



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2059A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Aimar Mauro

MATERIA: Aimar Mauro - Ingegneria Sismica (I parte)
Prof Ceravolo

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

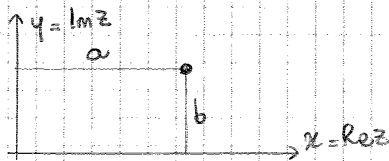
Premessa: numeri complessi

1 Nella dinamica, spesso si lavora con funzioni armoniche, che trovano una rappresentazione comune nei numeri complessi.

2 Numeri complessi:

tali numeri si definiscono attraverso due rappresentazioni

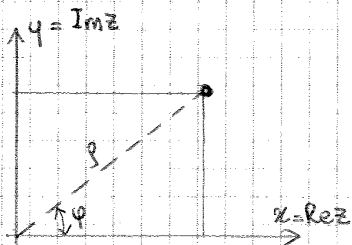
→ RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA, in cui x rappresenta la parte reale e y rappresenta la parte immaginaria.



Si scrive

$$z = a + jb \quad (1)$$

→ RAPPRESENTAZIONE POLARE



In questo caso, si usano le coordinate polari e si scrive

$$z = \rho(\cos\varphi + j \sin\varphi) = \rho e^{j\varphi} \quad (2)$$

La fase φ è definita a meno di un multiplo di 2π e da ciò deriva la polidromia (cioè il fatto che non c'è un unico risultato) di alcune operazioni: come \sqrt{z} , $\log z$, etc.

3 Funzioni in campo complesso

In generale, si trovano funzioni complesse definite in campo complesso: detta z la variabile indipendente, la funzione è del tipo

$$f: z = x + jy \rightarrow w = u + jv$$

e, in forma compatta, si scrive

$$w = f(z)$$

A livello di notazione, si può separare la funzione reale dalla funzione immaginaria

$$w = f(x + jy) = \Phi(x; y) + j\psi(x; y)$$

oppure, si può scrivere sottoforma di sistema

$$\begin{cases} u = \Phi(x; y) \\ v = \psi(x; y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \end{cases} \quad (6)$$

6. Operazioni con i numeri complessi

Si considerino due numeri complessi z_1 e z_2

$$z_1 = a_1 + jb_1 = \rho_1 e^{j\varphi_1}$$

$$z_2 = a_2 + jb_2 = \rho_2 e^{j\varphi_2}$$

→ **Somma**: siccome un numero complesso è di fatto un vettore in un piano, si usa la somma vettoriale.

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \quad (7)$$

→ **prodotto**: in questo caso, per semplicità, conviene usare la notazione polare.

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (8)$$

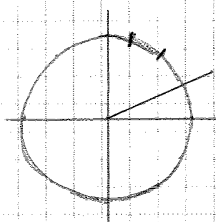
→ **quoziente**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (9)$$

→ **potenza**

$$z_1^n = \rho_1^n e^{jn\varphi_1} \quad (10)$$

→ **radice**: in questo caso, interviene il fenomeno della polidromia.



In particolare, la fase è definita a meno di $2k\pi$ ed è divisa per n . Ciò significa che ci sono n soluzioni e le soluzioni si distribuiscono in modo equidistante su una circonferenza e la dividono in n archi.

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{\rho_1} e^{j \frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}} \quad \text{FORMULA DI DE-MOIVRE} \quad (11)$$

→ **complesso coniugato**: è il vettore speculare rispetto all'asse x e, per ottenerlo, si cambia il segno della parte immaginaria o della fase.

$$z_1^* = a_1 - jb_1 = \rho_1 e^{-j\varphi_1} \quad (12)$$

PROPRIETÀ

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$$

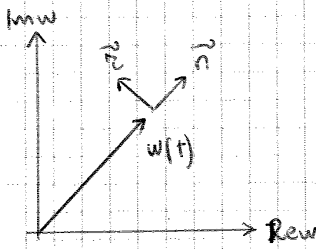
$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

$$z z^* = |z|^2$$

5 Derivata di una funzione complessa

Essa è sostanzialmente la derivata di un vettore nel piano.



In particolare, si può fare riferimento al moto di un punto nel piano, la cui posizione è identificata con il vettore $w(t)$ che, avendo due componenti, rappresenta un numero complesso. Per semplicità, la posizione è espressa in coordinate polari

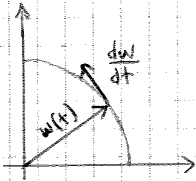
$$w(t) = \rho(t) e^{j\varphi(t)}$$

Si esegue la derivata rispetto al tempo, sfruttando la proprietà di derivazione di una funzione composta.

$$\frac{dw}{dt} = \dot{\rho}(t) e^{j\varphi(t)} + \rho(t) \cdot \dot{\varphi}(t) j e^{j\varphi(t)} \quad (17)$$

Si nota che la prima componente ha la stessa direzione del vettore posizione, mentre la seconda è moltiplicata per j e dunque ha una direzione ruotata di 90° .

↳ di fatto, si sono ottenute le due componenti intrinseche della velocità



Ad es, nel caso di moto circolare, il termine ρ è costante e la velocità ha un'unica componente ed è tangente alla circonferenza.

Lo spostamento è somma dei due spostamenti

$$d_1 + d_2 = 1$$

$$\frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2} = 1 \quad \rightarrow F_i = k_i d_i$$

$$F_1 = F_2 = k \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{k_1} + \frac{k}{k_2} = 1$$

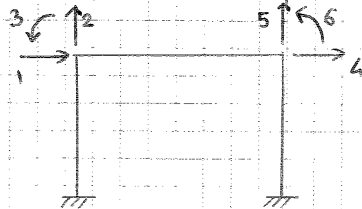
Da qui si ricava la rigidità del sistema

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

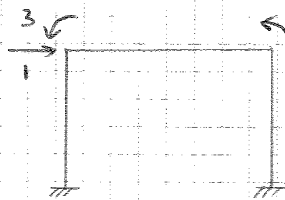
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

2 Oscillatore semplice e strutture

Alcune strutture possono essere ridotte a schemi semplici di oscillatore.



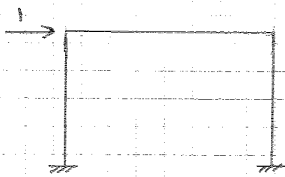
Dato un PORTALE, in condizioni normali gli spostamenti nodali (i movimenti) sono 6. In particolare, sono 3 per ogni nodo di incrocio. Dunque questo sistema ha potenzialmente 6 gradi di libertà.



Assumendo l'indeformabilità assiale, alcuni spostamenti scompaiono e rimangono soltanto uno spostamento orizzontale e due rotazioni in corrispondenza dei nodi.

D'altra parte, per attivare il movimento 2, bisogna avere una massa attiva su tale movimento, ossia una massa che si oppone al moto secondo il movimento 2. Questo può essere un sistema eccentrico costituito da un manico con attaccata una sfera molto pesante. Siccome tale sistema non è, il movimento 2 non è soggetto a inerzia e lo ignora nelle equazioni della dinamica.

Lo stesso vale per il movimento 3.

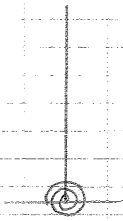


Di conseguenza, si tiene solo più il movimento orizzontale, che sicuramente ha un'inerzia perché la massa del solido si contrappone al movimento.

⇒ si è ridotto il sistema a un sistema a 1 grado di libertà, dove la massa è la massa della trave.

Questa operazione di semplificazione si chiama **compattazione dinamica** e si può effettuare in maniera sistematica su strutture complesse per ridurre l'entità del problema.

Un altro caso è il PALO INCASTRATO NEL TERRENO.



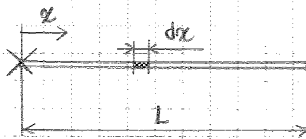
In questo caso, l'incastro è di tipo elastico perché il terreno non blocca completamente il palo e la reazione può essere schematizzata mediante una molla elastica.

Il sistema è equivalente al precedente e vale la stessa equazione.

$$J\ddot{\theta} + C\theta = H(t)$$

In questo caso, C è la rigidità alla rotazione da parte del terreno.

Il momento d'inerzia J del palo, rispetto al punto di rotazione, è calcolato sfruttando la definizione.



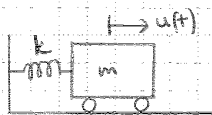
$$\begin{aligned} J &= \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \rho dx \\ &= \rho \int_0^L x^2 dx = \rho \frac{L^3}{3} \\ &= \frac{1}{3} mL^2 \end{aligned} \quad \rho = \frac{M}{L}$$

3 Oscillazioni libere di un sistema a un grado di libertà

In questo caso, non c'è forzante e si possono avere 2 situazioni:

- la massa parte dalla posizione di quiete (la molla non è allungata) e sta lì in eterno.
- la massa parte da una posizione diversa e il sistema oscilla in oscillazioni libere.

Nel secondo caso, l'equazione del moto è la seguente:



$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (19)$$

analoghi, sarebbe $-m\ddot{u} - ku = 0$

La soluzione è del tipo $e^{\alpha t}$ e, per trovare il termine α , lo si sostituisce dentro l'equazione.

$$\alpha^2 m e^{\alpha t} + k e^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha^2 m + k = 0$$

Si risolve questa equazione del II grado nell'incognita α .

$$\alpha = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm j\omega_n$$

In questo caso, si hanno due soluzioni immaginarie e il termine ω_n si dice pulsazione naturale (o circular frequency).

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (20)$$

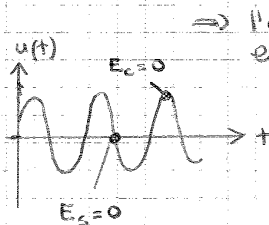
PROPRIETÀ: energia in un oscillatore libero

Siccome il sistema non presenta smorzamento, si può intuire che valga la conservazione dell'energia.

In particolare, l'energia totale è costituita dall'energia cinetica e dall'energia di deformazione e vale

$$\begin{aligned} E(t) &= E_s(t) + E_c(t) = \\ &= \frac{1}{2} k u^2(t) + \frac{1}{2} m \dot{u}^2(t) = \\ &= \frac{1}{2} k C^2 \cos^2(\omega_n t - \varphi) + \frac{1}{2} m C^2 \omega_n^2 \sin^2(\omega_n t - \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_n^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m \omega_n^2 = k \Rightarrow &= \frac{1}{2} k C^2 \cos^2(\omega_n t - \varphi) + \frac{1}{2} k C^2 \sin^2(\omega_n t - \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} k C^2 = \text{cost} \end{aligned}$$



⇒ l'energia totale si conserva e avviene uno scambio continuo tra energia cinetica ed energia di deformazione.

In particolare, l'energia di deformazione è massima quando la velocità è nulla e l'energia cinetica è massima quando la posizione è sullo zero.

Sfruttando il fatto che l'energia non cambia, si può annullarne la derivata rispetto al tempo e si ottiene così l'equazione di equilibrio.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{dE_s(t)}{dt} + \frac{dE_c(t)}{dt} = \\ &= k u \dot{u} + m \dot{u} \ddot{u} = 0 \Rightarrow m \ddot{u} + k u = 0 \end{aligned}$$

4 Oscillazioni libere di un sistema a un grado di libertà con smorzamento

Tipicamente, quando si mette in moto un oscillatore, dopo un po' si ferma. Dunque esiste una dissipazione di energia secondo un fenomeno detto smorzamento.

Lo smorzamento è un fenomeno complicato, poiché ne esistono tante tipologie.

Il tipo di smorzamento più semplice è legato all'interazione con fluidi (es. aria) e si dice smorzamento viscoso:

In questo caso, la forza che si oppone al moto dipende dalla velocità.

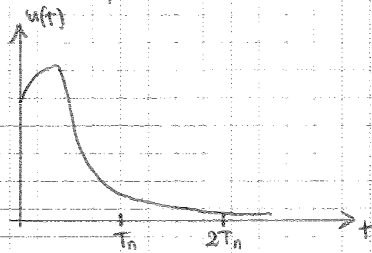
$$F = -c \dot{u}$$

In realtà, gli edifici non vibrano con smorzamento viscoso perché interagiscono non solo con l'aria ma anche con altri fattori, ad es. i cicli di isteresi dovuti a danneggiamenti strutturali.

In ogni caso, questo è un modello semplice e attendibile.

Pertanto, sulla base dello smorzamento, si definiscono 2 campi:

→ campo delle oscillazioni iper-smorzate ($\gamma > 1$)



È un caso ~~molto~~ raro, in cui i due termini d_1 e d_2 sono reali e si ottiene una soluzione del tipo

$$u(t) = k_1 e^{d_1 t} + k_2 e^{d_2 t} \quad (27)$$

In questo caso, non c'è oscillazione.

→ campo delle oscillazioni ipo-smorzate ($\gamma < 1$)

È il campo tipico della meccanica vibratoria.

In particolare, tipicamente vale

$$\gamma \ll 1$$

→ per strutture in acciaio in condizioni ordinarie si ha $\gamma = 5\% \div 1\%$

→ per strutture in cemento armato precompresso in condizioni normali si ha $\gamma = 1 \div 2\%$

→ per strutture in cemento armato in condizioni normali si ha $\gamma = 2\%$

→ in campo sismico, il danneggiamento aumenta lo smorzamento e si ha $\gamma = 5\%$.

In questi casi, si ha

$$\omega_D \approx \omega_n$$

e dunque la distinzione tra pulsazione naturale e smorzata è solo teorica e si può imporre che coincidano.

Il parametro α vale

$$\alpha = -\gamma \omega_n \pm j \omega_D$$

Si scrive la soluzione

$$u(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

Nuovamente, si impone che A_1 e A_2 siano complessi coniugati e si ottiene

$$u(t) = e^{-\gamma \omega_n t} C \cos(\omega_D t - \varphi) = e^{-\gamma \omega_n t} [A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)]$$

Si impongono le condizioni iniziali

$$u(t=0) = u_0 \quad \dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$$

→ costanti A e B

$$u(t=0) = A = u_0 \quad \Rightarrow \quad A = u_0$$

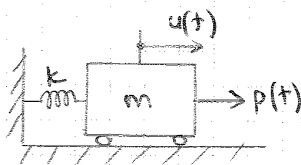
$$\dot{u}(t=0) = -\gamma \omega_n A + B \omega_D = \dot{u}_0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\dot{u}_0}{\omega_D} + \frac{\omega_n}{\omega_D} \gamma u_0$$

Le matrici $[m]$ e $[k]$ dipendono dalla discretizzazione della struttura e dai gradi di libertà attivi.

La matrice di smorzamento $[c]$ non si può ottenere direttamente dalla discretizzazione e occorrono ulteriori considerazioni.

6 Oscillazioni forzate di un sistema a un grado di libertà, con eccitazione armonica

La forzante più studiata è l'eccitazione armonica, che consiste in una forza sinusoidale di ampiezza p_0 e pulsazione ω .



$$p(t) = p_0 \sin(\omega t)$$

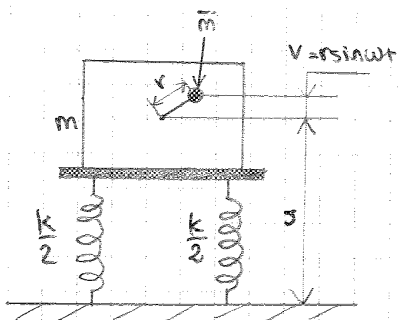
In questo caso, l'equazione del moto diventa

$$m\ddot{u} + cu + ku = p_0 \sin(\omega t) \quad (30)$$

L'eccitazione armonica è molto studiata perché semplice e utile dal punto di vista applicativo, in quanto esistono situazioni di strutture eccitate da azioni armoniche o periodiche (queste ultime sono sviluppabili in serie di funzioni armoniche).

APPLICAZIONI

→ un tipico problema ingegneristico è l'attenuazione delle vibrazioni provenienti da una MACCHINA VIBRANTE.



Una macchina vibrante ha massa totale m e presenta una massa eccentrica \bar{m} , con eccentricità r .

La macchina dà luogo a una componente verticale, che determina la vibrazione, e una componente orizzontale, poco importante perché si scarica sul solaio molto rigido.

Pertanto, la vera forzante è verticale e sollecita un sistema di molle (fondazione, solaio, etc.).

La componente verticale dell'eccentricità vale

$$V = r \sin(\omega t) \quad \omega = \text{numero di cicli / secondo}$$

Si scrive l'equazione di equilibrio dinamico del sistema rispetto alla componente verticale.

$$-(m - \bar{m})\ddot{u} - \bar{m}(\ddot{v} + \ddot{u}) - ku = 0$$

Le molle in serie (trasmettono la stessa forza con diverso spostamento)

Si può provare a riscriverla nel sistema relativo, sostituendo la relazione di spostamento.

$$m(\ddot{u} + u_g) + ku = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{u} + ku = -m\dot{u}_g = m\dot{u}_g \omega^2 \sin(\omega t)$$

Guardando l'equazione, si nota che eccitare la struttura alla base corrisponde ad applicare una forzante in testa pari alla massa dell'oscillatore moltiplicata per l'accelerazione del carrello cambiata di segno.

\Rightarrow applicare un'accelerazione (o un accelerogramma) equivale ad applicare una forza pari alla massa per l'accelerazione cambiata di segno.

Se invece si risolve l'equazione nel sistema assoluto, si valuta il comportamento rispetto a y e dunque interessa lo spostamento dell'oggetto (può essere uno stramento che non può muoversi e deve essere isolato).
Si scrive dunque

$$-m\ddot{y} - k(y - u_g) = 0$$

$$\Rightarrow -m\ddot{y} + ky = k u_g \sin(\omega t)$$

Detto ciò, si è visto che l'equazione differenziale è la seguente

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \sin(\omega t) \quad \rightarrow \text{per ora, si ignora lo smorzamento} \quad (30)$$

Secondo la teoria delle equazioni differenziali, questa si risolve come somma di una soluzione omogenea associata e di una soluzione particolare.

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

La soluzione omogenea associata è nota e corrisponde a quella vista nelle oscillazioni libere.

$$u_h(t) = C \cos(\omega_n t - \varphi) \quad (21)$$

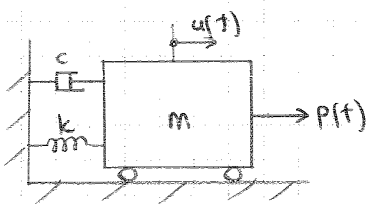
La soluzione particolare invece deriva dalla forma della forzante (più in generale, dalla forma del II membro dell'equazione differenziale).

$$u_p(t) = A \sin(\omega t)$$

Per ricavare il termine A , si sostituisce questa soluzione nell'equazione.

$$-mA\omega^2 \sin(\omega t) + kA \sin(\omega t) = p_0 \sin(\omega t)$$

Detto ciò, si valuta un caso più generale, ossia di oscillatore semplice a 1 grado di libertà con smorzamento e soggetto a un'eccitazione armonica di natura generale.



$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 e^{j\omega t} \quad (33)$$

non si usano seno o coseno perché intanto seno e coseno sono combinazione lineare di esponenziali complessi

Il transitorio è noto.

$$u_h(t) = e^{-\gamma \omega_n t} C \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

La risposta di stato permanente corrisponde alla soluzione particolare, che è del seguente tipo.

$$u_p(t) = \bar{U} e^{j\omega t}$$

Per ottenere il termine \bar{U} , si sostituisce nell'equazione differenziale.

$$-m\omega^2 \bar{U} e^{j\omega t} + c j \omega \bar{U} e^{j\omega t} + k \bar{U} e^{j\omega t} = p_0 e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \bar{U} = \frac{p_0}{(k - \omega^2 m) + j \omega c}$$

La soluzione di stato permanente vale così:

$$u_p(t) = \frac{p_0 k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\gamma \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} e^{j(\omega t - \varphi)}$$

$$\tan \varphi = \frac{2\gamma \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Il termine al denominatore prende il nome di fattore di amplificazione dinamica

$$R_d\left(\gamma; \frac{\omega}{\omega_n}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\gamma \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \quad (34)$$

L'espressione è simile a quella vista nel caso precedente, con la differenza che compare lo smorzamento e inoltre il fattore raggiunge un valore elevato ma non infinito quando la struttura va in risonanza.

PROPRIETÀ: FUNZIONE DI AMPLIFICAZIONE DINAMICA

Si è visto che tale funzione dipende molto dallo smorzamento

→ al diminuire dello smorzamento, il picco tende a salire e a collocarsi vicino al rapporto $\omega/\omega_n = 1$.

→ all'aumentare dello smorzamento, il picco è meno marcato e tende a divergere verso sinistra.

In particolare, per eccitazioni con pulsazioni molto piccole ($\omega/\omega_n < 0,2$), nell'equazione del moto rimane solo il termine di richiamo elastico (perché \ddot{u} e \dot{u} dipendono da ω e ω^2 , che sono piccoli).

$$\cancel{m}\ddot{u} + \cancel{c}\dot{u} + ku = p_0 e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{p_0}{k} e^{j\omega t}$$

In queste condizioni, si parla di risposta quasi-statica:

applicando una forza lenta sull'oscillatore, la massa segue l'eccitazione con una risposta che è in fase con essa, ciò si deve al fatto che i termini d'inerzia e viscosità sono molto piccoli.

Passando invece alla risonanza, questa è raggiunta per $\omega \rightarrow \omega_n$. In particolare, il picco si trova in corrispondenza del punto di massimo della funzione di amplificazione dinamica.

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Siccome lo smorzamento relativo è piccolo, si può dire che

$$\omega_r \sim \omega_n$$

Il corrispondente valore del fattore di amplificazione dinamica rappresenta l'amplificazione in risonanza.

$$R_{d,max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (35)$$

siccome lo smorzamento è piccolo, si può riscrivere

$$R_{d,max} = \frac{1}{2\zeta}$$

Tipicamente, nelle strutture lo smorzamento relativo è al 2% e l'amplificazione in risonanza vale 25. Ciò significa che lo spostamento diventa 25 volte quello statico e, per questo, la risonanza è un fenomeno

Si divide l'equazione per la massa m , in modo da poter esprimere l'eccitazione come sviluppo in serie di funzioni armoniche,

$$\ddot{u} + 2\gamma \omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = A(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i e^{j2\pi \frac{i}{T_0} t}$$

Si come c'è smorzamento, si ignora la soluzione di stato transitorio (si annulla dopo poco tempo) e si cerca solo la soluzione di stato permanente. Questa si lega alla forma della forzante e si può provare a calcolare la soluzione per la singola componente di armonica dell'eccitazione.

$$u_i(t) = \frac{m C_i}{k} R_d \left(\frac{\omega_i}{\omega_n}; \gamma \right) e^{j \left(\omega_i t - \varphi \left(\frac{\omega_i}{\omega_n}; \gamma \right) + \alpha_i \right)}$$

risposta dell'oscillatore a eccitazione armonica

$$\omega_i = 2\pi \frac{i}{T_0}$$

α_i = parametro che è funzione della costante di integrazione. Quest'ultima è un numero complesso, il cui modulo finisce come coefficiente moltiplicativo (C_i) e la fase finisce nell'esponenziale (α_i).

$$= \frac{C_i}{\omega_n^2} R_d \left(\frac{\omega_i}{\omega_n}; \gamma \right) e^{j \left(\omega_i t - \varphi \left(\frac{\omega_i}{\omega_n}; \gamma \right) + \alpha_i \right)}$$

Questa è la risposta alla singola componente dell'eccitazione. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, si sommano le risposte relative alle infinite componenti armoniche e si ottiene la risposta all'eccitazione.

$$u(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u_i(t) =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{C_i}{\omega_n^2} R_d \left(\frac{\omega_i}{\omega_n}; \gamma \right) e^{j \left(\omega_i t - \varphi \left(\frac{\omega_i}{\omega_n}; \gamma \right) + \alpha_i \right)}$$

$$u(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{C_i}{\omega_n^2} R_d \left(\frac{\omega_i}{\omega_n}; \gamma \right) e^{j \left(\omega_i t - \varphi \left(\frac{\omega_i}{\omega_n}; \gamma \right) + \alpha_i \right)} \quad (38)$$

Questa rappresenta la risposta nel caso più generale al segnale dato.

Se non c'è smorzamento ($\gamma = 0$), il termine ϑ sparisce e il coefficiente di amplificazione R_d assume un'espressione più semplice.

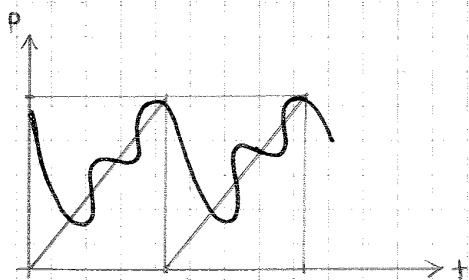
$$u(t) = \frac{P_0}{2k} - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\frac{P_0}{i\pi k}}{1 - \left(\frac{i\omega_0}{\omega_n}\right)^2} \sin(i\omega_0 t)$$

Se poi il rapporto ω_0/ω_n vale 2 (il segnale ha frequenza doppia rispetto alla frequenza di oscillazione naturale del sistema), si ottiene

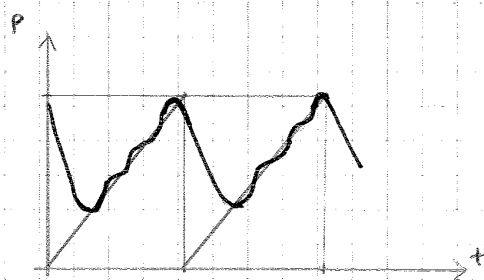
$$u(t) = \frac{P_0}{2k} - \frac{P_0}{\pi k} \left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{-3} + \frac{\sin(2\omega_0 t)}{-30} + \frac{\sin(3\omega_0 t)}{-105} + \frac{\sin(4\omega_0 t)}{-252} + \dots \right]$$

Detto ciò, si confrontino il grafico della forzante con gli sviluppi di Fourier troncati a un certo termine.

Troncamento al II ordine



Troncamento al III ordine



Anche se l'approssimazione non è perfetta, già con uno sviluppo con 3 termini si trova un errore nella risposta pari al 2%.

⇒ UN'APPROSSIMAZIONE INACCURATA DELLA FORZANTE (cioè ci si ferma ai primi termini) CONSENTE COMUNQUE UN'APPROSSIMAZIONE ACCURATA DELLA RISPOSTA

D'altra parte, bisogna scegliere i termini giusti, in quanto bisogna scegliere solo i termini vicini alla risonanza.

↳ occorre attenzione al troncamento

Ad es., in questo caso, si può approssimare la forzante con i primi termini dello sviluppo perché le frequenze alte contenute nella forzante qui non contribuiscono alla risposta.

Siccome il segnale è costituito da tanti impulsi, si sommano i loro effetti mediante integrale.

In virtù della linearità dell'oscillatore, vale il principio di sovrapposizione degli effetti e dunque con la somma si ottiene la risposta all'istante t .

$$u(t) = \int_0^t \frac{A(\tau) d\tau}{\omega_d} e^{-\xi \omega_d (t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau) =$$

$$= \frac{1}{\omega_d} \int_0^t A(\tau) e^{-\xi \omega_d (t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau) d\tau$$

$$u(t) = \frac{1}{\omega_d} \int_0^t A(\tau) e^{-\xi \omega_d (t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau) d\tau \quad \text{Integrale di Duhamel (39)}$$

Questo è un integrale di convoluzione e.

D'altra parte, è possibile eseguire un'ANALISI NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE (v. "Cenni sulla teoria dei segnali").

L'analisi nel dominio del tempo e l'analisi nel dominio delle frequenze sono simili ma hanno delle differenze nell'implementazione grafica.

Per ottenere la risposta nel dominio delle frequenze, si scrive la formula dell'antitrasformata di Fourier.

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(f) e^{j2\pi ft} df \quad (40)$$

In base a questa espressione, si può dire che il segnale nel dominio del tempo può essere scomposto in tante eccitazioni armoniche di ampiezza elementare $A(f)df$.

Il vantaggio di questa interpretazione è che si può ricattare la risposta di un oscillatore semplice a una singola armonica elementare.

$$A(f) e^{j2\pi ft} df \quad \xrightarrow{\text{oscillatore}} \quad \frac{A(f)}{\omega_n^2} R_d\left(\frac{\omega}{\omega_n}; \xi\right) e^{j\left(\omega t - \theta\left(\frac{\omega}{\omega_n}; \xi\right)\right)} df$$

Risposta di un oscillatore semplice a forzante armonica.

La risposta alle infinite armoniche si ottiene applicando il principio di sovrapposizione degli effetti e sommando i contributi.

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(f)}{\omega_n^2} R_d\left(\frac{\omega}{\omega_n}; \xi\right) e^{j\left(\omega t - \theta\left(\frac{\omega}{\omega_n}; \xi\right)\right)} df =$$

$$= h(t) * A(t)$$

Si esegue la convoluzione.

$$u(t) = h(t) * A(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^t h(\tau) A(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^t A(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad \rightarrow \text{la convoluzione è commutativa}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t A(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad \text{Risposta nel dominio del tempo (44)}$$

La funzione h prende il nome di funzione di risposta all'impulso (IRF) ed è una funzione tipica dei sistemi meccanici e rientra nella categoria delle FUNZIONI CAUSALI, cioè essa è definita solo per le ascisse positive, mentre è nulla in quelle negative.

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

Del resto, siccome il tempo negativo non esiste, la funzione IRF può essere ritenuta nulla.

Pertanto, l'integrale può essere fatto partire da 0 anziché da $-\infty$ poiché, al di sotto dello zero, la IRF è nulla.

$$u(t) = \int_0^t A(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (45)$$

Siccome poi questa espressione fornisce la risposta nel dominio del tempo, che è anche data dall'integrale di Duhamel, dal confronto si ottiene l'espressione della IRF

$$u(t) = \int_0^t A(\tau) h(t-\tau) d\tau = \frac{1}{\omega_d} \int_0^t A(\tau) e^{-\beta \omega_d (t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{\omega_d} e^{-\beta \omega_d t} \sin \omega_d t$$

$$h(t) = \frac{1}{\omega_d} e^{-\beta \omega_d t} \sin \omega_d t \quad \text{Funzione di risposta all'impulso (46)}$$

Cenni sulla teoria dei segnali

1 **Segnale**: esso è una **FUNZIONE** reale o complessa **DEL TEMPO**.
La differenza rispetto alle classiche funzioni è che il segnale è fisicamente realizzabile.

2 Si definisce come energia del segnale la seguente quantità.

$$E = \int_a^b |s(t)|^2 dt \quad (1)$$

Questa non è un'energia in senso meccanico ma la definizione è matematica, poiché è l'integrale del quadrato del modulo del segnale.

In particolare, l'energia si può interpretare come una specie di norma:

infatti, il segnale nasce come una funzione ma, nella realtà, questo è misurato come un vettore a n dimensioni, poiché il segnale è campionato.

Se poi il segnale fosse una funzione continua, questo può essere visto come un vettore con un numero infinito di componenti (ci sono infiniti valori). Un vettore di questo tipo non può essere rappresentato in uno spazio qualunque (tranne nello spazio di Hilbert, che è uno spazio a infinite dimensioni) e, se si fa riferimento alla teoria dei vettori, la radice dell'energia del segnale è

del segnale

⇒ con il concetto di energia del segnale, si generalizza il concetto di NORMA, che ora è definita anche per una funzione del tempo

Tra l'altro, la radice dell'energia si dice **VALORE EFFICACE** (o RMS) e a questo valore si riferiscono le normative sulle vibrazioni.

Se l'energia del segnale è minore di infinito, si parla di segnale a energia finita.

$$E < +\infty$$

In questa categoria ricadono i segnali fisici che, dopo un po', finiscono. Esistono però alcuni problemi in cui, per comodità, si fa riferimento a segnali a energia infinita perché, ad es., si assume l'ipotesi di stazionarietà (es. forzante sinusoidale).

3 Due segnali s_1 e s_2 si dicono segnali tra di loro ortogonali quando vale la seguente relazione.

$$\int s_1(t) s_2^*(t) dt = 0 \quad (2)$$

Di fatto, questa definizione è una generalizzazione del concetto di prodotto scalare.

Si riscrive la serie di Fourier, esplicitando μ_n .

$$s(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(z) e^{-jn \frac{2\pi}{T} z} dz \cdot e^{jn \frac{2\pi}{T} t}$$

Si considera ora la frequenza della n-esima armonica, che è un multiplo della frequenza fondamentale f_0 .

$$f_n = n f_0 = \frac{n}{T}$$

Si può così definire una variazione di frequenza tra le armoniche.

$$\begin{aligned} \Delta F &= f_n - f_{n-1} = \\ &= n f_0 - (n-1) f_0 = f_0 = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

In questo modo, si può riscrivere l'espressione della serie di Fourier.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(z) e^{-j2\pi f_n z} dz \right] e^{j2\pi f_n t} \cdot \Delta F$$

A questo punto, se si fa tendere il periodo T a infinito, il segnale diventa sempre più diluito e si può trattare il segnale non periodico come un segnale periodico con un periodo infinito.

D'altra parte, per $T \rightarrow \infty$, la frequenza f_n tende a diventare una variabile continua f e si può scrivere

$$T \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \Delta F \rightarrow df \quad f_n \rightarrow f$$

In questo modo, si ottiene la seguente espressione

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s(z) e^{-j2\pi f z} dz \right] e^{j2\pi f t} df, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

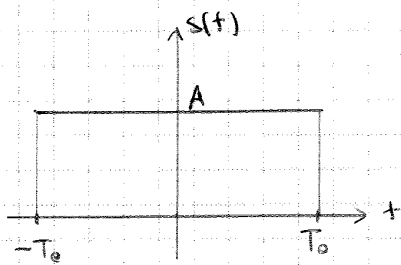
la somma di infiniti termini infinitesimi (c'è df) è un integrale

nella serie di Fourier, $t \in [-T/2; T/2]$; ora $T \rightarrow \infty$ e dunque $t \in (-\infty; +\infty)$

Un segnale non periodico così può essere scritto come sovrapposizione (in questo caso, è un integrale) di armoniche di ampiezza elementare data dal termine tra parentesi moltiplicato per df .

Es. (APPLICAZIONE: porta simmetrica)

La porta simmetrica è un segnale che parte all'istante $-T_0$ e termina all'istante T_0 e rimane costante.



L'analisi è dunque il calcolo della trasformata di Fourier sono fatti nell'intervallo tra $-T_0$ e T_0 .

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T_0}^{T_0} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

L'equazione del segnale è la seguente

$$s(t) = A, \quad t \in [-T_0; T_0]$$

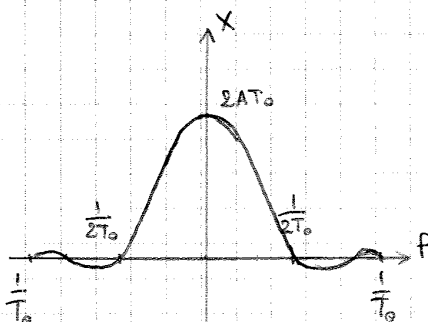
$$\Rightarrow X(f) = \int_{-T_0}^{T_0} A e^{-j2\pi ft} dt = \quad (6)$$

$$= A \int_{-T_0}^{T_0} e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= -\frac{A}{2\pi f j} \left[e^{-j2\pi ft} \right]_{-T_0}^{T_0} =$$

$$= \frac{A j}{2\pi f} \left(e^{-j2\pi T_0 f} - e^{j2\pi T_0 f} \right) = \frac{A}{\pi f} \sin(2\pi T_0 f)$$

[legame seno-esponenziale complesso]



In questo caso, la parte immaginaria è nulla perché il segnale è simmetrico e si dimostra che la sua trasformata presenta solo la parte reale. Se il segnale fosse antisimmetrico, ci sarebbe solo la parte immaginaria.

Guardando l'ampiezza $X(f)$ (la parte reale), questa è una specie di campana con picco $2AT_0$ in corrispondenza di $f=0$.

Questa si annulla a $\pm 1/2T_0$ e si nota che, se T_0 è grande (porta simmetrica lunga), la campana si fa stretta. In altri termini, più si apre il segnale nel tempo, più si riducono le frequenze.

⇒ UNA CONCENTRAZIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO SI SPALMA NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE (con un impulso, si eccita la struttura su tutto il range delle frequenze; con un impulso di frequenza, si eccita su tutto il range dei tempi).

Infatti, se il segnale è reale, la parte immaginaria è nulla e, quando si passa alla trasformata, non può nascere nuova informazione e ciò si traduce in una correlazione tra la parte a frequenza positiva e la parte a frequenza negativa.
Questo è un vantaggio perché, se si ha solo metà segnale, l'altra metà è definita.

→ prodotto e convoluzione

Dati due segnali $h(t)$ e $s(t)$, si definisce come convoluzione la seguente operazione.

$$h(t) * s(t) = \int h(t-\tau) s(\tau) d\tau \quad (13)$$

La convoluzione corrisponde a sovrapporre e scostare di τ i segnali e farne il prodotto scalare ed è un'operazione commutativa.
Tale operazione interviene in molti campi dove si lavora con sistemi lineari.

Detto ciò, se si fa la trasformata di una convoluzione nel dominio del tempo, si ottiene un prodotto delle trasformate.
Viceversa, a un prodotto nel dominio del tempo corrisponde una convoluzione nel dominio delle frequenze.

$$\mathcal{F}[h(t) * s(t)] = H(f) \cdot X(f) \quad (14)$$

$$\mathcal{F}[h(t) \cdot s(t)] = H(f) * X(f) \quad (15)$$

In questo modo, anziché fare una convoluzione, si può passare nell'altro dominio e fare un prodotto.

→ derivazione e integrazione

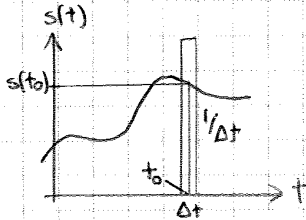
La trasformata della derivata corrisponde alla trasformata moltiplicata per $(j2\pi f)^n$. Ciò è utile per passare da spostamenti ad accelerazioni.

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dt^n} s(t)\right] = (j2\pi f)^n X(f) \quad (16)$$

La trasformata dell'integrale corrisponde alla trasformata divisa $j2\pi f$ (più la costante di integrazione).

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^+ s(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f} \quad (17)$$

Dunque un segnale moltiplicato per la delta di Dirac (che è un rettangolo di dimensioni $1/\Delta t \times \Delta t$) dà l'ordinata del segnale nel punto corrispondente perché l'integrale diventa



$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \delta(t-t_0) dt = s(t_0) \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta t = s(t_0)$$

infatti, δ è nulla per $t \neq t_0$ e dunque dall'integrale si passa a un valore

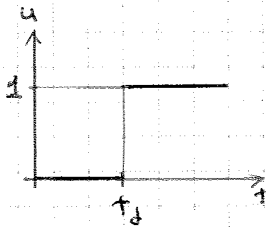
In questo senso, la delta di Dirac è l'unica funzione in grado di "fotografare" altre funzioni in un punto.

PROPRIETÀ → vale la seguente relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (21)$$

Questa relazione si lega alla proprietà del prodotto tra un segnale e la delta di Dirac.

→ la funzione integrale della delta di Dirac si dice STEP FUNCTION e si scrive come



$$u(t-t_d) = \int_{-\infty}^t \delta(t-t_d) dt \quad (22)$$

Essa vale 0 fino al punto dove è definita la delta e poi lì sale direttamente a 1.

Detto ciò, si procede al calcolo della trasformata dell'impulso (cioè della delta di Dirac).

$$\mathcal{F}[\delta(t-t_d)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_d) e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi t_d f}$$

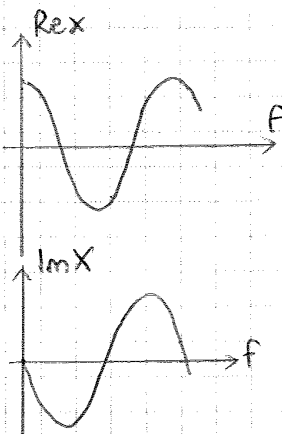
→ perché $\delta(t-t_d)$ fotografa la funzione nel punto t_d

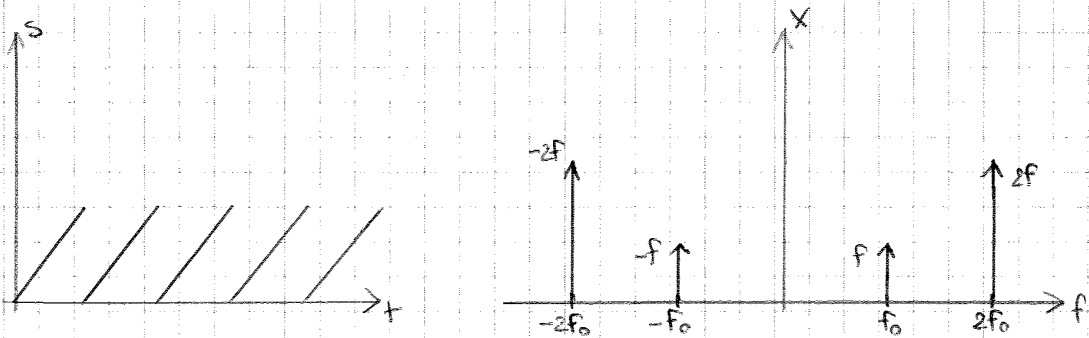
$$\mathcal{F}[\delta(t-t_d)] = e^{-j2\pi t_d f}$$

Trasformata di Fourier della delta di Dirac (23)

Così LA TRASFORMATA DI UN IMPULSO È UN'ARMONICA. Viceversa, se si esegue la trasformata di un'armonica, si trova una delta di Dirac. Infatti, se c'è una sola frequenza, tutta l'energia è concentrata in quella frequenza.

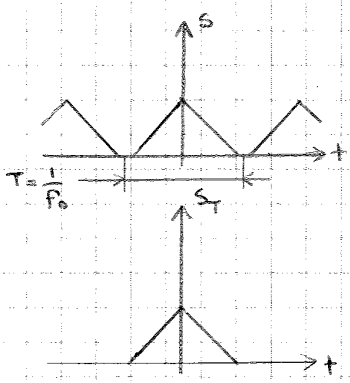
$$\mathcal{F}[e^{j2\pi f_d t}] = \delta(f-f_d)$$





Detto ciò, si considerino i coefficienti di Fourier.

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt \quad (4)$$



Se si introduce la funzione troncata $s_T(t)$, che si ottiene dal segnale periodico ignorando tutto ciò che è attorno alla prima replica, è chiaro che il coefficiente a_n non cambia (questo infatti è calcolato su una replica).

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_T(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt$$

D'altra parte, ora l'integrale può essere esteso da $-\infty$ a $+\infty$, perché al di fuori di $-T/2$ e $T/2$ la funzione $s_T(t)$ è nulla.

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} s_T(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T} X_T(n f_0) \quad (26)$$

per definizione di trasformata, questa è la trasformata del segnale troncato calcolata in corrispondenza di un multiplo di f_0 .

Dunque il segnale normale e il segnale troncato sono imparentati non solo nel dominio del tempo, ma anche nel dominio delle frequenze perché le trasformate hanno le stesse fattezze:

la trasformata della funzione periodica è costituita da tante delta di Dirac il cui andamento ha le stesse fattezze della trasformata continua della funzione troncata.

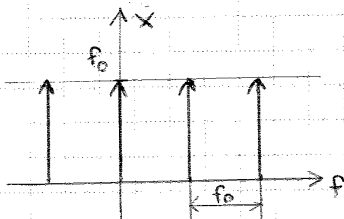
Così, partendo dalla trasformata del segnale troncato, si può ricavare la trasformata del segnale periodico mettendo tante delta con lo stesso andamento.

Si ottiene così

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X_T(nf_0) \delta(f - nf_0) = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta(f - nf_0) = \\
 &= f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_0)
 \end{aligned}$$

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_0)$$

Trasformata di Fourier di una sequenza periodica di impulsi (28)

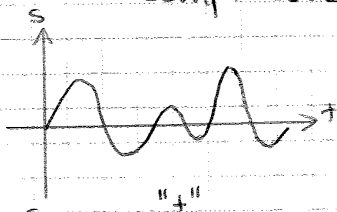


Così, nel dominio delle frequenze, si trova una sequenza di delta di Dirac equispaziate di $f_0 = 1/T$.

8 Trasformata di Fourier di un segnale campionato

Nella realtà, non è mai noto un segnale continuo, poiché non lo si conosce per ogni valore reale di tempo (per fare questo, occorrerebbe un campionatore che campioni tutti i numeri reali).

⇒ non si lavora mai con una funzione, bensì con un segnale campionato, cioè un VETTORE (in genere, equispaziato)

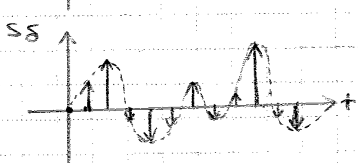


Il segnale campionato può essere visto come un prodotto tra

→ segnale vero (non noto)



→ insieme di delta di Dirac posti in corrispondenza degli istanti di misurazione.

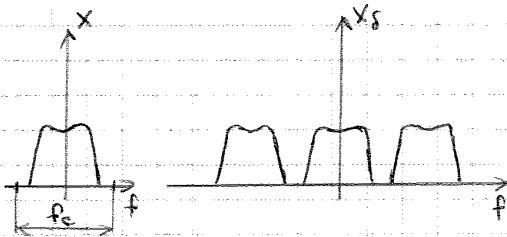


In questo senso, il segnale campionato si può interpretare come una sequenza di delta di Dirac proprio perché è una serie di valori posti a diversi istanti nel tempo.

Lavorando con il segnale campionato e non quello vero, si perde qualche informazione? E quanta se ne perderebbe?

Per capirlo, si scrive l'espressione del segnale campionato.

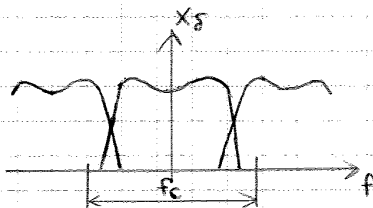
$$S_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_c s(nT_c) \delta(t - nT_c) \quad (29)$$



Così, data la trasformata del segnale reale (non nota), LA TRASFORMATA DEL SEGNALE CAMPIONATO È COSTITUITA DA UN NUMERO INFINITO DI REPLICHE DELLA TRASFORMATA DEL SEGNALE CHE SI VUOLE OTTENERE.

In questo modo, basta tenere una replica e scartare tutte le altre.

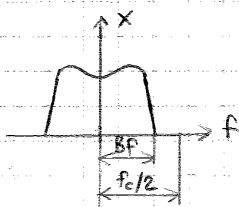
In realtà, quando la frequenza di campionamento f_c è troppo piccola (si parla di SOTTOCAMPIONAMENTO), si determina il problema di aliasing:



il sottocampionamento si traduce, nel campo delle frequenze, in una sovrapposizione di repliche e si ricava un segnale confuso, con perdita di informazione.

Questo è un problema tipico dei segnali limitati in banda, poiché i segnali ideali non esistono a causa delle code provocate dal rumore di fondo. La presenza delle code però fa sì che ci sia sempre una sovrapposizione delle repliche e dunque la trasformata non sarebbe mai nota, visto che le repliche non potrebbero essere separate. Pertanto, si lavora con segnali limitati in banda nei quali, però, un sottocampionamento causa l'aliasing.

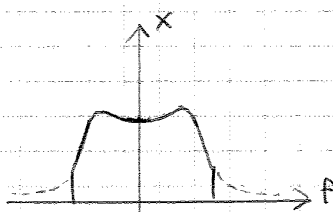
Per evitare questo fenomeno, si adotta un campionamento secondo il criterio di Nyquist.



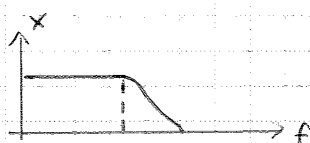
$$f_c = \frac{1}{T_c} > 2Bp \quad (31)$$

Bp = banda del segnale, cioè supporto in frequenza del segnale

Se però il segnale è non limitato e presenta delle code (dunque è soggetto ad aliasing), si esegue un filtro anti-aliasing.



Tale filtro è già presente nello strumento di acquisizione e permette di scartare tutto il rumore che si trova oltre una certa banda di frequenza. In questo modo, si elimina la parte del segnale che non serve e si rimuove già dall'inizio il fenomeno dell'aliasing.



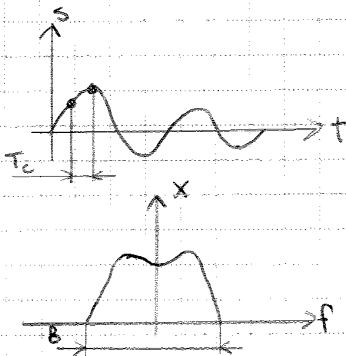
In realtà, il filtro non è mai netto ma esiste, per quanto ripido possa essere, un transitorio.

$$f_0 = \frac{1}{T}$$

→ periodo di campionamento T_c

Esso si lega al SUPPORTO IN FREQUENZA DEL SEGNALE, pari a 2 volte la banda utile (cioè 2 volte la frequenza di Nyquist).

$$T_c = \frac{1}{B}$$



Al diminuire del periodo di campionamento, si riesce ad avere un supporto in frequenza B maggiore e si vede la trasformata per un'estensione superiore (come se fosse un sipario che si apre).

Questo "sipario" viene aperto fino a quanto interessa perché, spingendo T_c verso zero, l'impegno computazionale aumenta.

→ Numero di campioni N

Questo parametro si lega a tutti gli altri.

$$N = \frac{T}{T_c} + 1$$

Di questi, due parametri sono indipendenti e sono scelti in base alle esigenze, mentre il terzo verrà di conseguenza.

Ad es., se le misure sono già eseguite, il periodo di campionamento T_c è imposto e si può variare il numero di campioni (limitandolo, se lo strumento ha basse potenzialità) oppure la frequenza di risoluzione f_0 (se lo strumento è complesso).

La trasformata discreta ha poi un onere computazionale pari a N^2

cioè l'onere e la complessità aumenta con il quadrato del numero dei campioni.

Per questo motivo, negli anni '60 si è introdotto l'algoritmo Fast Fourier Transform (FFT):

questo è un algoritmo molto più veloce, con un carico computazionale di

$$N \cdot \log N$$

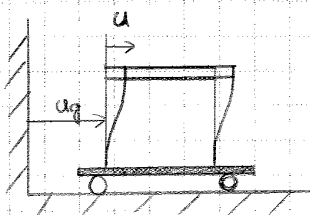
L'unico vincolo in tale formulazione è che il segnale deve avere una lunghezza pari a una potenza di 2, ma questo problema è oggi

SPETTRI DI RISPOSTA

1 Lo spettro di risposta è diverso dallo spettro di Fourier :

se lo spettro di Fourier è uno strumento rigoroso per capire il contenuto energetico alle diverse frequenze, lo spettro di risposta è uno strumento più "grezzo", introdotto da Housner, Richter, Cornell e Newmark per aiutare nel calcolo sismico delle strutture.

2 PRINCIPIO DEGLI SPETTRI DI RISPOSTA :



Si consideri l'equazione dell'oscillatore semplice (ci si riferisce a questo perché strutture complicate possono essere ricondotte a tale schema) per movimento del supporto.

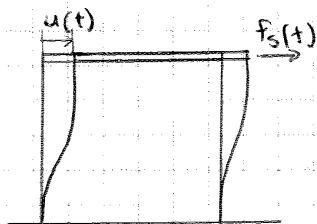
$$m(\ddot{u}_g + \ddot{u}) + c\dot{u} + ku = 0 \quad (1)$$

Si divide l'equazione per la massa.

$$\ddot{u} + 2\gamma\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = -\ddot{u}_g(t) \quad \text{Equazione canonica dell'oscillatore semplice in ingegneria}$$

Il termine $\ddot{u}_g(t)$ è dato da un accelerogramma (quello standard è relativo al sistema di El Centro).

Il concetto di spettro di risposta è legato al concetto di FORZA STATICA EQUIVALENTE



Essa è una forza pari alla forza di richiamo elastico che varia istante per istante

$$F_s(t) = ku(t) \quad (2)$$

Di fatto, questa è la forza che si deve applicare staticamente per generare lo spostamento $u(t)$.

Ricordandosi la definizione di pulsazione naturale

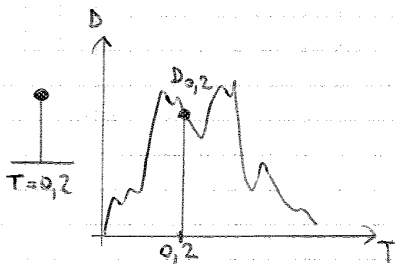
$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad k = m\omega_n^2$$

la forza statica equivalente si può esprimere come

$$F_s(t) = m\omega_n^2 u(t)$$

→ il vero motivo per cui si lavora con la pseudoaccelerazione è che questa grandezza è direttamente collegata allo SPOSTAMENTO. Infatti, in campo sismico, è preferibile lavorare con spostamenti invece che con forze, poiché una struttura non cede per un eccesso di tensione, bensì per un eccesso di spostamento. D'altra parte, l'analisi strutturale in campo civile è sempre stata basata sulle forze e non si può sconvolgere questo modo di pensare. Il vantaggio della pseudoaccelerazione è che sembra di lavorare con un'accelerazione (e quindi con una forza), mentre in realtà si lavora con uno spostamento.

INTERPRETAZIONE DELLE GRANDEZZE SPETTRALI

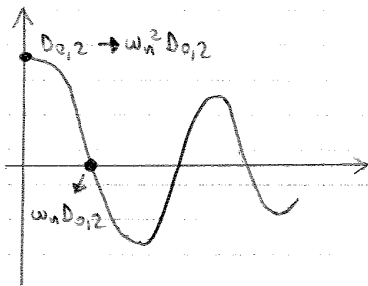


Si immagini di somministrare un terremoto a un oscillatore e di tracciare il diagramma della risposta $u(t)$, calcolato con l'integrale di Duhamel.

Il valore massimo degli spostamenti è lo spostamento spettrale D .

Detto ciò, si assuma che, una volta che lo spostamento ha raggiunto il valore massimo, il terremoto cessa.

Allora l'oscillatore, dalla posizione D , inizia a oscillare secondo delle oscillazioni libere. Allora,



→ la pseudovelocità è la velocità che si realizza quando lo spostamento si annulla ($\dot{u} = \omega_n D$)

→ la pseudoaccelerazione è l'accelerazione che si realizza un istante dopo la cessazione del terremoto.

Del resto, pseudovelocità e pseudoaccelerazione coincidono con velocità e accelerazione quando lo smorzamento è piccolo e la somministrazione di energia da parte del terremoto è così lenta che si può trascurarne il contributo nell'equazione di equilibrio dinamico (e, di fatto, è come se si fosse in regime di oscillazioni libere).

In tutto questo, si fa l'ipotesi implicita che il massimo di velocità, quello di spostamento e quello di accelerazione cadano nello stesso ciclo, ma ciò non è detto.

Stesso discorso vale per il legame tra $\log A$ e $\log V$:

in questo caso, si possono trovare delle rette inclinate di 45° in cui sono costanti le accelerazioni.

Pertanto, oltre agli assi coordinati cioè

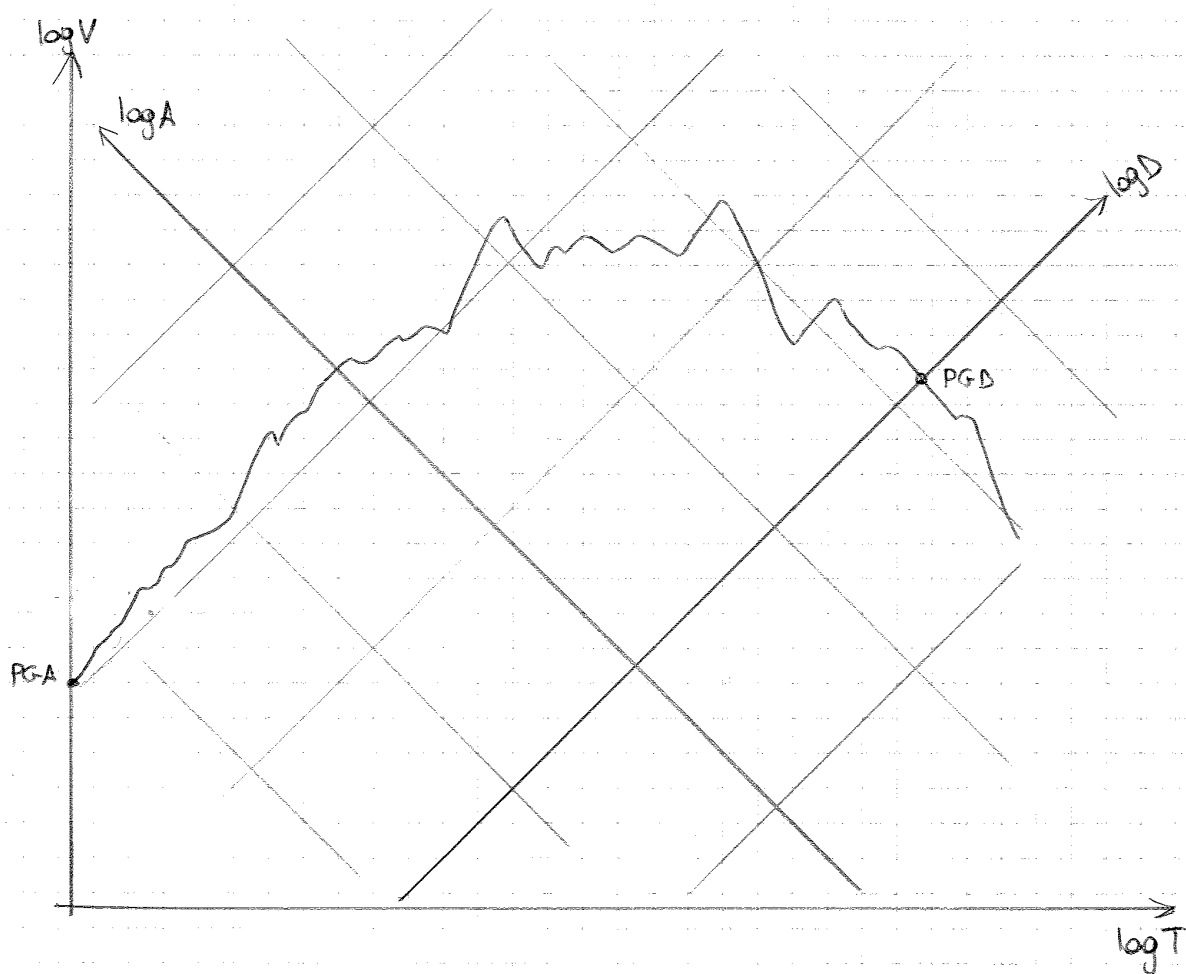
- asse del periodo proprio
- asse delle pseudovelocità spettrali

si possono introdurre altri 2 assi inclinati di 45°

- asse degli spostamenti spettrali
- asse delle pseudo accelerazioni spettrali

Si ottiene così un nuovo diagramma detto Four way diagram ed è molto comodo perché con esso si possono controllare 4 parametri.

Infatti, un punto corrisponde a un periodo proprio, una pseudoaccelerazione (letta sull'asse inclinato), una pseudovelocità e uno spostamento (letto sull'asse inclinato).



→ lo spettro può essere diviso in 3 zone

→ a sinistra, per $T < 0,5$ s (a rigori, $T < 0,03$ s), si trova la zona dove il fenomeno è governato dall'accelerazione e si parla di acceleration-sensitive. Infatti, per piccoli valori di T , la struttura è poco deformabile e l'accelerazione massima è circa PGA.

→ a destra, per $T > 3$ s (a rigori, $T > 15$ s), si ricade nella zona displacement-sensitive e il lo spostamento massimo è circa PGD (governano gli spostamenti).

→ in mezzo, il fenomeno è governato dalla velocità e si parla di velocity-sensitive.

$T < 0,5$ s Acceleration-sensitive

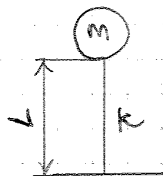
$T = 0,5 \div 3$ s Velocity-sensitive

$T > 3$ s Displacement-sensitive

Dal punto di vista applicativo, le regioni che interessano di più sono quelle legate ad accelerazioni e velocità.

Es (APPLICAZIONE DEL FOUR WAY DIAGRAM)

Si calcoli il momento massimo per effetto dell'azione sismica su un serbatoio pensile.



Il sistema può essere schematizzato come un oscillatore semplice avente le seguenti caratteristiche.

$$m = 10'000 \text{ kg} \qquad k = 98,7 \text{ kN/m}$$

$$g = 2\% \qquad L = 10 \text{ m}$$

Si vuole ricavare l'accelerazione spettrale attraverso lo spettro di risposta e, per fare ciò, bisogna prima ricavare il periodo proprio di oscillazione del sistema.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{98,7 \cdot 1000 \text{ [kg s}^{-2}\text{]}}{10000 \text{ [kg]}}} = 3,14 \text{ rad/s}$$

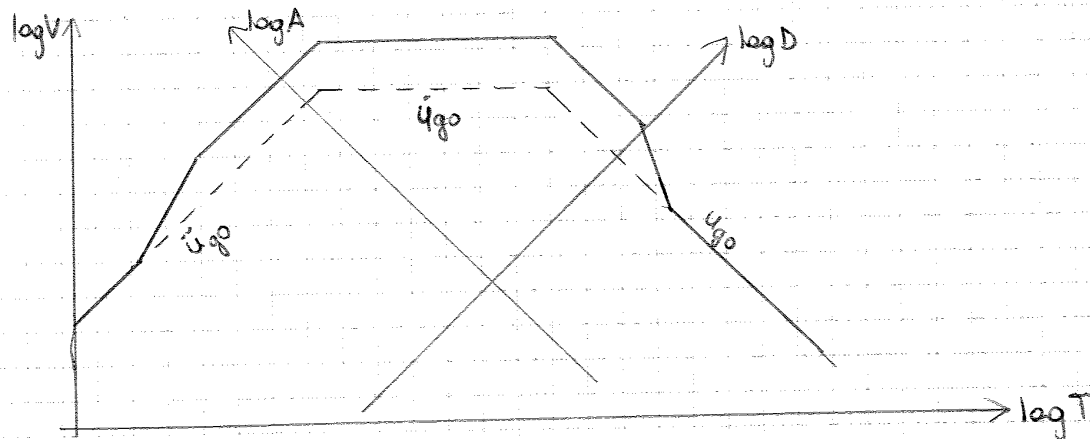
$$\Rightarrow T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{3,14 \text{ [s}^{-1}\text{]}} \approx 2 \text{ s}$$

Introducendo il valore nel diagramma, si legge la pseudoaccelerazione spettrale.

$$T_n = 2 \text{ s} \xrightarrow[\text{spettrale}]{\text{diagramma}} A = 0,191 g = 0,191 \cdot 9,81 \text{ [m s}^{-2}\text{]} = 1,87 \text{ m/s}^2$$

Alla fine, il diagramma termina lungo PGD.

I valori di base PGA e PGD sono collegati ai valori amplificati mediante raccordi.



Il diagramma si traduce in uno spettro delle accelerazioni caratterizzato da diversi tratti definiti da dei periodi T_1 , T_2 e T_3 dipendenti dal terreno.

→ zona di massima amplificazione che è costante, poiché in quella zona l'accelerazione spettrale è costante.

→ zona di raccordo a sinistra, assunto lineare per semplicità

→ zona concava immediatamente a destra. Infatti, in quel tratto la velocità è costante e ciò significa

$$V = \frac{A}{\omega_n} = \frac{A}{2\pi} T = \text{cost} \Rightarrow A = \frac{\text{cost}}{T}$$

L'accelerazione ha un andamento iperbolico rispetto al periodo e dunque la curva è concava.

→ zona a concavità più marcata perché, in quel tratto, lo spostamento è costante e ciò significa

$$D = \frac{A}{\omega_n^2} = \frac{A}{(2\pi)^2} T^2 = \text{cost} \Rightarrow A = \frac{\text{cost}}{T^2}$$

L'accelerazione ha ancora un andamento iperbolico ma la concavità è più marcata.

Tra queste zone esistono dei punti di cuspidi ma, siccome non esistono punti di transizione secca nella realtà, alcune norme cercano di "alleggerire" la transizione.

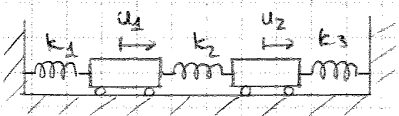
OSCILLATORI A PIÙ GRADI DI LIBERTÀ

1 Lo schema di oscillatore a più gradi di libertà è utile per studiare strutture complesse, poiché l'analisi modale consente di scomporre strutture complesse in oscillatori.

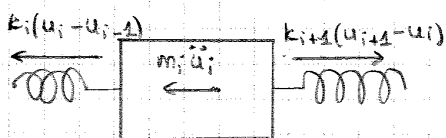
2 Oscillazioni libere di un treno

lumped-mass

Un treno è un sistema costituito da 2 masse concentrate collegate da molle prive di massa.



Se si considera la singola massa m_i e a essa si applica uno spostamento u_i , tale massa è soggetta a



→ Forza di richiamo elastico verso sinistra $k_i(u_i - u_{i-1})$, dove u_{i-1} è lo spostamento della carrozza a sinistra, e verso destra $k_{i+1}(u_{i+1} - u_i)$

→ Forza d'inerzia $-m_i \ddot{u}_i$

In generale, l'equazione del moto della singola carrozza è

$$-m_i \ddot{u}_i - k_i(u_i - u_{i-1}) + k_{i+1}(u_{i+1} - u_i) = 0$$

In forma canonica, si scrive

$$m_i \ddot{u}_i - k_i u_{i-1} + (k_i + k_{i+1}) u_i - k_{i+1} u_{i+1} = 0$$

Dunque l'equazione della singola massa dipende solo dai termini i , $i-1$ e $i+1$, ossia solo dalla massa stessa e da quelle immediatamente a sinistra e a destra, mentre le altre non incidono. Un sistema di questo tipo si dice *chain-like system*.

$$m_i \ddot{u}_i - k_i u_{i-1} + (k_i + k_{i+1}) u_i - k_{i+1} u_{i+1} = 0 \quad (1)$$

Nel caso del treno, dove $i = 1; 2$, si ottiene

$$m_1 \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{u}_2 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3) u_2 = 0$$

Per semplificare, si assume che le molle abbiano uguale rigidità, pari a k .

$$m_1 \ddot{u}_1 + 2k u_1 - k u_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{u}_2 - k u_1 + 2k u_2 = 0$$

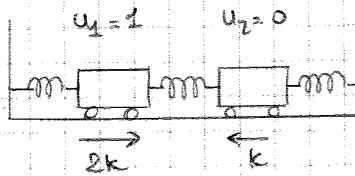
Per avere una garanzia di questo, è necessario che le matrici di massa e di rigidità siano associate a un problema reale.

→ COSTRUZIONE DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA

È possibile una costruzione della matrice di rigidità al di fuori del calcolo dinamico, mediante APPLICAZIONE DI UNO SPOSTAMENTO UNITARIO a ciascun grado di libertà E CALCOLO DELLE FORZE CORRISPONDENTI.

Si applica uno spostamento unitario alla prima massa, mentre la seconda rimane ferma.

$$u_1 = 1 \quad u_2 = 0$$



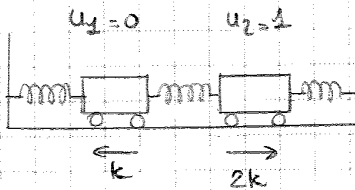
Per generare questo spostamento, bisogna allungare la molla a sinistra di 1 e accorciare la molla centrale di 1. Pertanto, alla prima massa bisogna applicare la forza necessaria a produrre questa deformazione nelle due molle e questa vale

$$F_1^{(1)} = k \cdot 1 + k \cdot 1 = 2k$$

Forza nella molla di rigidità k per uno spostamento di 1. Segno "+" perché le forze sono concordi.

Alla massa 2 bisogna applicare una forza uguale e contraria a quella che c'è nella molla centrale, in modo da tenerla ferma.

$$F_2^{(1)} = -k$$



Si applica poi uno spostamento unitario alla seconda massa, mentre la prima rimane ferma.

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 1$$

La situazione è speculare alla precedente.

$$F_1^{(2)} = -k \quad F_2^{(2)} = 2k$$

A ciascun spostamento imposto, corrisponde un certo numero di forze che, incolonnate in un vettore, costituiscono le colonne della matrice di rigidità.

$$k^1 = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ -k \end{pmatrix} \quad k^2 = \begin{pmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ 2k \end{pmatrix}$$

Questo sistema definisce il problema agli autovalori.

$$([K] - \omega_E^2 [M]) \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Problema agli autovalori (7)}$$

Una prima soluzione è quella banale, con

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0$$

Questa però non ha significato perché corrisponderebbe al sistema fermo.

Per trovare le altre soluzioni, occorre annullare il determinante della matrice dei coefficienti.

$$\det([K] - \omega_E^2 [M]) = 0$$

$$\det([K] - \omega_E^2 [M]) = 0 \quad \text{Equazione scalare (8)}$$

Si sostituiscono le matrici del problema.

$$\det \left(\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} - \omega_E^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 2k - \omega_E^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega_E^2 m \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(2k - \omega_E^2 m)^2 - k^2 = 0$$

$$(2k - \omega_E^2 m + k)(2k - \omega_E^2 m - k) = 0 \quad \text{poiché } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(3k - \omega_E^2 m)(k - \omega_E^2 m) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{k}{m} \\ \omega_2^2 = \frac{3k}{m} \end{cases}$$

Si sono così individuate 2 frequenze naturali, corrispondenti a 2 autovalori,

Una delle soluzioni è

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sostituendo nella formula della soluzione (7), si nota che esistono 2 tipi di oscillazione

→ una deriva dalla prima forma modale ed è un'oscillazione del tipo

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\pm j\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

↳ l'autovalore è ω^2 e dunque ci sono 2 possibili soluzioni, una per $\omega > 0$ e una per $\omega < 0$

→ l'altra deriva dalla seconda forma modale

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ +1 \end{pmatrix} e^{\pm j\sqrt{\frac{3k}{m}}t}$$

In queste espressioni, i termini ω_i si dicono pulsazioni modali o pulsazioni naturali.

I vettori $\{\Phi_i\}$ sono invece detti autovettori o forme modali perché individuano la forma con cui vibra la struttura.

Ora ci si focalizza sulla soluzione relativa alla prima forma modale, che ha un'espressione del tipo

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}^{(1)} = A_1(\pm) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{j\omega_1 t} + A_2(\pm) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-j\omega_1 t}$$

Come già accadeva nel caso dell'oscillatore semplice, la soluzione è scritta come combinazione lineare di 2 soluzioni complesse coniugate, in cui la costante moltiplicativa $A_{i(\pm)}$ è in genere complessa.

In questo modo, basta scegliere due costanti $A_{i(\pm)}$ che siano complesse coniugate tra di loro.

$$A_1(\pm) = A_2(\pm) = C(\pm) e^{-i\varphi(\pm)}$$

In questo modo, sostituendo nella soluzione, i due addendi diventano complessi coniugati e rimane solo più la componente reale.

Ad es., se si applica una condizione iniziale del tipo

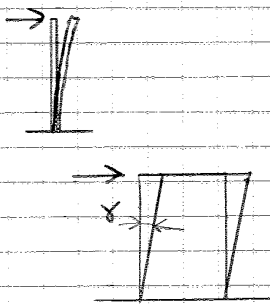
$$u_1(0) = A \quad u_2(0) = A \quad \dot{u}_1(0) = 0 \quad \dot{u}_2(0) = 0$$

cioè si applica lo stesso spostamento alle masse e la velocità iniziale è nulla, questa condizione iniziale è simile al I modo e il sistema si muoverà in maniera molto simile al 2 modo.

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t)$$

Modello shear-type

Esso è un tipico modello strutturale usato con pannelli.

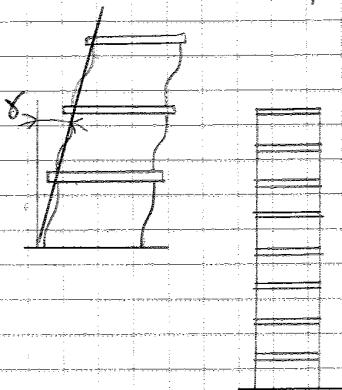


Se si applica una forza in testa a un elemento strutturale, si riscontra innanzitutto una deformazione a taglio, con una distorsione γ dipendente dal taglio applicato. Un'altra deformazione che si riscontra è la deformazione a flessione. Se l'elemento è snello (simile a una trave), l'elemento tende ad assumere una deformazione di sola flessione; se l'elemento è tozzo, la deformazione prevalente è a taglio.

Infatti, in una struttura, si distinguono

- comportamento shear type
- comportamento bending type

Questo discorso può essere esteso anche agli edifici.



Per realizzare un comportamento shear-type, occorre inserire traversi infinitamente rigidi fuori dal loro piano (cioè infinitamente rigidi a flessione). In tal caso, applicando una forza all'edificio, questo globalmente si deforma come se fosse un pannello.

Nella pratica, gli edifici molto alti tendono a un comportamento bending type anche se si mettono dei traversi rigidi. Infatti, ad ogni piano le travi sono le stesse (sono definite dal carico sul solaio), mentre le colonne sono molto più importanti alla base.

$$+ \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -k_i & k_i + k_{i+1} & -k_{i+1} & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -k_{n-1} & k_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Anche se il sistema è più complesso, esso presenta sempre

- matrice di massa, che è diagonale perché il sistema è lumped-mass (in un modello consistent-mass, essa sarebbe simmetrica).
- matrice di rigidità, che è simmetrica e ha la classica forma dei sistemi chain-like, cioè è una matrice a banda. Infatti, in un sistema chain-like, non occorre neanche usare le forze esplorative ma basta scrivere la banda di interesse.
- matrice di smorzamento, che è a banda perché il sistema è chain-like.

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \{\Phi\}_s^T [M] \{\Phi\}_r = \{0\} \quad (15)$$

Se i modi r e s sono modi distinti (cioè non rappresentano lo stesso modo di vibrare), allora

$$\omega_r^2 - \omega_s^2 \neq 0$$

e dunque, per soddisfare l'equazione (15), il II termine deve essere nullo.

Così, dati 2 modi r e s qualunque con autovettori $\{\Phi\}_r$ e $\{\Phi\}_s$, si può dire che

$$\{\Phi\}_s^T [M] \{\Phi\}_r = \{0\} \quad (16)$$

Questa relazione corrisponde a dire che due autovettori distinti sono ortogonali rispetto alla matrice delle masse.

Sostituendo poi l'equazione (16) nell'equazione (14), si ottiene

$$\{\Phi\}_s^T ([K] - \omega_s^2 [M]) \{\Phi\}_r = \{0\} \quad (14)$$

$$\{\Phi\}_s^T [K] \{\Phi\}_r - \omega_s^2 \underbrace{\{\Phi\}_s^T [M] \{\Phi\}_r}_{\{0\}} = \{0\} \quad (16)$$

$$\Rightarrow \{\Phi\}_s^T [K] \{\Phi\}_r = \{0\} \quad (17)$$

Quindi, anche rispetto alla matrice di rigidità vale la proprietà di ortogonalità degli autovettori del sistema.

Pertanto, i modi del sistema sono ortogonali sia rispetto alla matrice delle masse sia rispetto alla matrice delle rigidità.

$$\{\Phi\}_s^T [M] \{\Phi\}_r = \{0\} \quad (16)$$

$$\{\Phi\}_s^T [K] \{\Phi\}_r = \{0\} \quad (17)$$

$s \neq r$

$$[\Phi]^T [m] [\Phi] = [m_r] = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_i & & \\ & & & \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix} \quad (23)$$

Così la proprietà di ortogonalità degli autovettori rispetto alla matrice delle masse si traduce nella possibilità di diagonalizzare tale matrice pre- e post-moltiplicandola per la matrice modale, ottenendo una matrice diagonale con le masse generalizzate.

Allo stesso modo, eseguendo l'operazione

$$[\Phi]^T [k] [\Phi]$$

si riesce a trovare la matrice diagonale contenente le rigidezze generalizzate.

$$[\Phi]^T [k] [\Phi] = [k_r] = \begin{bmatrix} k_1 & & & 0 \\ & k_i & & \\ & & & \\ 0 & & & k_n \end{bmatrix} \quad (24)$$

OSSERVAZIONE: il passaggio fondamentale della dimostrazione dell'ortogonalità è il passaggio dalla equazione (13) alla (16) perché lì si è sfruttata la simmetria della matrice di rigidezza, cioè il fatto che

$$[k]^T = [k]$$

Dunque l'ortogonalità vale grazie al teorema di Betti (è da lì che deriva la simmetria) e dunque vale in elasticità lineare.

⇒ L'ORTOGONALITÀ DEI MODI VALE SOLO IN CAMPO ELASTICO-LINEARE

$$\begin{aligned} \{U\}_r^T [m] \{U\}_r &= \left(\frac{1}{\sqrt{\{ \Phi \}_r^T [m] \{ \Phi \}_r \cdot \{ \Phi \}_r^T [m] \{ \Phi \}_r}} \right) \{ \Phi \}_r^T [m] \{ \Phi \}_r = \\ &= \frac{1}{m_r} \cdot m_r = 1 \quad \rightarrow \text{v. eqz. (20)} \end{aligned}$$

Si ottiene così un valore unitario di massa generalizzata, per $r = s$.

In forma compatta, si può scrivere

$$[U]^T [m] [U] = [I] \quad (26)$$

→ RIGIDEZZA GENERALIZZATA

Si imposta l'equazione (17)

$$\begin{aligned} \{U\}_r^T [K] \{U\}_s &= \frac{\{ \Phi \}_r^T}{\sqrt{\{ \Phi \}_r^T [m] \{ \Phi \}_r}} [K] \frac{\{ \Phi \}_s}{\sqrt{\{ \Phi \}_s^T [m] \{ \Phi \}_s}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\{ \Phi \}_r^T [m] \{ \Phi \}_r} \sqrt{\{ \Phi \}_s^T [m] \{ \Phi \}_s}} \{ \Phi \}_r^T [K] \{ \Phi \}_s \end{aligned}$$

Essendo il II fattore nel II membro nullo (v. eqz. 17), si ottiene

$$\{U\}_r^T [K] \{U\}_s = 0$$

Nel caso di $r = s$, si ottiene una rigidezza generalizzata che può essere espressa in funzione della massa generalizzata, secondo l'equazione (21)

$$k_r = \omega_r^2 m_r$$

Nel caso degli autovettori normalizzati, la massa generalizzata è pari a 1 e dunque

$$k_r = \omega_r^2$$

La rigidezza generalizzata è pari agli autovalore.

⇒ è possibile ridurre un sistema complicato a n gradi di libertà a n equazioni corrispondenti a n oscillatori semplici separati, che possono essere risolte in maniera separata (disaccoppiamento).

Ciò porta a più vantaggi:

- si possono usare, per ciascun oscillatore semplice, le classiche tecniche, come l'integrale di Duhamel.
- si possono usare quantità come lo spettro di risposta, concepito per l'oscillatore semplice, a strutture più complesse.
- si può applicare il concetto di RISONANZA, con la sola differenza che in una struttura complessa ci possono essere tante risonanze.

Disaccoppiamento modale nei sistemi con smorzamento

Si consideri l'equazione dinamica per un sistema a più gradi di libertà con smorzamento viscoso.

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{F(t)\} \quad (32)$$

Si esegue la trasformazione alle coordinate modali.

$$\{u\} = [U]\{p\} \quad (29)$$

Si sostituisce la trasformazione nell'equazione dinamica.

$$[m][U]\{\ddot{p}\} + [c][U]\{\dot{p}\} + [k][U]\{p\} = \{F(t)\}$$

Si premoltiplica l'equazione per la trasposta della matrice degli autovettori normalizzati U .

$$\underbrace{[U]^T [m] [U]}_{\substack{|| \\ [I] \\ (26)}} \{\ddot{p}\} + [U]^T [c] [U] \{\dot{p}\} + \underbrace{[U]^T [k] [U]}_{\substack{|| \\ [\Omega] \\ (27)}} \{p\} = [U]^T \{F(t)\}$$

$$\Rightarrow \{\ddot{p}\} + [U]^T [c] [U] \{\dot{p}\} + [\Omega] \{p\} = [U]^T \{F(t)\} \quad (33)$$

un'equazione identica, ma solo perché sappiamo che la prima componente del vettore di stato è uno spostamento e la seconda è una velocità

↳ se fosse un vettore qualunque, questo non varrebbe

In questo caso, siccome si opera con equazioni del I ordine, il problema agli autovalori assume una forma diversa.

$$\left\{ s \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \right\} \{\Phi'\} = \{0\} \quad \text{PROBLEMA AGLI AUTOVALORI (39)}$$

La quantità s corrisponde all'autovalore ed è una quantità complessa, con una forma che si può scrivere come

$$s_k = -\gamma_k \omega_k \pm j \omega_k \sqrt{1 - \gamma_k^2} \quad (40)$$

L'espressione degli autovalori è più complicata perché nella parte immaginaria interviene la pulsazione smorzata ($\omega_D = \omega_k \sqrt{1 - \gamma_k^2}$) e nel termine reale interviene lo smorzamento.

⇒ in un colpo solo, si ottengono le informazioni su smorzamento e pulsazione.

Cosa succede invece alle forme modali?

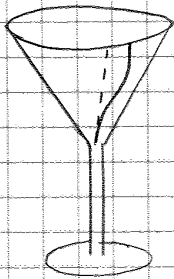
Se si risolve il problema agli autovalori, si trovano $2n$ autovettori (e dunque $2n$ forme modali) che sono a coppie complesse e coniugate: in altri termini, si trovano n autovettori e n autovettori simmetrici (i loro complessi coniugati), con la seguente forma.

$$\{\Phi_k'\} = \begin{Bmatrix} \{\Phi_k\} \\ \{\Phi_k\} s_k \end{Bmatrix} \quad \{\Phi_k'\}^* = \begin{Bmatrix} \{\Phi_k\}^* \\ \{\Phi_k\}^* s_k^* \end{Bmatrix} \quad (41)$$

Φ_k = autovettore ordinario

$\Phi_k s_k$ = autovettore in termini di velocità, dato dall'autovettore per l'autovalore.

La principale novità è che ora GLI AUTOVETTORI SONO NUMERI COMPLESSI.



Si può poi tracciare una linea sghemba dove, già in partenza, i punti hanno una differenza di fase.
 Questo sfasamento in partenza fa sì che il modo di vibrare appaia più complicato.
 Infatti, i modi di vibrare dei diversi punti della forma modale sono caratterizzati non solo da un modulo e da una fase 0 e π (positiva e negativa) ma anche da uno sfasamento generale.

Si può notare che, in un sistema la cui matrice di smorzamento è diagonalizzabile (ciò porta al disaccoppiamento delle equazioni del moto), la fase diventa 0 o π e la soluzione di oscillazioni libere è composta dalla sovrapposizione di armoniche smorzate, come si è già visto in precedenza.

$$u_i(t) = \sum_k \Phi'_{ik} C_k e^{-\beta_k \omega_k t} \cos(\omega_D(E)t - \varphi(k)) \quad (43)$$

Pertanto, l'equazione (42) costituisce la formulazione più generale per il problema dinamico.

Anche quando si opera nello spazio delle fasi, è possibile operare un **DISACCOUPLAMENTO MODALE**:

L'operazione è eseguita su un sistema di equazioni $2n \times 2n$ e ciò è consentito perché le matrici sono simmetriche.

Analogamente all'analisi modale con le equazioni del II ordine (v), si esegue la trasformazione

$$\{x\} = [\Phi'] \{w\} \quad (44)$$

$[\Phi']$ = matrice modale nello spazio delle fasi, di dimensioni $2n \times 2n$

$\{w\}$ = coordinate principali

Con questa trasformazione, le equazioni del moto sono disaccoppiate.

$$\text{diag}[a_1, \dots, a_k, \dots, a_{2n}] \{ \dot{w} \} + \text{diag}[b_1, \dots, b_k, \dots, b_{2n}] \{ w \} = [\Phi']^T \{ \{F(t)\} \{0\} \}^T \quad (45)$$

La singola equazione in forma canonica si scrive

$$\dot{w}_k - s_k w_k = \frac{1}{a_k} \{ \Phi'_k \}^T \{ \{F(t)\} \{0\} \}^T$$

La funzione $\{c(t)\}$ è invece una funzione incognita del tempo.

Si sostituisce dunque la soluzione (47) nell'equazione (46)

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{F(t)\} \quad (46)$$

$$\cancel{[A][e^{At}]\{c(t)\}} + [e^{At}]\{\dot{c}(t)\} = \cancel{[A][e^{At}]\{c(t)\}} + [B]\{F(t)\}$$

$$[e^{At}]\{\dot{c}(t)\} = [B]\{F(t)\}$$

$$\Rightarrow \{\dot{c}(t)\} = [e^{-At}][B]\{F(t)\}$$

La funzione $c(t)$ può essere ottenuta per semplice integrazione.

$$\{c(t)\} = \int_0^t [e^{-A}][B]\{F(\tau)\} d\tau + \{c(0)\}$$

La costante $c(0)$ si ottiene imponendo le condizioni iniziali sulla variabile x .

$$\{x(t)\} = [e^{At}]\{c(t)\} \quad (47)$$

$$\Rightarrow \{x(0)\} = \{x(t=0)\} = \{c(t=0)\} = \{c(0)\}$$

La funzione $c(t)$ così vale

$$\{c(t)\} = \int_0^t [e^{-A\tau}][B]\{F(\tau)\} d\tau + \{x(0)\}$$

Da qui si ricava la funzione $x(t)$.

$$\begin{aligned} \{x(t)\} &= [e^{At}]\{c(t)\} = \quad (47) \\ &= \int_0^t [e^{A(t-\tau)}][B]\{F(\tau)\} d\tau + [e^{At}]\{x(0)\} \end{aligned}$$

$$\{x(t)\} = \int_0^t [e^{A(t-\tau)}][B]\{F(\tau)\} d\tau + [e^{At}]\{x(0)\} \quad (49)$$

Questa espressione corrisponde all'integrale di Duhamel rispetto a un sistema a più gradi di libertà, cioè è la generalizzazione dell'integrale di Duhamel.

Sistemi a tempo discreto

Nell'analisi dei segnali, ^è si è introdotta l'analisi a tempo continuo ma si è poi visto che il tempo continuo non esiste e/o non può essere conosciuto, in quanto dalle misure si può ottenere solo un segnale discreto.
 Infatti, si lavora sempre con il discreto.

Per passare dalle formulazioni al continuo alle formulazioni di discreto, si considera l'integrale di Duhamel e lo si scrive in modo da trovare la relazione tra la soluzione x_{i+1} all'istante $i+1$ e la soluzione x_i all'istante precedente.
 Per semplicità, si cerca per ora di lavorare al continuo, scrivendo non x_i e x_{i+1} , bensì

$$x[i\Delta t] \quad \text{e} \quad x[(i+1)\Delta t]$$

In questo modo, x è ancora una variabile continua con Δt .

Scrivendo così, l'integrale di Duhamel assume ancora una formulazione al continuo.

$$\{x[(i+1)\Delta t]\} = \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} [e^{A((i+1)\Delta t - \tau)}][B]\{F(\tau)\}d\tau + [e^{A\Delta t}]\{x(i\Delta t)\} \quad (53)$$

↳ deriva da (49)

Per passare al discreto, si toglie Δt e si scrive direttamente $i+1$ e i .

In termini matematici, si esegue la sostituzione

$$B = (i+1)\Delta t - \tau$$

e l'integrale di Duhamel diventa così

$$\{x(i+1)\} = \int_0^{\Delta t} [e^{AB}][B]\{F(i)\}dB + [e^{A\Delta t}]\{x(i)\} \quad (54)$$

Per comodità, si impone

$$[A'] = [e^{A\Delta t}]$$

$$[B'] = \int_0^{\Delta t} [e^{AB}][B]dB$$

e si ottiene così

$$\{x(i+1)\} = [A']\{x(i)\} + [B']\{F(i)\}$$

2 Teoria della realizzazione

Se si identifica un sistema e si capisce come funziona, è possibile riuscire a prevederne il comportamento.

Nella pratica, la situazione è diversa:

nel controllo, non si ha mai una fiducia cieca nei modelli, poiché possono essere fallaci, ed è sempre opportuno eseguire un monitoraggio.

Pertanto, nella teoria del controllo, si tende a operare con 2 equazioni

→ equazione di controllo, corrispondente all'integrale di Duhamel.

$$\{x(i+1)\} = [A']\{x(i)\} + [B']\{F(i)\} \quad (55)$$

→ equazioni di misura, che sono aggiunte se c'è la possibilità di monitorare il sistema.

$$\{y(i)\} = [D]\{x(i)\} \quad (56)$$

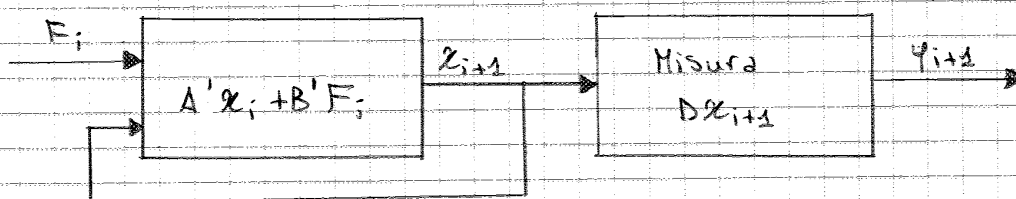
L'equazione distingue gli stati del sistema $x(i)$ da quanto è effettivamente misurato $y(i)$.

In genere, la dimensione di $y(i)$ è piccola perché il numero di sensori (in genere, 3 per tutto il sistema) è molto inferiore al numero di gradi di libertà e ciò si traduce in una matrice D rettangolare

$$[D] \in M_{p \times n}$$

p = numero di misure
 n = numero di stati (posizioni e velocità) per gli n gradi di libertà.

Questo sistema di equazioni può essere nuovamente rappresentato secondo uno schema a blocchi, dove la prima porzione corrisponde all'equazione di controllo e il secondo blocco corrisponde all'equazione di misura.



Passando all'istante $i = 3$, si ottiene

$$\begin{aligned} \{x(3)\} &= [A']\{x(2)\} = & (55) \\ &= [A'] \cdot [A'] [B'] \{\delta(0)\} = [A']^2 [B'] \{\delta(0)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{y(3)\} &= [D]\{x(3)\} = & (56) \\ &= [D][A']^2 [B'] \{\delta(0)\} \end{aligned}$$

La matrice di risposta è

$$[Y(3)] = [D][A']^2 [B']$$

Generalizzando, la risposta misurata all'istante i è

$$[Y(i)] = [D][A']^{i-1} [B'] \quad (57)$$

Così, calcolando questa matrice a ogni istante, si trova una sequenza di matrici detta catena di Markov ed è l'equivalente al discreto della funzione matriciale di RISPOSTA ALL'IMPULSO. In questo caso, anziché avere una matrice per ogni elemento, c'è una sequenza di matrici per ogni istante.

$$[m] \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{pmatrix} + [c] \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix} + [k] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = - [m] \begin{pmatrix} \ddot{u}_g(t) \\ \ddot{u}_g(t) \\ \ddot{u}_g(t) \end{pmatrix} \quad (54)$$

L'eccitazione $m\ddot{u}_g$ può anche essere scritta come

$$[m] \begin{pmatrix} \ddot{u}_g(t) \\ \ddot{u}_g(t) \\ \ddot{u}_g(t) \end{pmatrix} = [m] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ddot{u}_g(t)$$

Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ si dice VETTORE DI TRASCINAMENTO e, in questa caso, è costituita solo da valori unitari perché, in questo schema, il terremoto agisce alla stesso modo sulle diverse masse.

Una volta note le masse e le rigidezze, si imposta il PROBLEMA AGLI AUTOVALORI e, risolvendolo, si ottengono

→ matrice degli autovalori

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix}$$

corrispondono agli autovalori ω_1, ω_2 e ω_3 e i periodi propri T_1, T_2 e T_3 .

→ autovettori Φ_i , che sono le colonne della matrice modale.

$$\{\Phi_1\} = \begin{pmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{pmatrix} \quad \{\Phi_2\} = \begin{pmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{pmatrix} \quad \{\Phi_3\} = \begin{pmatrix} \Phi_{13} \\ \Phi_{23} \\ \Phi_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{bmatrix}$$

Novamente, al secondo membro, si può esplicitare il vettore di trascinamento $\{t\}$.

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_g(t) \\ \ddot{u}_g(t) \\ \ddot{u}_g(t) \end{pmatrix} =$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ddot{u}_g(t) = [U]^T [m] t + \ddot{u}_g(t)$$

In questo modo, si sono disaccoppiate le equazioni (poiché le matrici che moltiplicano le incognite sono diagonali) e si ottengono le equazioni per ogni modo di vibrare.

$$\ddot{p}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{p}_k + \omega_k^2 p_k = -\Gamma_k \ddot{u}_g(t) \quad k = 1; 2; 3$$

Equazioni dinamiche dei modi di vibrare (63).

Il termine Γ_k si dice fattore di partecipazione modale ed indica quanto sia importante la partecipazione di un modo di vibrare nel moto complessivo (è un valore relativo che dà un peso).
Esso nasce come un vettore prodotto tra matrice modale, matrice delle masse e vettore di trascinamento.

$$\{\Gamma\} = [U]^T [m] \{t\} \quad (64)$$

e, in questo caso (vettore di trascinamento con elementi unitari), la singola componente vale

$$\Gamma_k = \sum_i U_{ik} m_i = \sum_i \gamma_{ik} \quad (65)$$

Γ_k = fattore di partecipazione del modo k di vibrare (l'indice k denota le coordinate modali; l'indice i denota le coordinate geometriche).

U_{ik} = elemento della matrice degli autovettori normalizzati relativo al piano i e al modo di vibrare k .
La somma è estesa a tutti i piani.