NUMERO: 2067A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Tosti Michela

MATERIA: Analisi 2 + Calcolo Numerico - Prof. Quelali Franzos

29/09/2014
LEZIONE n 1

1

Analisi II - Quelali Guillermo -

Serie Numeriche

Definizione: Sia $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione di Reali, chiameremo SERIE NUMERICA $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (1)

Per ogni intero $k\geq 1$, chiamiamo SUCCESSIONE DELLE RIDOTTE: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$ ... $S_k = a_1 + a_2 \ldots + a_k$

inoltre: chiamiamo somma parziale k-esima della serie, la quantità

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_k = \sum_{J=0}^{k} a_J$$

N.B

Diciamo che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente se esiste ed è finito il limite delle somme parziali.

$$S = \lim_{k\to+\infty} S_k = \lim_{k\to+\infty} \sum_{J=1}^{k} a_J \quad (2)$$

SOLO IN TAL CASO! : diciamo che il n° S è la somma della serie (1)

invece: - se il limite (2) esiste ma è $= \pm\infty \Rightarrow$ SERIE DIVERGENTE
- se la somma NON ESISTE $\Rightarrow$ SERIE INDETERMINATA

Serie telescopiche:
MENGOLI
BERNULLI

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice telescopica se il termine generico $a_n = b_n - b_{n+1}$ $(\{b_n\}_{\geq 0})$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n = (b_1 - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + \ldots (\cancel{b_{n-1}} - \cancel{b_n}) + (\cancel{b_n} - b_{n+1})$$

$$S_n = b_1 - b_{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} b_1 - b_{n+1} \rightarrow \text{se } \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = B \in \mathbb{R} \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = b_1 - B$$

1) Serie di Mengoli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}_{a_n} \qquad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

($A = 1$, $B = -1$)

SERIE TELESCOPIC.

$$S_n = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{n-1} - \cancel{\tfrac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \tfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

2) Serie di Bernulli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

$$\frac{n \cdot n!}{(n+1)!\, n!} = \frac{(n+1-1)n!}{n!\,(n+1)!} = \frac{(n+1)n! - n!}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{SERIE TELESCOPICA}$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2!}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2!}} - \cancel{\tfrac{1}{3!}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3!}} - \tfrac{1}{4!}\right) \ldots + \left(\cancel{\tfrac{1}{(n-1)!}} - \cancel{\tfrac{1}{n!}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{n!}} - \frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \qquad \lim_{n\to+\infty} S_n = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

$S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (SUCCESSIONE DELLE RIDOTTE)

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & |x|<1 \quad \text{converge} \\ \infty & x\geq 1 \quad \text{diverge} \\ \nexists & x<-1 \quad \text{indeterminata} \end{cases}$$

Ricorda: $\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a|<1 \\ +\infty & a\geq 1 \\ \nexists & a<-1 \end{cases}$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x|<1}$$

es: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

esempio 2:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n - \left(\frac{4}{5}\right)^0 - \left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}$$

oppure:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^3}{1-\frac{4}{5}} = \frac{64}{25}$$ (POSSO FARLO SOLO CON LE SERIE GEOMETRICHE)

Serie a termini positivi: si definisce tale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Proposizione: Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi, allora la serie o converge o diverge positivamente

Proposizione (condizione necessaria): Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Se la serie converge, allora la successione dei termini della serie tende a 0.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \underset{\text{(converge)}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

NO! VICEVERSA!

se $a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge (non è detto che diverga!)

DIMOSTRAZIONE:

$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \\ \downarrow \quad\quad \downarrow \\ S - S = 0 \end{bmatrix}$$

esempio:

$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{tende a 0}} = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \ (\neq 0)$ non converge

esempio 2:

$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(e^{1/n}-1\right)$ $\quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n\left(e^{1/n}-1\right) = 1 \ (\neq 0)$ non converge

CRITERIO DEL CONFRONTO

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$

$a_k \geq 0$ $\quad b_k \geq 0$ (serie numeriche a termini positivi)

↳ sono serie che convergono o divergono +

$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 0$

1) la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ può convergere, se è così, converge anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

2) se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ DIVERGE, allora, diverge anche $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$

DIMOSTRAZIONE

$0 \leq a_0 \leq b_0 \Rightarrow 0 \leq a_0 + a_1 \leq b_0 + b_1 \Rightarrow 0 \leq a_0 + a_1 + a_2 \leq b_0 + b_1 + b_2$

ecc.... $0 \leq a_0 + a_1 + a_2 \dots + a_k \leq b_0 + b_1 + b_2 \dots + b_k$

ALLORA: $0 \leq a_k \leq b_k \quad \lim_{k \to +\infty} A_k \leq \lim_{k \to +\infty} B_k$ •

1) Se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge, $\lim_{k \to +\infty} B_k = B \in \mathbb{R}$

allora (•) $\lim_{k \to +\infty} A_k \leq B$ rimane limitata la serie a_k, quindi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente

2) $\sum_{k=0}^{\infty}$ DIVERGE ovvero $\lim_{k \to +\infty} a_k = +\infty$, quindi, per il criterio del confronto il limite $\lim_{k \to +\infty} B_k = +\infty$ perciò la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ DIVERGE.

ESEMPIO 1

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \qquad 0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k > 0$

$1/k^2 \leq \frac{1}{k(k+1)} = ?$

STUDIAMO: $\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{k^2} \geq 0 \qquad \frac{k-(k+1)}{k^2(k+1)} \geq 0$

$\frac{1}{k^2(k+1)} \geq 0$ se $k > -1$ per il confronto, questa serie converge.

ESEMPIO 2

CONFRONTIAMO
→ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} B_k$
→ $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k$

Esempio 2 (libro pag 6.12)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{2n^2+5}$$

$$b_n = \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n+3}{2n^2+5}}{\frac{1}{n}} = \frac{n+3}{2n^2+5} \cdot \frac{n}{1}$$

$$= \frac{n^2+3n}{2n^2+5} = \frac{1}{2}$$

perciò, la serie ha lo stesso comportamento della serie armonica quindi

Ricorda:

la serie armonica è $\frac{1}{n}$ ed è una serie che diverge sempre!

Esempio 3°

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2\pi}^2 \; n^{2+\frac{1}{2}}}} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\; n^{3/2 \cdot 1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot n^{1/2}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$ è divergente, quindi per il confronto asintotico la serie iniziale è divergente

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia data la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad a_n > 0, \ \forall n \geq 0$$

si suppone che esista finito o infinito il limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \quad (0 \pm \infty)$$

allora:

- $l = 1$ non posso usare questo criterio
- $l > 1$ diverge
- $l < 1$ converge

esempio 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

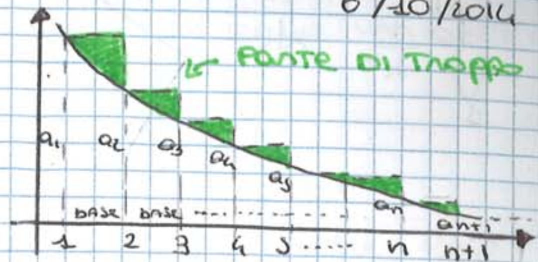
$n \geq 0$ (a termini positivi) se $x=0$ $\sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$ converge perciò $\Rightarrow$

LEZIONE 3
6/10/2014

Considero una serie

$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \quad a_j = f(j) \quad f[1,+\infty] \to \mathbb{R}$

- continua
- decrescente
- positiva



$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} f(j) = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{1}_{\text{base}} \cdot \underbrace{f(j)}_{\text{altezza}}$$

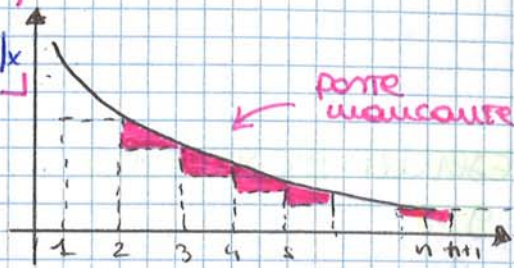
$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} f(j) \qquad \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n$$

ovvero l'integrale è < della somma dei rettangoli.

$$a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

$$S_{n+1} \leq a_1 + \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

ovvero l'integrale è > della somma dei rettangoli



Da cui $\boxed{S_{n+1} \leq a_1 + \int f(x)\,dx \leq a_1 + S_n}$

$\Rightarrow$ al quale posso applicare il teorema dei 2 carabinieri

CRITERIO DELL'INTEGRALE

Sia f una funzione
- continua
- positiva
- decrescente

su $[1,+\infty)$

allora:

1) Se l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge allora, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)$ converge

2) Se l'integrale improprio " " diverge allora, la serie " " diverge

Verifichiamo la serie armonica con questo criterio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge se } 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO/ESEMPIO:

I) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ $x \in \mathbb{R}$ serie a termini di segno variabile

ma, II) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(nx)|}{n^2}$ converge?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ converge $\Rightarrow$ allora converge anche la II

che porta a dire che la I converge ASSOLUTAMENTE
(e semplicemente)

Serie a Termini di Segno Alterno

DEFINIZIONE:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k \qquad b_k > 0, \ \forall k \geq 0}$$

$(-1)^{n^2+2n}$

pari: $(n=2m)$, $n^2+n2 = (2m)^2 + 4m = 4m^2 + 4m$ dimostra che se è pari è positiva

dispari: $(n=2m+1)$, $n^2+2n = (2m+1)^2 + 2(2m+1) = 4m + 8m + 3$ (dimostra che se è dispari è < 0

CRITERIO DI LEIBNIZ

DATA una serie di termini a segno alterno,
se VALGONO le 2 condizioni:

1. $\lim_{k \to +\infty} b_k = 0$
2. la successione $\{a_k\}$ per $k \geq 0$ è monotona DECRESCENTE

Allora, la serie a termini alterni è convergente (semplicem)

esempi/esercizi:

(16.1)

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ $\to \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ vale la 1^ condizione; $\to a_n = 1/n$ // // 2^ // $\Big]$ Allora converge!

(11.1)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(3^{1/n} - 1\right)$

- $\lim_{n \to +\infty} 3^{1/n} - 1 = 0$ vale 1^ condiz.
- $3^{n \nearrow} \circ \frac{1}{n}$ = decrescente (compongo; cresc, decres)

$\Big\}$ allora converge!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 176

APPLICO IL RAPPORTO

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{|x|^n}\cdot|x|}{\cancel{n!}(n+1)} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{|x|^n}} = \frac{|x|}{(n+1)} = 0 < 1$$ LA SERIE DI PARTENZA ha convergenza ASSOLUTA, QUINDI anche semplice

ESEMPIO N2

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} n^n |x|^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^n|x|^n} = n|x| = +\infty$$ DIVERGE ASSOLUTAMENTE CHE NON IMPLICO che DIVERGE SEMPLICEMENTE

$$\lim_{n\to+\infty} n^n x^n \neq 0 \quad x\neq 0$$ perciò non converge $\Rightarrow$ se non nell'origine

ESEMPIO 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$ APPLICO IL CRITERIO DEL RAPPORTO

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \Rightarrow \frac{\cancel{x^n}\cdot|x|}{n+1} \cdot \frac{n}{\cancel{x^n}}$$

$$\Rightarrow |x| \frac{n}{n+1} = |x| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$ $(-1,1)$ converge

$\to x=1 \Rightarrow$ PASSO A serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ DIVERGE

$\to x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge

perciò INSIEME DI CONVERGENZA

$[-1;1)$

TEOREMA: L'insieme di convergenza di una serie di potenze è sempre un INTERVALLO, NON VUOTO e CENTRATO nell'origine

POSSIBILI INSIEMI DI CONVERGENZA:

a.) $\{0\}$ $(\{x_0\})$

b.) $(-R,R)$, $[-R,R]$, $(-R,R]$, $[-R,R)$ $\quad R>0$

c.) $\mathbb{R}$

Teorema: determinazione del raggio di convergenza

$(-R, R)$ $[-R, R)$ $(-R, R]$ $[-R, R]$ $\mathbb{R}$

R = raggio di convergenza

Lezione 5

13/10/2014

Il raggio di convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ è

$$R = \sup\left(x \in \mathbb{R} \;/\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ converge}\right)$$

Criterio delle radici per le serie di potenze

Data la serie di potenze:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad , \quad \text{se esiste il limite}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \ell \quad (\mathrm{I})$$

allora il raggio di convergenza è dato da $R = \dfrac{1}{A}$

$$R = \begin{cases} 0 & A \to +\infty \\ 1/A & A \text{ finito} \\ +\infty & A \to 0 \end{cases}$$

N.B. criterio della radice per le serie di potenze $\neq$ criterio radice per le serie

Dimostrazione:

Supponiamo l'esistenza del limite (I) e che si abbia $0 < A < +\infty$. Consideriamo $x \neq 0$ e applichiamo il criterio della radice per la serie numerica: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$

Poniamo:

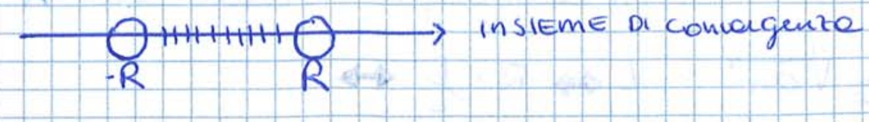
$$R = 1/A$$

da cui

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| = A \cdot |x| = \frac{1}{R}|x|$$

converge $\frac{1}{R}|x| < 1$ perciò $\alpha < 1$

$|x| < R$



$\Rightarrow$ implica: convergenza assoluta su $(-R, R)$ $\Rightarrow$ implico: convergenza semplice tra $(-R, R)$

Per assurdo:

Prendo $x_1 \,/\, |x_1| > R$

se la serie converge in $x_1 \,/\, |x_1| > R$ allora la serie converge assolutamente (per il corollario 2.26) per tutti gli $x \,/\, |x| < |x_1|$

Teorema (2.39)

Si consideri una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e si supponga che abbia R di convergenza $R>0$.

↳ Allora:

① la funzione $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è derivabile un numero qualsiasi di volte (C^∞) nell'intorno $(-R,R)$

↳ in particolare si ha che: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

② $\forall x \,/\, |x|<R$ vale: $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

Esempio 1

Ricorda! Mclaurin $\left(\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\right)$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x|<1$$

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad |x|<1$$

$$\hookrightarrow -\log(1-t)\Big|_0^x = -\log(1-x) + \underbrace{\log 1}_{=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Poniamo $-x = z$:

$$\log(1+z) = -1\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^{n+1}}{n+1}$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)(-1)^{n+1} \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

perché?

$$\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

$|z|<1$

$$(-1)(-z)^{n+1} = (-1)(-1)^{n+1} z^{n+1}$$

Esempio 2:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x|<1 \qquad \text{lo rifaccio in modo} \neq$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad |x|<1$$

RICORDI

$$-x = t^2$$

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$$

↳ Integro a destra e a sinistra

$$\int_0^t \frac{1}{1+z^2}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \qquad |t|<1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$$

LEZIONE 6

16/10/2014

Sviluppo di Taylor

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x-x_0)^n}$$

è la serie di Taylor in f, centrata in x_0

→ se essa ha raggio > 0 e la sua somma coincide con f in un intorno di x_0, la funzione si dice SVILUPPABILE in serie di Taylor o ANALITICA

↳ se $x_0 = 0$ si parla di serie di Mac Laurin

↳ può avere 2 problemi:

- Raggio nullo
- Raggio infinito e la somma non coincide con la f

Per risolvere questi problemi:

Considero il polinomio di Taylor $P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k$

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{R_n(x)}$$

↳ 'errore': resto n-esimo di Lagrange.

che dà $P_n(x) = f_n(x) - R_n(x)$

$P_n(x)$ → somma parziale secondo la definizione delle serie numeriche

se $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$? $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^m(0)}{n!} x^n$

$\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = S$ $\quad$ quando $R_n(x)$ è infinitesimo, il pb è viene risolto

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad |t|<|x|$$

Esempio:

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = f(x) = e^x \qquad R_n(x) \to 0\ ?$$

$$R_n(x) = \frac{e^t x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad |R_n(x)| = \left|\frac{e^t}{(x+1)} x^{n+1}\right| \qquad |t|<|x|$$

$$e^t \le e^{|t|} \Rightarrow |R_n(x)| = \left|\frac{e^t}{(n+1)!} x^{n+1}\right| < \left|\frac{e^{|t|}}{(n+1)!} x^{n+1}\right| <$$

$$< \frac{e^{|t|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

$$|R_n(x)| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

PRODOTTO ALLA CAUCHY

Date 2 serie di potenze entrambe partono da 0

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\boxed{c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}$$

$\Rightarrow$ questo è la serie prodotto ed ha RAGGIO DI CONVERGENZA $R \geq \min(R_1, R_2)$

$\hookrightarrow$ IL PIÙ PICCOLO TRA I 2 RAGGI

esempio:

$f(x) = \frac{1}{2-x}$ $\quad g(x) = \frac{1}{1-3x}$ - Scrivere con Mc Laurin
- Fare il prodotto alla cauchy

- $f(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n \qquad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

- $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n \qquad b_n = 3^n$

Prodotto alla cauchy: $c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6^k} =$

$= 3^n \frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{3^n}{10}\left(6-6^{-n}\right) = c_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{10}\left(6-6^{-n}\right) x^n$

RIPASSO EQ. DIFFERENZIALI

LEZIONE 7
20/10/2014

EQ. FUNZIONALI: Funzioni che hanno per incognite altre funzioni

1) Una funzione: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ | $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ è una EQUAZIONE FUNZIONALE.

esempio:

$f(x+y) = a(x+y)$

$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax \\ f(y) = ay \end{array}\right\} +$

2) Una funzione: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ è una EQUAZIONE FUNZIONALE

esempio:

$f(x) = a^x$

EQ. DIFFERENZIALE A VARIABILI SEPARABILI

$$\boxed{y'(x) = h(x) \cdot g(y) = f(x,y)}$$

$\exists\ y = k \ / \ g(k) = 0$?

$y' = 0 \iff 0 = 0$

se $g(y) \neq 0$ $\quad \frac{dy}{dx} = h(x)g(y)$ ovvero $\frac{1}{g(y)} dy = h(x)dx$

ovvero $\Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x)dx}$

soluzione

ESEMPIO:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{4x^3}{y} \\ y(0) = -3 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow f(x,y)$ → contenuta in E perché è il rapporto di funzioni continue

↳ $d(y'(x)) = -\frac{4x^3}{y^2}$ ⇒ sempre continua

allora: esiste un intervallo in cui il problema di Cauchy ha 1 e una sola soluzione

↳ $g(x)$ non si annulla mai, quindi non ci sono soluzioni costanti dell'eq. differenziale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{dy}$$

$$\int_{-3}^{y} u\,du = \int_0^x 4v^3 dv \Rightarrow \frac{u^2}{2}\Big|_{-3}^{y} = \frac{4v^4}{4}\Big|_0^x \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{9}{2} = x^4$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = x^4 + \frac{9}{2} \Rightarrow y^2 = 2x^4 + 9 \Rightarrow y = -\sqrt{2x^4+9}$$

uso il meno perché deve passare x -3

$$\Rightarrow y = -\sqrt{9(1 - \tfrac{2}{9}x^4)} = -3\sqrt{1 + \tfrac{2}{9}x^4} \sim -3\left(1 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{9}x^4\right) \quad x \to 0$$

$$\Rightarrow y \sim -3 - \tfrac{1}{3}x^4$$

EQ. DIFFERENZIALE DEL I ORDINE

$$\boxed{y'(x) = p(x)\,y(x) + q(x)}$$

$p, q : I \to \mathbb{R}$

soluzione

$$\boxed{y(x) = e^{\int p(x)dx}\left(\int \left(e^{-\int p(x)dx} q(x)dx\right) + c\right)}$$

ESEMPIO

$y'(x) = 2y(x)\, tg(x) + \sqrt{y(x)}$

$y(x) \neq 0$

DIVIDO TUTTO PER $\sqrt{y(x)}$ $\Rightarrow$ $\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = 2\sqrt{y(x)}\, tg(x) + 1$

DIVIDO TUTTO PER 2 $\Rightarrow$ $\frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}} = \sqrt{y(x)}\, tg(x) + \frac{1}{2}$

$$\boxed{\begin{array}{l} u(x) = \sqrt{y(x)} \\ u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y(x)}} \cdot y'(x) \end{array}}$$

$u'(x) = u(x)\, tg(x) + \frac{1}{2}$

calcolo la sua PRIMITIVA $\Rightarrow$ $\int tg\,x\, dx = \int \frac{sen\,x}{cos\,x} dx = -\int \frac{-sen\,x}{cos\,x} dx$

$\Rightarrow -\log|cos\,x|$

$u(x) = e^{-\log|cos\,x|} \left(\int e^{\log|cos\,x|} \frac{1}{2} dx + c \right)$

$u(x) = \frac{1}{|cos\,x|} \left(\frac{1}{2} \int |cos\,x|\, dx + c \right)$

$u(x) = \frac{1}{|cos\,x|} \cdot \frac{1}{2} sen\,x + c$

$u(0) = \frac{1}{cos(0)} \left(\frac{sen(0)}{2} + c \right)$

$1(0 + c) = 1$

$c = 1$

EQ. DIFFERENZIALE OMOGENEA

$$\boxed{y' = g\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad g: I \to \mathbb{R}$$

si pone : $\frac{y}{x} = t$

$\Rightarrow y(x) = t(x) \cdot x$

$y' = t'(x) \cdot x + t(x) \cdot 1$

$g(t) = t'(x) \cdot x + t(x)$

$t'(x)\,x = g(x) - t(x) \rightsquigarrow \boxed{t'(x) = \frac{g(x)}{x} - \frac{t(x)}{x}}$

EQ. Lineare del 1° ordine

DIREMO CHE:
l'integrale generale $y(x)$ dell'equazione (I) è DATO DALLA somma dell'integrale $y_0(x)$ dell'equazione omogenea associata all'equazione (II) con l'integrale particolare $y_p(x)$ dell'equazione non omogenea. ($b(x) \neq 0$)

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

dire che $y = \varphi(x)$ è una soluzione della (II) nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ significa:

1. $\varphi(x) \Rightarrow$ derivabile n volte
2. $\forall x \in I$ risulta che $\varphi^{(n)}(x) + a_1 \varphi^{(n-1)}(x) + a_2 \varphi^{(n-2)}(x) \dots + a_n + \varphi'(x) + a_n \varphi(x) = b(x)$ — DERIVATA n-ESIMA
3. $\varphi(x)$ deve soddisfare l'EQ. (I)

Problema di Cauchy

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

↳ lavora su $n+1$ elementi e arriva in $\mathbb{R}$

$y(x_0) = y_0$
$y'(x_0) = y_1$
$y''(x_0) = y_2$
$\vdots$
$y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

$x_0 \in I$

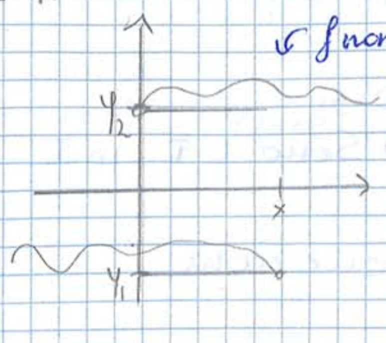
$(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in D$

$$f: \underbrace{\underset{x_0}{\underset{\downarrow}{I}} \times \underset{y_0, y_1}{\underset{\downarrow}{D}}}_{E \text{ con } n+1 \text{ elementi}} \to \mathbb{R}$$

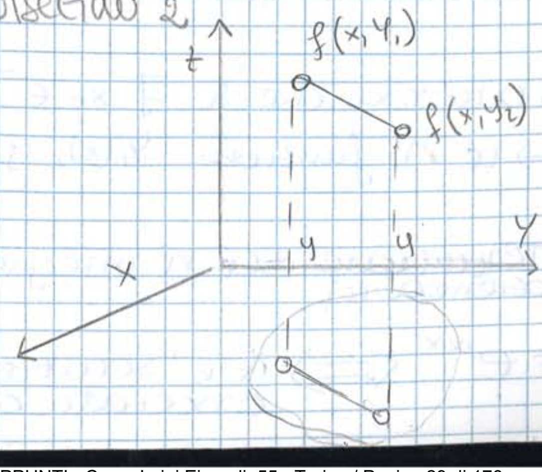
$f: E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione Lipschitziana su $E = I \times D$ rispetto a y e UNIFORME rispetto a x, se, $\exists\ L > 0$ (con $L \in \mathbb{R}$) se $\forall (x, y_1)\ (x, y_2)$ VALE:

$$\boxed{|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|}$$

DISEGNO 1



DISEGNO 2



$\lambda \to y'$. $\lambda^2 \to y''$ $\lambda^3 \to y'''$ ecc.... $\lambda^n \to y^n$

$$y^n(x) + a_1 y^{n-1}(x) + \dots + a_n y(x) = 0$$

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

$y = e^{\alpha x}$

$y' = \alpha e^{\alpha x}$

$y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$

$\vdots$

$y^n = \alpha^n e^{\alpha x}$

$$\alpha^n e^{\alpha x} + \alpha^{n-1} e^{\alpha x} a_1 + \dots + \alpha^2 \alpha^{\alpha x} a_{n-2} + \alpha^1 e^{\alpha x} a_{n-1} + e^{\alpha x} a_n = 0$$

$$\boxed{e^{\alpha x}\left(\alpha + \alpha^{n-1} a_1 \dots \alpha^2 a_{n-2} + \alpha a_n + a_n = 0\right)}$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA

se $\alpha = \lambda \Rightarrow e^{\alpha x}$ è soluzione della omogenea

CI SONO TRE CASI:

a) $P(\lambda) = 0$ $\omega(x) \neq 0$

$\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ (TUTTI DISTINTI) $\Rightarrow$ n soluz. dell' EQ. caratteristica

le soluzioni sono:

$Y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $Y_2 = e^{\lambda_2 x}$ ......, $Y_n = e^{\lambda_n x}$

quindi: soluzione dell'omogenea $Y_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \dots + C_n e^{\lambda_n x}$

con $C_1, \dots C_n \in \mathbb{R}$

b) $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$

$K_1 + K_2 \dots + K_n = n$

$r < n$ ciascun λ ha una certa molteplicità K

Soluzioni:

$Y_1 = e^{\alpha x}$, $Y_2 = x e^{\alpha x}$, $y_3 = x^2 e^{\alpha x}$ ...., $y_K = x^{K-1} e^{\alpha x}$

quindi

$e^{\lambda_j x}$, $x e^{\lambda_j x}$, $x^2 e^{\lambda_j x}$ .... $x^{K_j - 1} e^{\lambda_j x}$ $j: 1 \dots r$

la soluzione è: $y_0(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{ix} \cos 2x + C_3^{ix} \operatorname{sen}(-2x)$

ESEMPIO 2 EQ. DIFFERENZIALI

$y^3 - ky'' + k^2 y' - k^3 y = 0$

omog $\rightarrow \lambda^3 - k\lambda^2 + k^2\lambda - k^3 = 0$

$\lambda^2(\lambda - k) + k^2(\lambda - k) = 0$

$(\lambda^2 + k)(\lambda - k) = 0$

$\lambda = k$ oppure $\lambda^2 = -k \Rightarrow \lambda = \pm ik$

soluzione:

$y_0(x) = C_1 e^{kx} + C_2 \cos(kx) + C_3 \operatorname{sen}(kx)$

SOLUZIONI EQ. DIFFERENZIALI OMOGENEE

LEZIONE 9

27-10-2014

$ay'' + by' + cy = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ scrivo il P. caratteristico

$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$

Ci sono 3 casi:

$\Delta > 0$ $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ soluzioni $\begin{cases} y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \\ y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \end{cases}$

le soluzioni sono L.I infatti:

$$\underset{\text{matrice wronskiana}}{W(x)} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{per essere L.I.}$$

usando i dati:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \lambda_2 - e^{\lambda_2 x} e^{\lambda_1 x} \lambda_1 = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ L.I.

ESEMPIO SU COME SI PASSA DA SOLUZIONI A EQUAZIONE!

$$y_0(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + C_3 e^{2x}\cos(2x) + C_4 e^{2x}\operatorname{sen}(2x)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ ⇝ λ ha molteplicità 2

$\lambda_3 = 2-2i$

$\bar{\lambda}_3 = 2+2i$ DA cui:

$$P(\lambda) = (\lambda-3)^2 \cdot (\lambda-(2+2i))(\lambda-(2-2i))$$

oppure:

$\lambda = 2+2i \Rightarrow (\lambda-2) = 2i \Rightarrow (\lambda-2)^2 = (2i)^2 \Rightarrow (\lambda-2)^2 = -4 \Rightarrow (\lambda-2)^2+4=0$

DA cui: $(\lambda-3)^2 \cdot [(\lambda-2)^2+4]$ ..... ecc ....

SOLUZIONI EQ. DIFFERENZIALI NON OMOGENEE

RIPRENDO LA (I): $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots + a_{n-1}y' + a_n y = b(x)$

con $b(x) \neq 0$

SOLUZIONE:

$$\boxed{y(x) = \underbrace{y_0(x)}_{\text{soluzione omogenea}} + \underbrace{y_p(x)}_{\text{soluzione particolare}}}$$

P. caratteristico $\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$

METODO DELLA SOMIGLIANZA

① $b(x) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x)$

termine forzante

ⓐ se $P(\alpha) \neq 0$ (NON è soluzione del P.C.)

allora:

$$\boxed{y_p(x) = e^{\alpha x} \cdot q_m(x)}$$

ⓑ se $P(\alpha) = 0$ (α ha molteplicità h)

allora:

$$\boxed{y_p(x) = x^h \cdot e^{\alpha x} \cdot q_m(x)}$$

$y'(x) = 2Ax + B$
$y''(x) = 2A$
$y'''(x) = 0$

SOSTITUISCO: $18Ax + 9B = 2x$

$A = 1/9 \quad B = 0$

ESEMPIO 3

$y''' + 9y' = 2\cos x$

$2\cos x = 2e^{0x}(\cos x) + 0e^{0x}\sin x$

$\alpha = 0 \quad \beta = 1$

$y_p(x) = e^{\alpha x}\left(P_{1(e)}\cos(\beta x) + Q_{2(e)}\sin(\beta x)\right)$

$y_p = e^{0x}(A\cos x + B\cos x)$

$y' = -A\sin x + B\cos x$
$y_p'' = -A\cos x - B\sin x$
$y_p''' = A\sin x - B\cos x$

SOSTITUISCO:

$A\sin x - B\cos x - 9A\sin x + 9B\cos x = 2\cos x$

$-8A\sin x + 8B\cos x = 2\cos x \qquad A = 0 \quad B = 1/4$

$y_p(x) = 1/4 \sin x$

SISTEMI DI EQ. DIFFERENZIALI

LEZIONE 10

Lunedì 3/11/2014

SISTEMI DIFFERENZIALI OMOGENEI A COEF. COSTANTI

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

$$X' = AX \qquad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A: matrice coefficienti $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$(x(t), y(t)) \Rightarrow$ soluzioni del sistema

soddisfa $\forall t$ $\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$

Teorema 1.

L'insieme delle soluzioni $X(t)$ (vettore) del sistema $X' = AX$ (matrice $n \times n$) è uno spazio vettoriale

Teorema 2.

Lo spazio vettoriale delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $X' = AX$, con A $(n \times n)$, ha dimensione n

TEOREMA ⇨ AUTOVALORI REALI E DISTINTI

Sia A una matrice reale 2x2 con 2 autovalori reali e DISTINTI con i RELATIVI AUTOVETTORI V_1 e V_2

↳ Allora: le soluzioni $Y_1(t) = e^{\lambda_1 t} V_1$ $\quad Y_2(t) = e^{\lambda_2 t} V_2$

sono L.I. e la soluzione generale è DATA DA

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2}$$

se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\in \mathbb{R}$

ESEMPIO 1

$x'' + 3x' + 2x = 0$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \Rightarrow x_2' = x'' \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2' + 3x_2 + 2x_1 = 0 \\ x_2' = -3x_2 - 2x_1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -2x_1 - 3x_2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad x' = Ax \qquad |A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$

con

$\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \qquad -x_1 = x_2$$

$V = (1, -1)$

$\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad 2x_1 = -x_2$$

$x_2 = -2x_1$

$V_2 = (1, -2)$

con $\lambda = 0$ $\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad -x+2y=0 \quad x=2y \quad V_1=(2,1)$

con $\lambda = 3/2$ $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad -2x+y=0 \quad y=2x \quad V_2=(1,2)$

$y(t) = C_1 e^{0t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3/2 t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ perciò $\begin{cases} x(t) = 2C_1 + C_2 e^{3/2 t} \\ y(t) = C_1 + 2C_2 e^{3/2 t} \end{cases}$

---

lezione 11

6/11/2014

ESEMPIO 1

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{t} \\ 0e^{t} & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$

ESEMPIO 2

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e^{At} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & te^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}$

la t la mettiamo solo davanti a quelli che non stanno sulla diagonale

ESEMPIO 3

$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$

$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 2$

$V_1 = (-1,1) \quad V_2 = (3,1)$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ matrice di passaggio

$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A = PDP^{-1}$

$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$

NOTA BENE

$\rightarrow$ per arrivare a qst basta dare 2 valori a C_1 e C_2

determinante P $\quad |P| = -1-3 = -4 \neq 0$ invertibile

$P^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^{t} \rightsquigarrow P^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$x(t) = e^{At} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^{Dt}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -e^{-2t} & 3e^{2t} \\ e^{-2t} & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} [-e^{-2t} - 3e^{2t}] & [3e^{-2t} - 3e^{2t}] \\ [e^{-2t} - e^{2t}] & [-3e^{-2t} - e^{2t}] \end{pmatrix}$

$= -\frac{1}{4} C_1 \left(-e^{-2t} - 3e^{2t}\right) - \frac{1}{4} C_2 \left(3e^{-2t} - 3e^{2t}\right)$

$(*1) = s\frac{e^{3(t-s)}}{-3} + \frac{1}{3}\int e^{3(t-s)}\,ds = s\,\frac{e^{3(t-s)}}{-3} - \frac{1}{9}e^{3(t-s)}$

PER PARTI

$= \left(\left(-\frac{s}{3}e^{3(t-s)}\right) - \frac{1}{9}e^{3(t-s)}\right)_0^t = -\frac{t}{3} - \frac{1}{9} + \frac{e^{3t}}{9}$

$(*2) = -e^{t-s}\Big|_0^t = -1+e^t$

PERCIÒ DIVENTA:

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{3t}}{9} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9} \\ e^t - 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow y(t) = \underbrace{C_1 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{y_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{e^{3t}}{9} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9} \\ e^{t-1} \end{pmatrix}}_{y_{\text{particolare}}}$$

nel caso non reale

$X' = AX \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \qquad |A - \lambda I| = 0$

$\lambda^2 + \beta^2 = 0 \qquad \lambda^2 = -\beta^2 \begin{cases} \lambda = i\beta \\ \lambda = -i\beta \end{cases}$

$(A - I\beta i) = \begin{pmatrix} i\beta & \beta \\ -\beta & i\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$i\beta x + \beta y = 0 \qquad i\beta(x) + \beta y = 0 + 0i \implies 0 = 0$

$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x(t) = e^{i\beta t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\cos\beta t + i\,i\,\mathrm{sen}\,\beta t \\ \cos\beta t + i\,\mathrm{sen}\,\beta t \end{pmatrix}$

PER EULERO:

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{sen}\,\beta t + i\cos\beta t \\ \cos\beta t + i\,\mathrm{sen}\,\beta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}\,\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \cos\beta t \\ \mathrm{sen}\,\beta t \end{pmatrix}$$

reale IMMAGINARIO

$= \boxed{X_{RE}(t) + i X_{IM}(t)}$

OSSERVAZIONE:

Se $X(t) = X_{RE}(t) + iX_{IM}(t)$ è una soluzione complessa del sistema DIFF. lineare $X' = AX$

RICAPITOLANDO. LEZIONE 12

Se $x' = AX$ con A MATRICE 2x2 con λ_1, λ_2 ; V_1, V_2 10-11-2014

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} U_2$
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \notin \mathbb{R}$ SE $\lambda_1 = \beta i$, $\lambda_2 = -\beta i$	$C_1 X_{RE}(t) + C_2 X_{IM}(t)$ ovvero: $C_1 \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix}$
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \notin \mathbb{R}$ SE $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$C_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{pmatrix} + C_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix}$
$\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$C_1 e^{at} + C_2 e^{bt}$

ESEMPIO

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -5x + 3y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad |A - \lambda I| = 0$$

da cui $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda) + 25 = (3-\lambda)^2 = -25 \qquad \lambda = 3 \pm 5i$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} \cos(5t) \\ -\sin(5t) \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} \sin 5t \\ \cos 5t \end{pmatrix}$$

Se 2x2 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ y'(t) = by(t) \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad \frac{dx}{dt} = ax \qquad \int \frac{dx}{x} = \int a\,dt$$

$\log x = at \qquad x = e^{at}$ DA cui $\Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_1 e^{at} \\ y(t) = C_2 e^{bt} \end{cases}$

ESEMPIO

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) \\ y'(t) = 3y(t) \end{cases} \Rightarrow \text{SOLUZIONI IMMEDIATE} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_1 e^{3t} \\ y(t) = C_2 e^{3t} \end{cases}$$

CASO PARTICOLARE

DECOMPOSIZIONE DI JORDAN

$$V/_{AU} = \underbrace{V_1}_{\text{autovettore}} + \alpha u$$

$$AU = V_1 + \alpha u$$

$$AU = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b \\ \alpha b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a\alpha + b \\ \alpha b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a\alpha + b = 1 + \alpha a \\ \alpha b = \alpha b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

$$u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = P \underbrace{J}_{\text{Jordan}} P^{-1}}$$

$$J = P^{-1} A P$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = P e^{Jt} P^{-1}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & te^{\alpha t} \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha t & te^{\alpha t} \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix}$$

* vedi soluzione precedente

ESERCIZIO

$$\begin{cases} x'(t) = -8x(t) + y(t) \\ y'(t) = -36x(t) + 4y(t) \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -36 & 4 \end{pmatrix} \qquad |A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -8-\lambda & 1 \\ -36 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (-8-\lambda)(4-\lambda) + 36 = -32 + 8\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 36 =$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

$$\begin{pmatrix} -8+2 & 1 \\ -36 & 4+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -6x + y = 0 \\ -36x + 6y = 0 \end{cases} \qquad y = 6x$$

$$x = 1 \quad y = 6 \qquad V = (1, 6)$$

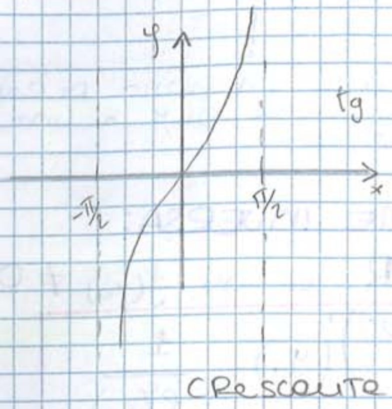
Funzioni Implicite

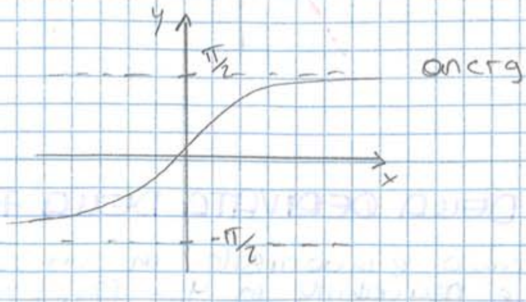
LEZIONE 13
13-11-'14

Esempio 1

$y = tg(x) = f(x) \qquad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

esplicitare x in funzione di y da cui $\Rightarrow x = \arctan y$

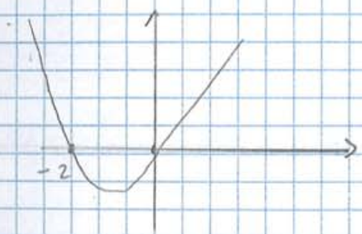




crescente $\longrightarrow$ perciò crescente

Esempio 2

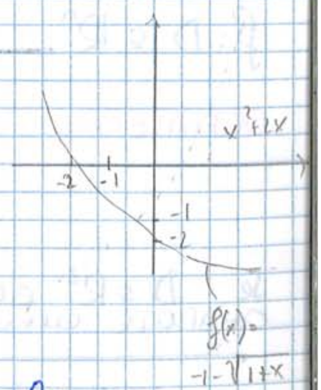
$y = x^2 + 2x$



non invertibile su $\mathbb{R}$ perché non iniettiva
$\Downarrow$
la divido in intervalli
$(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$
in questi 2 intervalli si può invertire

$\hookrightarrow x^2 + 2x - y = 0$

$\Delta = 4 + 4y \qquad x_1 = -1 + \sqrt{1+y} \qquad x_2 = -1 - \sqrt{1+y}$



Esempio importante

$f(x) = e^x + x$

NON siamo in grado di esplicitare la x in funzione di y
ma siamo in grado di tracciare il grafico della f inversa
come simmetria di f rispetto a $y = x$

$e^x = 1 + x + o(x) \qquad x \to 0$

$f(x) = e^x + x = 1 + x + x + o(x)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 176

ESEMPIO 2

$$f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + 1$$

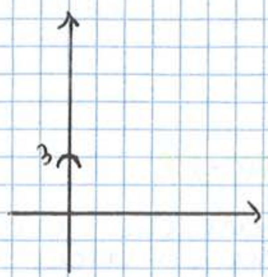
$f(x,y) = 0 \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = -1$ (nessuna soluzione)

Localmente tutte le soluzioni di $f(x,y) = 0$ si possono rappresentare tramite una funzione che dipende solo da x o y?

ovvero:
$$\boxed{\begin{array}{l} \exists\, \varphi(x) : f(x, \varphi(x)) = 0 \ ? \\ \exists\, \psi(y) : f(\psi(y), y) = 0 \ ? \end{array}}$$

ESEMPIO ESPLICATIVO

$$f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$$



Fisso il punto $(0,3)$ che vi da $f(x,y) = 0$

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \iff y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$

$y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \qquad y(x) = 3\sqrt{1 - x^2/4}$

$(x, \varphi(x)) \longrightarrow$ in un intorno di $(0,0)$

TEOREMA DEL DINI O DELLE FUNZIONI IMPLICITE

Sia D un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^2$ e sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1

1ª Hp:
Supponiamo che in un pt $(x_0, y_0) \in D$ si abbia $f(x_0, y_0) = 0$

2ª Hp:
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Allora esiste un intorno $I = (x_0 - a, x_0 + a)$ di x_0 e una funzione $\varphi : I \to \mathbb{R}$ tale che:

la soluzione è unica e:
1. $(x, \varphi(x)) \in D \quad \forall x \in I$
2. $y_0 = \varphi(x_0)$
3. $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
4. φ è di classe C^1 in I e la sua derivata $\longrightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) = e^{\varphi(x)} + x e^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) + 2(\varphi(x)-2) + 2(x-1)\varphi'(x)$$

- $(x=0, y=2)$ $\varphi(x)=2$

$$0 = e^2 + \cancel{0 \cdot \varphi'(x)} + 2(2-2) + 2(0-1)\varphi'(x) = e^2 - 2\varphi'(x)$$

$$\varphi'(x) = \frac{e^2}{2}$$

per il teorema: $\varphi'(x) = -\frac{e^2}{-2} = \frac{e^2}{2}$ $\quad \varphi(x)$ in $I_{(0,2)}$ è crescente e $\varphi'(0)>0$

ESEMPIO 4

- Verifica che l'equazione $x^3 + x + y + y^3 - 4 = 0$ definisce implicitamente 1 e 1 sola soluzione (funzione) $y = \varphi(x) \in C^\infty \mid \varphi(1)=1$
- Inoltre calcola $\varphi'(1)$ e $\varphi''(1)$

- $f(x,y) = x^3 + x + y + y^3 - 4 = 0$

per DINI:

- $f(1,1) = 0$? $\quad 1+1+1+1-4=0 \Rightarrow 0=0$ SI!
- $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$? $\quad 1+3y^2 \Rightarrow 1+3 \neq 0$ SI!

posso applicare DINI:

$\Rightarrow$ ESISTONO 2 COSTANTI a, b e 1 SOLA FUNZIONE

$$\varphi: (1-a, 1+a) \to (1-b, 1+b)$$

tali che $f(x,y)=0$ in $(1-a, 1+a) \times (1-b, 1+b) \Leftrightarrow y = \varphi(x)$

- $\varphi \in C^1((1-a), (1+a))$

$$\varphi'(1) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)} = -\frac{4}{4} = -1 < 0 \quad (\text{localmente } \varphi \text{ decresce})$$

$$f(x,y) = x^3 + x + y + y^3 - 4$$

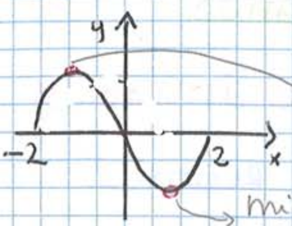
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 1 \leadsto \text{in } (1,1) = 3+1 = 4$$

-

$\Sigma \Rightarrow$ Quelli trovati in ANALISI I $\Rightarrow$ Sono punti di max e min liberi!
(li trovo con $f'(x)=0$)

- mentre

$f(x) = x(x^2-4)$ $\quad$ $x \in [-2,2]$ $\quad$ Vincolo la funzione a $[-2,2]$
↳ diventano MAX e MIN VINCOLATI!

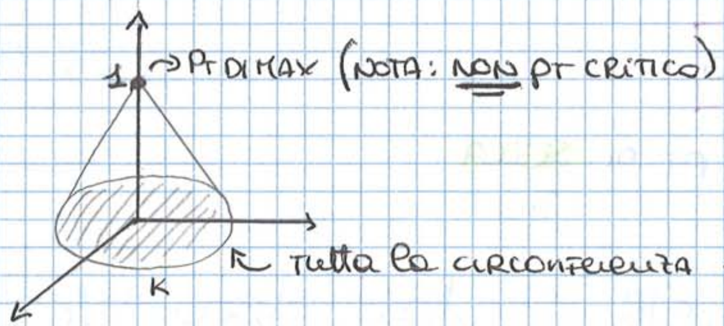


→ minimo e massimo vincolati tra $[-2,2]$, non liberi perché non so se la funzione si comporta in modo particolare per $x<-2$ e $x>2$
+ pt di sella

Ricorda: max, min liberi li vuole calcolati con matrice Hessiana

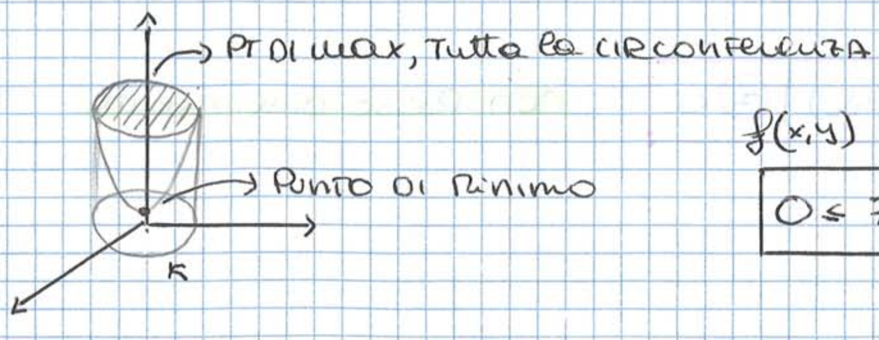
TEOREMA WAIERSTRASS PER FUNZIONI IN 2 VARIABILI

- Se ho una funzione continua in un insieme compatto (ovvero: limitato e chiuso) $K \subset \mathbb{R}^2$
↳ Allora l'immagine $f(K)$ è un intervallo chiuso e limitato
In particolare: f ammette max e min



$f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$

$\boxed{z > 0}$



$f(x,y) = x^2+y^2$

$\boxed{0 \le z \le 1}$

- RIPASSO HESSIANA PER MAX e MIN LIBERI

$f(x,y)$
$\nabla f = 0$
$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$H(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

ESEMPIO 2

$f(x,y) = x^2 - y^2$

$\nabla = \begin{cases} 2x \\ -2y \end{cases} \rightsquigarrow (0,0)$ PUNTO STAZIONARIO $\quad H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$

$(0,0) \Rightarrow$ SELLA

ESEMPIO 3

$f(x,y) = xy - x + y$

$\nabla = \begin{cases} y-1 \\ x+1 \end{cases} \quad \nabla = 0 \Rightarrow (-1,1)$ P. STAZ. $\quad H = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$

$(-1,1) \Rightarrow$ sella

---

per cercare gli estremi (max, min) di $z = f(x,y)$ VINCOLATI SU UNA CURVA DEL PIANO:

LEZIONE 15
20/11/2014

$\Rightarrow$ cercare max e min con il vincolo che la coppia $(x,y) \in \mathbb{R}$ e $(0,2)$ SODDISFI l'EQUAZIONE $g(x,y) = k$

- considero la curva $\gamma(t) = (x(t) = \gamma_1(t),\ y(t) = \gamma_2(t))$ con $t \in I \subseteq \mathbb{R}$

  - vedo cosa succede componendo f con $\gamma(t)$

$$\underbrace{f(\gamma(t))}_{\frac{d}{dt} f(\gamma(t))} = f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

- Uso ora la regola della catena:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(\gamma(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \gamma_1(t)\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} f(\gamma(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \gamma_2(t)\right) =$$

$$= \nabla f \cdot \gamma'(t) \quad \text{(prodotto scalare)} \quad \text{dove} \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Se $\frac{d}{dx} f = 0 \ \Big| \ \frac{d}{dx} f(x(t), y(t)) = 0$

ESEMPIO 2

$f(x,y) = x^2 + y^2$ con vincolo $x + y = 1$

$y = 1 - x$

$\gamma(t) = (t, 1-t)$

$f(\gamma(t)) = x^2(t) + y^2(t) = t^2 + 1 + t^2 - 2t = 2t^2 - 2t + 1$

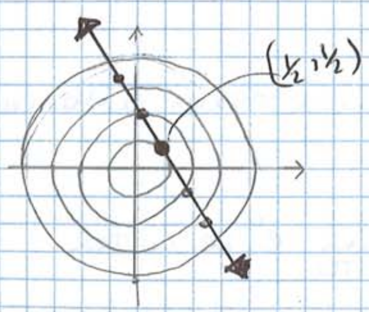
$f' \Rightarrow \frac{d}{dt} = 4t - 2 \quad \leadsto \quad t = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \\ y(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ PT STAZIONARIO

$4t - 2 > 0 \quad t > \frac{1}{2}$

ora usa curve di livello:

$x^2 + y^2 = k \Rightarrow$ circonferenze concentriche centrate nell'origine



Siccome i pt viaggiano verso l'esterno $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è un pt di minimo

ESEMPIO 3

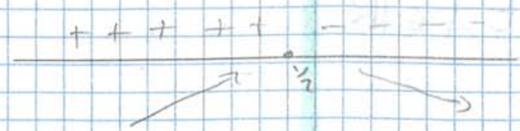
$f(x,y) = xy$ con vincolo $2x + y = 2$

$y = 2 - 2x \qquad \gamma(t) = (t, 2-2t)$

$f(\gamma(t)) = x(t) \cdot y(t) = t \cdot (2-2t) = 2t - 2t^2$

$\frac{d}{dt} = 2 - 4t \qquad 4t = 2 \quad t = \frac{1}{2} \qquad 2 - 4t > 0 \quad 2 > 4t \quad t < \frac{1}{2}$

$\begin{cases} x(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \\ y(\frac{1}{2}) = 2 - 1 = 1 \end{cases}$



$(\frac{1}{2}, 1)$ massimo

USO IL

METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

$$\boxed{\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = K \end{cases} \quad \begin{array}{l} (x,y) \in \mathbb{R} \\ A \subseteq \mathbb{R} \\ x, y, \lambda \text{ incognite} \end{array}}$$

ESEMPIO 1

Riprendo $f(x,y) = x + y$ con vincolo $x^2 + y^2 = 1$

- Risolvere con Lagrange

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = \lambda(2y) \\ g = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = x + y^2 \\ g(x,y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1,1) = \lambda(1, 2y) \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \lambda \\ 1 = \lambda(2y) \\ x + y^2 = 1 \end{cases} \qquad \lambda = 1 \quad y = \frac{1}{2} \quad x = \frac{3}{4}$$

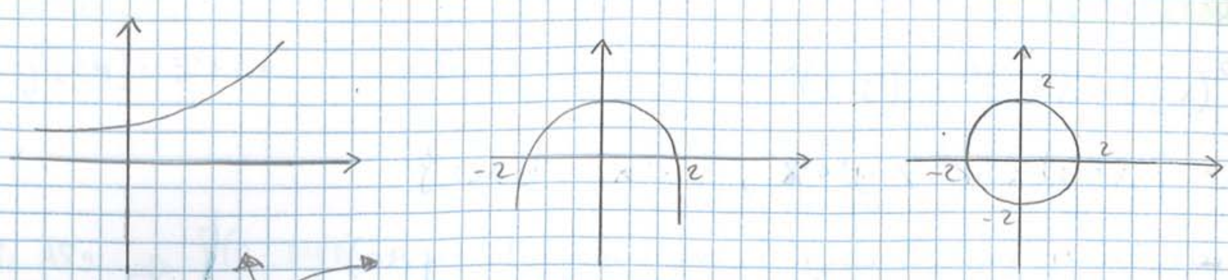
$$\nabla f = (1,1) \qquad \nabla g = (1, 2y)$$

Devo comunque usare le curve di livello, quindi qui era + efficace l'altro metodo.

ESEMPIO 2

Riprendo $f(x,y) = xy$ $\quad g(x,y) = 2x + y = 2$

$$\begin{cases} (y, x) = \lambda(2,1) \\ 2x + y = g(x,y) \\ 2 = g(x,y) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y = 2\lambda \\ x = \lambda \\ 2x + y = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{array}$$



se le compongo in $(2,0)$ e $(-2,0)$ ho un minimo

$f(2,0) = e^{16}$ $\quad f(-2,0) = e^{16}$ $\quad f(x,y) = e^{4x^2+9y^2}$

CONCLUSIONE:

$(0,0)$ min ASSOLUTO

$(0,\pm 2)$ MAX ASSOLUTO

$(\pm 2,0)$ min RELATIVO

RICORDA: in ogni caso vanno esplicitate entrambe le variabili, e l'ordine in cui viene fatto non è importante.

se utilizzo i moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{cases} f(x,y) = e^{4x^2+9y^2} \\ g(x,y) = x^2+y^2 \\ g(x,y) = 4 \quad \text{vincolo} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)(8x,18y) = \lambda(2x,2y) \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x,y)\cdot 8x = 2\lambda x \\ f(x,y)\cdot 18y = 2\lambda y \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4f(x,y)-\lambda)\,2x = 0 \\ (9f(x,y)-\lambda)\,2y = 0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$x,y = (0,0)$ NO!

$$\text{se} \begin{cases} x=0 \\ 9f(x,y)=\lambda \\ 0^2+y^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 2 \end{cases}$$

invece:

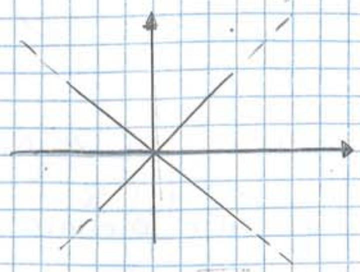
$$\text{se} \begin{cases} y=0 \\ 9f(x,y)=\lambda \\ x^2+0=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=0 \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 176

ESERCIZIO 3

$f(x,y) = y^2 + 2x \qquad g(x,y) = x^2 - y^2 = 0$

$\rightarrow |x| = |y|$



$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2, 2y) = \lambda(2x, -2y) \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

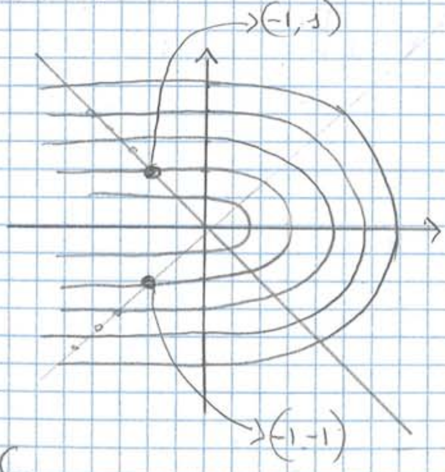
$$\begin{cases} \cancel{2}\lambda x = \cancel{2} \\ -2\lambda y = 2y \\ x^2 = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x = 1 \\ y(1+\lambda) = 0 \quad \begin{matrix} y = 0 \\ \lambda = -1 \end{matrix} \\ |x| = |y| \end{cases}$$

se $y = 0 \leadsto x = 0 \leadsto \underset{\text{la 1° diventa}}{0 = 1} \Rightarrow$ IMPOSSIBILE

se $\lambda = -1 \leadsto x = -1 \leadsto y = \pm 1 \longrightarrow (-1,1), (-1,-1)$

$f(-1,1) = 1 - 2 = -1 = f(-1,-1)$

uso curve di livello perché, essendo i valori uguali non so dire se sono min o max



$y^2 + 2x = k \Rightarrow 2x = y^2 + k$

$x = -\frac{y^2}{2} + \frac{k^2}{2}$

I pt via via si allontanano, sono quindi 2 pt di minimo vincolati

$$\begin{cases} f(x,y) = x \\ g(x,y) = y^2 - x^3 = 0 \end{cases}$$

Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1,0) = \lambda(-3x^2, 3y^2) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = -3\lambda x^2 \\ 0 = \lambda 3y^2 \\ y^2 - x^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\lambda x^2 + 2x + 2 = 0 \\ \lambda 3y^2 \; 2y = 0 \\ y^3 = x^3 \quad y = x \end{cases}$$

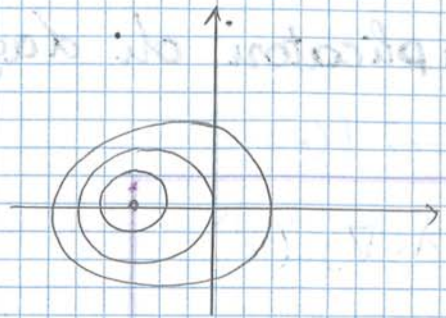
$y(3\lambda y - 2) \rightarrow y = 0$ non posso usarlo

$y = \frac{2}{3}\frac{1}{\lambda} \rightsquigarrow \lambda = -\frac{4}{3}$ $y = \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ $x = -\frac{1}{2}$

$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$x^2 + y^2 + 2x + 1 = k$

$\hookrightarrow (x+1)^2 + y^2 = k$



min $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

TEOREMA DEL DINI IN 3 VARIABILI

LEZIONE 17

27-11-2014

Sia D un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^3$ e sia $(x_0, y_0, z_0) \in D$

→ Supponiamo che siano verificate le seguenti Hp

1. $f(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ $(\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0)$

Allora esistono 3 costanti $a, b, c \in \mathbb{R}$ ed una funzione φ definita $(x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b) \Rightarrow (z_0 - c, z_0 + c)$

$[\varphi(x, y) = z] \Rightarrow$? $f(x, y, z) = 0$ in $(x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b)$ se e solo se $z = \varphi(x, y)$ soluzione unica

Inoltre
$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))} \quad e \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}}$$

questa volta, come dominio ho una superficie in 3D

ESEMPIO 1

$f(x, y, z) = (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 - 2z^6 + x^2 - y^2$ $P(0, 0, 1)$

1. $f(0, 0, 1) = 0$? $\boxed{SI}$
2. $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow 2z + 2x + 2z + 2y - 12z^5 = -12z^5 + 4z + 2x + 2y =$
   in $(0, 0, 1) = \boxed{-8} \neq 0$ $\boxed{SI}$

In un intorno di P $\exists$! unica f implicita

$$\begin{cases} 2\lambda x = -1 & \rightarrow x = -\frac{1}{2\lambda} \\ 2\lambda y = -3 & \rightarrow y = -\frac{3}{2\lambda} \\ \mu = 2 \\ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 10 & \Rightarrow \frac{10}{4\lambda^2} = 10 \quad \lambda^2 = \frac{1}{4} \quad \lambda = \pm\frac{1}{2} \\ z = 3 - y \end{cases}$$

se $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \\ z = 6 \end{cases}$$

se $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

$P(-1, -3, 6, \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\lambda}, \underbrace{2}_{\mu})$ $\quad Q(1, 3, 0, -\frac{1}{2}, 2)$ $\Rightarrow$ sono i 2 estremi, ora devo capire se sono MAX o MIN

$f(x,y,z) = -x - y + 2z$

$f(P) = 16$ — max vincolato

$f(Q) = -4$ — min vincolato

Esempio 1

$f(x,y,z) = -x^2 + y + z \rightarrow$? neutro

$-x^2 \rightarrow \cap$ → concavo, mi aspetto dei MAX

Esempio 2

$f(x,y,z) = -x^2 + \log(y+z)$

$-x^2 \rightarrow \cap$, $\log(y+z) \rightarrow \frown$ → mi aspetto MAX

Esempio 3

$f(x,y,z) = -x^2 + (y+z)^2$

$-x^2 \rightarrow \cap$, $(y+z)^2 \rightarrow \cup$ → non posso dire niente a priori

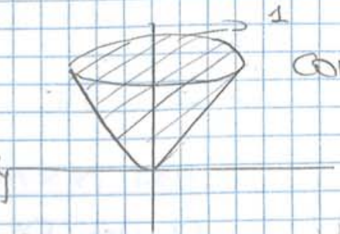
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 176

ESERCIZIO 5 (con i compatti)

$f(x,y,z) = x^2 - y^2 - 2z^2 + 2$

Una f concava, l'altra convessa, non posso più se ho max e min a priori

$K = \{x,y,z \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z^2 \leq 1, \ z \geq 0\}$



Cono Bloccato DA $z=1$

$x^2+y^2 = z^2 \Rightarrow z = \sqrt{x^2+y^2}$

$\mathring{K} = \{x,y,z \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 < z^2 < 1, \ z > 0\}$

$\nabla f = 0$

$\nabla f = (2x, -2y, -4z) = 0$ Solo se $(x,y,z) = (0,0,0) \notin \mathring{K}$!!!

cerco max, min vincolati alla frontiera:

(1) Restringiamo la funzione al piano $z=1$

$f(x,y,1) = x^2 - y^2 - 2(1)^2 + 2 = x^2 - y^2 = g(x,y)$

$\cup \quad \cap$

niente a priori

$\nabla g(x,y) = 0 \Leftrightarrow (2x, -2y) = (0,0)$

$x=0$
$y=0$

$\Rightarrow (0,0,1)$

$H_g = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow$ sella

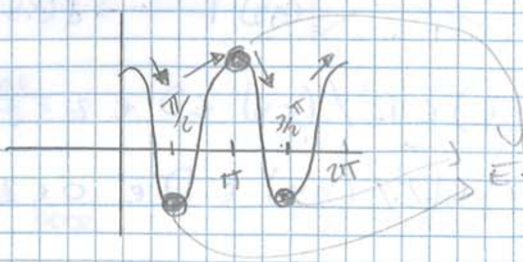
(2) sulla circonferenza $x^2+y^2 = 1 \quad z=1$

$\gamma(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1 \end{cases}$ $\qquad f(x,y,z) = x^2 - y^2 - 2z^2 + 2$

$f(\gamma(t)) = \cos^2 t - \sin^2 t - 2(1) + 2 = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$

$t \in [0, 2\pi]$

$\gamma(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1 \end{cases}$



Estremi

$\gamma(\pi/2) = (0,1,1)$ min

$\gamma(\pi) = (-1,0,1)$ max

$\gamma(\tfrac{3}{2}\pi) = (0,-1,1)$ min

$\gamma(2\pi) = (1,0,1)$ max

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 176

INTEGRALI MULTIPLI

1° CASO : Integrali doppi su rettangoli

Considero un rettangolo $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$

$|R| = (b-a)(d-c)$

area di R

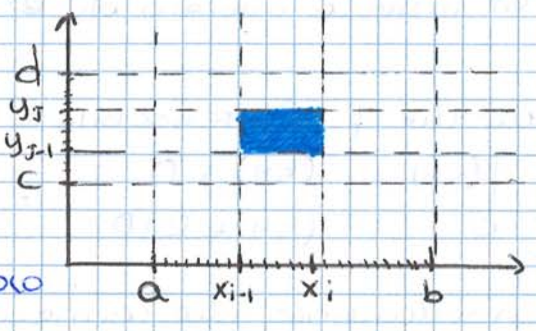
Considero ora una partizione di R, di $m \times n$ rettangoli del tipo

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

dove $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots\ldots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{m-1} < < x_m = b$

e $c = y_0 < y_1 < y_2 \ldots\ldots < y_{j-1} < y_j < y_{j+1} < \ldots < y_{n-1} < < y_m = d$

graficamente :



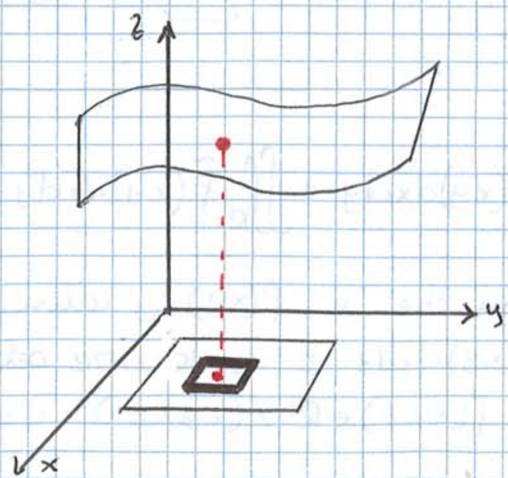
$f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

funzione limitata

• Rettangolo R_{ij}

$m_{ij} = \inf \{ f(x,y) : (x,y) \in R_{ij} \}$

$M_{ij} = \sup \{ f(x,y) : (x,y) \in R_{ij} \}$



DEFINIAMO:

• la somma integrale inferiore

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{m_{ij}}_{\text{altezza}} \underbrace{|R_{ij}|}_{\text{base}}$$

• la somma integrale superiore

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} |R_{ij}|$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 176

1. Un insieme limitato $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice **misurabile** se la funzione caratteristica

$$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D \end{cases}$$

è integrabile su D.

La misura di D si indica con $|D|$ e si pone:

$$|D| = \iint_D \chi_D(x,y)\,dx\,dy = \iint_D dx\,dy$$

se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ allora D rappresenta l'area di D

Teorema 1: Condizione di integrabilità

Sia D un insieme chiuso, limitato e misurabile di $\mathbb{R}^2$ e sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione continua in D allora f è integrabile in D.

Teorema 2: Criterio geometrico di misurabilità

Un insieme D di $\mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se $|\partial D| = 0$

Teorema 3

nelle HP del teorema 1

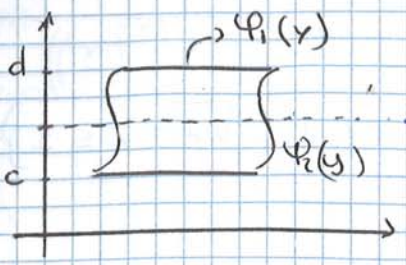
1. **linearità** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\iint_D (\alpha f + \beta g)\,dx\,dy = \alpha \iint_D f\,dx\,dy + \beta \iint_D g\,dx\,dy$
2. **monotonia** se $f \geq g$ in D allora $\iint_D f\,dx\,dy \geq \iint_D g\,dx\,dy$
3. **additività** rispetto al dominio di integrazione se $|D_1 \cap D_2| = 0$ allora $\iint_{D_1 \cup D_2} f\,dx\,dy = \iint_{D_1} f\,dx\,dy + \iint g\,dx\,dy$

Domini semplici e formule di riduzione

Un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}^2$ si dice dominio semplice rispetto all'asse delle y se:

$\exists\ \varphi_1, \varphi_2 \in C^1([a,b])$ e $\varphi_1(x) < y \leq \varphi_2(x)$ ~~ $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$

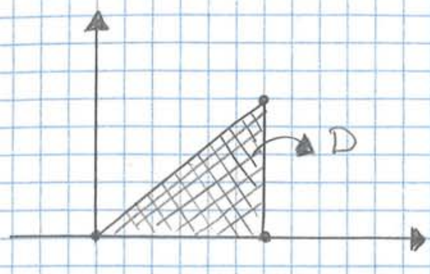
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$



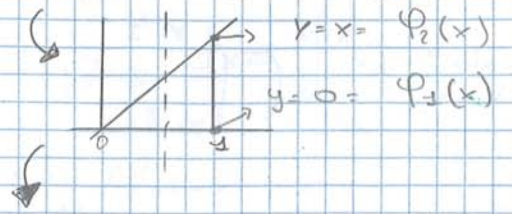
linea immaginaria che cresce con x, entra nel dominio con $\varphi_1(y)$ e esce con $\varphi_2(y)$

ESEMPIO

$\iint_D x\cdot y\,dx\,dy$ D è il triangolo chiuso di vertici $(0,0), (1,0), (1,1)$



(a) Rispetto all'asse y

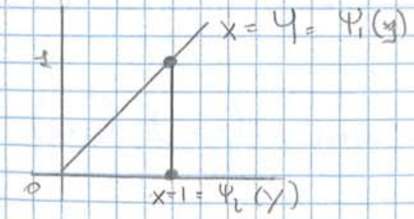


$$\iint_D x\cdot y\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=0}^{y=x} x\cdot y\,dy\right)dx = \int_{x=0}^{x=1}\left(x\int_{y=0}^{y=x} y\,dy\right)dx =$$

$$\int_{x=0}^{x=1} x\left(\frac{y^2}{2}\right)_{y=0}^{y=x} dx = \int_{x=0}^{x=1} x\cdot\frac{x^2}{2} - 0\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\frac{x^3}{2}\,dx = \frac{x^4}{8}\Bigg|_{x=0}^{x=1} =$$

$$\frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

(b) Rispetto all'asse x



$$\iint_D x\cdot y\,dy\,dy = \int_{y=0}^{y=1}\left(y\int_{x=y}^{x=1} x\,dx\right)dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\left(y\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)_y^1 = \int_{y=0}^{y=1} y\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2}\right)\right.$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\frac{y}{2}-\frac{y^3}{2} = \int_{y=0}^{y=1}\frac{1}{2}\left(y-y^3\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 y-y^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right)_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \left(\left(\frac{x^2}{2}\right)_y^{-y+2} - y(x)_y^{-y+2} \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} \left(\frac{(-y+2)^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) - y(-y+2-y)\, dy =$$

$$= \left(-\frac{(-y+2)^3}{2\cdot 3} + \frac{y^3}{3\cdot 2} + \frac{y^3}{3} - \frac{2y^2}{2} \right)_0^1 = -\cancel{\frac{1}{6}} + \cancel{\frac{1}{6}} + \frac{1}{3} - 1 + \frac{8}{6} = \frac{2}{3}$$

RISPETTO A Y

$$\iint_D (x-y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} (x-y)\,dx\,dy + \int_{x=1}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=-x+2} (x-y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)_{y=0}^{y=x} dx + \int_{x=1}^{x=2} \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)_{y=0}^{y=-x+2} dx = \int_0^1 x^2 - \frac{x^2}{2}\,dx + \int_1^2 x(-x+2) -$$

$$- \frac{(x+2)^2}{2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx + \int_1^2 \left(\frac{-2x^2+4x-x^2-4+4x}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx + \int_1^2 -\frac{3}{2}x^2 + 4x - 2\,dx = \left(\frac{x^3}{6}\right)_0^1 + \left(-\frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) + 4\left(\frac{x^2}{2}\right) - 2x \right)_1^2$$

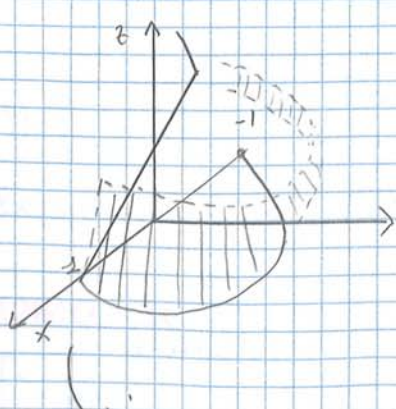
$$= \frac{1}{6} + \left(-\cancel{4} + \cancel{8} - \cancel{4} + \frac{1}{2} - \cancel{2} + \cancel{2} \right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

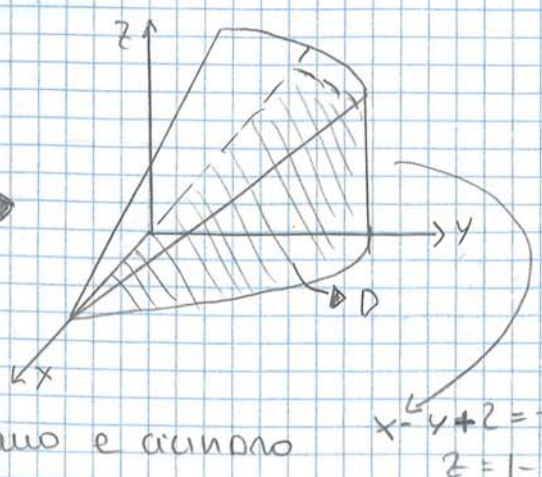
ESERCIZIO calcolare il volume di

$$E: \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0,\ z \geq 0,\ x - y + z \geq 1,\ y \leq 1 - x^2 \right\}$$

$ax + by + cz = d$ equazione del piano

$y \leq 2 - x^2$ e' una parabola





intersezione tra piano e cilindro

$x - y + z = 1$

$z = 1 - x + y$

$f(x,y) = 1 - x + y$

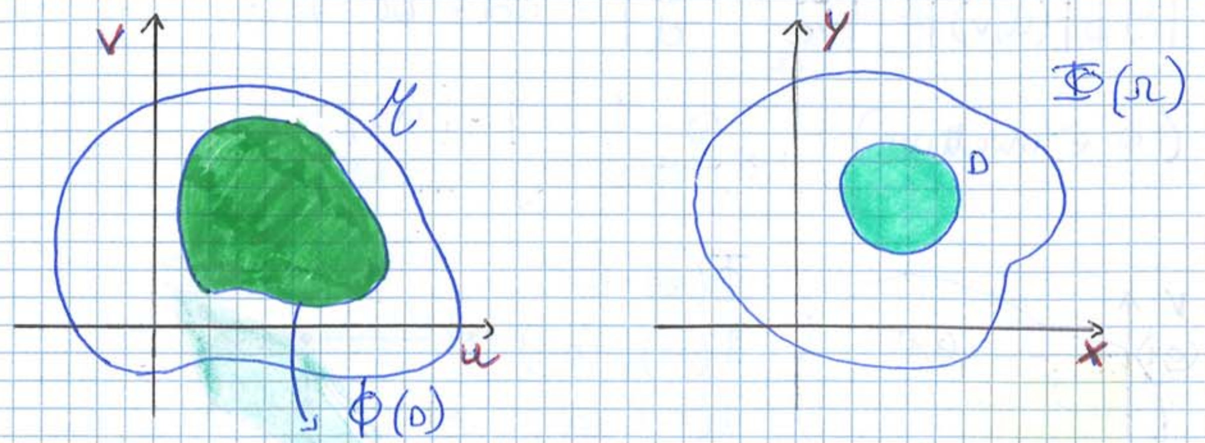
LEZIONE 20
10-12-2014

CAMBIAMENTO DI VARIABILI IN UN NUOVO SISTEMA DI COORDINATE (u,v)

$$\phi : \Omega \to \mathbb{R}^2 \qquad (u,v) \mapsto \phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

$(u,v) \in \mathbb{R}$

Applicazione che realizza il cambiamento da $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ in $D \subseteq \mathbb{R}^2$



Supponiamo che ϕ sia biunivoca (invertibile) tra Ω e $\phi(\Omega)$ e che le sue componenti $x(u,v)$ $y(u,v)$ siano continue con le derivate parziali continue in Ω

$$\boxed{\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}}$$

Uso la matrice JACOBIANA

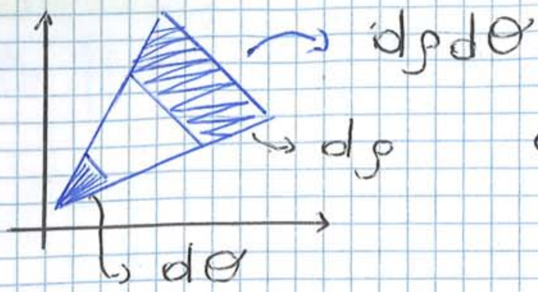
$$\boxed{J_{\phi(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}}$$

$|J\phi(u,v)|$ = determinante matrice jacobiana

$\Rightarrow$ voglio che $|J\Phi(u,v)| \neq 0$ così ϕ è iniettiva

Teorema Se D è misurabile e f è integrabile su D, allora:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\phi(D)} f(x(u,v), y(u,v))\,|J_{\phi(u,v)}|\,du\,dv$$



$$\phi(\rho,\theta) = (x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)) = (\rho\cos\theta, y\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$= |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

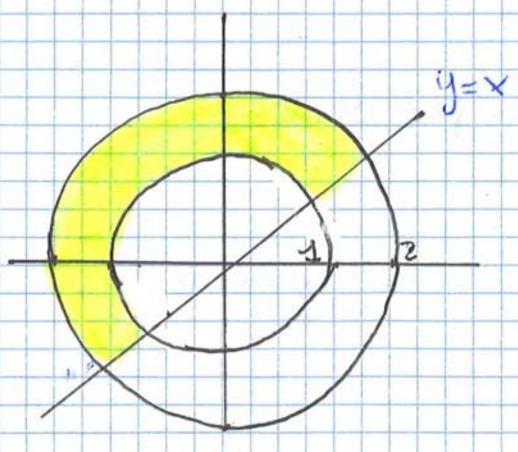
$$\boxed{J_\phi(\rho,\theta) = \rho}$$

ESERCIZIO 1

NOTA: Se vedo x^2+y^2 devo pensare SUBITO alle COORD. polari

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; y \geq x,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

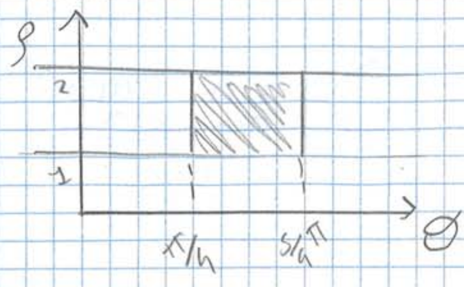


$$1 \leq \rho \leq 2$$

$$\pi/4 \leq \theta \leq 5/4\,\pi$$

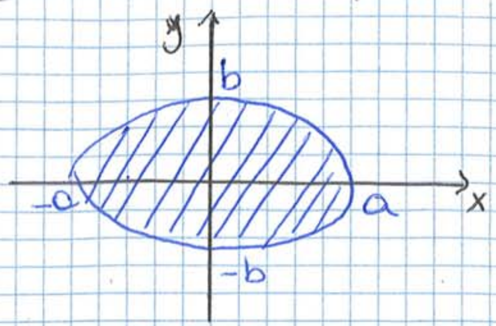
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

FACCIO cambiamento variabili



ESEMPIO 2

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$



$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

ELLITTICHE

$$\begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho \operatorname{sen}\theta \\ b \operatorname{sen}\theta & -b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = \boxed{ab\rho}$$

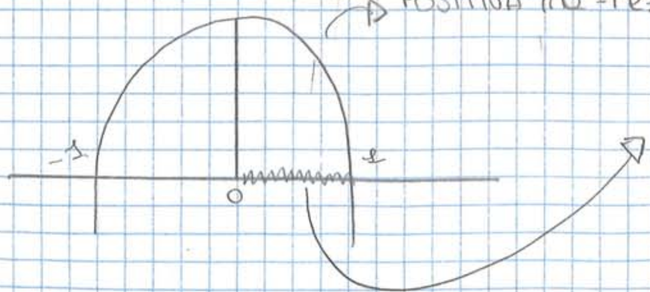
J per ellittiche

$$\iint_D 1 \cdot dx\,dy = \quad D^* = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

$$\frac{a^2\rho^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta}{b^2} \leq 1$$

$$\rho^2 \leq 1 \iff 1 - \rho^2 \geq 0$$

POSITIVA tra -1 e 1



ma la ρ deve essere ≥ 0
quindi $0 \leq \rho \leq 1$

$$D^* = \left\{ (\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

$$\iint_D 1 \, dx\,dy = \iint_{D^*} 1 \; \underbrace{ab\rho}_{\text{JACOBIANA}} \, d\rho \, d\theta$$

$$\frac{1}{\cos\theta \operatorname{sen}\theta} \leq \rho^2 \leq \frac{4}{\cos\theta \operatorname{sen}\theta} \leadsto \frac{1}{\sqrt{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}} \leq \rho \leq \frac{2}{\sqrt{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}}$$

$$1 \leq xy \leq 4$$

$$f(\rho, \theta) = \frac{\rho\cos\theta \, \rho \operatorname{sen}\theta}{\rho^2} = \cos\theta \operatorname{sen}\theta$$

$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_D \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}}}^{\frac{2}{\sqrt{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}}} \left(\rho \, d\rho\right) d\theta$$

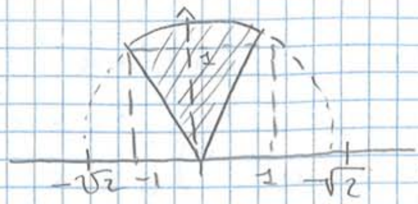
$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \left(\frac{\rho^2}{2}\right)_{\frac{1}{\sqrt{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}}}^{\frac{2}{\sqrt{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}}} d\theta$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}{2} \left[\frac{4}{\cos\theta \operatorname{sen}\theta} - \frac{1}{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}\right] d\theta$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}{2} \frac{3}{\cos\theta \operatorname{sen}\theta} \, d\theta = \frac{3}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} d\theta = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4}$$

ESERCIZIO 2

$$\int_{x=-1}^{x=1}\int_{y=|x|}^{y=\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

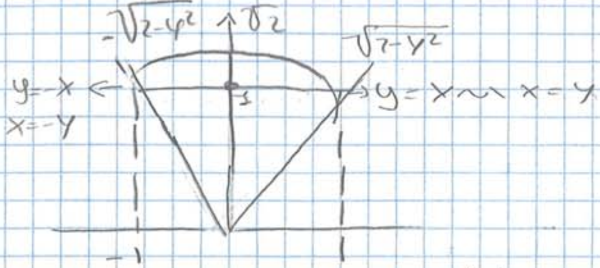


$y=\sqrt{2-x^2} \rightarrow y^2 = 2-x^2 \rightarrow x^2+y^2=2$

FACCIO VARIARE PRIMA LA Y; SOLO CHE DEVO SPEZZARE L'INTEGRALE (NON POSSO FAR VARIARE Y DA 0 A 2 MA DEVO FARE DA 0 A 1 E DA 1 A 2)

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, |x|\le y < \sqrt{2-x^2}\}$

$x^2 = 2-y^2 \qquad x = \begin{cases}\sqrt{2-y^2}\\ -\sqrt{2-y^2}\end{cases}$



$$\int_{x=-1}^{x=1}\int_{y=|x|}^{y=\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=-y}^{x=y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{y=1}^{y=\sqrt{2}}\int_{x=-\sqrt{2-y^2}}^{x=\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

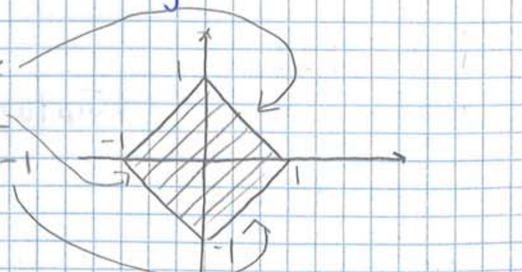
ESERCIZIO 5

$$\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, |x|+|y|\le 1\}$$

se ho $x,y>0$ $\quad x+y\le 1 \Rightarrow y\le 1-x$

se ho $x,y<0$ $\quad -x-y\le 1 \Rightarrow y+x\ge -1$

se ho $x>0, y<0$ $\quad x-y\le 1 \Rightarrow y\ge x-1$



da -1 a 0 entro con $y=-x-1$ e esco con $y=x+1$

DA 0 a 1

(1) $$\int_{x=-1}^{x=0}\left(\int_{y=-x-1}^{y=x+1} e^{xy}\,dy\right)dx = \int_{x=-1}^{x=0}\left(e^x\int_{y=-x-1}^{y=x+1} e^y\,dy\right)dy = \int_{x=-1}^{x=0} e^x\left[e^y\right]_{x-1}^{x+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} 2e^{2x+1}\,dx - \int_{-1}^{0} e^{-1}\,dx = \frac{1}{2}(e-e^{-1})+e^{-1} = \frac{1}{2}e-\frac{1}{2}e^{-1}+e^{-1} =$$

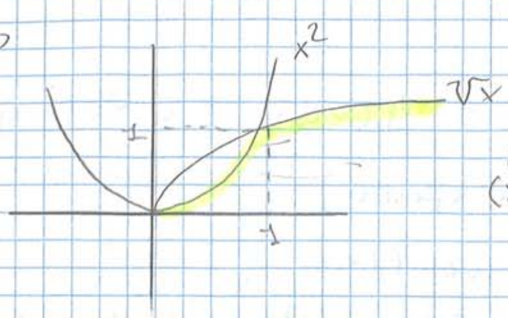
$$=\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e^{-1} \quad (1)$$

ESERCIZIO

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, con $f(x,y) = \min\left(\sqrt{x^2+y^2}, 1\right)$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x, y \geq 0\}$

con $x > 0$

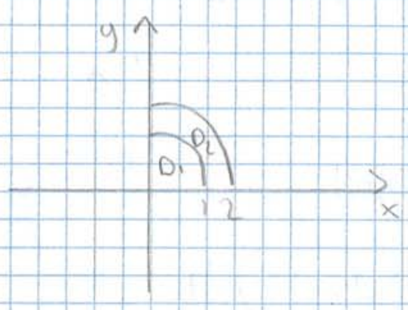


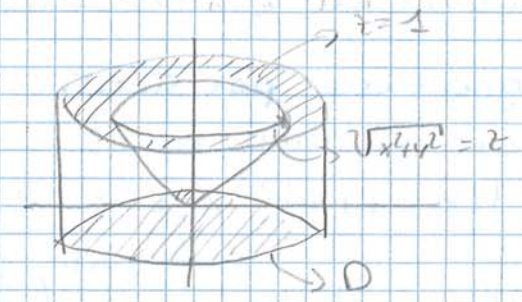
$\min(x^2, \sqrt{x})$

$\min(x^2, \sqrt{x})$ $\begin{cases} \text{- tra } 0 \text{ e } 1 \text{ la più piccola è } x^2\text{, quindi traccio lei} \\ \text{- tra } 1 \text{ e } +\infty \text{ la più piccola è } \sqrt{x}\text{, quindi traccio lei} \end{cases}$

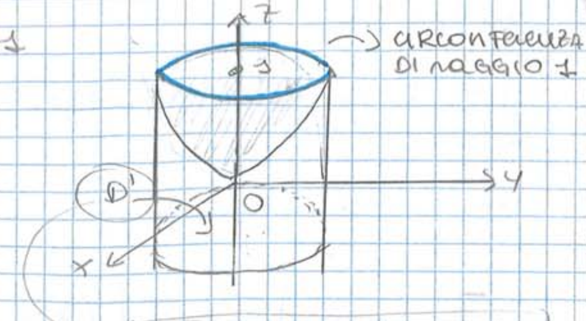
nel mio caso ho un cono e un piano $z = 1$

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{D_1} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy + \int_{D_2} 1\,dx\,dy$$





entro con $z = x^2+y^2$ e esco con $z = 1$



$$\iiint_D |x| z\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_{D'} \left(\int_{z=x^2+y^2}^{z=1} |x| z\,dz\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{D'} |x| \left(\int_{z=x^2+y^2}^{z=1} z\,dz\right) dx\,dy = \iint_{D'} |x| \left(\frac{z^2}{2}\right)_{z=x^2+y^2}^{z=1} dx\,dy$$

Proiezione del grafico sul piano xy

$$= \iint_{D'} |x| \left(\frac{1}{2} - \frac{(x^2+y^2)^2}{2}\right) dx\,dy$$

NOTA BENE: siccome ho x^2+y^2 sia qui che in D' ⇒ uso le coordinate polari

$$\bar{D} = \{(\rho,\theta) \,/\, 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 1\}$$

$$\iint_{\bar{D}} |\rho\cos\theta| \left(\frac{1}{2} - \frac{\rho^4}{2}\right) \rho\, d\theta\, d\rho =$$

→ JACOBIANO nelle coordinate polari

$$= \int_0^{2\pi} |\cos\theta|\, d\theta \int_0^1 \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^6}{2}\right) d\rho =$$

$$\int_0^{2\pi} |\cos\theta|\, d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = 4$$

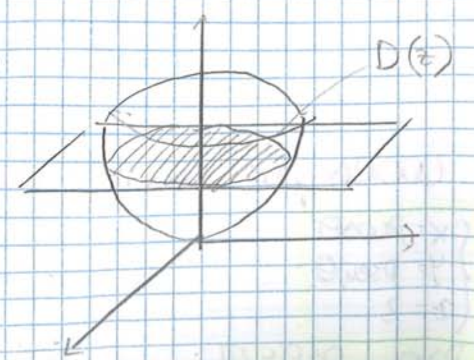
Perciò: $\frac{\cancel{4}}{\cancel{2}}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^1 (\rho^2-\rho^6)\, d\rho = 2(\sin\theta)_0^{\pi/2} \left(\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^7}{7}\right)_0^1 =$

$$= 2\cdot 1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right) = \frac{8}{21}$$

⇒ Risolvo lo stesso integrale con il metodo degli "strati":

$D(z): \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \le z\}$ $\quad (\sqrt{z})^2 = \sqrt{z}$ è il raggio

$$\iiint_D |x| z\,dx\,dy\,dz = \int_{z=0}^{z=1} \left(\iint_{D(z)} |x| z\,dx\,dy\right) dz =$$



N.B ⇒ queste conviene farle con i "fili"

ESERCIZIO

$$\iiint_{\Omega} \frac{6y^2 z}{x^2+y^2}\, dx\,dy\,dz \qquad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \underbrace{x^2+y^2+z^2 \le 2}_{\text{sfera con } r=\sqrt{2}} \text{ e } \underbrace{\sqrt{x^2+y^2} \le z}_{\text{cono}}\}$$

per $y=0$ $\begin{cases} x^2+z^2=2 \\ \sqrt{x^2} = z \end{cases}$

COORD. SFERICHE $\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$ $\quad 0 \le \rho \le \sqrt{2}$, $\quad 0 \le \vartheta \le 2\pi$, $\quad 0 \le \varphi \le \pi/4$

$$|J_\phi(\rho,\vartheta,\varphi)| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$$

$$x^2+y^2 = \rho^2\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\vartheta + \rho^2\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\vartheta = \rho^2\operatorname{sen}^2\varphi \,(1)$$

$$\boxed{x^2+y^2 = \rho^2\operatorname{sen}^2\varphi}$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{6y^2 z}{x^2+y^2}\, dx\,dy\,dz = \iiint_{\bar\Omega} \frac{\cancel{\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi}\operatorname{sen}^2\vartheta\ \rho\cos\varphi}{\cancel{\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \cdot \underbrace{\rho^2\operatorname{sen}\varphi}_{\text{JACOBIANA}}\, d\vartheta\, d\rho\, d\varphi =$$

$$\bar\Omega = \{(\rho,\vartheta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 / 0 \le \rho \le \sqrt{2},\ 0 \le \vartheta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi/4\}$$

$$= \iiint_{\bar\Omega} 6\operatorname{sen}^2\vartheta\, \rho^3 \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi = 6\int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\pi/4}\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi$$

$$= 6\left(\frac{\rho^4}{4}\right)_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta}{2}\right)_0^{2\pi} \left(\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}\right)_0^{\pi/4} = \cancel{6}^{3} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\pi \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\cancel{2}}$$

$$= \frac{3}{2}\pi$$

NOTA BELLISSIMA:
$$\boxed{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 d\vartheta = \pi \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 d\vartheta = \pi}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 176

$$\iint_D \left(\int_{z=3x^2+3y^2}^{z=36-x^2-6y^2} 1 \, dz \right) dx\,dy = \iint_D \left(36-x^2-6y^2-3x^2-3y^2\right) dx\,dy$$

$$\iint_D \left(36-4x^2-9y^2\right) dx\,dy$$

Uso le coordinate ellittiche

$$\begin{cases} x = 3\rho\cos\theta \\ y = 2\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad |J| = 3\cdot 2\rho = 6\rho$$

$$\bar{D} = \left\{ (\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$$

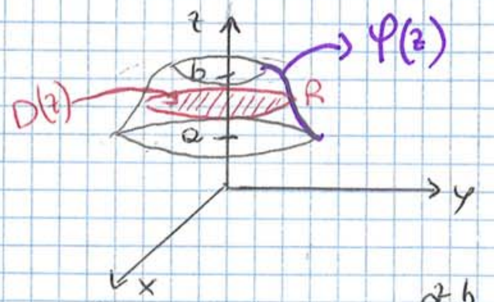
$$\iint_{\bar{D}} \left(36 - 36\rho^2\cos^2\theta - 36\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta\right) \cdot 6\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$\iint_{\bar{D}} \left(36-36\rho^2\right) 6\rho\, d\rho\, d\theta = 6^3 \int_0^1 (1-\rho^2)\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 6^3 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^1$$

$$6^3 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 6^3 2\pi \frac{2-1}{4} = \frac{6^3}{2}\pi$$

Volume di un solido ottenuto per rotazione

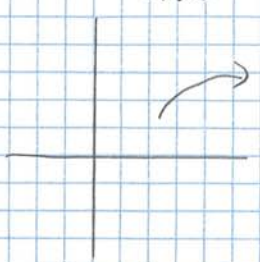
Sia S il solido ottenuto ruotando il grafico di 1 funzione $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^+$ attorno all'asse z



$$D(z) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \le z \le b,\ 0 \le x^2+y^2 \le R^2 \right\}$$
$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \le z \le b,\ 0 \le \sqrt{x^2+y^2} \le \varphi(z) \right\}$$

1° modo

$$\text{Volume } S = \iiint_S 1\, dx\,dy\,dz = \int_{z=a}^{z=b} \left(\iint_{D(z)} 1\, dx\,dy \right) dz$$



$R = \varphi(z)$

$$\text{Area}(D(z)) = ? = \pi\left(\varphi(z)\right)^2$$

$$\text{Volume}(S) = \int_{z=a}^{z=b} \pi\left(\varphi(z)\right)^2 dz = \pi \int_{z=a}^{z=b} \varphi^2(z)\, dz$$