



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2066A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Peruzzo Carola

MATERIA: Fondamenti di meccanica strutturale (riassunti +
temi d'esame) - Prof Somà

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

TEMA : MECCANICA STRUTTURALE

grado di iperstaticità: $G = 3i + 2c_e + 2(r-1)c_i + 2 - m + N$

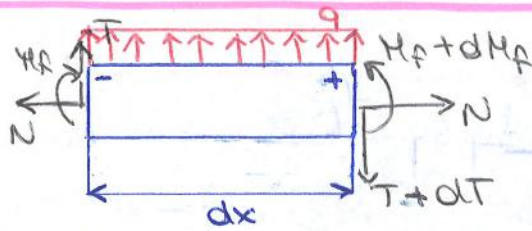
$G < 0$ LABILE
 $G = 0$ ISOSTATICO
 $G > 0$ IPERSTATICO

\downarrow incastri
 \downarrow cerniere fisse
 \downarrow corpi connessi
 \downarrow cerniere interne
 \downarrow appoggi
 \downarrow presidi di eberle
 \downarrow corpi ripidi prelevati

Strutture reticolari: $N + 3 = 2 \cdot c_i \rightarrow \text{se fa } 0 = 0 \text{ è ISOSTATICO}$

\downarrow aste \downarrow nodi

Legame tra taglio e momento flettente



$\circlearrowleft M_f$ IO T è la derivata del M_f .

trascuro perché infinitesimo di ordine superiore

\uparrow) $T + qdx - dT - T = 0$
 $dT = qdx \rightarrow \frac{dT}{dx} = q$

\curvearrowright) $M_f + dM_f - M_f - Tdx - q \frac{dx^2}{2} = 0$
 $dM_f = Tdx \rightarrow \frac{dM_f}{dx} = T$

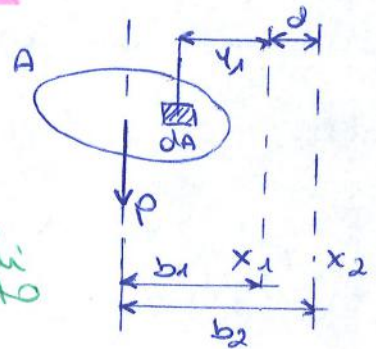
$\frac{d^2 M_f}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = q$

TEOREMA di TRASPORTAZIONE dei MOMENTI STATICI

$S_1 = \int_A y_1 dA = A \cdot b_1$

$S_2 = A \cdot b_2 = A(b_1 + d) = Ab_1 + Ad = S_1 + Ad$

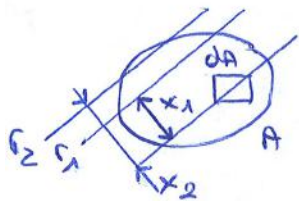
momento statico di trasporto



Se x_1 fosse baricentrico $\rightarrow S_1 = 0$
 $\Rightarrow S_2 = A \cdot d_G$

prodotto dell'area e della distanza della retta dal baricentro

TEOREMA di TRASPORTAZIONE dei MOMENTI di INERZIA



Voglio calcolare l'inertzia di A rispetto ad r_2 (a distanza d da r_1)

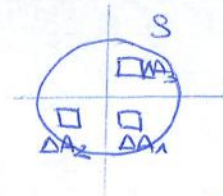
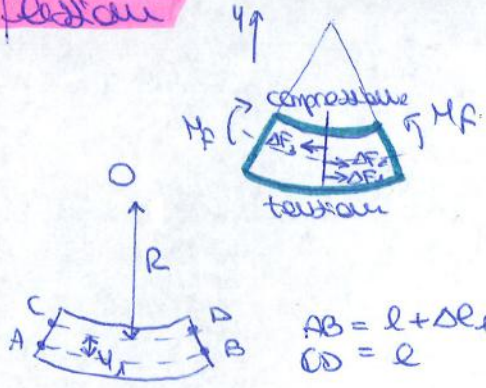
$I_1 = \int_A x_1^2 dA$

$I_2 = \int_A x_2^2 dA = \int_A (x_1 + d)^2 dA = \int_A (x_1^2 + d^2 + 2x_1 d) dA = I_1 + 2S_1 d + Ad^2$

Se r_1 fosse baricentrico: $I_2 = I_1 + Ad^2$ perché $S_1 = 0$

Il momento di inerzia baricentrico è il summe di tutti i momenti di inerzia calcolati rispetto ad assi //.

flexione



Sommando tutte le aree:
 $\sum \sigma_i \Delta A_i = 0$ (1)
 $\sum \sigma_i \Delta A_i y_i = M$ (2)

integrando:
 $\int \sigma dA = 0$ (1)
 $\int \sigma y dA = M$ (2)

OAB e OCD sono d'interi $\Rightarrow \frac{l + \Delta e_1}{R} = \frac{R - y_1}{R}$
 $\epsilon_1 = \frac{\Delta e_1}{l}$ ed $\epsilon_2 = -\frac{y_1}{R} \rightarrow \epsilon_2 = \frac{\Delta e_2}{l_2} \rightarrow \epsilon = \frac{\Delta e}{l} = -\frac{y}{R} \rightarrow \sigma = -\epsilon \frac{y}{R}$

Sostituendo in (1) e (2):
 $\frac{E}{R} \int y dA = 0$ e $\frac{E}{R} \int y^2 dA = M$

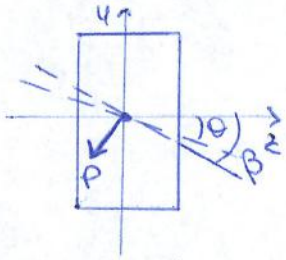
(EJ = rigidità flessionale)
 1/R = curvatura

$\sigma_f = -\frac{M_2}{J_2} y$

I punti più allungati sono quelli più lontani dall'asse neutro

Lavoro di deformazione: $L = \frac{M^2 l}{2EJ}$

• flessione deviata



$M_2 = -Px \cos \theta$
 $M_4 = Px \sin \theta$
 $\sigma_x = \frac{M_4 y}{J_4} - \frac{M_2 z}{J_2}$
 $\tan \theta = M_4 / M_2$ $\tan \beta = \frac{M_4}{M_2} \frac{J_2}{J_4} = \frac{J_2}{J_4} \tan \theta$

Sezioni rotonde e quadrate $J_2 = J_4$ e non si ha flessione deviata

taglio

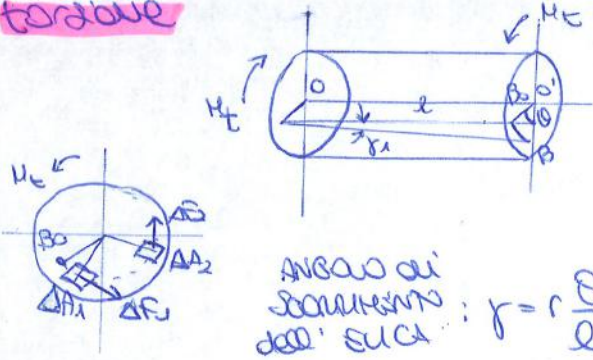
È sempre accompagnato da flessione tranne quando si ha la caratteristica del momento che passa da zero.

$z_m = \frac{T}{A}$
 rettulo: $z_{max} = \frac{4}{3} z_m$
 rettangolo: $z_{max} = \frac{3}{2} z_m$ ($z = T \frac{6(\frac{h^2}{12} - y^2)}{bh^3}$)

$z = \frac{T}{b} \frac{3}{J_2} \rightarrow$ teoria di JOHNSON
 ↓
 coefficiente di resistenza

Lavoro di deformazione: $L = \gamma \frac{T^2 l}{GA}$
 ↓
 fattore taglio

torzione



$\gamma_1 = \frac{\rho_1 \theta}{l} = r_1 \frac{\theta}{l}$ — ANGOLO DI TORSIONE
 L scostamento dall'asse
 torsione
 tangenziale: $\tau = G \cdot \gamma$
 $\frac{E}{2(1+\nu)}$ modulo di elasticità tangenziale

$\Delta F_1 = \tau_1 \Delta A_1$
 $\Delta F_2 = \tau_2 \Delta A_2$

$$\left. \begin{matrix} z_1 \Delta A_1 + z_2 \Delta A_2 = M_t \\ \int_A z r dA = M_t \end{matrix} \right\} \rightarrow \int_A G r^2 \frac{\theta}{l} dA = M_t$$

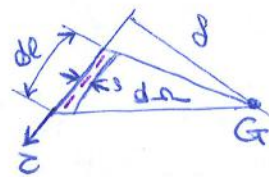
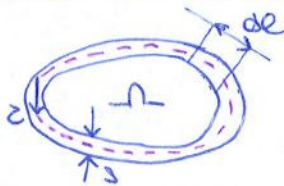
$\theta_0 = \frac{M_t}{J_p}$
 $\tau = \frac{M_t r}{J_p}$

$M_t = \frac{G \theta}{l} J_p$ — momento di inerzia polare della sezione
 rigidità torsionale: $G J_p / l$
 lavoro di deformazione: $L = \frac{1}{2} \frac{G J_p \theta^2}{l}$
 (torzione pura)

Ipotesi di Bredt

Tubi di sezione qualsiasi con pareti a spessore costante o variabile ma piccolo rispetto alle dimensioni della sezione.

Si assume che la tensione tangenziale sia approssimabile ad un valore costante



densità tensioni: $dF = \tau ds$
 momento di F rispetto all'asse x: $dM_t = dF \cdot s = \tau ds \cdot s = 2\tau s ds$

$dA = \frac{s ds}{2}$ area triangolo di base ds e altezza s — al variare di ds i triangoli coprono tutta l'area A di partenza

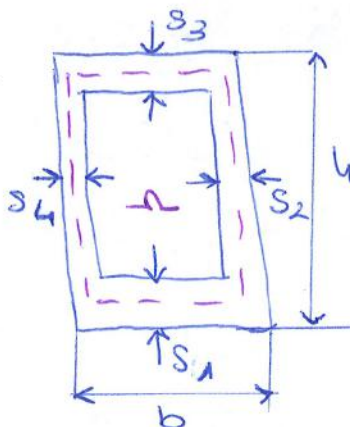
$M_t = \int dM_t = 2\tau s \int dA = 2\tau s A$

ipotesi di spessore costante: $\tau = \frac{M_t}{2sA}$

area racchiusa nella curva media

Analogamente a come è il caso di torsione: $\theta_0 = \frac{M_t}{4G s A^2} \int \frac{ds}{s} \rightarrow \theta_0 = \frac{M_t}{4G s A^2} \cdot l$ se s è costante

Poiché lo spessore s non è costante: $\theta_0 = \frac{M_t}{4G s A^2} \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{s_i}$



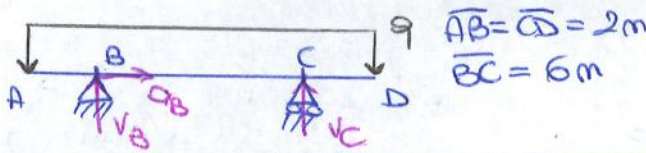
se lo spessore è costante e tratto

$A = (b - \frac{s_2}{2} - \frac{s_4}{2}) \cdot (h - \frac{s_1}{2} - \frac{s_3}{2})$

$\tau_i = \frac{M_t}{2A \cdot s_i}$

rigidità torsionale 150 volte maggiore in sezione chiusa rispetto ad un'aperta (p. 137)

3.2:



- reazioni vincolari
- caratteristiche di sollecitazione
- momento flettente massimo

Reazioni vincolari: $\uparrow) V_B + V_C - q \cdot 10 = 0$

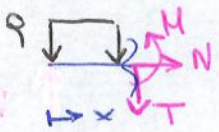
$\rightarrow) O_B = 0 \text{ N}$

$\uparrow) V_C \cdot 6 - q \cdot 8 \cdot 4 + q \cdot 2 = 0 \rightarrow V_C = \frac{30q}{6} = 5q$

$V_B = 5q$

Caratteristiche di sollecitazione:

$S_1): 0 \leq x \leq 2$

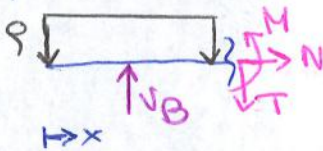


$N = 0$

$-T - qx = 0 \rightarrow T(0) = 0$
 $T(2) = -2q$

$M + q \frac{x^2}{2} = 0 \rightarrow M(0) = 0$
 $M(2) = -q \cdot 2$

$S_2): 2 \leq x \leq 8$



$N = 0$

$V_B - T - qx = 0 \rightarrow T(2) = V_B - 2q = 3q$

$T(8) = V_B - 8q = -3q$

$M - V_B \cdot x + q \frac{x^2}{2} = 0 \rightarrow T(2) = -2q$

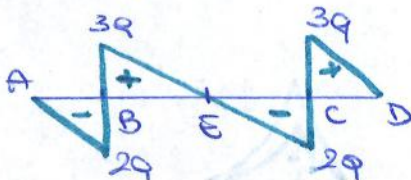
$T(8) = -2q$

(Struttura simmetrica caricata simmetricamente)

Diagrammi di sollecitazione:

N: costante pari a zero

T:

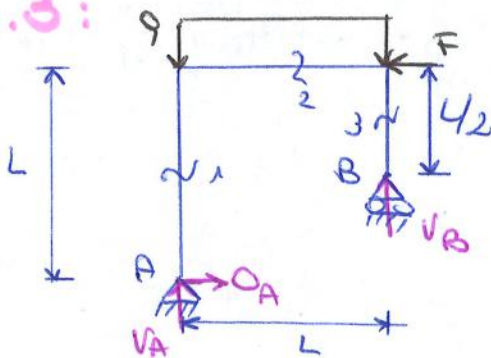


M:



M_{max} è nel punto E

3.3:



$l = 1 \text{ m}$
 $F = 25 \text{ N}$
 $q = 30 \text{ N/m}$

- reazioni vincolari
- caratteristiche di sollecitazione

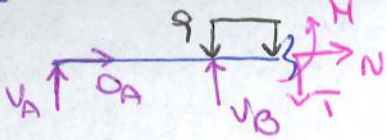
Reazioni vincolari: $\uparrow) V_A + V_B - qL = 0$
 $\rightarrow) O_A - F = 0 \rightarrow O_A = F = 25 \text{ N}$

$\uparrow) +FL + q \frac{L^2}{2} + V_B \cdot L = 0$

$V_B = \frac{-FL + q \frac{L^2}{2}}{L} = 10 \text{ N}$

$V_A = qL - V_B = 60 \text{ N}$

$S_2: a \leq x \leq b+a$



$$N + O_A = 0 \rightarrow N = -SO_N$$

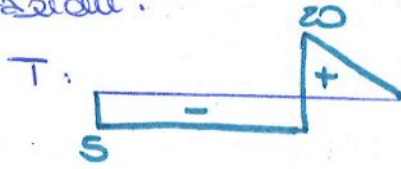
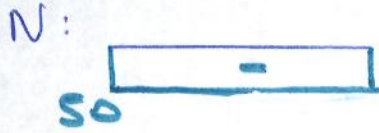
$$V_A - T + V_B - q \cdot x = 0 \rightarrow T(a) = -20N$$

$$T(b+a) = 0N$$

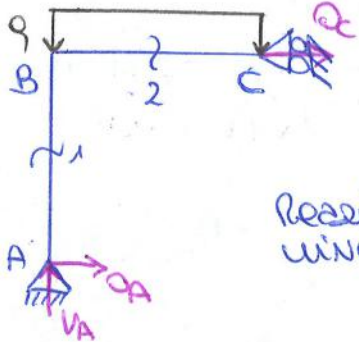
$$M - V_B \cdot x + q \cdot \frac{x^2}{2} - V_A \cdot x = 0 \rightarrow M(a) = 10Nm$$

$$M(a+b) = 0Nm$$

Diagrammi di sollecitazioni:



3.5:



$AB = BC = 2m$
 $q = 20 N/m$

- reazioni vincolari
- caratteristiche di sollecitazione

Reazioni vincolari:

$$\uparrow) V_A - q \cdot 2 = 0 \rightarrow V_A = 40N$$

$$\rightarrow) O_A + O_c = 0$$

$$\curvearrowright) q \cdot 2 + Q_c \cdot 2 - V_A \cdot 2 = 0$$

$$O_A = \frac{2V_A - 2Q_c}{2} = 20N$$

$$O_c = -20N$$

Caratteristiche di sollecitazione:

$S_1: 0 \leq x \leq 2$



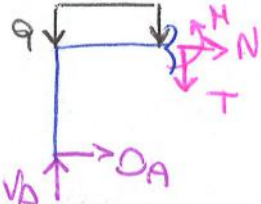
$$V_A + N = 0 \rightarrow N = -V_A = -40N$$

$$O_A + T = 0 \rightarrow T = -O_A = -20N$$

$$M + q \cdot x = 0 \rightarrow M(0) = 0Nm$$

$$M(2) = -40Nm$$

$S_2: 0 \leq x \leq 2$



$$N = -O_B = -40N$$

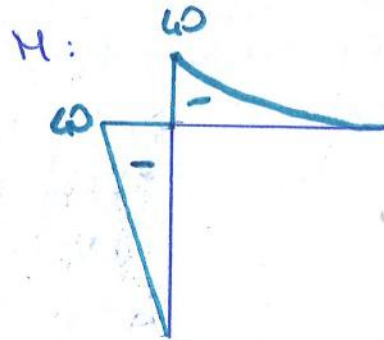
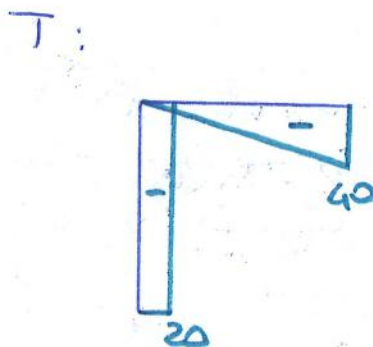
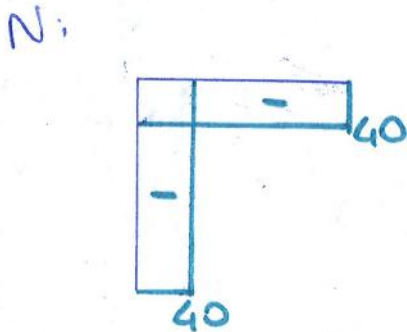
$$V_A - T - q \cdot x = 0 \rightarrow T(0) = V_A = 40N$$

$$T(2) = 0N$$

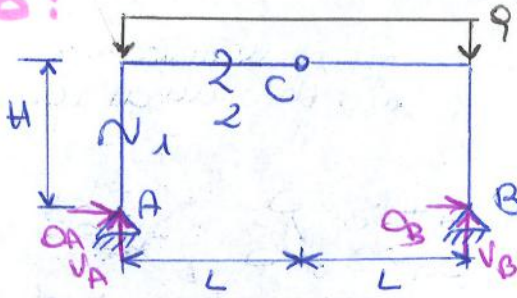
$$M - V_A \cdot x + O_B \cdot 2 + q \cdot \frac{x^2}{2} = 0 \rightarrow M(0) = -40Nm$$

$$M(2) = 0Nm$$

Diagrammi di sollecitazioni:



3.8:



$L = 3\text{m}$
 $H = 2\text{m}$
 $q = 20\text{N/m}$

- reazioni vincolari
- caratteristiche di sollecitazioni

Reazioni vincolari:

$\rightarrow) O_A = O_B = 0$
 $\uparrow) V_A + V_B - q \cdot 2L = 0$
 $\hat{A}) V_B \cdot 2L - q \cdot 2L^2 = 0$
 $V_B = 60\text{N}$
 $V_A = 60\text{N}$

eq. differenziale a S_x di $C)$ $q \frac{L^2}{2} - V_A \cdot L + O_A \cdot H = 0$
 $O_A = 45\text{N}$
 $O_B = -45\text{N}$

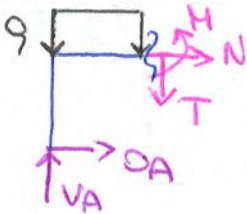
Caratteristiche di sollecitazioni:

$S_1: 0 \leq x \leq H$



$V_A + N = 0 \rightarrow N = -60\text{N}$
 $O_A + T = 0 \rightarrow T = -45\text{N}$
 $M + O_A \cdot x = 0 \rightarrow M(0) = 0\text{Nm}$
 $M(H) = -90\text{Nm}$

$S_2: 0 \leq x \leq L$



$N + O_A = 0 \rightarrow N = -45\text{N}$
 $V_A - T - q \cdot x = 0 \rightarrow T(0) = 60\text{N}$
 $T(L) = 0\text{N}$
 $M - V_A \cdot x + O_A \cdot L + q \cdot x = 0 \rightarrow M(0) = -90\text{Nm}$
 $M(L) = 0\text{Nm}$

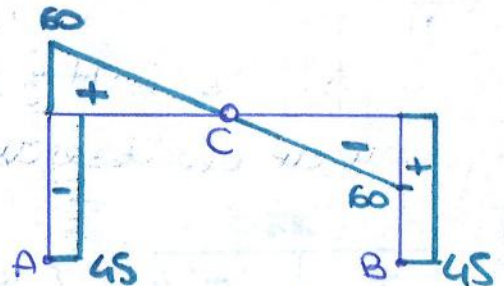
La struttura è simmetrica centrata simmetricamente (cambia solo il segno di O_A e O_B \Rightarrow cambio segno del taglio)

Diagrammi di sollecitazioni:

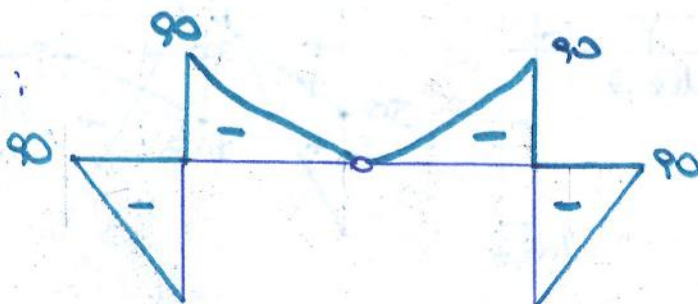
N:



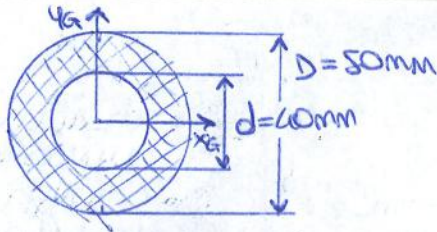
T:



M:



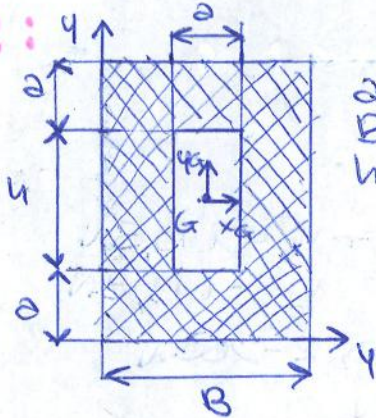
4.1:



momenti di inerzia rispetto ad x_G ed y_G
 sezioni circolari $\Rightarrow x_G = y_G \Rightarrow J_{x_G} = J_{y_G}$

$$J_G = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = 181132,5 \text{ mm}^4$$

4.2:



$a = 100 \text{ mm}$
 $B = 400 \text{ mm}$
 $h = 400 \text{ mm}$

- S_x ed S_y
- posizione di G
- J_{x_G} e J_{y_G}

$$H = h + 2a = 600 \text{ mm}$$

$$b = a = 100 \text{ mm}$$

(1 rettangolo pieno)
 (2 rettangoli vuoti)

Rettangoli concentrici $\Rightarrow B_1 = B_2 = G$

$$x_G = \frac{400}{2} = 200 \text{ mm}$$

$$y_G = \frac{600}{2} = 300 \text{ mm}$$

$$S_x = S_{x1} - S_{x2} = y_G A_1 - y_G \cdot A_2 = y_G (A_1 - A_2) = 60 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

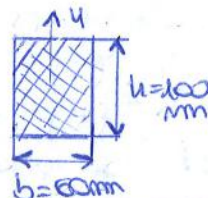
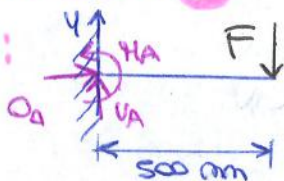
$$S_y = S_{y1} - S_{y2} = x_G (A_1 - A_2) = 40 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$J_x = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{12} = 6,67 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$J_y = \frac{H B^3}{12} - \frac{h b^3}{12} = 3,17 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

CAPITULO 5

5.1:



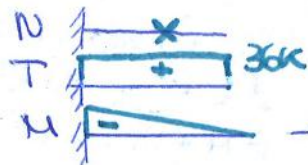
$\sigma_s = 300 \text{ MPa}$
 $y = 25 \text{ mm}$
 $F = 36 \text{ kN}$

- andamento tensioni e loro valore
- valore in corrispondenza di $y = 25 \text{ mm}$

$$\uparrow \text{VA} = F = 36 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \text{OA} = 0 \text{ N}$$

$$\uparrow \text{MA} - F \cdot 500 = 0 \rightarrow \text{MA} = 18 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$



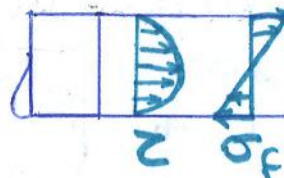
$$\rightarrow M_{\text{max}} = 18 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{3}{2} \frac{F}{b \cdot h} = 9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{f \text{max}} = - \frac{180 \text{ k} \cdot \cancel{10^6}}{b h^3} \cdot \frac{y}{2} = 180 \text{ MPa}$$

$$\sigma_f (y=25) = \frac{180 \text{ k}}{b h^3} \cdot 25 = 90 \text{ MPa}$$

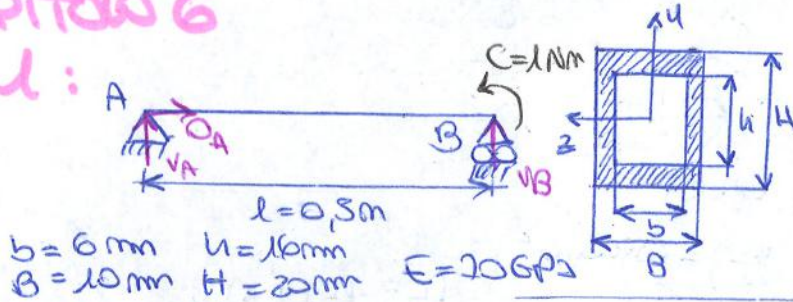
$$\tau (y=25) = 36 \text{ k} \cdot \frac{6 \left(\frac{100^2}{4} - 25^2 \right)}{60 \cdot 100^3} = 6,75 \text{ MPa}$$



5.2

CAPITOLU 6

6.1:



- equazioni della linea elastica
- rotazioni delle sezioni in A e B
- freccia massima

Reazioni vincolari:

$$\uparrow) V_A + V_B = 0 \rightarrow V_A = -V_B$$

$$\rightarrow) O_A = 0 \text{ N}$$

$$\curvearrowright) C + V_B \cdot l = 0 \rightarrow V_B = -\frac{C}{l} = -2 \text{ Nm}$$

andamento del momento

$$M = V_A \cdot x = \frac{C}{l} \cdot x$$



equazioni della linea elastica:

$$y'' = \frac{C(x)}{EJ_z} = \frac{\frac{C}{l} \cdot x}{E \left(\frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} \right)} = \frac{Cx}{lEJ_z}$$

$$y' = \int y'' = \frac{C}{2lEJ_z} \cdot \frac{x^2}{2} + A = \frac{Cx^2}{2lEJ_z} + A$$

$$y = \int y' = \frac{C}{2lEJ_z} \cdot \frac{x^3}{3} + Ax + B = \frac{Cx^3}{6lEJ_z} + Ax + B$$

Costanti: $y(0) \rightarrow B = 0$

$$y(l) = \frac{Cl^3}{6lEJ_z} + Al \rightarrow A = -\frac{Cl^3}{6lEJ_z} \cdot \frac{1}{l} = -\frac{Cl}{6EJ_z}$$

$$\theta_A = y'(0) = -\frac{Cl}{6EJ_z} = -2,6 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

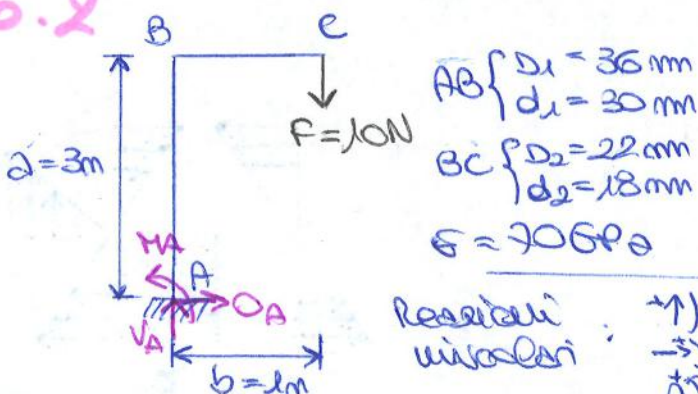
$$\theta_B = y'(l) = \frac{Cl^2}{2lEJ_z} - \frac{Cl}{6EJ_z} = -\frac{Cl}{3EJ_z} = 5,1 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

freccia: $y' = 0 \rightarrow \frac{Cx^2}{2lEJ_z} - \frac{Cl}{6EJ_z} = 0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{Cl}{6EJ_z} \cdot \frac{2lEJ_z}{C}} = 0,289 \text{ m}$

$$\bar{x} = 289 \text{ mm}$$

$$y(\bar{x}) = \frac{C\bar{x}^3}{6lEJ_z} - \frac{Cl}{6EJ_z} \cdot \bar{x} = \frac{C}{6EJ_z} \left(\frac{\bar{x}^3}{l} - l\bar{x} \right) = -4,96 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$$

6.2



- rotazioni delle sezioni in B e C
- spostamento verticale e orizzontale di C

Reazioni vincolari:

$$\uparrow) V_A - F = 0 \rightarrow V_A = 10 \text{ N}$$

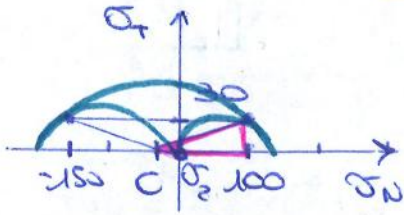
$$\rightarrow) O_A = 0 \text{ N}$$

$$\curvearrowright) M_A - Fb = 0 \rightarrow M_A = 10 \text{ Nm}$$

CAPITOLU 7

7.1:
$$\begin{bmatrix} 100 & 30 & 0 \\ 30 & -150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sigma$$

- tensioni principali
- cerchi di Mohr
- orientazioni del sistema di riferimento principale



$$C = \frac{100 - 150}{2} = -25 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(100 + 25)^2 + 30^2} = 128 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = -25 + 128 = 103 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -25 - 128 = -153 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ MPa} \rightarrow \text{la direzione } z \text{ è principale}$$

orientazione: $\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{30}{100 - (-25)}\right) = 6,75^\circ$

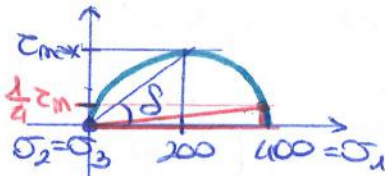
7.2: - sezione rettangolare: $b = 20 \text{ mm}$ $h = 8 \text{ mm}$
 - carico assiale $F = 40 \text{ kN}$

- tensioni principali e cerchi di Mohr
- orientazione θ della max tensione tangenziale + tensione
- β per cui la tensione tangenziale è $1/4 \tau_{max}$ + tensione

$$\sigma_N = \frac{F}{A} = 400 \text{ MPa} = \sigma_{xx}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

direzioni principali \Rightarrow
 $\sigma_1 = 400 \text{ MPa}$
 $\sigma_2 = 0 \text{ MPa}$
 $\sigma_3 = 0 \text{ MPa}$



$$\frac{400 - 0}{2} = 200 \text{ MPa} = \text{raggio} \Rightarrow \theta = 45^\circ \text{ (triangolo rettangolo isoscele)}$$

$$\tau_{max} = 200 \text{ MPa}$$

$$\frac{1}{4} \tau_{max} = 50 \text{ MPa} \rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

$$\frac{50}{200} = 0,25 \rightarrow \text{raggio: } \sqrt{200^2 - 50^2} = 139,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_\beta = \begin{bmatrix} 339,6 & 50 & 0 \\ 50 & 60,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.3: - barra circolare $d = 30 \text{ mm}$

- $M_t = 160 \text{ Nm}$ \Rightarrow $\begin{cases} 100\% \\ 50\% \\ 25\% \end{cases}$ del raggio

- Mohr
- tensioni principali

$$\tau = \frac{M_t \cdot 1000}{\frac{\pi}{32} d^4} \cdot y$$

$y = \frac{d}{2} (100\%) \rightarrow \tau = 30,2 \text{ MPa}$
 $y = \frac{d}{4} (50\%) \rightarrow \tau = 15,1 \text{ MPa}$
 $y = \frac{d}{8} (25\%) \rightarrow \tau = 7,6 \text{ MPa}$

CAPITOLLO 8

8.1: - sezione circolare piena ($d = 30\text{mm}$)
- momento torcente 800Nm

• tensione equivalente con
Tresca e von Mises

$$\tau_{\max} = \frac{800 \cdot 1000}{\frac{\pi}{16} \cdot 30^3} = 150,9\text{MPa} = 151\text{MPa} \rightarrow \text{ha torsione pura} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 151\text{MPa} \\ \sigma_2 = 0\text{MPa} \\ \sigma_3 = -151\text{MPa} \end{cases}$$

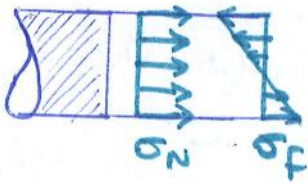
Tresca: $\sigma_{\text{eq}} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = \max(151, 151, 302) = 302\text{MPa}$

VON MISES: $\sigma_{\text{eq}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \approx 212\text{MPa}$

Tresca è il più restrittivo poiché ottiene il valore maggiore

8.2: - sezione rettangolare $b = a, h = 2a$
- sforzo normale $N = 1000\text{N}$
- momento flettente $M_f = 500\text{Nm}$

• dimensionare per garantire un
coefficiente di sicurezza
 $\delta = 1,5$ ($\sigma_s = 235\text{MPa}$)



$$\sigma_N = \frac{N}{b \cdot h} = \frac{N}{a \cdot 2a} = \frac{N}{2a^2}$$

$$\sigma_f = \frac{M_f}{\frac{bh^3}{12}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{M_f}{\frac{a(2a)^3}{12}} \cdot \frac{2a}{2} = \frac{3M_f}{2a^3}$$

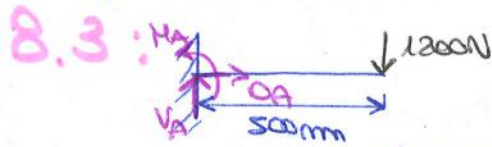
$$\left. \begin{cases} \sigma_N = \frac{N}{2a^2} \\ \sigma_f = \frac{3M_f}{2a^3} \end{cases} \right\} \sigma_{22} = \sigma_N + \sigma_f$$

$$\sigma_{22} = \frac{N}{2a^2} + \frac{3M_f}{2a^3} = \frac{Na + 3M_f}{2a^3} \leq \frac{\sigma_s}{\delta} = \frac{235}{1,5} \approx 157\text{MPa}$$

considero il valore della
positiva

$$Na + 3M_f = 235 \cdot 2a^3 \rightarrow 31ha^3 - 1000a - 1500000 = 0 \rightarrow a = 16,9 \approx 17\text{mm}$$

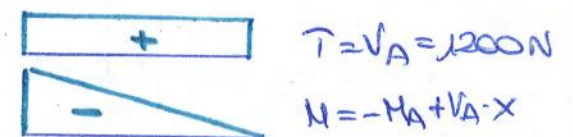
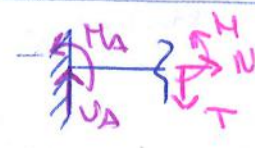
$$2a = 17 \cdot 2 = 34\text{mm}$$



$b = 45\text{mm}$
 $h = 30\text{mm}$

• cerchi di Mohr
• tensioni principali
• tensione equivalente con von Mises

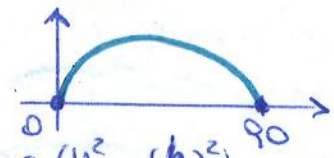
↑) $V_A = F = 1200\text{N}$
→) $O_A = 0\text{N}$
↺) $M_A = F \cdot 500 = 600000\text{Nmm}$



100% h: $\sigma_f = -\frac{-M}{\frac{bh^3}{12}} \cdot \frac{h}{2} \approx 89\text{MPa}$

$$\tau = V_A \frac{6 \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{bh^3} = 0\text{MPa}$$

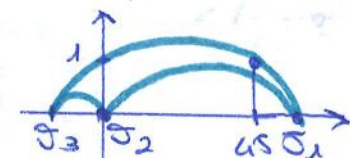
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 90\text{MPa} \\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0\text{MPa} \end{cases}$$



50% h: $\sigma_f = -\frac{-M}{\frac{bh^3}{12}} \cdot \frac{h}{4} \approx 45\text{MPa}$

$$\tau = V_A \frac{6 \left(\frac{h^2}{4} - \left(\frac{h}{4} \right)^2 \right)}{bh^3} = 1\text{MPa}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 45 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$C = \frac{45 + 0}{2} = 22,5\text{MPa}$$

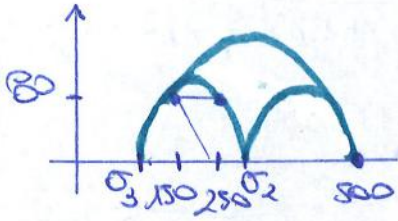
$$R = \sqrt{\left(\frac{45 - 0}{2} \right)^2 + 1^2} = 22,6\text{MPa}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = C + R = 45\text{MPa} \\ \sigma_3 = C - R = -0,1\text{MPa} \\ \sigma_2 = 0\text{MPa} \end{cases}$$

8.5:
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 250 & 80 & 0 \\ 80 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 500 \end{bmatrix}$$

 materiale fragile

- tensioni principali e cerchi di Mohr
- criterio di rottura massima per parastre $\nu = 1,8$



$$C = \frac{250+150}{2} = 200 \text{ MPa} \quad R = \sqrt{\left(\frac{250-150}{2}\right)^2 + 80^2} \approx 94 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = 500 \text{ MPa} \quad (\text{è principale})$$

$$\sigma_2 = 200 + 94 = 294 \text{ MPa}$$

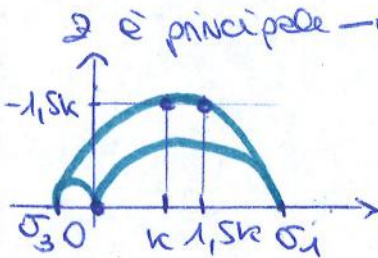
$$\sigma_3 = 200 - 94 = 106 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} \leq \frac{\sigma_R}{S} \rightarrow \sigma_R = \sigma_{\max} \cdot S = 500 \cdot 1,8 = 900 \text{ MPa}$$

8.6:
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} k & -1,5k & 0 \\ -1,5k & 1,5k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- valore di k per cui lo sveramento inizia in base al criterio più restrittivo

materiale duttile ($\sigma_S = 360 \text{ MPa}$)



z è principale $\rightarrow \sigma_p = 0 \text{ MPa}$

$$C = \frac{k+1,5k}{2} = 1,25k \quad R = \sqrt{\left(\frac{1,5k-k}{2}\right)^2 + (1,5k)^2} = 1,52k$$

$$\sigma_1 = 1,25k + 1,52k = 2,77k$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 1,25k - 1,52k = -0,27k$$

Criterio più restrittivo per i duttili \rightarrow TRESCA:

$$\sigma_{id} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|)$$

$$\sigma_{id} = \max(2,77k; 0,27k; 3,04k) = 3,04k$$

$$\sigma_{id} \leq \sigma_S \rightarrow 3,04k = 360 \text{ MPa} \rightarrow k = \frac{360}{3,04} \approx 118 \text{ MPa} \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 \approx 327 \text{ MPa} \\ \sigma_3 \approx -32 \text{ MPa} \end{cases}$$

8.7: - stato di deformazione piana (z)

- $\sigma_{44} = \sigma_{22}$
- $\sigma_m = 130 \text{ MPa}$ (tensore idrostatico)
- $E = 160 \text{ GPa} \quad \nu = 0,3$
- $\sigma_R = 500 \text{ MPa}$

- trovare delle tensioni

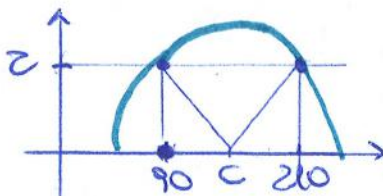
$$\epsilon_{22} = 0 = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{44})] \rightarrow \sigma_{22} = \nu\sigma_{xx} + \nu\sigma_{22} \rightarrow 0,7\sigma_{22} = 0,3\sigma_{xx}$$

$$\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{44} + \sigma_{22}}{3} = 130 \text{ MPa} \rightarrow \sigma_{xx} + 2\sigma_{22} = 390 \rightarrow 2,3\sigma_{22} + 2\sigma_{22} = 390$$

$$4,3\sigma_{22} = 390 \rightarrow \sigma_{22} = \sigma_{44} \approx 90 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xx} = 390 - 2 \cdot \sigma_{xx} = 210 \text{ MPa}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 210 & 2 & 0 \\ 2 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{bmatrix}$$



$$C = \frac{210+90}{2} = 150 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{210-90}{2}\right)^2 + 2^2} \leq 500$$

CAPITOLO 12

- 1.1:** - trave in calcestruzzo ($b=15\text{mm}$ $h=30\text{mm}$)
 - trazione costante $N=12\text{KN}$
 - momento flettente variabile $M_0 = M_0 \sin \omega t$
 con $M_0 = 700\text{Nm}$ e $\omega = 125,7\text{rad/s}$

- $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}, \sigma_m, \sigma_a$
- σ, A, R
- Numero di cicli di carico imposti alla struttura in 10 ore

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{12\text{K}}{15 \cdot 30} \approx 27\text{MPa} = \sigma_m \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a = 311 + 29 = 338\text{MPa} \\ \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a = -284\text{MPa} \end{array} \right.$$

$$\sigma_f = \frac{M_0}{\frac{bh^3}{12}} \cdot \frac{1}{2} \approx 311\text{MPa} = \sigma_a$$

$$\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 2\sigma_a = 622\text{MPa} \quad R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -0,84$$

$$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = 11,52$$

$$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 20\text{Hz} \rightarrow \text{frequenza di applicazione del carico}$$

$$\text{cicli in dodici ore: } N = f \cdot 12 \cdot 60^2 = 864000 \text{ cicli } (8,64 \cdot 10^5)$$

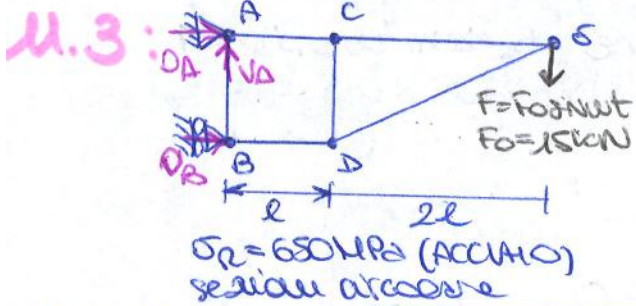
- 1.2:** - acciaio: $\sigma_R = 793\text{MPa}$
 - $\sigma_{1000} \approx 0,9 \sigma_R, \sigma_D \approx 0,5 \sigma_R$
 - $\sigma_N = A(N)^b$

- tabella di resistenza a fatica per $N = 10^5 \cdot 3$ cicli
- numero di cicli per $\sigma_N = 600\text{MPa}$

$$\sigma_{1000} \approx 714\text{MPa} \quad \sigma_D \approx 397\text{MPa}$$

$$\sigma_N = \frac{(714)^2}{397} (3 \cdot 10^5)^{-\frac{1}{3}} \exp\left(\frac{211}{397}\right) = 439,7 \approx 440\text{MPa}$$

$$N_1 = 10^{\frac{1}{b} \exp\left(\frac{\sigma_N}{A}\right)} \approx 7720 \text{ cicli}$$

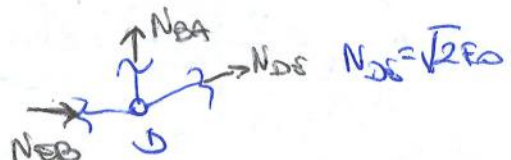
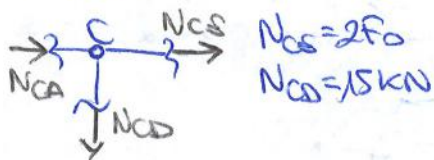
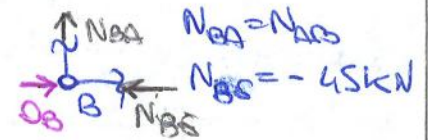
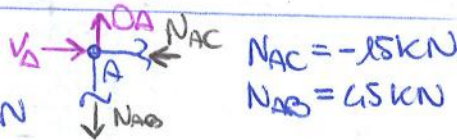


- reazioni vincolari
- reazioni interne
- dimensione OA sezione per $s=2$

$$\uparrow \sum V_A - F = 0 \rightarrow V_A = 15\text{kN}$$

$$\rightarrow \sum O_A + O_B = 0 \rightarrow O_A = -O_B$$

$$\uparrow \sum M_B \cdot l - F \cdot 3l = 0 \rightarrow O_B = 45\text{kN}$$



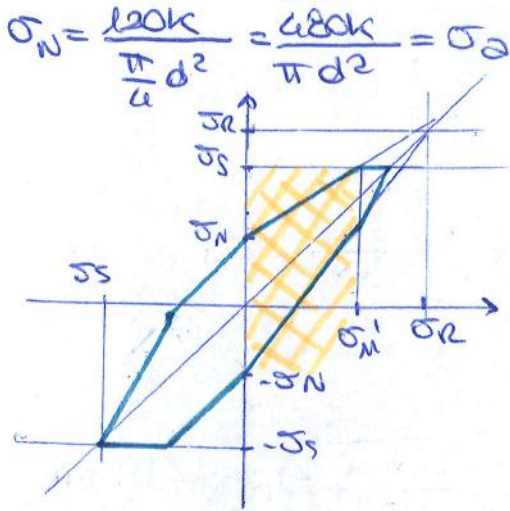
Carico max $N_{AB} = 45\text{kN}$

fatica alternata simmetrica: $\sigma_a = \frac{F_{\max}}{\frac{\pi}{4} d^2} = \frac{4 \cdot 45\text{k}}{\pi d^2}$

$$\sigma_D = 0,5 \sigma_R = 325\text{MPa}$$

$$\sigma_a \leq \frac{\sigma_D}{S} = 163\text{MPa}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 45\text{k}}{\pi \cdot 163}} = 18,8 = 19\text{mm}$$



$$\sigma'_m = \frac{\sigma_S - \sigma_N}{1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}} = 560 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_N + \sigma'_m \left(\frac{\sigma_R - \sigma_N}{\sigma_R} \right)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_N + \sigma'_m = \sigma_N + \sigma_S = \frac{2480k}{\pi d^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{2}{\sigma_N} \left[\frac{4 \cdot N_0}{\pi} - \frac{4 \cdot N_1}{\pi} \left(\frac{\sigma_N - \sigma_R}{\sigma_R} - 1 \right) \right]} = 22,99 \text{ mm}$$

$$d \geq 23 \text{ mm} \quad [19,81 \text{ mm}]$$

- 11.8:**
- trovare incastriata
 - geometria: $D = 50 \text{ mm}$, $d = 40 \text{ mm}$
 - $\sigma_R = 515 \text{ MPa}$, $\sigma_S = 400 \text{ MPa}$
 - $\sigma_N = 130 \text{ MPa}$
 - $N = 10^8$ cicli
 - $N = 180 \text{ kN}$
 - $M_f = M_0 \sin \omega t$, $M_0 = 210 \text{ Nm}$

- carico opposto alla trazione
- verificare a fatica e trazione
S (Goodman-Smith) [2,5]

$$\sigma_N = \frac{180k}{\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)} = 212 \text{ MPa}$$

$$\sigma_f = \frac{M_0}{\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)} \frac{D}{2} = 28,9 \approx 29 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\sigma_R} = \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_R} \right) \sigma_N = 76,5 \approx 77 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_m = \frac{\sigma_S - \sigma_N}{1 - \frac{\sigma_N}{\sigma_R}} = 361$$

$$S = \frac{\sigma_{\sigma_R}}{\sigma_{\sigma}} = 2,6$$

CAPITOLO 13

- 12.1:**
- trovare incastriata
 - geometria: $b = 20 \text{ mm}$, $h = 120$, $h = 80 \text{ mm}$
 - raggio di raccordo $r = 10 \text{ mm}$
 - $\sigma_R = 510 \text{ MPa}$, $\sigma_S = 355 \text{ MPa}$
 - $F = 64 \text{ kN}$ (trazione)

- fattore di concentrazione delle tensioni
- tensione massima nell'angolo
- coefficiente di sicurezza

$$\left. \begin{array}{l} H/h = 1,5 \\ r/h = 0,13 \end{array} \right\} \text{ dai diagrammi: } k_T = 1,95$$

$$\sigma_N = \frac{F}{bh} = 40 \text{ MPa}$$

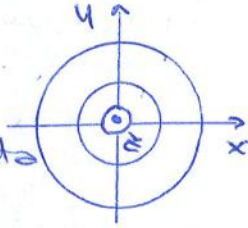
$$\sigma_{N \max} = \sigma_N \cdot k_T = 78 \text{ MPa}$$

$$\text{coefficiente di sicurezza: } S = \frac{355}{78} = 4,55$$

CAPITOLO 14 - Esercizi di ripiego -

1) - $D = 35\text{mm}$ $d = 28\text{mm}$

- $M_f = 180\text{ Nm}$
- $M_t = 120\text{ Nm}$
- $N = 25\text{ kN}$
- $T = 5\text{ kN}$
- $E = 210\text{ GPa}$ $\nu = 0,3$
- $S = 2$ $\sigma_s = 300\text{ MPa}$



- coppia di torsione unitario
- avanzamento delle sezioni
- punto più sollecitato e tensione
- tensioni principali
- verifica col criterio di Tresca

$$\theta_U = \frac{M_t}{G J_p} = \frac{120 \cdot 1000}{\frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)} = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm}$$

$$\sigma_N = \frac{25\text{ kN}}{\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)} = 72\text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{A} = 1\text{ MPa}$$

$$\sigma_f = \frac{180 \cdot 1000}{\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)} \cdot \frac{D}{2} = 72\text{ MPa}$$

$$M_t = \frac{120 \cdot 1000}{\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)} \cdot \frac{D}{2} = 24\text{ MPa}$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_N + \sigma_f = 144\text{ MPa}$$

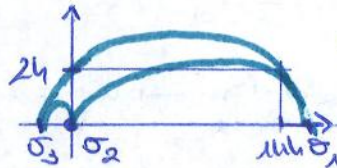
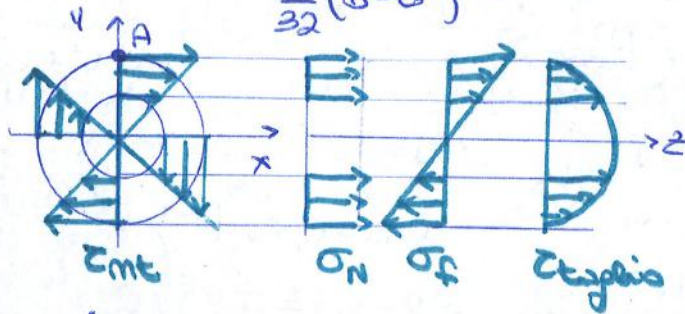
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{mb} = 24\text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$$

A punto più sollecitato

$$L \triangleright [\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 144 \end{bmatrix}$$

y è principale



$$c = \frac{144}{2} = 72\text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{144}{2}\right)^2 + 24^2} \approx 76\text{ MPa}$$

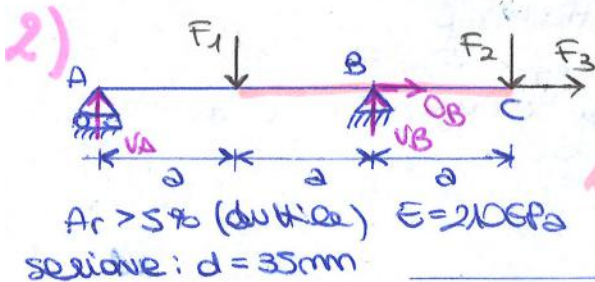
$$\sigma_1 = 72 + 76 = 148\text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = 72 - 76 = -4\text{ MPa}$$

$$\left\{ \text{TRESCA: } \sigma_{id} = \max \{ |148|, |4|, |148 + 4| \} = 152\text{ MPa} \right.$$

$$\sigma_{id} \leq \frac{\sigma_s}{S} \rightarrow 152 \leq \frac{300}{2} \rightarrow 152 < 150 \text{ ok!}$$



- $d = 400\text{ mm}$
- $F_1 = 2\text{ kN}$
- $F_2 = 2\text{ kN}$
- $F_3 = 30\text{ kN}$
- $M_t = 350\text{ Nm}$
- $\sigma_R = 900\text{ MPa}$
- $\sigma_S = 900\text{ MPa}$

- residui vincolari
- caratteristici di sollecitazione
- tensioni, tensione, Mohr
- valutare con $S = 2$
- freccia in C

Reazioni vincolari: $\uparrow \uparrow$ $V_A - F_1 + V_B - F_2 = 0$

$$\Rightarrow O_B + F_3 = 0 \rightarrow O_B = -30\text{ kN}$$

$$\uparrow \uparrow$$
 $A) V_B \cdot 2a - F_1 \cdot a - F_2 \cdot 3a = 0 \rightarrow V_B = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot 3a}{2a} = 4\text{ kN}$

$$V_A = -V_B + F_1 + F_2 = 0\text{ N}$$

Caratteristiche di sollecitazione:

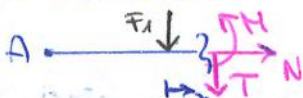
S_1): $0 \leq x \leq a$

$$N = 0$$

$$T = -2\text{ kN}$$

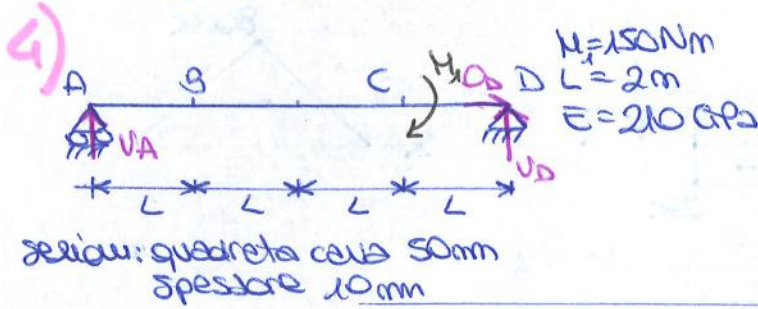
$$M + F_1 \cdot x = 0 \rightarrow M(0) = 0$$

$$M(a) = -800'000\text{ Nmm}$$



$$\sigma_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(278-120)^2 + (120-72)^2 + (72-225)^2} \approx 187 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{\sigma_s}{\sigma_d} = \frac{500}{187} = 2,67$$



- reazioni vincolari
- caratteristici di sollecitazione
- rotazione di B prodotta dalla coppia M_1 applicata in C.

Reazioni vincolari:

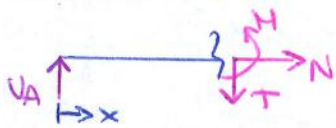
$$\uparrow \sum V_A + V_B = 0 \rightarrow V_B = -V_A = 18,75 \text{ N}$$

$$\rightarrow \sum O_D = 0 \text{ N}$$

$$\curvearrowright \sum M_A = 0 \rightarrow -V_A \cdot 4L - M_1 = 0 \rightarrow V_A = -\frac{M_1}{4L} = -18,75 \text{ N}$$

Caratteristiche di sollecitazione:

$S_1: 0 \leq x \leq 3L$



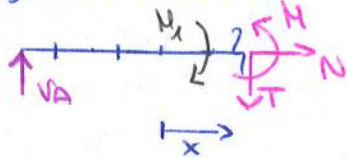
$$N = 0 \text{ N}$$

$$-T + V_A = 0 \rightarrow T = V_A = 18,75 \text{ N}$$

$$M - V_A x = 0 \rightarrow M(0) = 0$$

$$M(3L) = -112,5 \text{ Nm}$$

$S_2: 3L \leq x \leq 4L$



$$N = 0 \text{ N}$$

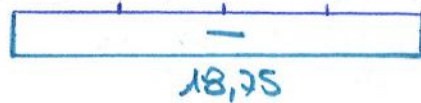
$$V_A - T = 0 \rightarrow T = V_A = 18,75 \text{ N}$$

$$M - M_1 - V_A x = 0 \rightarrow M(3L) = 37,5 \text{ Nm}$$

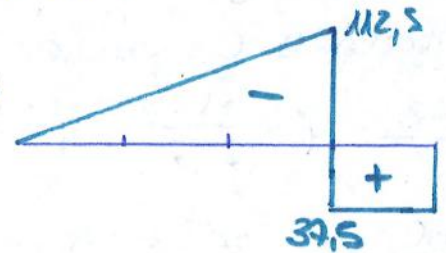
$$M(4L) = 0 \text{ Nm}$$

Diagrammi di sollecitazione:

(N vale sempre zero) T:



M:



Rotazione in B:

$S_1: y_1'' = -\frac{V_A \cdot x}{EJ_2}$

$$y_1' = -\frac{V_A x^2}{2EJ_2} + C_1 \quad y_1 = -\frac{V_A x^3}{6EJ_2} + C_1 x + C_2$$

$C_2 = y_1(0) = 0$
 $C_1 = y_1'(3L) = 0 \rightarrow -\frac{V_A (3L)^2}{2EJ_2} + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = \frac{V_A (3L)^2}{2EJ_2} = \frac{V_A \cdot 9L^2}{2EJ_2}$

$S_2: y_2'' = \frac{(M_1 - V_A x)}{EJ_2}$

$$y_2' = \frac{M_1 x}{EJ_2} - \frac{V_A x^2}{2EJ_2} + C_3 \quad y_2 = \frac{M_1 x^2}{2EJ_2} - \frac{V_A x^3}{6EJ_2} + C_3 x + C_4$$

$y_1(0) = 0 = C_2$
 $y_2(4L) = 0 = \frac{150(4L)^2}{2EJ_2} - \frac{1875(4L)^3}{6EJ_2} + 4L C_3 + C_4$

Condizioni di continuità:

$$y_1'(3L) = y_2'(3L)$$

$$y_1(3L) = y_2(3L)$$

In B ho:

$$\sigma_f = \frac{1500 \cdot 1000}{\frac{\pi}{64} d^4} \frac{d}{2} = \frac{32 \cdot 1500 \cdot 1000}{\pi d^3} = \frac{15279k}{d^3} = \sigma_{zz}$$

$$\tau_t = \frac{1200 \cdot 1000}{\frac{\pi}{32} d^4} \frac{d}{2} = \frac{16 \cdot 1200 \cdot 1000}{\pi d^3} = \frac{612k}{d^3} = \tau_{xz}$$

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{6000}{\frac{\pi}{4} d^2} = \frac{10186}{d^2}$$

$$\sigma_p^2 - \frac{15279k}{d^3} \sigma_p - \left(\frac{612k}{d^3} \right)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \frac{17423k}{d^3} \\ \sigma_3 = -\frac{2111k}{d^3} \end{cases}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{612k}{d^3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{612k}{d^3} & 0 & \frac{15279k}{d^3} \end{bmatrix}$$

y è principale
 $\sigma_p = 0 \text{ MPa}$

Materiale duttile \rightarrow TRUSSCA

$$\sigma_{id} = \max \left\{ \left| \frac{17423k}{d^3} \right|, \left| \frac{2111k}{d^3} \right|, \left| \frac{2111k}{d^3} + \frac{17423k}{d^3} \right| \right\} = \frac{19567k}{d^3} \leq \frac{\sigma_s}{s}$$

$$\frac{19567k}{d^3} \leq \frac{750}{2} \rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 19567k}{750}} = 37,4 = 37 \text{ mm}$$

Calcolo della freccia in C: sovrapposizione per effetti

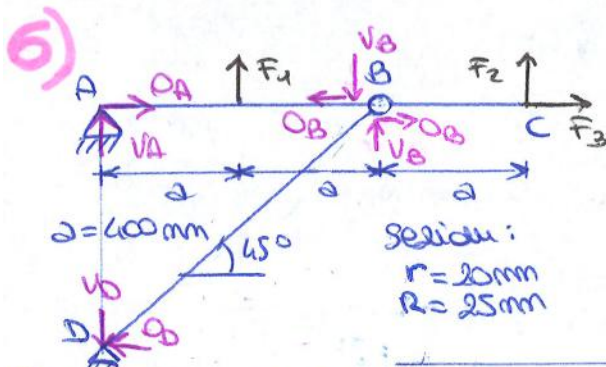
AC (con coppia $q \cdot \frac{a^2}{2}$ in B):

$$y_1 = -\frac{\left(q \frac{a^2}{2} \right) a b \cdot 1000}{3 \cdot 20000 \cdot \frac{\pi}{64} d^4} = -12 \text{ mm}$$

BC (trave incastrata con carico distribuito) \rightarrow tabelle

$$y_2 = -\frac{q a^4}{8 E I_z} = -\frac{12 (0,5)^4 \cdot 1000}{8 \cdot 20000 \cdot \frac{\pi}{64} d^4} = -4,9 = -5 \text{ mm}$$

$$y_C = y_1 + y_2 = -17 \text{ mm}$$



$F_1 = 2000 \text{ N}$
 $F_2 = 3000 \text{ N}$
 $F_3 = 30 \text{ kN}$
 $\sigma_R = 200 \text{ MPa}$
 $\sigma_S = 500 \text{ MPa}$
 $A_r > 5\%$
 $E = 210 \text{ GPa}$
 $s = 2$

- reazioni vincolari
- caratteristiche di elasticità
- verificare nel punto più delle atero utilizzando il criterio di rottura.

Reazioni vincolari; AC): $\uparrow \sum V_A + F_1 - V_B + F_2 = 0 \rightarrow V_B = 5500 \text{ N}$

$$\rightarrow \sum O_A - O_B + F_3 = 0$$

$$\curvearrowright \sum -V_A \cdot 2a - F_1 \cdot a + F_2 \cdot a = 0 \rightarrow V_A = \frac{a(F_2 - F_1)}{2a} = 800 \text{ N}$$

BC): $\uparrow \sum V_B - V_D = 0 \rightarrow V_B = V_D$

$$\rightarrow \sum O_B - O_D = 0 \rightarrow O_B = O_D$$

$$\curvearrowright \sum -O_D \cdot 2a + 2V_D \cdot a = 0 \rightarrow O_D = \frac{2V_D a}{2a} = 5500 \text{ N}$$

$$O_A = -26500 \text{ N}$$

$$\rightarrow \sum O_B + qL = 0 \rightarrow O_B = -qL = -6000 \text{ N}$$

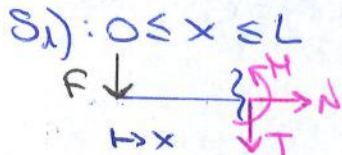
$$\sum \uparrow F \cdot 4L - V_B \cdot 3L + q(L)(2L + \frac{L}{2}) - V_D \cdot 2L - q \frac{L^2}{2} = 0$$

eq. dell'equilibrata a sx di C $\rightarrow F(L + \frac{3L}{4}) - V_B \frac{3L}{4} + q(\frac{3L}{4})(\frac{3L}{4} \cdot \frac{1}{2}) = 0 \rightarrow V_B = 3725 \text{ N}$

$$V_D = \frac{F \cdot 4L - V_B \cdot 3L + q(L)(2L + \frac{L}{2}) - q \frac{L^2}{2}}{2L} = -1687,5 \text{ N}$$

$$V_S = F - V_B + qL - V_D = +62,5 \text{ N}$$

Caratteristiche di sollecitazione:

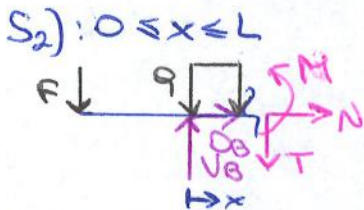


$$N = 0$$

$$T = -1500 \text{ N}$$

$$M - Fx = 0 \rightarrow M(0) = 0 \text{ Nm}$$

$$M(L) = -3000 \text{ Nm}$$



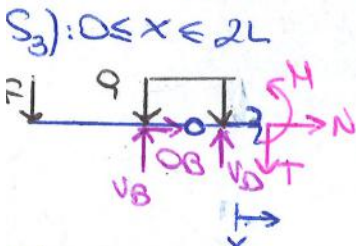
$$N = 600 \text{ N}$$

$$V_B - F - T - qx = 0 \rightarrow T(0) = 2225 \text{ N}$$

$$T(L) = 1625 \text{ N}$$

$$M + F(L+x) - V_B x + q \frac{x^2}{2} = 0 \rightarrow M(0) = -3000 \text{ Nm}$$

$$M(L) = 850 \text{ Nm}$$



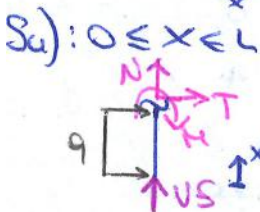
$$N = 600 \text{ N}$$

$$V_B - F - T - qL - V_D = 0 \rightarrow T = -62,5 \text{ N}$$

$$M + F(2L+x) - V_B(L+x) - qL(\frac{L}{2} + x) - V_D \cdot x = 0$$

$$M(0) = 850 \text{ Nm}$$

$$M(2L) = 600 \text{ Nm}$$



$$T = 0$$

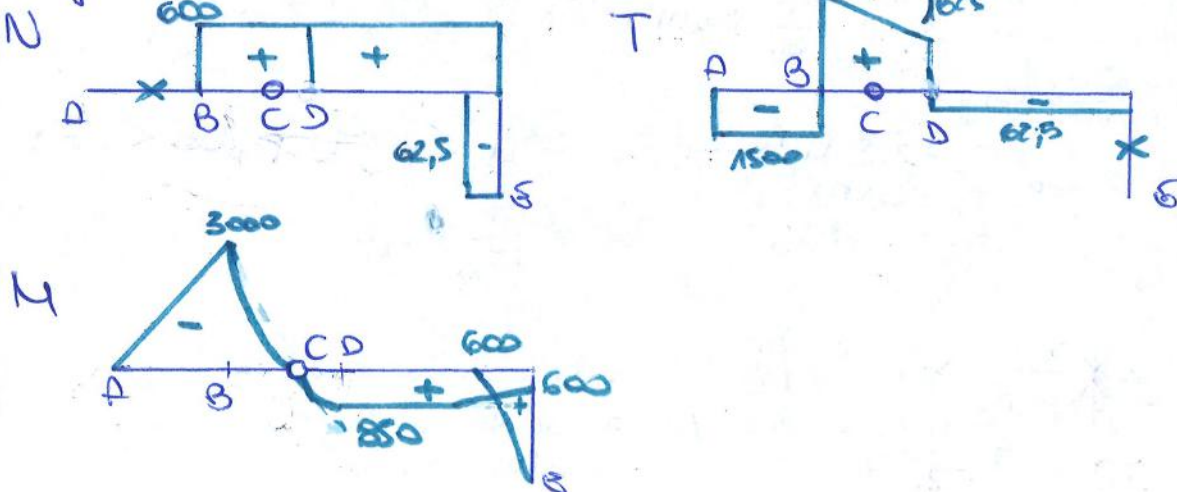
$$N = +62,5 \text{ N}$$

$$-N + qx = 0 \rightarrow M(0) = 0 \text{ Nm}$$

$$M(L) = 600 \text{ Nm}$$

~~Caratteristiche di sollecitazione~~

Diagrammi di sollecitazione



B è il punto più sollecitato!

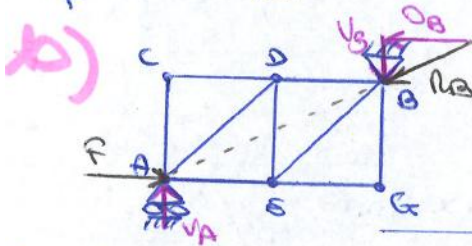
$$\sigma_{min} = -\sigma_f \quad \sigma_m = 0 \quad \sigma_d = \frac{\sigma_f}{2}$$

N° di cicli in 10 ore: $N = 60^2 \cdot 10 \cdot 10 = 36 \cdot 10^4$ cicli

$$\sigma_N = \frac{\sigma_{lim}^2}{\sigma_d} \left(36 \cdot 10^4 \right)^{\frac{1}{3}} \log\left(\frac{\sigma_{lim}}{\sigma_d}\right) = 436 \text{ MPa}$$

$$\sigma_f < \sigma_N \rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 4000 \cdot 10^3}{\pi \cdot \sigma_N}} = 21 \text{ mm}$$

$$\sigma_f = 440 \text{ MPa}$$



sezioni circolari
 $\sigma_R = 600 \text{ MPa}$ (acciaio)
 $F = F_0 \sin \omega t$
 $F_0 = 10 \text{ kN}$

- reazioni vincolari
- reazioni interne
- dimensionare per avere $s=2$

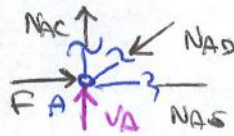
Reazioni vincolari: 1) $V_A - V_B = 0$

$$\rightarrow F_0 - O_B = 0 \rightarrow O_B = -10 \text{ kN}$$

$$2) -V_A \cdot 2L + F \cdot L = 0 \rightarrow V_A = \frac{FL}{2L} = 5 \text{ kN} = V_B$$

$$R_B = \sqrt{5^2 + 10^2} = 11.18 \text{ kN}$$

Reazioni interne:



$$N_{BC} = N_{CA} = 0 \text{ N}$$

$$V_A + N_{AD} \cos 45 = 0 \rightarrow N_{AD} = -7071 \text{ N}$$

$$F + N_{AS} + N_{AD} \cos 45 = 0 \rightarrow N_{AS} = -5000 \text{ N}$$

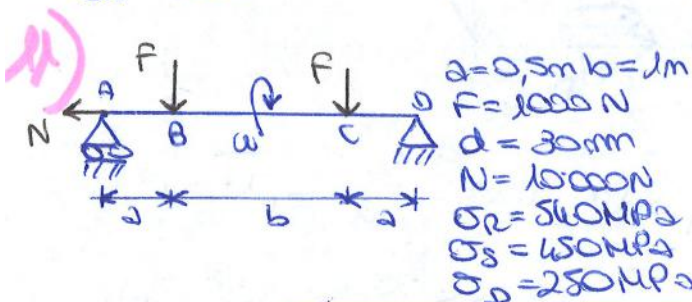
$$N_{CE} = N_{GB} = N_{GD} = 0 \text{ N}$$

$$N_{BE} = -7071 \text{ N}$$

$$N_{BD} = -5000 \text{ N}$$

$$N_{DE} = 5000 \text{ N}$$

$$\sigma_N = \frac{7071}{\frac{\pi}{4} d^2} \leq \frac{\sigma_R}{s} = 150 \rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 7071}{\pi \cdot 150}} = 7.8 \text{ mm}$$



- ciclo di carico nel punto piú sollecitato
- Verifica col diagramma di Haigh.

B è il punto piú sollecitato

$$\sigma_N = \frac{10000}{\frac{\pi}{4} d^2} = 14 \text{ N} = \sigma_m \quad \sigma_f = \frac{1000 \cdot 2 \cdot 1000}{\frac{\pi}{64} d^4} = 189 \text{ MPa} = \sigma_d$$

Verifica: $\sigma_m' = \frac{\sigma_S - \sigma_D}{1 - \frac{\sigma_D}{\sigma_R}} = 372 \text{ MPa}$

$$\sigma_{all} = \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_R} \right) \sigma_D = 244 \text{ MPa} \rightarrow \sigma_f < \sigma_{all} \text{ ok!}$$

* ESERCIZIO APPESO di WOLFO 2016 (3)

- Deformazioni piano campo 2
- Altre componenti del tensore pari allo 0,1%
- $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$
- $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0,3$

- tensione delle travi
- cerchi di Mohr

~~• $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 200$~~

$\epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ → vedi pag. 207

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0,1\% \rightarrow \frac{0,1}{100} = 0,001 \rightarrow [E] = \begin{bmatrix} 0,001 & 0,001 & 0 \\ 0,001 & 0,001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0 \rightarrow \sigma_{zz} = 2\nu\sigma_{xx}$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{yy})] = 0,001 \rightarrow \sigma_{xx} - \nu(2\nu\sigma_{xx} + \sigma_{xx}) = 0,001 \cdot E$$

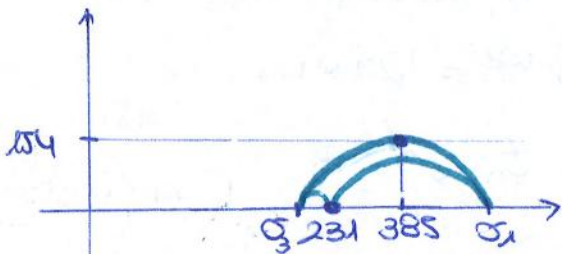
$$\sigma_{xx}(1 - 2\nu^2 - \nu) = 200$$

$$\sigma_{zz} = 2\nu\sigma_{xx} = 231 \text{ MPa} \quad \leftarrow \quad \sigma_{xx} = \frac{200}{0,52} = 384,6 \approx 385 \text{ MPa}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{yx} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = 0,001 \rightarrow \gamma = 0,002$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = 0,002 \rightarrow \tau = \frac{2(1+\nu)}{E} \gamma = 153,8 \approx 154 \text{ MPa}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 385 & 154 & 0 \\ 154 & 385 & 0 \\ 0 & 0 & 231 \end{bmatrix}$$



$$\sigma_c = \frac{2 \cdot 385}{2} = 385 \text{ MPa}$$

~~$$R = \sqrt{\left(\frac{385 - 385}{2}\right)^2 + 154^2} = 154 \text{ MPa}$$~~

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{385}{2}\right)^2 + 154^2} \approx 247 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = 385 + 247 = 632 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 231 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 385 - 247 = 138 \text{ MPa}$$

I invariante: $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$
 $385 + 385 + 231 = 632 + 231 + 138 \rightarrow 1001 = 1001 \quad \text{ok}$

II invariante: $\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \tau^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$
 $148225 + 88935 \cdot 2 - 23716 = 145992 + 31878 + 87216$
 $213444 = 265086$
 $\approx 200000 = \approx 200000 \quad \text{ok}$

TEMA d'ESAMI (verbo C) del 18/7/16

- deformazione piana tipo 2
- altre componenti del tensore solo per il 0,3%
- $E = 25000 \text{ MPa}$ $\nu = 0,3$
- $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$
- $\text{Ar} > 5\% \sigma_s = 600 \text{ MPa}$

- tensione delle travi
- I e II invarianti
- tensioni principali e Mohr
- coefficiente di sicurezza

$$0,3\% \rightarrow \epsilon = \frac{0,3}{100} = 0,003 \rightarrow [\epsilon] = \begin{bmatrix} 0,003 & 0,003 & 0 \\ 0,003 & 0,003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \frac{1}{25000} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{yy})) = 0,003 \rightarrow \sigma_{xx} - \nu\sigma_{zz} - \nu\sigma_{xx} = 225$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{25000} (\sigma_{zz} - \nu(2\sigma_{xx})) = 0 \rightarrow \sigma_{zz} = 2\nu\sigma_{xx}$$

$$\sigma_{xx} - 2\nu^2\sigma_{xx} - \nu\sigma_{xx} = 225$$

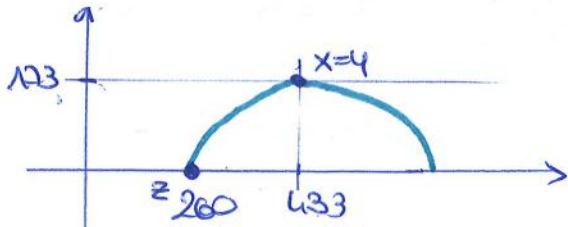
$$\sigma_{xx}(1 - 2\nu^2 - \nu) = 225 \rightarrow \sigma_{xx} = \frac{225}{0,52} = 432,7 \approx 433 \text{ MPa} = \sigma_{yy}$$

$$\sigma_{zz} = 2 \cdot 0,3 \cdot 433 = 259,8 = 260 \text{ MPa}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\epsilon_{xy} \rightarrow \gamma_{xy} = 0,003 \cdot 2 = 0,006 \rightarrow \tau_{xy} = G \cdot \gamma = \frac{E}{2 \cdot 1,3} (-0,006) = -173 \text{ MPa}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 433 & -173 & 0 \\ -173 & 433 & 0 \\ 0 & 0 & 260 \end{bmatrix}$$

σ_{zz} è principale $\rightarrow \sigma_p = 260 \text{ MPa}$



$$\sigma_c = \frac{2 \cdot 433}{2} = 433 \text{ MPa}$$

$$\text{raggio} = 173 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = 433 + 173 = 606 \text{ MPa}$$

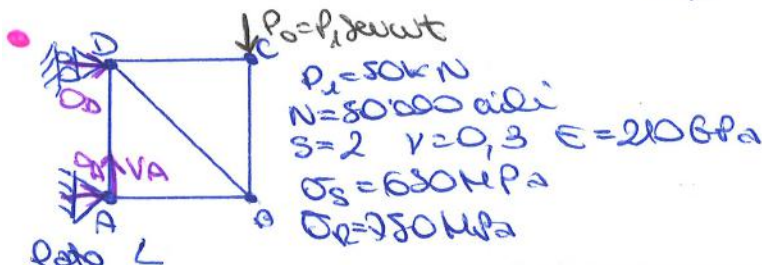
$$\sigma_2 = 260 = \sigma_3$$

I invariante: $433 + 433 + 260 = 606 + 260 + 260$
 $1126 = 1126 \text{ ok}$

II invariante: $(433 \cdot 433) + (433 \cdot 260) \cdot 2 - (173)^2 = (606 \cdot 260) + 260^2 + (606 \cdot 260)$
 $382720 = 382720 \text{ ok}$

$\text{Ar} > 5\% \Rightarrow$ duttile \Rightarrow TRUSSCA $\sigma_{id} = \max \left\{ \begin{array}{l} |606 - 260| \\ |260 - 260| \\ |260 - 606| \end{array} \right\} = 346 \text{ MPa}$

$$\sigma_{id} \leq \frac{\sigma_s}{S} \rightarrow S = \frac{\sigma_s}{\sigma_{id}} = \frac{600}{346} = 1,73$$



- progettare a fatica lo diametro
- tensione alternata σ_a nel punto più sollecitato

MATR. COGNOME NOME

Fondamenti di Meccanica Strutturale – Ingegneria Biomedica
Esempio Tema di esame a.a. 2015-2016 – 06 Giugno

Esercizio n. 1

(max punti 7)

Dato un tensore delle tensioni in cui:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 400 \text{ MPa} & \tau_{xy} &= 0 \\ \sigma_{yy} &= K & \tau_{xz} &= 40 \text{ MPa} \\ \sigma_{zz} &= 300 \text{ MPa} & \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

- 1.1 Valutare K affinché il tensore sia relativo ad uno stato di deformazione piana rispetto ad una direzione del sistema di riferimento cartesiano e determinare le tensioni principali ($\nu = 0.3$, $E = 210 \text{ GPa}$).
- 1.2 Disegnare i cerchi di Mohr e calcolare l'angolo θ tra la direzione principale 1 e l'asse x.
- 1.3 Valutare la tensione ammissibile del materiale con allungamento a rottura inferiore al 5% tale che garantisca un coeff. di sicurezza 2. Scegliere il criterio di rottura opportuno.

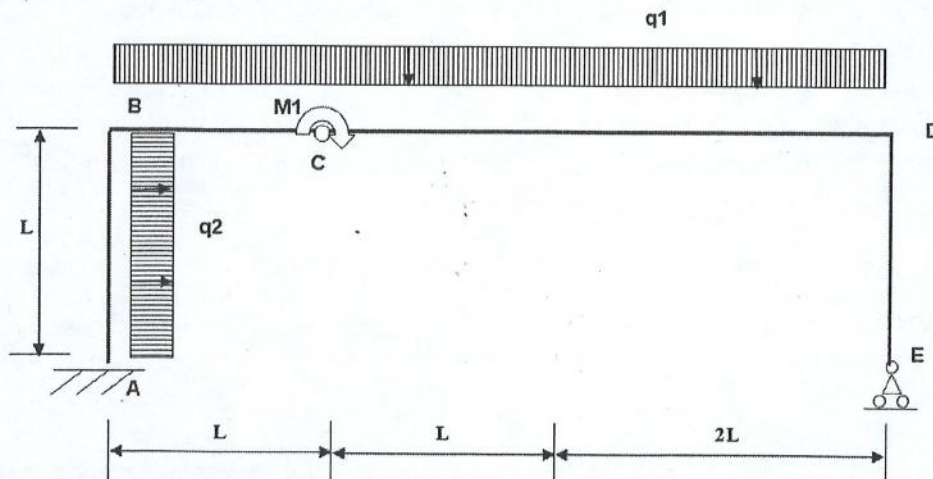
$K = 210$ $\sigma_1 = 414 \text{ MPa}$ $\sigma_2 = 286 \text{ MPa}$ $\sigma_3 = 210 \text{ MPa}$
 $\theta = 19,3^\circ$ $\sigma_{amm} = 214 \text{ MPa}$

Esercizio n. 2

(max punti 9)

Data la struttura secondo lo schema seguente con:

- $L = 2 \text{ m}$
- $q_1 = 1000 \text{ N/m}$ carico distribuito dal punto B al punto D
- $q_2 = 500 \text{ N/m}$ carico distribuito dal punto A al punto B
- $M_1 = 500 \text{ Nm}$ coppia concentrata nel punto C applicata a destra della cerniera



- 2.1 Determinare le reazioni vincolari.
- 2.2 Tracciare le caratteristiche di sollecitazione (indicando i valori numerici sui diagrammi).
- 2.3 Verificare la struttura a snervamento sezione circolare cava ($D = 100 \text{ mm}$, $d = 80 \text{ mm}$) con coeff. di sicurezza 2 e $\sigma_s = 500 \text{ MPa}$.

SIMULAZIONE 1

ES. 1:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 40 \\ 0 & k & 0 \\ 40 & 0 & 300 \end{bmatrix}$$

$\nu = 0,3$

$E = 210 \text{ GPa}$

$\Delta \epsilon < 5\%$

$S = 2$

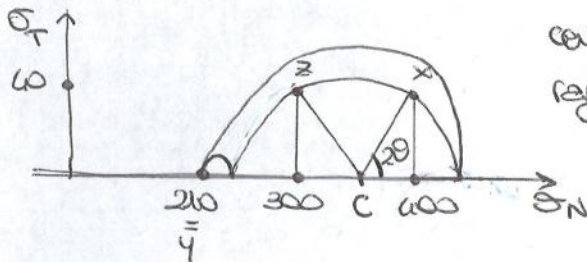
- k per avere stato di deformazione piana rispetto ad una direzione.
- cerchi di Mohr e angolo θ tra direzione principale 1 e asse x.
- tensione ammissibile con opportuno criterio di rottura

Deformazione piana $\Rightarrow \epsilon_{yy} = 0 \rightarrow \epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] = 0$

$k - 0,3(400 + 300) = 0$

$k = 210 \text{ MPa} = \sigma_p$ perché la direzione y è principale

Cerchi di Mohr:



centro: $\sigma_c = \frac{300 + 400}{2} = 350 \text{ MPa}$

raggio: $R = \sqrt{\left(\frac{400 - 300}{2}\right)^2 + 40^2} = 64 \text{ MPa}$

$\sigma_1 = 350 + 64 = 414 \text{ MPa}$

$\sigma_2 = 350 - 64 = 286 \text{ MPa}$

$\sigma_3 = 210 \text{ MPa}$ $[\sigma_p] = \begin{bmatrix} 414 & 0 & 0 \\ 0 & 286 & 0 \\ 0 & 0 & 210 \end{bmatrix}$

Verifica: I invarianti: $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$

$414 + 286 + 210 = 400 + 210 + 300$

$910 = 910 \quad \text{OK!}$

Angolo tra direzione principale 1 ($\sigma = 414 \text{ MPa}$) e asse x:

$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{40}{50}\right) = 19,3^\circ$

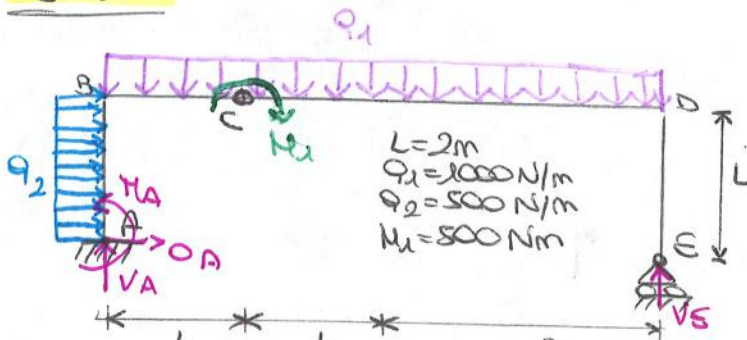
Allungamento o rottura $< 5\% \Rightarrow$ materiale fragile \Rightarrow CRITERIO di RANKINE

$\sigma_{eq} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

$\sigma_{eq} = 414$

$\sigma_R = \underbrace{\sigma_{amm}}_{= \sigma_{eq}} \cdot S = 414 \cdot 2 = 828 \text{ MPa}$

ES. 2:



$L = 2 \text{ m}$
 $q_1 = 1000 \text{ N/m}$
 $q_2 = 500 \text{ N/m}$
 $M_1 = 800 \text{ Nm}$

- Reazioni vincolari
- Caratteristiche di delle citazioni
- Verificare la struttura a snervamento

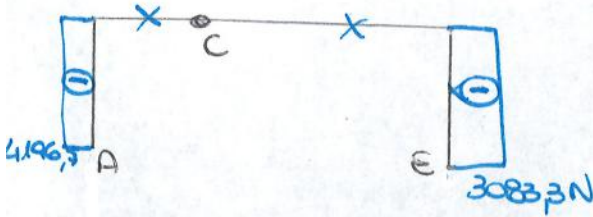
sezioni circolari con $D = 100 \text{ mm}$
 $d = 80 \text{ mm}$

$S = 2 \quad \sigma_S = 800 \text{ MPa}$

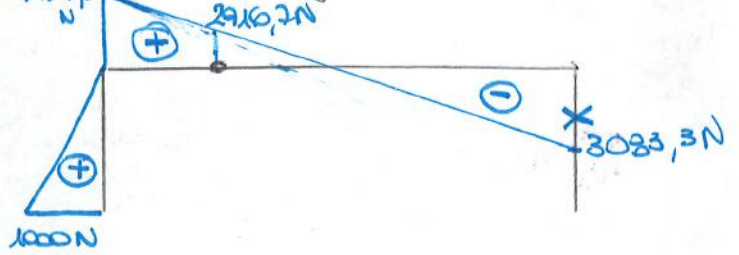
Reazioni vincolari: $\rightarrow) O_A + q_2 \cdot L = 0 \rightarrow O_A = -q_2 \cdot L = -1000 \text{ N}$

Diagrammi di sollecitazioni:

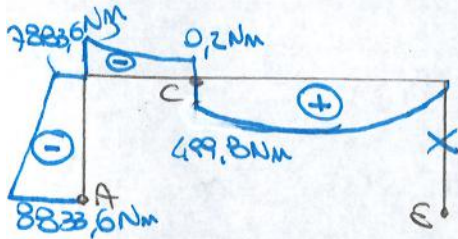
sforzo normale:



sforzo di taglio:



momento flettente



Per trovare dove il momento flettente è max devo verificare il suo valore nel minimo

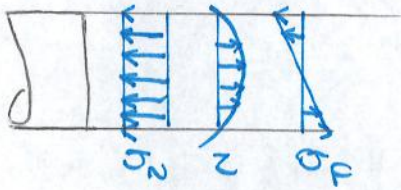
pongo a zero il taglio in S₀ (che è la derivata prima del momento)

$$T = -V_S + q_1 \cdot x = 0$$

$$x = \frac{V_S}{q_1} \text{ (si sostituisce nell'equazione del momento)}$$

$$M = V_S \left(\frac{V_S}{q_1} \right) - q_1 \frac{1}{2} \left(\frac{V_S}{q_1} \right)^2 = 4753,2 \text{ Nm} \Rightarrow \text{è in A che ho M massimo.}$$

Andamento delle tensioni in A:



$$\sigma_{max} = \sigma_f + \sigma_N = \frac{N}{\pi(R^2 - r^2)} + \left(\frac{\pm M \cdot 10^3}{\pi(D-d)^4}{\frac{D}{2}} \right) = -154,6 \text{ MPa}$$

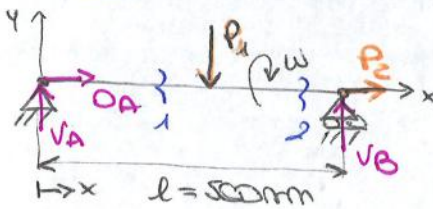
(A = 2829,4 mm²)
(J = 2,89 · 10⁶ mm⁴)

-1,74 MPa +152,8 MPa

$$|\sigma_{max}| < \frac{\sigma_s}{S} = \frac{500}{2} = 250 \text{ MPa}$$

$$-154,6 \text{ MPa} < 250 \text{ MPa} \Rightarrow \text{verificato!}$$

ES. 3:



- sezione circolare piena d = 30 mm
- la breve nota con w costante
- f = 1 mm in P₁
- P₂ = 40000 N

- E = 210 GPa
- σ_R = 540 MPa
- σ_S = 450 MPa
- σ_D = 250 MPa

$$S = 1$$

- carico applicato P₁ e momento flettente max.
- distribuzione delle tensioni nella sezione più sollecitata per ωt = 0 e ωt = 90°
- tensione alternata e media del ciclo di fatica
- verifica a vita illimitata col diagramma di Haigh.

equazioni della linea elastica: $f = \frac{P_1 l^3}{48 E J} \rightarrow P_1 = \frac{f \cdot 48 E J}{l^3 \cdot 10^3} = 3206,3 \text{ N}$

momento massimo: $M_{fmax} = \frac{P_1 l}{4} = 400788 \text{ Nm}$

~~Reazioni vincolari: ±) O_A + P₂ = 0 → O_A = -P₂ = -40000 N~~
~~+1) V_A - P₁ + V_B = 0~~

Fondamenti di Meccanica Strutturale Esempio di tema di esame a.a.2014 -2015

Esercizio n. 1 (7,8)

(punti 7)

Dato un tensore delle tensioni in cui:

$$\sigma_{xx} = 200 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = 100 \text{ MPa} \quad \tau_{yz} = K$$

$$\sigma_{zz} = 300 \text{ MPa} \quad \tau_{xz} = 0 \text{ MPa}$$

- valutare K che garantisca un coeff. di sicurezza uguale a 2 utilizzando il criterio di cedimento più conservativo (materiale con allungamento a rottura superiore al 5% e $\sigma_s = 1000 \text{ MPa}$, da cui la tensione ammissibile $\sigma_{amm} = 500 \text{ MPa}$) $\rightarrow 229 \text{ MPa}$
- determinare le tensioni principali; $\rightarrow \sigma_1 = 450, \sigma_2 = 200, \sigma_3 = -50$
- disegnare i cerchi di Mohr;
- confrontare il I ed il II invariante del tensore delle tensioni nel riferimento cartesiano e principale; *verificato!*

Esercizio n. 2 (1,2,3,4,6)

(punti 10)

Data la struttura secondo lo schema seguente con:

$$L = 2 \text{ m}$$

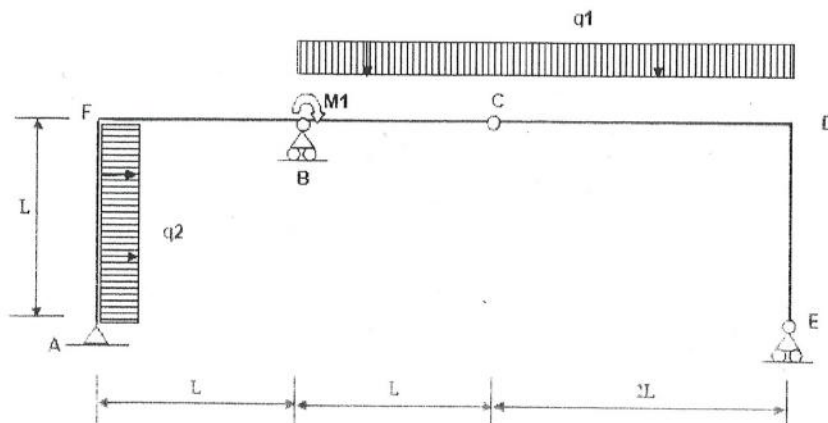
$$q_1 = 300 \text{ N/m} : \text{carico distribuito dal punto B al punto D}$$

$$q_2 = 600 \text{ N/m} : \text{carico distribuito dal punto A al punto F}$$

$$M_1 = 1000 \text{ Nm} : \text{coppia concentrata nel punto B}$$

- 2.1 determinare le reazioni vincolari;
- 2.2 tracciare le caratteristiche di sollecitazione (indicando i valori numerici sui diagrammi);
- 2.3 Dimensionare la struttura a sezione rettangolare piena (con rapporto fra lato ed altezza fisso $h/b = 1,5$) con coeff. di sicurezza 2 e materiale duttile con $\sigma_s = 500 \text{ MPa}$

(N.B. Al fine della valutazione i punti 2.2e 2.3 è subordinato ad un corretto svolgimento del punto precedente dello stesso esercizio)



SIMULAZIONI 2

ES. 1:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & k \\ 0 & k & 300 \end{bmatrix}$$

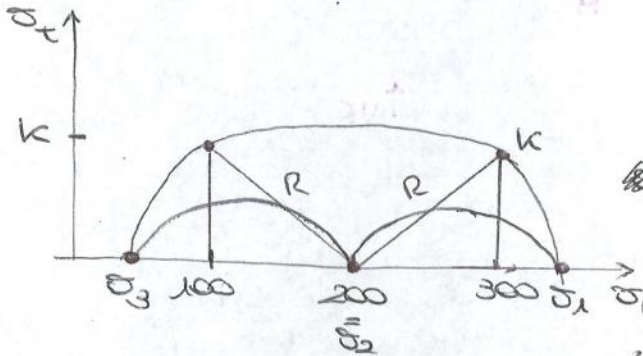
$\Delta e > 5\%$

$\sigma_s = 1000 \text{ MPa}$

$\sigma_{adm} = 250 \text{ MPa}$

$s = 2$

- trovare k per avere $s=2$ col criterio più conservativo
- tensioni principali
- cerchi di Mohr
- verificare i risultati con primo e secondo invarianti



Da direzione x è principale $\Rightarrow \sigma_p = 200 \text{ MPa}$

$\sigma_c = 200 \text{ MPa}$

~~$200 - 100 = 100$~~ ~~$300 - 200 = 100$~~ ~~50 MPa~~

$R = \sqrt{(200 - 100)^2 + k^2}$

Il raggio deve essere $\leq \frac{\sigma_{adm}}{s} = 250 \text{ MPa}$

$R \leq 250 \text{ MPa} \rightarrow \sqrt{(100)^2 + k^2} \leq (250)^2 \rightarrow 100^2 + k^2 \leq 250^2$

$\Rightarrow R = \sqrt{100^2 + 229^2} = 249,9 \approx 250 \text{ MPa}$

$k^2 \leq 250^2 - 100^2$

$k = \sqrt{52500} = \pm 229 \text{ MPa}$

$\sigma_1 = 200 + 250 = 450 \text{ MPa}$

$\sigma_3 = 200 - 250 = -50 \text{ MPa}$

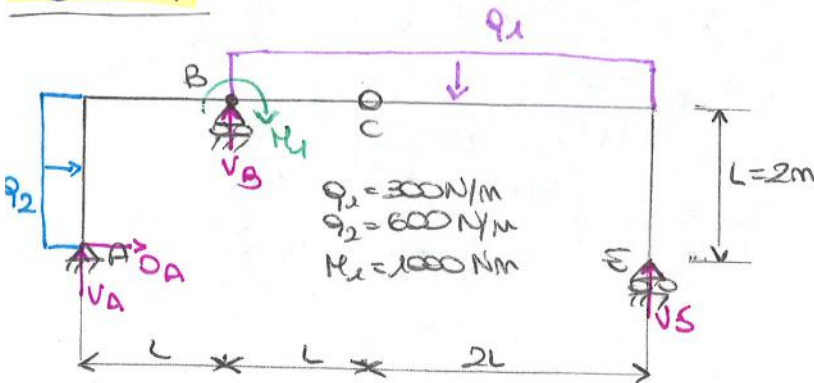
$\sigma_2 = 200 \text{ MPa}$

$$[\sigma_p] = \begin{bmatrix} 450 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$$

I invariante: $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$
 $600 = 600 \text{ ok!}$

II invariante: $\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3$
 $57500 = 57500$
 $\approx 57500 = 57500 \text{ ok!}$

ES. 2:



- reazioni vincolari
- caratteristiche di sollecitazione
- dimensionare la struttura

$q_1 = 300 \text{ N/m}$
 $q_2 = 600 \text{ N/m}$
 $M_1 = 1000 \text{ Nm}$

$L = 2 \text{ m}$

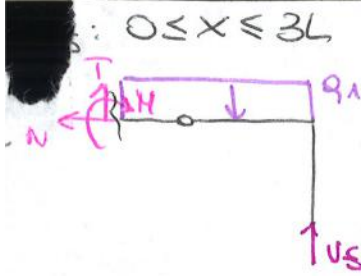
sezione rettangolare pila $h/b = 1,5$
 $s = 2$ (durezza) $\sigma_s = 500 \text{ MPa}$

Reazioni vincolari; $\rightarrow) q_1 + q_2 \cdot L = 0 \rightarrow q_1 = -q_2 \cdot L = -1200 \text{ N}$

$\uparrow) V_A + V_B - q_1 \cdot 3L + V_E = 0$

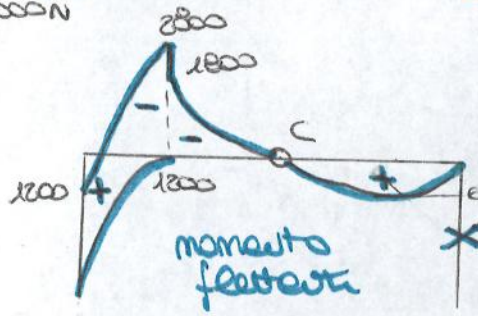
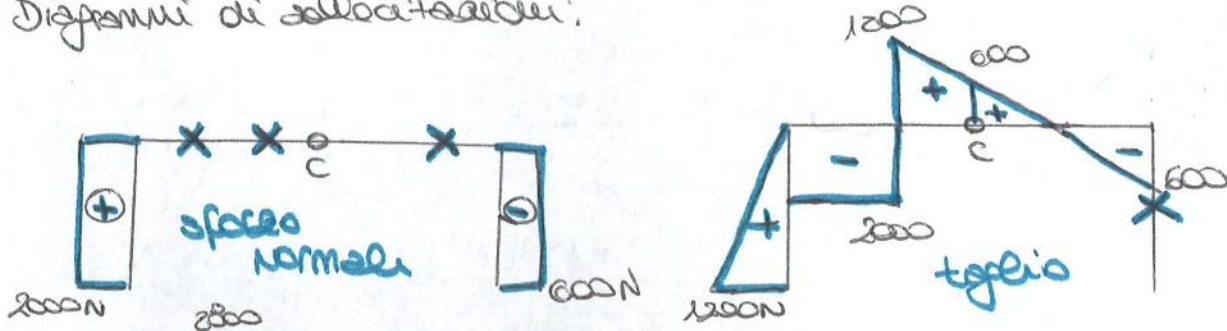
$\curvearrowright) -q_2 \cdot \frac{L^2}{2} + V_B \cdot L - M_1 - (q_1 \cdot 3L) \left(\frac{3L}{2}\right) + V_E \cdot 4L = 0$

5



$N = 0 \text{ N}$
 $T - q_1 \cdot x + V_s = 0 \rightarrow T(0) = -V_s = -600 \text{ N}$
 $T(3L) = -V_s + q_1 \cdot 3L = 1200 \text{ N}$
 $\sum \dot{x}) -M + V_s \cdot x - q_1 x^2 = 0 \rightarrow M(0) = 0 \text{ Nm}$

Diagrammi di sollecitazioni:



posizione del minimo:

$T = +q_1 \cdot x + V_s = 0$
 $x = \frac{V_s}{q_1} = 2$
 $M = V_s \cdot x - q_1 \cdot \frac{x^2}{2} = 600 \text{ Nm}$

\Rightarrow la sezione più sollecitata è S_2
 $M = -2800 \text{ Nm}$
 $T = -2000 \text{ N}$

$\sigma_f = -\frac{M}{\frac{bh^3}{12}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{6M}{bh^2}$

$\sigma_{lim} = \frac{\sigma_s}{s} = \frac{500}{2} = 250 \text{ MPa}$

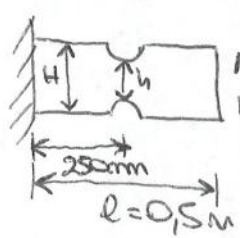
$\sigma_{fmax} \leq \sigma_{lim}$
 $-\frac{6M}{bh^2} \leq 250$

$bh^2 = \frac{-6M}{250} \rightarrow \frac{2}{3}h \cdot h^2 = \frac{6(-2800)}{250}$

$h = \sqrt[3]{\frac{168000 \cdot 3 \cdot 1000}{250 \cdot 2}} = 46,5 \text{ mm}$

$\Rightarrow b = \frac{2}{3}(46,5) = 31,02 \text{ mm}$

ES. 3:



$E = 210 \text{ GPa}$
 $s = 2$
 ACCIAIO

$H = 45 \text{ mm}$
 $b = 20 \text{ mm}$
 $H/h = 1,5$
 $q = 0,9$
 $\sigma_D = 0,5 \sigma_R$
 $\sigma_{1000} = 0,9 \sigma_R$
 $\sigma_R = 600 \text{ MPa}$

• verificare a vita infinita
 (Wheeler $\sigma_N = A(N)^b$)

$\sigma_{1000} = 0,9 \cdot 600 = 540 \text{ MPa}$

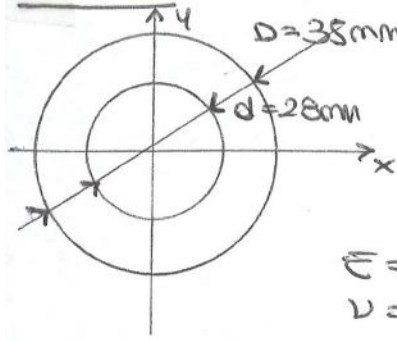
$\sigma_D = 0,5 \cdot 600 = 300 \text{ MPa}$

$\frac{H}{h} = 1,5 \rightarrow h = \frac{H}{1,5} = 30 \text{ mm}$

$r = \left(\frac{H-h}{2}\right) = 7,5$

SIMULAZIONE 3

ES. 1:



see più sollecitazioni
 caricate con:
 $M_b = 180 \text{ Nm} (\downarrow)$
 $M_t = 120 \text{ Nm}$
 $T = 5000 \text{ N}$
 $N = 25.000 \text{ N}$
 $E = 210 \text{ GPa}$ $\nu = 0,3$
 $\sigma_s = 700 \text{ MPa}$

- ipotesi di torsione
• aumento delle tensioni
- tensione nel punto più sollecitato e tensioni principali
- verifica al criterio di Tresca

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 80769,2 \text{ MPa} \quad J_p = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = 86979,8 \text{ mm}^4$$

$$\theta_v = \frac{M_b}{G \cdot J_p} = \frac{180 \cdot 1000}{80769,2 \cdot 86979,8} = 1,71 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm}$$

Nel punto più sollecitato ho:

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{25000}{\pi(R^2 - r^2)} = 72,2 \text{ MPa} = 72 \text{ MPa}$$

$$\sigma_f = \frac{M_f}{J_z} \cdot \frac{D}{2} = \frac{180 \cdot 1000}{\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)} \cdot \frac{D}{2} = 72,4 \text{ MPa} = 72 \text{ MPa}$$

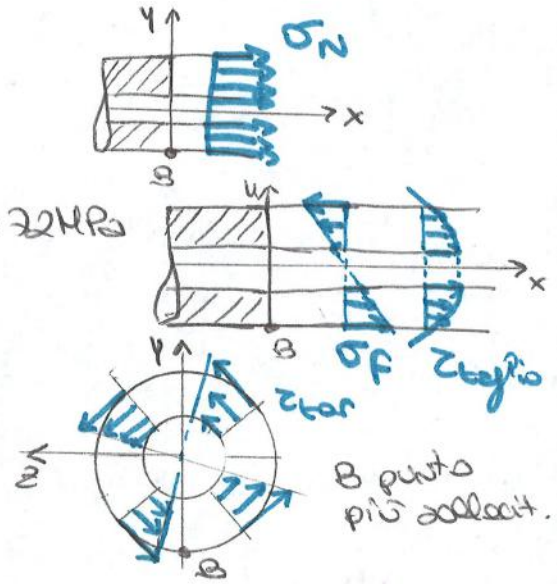
$$\tau_{tor} = \frac{M_t}{J_z} \cdot \frac{D}{2} = 24,1 \text{ MPa} = 24 \text{ MPa}$$

$$\tau_{taglio} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi(R^2 - r^2)} = 19,3 \text{ MPa} = 19 \text{ MPa}$$

$\sigma_{22} = \sigma_N + \sigma_f = 144 \text{ MPa}$
 $\tau_{xz} = 24 \text{ MPa} = \tau_{zx}$
 $\tau_{xy} = 0 \text{ MPa} = \tau_{yx}$
 $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0 \text{ MPa}$

tensione in B

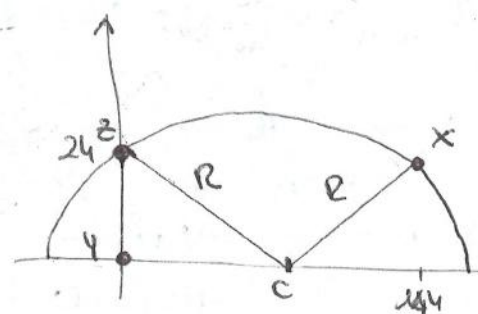
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 144 \end{bmatrix}$$



B punto più sollecit.

ψ è principale $\Rightarrow \sigma_p = 0 \text{ MPa}$

Cerchi di Mohr:



$$\sigma_c = \frac{144}{2} = 72 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{72^2 + 24^2} = 75,9 = 76 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = 72 + 76 = 148 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 72 - 76 = -4 \text{ MPa}$$

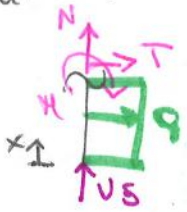
I invarianti: $144 = 144 \text{ ok!}$

TRESCA: $\sigma_{id} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = \max(148, 4, 152)$

$$\Rightarrow \sigma_{id} = 152 \text{ MPa} \leq \frac{\sigma_s}{S} = \frac{700}{2} = 350 \text{ MPa}$$

$125 \text{ MPa} < 350 \text{ MPa}$ verificato!

$S_u: 0 \leq x \leq L$

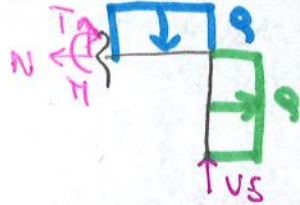


$$V_s + N = 0 \rightarrow N = -V_s = -1500 \text{ N}$$

$$T + q \cdot x = 0 \rightarrow \begin{cases} T(0) = 0 \text{ N} \\ T(L) = -q \cdot L = -2000 \text{ N} \end{cases}$$

$$-M + q \frac{x^2}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} M(0) = 0 \text{ Nm} \\ M(L) = q \frac{L^2}{2} = 2000 \text{ Nm} \end{cases}$$

$S_s: 0 \leq x \leq 2L$



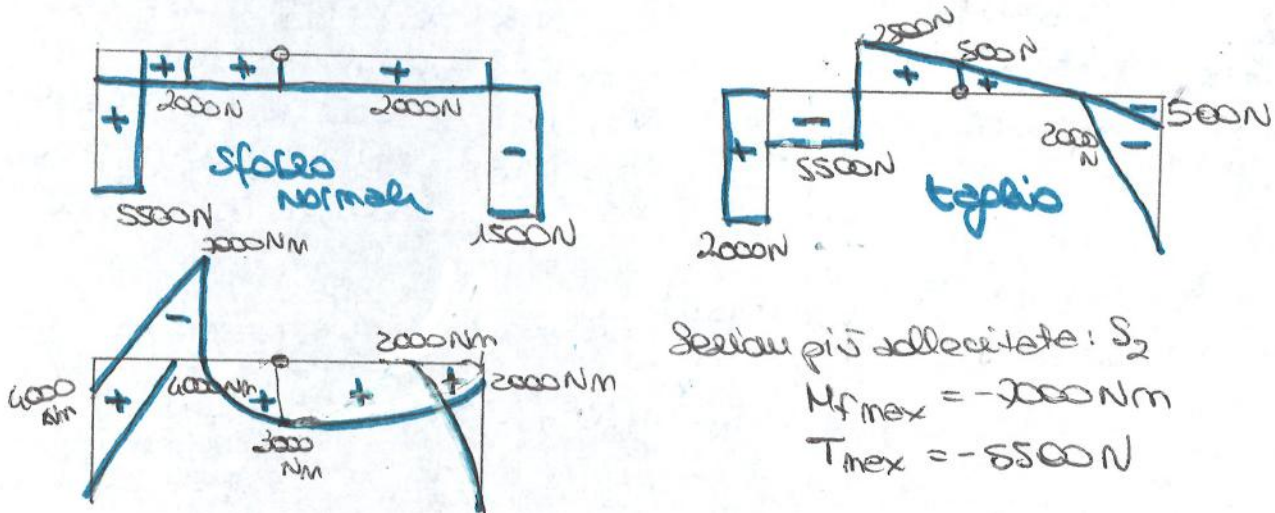
$$-N + q \cdot L = 0 \rightarrow N = q \cdot L = 2000 \text{ N}$$

$$T - q \cdot x + V_s = 0 \rightarrow \begin{cases} T(0) = -V_s = -1500 \text{ N} \\ T(2L) = qL - V_s = 500 \text{ N} \end{cases}$$

$$-M - q \frac{x^2}{2} + V_s \cdot x + q \frac{L^2}{2} = 0$$

$$\begin{cases} M(0) = q \frac{L^2}{2} = 2000 \text{ Nm} \\ M(2L) = -q \frac{L^2}{2} + q \frac{L^2}{2} + V_s \cdot L = 3000 \text{ Nm} \end{cases}$$

Diagrammi di sollecitazioni:



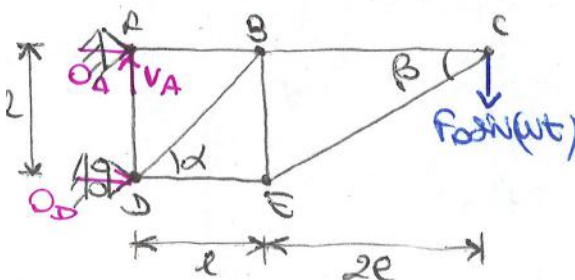
Sezioni più sollecitate: S_2
 $M_{fmax} = -2000 \text{ Nm}$
 $T_{fmax} = -5500 \text{ N}$

$$\sigma_{fmax} = - \frac{M_{fmax} \cdot 1000}{\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)} \frac{D}{2} = 203,7 \approx 204 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{fmax} \leq \frac{\sigma_s}{S} = \frac{500}{2} = 250 \text{ MPa}$$

$204 \text{ MPa} \leq 250 \text{ MPa}$ verificato!

ES. 3:



sezione circolare piena
 $\sigma_D = 0,55R$
 $\sigma_R = 650 \text{ MPa}$
 $F_0 = 15 \text{ kN}$
 $\beta = 2$
 $d = 450$

- residui minimi
- sforzi assiali
- dimensionare per vite ridistribuite a fatica

Residui minimi: $\uparrow VA - F_0 = 0 \rightarrow VA = F_0 = 15 \text{ kN}$

SIMULAZIONE 4

ES. 1:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 150 & 0 & -130 \\ 0 & k & 0 \\ -130 & 0 & 250 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} S=2 \\ \Delta \epsilon_r < 5\% \\ \sigma_R = 600 \text{ MPa} \end{array}$$

$E = 70.000 \text{ MPa} \quad \nu = 0,3$

- k per avere deformazioni piana
- tensioni principali e cerchi di Mohr
- verifica con criterio opportuno

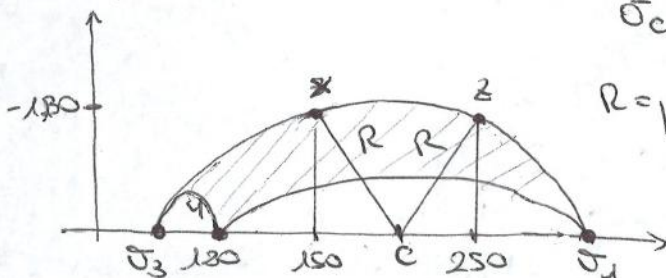
k è principale $\rightarrow \sigma_p = k$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) = 0 \quad \text{deformazioni piana}$$

$$k - 0,3(150 + 250)$$

$$k = 120 \text{ MPa} = \sigma_p$$

Cerchi di Mohr:



$$\sigma_c = \frac{250 + 150}{2} = 200 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(250 - 200)^2 + (-130)^2} = 139,3 = 139$$

$$\sigma_1 = 200 + 139 = 339 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 120 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 200 - 139 = 61 \text{ MPa}$$

(I invariante: $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$
 $339 + 120 + 61 = 150 + 120 + 250$
 $520 = 520 \quad \text{OK!}$)

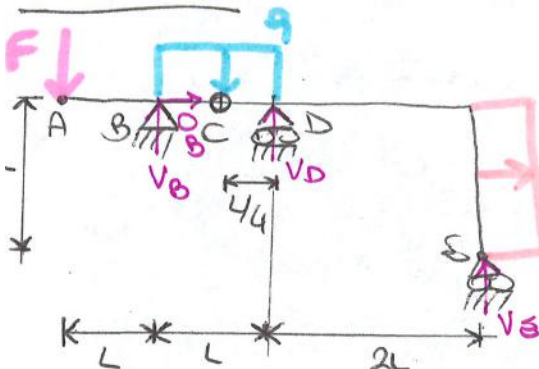
Allungamento a rottura $< 5\% \Rightarrow$ materiale fragile \Rightarrow criterio di RANKINE

$$\sigma_{eq} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$\Rightarrow \sigma_{eq} = 339 \text{ MPa} \leq \frac{\sigma_R}{S} = \frac{600}{2} = 300$$

$339 > 300 \Rightarrow$ non verificato!

ES. 2:



$L = 2 \text{ m}$
 $F = 1500 \text{ N}$
 $q = 300 \text{ N/m}$
 Sezione rettangolare
 $h = 80 \text{ mm}$
 $b = 40 \text{ mm}$
 $r = 10 \text{ mm}$
 $\sigma_s = 355 \text{ MPa} \quad S = 2$

- reazioni vincolari
- caratteristiche di sollecitazione
- verificare la struttura

Reazioni vincolari: $\uparrow) -F + V_b - qL + V_d + V_s = 0$

$\rightarrow) 0_B + qL = 0 \rightarrow 0_B = -qL = -600 \text{ N}$

$\curvearrowright) -q \frac{L^2}{2} - V_b \cdot 2L + qL(2L + \frac{L}{2}) - V_d \cdot 3L + F \cdot 4L = 0$

eq. equilibrio a sx di C): $F(L + \frac{3L}{4}) - V_b \frac{3L}{4} + q \frac{3L}{4} \cdot \frac{3L}{8} = 0$

SIMULAZIONE S

ES. 1:

- Stato di deformazione piana (lungo x)
- $\sigma_{11} = \sigma_{22}$
- tensione media del tensore isotattico 65 MPa
- ACCIAIO $E = 210 \text{ GPa}$ $\nu = 0,3$
- allungamento a rottura $> 5\%$
- $\sigma_s = 240 \text{ MPa}$ $S = 3$

- tensore delle tensioni
- tensioni principali
- cerchi di Mohr

Deformazione piana: $\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = 0$

Tensione media: $\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = 65 \text{ MPa}$

$$\frac{\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy}}{3} = 65$$

$$\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} = 195 \rightarrow \sigma_{xx} = 195 - 2\sigma_{yy}$$

Sostituendo: $\sigma_{xx} = \nu(2\sigma_{yy})$

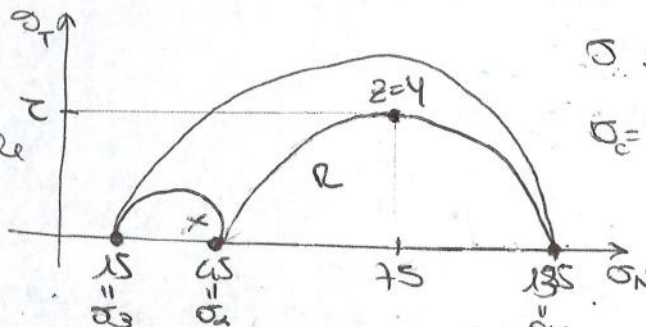
$$195 - 2\sigma_{yy} - 0,6\sigma_{yy} = 0$$

$$\sigma_{yy} = \frac{195}{2,6} = 75 \text{ MPa} = \sigma_{zz}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 45 & 0 & 0 \\ 0 & 75 & \tau \\ 0 & \tau & 75 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{xx} = \nu(2 \cdot 75) = 45 \text{ MPa}$ $\sigma_p = 45 \text{ MPa}$

Cerchi di Mohr:



$\sigma \leq \frac{\sigma_s}{S} = 120$

$\sigma_c = \frac{\sigma_{zz} + \sigma_{yy}}{2} = \frac{2\sigma_{yy}}{2} = 75 \text{ MPa}$

$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$R = \tau_{xy} = \tau_{xy}$

Allungamento a rottura $> 5\%$ \Rightarrow materiale duttile

TRUSSCA

$\sigma_{max} = \left\{ \begin{array}{l} |\sigma_1 - \sigma_2| \\ |\sigma_2 - \sigma_3| \\ |\sigma_3 - \sigma_1| \end{array} \right\}_{max}$

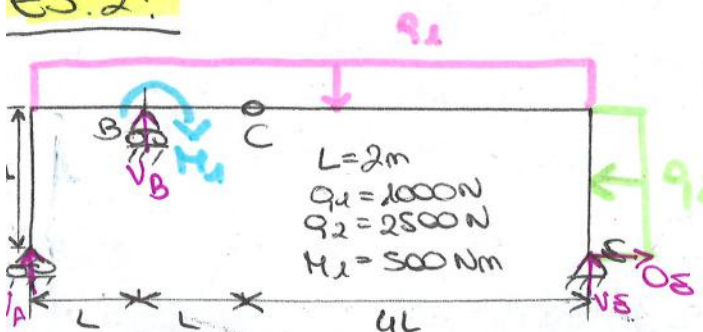
$\sigma_1 = \sigma_c + R$ $\sigma_{min} = \sigma_c - R$ $\sigma_{max} = |\sigma_1 - \sigma_{min}| = \sigma_c + R - (\sigma_c - R) = 2R = 2\tau_{xy}$

$\Rightarrow 2\tau_{xy} \leq \frac{\sigma_s}{S} = 120 \rightarrow \tau_{xy} = \frac{120}{2} = 60 \text{ MPa}$

$\Rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} 45 & 0 & 0 \\ 0 & 75 & 60 \\ 0 & 60 & 75 \end{bmatrix}$ $[\sigma_p] = \begin{bmatrix} 75+60=135 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 75-60=15 \end{bmatrix}$

Verifico: I invarianti : $45 + 75 + 75 = 135 + 45 + 15 \rightarrow 195 = 195 \text{ ok!}$

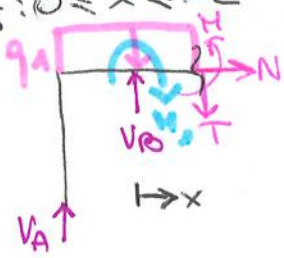
ES. 2:



sezioni quadrate
 lato $H/h = 1,15$
 $S = 2$
 $\sigma_s = 500 \text{ MPa}$

- reazioni vincolari
- coefficienti di sollecitazione
- dimensionamento

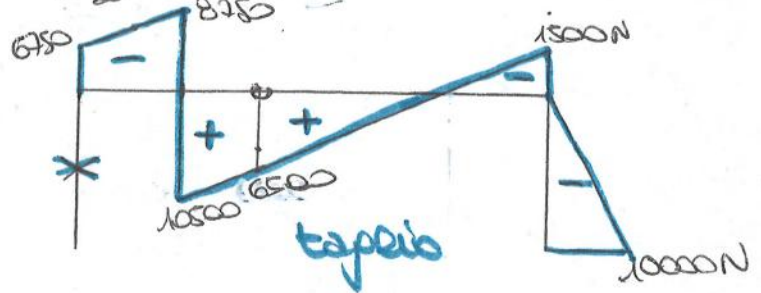
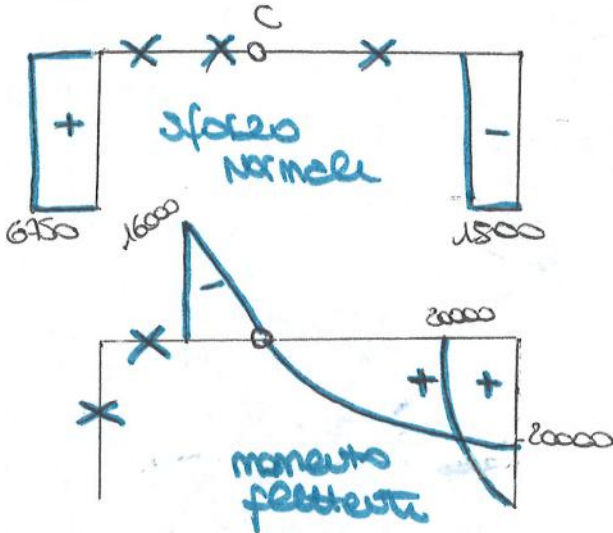
$S_S: 0 \leq x \leq L$



$N = 0 \text{ N}$
 $V_A + V_B - q_1 \cdot x - T = 0 \rightarrow T(L) = V_A + V_B - q_1 \cdot L = 6500 \text{ N}$
 $T(0) = V_A + V_B = 10500 \text{ N}$

$M - V_A(L+x) - V_B \cdot x + q_1(L+x)(L+x)/2 - M_x = 0$
 $\rightarrow M(L) = V_A 2L + V_B \cdot L - q_1 \frac{L^2}{2} + M_x = 0 \text{ Nm}$
 $\rightarrow M(0) = V_A L - q_1 \frac{L^2}{2} - M_x = -16000 \text{ Nm}$

Diagrammi di sollecitazione:



$\sigma_f^{max} = \frac{20000 \sqrt{H-h}}{\frac{1}{6} \left(\frac{H-h}{2}\right)^3} \leq \frac{\sigma_s}{S} = 250 \text{ MPa}$

$H/h = 1,5 \rightarrow \frac{H}{h} = \frac{3}{2} \rightarrow H = \frac{3}{2}h$

$\frac{20000 \cdot 1000 \cdot 6}{\left(\frac{3}{2}h - h\right)^3} \leq 250 \text{ MPa}$

$\frac{20 \cdot k \cdot k \cdot 6}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \leq 250$

$h = \sqrt[3]{\frac{20000 \cdot 1000 \cdot 6}{250 \cdot 8}} = 39,2 \text{ mm}$

scopo $h = 39 \text{ mm} \rightarrow H = \frac{3}{2}h = 58,5 = 59 \text{ mm}$

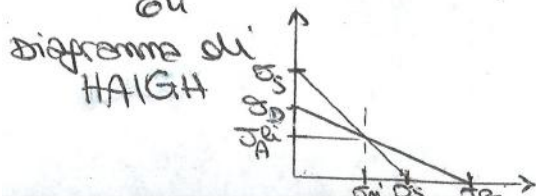
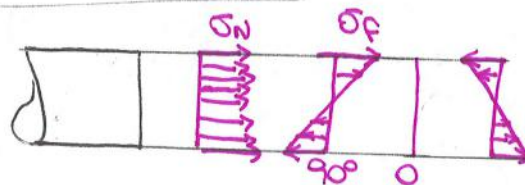
ES. 3:

- Trave incastata a sezione circolare piena $d = 25 \text{ mm}$
- momento flettente: $M = M_0 \sin \omega t$
- forze di trazione: $F = 10000 \text{ N}$
- ACCIAIO: $\sigma_s = 270 \text{ MPa}$ ($\gamma = 1$)
 $\sigma_B = 470 \text{ MPa}$
 $\sigma_T = 560 \text{ MPa}$

- distribuzioni tensioni per $\omega t = 0^\circ$ e $\omega t = 90^\circ$
- punto maggiormente sollecitato e tensioni media
- col diagramma di Haigh trovare $M_0 \text{ max.}$

$\sigma_N = \frac{10000}{\pi r^2} = 20,4 \text{ MPa} = \sigma_m$

$\sigma_f = \frac{M_0}{\frac{\pi d^4}{64}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_0 \cdot 32}{\pi d^3} = \sigma_a$

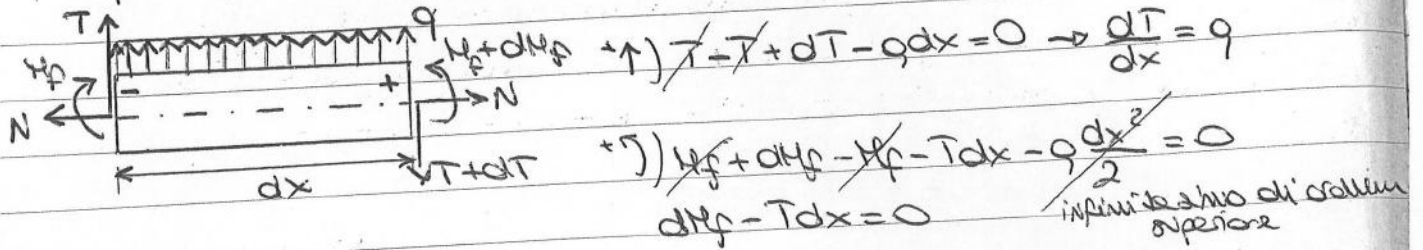


$\sigma_{Am} = \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_B}\right) \sigma_B = 260 \text{ MPa}$

$M_0 = \frac{260 \pi d^3}{32} = 398835 \leq 400000 \text{ Nmm}$

12

Un carico distribuito q , esso dovrà rimanere in equilibrio sotto l'azione di tutte le forze esterne ed interne (scambiate col resto della struttura):

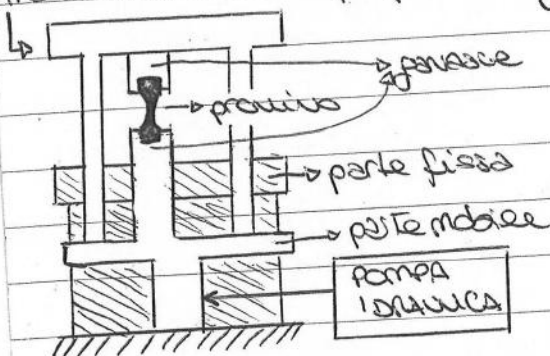


Il taglio è dunque la derivata prima del H_p : $\frac{dH_p}{dx} = T$

Derivando rispetto ad x e sostituendo al T : $\frac{d^2 H_p}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = q$

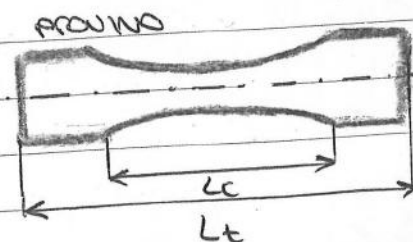
- Descrivere la PROVA di TRAZIONE per i materiali metallici specificando quei parametri caratteristici del materiale permette di determinare:
- Le principali caratteristiche meccaniche di un materiale da determinare sperimentalmente sono: modulo elastico (E), coefficiente di Poisson (ν) e tensioni limite di resistenza. Esse vengono determinate mediante varie tipologie di prove meccaniche, le principali sono la prova di TRAZIONE e COMPRESIONE. Possono essere eseguite sia con macchine idrauliche ed elettromeccaniche, sia tenendo conto delle condizioni di prova.

macchina idraulica per prove di trazione / compressione



La pompa manda olio in pressione da compressa un pistone collegato alla parte mobile della macchina permettendo la compressione/trazione del provaio. Una cella di carico misura la forza esercitata sul provaio

Compressione: provaio cilindrici corti
 Trazione: provaio cilindrici in cui il rapporto lunghezza/diametro sia circa 15.



- Perchè il provino per una prova di compressione è più corto rispetto a quello per la prova di trazione? Da quali parametri dipende questa scelta?
- Data una trave sollecitata a compressione è possibile determinarne lo spostamento $v(x)$ con l'equazione della linea elastica:

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} EJ_2 = -Pv(x) \rightarrow \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \alpha^2 v(x) = 0$$

che ammette soluzioni: $v(x) = e_1 \sin \alpha x + e_2 \cos \alpha x$

Le condizioni al contorno sono $\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(l) = 0 \end{cases} \rightarrow v(l) = e_1 \sin \frac{pl}{EJ_2} = 0$

L'equazione è verificata solo per: $\frac{P}{EJ_2} = \frac{N\pi^2}{l^2} \rightarrow P_{ce} = \frac{\pi^2 EJ_2}{l^2} = \text{carico critico (Euler)}$

Poichè il carico critico dipende dall'inverso del quadrato della lunghezza del provino è necessario scegliere un provino corto per poter applicare un carico maggiore: più il provino sarà corto più sarà difficile raggiungere P_{ce} e dunque rendere inutilizzabile il provino.

- Lavoro di deformazione nelle travi per i vari tipi di sollecitazione.
- Il lavoro di deformazione è quello cui la forza compie per effetto dello spostamento del suo punto di applicazione.

flessione: $L = \frac{M^2 l}{2EJ_p}$

l = lunghezza
 E = modulo di Young

trazione: $L = \frac{Pl^2}{2EA}$

A = area della sezione
 M = momento flettente

torsione: $L = \frac{1}{2} \frac{GJ_p \theta^2}{l}$

P = carico
 J_p = momento di inerzia polare
 G = modulo di elasticità tangenziale

taglio: $L = \chi \frac{T^2 l}{GA}$

θ = angolo di torsione
 χ = fattore di taglio

T = taglio

- Torsione in travi con sezione anulare sottile e dimostrazione delle formule di BREDT.

Le travi di sezione anulare (con spessore sottile costante o variabile) possono essere risolte semplicemente qualunque sia la forma della sezione

linea elastica dobbiamo ricorrere ad una doppia integrazione, il primo membro possibile sarà lo stato: $\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{qx^2}{2EI}$

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{qx^3}{6EI} + C_1$$

$$v(x) = \frac{qx^4}{24EI} + C_1 x + C_2$$

• Descrivere il principio della sovrapposizione degli effetti per calcolare la linea elastica e le ipotesi di validità di questo metodo.

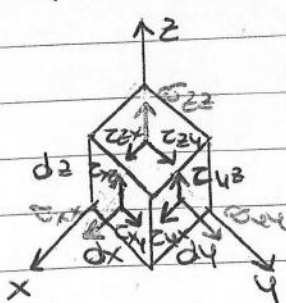
La soluzione della linea elastica, calcolata con le ipotesi delle piccole curvature e dei piccoli spostamenti, ammette la sovrapposizione degli effetti. Infatti, in condizioni di carico costante, è possibile calcolare la deformata di una struttura indifferenzialmente distribuitamente o condizioni di carico e quindi sovrapporre linearmente, sommando algebricamente le frecce ottenute. Con questo metodo si scompone la struttura di partenza in tante sottostrutture che permettono di risolvere il calcolo della linea elastica a casi notevoli.

• Nel caso di una trave a doppia curva a parità di condizioni di carico, vincoli e lunghezza, da quali altri parametri dipende la freccia?

• In queste condizioni gli unici parametri che possono ancora far variare la freccia della struttura sono il materiale (dunque il modulo di Young E) e la sezione (dunque il momento di inerzia).

Si osservi, ad esempio: $v(x) = \frac{M(x)l^2}{6EI}$ • noti variabili

• Definire il tensore delle tensioni e dimostrare la simmetria.

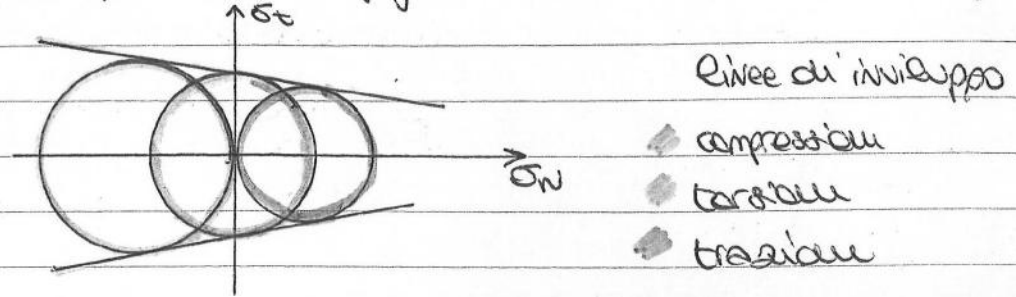


$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Si dimostra che il tensore σ è simmetrico rispetto alla diagonale principale:

$$\begin{aligned} \int (\tau_{xy} dy dz) dx - (\tau_{yx} dx dz) dy &= 0 \rightarrow \tau_{xy} dx dy dz = \tau_{yx} dx dy dz \\ \int (\tau_{yz} dx dz) dy - (\tau_{zy} dx dz) dx &= 0 \rightarrow \tau_{yz} dx dy dz = \tau_{zy} dx dy dz \\ \int (\tau_{xz} dx dy) dz - (\tau_{zx} dx dy) dx &= 0 \rightarrow \tau_{xz} dx dy dz = \tau_{zx} dx dy dz \end{aligned}$$

elle prove di trazione, compressione e torsione. Questo criterio venne inizialmente proposto per i materiali fragili ma ora si adatta anche a quelli duttili:



• Descrivere il criterio di rottura di TRASSCA

• Secondo questa teoria il cedimento di una struttura sollecitata puntualmente avviene se la massima tensione raggiunta $\sigma \geq$ di quella che in uno stato di tensione non variabile. Si ha dunque cedimento se:

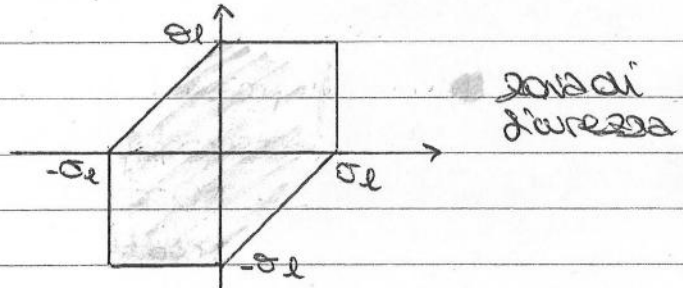
$$|\tau_1| \geq |\tau_e| \quad |\tau_2| \geq |\tau_e| \quad |\tau_3| \geq |\tau_e|$$

Di cui si ha che: $\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, $\tau_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$, $\tau_3 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$, $\tau_e = \frac{\sigma_e}{2}$

\Rightarrow si ha cedimento se: $|\sigma_1 - \sigma_2| \geq \sigma_e$, $|\sigma_2 - \sigma_3| \geq \sigma_e$, $|\sigma_3 - \sigma_1| \geq \sigma_e$

Questo criterio si usa per materiali DUTTI.

Si ha dunque cedimento se $\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} \geq \sigma_e$



• Descrivere il criterio di VON MISES

• L'energia di deformazione si può esprimere come somma dell'energia volumica e di quella di distorsione: $U_T = U_V + U_D$. Si attribuisce il cedimento all'energia di distorsione: $U_D = U_T - U_V$. Esprimendo tutte le energie nel sistema di riferimento principale si ha:

$$U_T = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

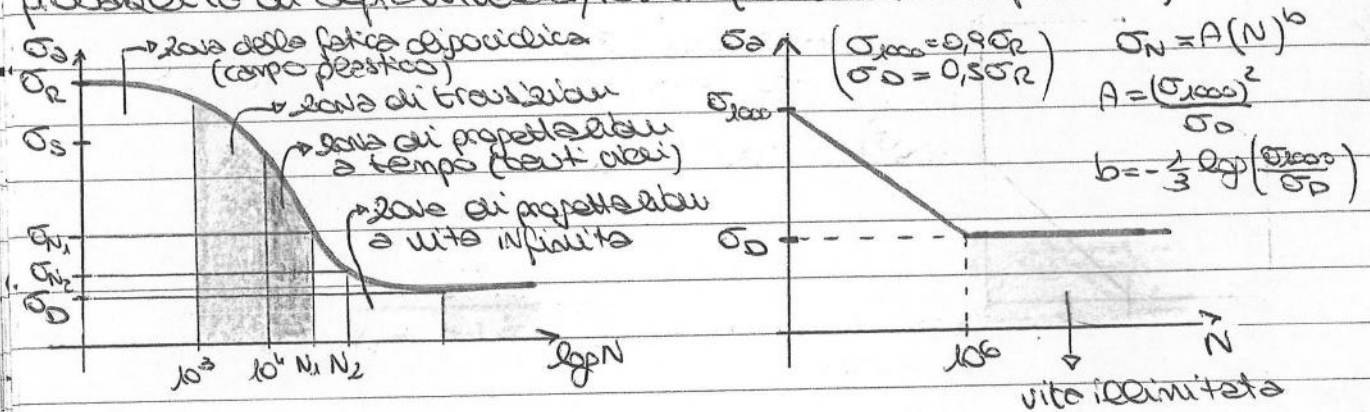
$$U_V = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$U_D = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)] - \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

le due sono più dannose di quelle anisotrope di compressibile.

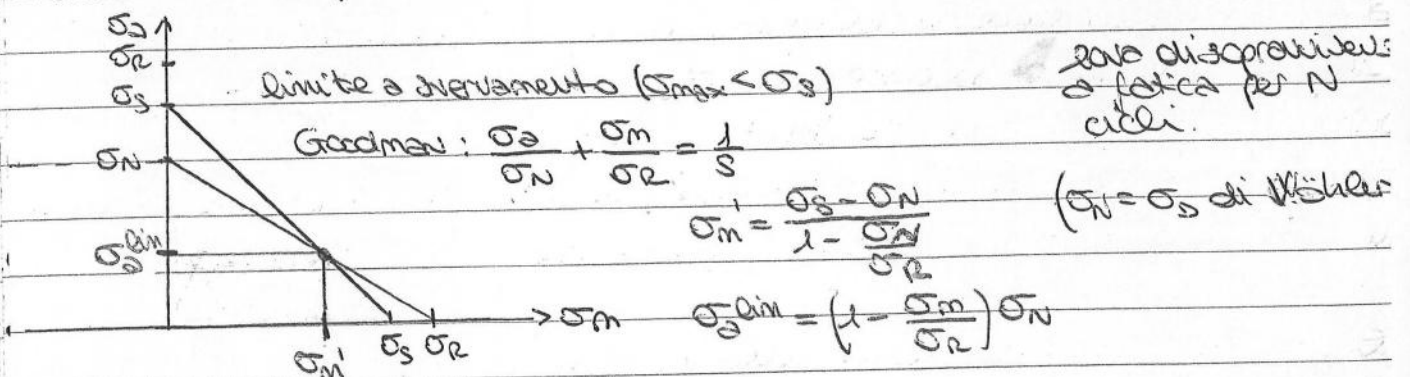
• **Diagramma di WÖHLER**

• Osservando i risultati di prove di fatica su provini pressoché identici nelle stesse condizioni operative si ha che la durata aumenta o decresce e che la piega del cerchio, la durata N rappresenta i cicli totali per il collasso, i provini non rotti dopo un elevato numero di cicli suggeriscono una possibile durata infinita. Inserendo i dati ottenuti in un diagramma tensione - N di cicli si ottiene una nube di punti da cui si possono ottenere curve corrispondenti ad una certa probabilità di sopravvivenza / rottura (Adesso 95-90 provini).



• **Diagramma di HAIGH**

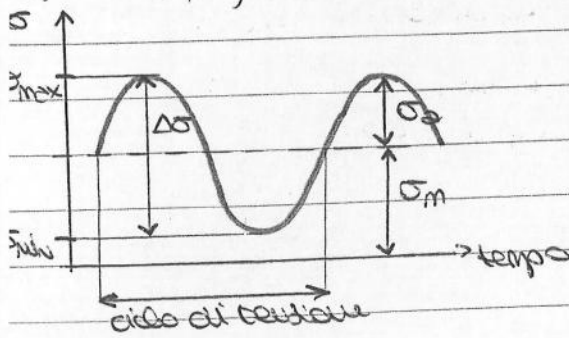
• Viene tracciato per un determinato numero di cicli N :



• **Diagramma di GOODMAN - SMITH**

• È una rappresentazione alternativa al diagramma di Haigh per valutare l'effetto della tensione media nel comportamento a fatica. Il valore della σ_a ammissibile per un dato livello di σ_m può essere letto come differenza tra la curva corrispondente al valore σ_{max} e la bisettrice del I-III quadrante.

esse delle condizioni di esercizio del materiale (presenza di intagli, ambiente, temperatura, ...).



$$\sigma_{media} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

$$\sigma_{alternato} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

campo di tensione : $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 2\sigma_a$

rapporto di tensione : $R = \sigma_{min} / \sigma_{max}$

rapporto di ampiezza : $A = \sigma_a / \sigma_m = \frac{1-R}{1+R}$

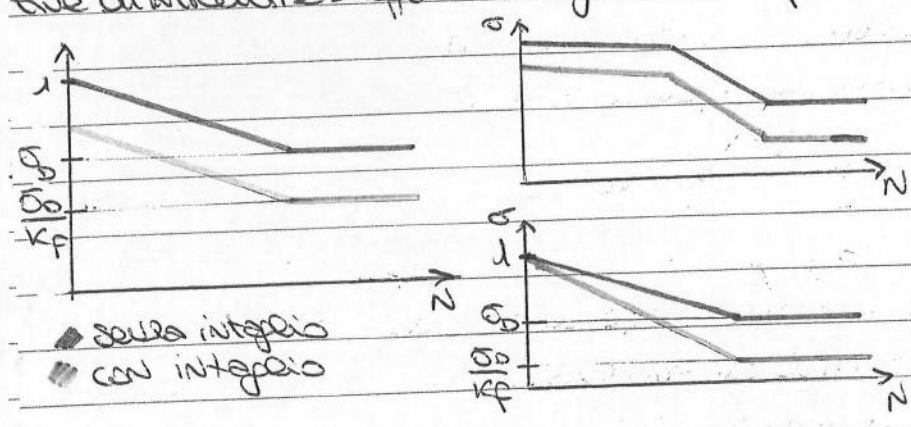
si sono vari tipi di ciclo :

- σ alternata simmetrica : $\sigma_m = 0, \sigma_{max} > 0 > \sigma_{min}$

- σ ripetuta di TRAZIONE : $\sigma_{min} = 0, \sigma_{max} \geq 0 \geq \sigma_{min}$

- σ ripetuta di COMPRESSIONE : $\sigma_{max} = 0, \sigma_{min} < 0 \leq \sigma_{max}$

Confronto tra il diagramma di Wohler di componenti intagliati e non intagliati.
L'effetto dei vari coefficienti di riduzione della resistenza a fatica cambia al variare del numero di cicli considerato. Il valore del fattore di riduzione della resistenza a fatica diminuisce al diminuire del numero di cicli N considerato e la pendenza della curva di Wohler con intaglio dipende dalle ipotesi conservative di introdurre l'effetto di intaglio anche per un numero limitato di cicli.



metodo JUVVALL
(K_f calcolato a partire da 100 cicli)

metodo MERRILL
(si ricorda il diagramma e si riporta il valore iniziale della tensione unità di fatica)

Da quali parametri dipende K_f in funzione dell'indice p viene con rapporto p .
Dipende dal rapporto dei diametri D/d con e senza intaglio e dal rapporto r/d tra raggio di raccordo e diametro del componente intagliato, questi parametri sono funzione del rapporto r/d e del diametro del componente intagliato, questi parametri sono di trovare K_f .



Reazioni vincolari: $\uparrow \sum V_A + V_D - q \cdot L = 0$

$\rightarrow \sum O_A + O_D = 0 \rightarrow O_A = -O_D$

$\uparrow \sum M_A: -M_1 + V_D \cdot 3L - q \cdot L \left(3L + \frac{L}{2} \right) = 0$

$V_D = \frac{M_1 + qL \left(3L + \frac{L}{2} \right)}{3L} = 866,7 \text{ N}$

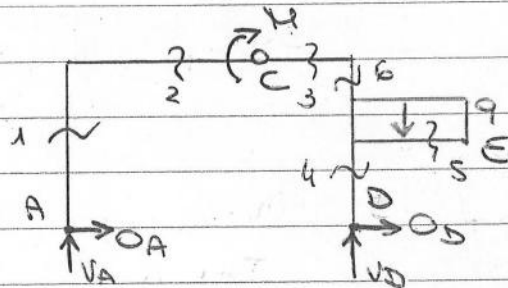
$V_A = -V_D + q \cdot L = -266,7 \text{ N}$

equazioni ausiliarie a dx di C^{*}) $V_D \cdot L - qL \left(L + \frac{L}{2} \right) + O_D \cdot 2L = 0$

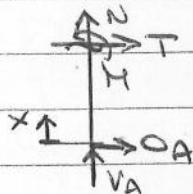
$O_D = \frac{-V_D \cdot L + qL \left(L + \frac{L}{2} \right)}{2L} = 16,7 \text{ N}$

Caratteristiche di sollecitazioni:

$V_A = -266,7 \text{ N}$
$O_A = -16,7 \text{ N}$
$V_D = 866,7 \text{ N}$
$O_D = 16,7 \text{ N}$



S₁: $0 \leq x \leq 2L$



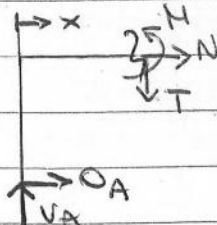
$N + V_A = 0 \rightarrow N = -V_A = +266,7 \text{ N}$

$T + O_A = 0 \rightarrow T = -O_A = +16,7 \text{ N}$

$M + O_A \cdot x = 0 \rightarrow M(0) = 0 \text{ Nm}$

$M(2L) = -O_A \cdot 2L = 66,8 \text{ Nm}$

S₂: $0 \leq x \leq 2L$



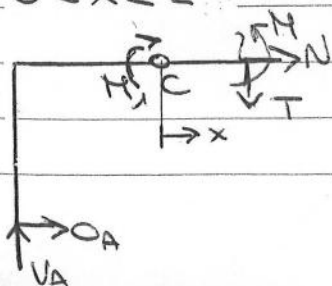
$N + O_A = 0 \rightarrow N = -O_A = 16,7 \text{ N}$

$-T + V_A = 0 \rightarrow T = -266,7 \text{ N}$

$M + O_A \cdot 2L - V_A \cdot x = 0 \rightarrow M(0) = -O_A \cdot 2L = 66,8 \text{ Nm}$

$M(2L) = -O_A \cdot 2L + V_A \cdot 2L = -1000 \text{ Nm}$

S₃: $0 \leq x \leq L$



$N + O_A = 0 \rightarrow N = -O_A = +16,7 \text{ N}$

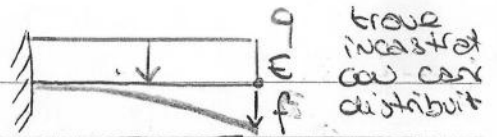
$-T + V_A = 0 \rightarrow T = +V_A = -266,7 \text{ N}$

$M - M_1 - V_A(2L + x) + O_A \cdot 2L = 0$

$\rightarrow M(0) = M + V_A(2L) - O_A \cdot 2L = 0 \text{ Nm}$

$\rightarrow M(L) = M + V_A \cdot 3L - O_A \cdot 2L = -533,4 \text{ Nm}$

Considero il portale AD come indeformabile:



$$f = \frac{qL^4}{8EI} < 30\text{mm} \rightarrow \frac{qL^4}{8E\pi \frac{d^4}{64}} = 30 \rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{64q \cdot L^4}{8E\pi \cdot 30}} = 37,3\text{mm}$$

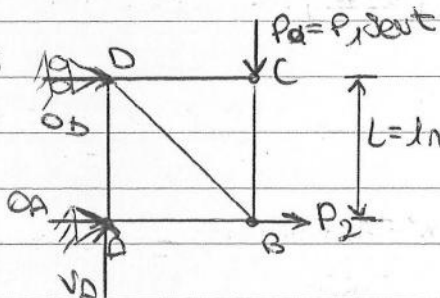
$$\sigma_N = \frac{16,7N}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = 0,02\text{MPa} \rightarrow \text{non lo considero} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \sigma_{\text{max}} = 196\text{MPa}$$

$$\sigma_T = \frac{-1000 \cdot 1000}{\frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{d}{2}} = 196\text{MPa}$$

Verifica: $\sigma_{\text{max}} \leq \frac{\sigma_s}{s} \rightarrow 196 \leq \frac{300}{2} \rightarrow 196 > 180$

non verificata!

ES. 3:



Considerando il tratto più sollecitato:

- $P_1 = 5\text{kN}$
- $P_2 = 10\text{kN}$
- $N = 10'$
- $\sigma_r = 600\text{MPa}$

- progettare a fatica con il diagramma di Haigh
- σ_m e σ_a nel tratto in questione

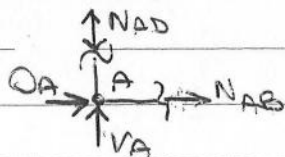
$E = 210\text{GPa}, \sigma_s = 500\text{MPa}, s = 2$

Reazioni vincolari: $\rightarrow 1) V_A - P_0 = 0 \rightarrow V_A = 5\text{kN}$

$\rightarrow 2) O_A + O_D + P_2 = 0 \rightarrow O_A = -O_D - P_2 = -5\text{kN}$

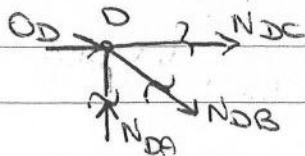
$\rightarrow 3) -O_D \cdot L - P_0 \cdot L = 0 \rightarrow O_D = -P_0 = -5\text{kN}$

Metodo di Ritter:



$N_{AB} = -O_A = +5\text{kN}$

$N_{AD} = -V_A = -5\text{kN}$



$N_{DC} = -O_D = +5\text{kN}$

$N_{DA} = N_{AD} = -5\text{kN}$

$N_{DB} = N_{DC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3535,5\text{N}$

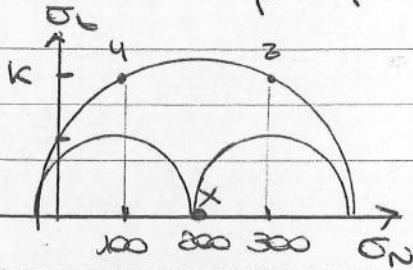
• Esercizi sui CERCHI di MOHR (da TEMI d'ESAME)

1)
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & k \\ 0 & k & 300 \end{bmatrix} \quad \sigma_{amm} = 500 \text{ MPa}$$

- k da poter scegliere $s=2$
- cerchi di Mohr e σ_p
- confronto tra II e I invarianti

$Ar > 5\% \quad s=2 \quad \sigma_s = 1000 \text{ MPa}$

La direzione x è principale $\rightarrow \sigma_p = 200 \text{ MPa}$



$$C = \frac{100 + 300}{2} = 200 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(300 - 200)^2 + k^2} \leq \frac{\sigma_{amm}}{s}$$

$$\sqrt{100^2 + k^2} \leq 250$$

$$100^2 + k^2 = 250^2 \rightarrow k = \sqrt{250^2 - 100^2} = 229 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{100^2 + 229^2} = 249,9 = 250 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = 450 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 200 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -50 \text{ MPa}$$

I invariante: $450 + 200 + (-50) = 200 + 100 + 300$

$$600 = 600 \text{ ok!}$$

II invariante: $\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \sum \sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sum \tau_{ij}^2$

$$57500 = 57500$$

$$\approx 57500 = \approx 57500 \text{ ok!}$$

2)
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 150 & 0 & -130 \\ 0 & k & 0 \\ -130 & 0 & 250 \end{bmatrix}$$

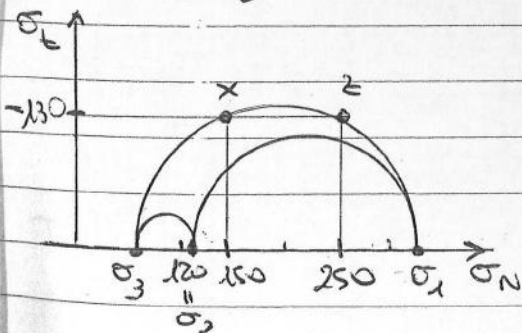
$\nu = 0,3 \quad E = 70 \text{ GPa}$

$Ar < 5\% \quad s=2 \quad \sigma_p = 600 \text{ MPa}$

- k per avere stato di deformazione piana
- tensori principali e cerchi di Mohr
- verifica con criterio opportuno

k è principale $\rightarrow \sigma_p = k$

$$\epsilon_{44} = \frac{1}{E} [\sigma_{44} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] = 0 \rightarrow k = \nu(150 + 250) = 120 \text{ MPa}$$



$$C = \frac{250 + 150}{2} = 200 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(250 - 200)^2 + (-130)^2} = 139,3 = 139 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = 200 + 139 = 339 \text{ MPa}$$

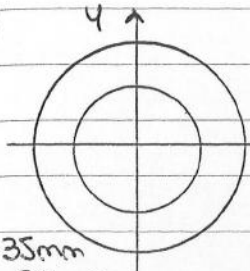
$$\sigma_2 = 120$$

$$\sigma_3 = 200 - 139 = 61 \text{ MPa}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 45 & 0 & 0 \\ 0 & 75 & 60 \\ 0 & 60 & 75 \end{bmatrix} \quad [\sigma_p] = \begin{bmatrix} 75+60=135 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 75-60=15 \end{bmatrix}$$

I invariante: $45+75+75 = 135+45+15 \rightarrow 195 = 195 \text{ ok!}$

4)



$D = 35 \text{ mm}$
 $d = 28 \text{ mm}$

Nella sezione più sollecitata:

$M_f = 180 \text{ Nm} (\downarrow)$

$M_t = 220 \text{ Nm}$

$T = 5 \text{ kN}$

$N = 25 \text{ kN}$

$E = 210 \text{ GPa} \quad \nu = 0,3$

$\sigma_s = 700 \text{ MPa} \quad S = 2$

- angolo di torsione unitaria
- indeclinamento delle testee
- tensione nel punto più sollecitato
- tensioni principali e Mohr
- verifica con il criterio di Tresca

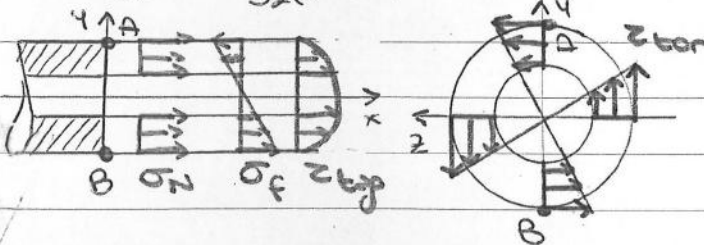
$$\theta_u = \frac{M_t}{G J_p} = \frac{M_t \cdot 1000}{\frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)} = 1,71 \cdot 10^{-3} \text{ rad/mm}$$

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{N}{\pi(R^2 - r^2)} = 72,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_f = -\frac{M_f}{J_z} y = -\frac{M_f \cdot 1000}{\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)} \cdot \frac{D}{2} = 72,4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{tor} = \frac{M_t}{J_p} y = \frac{M_t \cdot 1000}{\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)} \cdot \frac{D}{2} = 24 \text{ MPa}$$

$$\tau_{tp} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{A} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{\pi(R^2 - r^2)} = 19,3 \text{ MPa}$$



B è il punto più sollecitato!

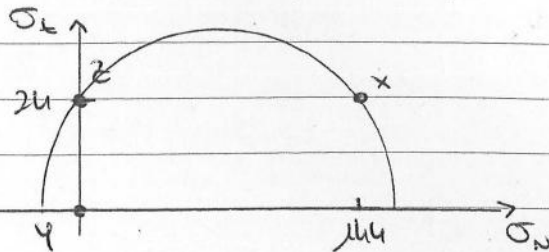
$$\sigma_{22} = \sigma_N + \sigma_f = 144 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = 24 \text{ MPa} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$$

$$[\sigma_B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 144 \end{bmatrix} \rightarrow y \text{ è principale!}$$

$\sigma_p = 0 \text{ MPa}$



$$\sigma_c = \frac{144 + 0}{2} = 72 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(144 - 72)^2 + 24^2} = 75,9 = 76 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = 148 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -4 \text{ MPa}$$

TRESCA: $\sigma_{id} = \max \{ |148 - 0|, |0 + 4|, |-4 - 148| \} = 152$

$$152 \leq \frac{\sigma_s}{S} \rightarrow 152 \leq \frac{700}{2} = 350 \rightarrow 152 < 350$$

verificato!

3) trave cilindrica piena $D = 26 \text{ mm}$

nella sezione più sollecitata: $\begin{cases} M \\ N_1 \end{cases}$
 $M = 130 \text{ Nm (wt)}, N_1 = -9 \text{ kN}$

in corrispondenza della sezione più sollecitata ha una gola ($r = 3 \text{ mm}$)

ACCIAIO: $\sigma_p = 940 \text{ MPa}, \sigma_s = 750 \text{ MPa}, \sigma_b = 470 \text{ MPa}$

• coefficiente di intaglio statico e a fatica

• coefficiente di sicurezza (utilizzo Goodman-Smith)

↓
vedi appunti

$$d = D - 2r = 20 \text{ mm}$$

$$D/d = 26/20 = 1,3$$

$$r/d = 3/20 = 0,15$$

$$\left\{ \begin{aligned} k_f &\approx 1,62 \rightarrow k_f = 1 + 9(k_t - 1) = 1,56 \end{aligned} \right.$$

$$\sigma_N = \frac{N_1}{A} = \frac{N_1}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = 286,5 \text{ MPa} = \sigma_m \rightarrow \text{non varia nel tempo} = \sigma_{\text{meff}}$$

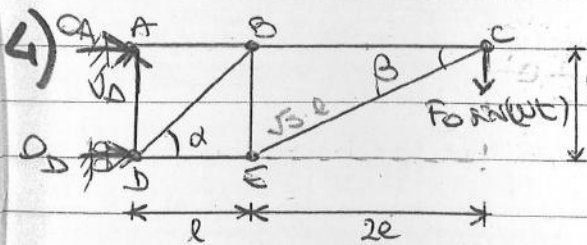
perché ACCIAIO

$$\sigma_f = \frac{M_0}{J_0} y = \frac{M_0 \times 1000}{\frac{\pi}{64} d^4} \frac{d}{2} = 165,5 \text{ MPa} = \sigma_a \rightarrow \sigma_{\text{eff}} = \sigma_a \cdot k_f = 258,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_m + \sigma_a = 545 \text{ MPa} \rightarrow s = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\text{max}}} = 1,4 \rightarrow \sigma_{\text{amm}} = \frac{\sigma_s}{s} = 535,7 \text{ MPa}$$

da GS si vede che siamo in zona D

$\sigma_{\text{max}} < \sigma_{\text{amm}} \rightarrow$ verificato!



- trave circolare
 - $\sigma_p = 650 \text{ MPa}$
 - $F_0 = 15 \text{ kN}$
 - $s = 2$
 - $\alpha = 45^\circ$

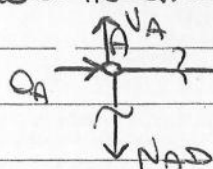
• reazioni vincolari
 • reazioni interne
 • dimensioni per avere vita illimitata a fatica

Reazioni vincolari: $\rightarrow O_A + O_D = 0 \rightarrow O_A = -O_D$

$\uparrow V_A - F_0 = 0 \rightarrow V_A = F_0 = 15 \text{ kN}$

$\uparrow \sum M_D = -F_0 \cdot 3l + O_D \cdot l = 0 \rightarrow O_D = \frac{F_0 \cdot 3l}{l} = 45 \text{ kN}$

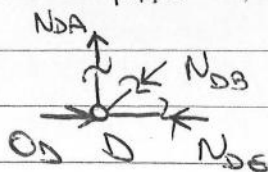
Reazioni interne:



$$O_A - N_{AB} = 0 \rightarrow N_{AB} = -O_A = 45 \text{ kN}$$

$$V_A - N_{AD} = 0 \rightarrow N_{AD} = V_A = 15 \text{ kN}$$

$$N_{DA} = N_{AD} = 15 \text{ kN}$$



$$N_{DA} + N_{DB} \cos \alpha = 0 \rightarrow N_{DB} = -21213,2 \text{ N}$$

$$N_{DB} \sin \alpha + N_{DE} + O_D = 0 \rightarrow N_{DE} = -29999,99 \text{ N}$$