NUMERO: 2084A - ANNO: 2017

A P P U N T I

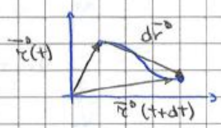
STUDENTE: Massara Andrea

MATERIA: Fisica I Riassunti - prof. Scalerandi

CINEMATICA

- VETTORE SPOSTAMENTO

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$
$$d\vec{r} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)$$



- SPAZIO PERCORSO

Δs = traiettoria (m) percorsa tra t e t+Δt
ds = " (m) " " " " t+dt

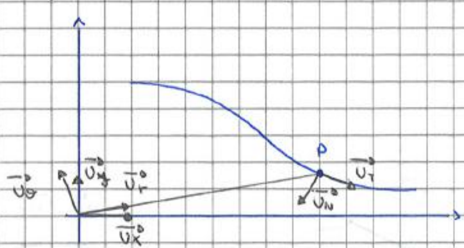
dividendo l'intervallo Δs in intervalli sempre + piccoli, noto che la curva tende ad uniformarsi alla corda ($\Delta\vec{r}$):

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \Delta s \sim \lim_{\Delta t \to 0} \|\Delta \vec{r}\| \qquad ds \sim dr}$$

inoltre diminuendo Δt noto che la direzione di $\Delta\vec{r}$ tende a uniformarsi con la tg nel punto della curva:

$$\text{se } \Delta t \to 0 \quad \begin{cases} ds \sim \|d\vec{r}\| \simeq dr \\ d\vec{r} = \vec{u}_T \end{cases} \Rightarrow \boxed{d\vec{r} = ds\, \vec{u}_T}$$

- SISTEMI DI RIFERIMENTO



- VELOCITÀ

"Grandezza vettoriale che definisce la variazione del vettore posizione nel tempo"

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Sistema intrinseco)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v_T}\vec{u}_T$$

(1 COMPONENTE)

la velocità è sempre tg la traiettoria e il suo modulo corrisponde alla derivata dello spazio percorso nel tempo.

• MOTI 1D

Traiettoria su di un asse (x se è comodo)

$\vec{v}(t) = v_x \vec{u}_x = x$

$\vec{v} = v_x \vec{u}_x = v$ $\rightsquigarrow$ LAVORO SU SCALARI, NO VETTORI!

$\vec{a} = a_x \vec{u}_x = a$

Galileo affermava infatti che qualsiasi moto a + dimensioni fosse scomponibile in una somma finita di moti 1D, ognuno indipendente dagli altri, a patto che questi non avessero fra loro componenti interagenti o dipendenti, ovvero che le componenti di un asse non fossero dipendenti da quelle di un altro asse

① MOTO UNIF. ACCELERATO

$\boxed{a = \text{costante}}$ (ho due CI)

I STEP) $dv = a\,dt \rightsquigarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt \rightsquigarrow v = v_0 + a(t-t_0)$

II STEP) $dx = v\,dt \rightsquigarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt = \int_{t_0}^{t} v_0 + a(t-t_0)\,dt$

$\rightsquigarrow x = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2$

$$\boxed{x = x_0 + v_0\,\Delta t + \frac{1}{2}a\,\Delta t^2}$$

② MOTO RETTILINEO SMORZATO ESPONENZIALMENTE

$\boxed{a = -k\,v}$ (ho due CI)

risolvo per variabili separabili

I STEP) $\frac{dv}{dt} = -kv \rightsquigarrow \frac{dv}{v} = -k\,dt \rightsquigarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int_{t_0}^{t} dt \rightsquigarrow \ln(v/v_0) = -k(t-t_0)$

$$\boxed{v = e^{-k(t-t_0)} \cdot v_0}$$

II STEP) $dx = v\,dt$

$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt = \int_{t_0}^{t} e^{-k(t-t_0)}\,v_0\,dt$

$$\boxed{x = -\frac{v_0}{k}\,e^{-k(t-t_0)} + x_0}$$

③ MOTO ARMONICO

$\boxed{a = -\omega^2 x}$ (ho due CI)

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \rightsquigarrow x = A\cdot\cos(\omega t + \varphi)$

$v = \frac{dx}{dt}$ e $a = \frac{dv}{dt}$

A e φ le trovo con le condizioni iniziali!

DINAMICA

2

Le accelerazioni nascono da forze che spostano masse. Nella dinamica del punto si analizzano corpi con dimensioni (lunghezza, altezza e larghezza) trascurabili rispetto agli spostamenti in gioco. Nascono dei principi (= aff. ritenute valide finchè un esperimento non le contraddirà).

1° PRINCIPIO: "Un corpo mantiene il suo stato di moto rettilineo uniforme se non ci sono cause esterne che ne modificano lo stato; in assenza di queste continuerà ad avere $\|\vec{v}\| =$ costante"

$$\boxed{\text{no cause} \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = \text{cost.}}$$

2° PRINCIPIO: "La risultante (vettoriale) delle forze è direttamente proporzionale, per un corpo di massa costante, all'accelerazione"

$$\boxed{\sum \vec{F_i} = \vec{R} = m \cdot \vec{a}}$$

- se $\vec{F} = \phi$ oppure se $\vec{a} = \phi$ ritroviamo il I PRINCIPIO:

$$\begin{cases} \vec{F} = \phi \Rightarrow \vec{a} = \phi \rightsquigarrow \vec{v} = \text{costante} & \text{in modulo (uniforme)} \\ & \text{in direzione (rettilineo)} \\ \vec{a} = \phi \rightsquigarrow \text{----} \end{cases}$$

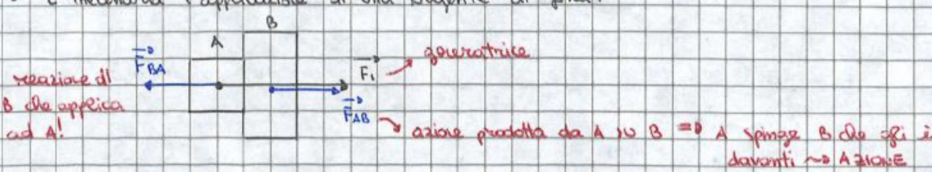
- $\vec{F} = m\vec{a} = m\left(a_T \vec{U_T} + a_N \vec{U_N}\right) = \underbrace{F_T}_{m\frac{dv}{dt}} \vec{U_T} + \underbrace{F_N}_{= m\frac{v^2}{R}} \vec{U_N}$

$$\begin{cases} \|\vec{v}\| = \text{costante} \rightsquigarrow F_T = \phi,\ F_N \neq 0 \Rightarrow \vec{F} \neq 0 \\ a_N = \phi \rightsquigarrow R \to \infty \text{ oppure } v = \phi \text{ quindi caso di moto rettilineo o particella ferma} \end{cases}$$

3° PRINCIPIO: "Se un corpo A esercita una forza su un corpo B allora il corpo B esercita a sua volta una forza sul corpo A uguale e contraria"

$$\boxed{\vec{F_{AB}} = -\vec{F_{BA}}}$$

- È necessaria l'applicazione di una sorgente di forza!



- $\vec{a_A} \parallel \vec{a_B}$ ma in generale $\neq$ in modulo $\rightsquigarrow$ solo se $m_A = m_B$ allora $-\vec{a_A} = \vec{a_B}$
- $\vec{F_{AB}}$ e $\vec{F_{BA}}$ agiscono nella stessa retta di azione!

⇒ LA MASSA DESCRITTA NEL SECONDO PRINCIPIO È UNA MASSA INERZIALE E CIOÈ TALE DA FUNGERE DA RESISTENZA ALLE FORZE E ALLE VARIAZIONI DI MOTO DEL CORPO!

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a}\uparrow \text{ se e solo se } \vec{F}\uparrow$$

- caso unidimensionale

$$dW = F\,dx \quad \rightsquigarrow \quad W = \int_{t_0\,\gamma}^{t} F\,dx \quad \Rightarrow \text{ se } F = \text{cost.} \rightsquigarrow \quad W = F\Delta x$$

non è + necessario metterlo! Caso unico!

- energia cinetica

$$dW = \vec{F}\,d\vec{r}$$

$$W = \int_{t_0\,\gamma}^{t} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{\vec{r_1}\,\gamma}^{\vec{r_2}} F_t\,ds = \int_{\vec{r_1}\,\gamma}^{\vec{r_2}} m\,a_T\,ds = \int_{\vec{r_1}\,\gamma}^{\vec{r_2}} m \cdot \frac{dv}{dt}\,ds$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} m\,v\,dv = m \int_{v_1}^{v_2} v\,dv \quad \text{se } m = \text{costante}$$

NB: $K > 0$ sempre!

$$W = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta K$$

$\boxed{W = \Delta K}$ ⇒ TEOREMA ENERGIA-LAVORO
L'effetto di una forza è di produrre un lavoro dunque una variazione di energia cinetica.

W = energia scambiata
K = " posseduta

- FORZE FISICHE

Storia: 1° CONCETTO : forza ~ contatto
2° " : forza ~ interazione a distanza
3° " : forza ~ campo
4° " : forza ~ spazio-tempo (relatività)

1) FORZA GRAVITAZIONALE

MOD: dirett. prop alle masse e inv. prop. al quadrato della distanza
DIR: lungo la retta congiungente le masse
VERSO: repulsivamente

$$\boxed{\vec{F_G} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u_r}}$$

se per azione 1 tira 2, per reazione uguale e opposta 2 tira 1!

$$\vec{F_m} = -\underbrace{\gamma \frac{M_T}{R_T^2}}_{g} m_2 \vec{u_r} = -m_2 \cdot g\,\vec{u_r}$$

è la forza peso agente ∀ corpo sulla terra per effetto della forza gravitazionale

2) REAZIONE VINCOLARE

MOD: tale da garantire equilibrio (sempre ≥ 0)
DIR: ⊥ alla superficie di vincolo
VERS: uscente da essa

• FORZE CONSERVATIVE

- LAVORO
- FORZE CONSERVATIVE E PROPRIETÀ
- ENERGIA MECCANICA

Si era definito $W = \int_{t_0\,\gamma}^{t} \vec{F}\, d\vec{r} \rightsquigarrow W(\gamma)$! Generalmente $W(\gamma_1) \neq W(\gamma_2)$! Vediamo cosa succede per le varie forze:

1) ATTRITO

$$W = \int_\gamma \underbrace{\ominus F_{att}\, \vec{u}_T}_{\vec{F}_{att}} \, d\vec{r} = -F_{att} \int_\gamma ds = -F_{att} \cdot \ell_\gamma$$

opposto a SR

se $\gamma_1 \neq \gamma_2$ allora $\ell_{\gamma_1} \neq \ell_{\gamma_2}$ e quindi non c'è conservazione! $W_{\gamma_1} \neq W_{\gamma_2}$

2) PESO

opposto a SR

$$W = \int_\gamma \underbrace{\ominus F_p \cdot \vec{u}_z}_{\vec{F}_p} \, d\vec{r} = -mg \int_{\gamma\, z_A}^{z_B} dz = -mg\, \Delta z$$

se $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ma Δz è uguale c'è conservazione $W_{\gamma_1} = W_{\gamma_2}$

3) FORZA ELASTICA

$$W = \int_\gamma -F_{el} \cdot \vec{u}_{\Delta x}\, d\vec{r} = -k \int_{\gamma\, x_A}^{x_B} x\, dx = -\frac{1}{2} k \left(x_B^2 - x_A^2 \right)$$

se $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ma x_B e x_A uguali c'è conservazione $W_{\gamma_1} = W_{\gamma_2}$

Si definisce allora una forza conservativa:

"Forze per cui il lavoro non dipende dalla traiettoria ma solo dalle posizioni iniziali e finali"

A=B

$W_{AB} = \phi\ \forall \gamma$

$W_{AB_{\gamma_1}} = -W_{BA_{\gamma_1}}$

• ENERGIA POTENZIALE

Variabile scalare funzione della posizione e definibile solo per forze conservative

$$\boxed{dE = -dW} \qquad \text{integrando} \quad \Delta E = -W$$

abbiamo definito $dE\ (\Delta E)$, non E! Ho ∞ possibili E che soddisfano all'equazione data in forma differenziale e che si differenziano per una sola costante.

1) PESO

$$W = -mg \cdot (h_B - h_A) \rightsquigarrow \Delta E = mg\, \Delta h \rightsquigarrow E_p = mg\, h_p \quad (\text{scelto SR})$$

2) FORZA ELASTICA

$$W = -\frac{1}{2} k \cdot (x_B^2 - x_A^2) \rightsquigarrow \Delta E = \frac{1}{2} k (x_B^2 - x_A^2) \rightsquigarrow E_p = \frac{1}{2} k\, x_p^2 \quad (\text{scelto SR})$$

$\Rightarrow$ Fisicamente l'energia potenziale è l'energia che un corpo possiede per il fatto che si trova in una certa posizione!

$$dE = -dW = -\vec{F}\, d\vec{r} \rightarrow \vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y + F_z \vec{u}_z$$
$$\rightarrow d\vec{r} = dx\, \vec{u}_x + dy\, \vec{u}_y + dz\, \vec{u}_z$$
$$\Rightarrow dE = \frac{\partial E}{\partial x} dx + \frac{\partial E}{\partial y} dy + \frac{\partial E}{\partial z} dz \rightsquigarrow \boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} E}$$

Esempio delle guide circolari:

$N \perp d\vec{r} \rightsquigarrow W_N = \phi \rightsquigarrow$ ho solo forze conservative, dunque conservo E_M

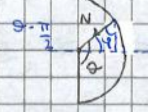
trovare $v(\theta)$:

$K_i = \frac{1}{2} m v_0^2$ $\qquad K_f = \frac{1}{2} m v_f^2$

$E_{p_i} = \phi$ $\qquad E_{pf} = mg \cdot R(1-\cos\theta)$

trovo $v_f(\theta)$

Bisogna però verificare che ci sia contatto della massa per $\theta > \frac{\pi}{2}$:



$\varphi = \frac{\pi}{2} - \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \pi - \theta$

CENTR: $+N + mg \cdot \cos(\pi - \theta) = + m \frac{v^2}{R}$

$N = \frac{mv^2}{R} - mg\cos(\pi - \theta)$ la condizione è dunque che:

$m\frac{v^2}{R} - mg\cos(\pi - \theta) \geq 0$

- MOMENTO ANGOLARE

$M_v = \vec{b} \times \vec{v} = \|\vec{b}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$

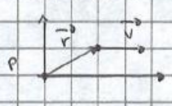
$d = b \cdot \sin(\pi - \theta) = b \cdot \sin\theta$

$\Rightarrow \boxed{M_v = d \cdot v}$

il momento angolare è il momento del vettore quantità di moto:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{b} \times \vec{q}}$$

CASO A: $P = \phi$



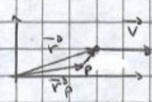
$\vec{r} \equiv \vec{b}$

$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$= \vec{r} \times m(v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta)$

$= \vec{r} \times m\vec{v}_\theta$

CASO B: $P \neq 0$



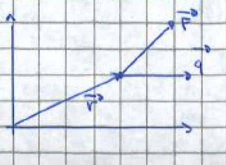
$\vec{b} = \vec{r} - \vec{r}_P$

$\vec{L}_{P\neq 0} = (\vec{r} - \vec{r}_P) \times m\vec{v}$

$= L_{P=\phi} - \vec{r}_P \times m\vec{v}$

- MOMENTO DELLA FORZA

$$\boxed{\vec{M} = \vec{b} \times \vec{F}}$$

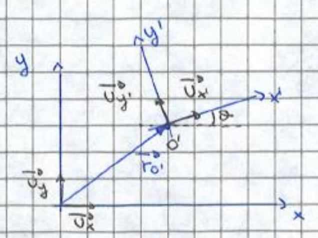


se scelgo $P = \phi$ allora posso legare i due momenti con un teorema, detto del momento angolare:

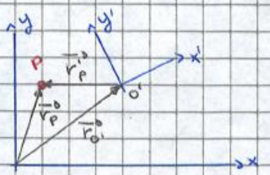
$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

MOTI RELATIVI (da voto alto)

$$\begin{cases} SR \text{ fisso} \\ SR' \text{ in moto} \end{cases}$$



Definiamo le nuove grandezze e le relazioni tra i 2 SR:



$$\vec{r_p'} = \vec{r_p} - \vec{r_{o'}}$$

$$\vec{r_p} = r_x \vec{u_x} + r_y \vec{u_y} + r_z \vec{u_z}$$

$$\vec{r_p'} = r_x' \vec{u_x'} + r_y' \vec{u_y'} + r_z' \vec{u_z'}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r'} + \vec{r_{o'}}$$

① MOTO DI PURO TRASCINAMENTO

$$\theta(t) = \theta_0 = \text{costante}$$

- velocità:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r'} + \vec{r_{o'}}\right) = \frac{d\vec{r'}}{dt} + \frac{d\vec{r_{o'}}}{dt} = \vec{v'} + \vec{v_{o'}}$$

- accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ldots\ldots = \vec{a'} + \vec{a_{o'}}$$

② MOTO DI ROTO-TRASLAZIONE

$$\begin{cases} \theta = \theta(t) \\ r = r(t) \end{cases}$$

WARNING! ATTENZIONE AL SR IN CUI EFFETTUO LE DERIVATE!

- posizione:

$$\vec{r}(t) = \vec{r'}(t) + \vec{r_{o'}}(t)$$

- velocità:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r'}}{dt} + \frac{d\vec{r_{o'}}}{dt} = \vec{v'} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r'}}_{\text{contributo che nasce per effetto della precessione}} + \vec{v_{o'}}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'} + \vec{v_{o'}}}$$

- accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'} + \vec{v_{o'}}\right) = \vec{a'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r'}}{dt} + \vec{a_{o'}} = \ldots =$$

$$= \vec{a'} + \vec{\gamma} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r'} + 2\vec{\omega} \times \vec{v'} + \vec{a_{o'}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a'} + \vec{\gamma} \times \vec{r'} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r'}}_{\text{ACC. CENTRIFUGA: per il fatto che il corpo gira}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v'}}_{\text{ACC. CORIOLIS}} + \vec{a_{o'}}}$$

Per semplicità:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a_T} + \vec{a_{cor}}}$$

dove $\vec{a_T} = \vec{\gamma} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r'} + \vec{a_{o'}}$

DINAMICA DEI SISTEMI

Sistema = insieme di N masse puntiformi aventi vita propria indipendente

∀ m_i posso definire tutte le variabili ($\vec{r_i}$, $\vec{v_i}$, ..., $\vec{q_i}$, $\vec{L_i}$, ...)

∀ m_i vuol dire conoscere traiettoria e accelerazione nello spazio, che inerdo 3D, richiede 3 gradi di libertà, dunque 3 equazioni. Ho oltre a $\vec{F_i} = m\vec{a_i}$ non ho altro perché $\vec{L_i}$, $\vec{q_i}$ o $\vec{M_i}$, se posto da $\vec{F_i}$, non danno oltre info.

Utilizzo l'approccio di sistema!

- $M = \sum_i^N m_i$
- $\vec{r_{CM}} = \frac{1}{M} \sum_i^N \vec{r_i}\, m_i$
- $\vec{v_{CM}} = \frac{d\vec{r_{CM}}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i^N \vec{v_i}\, m_i$
- $\vec{a_{CM}} = \frac{d\vec{v_{CM}}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i^N \vec{a_i}\, m_i$
- $\vec{F} = \sum_i^N \vec{F_i}$ $\quad$ $\vec{F_i}$ è la risultante delle $\vec{F}$ agente ∀ m_i

  dal momento che $\vec{F_i} = \vec{F_i^E} + \vec{F_i'}$, ma per azione-reazione le $\vec{F_i'}$ si annullano a due a due, devo considerare la relazione come:

  $$\vec{F} = \sum_i^N \vec{F_i^{EXT}}$$

  Nel sistema vale ancora la legge di Newton:

  $$\boxed{\vec{F} = M \cdot \vec{a_{CM}}}$$

  in questo senso il sistema è trattabile come un punto materiale di massa M!

- $\vec{q} = \vec{q_{CM}} = M \cdot \vec{v_{CM}}$ ⇝ $\vec{q} = \sum \vec{q_i} = \sum m_i \vec{v_i} = M \frac{\sum m_i v_i}{M} = M\vec{v_{CM}}$ ⇝ La $\vec{q}$ del sistema coincide con la $\vec{q}_{CM}$ del punto fittizio CM

  Inoltre:

  $$\frac{d\vec{q_i}}{dt} = \vec{F_i} \rightsquigarrow \sum \vec{F_i} = \sum \frac{d\vec{q_i}}{dt} \rightsquigarrow \boxed{\vec{F}_{EXT} = \frac{d\vec{q_{CM}}}{dt}} \rightsquigarrow \text{I LEGGE CARDINALE}$$

- $\vec{L} = \sum \vec{L_i} = \sum \vec{b_i} \times \vec{q_i} \neq \vec{L_{CM}}$ *

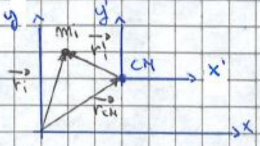
  Dal momento che $\vec{q} = \vec{q_{CM}}$ e $\vec{L} \neq \vec{L_{CM}}$, questo indica l'assoluta indipendenza di $\vec{L}$ e $\vec{q}$ in un sistema di punti, a ≠ di quanto accade per il punto materiale

- $\vec{M} = \sum \vec{M_i}$

  se considero P=0 allora tutti i $\vec{b_i} = \vec{r_i}$ e poiché anche qui i $\vec{M_i}'$ si annullano a due a due per azione reazione, ottengo:

  $$\vec{M} = \sum \vec{M^{EXT}} \quad \text{e che} \quad \boxed{\vec{M}_{EXT} = \frac{d\vec{L^0}}{dt}} \rightsquigarrow \text{II LEGGE CARDINALE per } P = \emptyset$$

NB Caso particolare di S'R' con $O' \equiv CM$ e assi $\parallel$ a quelli di SR:



- $O' = CM \rightsquigarrow \vec{v}_{O'} \equiv \vec{v}_{CM}$, $\vec{a}_{O'} \equiv \vec{a}_{CM}$
- $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_{CM}$

A) In S'R':

$$\vec{r}'_{CM} = \phi \rightsquigarrow \vec{v}'_{CM} = \phi \rightsquigarrow \vec{a}'_{CM} = \phi$$

B) S'R' non è inerziale e perciò:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} = \vec{a}' + \vec{a}_{CM}$$

c) In SR:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{CM} \quad \text{, quindi} \quad \vec{q} \neq \vec{q}_{CM}$$

Ma se scelgo $P = CM$, cosa succede ad $\vec{L}'$?

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{b}_i \times \vec{q}_i = \sum \vec{r}_i' \times (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM})\, m_i$$
$$= \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{CM}$$
$$= \vec{L}' + \underbrace{\left(\sum \vec{r}_i' m_i\right)}_{=\phi \text{ perché si è detto prima che } \vec{r}'_{CM} = \phi} \times \vec{v}_{CM}$$
$$= \vec{L}' + \phi$$

$$\boxed{\text{se e solo se } P = CM = \phi \rightsquigarrow L = L'}$$

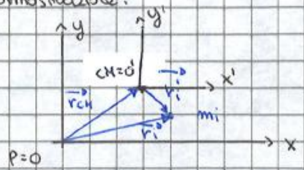
- TEOREMI DI KONIG

Vogliono fare in modo di definire $\vec{L}\,(\vec{L}_{CM})$ e $K\,(K_{CM})$:

1° KONIG)

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}'}$$

Dimostrazione:



$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_{CM}$ e derivando $\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{v}_{CM}$

$$\vec{L}_{CM} = \sum \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM}$$
$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$
$$\vec{L}' = \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum (\vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM})$$
$$= \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \underbrace{\cancel{\sum \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i'}}_{\to 0 \text{ perché } \sum m_i \vec{v}_i' = \vec{v}'_{CM} M = \phi} + \underbrace{\cancel{\sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{CM}}}_{\to 0 \text{ perché } \sum \vec{r}_i' m_i = M \vec{r}'_{CM} = \phi} + \sum \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM}$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_{CM}} \quad \text{cvd}$$

URTI FRA PARTICELLE

Un sistema di $N=2$ particelle per cui l'interazione dura $\Delta t \to 0$

Cosa posso dire?

- $\Delta t \to 0$ e $\vec{F}^{EXT} \sim$ costante $\Rightarrow \Delta\vec{q} = \phi$ a meno che $\vec{F}^{EXT} \to \infty$ $\left(\vec{F}^{EXT} = \frac{\Delta\vec{q}}{\Delta t} \right)$

$\Delta\vec{q}$
- Quando l'urto NON è VINCOLATO posso dire che $\Delta\vec{q} = \phi$ e questo può essere garantito distintamente lungo le 3 componenti cartesiane
- Quando l'urto è VINCOLATO invece il vincolo agisce da forza esterna e dunque $\Delta\vec{q} \neq \phi$

- $\Delta K = W^{INT} \neq \phi$ $\rightsquigarrow$ ora le $\vec{F}^{INT} = \vec{F}^{CONTATTO}$ sono importanti

  $\Delta K \leq 0$ perché nell'urto viene dissipata energia

NOTA: $F_{MEDIO_C} = \frac{\Delta q_i}{\Delta t}$

Casi notevoli:

① URTO ELASTICO

$N=2$ prima $N=2$ dopo

- $\Delta K = \phi$
- $\Delta q = \phi$ se non ci sono vincoli

② URTO ANAELASTICO

- $N=2$ prima $N=1$ dopo
  - $\Delta q = \phi$ in assenza di vincoli

- $N=1$ prima $N=2$ dopo (esplosione)

6

$\Rightarrow$ $\vec{r}_{CM}$ è costante $\rightsquigarrow$ ϕ gradi di libertà
$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ $\rightsquigarrow$ 3 " " "
$\Rightarrow$ STUDIO SOLO $\vec{L}$

② TRASLAZIONE $\rightarrow$ VARIO $\vec{u}_x, \vec{u}_y$ e $\vec{u}_z$

$\forall P$ del corpo rigido avrà uguale traiettoria, velocità e accelerazione!

$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} = \vec{v}_{TRASL}}$

$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_{CM} = \vec{a}_{TRASL}}$

NB $\vec{L}' = \phi$ se s.r.' ha $O' = CM$
$\vec{L} = \vec{L}_{CM}$

$\Rightarrow$ $\vec{\alpha}$ è costante $\rightsquigarrow$ ϕ gradi di libertà
$\vec{r}_{CM} = \vec{r}_{CM}(t)$ $\rightsquigarrow$ 3 " " "
$\Rightarrow$ STUDIO SOLO $\vec{q}$

③ ROTO-TRASLAZIONE

$$\begin{cases} \text{rotazione} \rightsquigarrow \vec{V}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{R}_{CM} \\ \text{traslazione} \rightsquigarrow \vec{V}_P = \vec{V}_{CM} = \vec{V}_{TRASL} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{CM} = \vec{V}_{TRASL} + \vec{\omega} \times \vec{R}_{CM}}$$

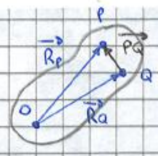
con opportuni casi particolari posso ricondurmi a casi semplificati

$\Rightarrow$ $\vec{r}_{CM} = \vec{r}_{CM}(t)$ $\rightsquigarrow$ 3 gradi di libertà
$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ $\rightsquigarrow$ " " " "
$\Rightarrow$ STUDIO $\vec{L}$ e $\vec{q}$ che sono ben distinti

Al variare di γ vengono descritte traiettorie $\neq$ da CM ma ci sono aspetti che devono restare costanti e indipendenti da tale scelta, quali:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \rightsquigarrow \text{TEMPI UGUALI} \Rightarrow \text{ANGOLI UGUALI}$$

Dimostrazione:



A) $\gamma \equiv O$ e $\perp$ foglio:
- $\vec{V}_P = \vec{V}_{TR} + \vec{\omega} \times \vec{R}_P$
- $\vec{V}_Q = \vec{V}_{TR} + \vec{\omega} \times \vec{R}_Q$
- $\vec{V}_O = \vec{V}_{TR}$

ma $\vec{V}_P - \vec{V}_Q = \cancel{\vec{V}_{TR}} + \vec{\omega} \times \vec{R}_P - \cancel{\vec{V}_{TR}} - \vec{\omega} \times \vec{R}_Q = \vec{\omega} \times (\vec{R}_P - \vec{R}_Q) = \vec{\omega} \times (\vec{PQ})$

$\rightsquigarrow$ $\vec{V}_P = \vec{V}_Q + \vec{\omega} \times \vec{PQ}$

B) $\gamma' \equiv Q$ e $\perp$ foglio:
- $\vec{V}_P = \vec{V}_{TR}' + \vec{\omega}' \times \vec{PQ}$
- $\vec{V}_Q = \vec{V}_{TR}'$
- $\vec{V}_O = \vec{V}_{TR}' + \vec{\omega}' \times \vec{OQ}$

In definitiva:

$$\begin{cases} \vec{V}_P = \vec{V}_Q + \vec{\omega} \times \vec{PQ} \\ \vec{V}_P = \vec{V}_{TR}' + \vec{\omega}' \times \vec{PQ} \end{cases}$$

per confronto dato che $\vec{V}_Q = \vec{V}_{TR}'$ ottengo $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$

(cvd)

C) MOMENTO D'INERZIA

$$I_\gamma = \int_V R^2 \, dm \qquad \Rightarrow \quad I_\gamma \neq I_{\gamma'} \text{ in generale}$$

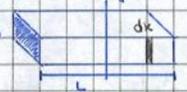
$$I_{\gamma'} = \int_V R'^2 \, dm$$

Dal momento che per le pure rotazioni posso esprimere $I = \frac{M}{\alpha}$, posso dire che il significato fisico del momento d'inerzia è quello di fungere da resistenza ai cambiamenti di moto rotazionale del corpo rigido (parallelismo con il significato fisico della massa)

Esempi di calcolo di momento:

scelto γ devo:
- definire dei dV come distanza R da γ
- calcolo $\int \rho R^2 dV$
- somma = integro

1) SBARRA RIGIDA SOTTILE OMOGENEA ($\gamma \equiv CM$)

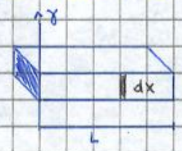


$\gamma \equiv CM$

- Prendo un dx ($\to 0$) $\rightsquigarrow$ $dV = S \cdot dx$
- $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{S \cdot L}$
- $I = \int_V \rho R^2 dV = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{m}{\cancel{S}L} x^2 \cdot \cancel{S} \, dx = \frac{m}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{m}{L}\left(\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{24}\right)$

$$\boxed{I = \frac{1}{12} m L^2}$$

2) SBARRA RIGIDA SOTTILE OMOGENEA ($\gamma \equiv$ estremo)



- Prendo un dx ($\to 0$) $\rightsquigarrow$ $dV = S \cdot dx$
- $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{S \cdot L}$
- $I = \int_V \rho R^2 dV = \int_0^L \frac{m}{\cancel{S}L} \cdot x^2 \cancel{S} \, dx = \frac{m}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = m \cdot \frac{L^2}{3}$

$$\boxed{I = \frac{1}{3} m L^2}$$

3) CILINDRO OMOGENEO DI RAGGIO R E ALTEZZA h ($\gamma \equiv$ asse cilindro)

$\begin{cases} \text{cilindro nero ha raggio } r \\ \quad\text{" rosso " " } r+dr \end{cases}$

- $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 \cdot h}$
- prendo lo spazio fra r e $r+dr$ $\rightsquigarrow$ $dV = dV^{ext} - dV^{int} = \pi (r+dr)^2 h - \pi (r)^2 h$

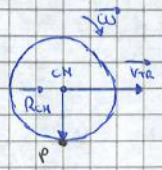
  $dV = \cancel{\pi r^2 h} + 2\pi r h \, dr + \underbrace{\pi dr^2 h}_{\text{inf. di ordine sup.}} - \cancel{\pi r^2 h} = 2\pi r h \, dr$
- $I = \int_V \rho R^2 dV = \int_0^R \frac{m}{\pi R^2 \cancel{h}} \cdot r^2 \cdot 2\pi r \cancel{h} \, dr = \int_0^R \frac{2 m r^3}{R^2} dr = \frac{2m}{R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{1}{2} m R^2$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} m R^2}$$

(D) ROTOLAMENTO

7

È la rototraslazione di un corpo rigido a simmetria sferica su un piano e con un punto P di contatto istantaneo e tale che $v_P = \phi$



$\gamma \perp$ foglio e $\equiv$ CM

$$\vec{v_P} = \vec{v_{TR}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{R_{CM}}}_{-\omega R} = \phi$$

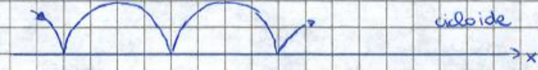
$$\boxed{v_{TR} = \omega R_{CM}}$$

Nel caso preso in esame $v_{CM} = v_{TR} = \omega R$

Se sono legate le velocità lo sono anche le accelerazioni ed ecco che $\boxed{a_{TR} = \gamma R_{CM}}$

Che traiettorie hanno i punti?

• P)



$\vec{v_P} \neq$ cost.

• CM)

$\vec{v_{CM}} =$ cost

Importante proprietà nel rotolamento:

• Energia cinetica

Il teorema di Konig afferma che:

$$K = K' + K_{CM}$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

ma poiché ora $\omega R = v_{CM}$:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (I_{CM} + mR^2) = \frac{1}{2} \omega^2 I_P$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I_P \omega^2}$$

Dal punto di vista dell'energia cinetica il corpo si dovrebbe comportare come una rototraslazione attorno a CM, ma si comporta come una rotazione attorno a P.

PRATICA CORPO RIGIDO:

(1) EQUILIBRIO

• $\gamma = \forall$
• $\vec{M} = \phi$
• $\vec{F} = \phi$

(2) MOTO LIBERO

• $\gamma = CM$
• $\vec{L} = \vec{L_{CM}} = I \vec{\omega}$
• $\vec{\Delta L} = \int \vec{M}\, dt = \vec{M} \Delta t$ se $M =$ cost.
• $\vec{\Delta q} = \int \vec{F}\, dt = \vec{F} \Delta t$ se $F =$ cost.
• $K = K_{CM} + K_{ROT}$
• $W = W_{CM} + W_{ROT} = \int \ldots + \int \ldots$
• conservo le energie

(3) MOTO VINCOLATO

• $\gamma = V$
• $\vec{L} = \vec{L_{STEINER}} = I_{ST} \vec{\omega}$
• $\vec{\Delta L} = \int \vec{M}\, dt = \vec{M} \Delta t$ se $M =$ cost
• q è inutile
• $K = K_{ROT}$
• $W = W_{ROT}$
• Calcolo dei vincoli:
  • $\vec{M} = I_{ST} \vec{\alpha}$
  • $\vec{F} = m \vec{a_{CM}}$ → $a_{TG} = \alpha R$; $a_{CEN} = -m\omega^2 R$

(4) URTI VINCOLATI

• $\gamma = V$
• $\Delta q = J_V$
• $\Delta L = \phi$

(5) URTI NON VINCOLATI

• $\gamma = CM$
• $\Delta q = \phi$
• $\Delta L = \phi$

Deduco infine che:

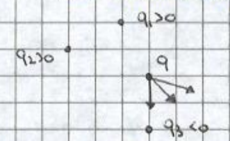
$$F_{T,S} = \frac{\text{costante}}{r^2} = \gamma \frac{m_T m_S}{r^2}$$

$$\gamma \cancel{m_T} m_S = \cancel{m_T} \cdot (2\pi)^2 \frac{1}{K_T} \rightarrow \gamma = \frac{4\pi^2}{m_S K_T} = \text{costante}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{T,S} = \underbrace{-\gamma \cdot \frac{m_T m_S}{r^2}}_{\text{moto dalla III legge di Keplero}} \underbrace{\vec{u}_r}_{\text{moto da prima e seconda legge}}}$$

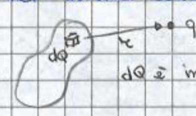
- se non lavoro con oggetti puntiformi: FORZE ANCORA CONSERVATIVE MA NON CENTRALI

nel sistema discreto:



$$\vec{F}_q = \sum \vec{F}_{e_i} = \sum \frac{q q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

nel sistema continuo (CR):



dQ è infinitesimo dunque puntiforme!

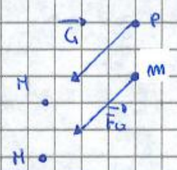
$$dQ \rightarrow d\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dQ \cdot q}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{F}_q = \int_V d\vec{F}_q = \int_V \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dQ\, q}{r^2} \vec{u}_r \right) = \int_V \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \rho\, dV \vec{u}_r \right)$$

complessivamente non c'è forza centrale

(B) CAMPO

M e Q sono sorgenti. m e q sono sonde! Le sole sorgenti, cause fisiche dell'interazione, non creano da sole le forze ma distribuiscono delle FORZE POTENZIALI nello spazio, che dunque saranno sentite data la presenza di un CAMPO



$$\boxed{\vec{F}_G = m \vec{G}}$$

+Q campo uscente
-Q " entrante

+q forza uscente
-q forza entrante

$$\boxed{\vec{F}_e = q \vec{E}}$$

M puntiforme: $\vec{G} = -\gamma \cdot \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$

M non puntiforme: $\vec{G} = \frac{\vec{F}_G}{m} = \frac{1}{\cancel{m}} \sum -\gamma \frac{\cancel{m}\, m_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i} = \sum \vec{G}_i$

$\vec{F}_G$ è // e concorde a $\vec{G}$

Q puntiforme: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$

Q non puntiforme: $\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} = \frac{1}{\cancel{q}} \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cancel{q}\, q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i} = \sum \vec{E}_i$

$\vec{F}_e$ è // a $\vec{E}$ ma non sempre concorde

C) ENERGIA e TRAIETTORIA

Trattazione nel caso elettrostatico

$\vec{G} \parallel \vec{F_G} \rightsquigarrow \vec{F_G} \parallel \vec{a_G} \rightsquigarrow \vec{G} \parallel \vec{a_G}$ ma $\vec{a_G}$ è slegato da $\vec{r_G}$ perché se così non fosse il corpo in collasserebbe sulla sorgente.

Ciò che si fa è pertanto introdurre la MASSA RIDOTTA, quantità che, tenendo conto delle forze apparenti nel sistema non inerziale $S'R'$, permette di validare ancora una volta Newton:

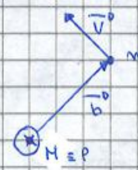
$$\begin{cases} \vec{F_G} = m\,\vec{a_m} \\ -\vec{F_G} = M\,\vec{a_M} \end{cases} \rightsquigarrow \vec{a_M} \neq \vec{a_m} \rightsquigarrow \vec{a'} = \vec{a_m} - \vec{a_M} \Longrightarrow \vec{F_G} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\vec{a'}$$

$$\boxed{\mu = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}}$$

- Energia:

$$\begin{cases} E_{MECC} = K + E & \gtrless 0 \\ K = \frac{1}{2}\mu v^2 & \geq 0 \\ E = -\gamma \frac{mM}{r} & \leq 0 \end{cases}$$

- Momento angolare:



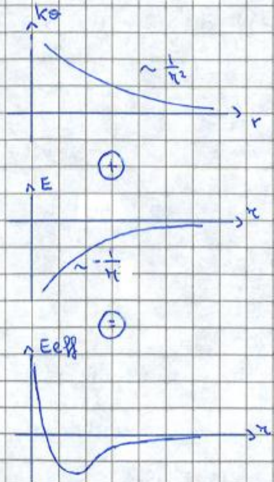
se $P \equiv M$ allora $\vec{b} \equiv \vec{r}$ $\rightsquigarrow$ $\vec{L} = \vec{r} \times \mu(\vec{v_r} + \vec{v_\theta}) = r\mu v_\theta$ = costante

solo componente trasversale

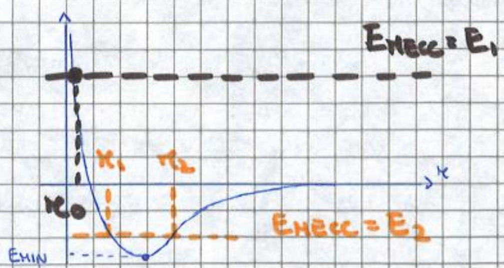
$\Longrightarrow$ l'energia cinetica e meccanica è dunque definibile come:

$$K = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu(v_r^2 + v_\theta^2) = \frac{1}{2}\mu v_r^2 + \frac{1}{2}\mu v_\theta^2 = \underbrace{\frac{1}{2}\mu v_r^2}_{\text{vera } K} + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2}}_{\text{termine dipedente dalla posizione}}$$

$$\boxed{E_{MECC} = K + E = \underbrace{\frac{1}{2}\mu v_r^2}_{\text{energia cinetica}} + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2} - \gamma\frac{mM}{r}}_{\text{energia potenziale efficace}}}$$



$\Longrightarrow$



Dato che $E_{MECC} \geq E_{eff}$ posso definire dei vincoli in cui la particella risiede

presso $E_1 \rightarrow r > r_0$

presso $E_2 \rightarrow r_1 < r < r_2$

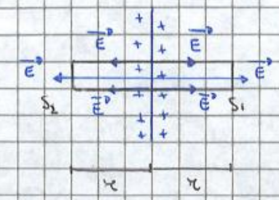
$E_0 < E_{eff\,MIN} \rightarrow$ IMP

$E_0 = E_{eff\,MIN} \rightarrow$ TRAIETT. CIRCOL.

$E_{eff}^{MIN} < E_0 < 0 \rightarrow$ ELLISSE

$E_0 \geq 0 \rightarrow$ IPERBOLE

• CAMPO ELETTRICO GENERATO DA SUPERFICIE PIANA ∞ CARICA



Scelgo Σ chiusa cilindrica ⇝ il campo attraversa delle facce

• Lati:

$$d\phi_{lat} = \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = E\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)dS = \phi$$

• Basi:

$$d\phi_{basi} = \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = E\cos(0°)\,dS = E\,dS$$

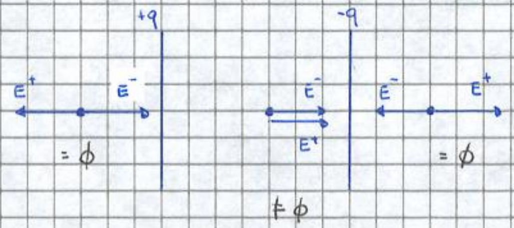
$$\phi = \int_{S_1} E\,dS + \int_{S_2} E\,dS = E\cdot S + ES = 2ES$$

Il teorema di Gauss dice che $\phi = \frac{Q^{INT}}{\varepsilon_0}$ e quindi mettendo a sistema:

$$2ES = \frac{Q^{INT}}{\varepsilon_0} \rightsquigarrow E = \frac{Q_{INT}}{S}\frac{1}{2\varepsilon_0} \qquad \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

σ = densità di carica superficiale

• CAMPO GENERATO DA UN CONDENSATORE



Rifacendo 2 volte i ragionamenti di prima ottengo che:

$$\begin{cases} \phi = 2ES \\ \phi = \frac{Q^{TOT}_{INT}}{\varepsilon_0} = \frac{2Q}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

$$\boxed{E = \frac{2Q}{2S\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

tra le lamiere ho campo costante

- EQUILIBRIO

"se le sue variabili macroscopiche sono costanti nel tempo"

Essere all'equilibrio vuol dire dunque che le variabili macroscopiche sono legate e in particolare prese p, V, T e conosciute due, la terza vien da se:

$$\boxed{pV = nRT}$$ Valida solo all'equilibrio

Nelle trasformazioni, gli stati di inizio e fine sono di equilibrio. Quelli intermedi, invece, almeno in generale no. Nelle trasformazioni QUASI STATICHE, molto lente, gli stati intermedi si considerano in equilibrio.

- REVERSIBILITÀ

Non è definita a partire dal poter tornare allo stato iniziale. (esempio palloncino)

Il criterio è:

"Nelle reversibili il calore e il lavoro infinitesimo scambiato è uguale all'andata e al ritorno"

$$\boxed{\begin{aligned} dQ_{AB} &= -dQ_{BA} \\ dW_{AB} &= -dW_{BA} \end{aligned}}$$ CONDIZIONE DI REVERSIBILITÀ

- CLAPEYRON

modo semplice di rappresentare una trasformazione, ossia per punti lungo assi di p e V

(B) LAVORO

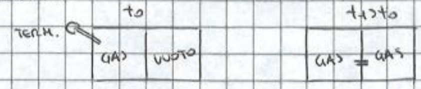
$$\begin{cases} dW = \vec{F}\,\vec{dr} \quad \rightsquigarrow \quad W = \int \vec{F}\,\vec{dr} = \int \vec{F}\,dx = \int p_{AMB}\,S\,dx = p_{AMB}\,\Delta V \qquad \text{se } p_{AMB} = \text{costante} \\ W_{AB} = p_{AMB}\,(V_B - V_A) \quad \text{se } p_{AMB} \text{ è costante} \end{cases}$$

se $p_{AMB} \neq$ costante non so calcolare l'integrale

Per trasformazioni reversibili W = aree sottese nel diagramma di Clapeyron ⇝ inoltre la percorrenza della curva consente di capire se il lavoro è > o < di ∅.

Con l'esperimento dell'espansione libera di Joule però si convince al fatto che U è solo funzione della temperatura T:

ESPERIMENTO:



contenitore adiabatico diviso in due parti aventi volume identico.

t_0) T_A
V_A
$p_A = \frac{mRT_A}{V_A}$

t_1) $2V_A$
T_A
$\frac{mRT_A}{2V_A} = p_B = \frac{p_A}{2}$

$\rightsquigarrow$ poiché $dQ = \phi$ e $W = \int \underbrace{p_{AMB}}_{=\phi} dV = \phi$ posso calcolare dU come:

$\Delta U = Q - W = \phi - \phi = \phi$

$\Rightarrow$ U è costante
p cambia
V cambia

$\rightsquigarrow$ $U = U(T)$ perché se così non fosse, dal momento che $p \neq \text{cost.}$ e $V \neq \text{cost.}$ allora esso dovrebbe cambiare.

$$\boxed{\Delta U = mC_v \Delta T}$$

- ISOCORA

$dV = \phi \rightsquigarrow dW = \phi \rightsquigarrow dU = dQ = mC_v dT$

- ISOBARA

$dp = \phi \rightsquigarrow dQ = mC_p dT$
$dW = p\, dV$
$dU = mC_v dT$

- ISOTERMA

$dT = \phi \rightsquigarrow dU = \phi \rightsquigarrow dQ = dW$

se ho una reversibilità poi:

$$Q = W = \int p\, dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{mRT}{V} dV = mRT \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

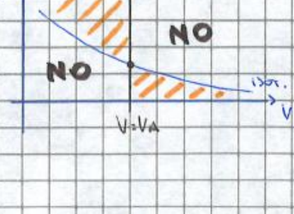
$$\boxed{Q = W = mRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

- ADIABATICA

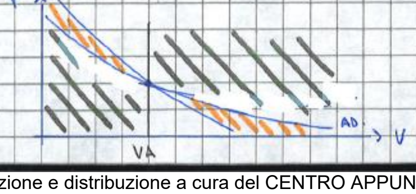
$dQ = \phi \rightsquigarrow dU = -dW$

$$\begin{cases} dU = mC_v dT \\ dW = p_{EXT} dV \end{cases}$$

mC_v, p_{EXT} sono > 0 $\rightsquigarrow$ $dT > 0 \Rightarrow dV < 0$ e viceversa



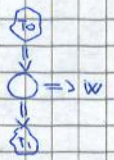
In definitiva:



— NO per II PRINCIPIO
— NO per I PRINCIPIO

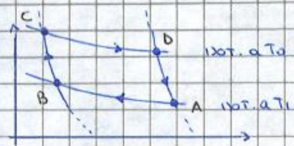
• MACCHINA DI CARNOT

2 requisiti: reversibile / lavora tra 2 sole sorgenti (T_0 e $T_1 < T_0$)



Il ciclo che viene percorso comprende:

- 2 ADIABATICHE REVERSIBILI
- 2 ISOTERME REVERSIBILI



Il ramo sopra lavora con T_0 quindi Q_A e $W>0$, mentre quello sotto con T_1 perciò Q_C e $W<0$!

	A	B	C	D
P	$\frac{nRT_1}{V_A}$	$\frac{nRT_1}{V_B}$	---	---
V	V_A	V_B	$\left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_B$	$\left(\frac{T_A}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_A$
T	T_1	T_1	T_0	T_0

	AB	BC	CD	DA
ΔU	$\emptyset$	$nc_v(T_C - T_B)^{>0}$	$\emptyset$	$nc_v(T_A - T_D)^{<0}$
Q	$W_{AB}^{<0}$	$\emptyset$	$W_{CD}^{>0}$	$\emptyset$
W	$nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)_{<0}$	$-\Delta U_{BC}^{<0}$	$nRT_0 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)_{>0}$	$-\Delta U_{DA}^{>0}$

$$\frac{V_D}{V_C} = \frac{\cancel{\left(\frac{T_A}{T_D}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} V_A}{\cancel{\left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} V_B} = \frac{V_A}{V_B}$$

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_{CED}|}{Q_{ASS}} = 1 - \frac{\cancel{n}RT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}{\cancel{n}RT_0 \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)} =$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_0}}$$

- indipendente dal gas
- cambia per le sorgenti

Come lo massimizzo?
- Alzo T_0 ⤳ GOOD CHOICE
- Abbasso T_1 ⤳ BAD CHOICE

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_0} = 1 - \frac{|Q_{CED}|}{Q_{ASS}} \rightsquigarrow \frac{T_1}{T_0} = \frac{|Q_C|}{Q_A} \rightsquigarrow \boxed{\frac{|Q_i|}{T_i} = \text{cost.}}$$

6 ENTROPIA E SECONDO PRINCIPIO TERMODINAMICO

Lo scopo del II principio è rispondere ai quesiti che mancavano dall'evidenza sperimentale garantendo il I principio: perché $\eta < 1$? perché non raggiungono le zone totali nell'adiabatica?

Il motivo è che:

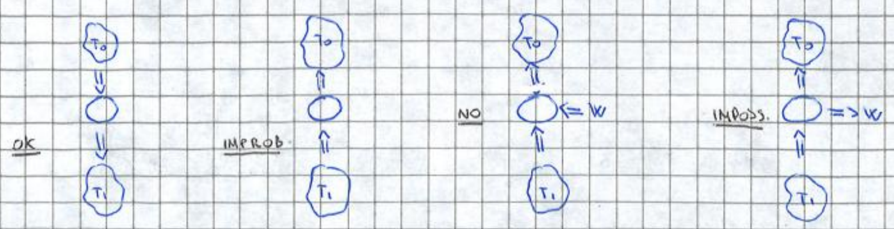
$$\boxed{\Delta S_{UNIV} \geq 0}$$ Condizione di realizzabilità di una trasformazione!

- esempio negozio - libro -

Ci sono molti modi per enunciare il II principio, tutti fra loro equivalenti:

1) • CLAUSIUS

"Il calore fluisce SPONTANEAMENTE ($W=0$) da una sorgente calda a una fredda e non viceversa"



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 50

• ENTROPIA

A) del sistema:

vogliamo definirla e poi validare che è una variabile di stato

$$\boxed{\Delta S^{AB} = \oint_{A\ \gamma_{REV}}^{B} \frac{dQ}{T}}$$ DEFINIZIONE

per Clausius una ciclica reversibile deve avere $\oint \frac{dQ}{T_{AMB}} = \phi$:

$$\int_{A\ \gamma_1}^{B} \frac{dQ}{T} + \oint_{B\ \gamma_2}^{A} \frac{dQ}{T} = \phi$$

$$\oint_{A}^{B} {}_{\gamma_1} \frac{dQ}{T} = \oint_{A\ \gamma_2}^{B} \frac{dQ}{T}$$

$$\boxed{\Delta S^{AB}_{\gamma_1} = \Delta S^{AB}_{\gamma_2}}$$ È VARIABILE DI STATO

Non potendolo definire per le irreversibili sfrutto il fatto che è variabile di stato e perciò

S_A e S_B non cambiano $\rightsquigarrow$ $\Delta S^{IRR}_{AB} = \Delta S^{REV}_{AB}$ dove REV è $\forall\, \gamma_{REV}$

• Adiabatica reversibile:

$$\Delta S = \oint_{\gamma_R} \frac{dQ}{T} = \phi$$

• Isoterma reversibile

$$\Delta S = \oint_{\gamma_R} \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\oint_{\gamma} dQ = \frac{1}{T}\oint_{\gamma} dW = \oint \frac{1}{T} p\, dV = \oint \frac{mRT}{T} dV = mR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

• Qualsiasi

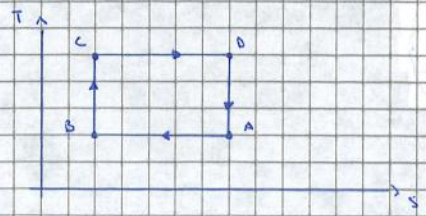
ISOTERMA REVERSIBILE + ISOCORA REVERSIBILE

$$\Delta S = mR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + mC_v\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$$

B) dell'ambiente

$$\boxed{\Delta S^{AMB} = \oint_{\gamma\ \forall} \frac{dQ_{AMB}}{T_{AMB}}}$$

Nascono i diagrammi T-S; le isoterme (y) e le adiabatiche (x) sono rette!



$Q_{AB} = \Delta S^{AB} \cdot T_0$

$Q_{CD} = \Delta S^{CD} \cdot T_1$

ma $\Delta S^{AB} = -\Delta S^{CD}$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_{CD}|}{Q_{AB}} = 1 - \frac{T_1}{T_0}$$

vantaggioso xk dimostro Carnot in un secondo e poi perché è + visibile.
Inoltre Q è calcolato come area sottesa dalla curva, dunque integrale!

• $\Delta S^{AMB} = -\Delta S$

• adiabatica $\forall$ $\rightsquigarrow$ $\Delta S^{AMB} = \phi$

• Ambiente = sorgente $\rightsquigarrow$ $\Delta S^{AMB} = \frac{1}{T_{AMB}}(-Q)$

• Contatto : $\Delta S^{AMB} = mc\ln\left(\frac{T_{eq}}{T_1}\right)$

• Trasf. di stato $\Delta S^{AMB} = m\lambda$

11

c) dell'universo

$$\boxed{\Delta S^{UNIV} = \Delta S + \Delta S^{AMB}}$$

Enunciato del principio di accrescimento dell'universo:

" $\forall \gamma$ la dS^{UNIV} deve essere ≥ 0 "

Dimostrazione:

Prendo una trasformazione ciclica!

$$\oint \frac{dQ}{T_{AMB}} \leq 0 \quad \text{per Clausius}$$

$$\int_{A\,\gamma_{IRR}}^{B} \frac{dQ}{T_{AMB}} + \int_{B\,\gamma_R}^{A} \frac{dQ}{T_{AMB}} \leq 0$$

$$\int_{A\,\gamma_{IRR}}^{B} \frac{dQ}{T_{AMB}} - \int_{A\,\gamma_R}^{B} \frac{dQ}{T_{AMB}} \leq 0$$

$$-\int_{A\,\gamma_{IRR}}^{B} \frac{dQ_{AMB}}{T_{AMB}} - \int_{A\,\gamma_R}^{B} \frac{dQ}{T_{AMB}} \leq 0$$

$$-\Delta S_{AMB}^{\gamma_1} - \Delta S^{\gamma_2} \leq 0$$

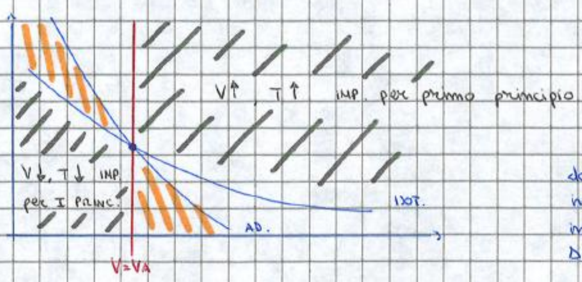
↪ non dipende da γ_2 perché è reversibile ⇝ luogo γ_1 è uguale

$$-\Delta S_{AMB}^{\gamma_1} - \Delta S^{\gamma_1} \leq 0$$

$$\Delta S_{AMB}^{\gamma_1} + \Delta S^{\gamma_1} \geq 0$$

$$\Delta S_{UNIV}^{\gamma_1} \geq 0 \quad \text{cvd}$$

Viene spiegato il vecchio grafico delle zone accessibili:



dovendo stare sopra la adiabatica iniziale le zone arancioni sono inaccessibili per il II PRINCIPIO.
$\Delta S > 0$ ⇝ $S\uparrow$ ⇝ adiabatica sopra!

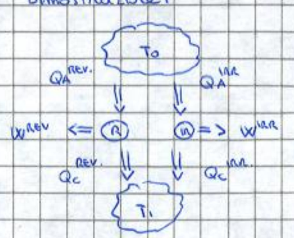
• ENERGIA INUTILIZZABILE

per Carnot: $\eta_{IRR} < \eta_{REV}$ ⇝ $\frac{W^{IRR}}{Q^{IRR}} < \frac{W^{REV}}{Q^{REV}}$ a parità di calore $W^R > W^{IRR}$

Nasce uno spreco:

$$\boxed{\Delta W = W^{REV} - W^{IRR} = f(\Delta S^{UNIV})}$$

Dimostrazione:



$$\begin{cases} W^{REV} = Q_A^{REV} - |Q_C^{REV}| \\ W^{IRR} = Q_A^{IRR} - |Q_C^{IRR}| \end{cases}$$

ma per Carnot: $\frac{Q_A^R}{T_0} + \frac{Q_C^R}{T_1} = 0$ ⇝ $Q_C^R = -Q_A \frac{T_1}{T_0}$

FLUIDI:

(A) INTRO

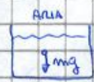
Fluidi = gas + liquidi → incomprimibili

Quali forze agiscono su un fluido?

A) FORZE DI VOLUME

$$\boxed{d\vec{F_V} = \vec{f}\, dV}$$

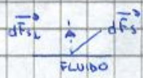
→ densità di forza



$$d\vec{F} = d(m\vec{g}) = \vec{g}\, dm = \underbrace{\vec{g}\rho}_{\vec{f}}\, dV$$

B) FORZE DI SUPERFICIE

$$\boxed{d\vec{F_S} = dF_{S\perp}\, \vec{u_\perp}}$$



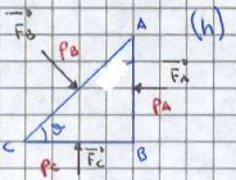
$$d\vec{F_S} = p \cdot dS\, \vec{u_\perp}$$

(B) FLUIDO-STATICA

Fluido in quiete, $v \sim \phi$ ⇝ studio l'equilibrio sapendo che non avrò attrito viscoso perché la velocità è nulla.

• A) FORZE SUP.

Prisma di altezza h



$\vec{f_V} = \phi$ ⇝ $\vec{F_V} = \phi$

$$\begin{cases} F_A = S_A \cdot p_A = AB \cdot h \cdot p_A \\ F_B = S_B \cdot p_B = AC \cdot h \cdot p_B \\ F_C = S_C \cdot p_C = CB \cdot h \cdot p_C \end{cases}$$

⇝ EQUILIBRIO è $F_x = \phi$ e $F_y = \phi$

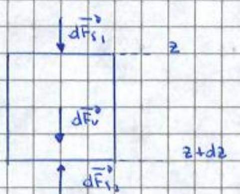
$$\begin{cases} F_x \rightsquigarrow -F_A + F_B \cos\theta = \phi \rightsquigarrow -AB\,h\,p_A + AC\,h\,p_B \cos\theta = 0 \rightsquigarrow -AB\,h\,p_A + AB\,h\,p_B = 0 \\ F_y \rightsquigarrow F_C - F_B \sin\theta = \phi \rightsquigarrow CB\,h\,p_C - AC\,h\,p_B \sin\theta = 0 \rightsquigarrow CB\,h\,p_C - CB\,h\,p_B = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{p_A = p_B = p_C = p}$$

Condizione di equilibrio che esce dallo studio di sole forze superficiali

• B) FORZE VOLUME

Cubo di lato dz



$$d\vec{F_{S_1}} + d\vec{F_V} - d\vec{F_{S_2}} = \phi$$

$$\begin{cases} d\vec{F_{S_1}} = dS \cdot p(z) \\ d\vec{F_{S_2}} = dS \cdot p(z+dz) \\ d\vec{F_V} = f_z \cdot dV \end{cases}$$

Taylor: $p(z+dz) = p(z) + dz\,\frac{dp}{dz}$

$$p(z)\,dS + f_z\,dV - dS\left(p(z) + dz\,\frac{dp}{dz}\right) = \phi$$

$$f_z\,dV - dS\,dz\,\frac{dp}{dz} = \phi$$

$$f_z\,\cancel{dV} = \cancel{dV}\,\frac{dp}{dz}$$

$$f_z = \frac{dp}{dz} \rightsquigarrow \boxed{\vec{f} = \frac{\partial p}{\partial \vec{r}} = \vec{\nabla p}}$$

condizione di equilibrio che esce dal secondo studio, con forze volumiche

12

Dimostrazione:

$\vec{F_A} = \vec{F_{P1}} + \vec{F_{ATM}}$

$F_A = p_1 S \vec{u_z} - p_{ATM} S \vec{u_z}$

$= (p_{ATM} + \rho g h) S - p_{ATM} S$

$= \rho g h S = \rho_{FLUIDO} \cdot g \cdot V_{FLUIDO}$

Ⓒ FLUIDO DINAMICA

$v \neq 0$ ⇝ c'è attrito viscoso $\boxed{dF_A = \eta \, dS \cdot \frac{dv}{dn}}$

sup. di contatto

variazioni di velocità rispetto alla normale

coeff. di viscosità

Anziché l'approccio Lagrangiano che divide la massa di fluido in masse costesime e le studia separatamente, l'approccio usato è quello Euleriano. Divide il fluido in dV, che vengono studiati dal punto di vista della velocità e in regime stazionario.
Ogni dV sarà solo funzione della posizione. In quella posizione il fluido ha velocità $\vec{v_i}$, in quell'altra $\vec{v_2}$.

- Linee di corrente

 curva tangente la velocità punto a punto (in un certo senso è la traiettoria). Non possono incrociarsi le curve perché avrei + tangenti dunque non c'è costanza della velocità.

- Il tubo di flusso

 Definisce la densità attraverso due superfici distanti. Le linee non si intersecano mai

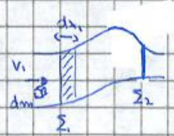
- Portata

$\boxed{dq = v \cdot dS}$ ⇝ $q = \int_{\Sigma} v \, dS$ ma si può dire che $q = v_{media} \cdot \Sigma$

- TEOREMA DI LEONARDO

$\boxed{q = v_{media} \cdot \Sigma = \text{costante}}$

Dimostrazione:



quanta massa è racchiusa?

1) Poniamo tutti i dm con distanza $dx_1 \leq v_1 dt$

$dm_1 = \rho \, dV_1 = \rho \, \Sigma_1 \, dx_1 = \rho \, \Sigma_1 v_1 dt$

2) duale

$dm_2 = \rho \, \Sigma_2 v_2 dt$

Poiché il fluido è incomprimibile e lavoriamo con fluidi omogenei, allora:

$dm_1 = dm_2$ ⇝ $\rho \, \Sigma_1 v_1 dt = \rho \, \Sigma_2 v_2 dt$ ⇝ $\Sigma_1 v_1 = \Sigma_2 v_2$ ⇝ $\Sigma v_i = \text{costante}$ cvd

OSCILLATORE:

(A) PROPRIETÀ

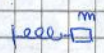
Si parte da un moto armonico $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

Geometricamente, una base è composta da funzioni trigonometriche delle varie ω. Perciò $x(t)$ è esprimibile come somma delle ω per cui la base esiste:

$$\boxed{x(t) = \int A_\omega \cos(\omega t + \varphi)\, d\omega}$$

Proprietà:

- $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- per sovrapposizione (linearità) se $x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ e $x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$ sono soluzione dello stesso moto armonico è anche soluzione di questo
  $x_1(t) + x_2(t) = A_T\cos(\omega t + \varphi_T)$
- Energia dell'oscillatore



$$\begin{cases} F = ma \\ F = -kx \end{cases} \rightsquigarrow ma = -kx \rightsquigarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} x$$

ma $E_M = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{E_M}{m} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\frac{k}{m}x^2$

$$\frac{E_M}{m} = \frac{1}{2}\omega^2 \cdot A^2\cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}\left(-A\omega\sin(\omega t + \varphi)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}A^2\omega^2\left[\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)\right]$$

$$= \frac{1}{2}A^2\omega^2$$

$$\boxed{\frac{E_M}{m} = \frac{1}{2}A^2\omega^2}$$

(B) INTERFERENZA

Studio cosa avviene se sovrappongono le due soluzioni:

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \rightsquigarrow x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$ dove A e φ sono incognite

Risolvo:

$$A\cos(\omega t + \varphi) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$A[\cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)] = A_1[\cos(\omega t)\cos(\varphi_1) - \sin(\omega t)\sin(\varphi_1)] + A_2[\ldots]$$

raggruppo i termini in cos e sin e ho due equazioni in 2 incognite (A e φ)

⋮

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

se $\Delta\varphi = 2m\pi \rightsquigarrow \cos(\Delta\varphi) = 1 \rightsquigarrow A = (A_1 + A_2)^2 \rightsquigarrow$ AMP. MAX O COSTRUTTIVA

se $\Delta\varphi = (2m+1)\pi \rightsquigarrow \cos(\Delta\varphi) = 1 \rightsquigarrow A = (A_1 - A_2)^2 \rightsquigarrow$ AMP. MIN O DISTRUTTIVA