P_v , dunque vale:

$$P_v = \frac{V_L^2}{R_v} \approx 0.25 \text{ mW}$$

Rispetto ai 525 W stimati prima $\tilde{\epsilon}$ davvero piccolo! -> TRASCURRO QUESTO

EFFETTO DI CARICO

Quindi:

$$s(\bar{v}_L, \bar{v}_S) = \frac{1}{2019} \sum_{i=1}^{20} \dots \approx 8.5 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2$$

Una stima del coefficiente di correlazione dunque sarà:

$$r(\bar{v}_L, \bar{v}_S) = \frac{s(\bar{v}_L, \bar{v}_S)}{s(\bar{v}_L) s(\bar{v}_S)} = 0.41$$

A questo punto posso valutare l'incertezza tipo di P_L a partire da:

$$U_c^2(P_L) = \left(\frac{\partial P_L}{\partial \bar{v}_L}\right)^2 U^2(\bar{v}_L) + \left(\frac{\partial P_L}{\partial \bar{v}_S}\right)^2 U^2(\bar{v}_S) + \left(\frac{\partial P_L}{\partial r_S}\right)^2 U^2(r_S) + 2 \frac{\partial P_L}{\partial \bar{v}_L} \frac{\partial P_L}{\partial \bar{v}_S} s(\bar{v}_L, \bar{v}_S) =$$

$$\approx (0.6 \text{ W})^2$$

$$U_c(P_L) = 0.6 \text{ W}$$

STEP 7) INCERTEZZA ESTESA

$k=2 \rightsquigarrow$ (livello di fiducia 95% nel caso di distribuzione di probabilità normale)

$$P_L = 525.4 \text{ W}$$

$$U(P_L) = U_c(P_L) \cdot 2 = 1.2 \text{ W}$$

Di seguito è fornito un elenco dei passi operativi che devono essere eseguiti per ottenere una stima dell'incertezza secondo i criteri del modello probabilistico.

Passo 1

Individuare il modello di misura, ossia la relazione matematica che esprime la grandezza Y che si vuole misurare (il misurando) in funzione di M grandezze X_j :

$$Y = f(X_1, \dots, X_H, X_{H+1}, \dots, X_M) \quad (1)$$

dove le prime H grandezze sono ottenute con metodi diretti a letture ripetute, mentre le altre $M - H$ grandezze sono ottenute con metodi diretti a lettura singola oppure sono fornite da terze parti, come nel caso di valori di campioni dichiarati in certificati di taratura¹.

Passo 2

Calcolare la media empirica di ciascuna grandezza ottenuta con un metodo a letture ripetute:

$$\bar{x}_j = \frac{1}{N_j} \cdot \sum_{k=1}^{N_j} x_{kj} \quad ; \quad j = 1, \dots, H \quad (2)$$

dove N_j è il numero di letture disponibili per ciascuna grandezza x_j .

Passo 3

Determinare la stima y_0 della grandezza in misura:

$$y_0 = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_H, x_{(H+1)0}, \dots, x_{M0}) \quad (3)$$

dove $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_H$ sono le medie empiriche delle grandezze X_1, \dots, X_H , mentre $x_{(H+1)0}, \dots, x_{M0}$ sono i valori centrali delle fasce assegnate come misura delle grandezze X_{H+1}, \dots, X_M .

¹Si ricorda che per una corretta applicazione del modello probabilistico, è necessario che il modello di misura (1) tenga conto di tutti gli effetti sistematici significativi.

Passo 5.2

Stimare gli altri contributi di incertezza significativi, quali, ad esempio:

- $u_{B1}(\bar{x}_j)$ legato all'incertezza dello strumento impiegato per ottenere le N_j letture;
- $u_{B2}(\bar{x}_j)$ derivante dall'incertezza di lettura, che può risultare significativa nel caso di strumenti di misura con formato di uscita analogico;
- $u_{B3}(\bar{x}_j)$ dovuto all'incertezza di quantizzazione, nel caso in cui la catena di misura comprenda un convertitore analogico/digitale;
- $u_{B4}(\bar{x}_j)$ legato all'incertezza con cui è noto un parametro impiegato per effettuare la correzione di un effetto sistematico.

I diversi contributi sono riportati con il pedice B per ricordare che si tratta di incertezze tipo stimate con metodi di categoria B.

Passo 5.3

Stimare l'incertezza tipo delle medie empiriche $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_H$ mediante la relazione:

$$u(\bar{x}_j) = \sqrt{u_A^2(\bar{x}_j) + u_{B1}^2(\bar{x}_j) + \dots + u_{B4}^2(\bar{x}_j)} \quad ; \quad j = 1, \dots, H \quad (6)$$

Passo 6

Stimare l'incertezza tipo combinata $u_c(y)$ della grandezza in misura.

Passo 6.1 (grandezze X_i statisticamente indipendenti)

Nel caso in cui le informazioni disponibili portino ad ipotizzare l'indipendenza statistica tra le stime delle variabili aleatorie in misura, l'incertezza tipo combinata $u_c(y)$ è ottenuta mediante la relazione:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^M \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i)} \quad (7)$$

Passo 6.2.1 (coefficiente di correlazione unitario)

Se le informazioni disponibili portano ad ipotizzare il massimo grado di dipendenza statistica tra due variabili aleatorie in misura, ossia se $\rho(x_j, x_l) = +1$, la relazione 8 diventa:

$$u_c(y) = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^M \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i) \right]^2} = \sum_{i=1}^M \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i) \quad (11)$$

Questa situazione si verifica, ad esempio, nel caso in cui le misure disponibili per le grandezze X_j ed X_l siano state ottenute quasi simultaneamente impiegando lo stesso strumento, che risultava configurato nella stessa funzione di misura e nella stessa portata.

Passo 7

Stimare l'incertezza estesa $U(y)$ della grandezza in misura.

Se oltre all'incertezza tipo combinata $u_c(y)$ è richiesta l'incertezza estesa $U(y)$, è necessario stimare un fattore di copertura k_p , che moltiplicato per l'incertezza tipo individua un intervallo (di fiducia) di estremi $y_0 - k_p \cdot u_c(y)$ ed $y_0 + k_p \cdot u_c(y)$, che ha probabilità p (livello di fiducia) di contenere il valore sperato della grandezza in misura Y . Il fattore di copertura k_p corrispondente al livello di fiducia p dipende dalla distribuzione di probabilità ipotizzata per la variabile aleatoria in misura.

Nella maggior parte delle applicazioni di misura, si può assumere con buona approssimazione che la variabile aleatoria in misura sia distribuita normalmente, per cui la corrispondenza tra livello di fiducia e fattore di copertura è ottenuta a partire dall'espressione della densità di probabilità gaussiana. Valori di k_p tipicamente usati nella pratica sono 2 e 3, che corrispondono rispettivamente ai livelli di fiducia del 95.4% e del 99.7% circa.

Passo 4

Stimare l'incertezza tipo delle grandezze x_{H+1}, \dots, x_M .

Poiché per queste grandezze non sono disponibili serie di letture ripetute, la stima dell'incertezza deve essere necessariamente condotta mediante metodi di categoria B, ossia ipotizzando una distribuzione di probabilità iniziale per le variabili aleatorie in gioco sulla base delle informazioni disponibili. Si ricorda tuttavia che, nel caso di grandezze ottenute mediante metodi a lettura singola, è opportuno valutare il contributo di incertezza legato alla ripetibilità del misurando. In assenza di informazioni "a priori", è consigliabile applicare almeno una volta un metodo a letture ripetute, in modo da poter stimare lo scarto tipo sperimentale della variabile aleatoria in misura:

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad (4)$$

che rappresenta il contributo di incertezza dovuto alla ripetibilità del misurando.

Passo 5

Per le grandezze ottenute mediante metodi a letture ripetute, stimare l'incertezza tipo delle medie empiriche $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_H$.

Passo 5.1

Stimare il contributo di incertezza legato alla dispersione delle letture disponibili intorno alla media empirica mediante lo stimatore "scarto tipo sperimentale della media"²:

$$u_A(\bar{x}_j) = \sqrt{\frac{1}{N_j \cdot (N_j - 1)} \sum_{k=1}^{N_j} (x_{kj} - \bar{x}_j)^2} \quad ; \quad j = 1, \dots, H \quad (5)$$

dove il pedice A indica che l'incertezza tipo è stata ottenuta applicando un metodo di categoria A.

²Stimatore efficace nel caso di campioni scorrelati.

dove $u(x_i)$ è l'incertezza tipo della generica grandezza x_i presente nella relazione (3), che è stimata applicando le opportune tecniche di trattamento dell'incertezza (categoria A e/o categoria B).

Questa situazione si può verificare, ad esempio, nel caso in cui le misure disponibili per la grandezze X_i siano state ottenute in tempi diversi e con apparecchiature diverse.

Passo 6.2 (grandezze X_i statisticamente dipendenti)

Se non risulta ragionevole ipotizzare l'indipendenza statistica tra le stime delle grandezze X_i , l'incertezza tipo combinata di y deve essere stimata mediante la seguente relazione:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^M \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{l=j+1}^M \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_l} \cdot u(x_j, x_l)} \quad (8)$$

dove il nuovo termine $u(x_j, x_l)$, detto covarianza della coppia di grandezze x_j ed x_l , esprime il grado di dipendenza statistica tra le stime delle due grandezze.

La dipendenza statistica tra due variabili aleatorie è solitamente espressa mediante un parametro adimensionale, detto coefficiente di correlazione, che è ottenuto normalizzando la covarianza rispetto al prodotto degli scarti tipo delle due variabili:

$$\rho(x_j, x_l) = \frac{u(x_j, x_l)}{u(x_j) \cdot u(x_l)} \quad (9)$$

Nel caso di grandezze statisticamente indipendenti, il coefficiente di correlazione vale zero e la relazione (8) si riduce alla (7). In tutti gli altri casi, il coefficiente di correlazione assume valori compresi tra -1 e $+1$.

Se due generiche grandezze X_j ed X_l sono state ottenute mediante metodi di misurazione a letture ripetute, ossia quando si dispone di N osservazioni delle variabili aleatorie in misura, oltre alle stime di valore sperato e scarto tipo di queste variabili, è possibile calcolare una stima della covarianza delle medie empiriche \bar{x}_j ed \bar{x}_l mediante la seguente relazione:

$$s(\bar{x}_j, \bar{x}_l) = \frac{1}{N \cdot (N - 1)} \sum_{i=1}^N (x_{ji} - \bar{x}_j) \cdot (x_{li} - \bar{x}_l) \quad (10)$$