



Appunti universitari  
Tesi di laurea  
Cartoleria e cancelleria  
Stampa file e fotocopie  
Print on demand  
Rilegature

NUMERO: 2081A -

ANNO: 2017

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Massara Andrea

MATERIA: Campi elettromagnetici - prof. Savi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# LEZIONE 1

- D. Pozar, "Microwave Engineering", Addison Wesley, 3<sup>rd</sup> edition 2005 (CAP 1,2,3,4,5)
- J.D. Kraus, R.J. Mariani

$$c = \lambda \cdot f \quad \text{con } c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$\lambda$ : lunghezza d'onda

$f$ : frequenza in Hz

## SISTEMI COMUNICATIVI

- ① ONDA: emana e trasporta dati
- ② ANTENNA: riceve ed emette le onde convertibile
- ③ OGGETTI PROPAGATIVA: cavi coassiali o microstruttura

## PROPAGAZIONI

- ① GUIDATA: le onde si propagano su un cavo a basse perdite secondo la relazione

$$\frac{P_R}{P_T} = e^{-2\alpha D}$$

$P_R$ : potenza ricevuta  
 $P_T$ : " trasmessa  
 $D$ : distanza

- ② LIBERA: le onde si propagano nello spazio

$$\frac{P_R}{P_T} \sim \frac{1}{D^2}$$

# LEZIONE 2

2

01.10.2015

## LINEE DI TRASMISSIONE

Sistema di conduttori che trasporta l'onda e.m. per mezzo di un supporto fisico (propagazione guidata)



Tali supporti possono essere:

1) CAVO COASSIALE



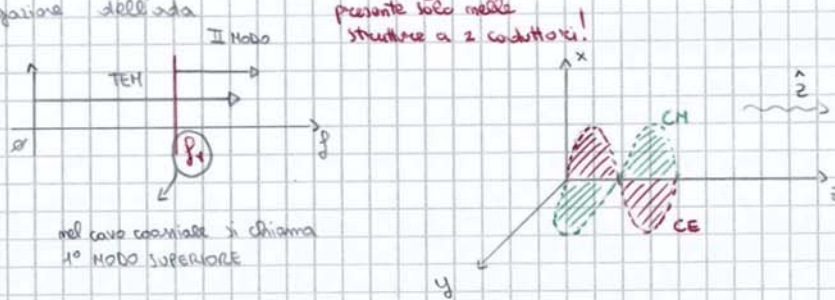
2) LINEA BIFILARE



3) MICROSTRISIA



=> A queste strutture è già associato un MOBO (soluzione eq. Maxwell con condizioni al contorno) a  $P_z = 0$ . Esso è il TEM (Transverso elettromagnetico) in cui CE e CH sono disposti  $\perp$  alla propagazione dell'onda



### CIRCUITI A PARAMETRI CONCENTRATI:

circuiti di elettrotecnica che posso punti fermi, ossia l'onda em non ha estensione spaziale ( $\lambda \ll D$ )

### CIRCUITI A PARAMETRI DISTRIBUITI:

l'onda em ha ora estensione spaziale confrontabile con la direzione spaziale del circuito che convenzionalmente è lungo l'asse z ( $\lambda \approx \Delta z$ )



$$\begin{cases} v(z,t) = R\Delta z \cdot i(z,t) + L\Delta z \cdot \frac{d(i(z,t))}{dt} + v(z+\Delta z,t) \\ i(z,t) = G\Delta z \cdot v(z+\Delta z,t) + C\Delta z \cdot \frac{d(v(z+\Delta z,t))}{dt} + i(z+\Delta z,t) \end{cases}$$

Rielaborando e facendo tendere  $\Delta z \rightarrow 0$  trovo tensione e corrente della sezione infinitesima della linea di trasmissione:

Rapporto incrementale per  $z \rightarrow 0$  o  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0}$

- $$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( \frac{v(z+\Delta z,t) - v(z,t)}{\Delta z} \right) = R \cdot i(z,t) + L \cdot \frac{d(i(z,t))}{dt}$$

$$\frac{d(v(z,t))}{dt} + L \cdot \frac{d(i(z,t))}{dt} + R \cdot i(z,t) = 0 \quad \rightarrow \text{I equazione}$$

- con lo stesso procedimento arrivo a:

fatto con  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0}$

$$\frac{d(i(z,t))}{dt} + C \frac{d(v(z,t))}{dt} + G \cdot v(z,t) = 0 \quad \rightarrow \text{II equazione}$$

DA QUESTE TROVO  $i(z,t)$  e  $v(z,t)$  nella linea di trasmissione!

4

Le due variabili  $z$  e  $t$  di derivazione non sono indipendenti, ma sono legate da un termine  $v_p$  che è la velocità di fase dell'onda:

$$\frac{1}{v_p^2} = LC \quad \text{da cui} \quad v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

introducendo  $\xi = z - v_p t$  e  $\eta = z + v_p t$

Con questi due ultimi cambi variabili vado a cercare:

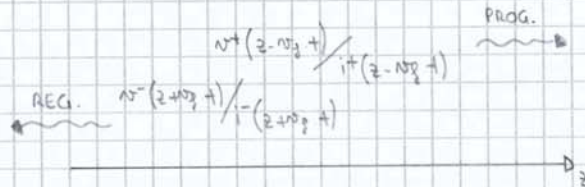
$v$  e  $i$  sono c.p. di un termine proporzionale a di un reciproco!

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

e trovo  $v(z, t) = v^+(z - v_p t) + v^-(z + v_p t)$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial \eta \partial \xi} = 0$$

e trovo  $i(z, t) = i^+(z - v_p t) + i^-(z + v_p t)$



Di fatto  $v^+, v^-, i^+$  e  $i^-$  non sono indipendenti tra loro:

1.  $v^+, i^+ \Rightarrow$

$$\frac{\partial v^+}{\partial z} + \frac{\partial i^+}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial z} = \frac{\partial v^+}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{\partial v^+}{\partial \xi} \cdot 1$$

$$\frac{\partial i^+}{\partial t} = \frac{\partial i^+}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial i^+}{\partial \eta} \cdot (-v_p)$$

$$\xi = z - v_p t$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial \xi} - \frac{\partial i^+}{\partial \eta} \cdot v_p = 0 \quad \text{da cui}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (v^+ - \frac{\partial i^+}{\partial \eta} \cdot v_p) = 0$$

$$v^+ - \frac{\partial i^+}{\partial \eta} \cdot v_p = 0 \quad \text{e perciò} \quad v^+ = \frac{\partial i^+}{\partial \eta} \cdot v_p = \frac{\partial i^+}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{\partial i^+}{\partial \eta}$$

$$v^+ = i^+ \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \text{legame tra } v^+ \text{ e } i^+$$

costante che dimensionalmente è in  $[\Omega]$  e si chiama  $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$  o sia impedenza caratteristica della linea di trasmissione

2.  $v^-, i^- \Rightarrow$  Analogamente ...

$$v^- = - \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot i^-$$

# LEZIONE 4

Ci serve solo la parte reale perché è un segnale reale. Questo è il fasore:

$$\underline{A}(\pi, \omega) = \underline{A}_0(\pi) e^{j\phi}$$

- DEFINIZIONI
- $\underline{A}(\pi)$                        $a(\pi, t)$
  - $\underline{a}_0(\pi) e^{j\phi}$                        $\text{Re} \{ \underline{A}(\pi) e^{j\omega t} \}$
  - $\frac{1}{\sqrt{2}} \underline{a}_0(\pi) e^{j\phi}$                        $\sqrt{2} \text{Re} \{ \underline{A}(\pi) e^{j\omega t} \}$

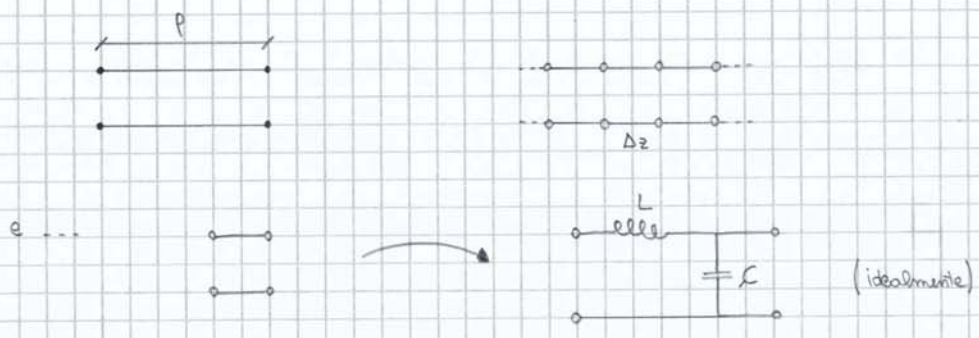
$\underline{A}(\pi, t)$	$\underline{A}(\pi)$
$\cos(\omega t)$	1
$\sin(\omega t)$	-j
$\cos(\omega t + \phi)$	$e^{j\phi}$
$\sin(\omega t + \phi)$	$-j e^{j\phi}$
$\frac{d}{dt}$	$j\omega$

Attenzione perché i fasore devo vederlo come VECTORE:

$$\underline{A}(\pi) = \underline{A}'(\pi) + j \underline{A}''(\pi)$$

$$\begin{aligned} \underline{A}(\pi, t) &= \text{Re} \{ [ \underline{A}'(\pi) + j \underline{A}''(\pi) ] e^{j\omega t} \} = \\ &= \underline{A}'(\pi) \cos(\omega t) - \underline{A}''(\pi) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Proviamo ora dunque a risolvere le equazioni d'onda nel dominio delle frequenze:



Due considerazioni:

- Devo tornare nel dominio del tempo per capire meglio quello che succede nel circuito
- Ho 4 costanti ( $I_0^+, I_0^-, V_0^+, V_0^-$ ) e due equazioni, quindi capisco che anche tra loro c'è una relazione di dipendenza che sta coscò:

$$- \frac{dV(z)}{dz} = j\omega L I(z)$$

$$I(z) = - \frac{1}{j\omega L} \frac{dV(z)}{dz} \text{ da cui, prendendo le sole parti progressive:}$$

$$\begin{aligned} I_0^+ e^{-jkz} &= - \frac{1}{j\omega L} \frac{d}{dz} (V_0^+ e^{-jkz}) \\ &= - \frac{1}{j\omega L} V_0^+ (-jk) e^{-jkz} \\ &= \frac{k}{\omega L} V_0^+ e^{-jkz}, \text{ ma con } k = \omega \sqrt{LC} \\ &= \frac{L}{\omega L} V_0^+ e^{-jkz} \end{aligned}$$

$Y_{00} = \text{AMMETTENZA CARATTERISTICA DELLA LINEA}$

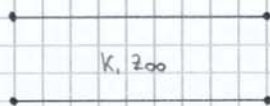
Segue che:

$$\begin{aligned} I_0^+ &= \sqrt{\frac{L}{Z_0}} V_0^+ = Y_{00} \cdot V_0^+ \\ I_0^- &= -\sqrt{\frac{L}{Z_0}} V_0^- = -Y_{00} V_0^- \end{aligned}$$

Prima di passare nel tempo, però, bisogna caratterizzare la linea in questo modo:

$$k = \omega \sqrt{LC} \quad [m^{-1}]$$

$$Z_{00} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad [\Omega]$$



Siccome so che:

$$k Z_{00} = \omega L \quad \text{e} \quad k Y_{00} = \omega C,$$

riscrivo le equazioni di primo ordine

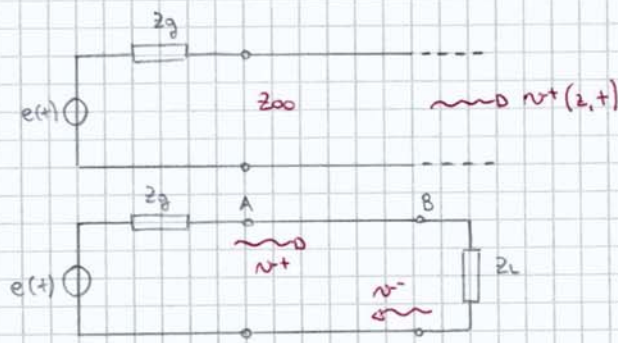
$$\begin{aligned} - \frac{dV(z)}{dz} &= jk Z_{00} I(z) \\ - \frac{dI(z)}{dz} &= jk Y_{00} V(z) \end{aligned} \quad = \text{EQUAZIONI DEI TELEGRAFISTI}$$



Il  $v^-$  (onda retrospettiva) si crea quando ho un carico oppure qualcosa che riflette l'immagine (specchio).

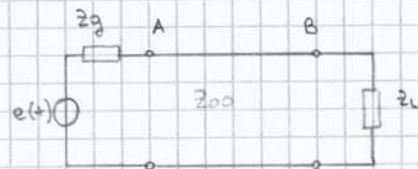
Mentre se la linea è infinita, senza ostacoli o carichi, è presente solo la progressiva  $v^+$

7



### ANALISI NEL TEMPO (circuiti semplici)

Analisi per vedere come variano  $V, I, \dots$

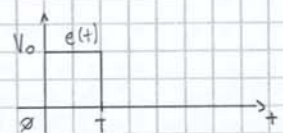
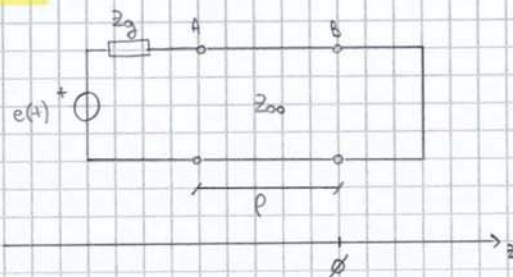


I carichi possono essere:

- 1) CORTOCIRCUITO
- 2) CIRCUITO APERTO
- 3)  $z_L = z_{00}$
- 4)  $z_L$  (caso generico)

Analizzo caso per caso:

#### 1) CORTOCIRCUITO



CONTORNO:  $v(z=0, t) = 0$

Ora punto:  $v(z, t) = v^+(z - v_g t) + v^-(z + v_g t)$  e applico la cond contorno, trovando

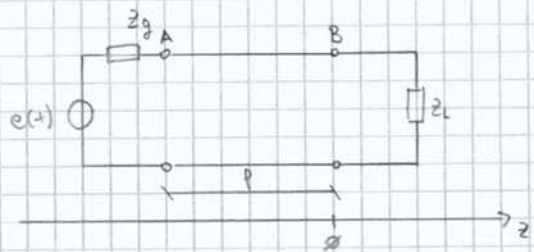
$$v^+(-v_g t) + v^- (v_g t) = 0 \text{ da cui } v^+(-v_g t) = -v^-(v_g t)$$

TUTTO CIÒ CHE VA SUL CC TORNA INDIETRO

**COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE**

Esso è il rapporto tra il segnale riflesso e quello incidente e può essere sia di tensione che di corrente:

$$\frac{v^-}{v^+} \quad \text{e} \quad \frac{i^-}{i^+}$$



CONTORNO  $\rightarrow v(0,+) = Z_L \cdot i(0,+)$

Sostituire in  $v(z,+)$  e trovare:

$$v^+(0,+) + v^-(0,+) = Z_L [i^+(0,+) + i^-(0,+)]$$

Quello che mi interessa è trovare  $v^+ = \dots v^-$ , quindi:

$$\begin{aligned} v^+(0,+) + v^-(0,+) &= Z_L [Y_{00} v^+ - Y_{00} v^-] \\ &= Z_L Y_{00} [v^+ - v^-] \end{aligned}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} v^- + Z_L Y_{00} v^- &= Z_L Y_{00} v^+ - v^+ \\ v^- (1 + Z_L Y_{00}) &= v^+ (Z_L Y_{00} - 1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{v^-(0,+)}{v^+(0,+)} = \Gamma^v(0,+) = \frac{Z_L Y_{00} - 1}{Z_L Y_{00} + 1} = \frac{Z_L - Z_{00}}{Z_L + Z_{00}}} \rightarrow \text{COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE delle tensioni}$$

Ora se consideriamo:

CONDIZIONE DI CARICO ADATTATO  $\left\{ \begin{aligned} Z_L = Z_{00} &\rightarrow \Gamma^v(0,+) = 0, \text{ questo equivale a dire che} \\ Z_L = Z_{00} &\text{ oppure } v^- = 0 \text{ oppure } v^-(z) = 0 \text{ oppure } \Gamma^v = 0 \end{aligned} \right.$

Dualmente per le correnti:

$$\boxed{\frac{i^-(0,+)}{i^+(0,+)} = \Gamma^i(0,+) = \frac{Y_L - Y_{00}}{Y_L + Y_{00}}} \rightarrow \text{COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE delle correnti}$$

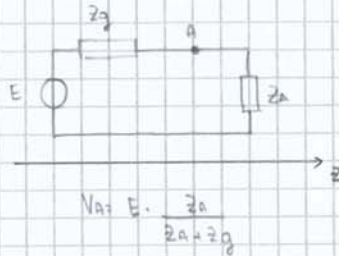
Il legame che esiste è:

$$\boxed{\Gamma^v = -\Gamma^i}$$

Ora allora ho:

$$V_b = \frac{V_a}{1 + \Gamma_A} e^{-jkP}$$

Ora se considero  $Z$  sottante (in A), cerco  $V_a(E)$ ! (polarizzo motore di Laplace l'impedenza nella sezione A!)



$$V_a = E \cdot \frac{Z_A}{Z_A + Z_g}$$

Da cui:

$$V_b = \frac{Z_A}{Z_A + Z_g} \frac{1 + \Gamma_B}{1 + \Gamma_A} e^{-jkP} \cdot E$$

Da questa f.d.t.  $\frac{V}{E}$  faccio l'analisi nel tempo e ho uso come punto di partenza!

Per tempi finissimi la vita, considero:

- $\Gamma_A = \frac{Z_A - Z_0}{Z_A + Z_0}$  che se invertita da  $Z_A = Z_0 \frac{1 + \Gamma_A}{1 - \Gamma_A}$
- $\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}$  " " " "  $Z_g = Z_0 \frac{1 + \Gamma_g}{1 - \Gamma_g}$

→ ottengo nel complesso...

$$V_b = \left( \frac{1 - \Gamma_g}{2} \right) (1 + \Gamma_B) e^{-jkP} \frac{1}{1 - \Gamma_g \Gamma_B e^{-2jkP}} \cdot E$$

ottenuto dalla sostituzione di  $\Gamma_B$  e  $\Gamma_g$  in  $V_b$  e considerando che:

$$\Gamma_A = \Gamma_B e^{-2jkP}$$

IMP!!  $\Gamma(z) = \frac{V(z)}{V^*(z)} = \frac{V_0^- e^{+jkz}}{V_0^+ e^{-jkz}} = \Gamma_0 e^{2jkz}$

Considero ora  $P$  RITARDO DI PROPAGAZIONE della linea:

$$L = \frac{P}{v_p}$$

Ne consegue che  $kP = \omega L$  e perciò:

$$V_b = \frac{1 - \Gamma_g}{2} (1 + \Gamma_B) e^{-j\omega L} \frac{1}{1 - \Gamma_g \Gamma_B e^{-2j\omega L}} E$$

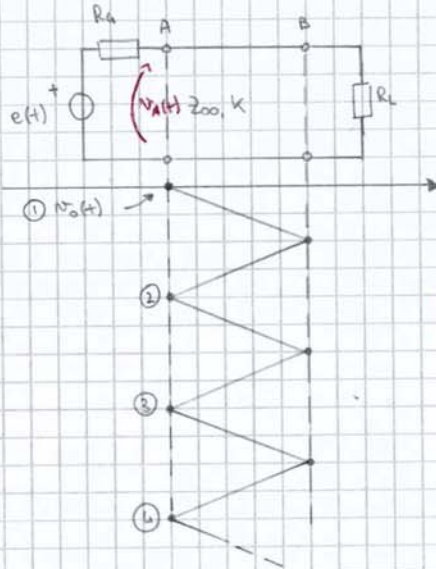
è come un termine  $\frac{1}{1-x}$  che dunque sviluppo in serie! ( $= 1 + x + x^2 + \dots$ )

Nota!  $\Gamma < 1$  quindi  $x < 1$ !

## LEZIONE 6

### LINEE - T : TRALICCIO

Calcolando  $v_B(t)$  polo arriva voltare  $v_A(t)$ :

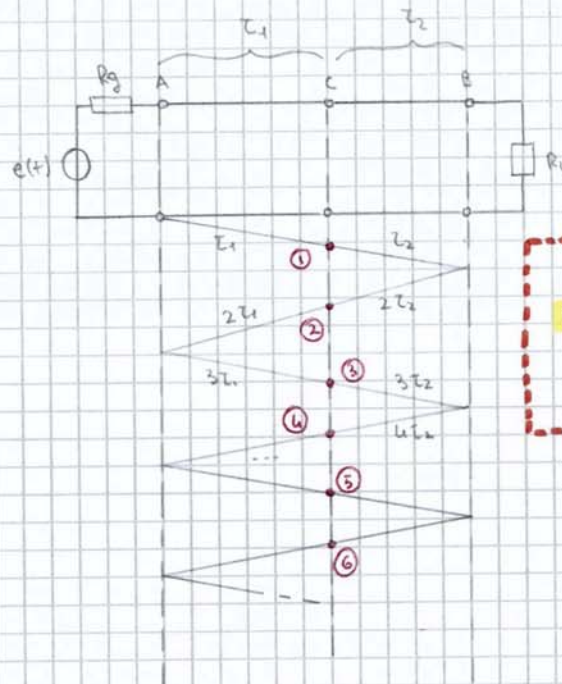


$$\Gamma_B = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}$$

$$\Gamma_A = \frac{R_A - Z_0}{R_A + Z_0}$$

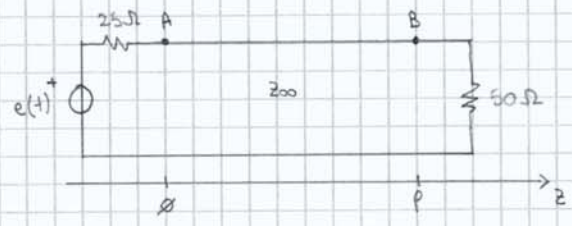
$$v_B(t) = v_0(t) + \Gamma_B v_0(t - 2\tau) + \Gamma_B \Gamma_A v_0(t - 2\tau) + \Gamma_A \Gamma_B^2 v_0(t - 4\tau) + \Gamma_B \Gamma_A^2 v_0(t - 4\tau) + \dots$$

Proviamo ora con 2  $\tau$  diverse:



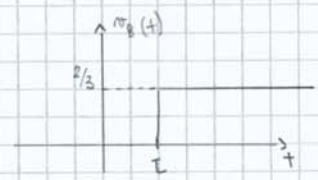
$$v_C(t) = v_0(t - \tau_1) + \Gamma_B v_0(t - \tau_1 - 2\tau_2) + \Gamma_B \Gamma_A v_0(t - 3\tau_1 - 2\tau_2) + \dots$$

**NB:** SE VOGLIO EVITARE RA DIFFERENZA DEVO FARE IN MODO CHE  $\Gamma_B = 0$ , (CARICO ADATTATO) e quindi occorre un carico tale che sia uguale a  $Z_{in}$



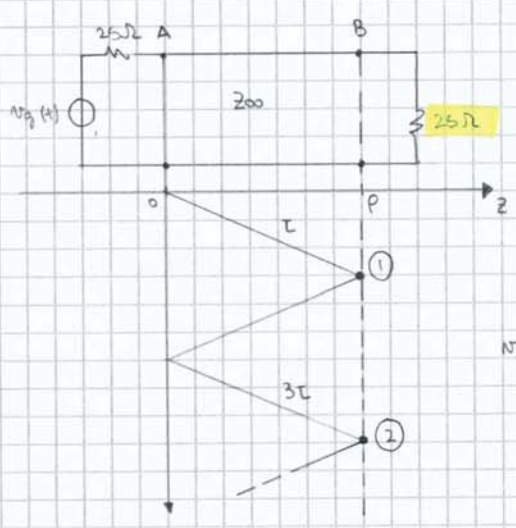
$$N_B(t) = \frac{200}{200+Z_L} N_A(t) = \frac{2}{3} N_A(t)$$

$$N_B(t) = \frac{2}{3} v(t-L)$$



2)  $R_L = 25 \Omega$

$$\begin{cases} \Gamma_g \neq 0 \\ \Gamma_B \neq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \Gamma_g = \frac{25-50}{25+50} = -\frac{1}{3} \\ \Gamma_B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

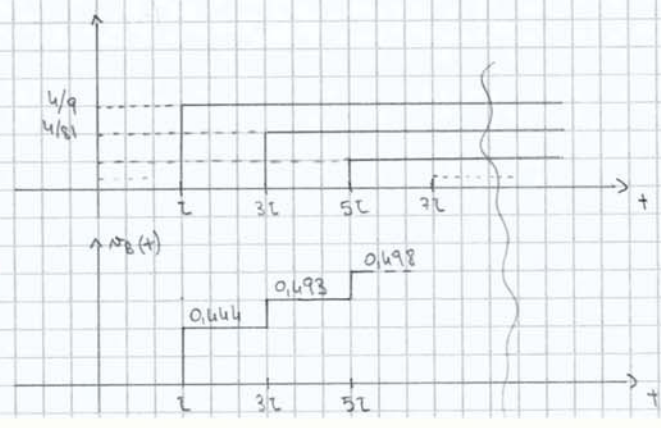
$$N_B(t) = N_A(t-L) + \Gamma_B N_A(t-L) + \Gamma_A \Gamma_g N_A(t-3L) + \Gamma_g \Gamma_B^2 N_A(t+3L) + (\Gamma_g \Gamma_B)^2 N_A(t+5L) + \Gamma_B (\Gamma_B \Gamma_g)^2 N_A(t+5L) + \dots$$

$$N_A(t) = \frac{2}{3} v(t)$$

$$N_B(t) = \frac{2}{3} v(t-L) - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} v(t-L) - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{2}{3} v(t-3L) + \dots$$

$$= \text{scelta } (1 + \Gamma_B) \text{ (tutti i contributi di } v(t-kL))$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left(v(t-L) + \frac{1}{9} v(t-3L) + \frac{1}{81} v(t+5L) + \dots\right)$$



ottengo il grafico di  $N_B(t)$  come somma dei contributi ad ogni  $kL$

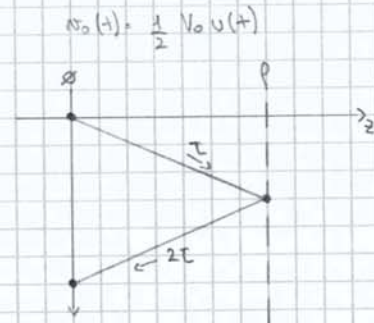
(12)

Sul generatore vedo  $R_g + R_x$ :

Ipotesi 1 • se  $R_g + R_x = 200$ :  $V_A^+ = \frac{E}{2}$  e  $\Gamma_g = 0$

se  $R_L \rightarrow \infty$  allora  $\Gamma_L \rightarrow 1$  Ipotesi 2

In queste ipotesi:



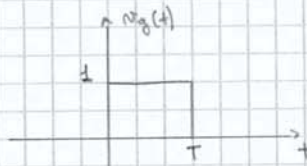
$$v_B(t) = v_0(t-L) + \Gamma_B v_0(t-L)$$

$$= \frac{V_0}{2} u(t-L) + \Gamma_B \frac{V_0}{2} u(t-L) \quad \text{con } \Gamma_B = \Gamma_L = 1$$

$$= V_0 u(t-L)$$

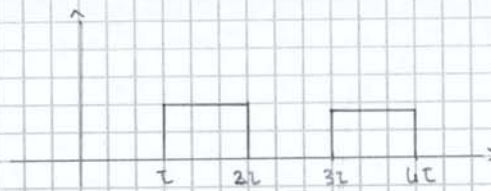
ritorno sul cavo il valore del generatore esattamente dopo un tempo  $T$ !

• se  $R$  risponde  $v_g(t)$  è del tipo porta:

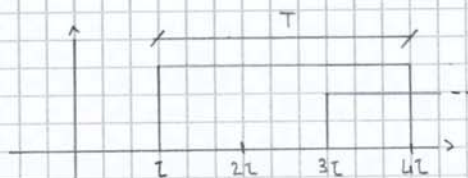


avrà un  $v_B(t)$  uguale a:

(I) se  $T \leq 2T$



(II) se  $T > 2T$



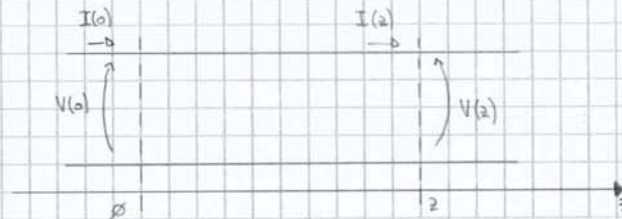
# LEZIONE 7

(13)

L'impedenza può essere definita come sempre fatto, a patto che si parli di tensioni e correnti totali:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} \quad \text{e} \quad Y(z) = \frac{I(z)}{V(z)} = (Z(z))^{-1}$$

$Z(z)$ ?



Da  $V(z) = V^+(z) + V^-(z) = V_0^+ e^{-jkz} + V_0^- e^{jkz}$   
 $I(z) = I^+(z) + I^-(z) = I_0^+ e^{-jkz} + I_0^- e^{jkz}$

Sovvivo:

$$V(0) = V_0^+ + V_0^-$$

$$I(0) = I_0^+ + I_0^- = Y_{00} V_0^+ - Y_{00} V_0^-$$

da cui + nuovo  $\begin{cases} V_0^+ = \frac{1}{2} [V(0) + Z_{00} I(0)] \\ V_0^- = \frac{1}{2} [V(0) - Z_{00} I(0)] \end{cases}$

Quindi:

$$V(z) = \frac{V(0) + Z_{00} I(0)}{2} e^{-jkz} + \frac{V(0) - Z_{00} I(0)}{2} e^{jkz}$$

e dualmente + nuovo:

$$I(z) = Y_{00} \frac{V(0) + Z_{00} I(0)}{2} e^{-jkz} - Y_{00} \frac{V(0) - Z_{00} I(0)}{2} e^{jkz}$$

(unghetto)

Semplifico un po':

$$\begin{cases} V(z) = \frac{V_0}{2} \cos(kz) + \frac{V_0}{2} \cos(kz) - j Z_{00} I_0 \sin(kz) \\ I(z) = Y_{00} [-V_0 j \sin(kz) + Z_{00} I_0 \cos(kz)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} V(0) = V_0 \\ I(0) = I_0 \end{cases}$$

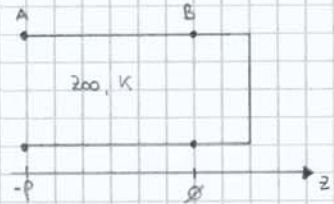
$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(kz) - j Z_{00} I_0 \sin(kz) \\ I(z) = I_0 \cos(kz) - j Y_{00} V_0 \sin(kz) \end{cases}$$

Ne consegue che:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_0 \cos(kz) - j Z_{00} I_0 \sin(kz)}{I_0 \cos(kz) - j Y_{00} V_0 \sin(kz)}$$

CASI PARTICOLARI

1) CORTOCIRCUITO



$V_B = \phi$   
 $Z_B = \phi$

$\Gamma_B = \frac{Z_B - Z_{00}}{Z_B + Z_{00}} = -1$        $i \Gamma_B = 1$

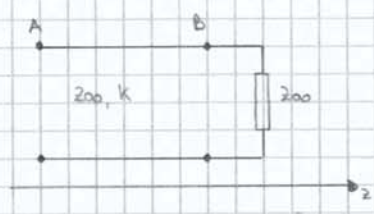
2) CIRCUITO APERTO



$I_B = \phi$   
 $Y_B = \phi$

$i \Gamma_B = \frac{Y_B - Y_{00}}{Y_B + Y_{00}} = -1$        $\Gamma_B = 1$

3) CARICO ADATTATO



$Z_B = Z_{00}$

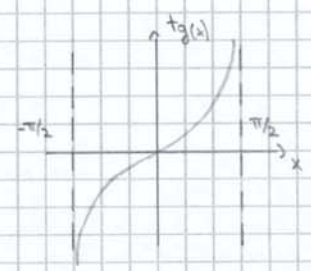
$\Gamma_B = \phi$

Come varia allora  $\Gamma(z)$  in questi casi?

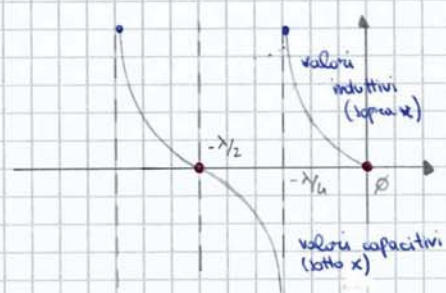
1)

$\Gamma_B = \frac{Z_B - Z_{00}}{Z_B + Z_{00}} = \phi$

$\Gamma(z) = -j \tan(\beta z)$



$\beta z = \frac{2\pi}{\lambda} z$        $\rightarrow$  agli zeri troviamo in  $z = \pm m \frac{\lambda}{4}$



• = punti a cortocircuito!

Non dire che spostandoti sulla linea NON ho solo valori a tensione nulla, ma una cambia!

Partendo dal corto (0) trovo valori induttivi poi capacitivi, poi un altro corto!

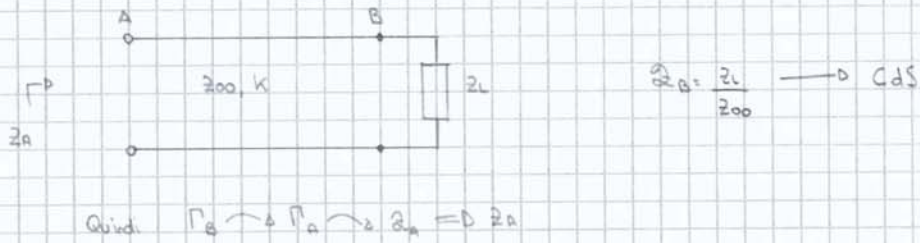
Ciò vuol dire che cambiando la P della linea vediamo come a tensione



Ad esempio:

- rette costanti parallele dell'asse immaginario nel piano  $\Gamma$  si trasformano in circonferenze di ampiezze diverse ma tutte tangenti nel punto  $\Gamma = 1$ !

Prova di verità della carta di Smith:

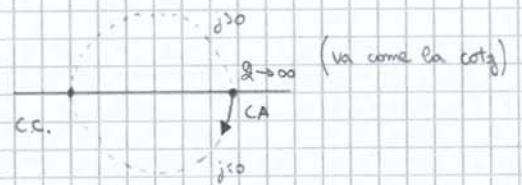


ESEMPI:

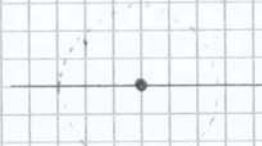
I LINEA IN CORTOCIRCUITO



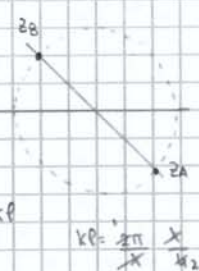
II LINEA IN CIRCUITO APERTO



III LINEA IN CARICO ADATTATO



NB: se  $\rho = \frac{\lambda}{4} \rightarrow 0$



$\rightarrow$  TRASFORMATORE  $\frac{\lambda}{4}$

$$\Gamma_A = \Gamma_B - 2k\rho$$

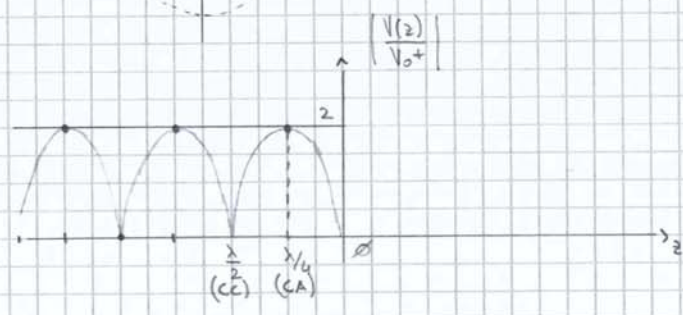
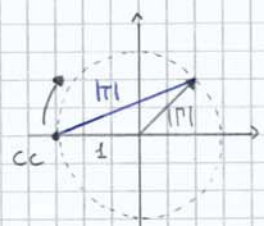
$$k\rho = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\lambda}$$

$\Gamma_A = \Gamma_B - \pi$  (la fase ruota di  $180^\circ$ )  $\rightarrow$  È dimostrabile dalla formula della tangente

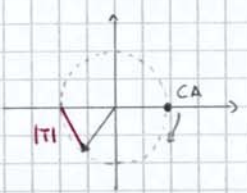
che  $\rho_A = \frac{1}{\rho_B}$

$$= 0 - 2k\rho = -2k \frac{\lambda}{4} = -\frac{\lambda k}{2} = -\frac{\lambda}{2\lambda} 2\pi = -\pi$$

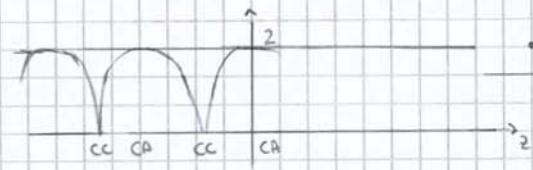
II CORTOCIRCUITO



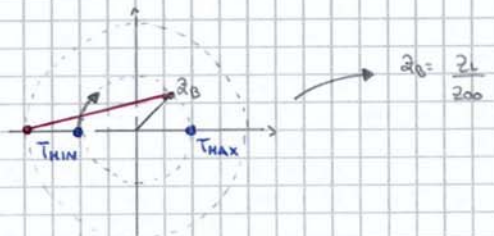
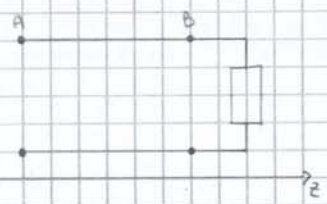
III CIRCUITO APERTO



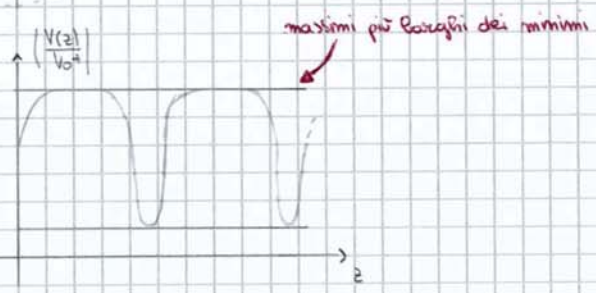
Dualmente dal cortocircuito



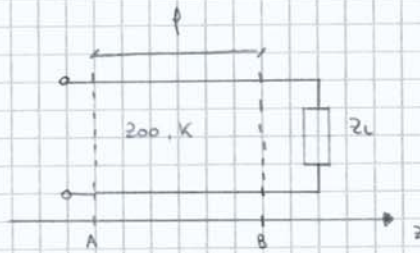
IV CARICO ZL QUALSIASI



$$R_0 = \frac{Z_L}{Z_0}$$



ESERCIZIO 1



$$Z_L = 100 + j100 \Omega$$

$$Z_0 = 100 \Omega$$

$$l = 0,3 \text{ m}$$

$$\lambda = 1 \text{ m}$$

Calcolare  $Z_i$ :

- I • uso la formula della  $t_g$
- II • uso  $\Gamma$
- III • uso CdS

Proviamo con il modo III:

normalizzo e trovo  $\Gamma_B = \frac{Z_B}{Z_0} = 1 + j$

$$|\Gamma_B| = 0,45$$

$$\frac{P}{\lambda|_B} + \frac{P}{\lambda|_{LINEA}} = \frac{P}{\lambda|_A} \quad \rightsquigarrow \quad |\Gamma_A| = |\Gamma_B| - 2kP \quad (\text{fase diversa})$$

$\frac{P}{\lambda|_B}$  trovo in CdS che vale 0,162 T.G. (trovando generator)

$$\frac{P}{\lambda|_{LINEA}} = \frac{0,3}{1} = 0,3$$

$$\frac{P}{\lambda|_A} = 0,3 + 0,162 = 0,462 \quad \text{e vedo nella CdS e lo trovo!}$$

interseco tale punto con la circonferenza unitaria al centro della CdS.

L'intersezione è la  $\Gamma_A$ !

$$\Gamma_A = 0,42 - 0,2j$$

Da cui:

$$Z_A = \frac{Z_0 \Gamma_A}{1 - \Gamma_A}$$

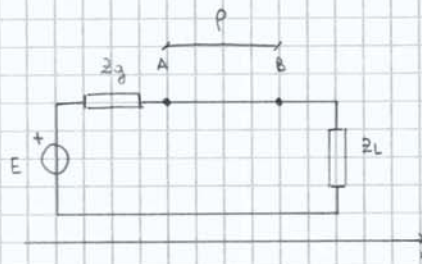
$$Z_A = 100 \cdot \Gamma_A = (42 - 20j) \Omega$$

**ESERCIZIO 6**

$$\frac{P}{\lambda} = 0,434$$

$$Z_{00} = 100 \Omega$$

$$Z_L = (260 + j180) \Omega$$



- Trovare il coefficiente  $\Gamma_B$

$$\Gamma_B = \frac{Z_L}{Z_{00}} = 2,6 + j1,8$$

↓

Calcolo

↓

$$|\Gamma_B| = 0,6$$

$$\angle \Gamma_B = 22^\circ$$

$$\Gamma_B = 0,6 e^{j22^\circ}$$

- ROS

$$= \frac{1 + |\Gamma_B|}{1 - |\Gamma_B|} = 4$$

- $Z_{in}$

$$\frac{P}{\lambda|_A} = \frac{P}{\lambda|_{LUN}} + \frac{P}{\lambda|_B}$$

$$= 0,434 + 0,22 = 0,654$$

$$Z_A = 0,7 + j1,2$$

$$Z_A = Z_A \cdot Z_{00} = (70 + j120) \Omega$$

Per dedurre!

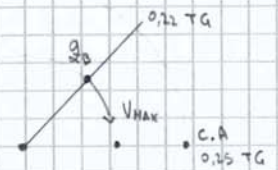
- Posizione del max della tensione a partire dal carico

Il primo max si trova in posizione di CA:

La distanza perciò sarà:

$$d = \frac{P}{\lambda|_{MAX}} - \frac{P}{\lambda|_B} = 0,25 - 0,22 = 0,03$$

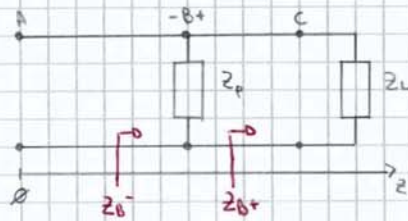
CC



Sella Cds veduto:



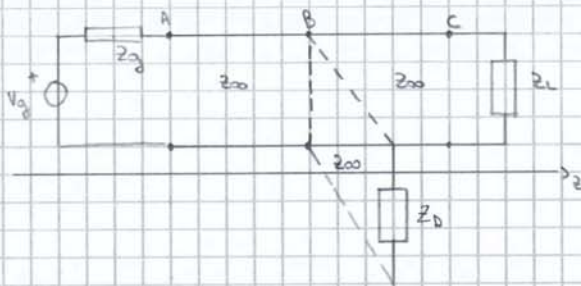
**II ELEMENTO IN PARALLELO**



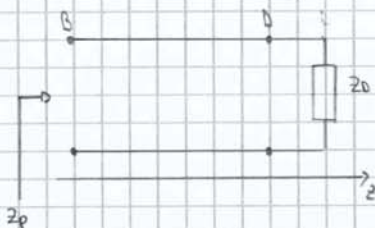
Suppondo di aver calcolato  $Y_p$  e  $Y_{B+}$ :

$$Y_e = Y_p + Y_{B+} \text{ da cui trovo } Z_e^-$$

Generalizzando il circuito è:



Devo staccare l'elemento e calcolarlo a parte:



NB: se  $Z_{00}$  è uguale nei tre punti della linea porta

$$Y_e^- = Y_p + Y_{B+}$$

altrimenti NO perché non sono normalizzate alla stessa  $Z_{00}$ !

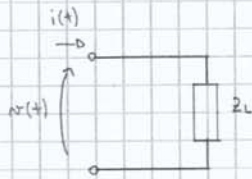
# LEZIONE 10

(21)

22/10/2015

## POTENZA LUNGO LA LINEA

### I) ELT

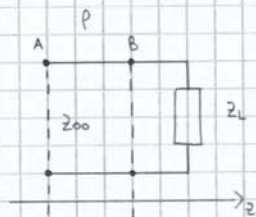


potenza istantanea

- $p(t) = v(t) i(t)$  il cui valore è
- $P + jQ = \frac{1}{2} V I^*$  → potenza complessa
- $P = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} V I^* \right\}$  → potenza ATTIVA

### II) SULLA LINEA

Ricordarsi di avere il parametro  $z$ , il resto è uguale.



potenza istantanea

- $p(z,t) = v(z,t) i(z,t)$  il cui valore è
- $P(z) + jQ(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z)$  → potenza complessa
- $P = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} V(z) I^*(z) \right\}$  → potenza ATTIVA

Trovo un'espressione  $P(V^+, V^-, P)$ :

$$V(z) = V^+(z) + V^-(z)$$

$$I(z) = I^+(z) + I^-(z) = \frac{Y_{00} V^+(z)}{I^+} - \frac{Y_{00} V^-(z)}{I^-}$$

$$P(z) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ [V^+(z) + V^-(z)] \left[ Y_{00}^* (V^+(z) - V^-(z)) \right]^* \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ Y_{00}^* \left[ |V^+(z)|^2 - |V^-(z)|^2 - V^+(z) V^-(z)^* + V^-(z) V^+(z)^* \right] \right\}$$

$Y_{00}^*$  →  $Y_{00}$  se la linea è reale →  $Y_{00}$  è reale  
 →  $a + jb$  " " " se perdite →  $Y_{00}$  è complesso

$$P(z) = \frac{1}{2} Y_{00} \text{Re} \left\{ |V^+|^2 - |V^-|^2 - 2j \dots \right\}$$

La parte immaginaria si somma, la reale si annulla

$$= \frac{1}{2} Y_{00} (|V^+|^2 - |V^-|^2)$$

poiché puramente Im la trascuriamo nel risultato finale

$$P(z) = \frac{1}{2} Y_{00} (|V^+|^2 - |V^-|^2)$$

$$= \frac{1}{2 Z_{00}} |V^+|^2 - \frac{1}{2 Z_{00}} |V^-|^2 = P^+ - P^-$$

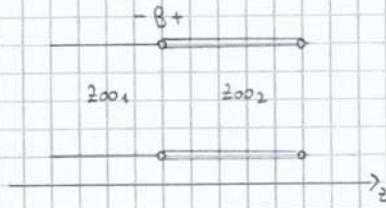
$P^+$  potenza incidente  
 $P^-$  potenza riflessa

$P(z) = P^+(z) - P^-(z)$

La loro differenza dà la potenza ATTIVA o NETTA

POTENZA NELLE DISCONTINUITÀ

(I)



$V_B^+ = V_B^-$  e  $I_B^+ = I_B^-$

$$P_{B^+} = \frac{|V_B^+|^2}{2z_{002}} (1 - |\Gamma_B^+|^2)$$

$$P_{B^-} = \frac{|V_B^-|^2}{2z_{001}} (1 - |\Gamma_B^-|^2)$$

sovrapposto  $V_B^+$  ( $V_B^-$ ) e  $\Gamma_B^+$  ( $\Gamma_B^-$ ) e faccio i conti ----

---- oppure punto da:

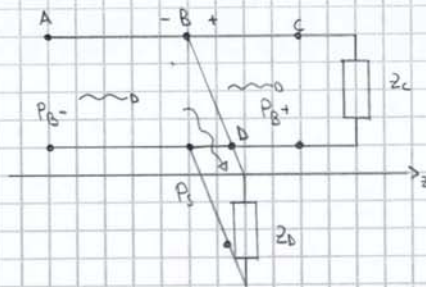
$$P_{B^+} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ V_B^+ I_B^{+*} \}$$

$$P_{B^-} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ V_B^- I_B^{-*} \}$$

da cui deduco immediatamente che:

$$P_{B^+} + P_{B^-}$$

(II)



$$P_{B^-} = P_{B^+} + P_s$$

$$P_{B^+} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ V_B^+ I_B^{+*} \}$$

$$P(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ V(z) I(z)^* \} = \frac{1}{2} G(z) |V(z)|^2$$

← scrive sfruttando la legge di Ohm

$$= \frac{1}{2} R(z) |I(z)|^2$$

←

Faccio il partitore di potenza:

$$P_{B^+} = \frac{1}{2} G_B |V_B^+|^2$$

$$P_s = \frac{1}{2} G_s |V_s|^2$$

La uso perché la potenza è costante nella discontinuità dal momento che la tensione è costante in questa discontinuità!



$$K_{\Gamma_A} = \frac{(R_A + jX_A + jX_G) - R_G}{(R_A + jX_A + jX_G) + R_G} \quad (1)$$

(23)

con  $\Gamma(z) = \frac{z(z) - z_0}{z(z) + z_0}$  da cui  $z(z) = \frac{z(z)}{z_0}$

e  $z(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}$

Vedendo formule (1) e (2) noto somiglianze e perciò normalizzo rispetto a  $R_G$ :

$$z' = z_A + jz_G$$

$$z' = \frac{z'}{z_G}$$

a cui associo il coefficiente di riflessione  $K_{\Gamma_A}$

NB

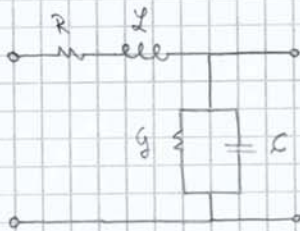
nella cds a  $z'$  corrisponde ora  $K_{\Gamma_A}$

# LEZIONE 11

(26)

23/10/2015

## LINEE CON PERDITE - POTENZA -



$$\begin{cases} -\frac{dV(z)}{dz} = \underbrace{(R + j\omega L)}_{j\omega L_c} I(z) \\ -\frac{dI(z)}{dz} = \underbrace{(G + j\omega C)}_{j\omega C_c} V(z) \end{cases} \quad -\frac{d^2 V(z)}{dz^2} = -(R + j\omega L)(G + j\omega C)V(z)$$

da cui:

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} - \underbrace{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}_{K^2} V(z) = 0$$

COSTANTE DI PROPAGAZIONE

$$K = \pm \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad \text{m}^{-1}$$

Avendo definito  $j\omega L_c$  e  $j\omega C_c$  posso estendere il risultato del caso ideale (senza perdite):

$$\begin{cases} (R + j\omega L) = j\omega L_c \\ (G + j\omega C) = j\omega C_c \end{cases} \quad \begin{cases} L_c = \frac{R}{j\omega} + L \\ C_c = \frac{G}{j\omega} + C \end{cases}$$

trovo quindi l'equazione d'onda con questi valori:

$$\begin{cases} V(z) = V_0^+ e^{jkz} + V_0^- e^{-jkz} \\ I(z) = Y_{00} V_0^+ e^{jkz} - Y_{00} V_0^- e^{-jkz} \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} K = \omega \sqrt{L_c C_c} \\ Z_{00} = \sqrt{\frac{L_c}{C_c}} \end{cases}$$

$$K = \omega \sqrt{\left(\frac{L+R}{j\omega}\right) \left(C + \frac{G}{j\omega}\right)} = \dots$$

Nota:  
oio lo parametri  
complessi

$$Z_{00} = \sqrt{\frac{R/j\omega + L}{G/j\omega + C}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad \text{con } \text{Re}\{Z_{00}\} > 0$$

$$K = \pm (\beta - j\alpha) \quad \begin{cases} \rightarrow \beta - j\alpha \\ \rightarrow -\beta + j\alpha \end{cases}$$

è esatto che io abbia 2 valori, perché tali  
valori corrispondono all'esistenza di un'onda  
propagante e di un'onda reattiva

PICCOLE PERDITE

Nella pratica non lavoro con queste perdite sino perde di utilità la cosa!

Per piccole perdite intendo:



otengo:

$$\begin{aligned}
 A) \quad Z_{00} &= \sqrt{\frac{j\omega L \left(\frac{R}{j\omega L} + 1\right)}{j\omega C \left(\frac{G}{j\omega C} + 1\right)}} \\
 &= \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 - j \frac{R}{2\omega L}\right) \left(1 + j \frac{G}{2\omega C}\right)
 \end{aligned}$$

considerando l'ipotesi di piccole perdite trascuro i termini dopo la radice e:

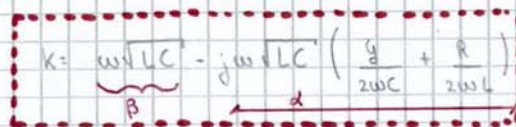


(sviluppo di Taylor)

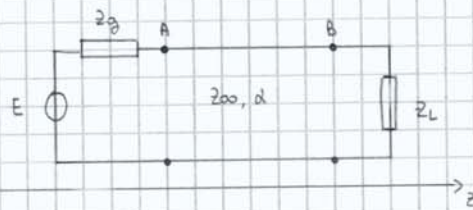
B)

$$\begin{aligned}
 K &= \sqrt{-(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \\
 &= \sqrt{-j\omega L \left(\frac{R}{j\omega L} + 1\right)(j\omega C) \left(\frac{G}{j\omega C} + 1\right)} \\
 &= \omega \sqrt{LC} \left(1 - j \frac{R}{2\omega L}\right) \left(1 + j \frac{G}{2\omega C}\right) \\
 &= \omega \sqrt{LC} \left(1 - j \frac{G}{2\omega C} - j \frac{R}{2\omega L} - \frac{RG}{4\omega^2 LC}\right)
 \end{aligned}$$

*non posso trascurare questi due termini perché K finisce nella fase*



Esercizio 10



Calcolare  $P_A$ ?

- Rete a piccole perdite

-  $E = 100V$   $Z_g = 50 \Omega$   $Z_L = (200 - j150) \Omega$   $\frac{P}{\lambda} = 10,135$   $Z_{00} = 75 \Omega$

2 dB - P = 3 dB

$Z_B = \frac{200 - j150}{75} = 2,6 - j2 \rightsquigarrow \text{Cds} \rightsquigarrow |\Gamma_B| = 0,62$

$\Gamma_B = \Gamma_A e^{2j\beta l} e^{-2\alpha l}$   $|\Gamma_B| = |\Gamma_A| e^{-2\alpha l}$

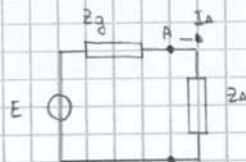
$\alpha l = \frac{\alpha_{dB} l}{8,686} = 0,346$   $e^{-2\alpha l} = 0,5 = A_N$

$|\Gamma_A| = 0,62 \cdot A_N = 0,31$

$\frac{P}{\lambda}_A = \frac{P}{\lambda}_B + \frac{P}{\lambda}_{\text{LINEA}} = 0,281 + 0,135 = 0,416 \rightsquigarrow \text{Cds}$

$Z_A = 0,65 - j0,6$

$Z_A = (48,7 - j30) \Omega$



METODO 1  $\left\{ \begin{aligned} I_A &= \frac{E}{Z_A + Z_g} \\ P_A &= \frac{1}{2} \text{Re}\{V_A I_A^*\} = \frac{1}{2} \text{Re}\{R_A |I_A|^2\} = 23 \text{ W} \end{aligned} \right.$    
*+ tutto perché ci sono i numeri complessi (solo parte reale)*

METODO 2  $\left\{ \begin{aligned} \Gamma_A &= \frac{Z_A - Z_g^*}{Z_A + Z_g} \\ Z &= Z_A + jX_g \quad \alpha = \frac{Z_A + jX_g}{R_g} \rightsquigarrow |\Gamma_A| = 0,083 \\ P_A &= P_{\text{diss}} (1 - |\Gamma_A|^2) = 22,89 \text{ W} \end{aligned} \right.$

$P_{\text{diss}} = \frac{|E|^2}{2R_g}$

## LEZIONE 12

(27)

29/10/2015

### CONFIGURAZIONI A L DATO

continuando l'adattamento uniforme:

Generalizzo l'equazione che ho per adattarsi:

$$Y_{in} = Y_{B^+} + jB = 1$$

$$= Y_{B^+} + Y_S = 1$$

$$Y_S = 1 - Y_{B^+}$$

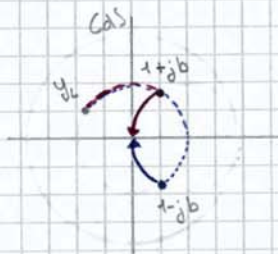
$$= 1 - (1 + jB)$$

$$= -jB$$

ADATTAMENTO UNIFORME

- Annullare parte immaginaria
- $|T_L| = \text{costante}$
- $\text{Re}\{Y_{in}\} = 1$

Devo realizzare un carico con suscettanza puramente reattiva o capacitiva, parto dalla linea in cortocircuito o circuito aperto:

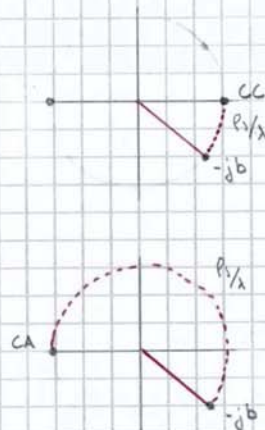


Di fatto dopo avere trovato il punto  $1 + jB$  sulla CdI parto forse un salto. Partendo dalla linea  $B^+$  alla  $B^-$  nella CdI stavo solo facendo un salto da quel punto al centro della CdI ( $Z_0$ ) sommando la sola parte immaginaria e tenendo costante la reale.

L'elemento come lo realizzo?

Supponiamo di avere presso  $1 - jB$ , serve  $+jB$ !

#### I) SUSCETTANZA INDUTTIVA



(NIN)

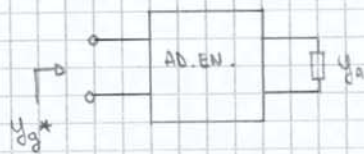
$$v_g = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi D}{k}$$

$$k = \frac{2\pi P}{v_g} = \frac{2\pi \cdot 1 \text{ GHz}}{2,3 \cdot 10^8} = 23,27 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 0,27 \text{ [m]}$$

$$P_{1s} = 0,339 \cdot 0,27 = 9,15 \text{ cm}$$

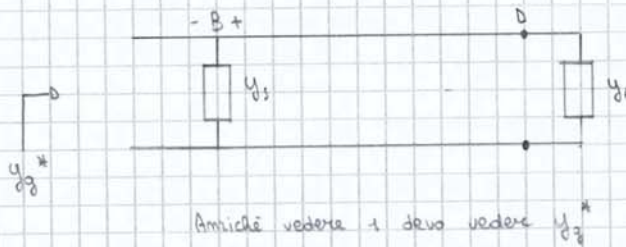
$$P_{1e} = 0,149 \cdot 0,27 = 4,02 \text{ cm}$$

II ADATTAMENTO DI ENERGIA



- ADATTAMENTO ENERGETICO
- Annullare parte reale
  - $|T_L| = \text{costante}$
  - $\text{Re}\{y_g^*\} = \text{costante}$

Provo a partire con la cella di uniformità da poco vista:



Amiche vedere i devo vedere  $y_g^*$

Considero  $|T_L| = \text{cost}$ ,

" poi  $\text{Re}\{y_g^*\} = \text{cost}$  e variando poi la parte immaginaria della cella trovo ciò che voglio!

NB  $\left\{ \begin{array}{l} A \neq \text{di prima non considero per anullo la circonferenza con parte reale costante} = 1 \\ \text{ma considero quella parte reale di } y_g^* \end{array} \right.$

$$y_B = y_{B+} + y_S$$

$$\begin{aligned} y_S &= y_B - y_{B+} \\ &= y_g^* - (\text{Re}\{y_{B+}\} + jb) = y_g^* - (\text{Re}\{y_g^*\} + jb) \\ &= \text{Im}\{y_g^*\} + j b \\ &= +j b_S \end{aligned}$$

Sapendo che  $y_2 = -j2,1$ , trova la  $\frac{P}{X}_{1s}$  corrispettiva:

$$\frac{P}{X}_{1s} = 0,321 \text{ TG}$$

Per la  $\frac{P}{X}_{LINEA}$ :

$$\frac{P}{X}_B = 0,441 \text{ TG}$$

$$\frac{P}{X}_{A^+} = 0,093 \text{ TG}$$

$$\frac{P}{X}_{LINEA} = (0,5 - 0,441) + 0,093 = 0,149$$

perché attraverso  
è come  $\emptyset$ !!

$$y_2 = -j2,1$$

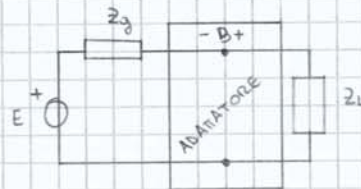


$$\frac{P}{X}_{1s} = 0,32$$

**ESERCIZIO 13**

Progettare un adattatore in modo da avere il massimo trasferimento di potenza sul carico

$$Z_L = (150 + j90) \Omega \quad Z_{00} = 100 \Omega \quad Z_g = (40 + j130) \Omega$$



$$Y_L = 1,5 + j0,9$$

$$Y_L = 0,5 - j0,3$$

$$Z_g = 0,4 + j1,3$$

$$Z_g^* = 0,4 - j1,3$$

$$Y_g^* = 0,2 + j0,7$$

Poiché le due circonferenze non si toccano faccio L rovesciato:

$$\text{Prendo } |Y_g^*| \text{ e } \text{Re } \{ Y_L \} = \text{costante}$$

trovo due punti a stessa impedenza:

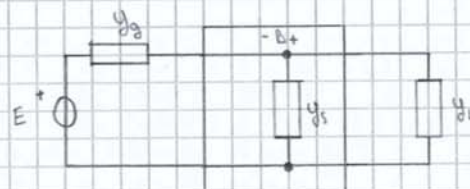
$$Y_B = 0,5 - j1,6$$

Progetto dunque  $Y_S$  come:

$$Y_B = Y_S + Y_B^*$$

$$Y_S = Y_B - Y_B^* = 0,5 - j1,6 - 0,5 + j0,3 = -j1,3$$

$$\frac{P}{\lambda_{LUNA}} = (0,354 - 0,25) = 0,104$$



$$\frac{P}{\lambda_{LUNA}} = (0,5 - 0,238) + 0,1 = 0,262$$



Su Cds:

•  $\alpha_B = \frac{R_L}{Z_{02}}$  che supporta  $\alpha < 1$

$\alpha_{A^*} = \frac{1}{\alpha_B}$  (giro di  $180^\circ$  gradi)

$\alpha_A = (\alpha_{A^*} \cdot Z_{02}) \frac{1}{Z_{01}} = 1$  ← condizione di ad. unif.

denormalizzo e rinormalizzo

$(Z_{02})^2 \frac{1}{R_L \cdot Z_{01}} = 1 \implies Z_{02} = \sqrt{R_L Z_{01}}$

• se  $\alpha_B > 1$



condizioni e potenze uguali!

Se  $Z_L$  non è reale, cosa faccio? Non posso più usare il trasformatore  $\frac{\lambda}{4}$  teoricamente:

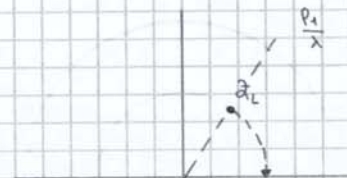
Devo fare un artificio se voglio fare qualcosa:

metto un pezzo di linea e vado

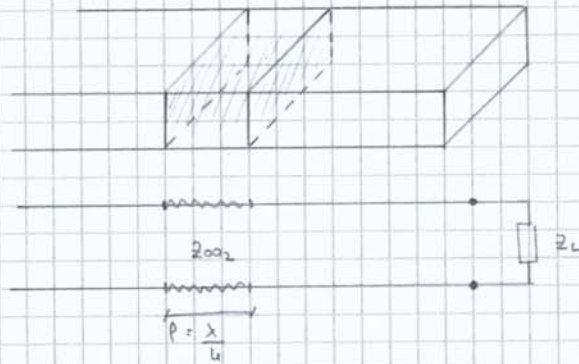
sull'asse reale in modo da poterlo

poi usare!

In questo modo realizzo in modo molto semplice un adattore di uniformità!



In microstruttura o guida rettangolare cosa succede?

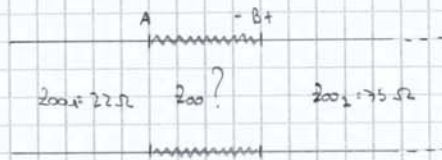


Inserendo un pezzo di dielettrico nella guida ad aria, costruita con apertura  $Z_{00}$  e di lunghezza  $\frac{\lambda}{4}$ , riesce a realizzare un adattamento di uniformità!

**ESERCIZIO 16**

Progettare adatt uniformità di  $P: \frac{\lambda}{4}$  tra A e B

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{\lambda}{4} \\ Z_{00} &= \sqrt{R_L Z_{002}} \end{aligned} \right\} \text{dalla teoria} \quad \begin{aligned} Z_{001} &= 22 \Omega \\ Z_{002} &= 75 \Omega \end{aligned}$$



Area comune lunga  $\rightarrow Z_{00} = Z_{002}$

$$\frac{P}{\lambda} = \frac{1}{4} \quad \lambda = 1 \rightarrow P = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ m}$$

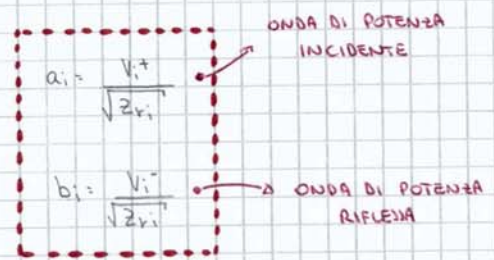
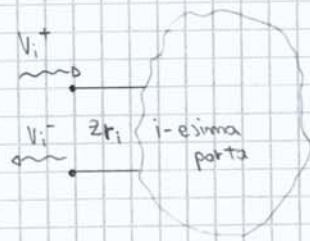
$$Z_{00} = \sqrt{Z_{001} Z_{002}} = 40,6 \Omega$$

Sapendo che a dx di B transita una potenza  $P_B = 1 \text{ mW}$ , calcolare il valore max e min di corrente in B e le regioni in cui tali valori sono raggiunti!

$$\begin{aligned} P_B &\rightarrow |I|^2 \\ I(z) &= I^+(z) \left( 1 + \Gamma(z) \right) \\ I_{\text{max}} &= 1 + |\Gamma(z)|
 \end{aligned}$$

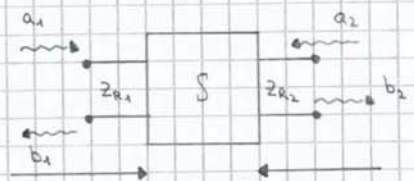
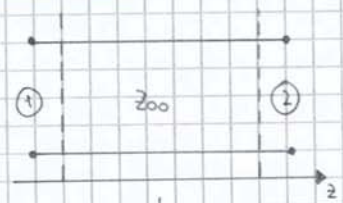
Molti testi definiscono  $[S]$  normalizzando  $V_i^+$  e  $V_i^-$  rispetto a un'impedenza:

Così trovo semplificazioni nel definire le potenze sulla porta



Così facendo definisco la matrice  $S$  come il rapporto, per tutta la parte, tra i parametri "a" e "b". Estenderò quanto fatto per n-porte.

**I) PEZZO DI LINEA 2-PORTE**



NB:  
L'asse  $z$  va preso entrante nella porta per definizione!

NB:  
Generalmente si cerca di avere  $Z_{R1} = Z_{R2}$ , ma poi nei casi + generale possibili sono  $\neq$ !

$$a_1 = \frac{V_1^+}{\sqrt{Z_{R1}}} \quad b_1 = \frac{V_1^-}{\sqrt{Z_{R1}}}$$

$$a_2 = \frac{V_2^+}{\sqrt{Z_{R2}}} \quad b_2 = \frac{V_2^-}{\sqrt{Z_{R2}}}$$

Andrò pertanto a ricavare  $b_1$  e  $b_2$  come funzione di  $a_1$  e  $a_2$  come estensione di  $T$  (avevo visto  $V^+(z) (V^+(z))$ ):

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2 \\ b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 \end{cases}$$

Se vogliamo analizzare la potenza:



$$P_i(z) = \frac{|V_i|^2}{2Z_{R_i}} (1 - |\Gamma_{R_i}(z)|^2)$$

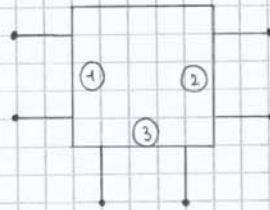
$$= \frac{|V_i|^2}{2Z_{R_i}} - \frac{|V_i|^2}{2Z_{R_i}} |\Gamma_{R_i}(z)|^2$$

$$= \frac{|a_i|^2}{2} - \frac{|b_i|^2}{2}$$

$$= P_i^+ - P_i^-$$

ecco perché  $a_i$  e  $b_i$  sono dette onde di potenza! Essi definiscono direttamente la potenza incidente e riflessa nella porta!

II 3 PORTE



$$\begin{cases} b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2 + S_{13} a_3 \\ b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 + S_{23} a_3 \\ b_3 = S_{31} a_1 + S_{32} a_2 + S_{33} a_3 \end{cases}$$

esempio:  $S_{11} = \begin{matrix} b_1 & a_1=0 \\ a_1 & a_2=0 \end{matrix}$

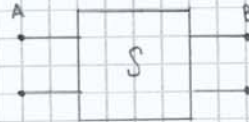
Di fatto metterò 2 cunicoli adattati in base a quali porte devo adattare!

Questo è verificabile quando:

$$S^{T*} \cdot S = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In tal caso  $P_A = P_B$



Dimostrazione:

se  $P_d = \phi$  allora  $P_A = P_B$ !

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_{dir} &= \frac{1}{2} (|\underline{a}|^2 - |\underline{b}|^2) = \phi \\ &= \frac{1}{2} (\underline{a}^{T*} \underline{a} - \underline{b}^{T*} \underline{b}) = \phi \\ &= \frac{1}{2} (\underline{a}^{T*} \underline{a} - \underline{a}^{T*} \underline{S}^{T*} \cdot \underline{S} \cdot \underline{a}) = \phi \\ &= \underline{a}^{T*} \left( \underline{1} - \underline{S}^{T*} \cdot \underline{S} \right) \underline{a} \end{aligned}$$

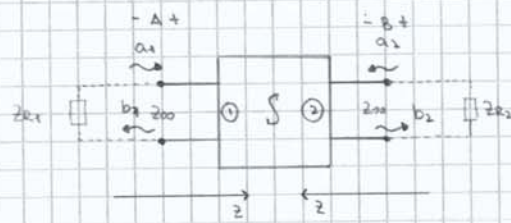
Matrice identità  
come anche  $\underline{a}^{T*} \cdot \underline{a} = \underline{1}$

#### IV: ATTIVITÀ DEL DISPOSITIVO

è attivo se  $|\lambda_i| > 1$   
 autovalori di  $S$

# LEZIONE 15

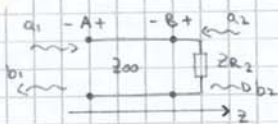
## ESERCIZI DI CALCOLO PARAMETRI SCATTERING



$$\begin{cases} b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2 \\ b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2 = \phi} & S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1 = \phi} \\ S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2 = \phi} & S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1 = \phi} \end{matrix}$$

Nel caso di linea solo composta da un cavo:



$$S_{11} = \frac{V_A^-}{V_A^+} \cdot \frac{\sqrt{Z_{R1}}}{\sqrt{Z_{R1}}} = \Gamma_A$$

$$Z_A^- = \frac{Z_{R2}}{Z_{00}} \xrightarrow{\text{CdS}} Z_A^+ \longrightarrow Z_A^- = Z_A^+ \frac{Z_{00}}{Z_{R1}} \longrightarrow \Gamma_A = S_{11}$$



$$S_{22} = \frac{V_C^-}{\sqrt{Z_{R2}}} \cdot \frac{\sqrt{Z_{R2}}}{V_C^-} = \Gamma_C$$

stesso procedimento fatto per  $S_{11}$

• Per reciprocità del circuito ricavo che:

$$S_{12} = S_{21}$$

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2 = \phi} = \frac{V_{B^+}}{\sqrt{Z_{R2}}} \cdot \frac{\sqrt{Z_{R1}}}{V_A^+} = \frac{V_{B^+}}{V_A^+} \sqrt{\frac{Z_{R1}}{Z_{R2}}}$$

$$V_{B^+} = \frac{V_B^+}{1 + \Gamma_{B^+}} = \frac{V_B^-}{1 + \Gamma_{B^-}} = \frac{V_B^- (1 + \Gamma_{B^-})}{1 + \Gamma_{B^-}} = V_B^- (1 + \Gamma_{B^-})$$

$$= V_A^+ e^{-jkL} (1 + \Gamma_{B^-}) = \frac{V_A^+}{(1 + \Gamma_{A^+})} e^{-jkL} (1 + \Gamma_{B^-}) = \frac{V_A^+}{(1 + \Gamma_{A^+})} e^{jkL} (1 + \Gamma_{B^-})$$

$$= \frac{V_A^+ (1 + \Gamma_{A^-})}{(1 + \Gamma_{A^+})} e^{jkL} (1 + \Gamma_{B^-})$$

$$\frac{V_{B^+}}{V_A^+} = \left( \frac{1 + \Gamma_{A^-}}{1 + \Gamma_{A^+}} \right) e^{jkL} (1 + \Gamma_{B^-}) \rightarrow \text{sostituire questo nel parametro e trovo}$$

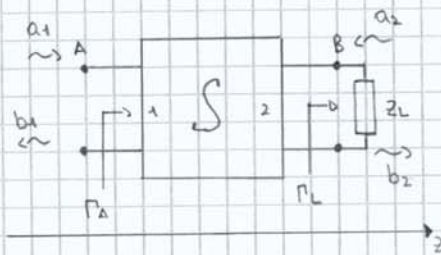
$$S_{21} = S_{12}$$

**NB** :

- se  $Z_{R1} = Z_{R2} = Z_0 \rightarrow S_{11} = S_{22}$  (simmetria)
- se  $Z_{R1} = Z_{R2} = Z_{00}$  ,  $\Gamma$  sono nulli  $\rightarrow S_{11} = S_{22} = \phi$
- " " " "  $\rightarrow S_{12} = S_{21} = e^{-jkL}$

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{-jkL} \\ e^{-jkL} & 0 \end{pmatrix} = \underline{S}$$

**GENERICO CALCOLO DI  $\Gamma_A$**



NB: Generalmente  $\Gamma_A \neq S_{11}$  perché  $S_{11}$  è definito con condizione di carico adattato su  $Z_{02}$ !

*Segue come z!*

$$\Gamma_L = \frac{V_B^-}{V_B^+} = \frac{a_2}{b_2} \quad \Gamma_A = \frac{V_A^-}{V_A^+} = \frac{b_1}{a_1}$$

$$\begin{cases} b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2 \\ b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 \\ \Gamma_L = \frac{a_2}{b_2} \end{cases} \quad \text{Trovo } b_1 \text{ e } b_2: \quad a_2 = \Gamma_L b_2 \text{ che sostituisco nelle altre due!}$$

$$\begin{cases} b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} \Gamma_L b_2 \\ b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} \Gamma_L b_2 \end{cases}$$

$$b_2 (1 - S_{22} \Gamma_L) = S_{21} a_1$$

$$b_2 = \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_L} a_1$$

Sotto la matrice scattering trovo la proporzionalità in B  $\rightarrow$  passo da  $V_B^-$  a  $V_A^+$  funzione della proporzionalità in A

Dualmente per  $b_1$ :

$$b_1 = S_{11} a_1 + \frac{S_{12} \Gamma_L S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_L} a_1$$

$$\Gamma_A = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12} \Gamma_L S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_L}$$

**Formula generica per  $\Gamma_A(\Gamma_L)$ !**

\* CASO PARTICOLARE:

se  $\Gamma_L$  (carico adattato sulla porta 2) allora  $\Gamma_A = \frac{b_1}{a_1} = S_{11}$

questo è ciò che dicevo all'inizio per dire che  $\Gamma_A \neq S_{11}$  in generale!

$$P_A = \frac{1}{2} |a_1|^2 (1 - |P_A|^2)$$
$$P_B = \frac{1}{2} |a_1|^2 \left| \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_L} \right|^2 (1 - |P_L|^2)$$

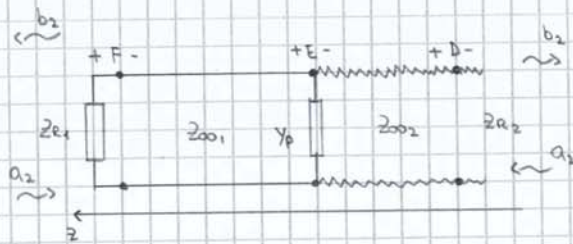
$$P_B = \frac{S_{21}^2}{1 - S_{22} \Gamma_L} \frac{1 - |P_L|^2}{1 - |P_A|^2} \cdot P_A$$



Poiché  $Z_{e1} = Z_{o1}$ , allora  $\alpha_A = \alpha_A'$ !

$$S_{11} = \Gamma_A = 0,61 e^{-j144^\circ}$$

$$S_{22} = \frac{b_2}{a_2} \Big|_{a_1 = 0}$$



$$S_{22} = \frac{V_2^-}{\sqrt{Z_{e2}}} \cdot \frac{\sqrt{Z_{e1}}}{V_1^+} = \Gamma_b'$$

$$Z_{E'} = Z_{o1} \quad (\text{stesso motivo di prima})$$

$$Y_{E'} = Y_{e1} = Y_{o1}$$

$$Y_p = -jY_{o1}$$

$$Y_{E'} = Y_p + Y_{E'} = Y_{o1} - jY_{o1}$$

$$\Gamma_b' = \frac{Y_{o1} - jY_{o1}}{Y_{o2}} = \frac{1/30 - j1/30}{1/60} = 2 - j2 \quad (\text{Cds})$$

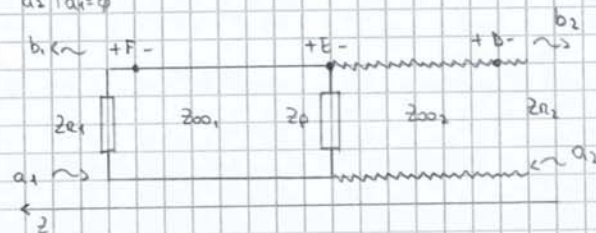
$$\alpha_b' = 0,25 + j0,25$$

$$\frac{P}{\lambda} = \frac{P}{\lambda} + \frac{3}{8} = 0,041 + 0,375 = 0,416 \text{ TG}$$

$$\alpha_b = 0,32 - j0,54$$

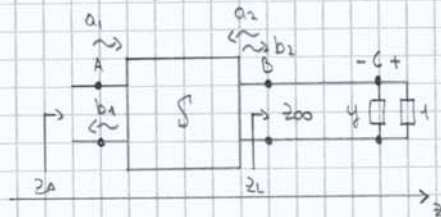
$$S_{22} = \Gamma_b = 0,62 e^{j119^\circ}$$

$$S_{12} = \frac{b_1}{a_2} \Big|_{a_1 = 0}$$



$$S_{12} = \frac{V_1^+}{\sqrt{Z_{e1}}} \cdot \frac{\sqrt{Z_{e2}}}{V_2^+}$$

**Esercizio 3**



$$\begin{cases} S_{11} = 0,1 & S_{12} = S_{21} = j0,5 \\ S_{22} = 0,2 \\ \Gamma_C = \frac{\lambda}{4} \\ Y = 1-j \\ Z_{R2} = Z_0 \end{cases}$$

- A • Calcolare  $\Gamma_A$
- B • "  $\frac{V_C}{V_A}$

(A) calcolato  $Z_L (\neq Z_{R2})$ , utilizzo della teoria  $\Gamma_A = \frac{S_{11} + S_{12} S_{21} \Gamma_B}{1 - S_{22} \Gamma_B}$  per calcolare il  $\Gamma$  nella apertura porta 1

$$Y_{C+} = 1$$

$$Y_C = Y + Y_{C+} = Y + 1 = 1 + 1 - j = 2 - j$$

poiché  $\Gamma_C = \frac{\lambda}{4}$ ,  $Y_{B+} = 0,4 + j0,2 \rightsquigarrow Z_{B+} = 2 - j = Y_C^{-1}$

$$|\Gamma_B| = 0,45 \quad \Gamma_B = 0,45 e^{-j26^\circ} = 0,4 - j0,2$$

$$\Gamma_A = 0,06 e^{-j90^\circ}$$

(B)

$$\begin{aligned} V_C^- &= V_C^+ (1 + \Gamma_C^-) \\ &= V_B^+ e^{-j0,5k\frac{\lambda}{4}} (1 + \Gamma_C^-) \end{aligned}$$

$$V_B^+ = b_2 \sqrt{Z_0}$$

$$b_2 = \frac{V_B^+}{\sqrt{Z_0}}$$

$$\begin{cases} b_2 = 0 a_1 \\ b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 & \Gamma_B = \frac{a_2}{b_2} \quad a_2 = \Gamma_B b_2 \\ b_2 = S_{21} a_1 + \Gamma_B b_2 S_{22} \\ b_2 = \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_B} \cdot a_1 \end{cases}$$

$$V_C^- = \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_B} a_1 e^{-j0,5k\frac{\lambda}{4}} (1 + \Gamma_C^-) \sqrt{Z_0}$$

$$= \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_B} \frac{V_A^+}{\sqrt{Z_0}} e^{-j0,5k\frac{\lambda}{4}} (1 + \Gamma_C^-) \sqrt{Z_0}$$

$$= \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_B} \frac{V_A}{1 + \Gamma_A} \frac{1}{\sqrt{Z_0}} e^{-j0,5k\frac{\lambda}{4}} (1 + \Gamma_C^-) \sqrt{Z_0}$$

(4)

# LEZIONE 17

## ESERCIZIO 2



$$Z_{01} = Z_0 \quad AB = \frac{\lambda}{2}$$

$$Z_{001} = \frac{Z_0}{5} \quad BC = \frac{\lambda}{4}$$

$$Z_{00} = 2Z_0 \quad BD = \frac{\lambda}{4}$$

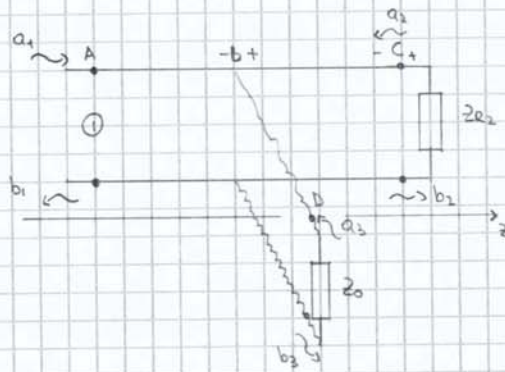
• Trovare  $S_{21}$

$$b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2 + S_{13} a_3$$

$$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 + S_{23} a_3$$

$$b_3 = S_{31} a_1 + S_{32} a_2 + S_{33} a_3$$

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1} \Big|_{\substack{a_2=d \\ a_3=d}}$$



$$S_{21} = \frac{V_{C+}}{\sqrt{Z_0}} \cdot \frac{\sqrt{Z_0}}{V_{A-}} = \frac{V_{C+}}{V_{A-}}$$

$$V_{C+} = \frac{V_{C-}}{1 + \Gamma_{C-}} = V_{C-} (1 + \Gamma_{C-}) e^{-jkBC}$$

per la condizione di carico è nullo!

$$= \frac{V_{0+}}{1 + \Gamma_{B+}} (1 + \Gamma_{C-}) e^{-jkBC} = V_{0-} \frac{1 + \Gamma_{C-}}{1 + \Gamma_{B+}} e^{-jkBC} = V_{0-} \frac{(1 + \Gamma_{0-})(1 + \Gamma_{C-})}{1 + \Gamma_{B+}} e^{-jkBC}$$

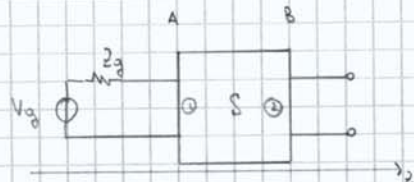
$$= V_{0+} \frac{(1 + \Gamma_{B+})(1 + \Gamma_{C-})}{(1 + \Gamma_{B+})} e^{-jkBC} e^{-jkAB}$$

poiché c'è discontinuità, allora  $V_{0+} \neq V_{0-}$ . segue che distinguo la tensione in A (+/-)

$$= \frac{V_{0+}}{1 + \Gamma_{A+}} \frac{(1 + \Gamma_{B+})(1 + \Gamma_{C-})}{(1 + \Gamma_{B+})} e^{-jk(BC+AB)}$$

$$\frac{V_{C+}}{V_{A-}} = \frac{(1 + \Gamma_{A-})}{(1 + \Gamma_{A+})} \frac{(1 + \Gamma_{B+})(1 + \Gamma_{C-})}{(1 + \Gamma_{B+})} e^{-jk(BC+AB)} = S_{21}$$

**Esercizio 4**

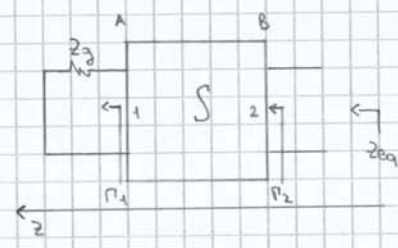


Calcolare il Thevenin.

$Z_{e1} = Z_0 = 100 \Omega$   
 $Z_{e2} = 2Z_0$   
 $Z_g = Z_0$

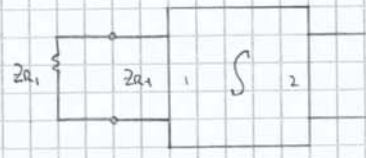
$$S = \begin{pmatrix} S_{11} = 0,4 & S_{12} = 0,6 \\ S_{21} = 0,6 & S_{22} = \phi \end{pmatrix}$$

(2eq)



io ho esattamente il circuito ribaltato:

$$P_2 = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} P_A}{1 - S_{11} P_A}$$



$P_A = \phi$

$P_2 = S_{22} = \phi$

$P_2 = \frac{Z_0 - Z_{02}}{Z_0 + Z_{02}} = \phi$

$Z_0 - Z_{02} = \phi$

$Z_0 - Z_{02} = Z_0 = 100 \Omega$

$Z_{01} = 100 \Omega$

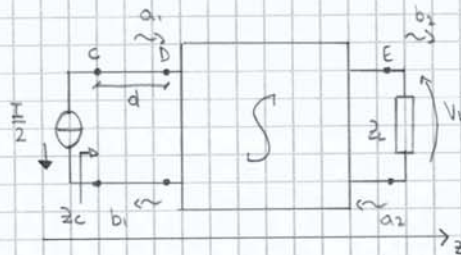
**Esercizio 6**

Calcolare  $V_L$  sui carichi  $Z_L$ ,  $P_L$  e la potenza dissipata nei doppi bipoli

$Z_L = (1.5 - j2) \Omega$   $d = \lambda/8$   $I = 1A$   $Z_{00} = 1 \Omega$

$$\begin{pmatrix} S_{11} = 0,1 & S_{12} = 0,6 \\ S_{21} = 0,6 & S_{22} = 0,1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{simmetrica e reciproca}$$

$(V_L)$



$$V_L = V_E = V_E^+ (1 + \Gamma_E)$$

$$\left( \text{come prima } b_2 = \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_E} \cdot a_1 \right)$$

$$V_L = V_0^+ \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_E} \cdot (1 + \Gamma_E)$$

$$= V_c^+ e^{-jk \cdot \lambda/8} \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_E} (1 + \Gamma_E)$$

$$= \frac{V_c}{1 + \Gamma_c} \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_E} (1 + \Gamma_E) e^{-jk \cdot \frac{\lambda}{8}}$$

$$= \frac{1 + \Gamma_E}{1 + \Gamma_c} \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_E} e^{-jk \cdot \frac{\lambda}{8}} Z_c \cdot \frac{I}{2} (-1)$$

*Pa corrente scade!*

$$\Gamma_E = 1,5 - j2 \xrightarrow{\text{CdS}} \Gamma_E = |\Gamma_E| e^{j\theta} = 0,64 e^{-j39^\circ}$$

$$\Gamma_D = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_E}{1 - S_{22} \Gamma_E} = 0,33 e^{-j28^\circ}$$

$$\Gamma_c = \Gamma_D e^{-2jk(\lambda/8)} = 0,33 e^{-j112^\circ}$$

$$Z_c = 0,62 - j0,41$$

$$V_L = 0,414 e^{j123^\circ}$$

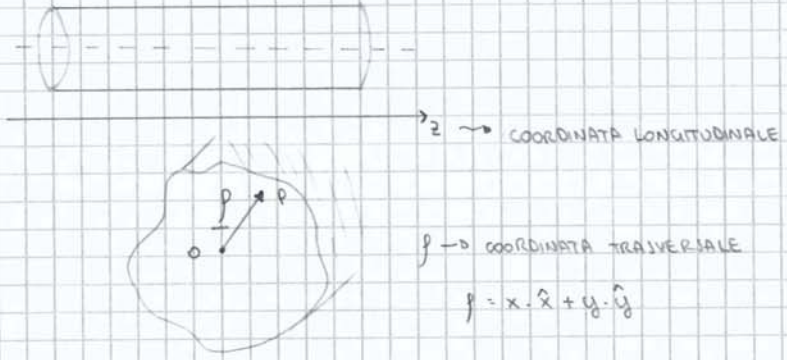
# LEZIONE 18

## GUIDE METALLICHE

Quella che noi studieremo in dettaglio è la rettangolare ma ne esistono d'altri tipi, quale la circolare.

A differenza di microstriscia, linea bifilare e cavo coassiale, le guide metalliche sono dispositivi ad un solo conduttore!

A livello geometrico:



Scrivo dunque i campi elettrico e magnetico per componenti:

•  $\underline{E}(x, y, z) = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$   
 ↳ il campo è già funzione!  
 $\underline{E}_{\text{trasversale}}$

•  $\underline{H}(x, y, z) = H_x \hat{x} + H_y \hat{y} + H_z \hat{z}$   
 $\underline{H}_{\text{trasversale}}$

Dunque scrivo anche l'operatore delle derivate parziali per componenti:

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

$\nabla_{\text{trasversale}}$

A partire dalle eq. di Maxwell + cond. nel contorno, Maxwell e Schwinger, trovano la soluzione in serie di stazionari!

Scopriamo pertanto che:

nella soluzione generale ci sono due effetti sovrapposti:

- ① TE: trasverso elettrico, il vettore campo elettrico è  $\perp$  alla direzione di propagazione dell'onda

TE è puramente trasversale  $\rightsquigarrow E_z = 0$

- ② TM: trasverso magnetico, il vettore campo magnetico è  $\perp$  anch'esso nella direzione di propagazione d'onda

TM è puramente trasversale  $\rightsquigarrow H_z = 0$

# LEZIONE 19

(15)

20/11/2015

$$\begin{aligned} \underline{E}_T(\underline{\rho}, z) &= \sum V_i^+(z) \underline{e}_i^+(\underline{\rho}) + \sum V_i^-(z) \underline{e}_i^-(\underline{\rho}) \\ \underline{H}_T(\underline{\rho}, z) &= \sum I_i^+(z) \underline{h}_i^+(\underline{\rho}) + \sum I_i^-(z) \underline{h}_i^-(\underline{\rho}) \end{aligned}$$

sommatoria che gestisce i TM
sommatoria che gestisce i TE

## LINEA MODALE

si riparte dalle equazioni dei telegrafisti

$$\begin{cases} -\frac{d}{dz} V_i(z) = j k_{z_i} z_{T_i} I_i(z) \\ -\frac{d}{dz} I_i(z) = j k_{z_i} Y_{T_i} V_i(z) \end{cases}$$

duque:

$$\begin{cases} V_i(z) = V_{0_i}^+ e^{-j k_{z_i} z} + V_{0_i}^- e^{j k_{z_i} z} \\ I_i(z) = I_{0_i}^+ e^{-j k_{z_i} z} + I_{0_i}^- e^{j k_{z_i} z} \end{cases}$$

Per le eq. dei telegrafisti soddisfiamo quelle equazioni

### CONSTANTE DI PROPAGAZIONE LONGITUDINALE

dove  $k_{z_i} = \sqrt{k_0^2 - k_{c_i}^2}$

(I) •  $k_0$ : associata al mezzo di riempimento della guida

se è reale sono nel caso delle onde normali perdenti  $k_{z_i}$  finisce nella fase della soluzione

$\Rightarrow k_0^2 > k_{c_i}^2$

il modo si propaga e si dice che sia SOPRATAGLIO

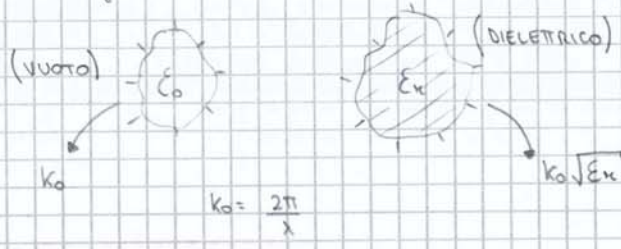
se è complesso invece avrà un modo che non si propaga

$\Rightarrow k_0^2 < k_{c_i}^2$

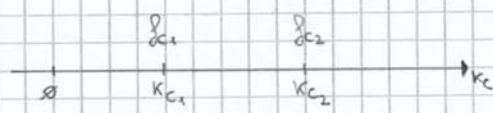
immaginario puro

$k_{z_i} = -j \beta$

il modo non si propaga nella linea ( $j = -1$ ), non c'è fase! Si dice che sia SOTTOTAGLIO



(II) •  $k_{c_i}$ : associata alla frequenza critica del modo i-esimo



proporzionali alle rispettive  $\frac{\omega}{c_i}$

$k_{c_i} = \frac{c}{\beta_{c_i}}$       $k_{c_i} = \frac{2\pi}{\lambda_{c_i}} = \frac{2\pi}{c} \frac{\omega}{\beta_{c_i}}$

(46)

Ora risolve la linea in modo classico, trovando correnti e tensioni!

Dopo di che i campi sono determinati applicando la formula che utilizza le autofunzioni:

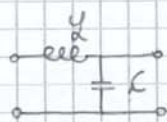
$$E_z(p, z) = V_i(z) \underline{e}_i(p)$$

$$H_z(p, z) = I_i(z) \underline{h}_i(p)$$

Autofunzioni "E" ed "H" danno numeri dati! (TABELLE)

CONFRONTO LINEA TEM

LINEA TEM



- $k_z = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$
- $Z_{00} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

TE + TM



- $k_{z_i} = \sqrt{k_0^2 - k_{c_i}^2}$
- $Z^{TE} = \frac{\omega \mu_0}{k_{z_i}}$
- $Z^{TM} = \frac{k_{z_i}}{\omega \epsilon_0}$

LUNGHEZZA D'ONDA GUIDATA

è il parametro  $\lambda$  che usiamo nella linea modale per spostarmi!

$$\lambda_{g_i} = \frac{2\pi}{k_{z_i}}$$

$$\lambda_{g_i} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_0^2 - k_{c_i}^2}}$$

$$= \frac{2\pi}{k_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_{c_i}}{k_0}\right)^2}}$$

$$\lambda_{g_i} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_{c_i}}{k_0}\right)^2}}$$



# LEZIONE 20

69

26/11/2015

Si vuole calcolare l'espressione di  $K_{c_i}$  nella guida rettangolare:

PROBLEMA	PROBLEMA
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>K_{c_i}</math></li> <li><math>e_i(\underline{p})</math></li> <li><math>h_i(\underline{p})</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>K_{c_i}</math></li> <li><math>\phi_i(\underline{p})</math></li> <li><math>\psi_i(\underline{p})</math></li> </ul>

Passo da un problema attuale ad un altro di autofunzioni e autovalori scalari, + semplice.  
Poi torna indietro:

$$e_i(\underline{p}) = - \frac{\nabla^2 \phi_i}{K_{c_i}}$$

Modi TM:

Nuovo sistema:

$$\begin{cases} (\nabla^2 + K_{c_i}^2) \phi_i(\underline{p}) = 0 \\ \phi_i(\underline{p})|_{\underline{p}_y} = 0 \end{cases}$$

*apice per i modi TM*

Condizione al contorno  $\underline{p}_y$ : Annullamento sul contorno della funzione scalare

$$e_i(\underline{p}) = - \frac{\nabla^2 \phi_i(\underline{p})}{K_{c_i}^2}$$

$$h_i(\underline{p}) = \hat{z} \otimes e_i(\underline{p})$$

*legame tra  $e_i$  e  $h_i$  mediante un prodotto vettoriale*



( $a > b$  guida rettangolare)

Si vuole risolvere il problema iniziale riducendolo in una funzione della sola  $x$ , e una di  $y$ .  $\rightarrow$  Separazione delle variabili!

Poi ricostruisco dunque  $K_{c_i}$

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + K_{c_i}^2 \right) \phi_i(x,y) = 0 \\ \phi_i(x,y)|_y = 0 \end{cases}$$

Applico la separazione delle variabili poiché lavoro nel sistema cartesiano:

$$\phi_i(x,y) = \phi_{x_i}(x) \cdot \phi_{y_i}(y)$$

da cui:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + K_{c_i}^2 \right) \phi_{x_i}(x) \cdot \phi_{y_i}(y) = 0$$

Segue che:

$$\phi_{x_m}(0) = \phi_{x_m}(a) = 0$$

$$\phi_{y_m}(0) = \phi_{y_m}(b) = 0$$

Perciò:

$$\begin{cases} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \gamma_m^2 \right) \phi_{x_m} = 0 \\ \phi_{x_m}(0) = \phi_{x_m}(a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left( \frac{d^2}{dy^2} + \eta_m^2 \right) \phi_{y_m} = 0 \\ \phi_{y_m}(0) = \phi_{y_m}(b) = 0 \end{cases}$$

Risolve le equazioni differenziali con il polinomio caratteristico, e:

$$\phi_{x_m}(x) = A_m \sin(\gamma_m x) + B_m \cos(\gamma_m x)$$

$$\phi_{x_m}(0) = 0 \rightsquigarrow B_m = 0 \rightsquigarrow \phi_{x_m}(x) = A_m \sin(\gamma_m x) = 0$$

$$\phi_{x_m}(a) = 0 \rightsquigarrow \phi_{x_m}(x) = A_m \sin(\gamma_m \cdot a) = 0$$

Trovo che:

$$\gamma_m = \frac{m\pi}{a}$$

Per trovare  $A_m$ :

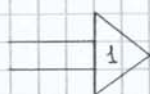
$$\langle \phi_{x_m}, \phi_{x_m} \rangle = \int_0^a \phi_{x_m}^2 = 1$$

$$\int_0^a A_m^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) dx = 1$$

$$A_m^2 \int_0^a \underbrace{\sin^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right)}_{a/2} dx = 1$$

$$A_m = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

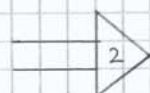
Ritrovo la 1<sup>a</sup> parte in x:



$$\phi_{x_m}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right)$$

$$\text{con } \gamma_m = \frac{m\pi}{a}$$

Se ritrovo la parte in y, invece:



$$\phi_{y_m}(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right)$$

$$\text{con } \eta_m = \frac{m\pi}{b}$$