



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 2053A -

ANNO: 2016

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Carabellese Davide

MATERIA: Gasdinamica - Prof. Iuso

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

---

# Appunti di Gasdinamica

Prof: *Gaetano Iuso*  
Studente: *Davide Carabellese*

*INDICE*

---

5.2.1	Conservazione della massa in forma differenziale . . . . .	25
5.2.2	Conservazione della q.d.m. in forma differenziale . . . . .	27
5.2.3	Conservazione dell' energia in forma differenziale . . . . .	29
5.3	Entalpia totale e costanti aerodinamiche . . . . .	30
5.3.1	Legame tra $M$ ed $M^*$ . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Sesta Lezione</b>	<b>35</b>
6.1	Teorema di Crocco . . . . .	35
6.2	Velocità potenziale . . . . .	37
6.2.1	Equazione di Eulero . . . . .	37
6.2.2	Velocità potenziale $\phi$ . . . . .	38
6.3	Flussi monodimensionali 1D . . . . .	40
<b>7</b>	<b>Settima Lezione</b>	<b>45</b>
7.1	Piccole perturbazioni . . . . .	45
7.2	Grandi perturbazioni . . . . .	46
7.3	Urti retti . . . . .	48
7.3.1	Relazioni tra grandezze prima e dopo l' urto . . . . .	52
7.3.2	Salto di entropia . . . . .	54
<b>8</b>	<b>Ottava Lezione</b>	<b>55</b>
8.1	Flusso di Rayleigh . . . . .	55
<b>9</b>	<b>Nona Lezione</b>	<b>61</b>
9.1	Flusso di Fanno . . . . .	61
<b>10</b>	<b>Decima Lezione</b>	<b>69</b>
10.1	Urti Obliqui . . . . .	69
10.2	Urti curvi e staccati . . . . .	75
<b>11</b>	<b>Undicesima Lezione</b>	<b>77</b>
11.1	Riflessione Regolare . . . . .	78
11.2	Interazione tra urti . . . . .	79
11.3	Riflessione di Mach . . . . .	81
11.4	Onde semplici di compressione . . . . .	81
<b>12</b>	<b>Dodicesima Lezione</b>	<b>83</b>
12.1	Espansione supersonica . . . . .	83
<b>13</b>	<b>Tredicesima Lezione</b>	<b>89</b>
13.1	Linee Caratteristiche . . . . .	89

# Capitolo 1

## Prima Lezione

30/09/15

### 1.1 Tipologia esame

Durata: 2h

- Teoria:
  - 20 Domande "semplici" 10pti;
  - 3 Domande "approfondimento" 10pti.
- Esercizi
  - 2 Esercizi 10pti;
  - Esercitazioni in aula valutate.

NON SI RIFIUTA IL VOTO

### 1.2 Cenni preliminari sulle proprietà dei gas

Struttura di un gas

Entalpia Totale per unità di massa:

### 1.3. VELOCITÀ DI AGITAZIONE TERMICA

---

Fluido Continuo:

- in queste condizioni tutte le caratteristiche si possono descrivere con continuità.

Numero di Knudsen  $K_N = \frac{l}{L}$

- per  $K_N \ll 0.01$  il flusso viene considerato continuo;
- per  $0.01 < K_N < 0.1$  il flusso viene detto leggermente rarefatto (slip flow regime);
- per  $0.1 < K_N < 10$  il flusso viene detto moderatamente rarefatto (transition regime);
- per  $K_N > 10$  il flusso viene detto altamente rarefatto (free molecular flow regime).

Dipende dalle condizioni di volo ( $\rho_{ARIA}$ ). In caso di volo in altissima quota (gas rarefatti quindi  $l$  grandi) per esempio in caso di rientro in atmosfera, o nel campo delle nano tecnologie ( $L$  piccoli) ci troviamo in situazioni di flusso rarefatto.

- $l$  (in caso di aria in condizioni standard) =  $6.35 \cdot 10^{-5}$ ;
- in un cubetto di lato  $l$  sono presenti circa 7000 molecole;
- la velocità delle singole molecole nel cubetto =  $\bar{v} \simeq v$  singole molecole  $\rightarrow$  Mondo Macroscopico.

## 1.3 Velocità di agitazione termica

Velocità istantanea =  $v = \bar{v} + v'$

Con  $\bar{v}$  velocità media delle particelle e  $v'$  velocità di agitazione termica, dovuta alle vibrazioni.

- In condizione di gas in quiete:  $\bar{v} = 0; v' \neq 0$
- In condizione di gas in movimento:  $\bar{v} \neq 0; v' \neq 0$

$$v = \begin{cases} \bar{u} + u' \\ \bar{v} + v' \\ \bar{w} + w' \end{cases}$$

# Capitolo 2

## Seconda Lezione

1/10/15

### 2.1 Meccanismi di collisione molecolare

#### 2.1.1 Conclusioni sulla velocità di agitazione termica

Come visto nella Lezione 1  $\varepsilon_t = \frac{1}{2}m(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}) = \frac{1}{2}m v_{at}^2$ . Per il principio di equipartizione dell'energia  $\overline{u'u'} = \overline{v'v'} = \overline{w'w'}$  ed il singolo contributo vale  $\frac{K_B T}{m}$ , (con  $m$  = massa molecolare) , quindi  $\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'} = 3\frac{K_B T}{m}$ .

Riscrivendo  $\varepsilon_t$ :

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2} m \left( \frac{3K_B T}{m} \right) = \frac{3}{2} K_B T = \frac{1}{2} m (V_{at})^2 \quad (2.1)$$

Da qui ricaviamo il legame tra la velocità di agitazione termica e le grandezze termodinamiche.

1.  $V_{at} = \sqrt{\frac{3K_B T}{m}} \propto \sqrt{T}$
2. moltiplicando e dividendo per  $N_A \rightarrow V_{at} = \sqrt{\frac{3K_B T N_A}{m N_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>essendo  $R = N_A \cdot K_B$  la costante universale dei gas ed  $M$  la massa Molare

## 2.2. GRADI DI LIBERTÀ ENERGETICI

## 2.2 Gradi di libertà energetici

Metodi per incamerare energia:

- Traslazionale
  - Gradi di Libertá  $L_t = 3$   
qualunque sia la complessità molecolare;
- Rotazionale;
  - Gradi di Libertá  $L_r = 0$   
per molecole *monoatomiche*,
  - Gradi di Libertá  $L_r = 2$   
per molecole *biatomiche*  $n = 2$  o *triatomiche allineate*  $n = 3$  (*allineate*),
  - Gradi di Libertá  $L_r = 3$   
per molecole *triatomiche non allineate*  $n = 3$  (*non allineate*) e *poliatomiche*;
- Vibrazionale (per temperature elevate);
- Elettronici (per temperature ancora piú elevate).

Per temperature  $\approx T_{amb} \rightarrow L = L_t + L_r$  quindi  $3 < L < 6$ .

Aumentando la temperatura entrano in gioco gli effetti vibrazionali, quindi:

$$L = L_t + L_r + L_v = 3n \quad (2.2)$$

$$L_v = 3n - L_t - L_r \quad (2.3)$$

Per ogni grado di libertà  $L_v$  bisogna associare 2 metodi di accumulo di energia:

- 1) energia elastica =  $\frac{1}{2}ks^2$
- 2) energia cinetica =  $\frac{1}{2}m\dot{s}^2$

Sfruttando questa considerazione con la 2.2 otteniamo:

$$L = L_t + L_r + \underline{2L_v} = \quad (2.4)$$

$$= L_t + L_r + 2(3n - L_t - L_r) = \quad (2.5)$$

$$= 6n - L_t - L_r \quad (2.6)$$

Per l'aria, in condizioni standard  $L=5$  (composizione chimica prevalentemente  $N_2$  e  $O_2$ )

$\varepsilon_t = \frac{1}{2}k_B T \rightarrow$  per traslazioni in una singola direzione

$\downarrow$

$\varepsilon = \frac{L}{2}K_B T \rightarrow$  energia associata ad ogni grado di libertà della molecola.

# Capitolo 3

## Terza Lezione

02/10/15

### 3.1 Compressibilità dei fluidi

Proprietà legata al  $N^o$  di Mach:

$$M = \frac{v}{a} \quad (3.1)$$

con  $a$  = velocità del suono:

$$a = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} \quad (3.2)$$

La compressibilità rappresenta la capacità di variare il proprio volume se sottoposto a sforzi di pressione. Gli effetti della compressibilità si iniziano a sentire per  $M \geq 0.4$

$$\pm \partial P \rightarrow \mp \partial V$$

la differenza di segno sta nel fatto che ad una variazione positiva di pressione (aumento di pressione) corrisponde una variazione negativa di volume (diminuzione di volume).

$$\beta = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \quad (3.3)$$

### 3.2. PROPRIETÁ DI TRASPORTO

---

Trovando quindi il legame cercato tra densitá e velocitá (numero di Mach), riscrivendo la (3.9):

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = -M^2 \frac{\partial v}{v} \tag{3.10}$$

. Come detto nel 3.1, gli effetti della compressibilitá si hanno a partire da  $M \geq 0.4$  infatti, in una situazione in cui la velocitá raddoppi( $\partial v/v$ ):

$M \approx 0.1$	$M^2 = 0.01$	$\frac{\Delta \rho}{\rho} \approx 1\%$
$M \approx 0.3$	$M^2 = 0.09$	$\frac{\Delta \rho}{\rho} \approx 9\%$
$M \approx 0.4$	$M^2 = 0.16$	$\frac{\Delta \rho}{\rho} \approx 16\%$
$M = 1$	$M^2 = 1$	$\frac{\Delta \rho}{\rho} \approx 100\%$

Velocitá ovviamente raggiungibili anche localmente, con regime a monte subsonico, ed aumento di velocitá lungo il profilo (regime transonico).

## 3.2 Proprietá di Trasporto

- Massa                     $m \rightarrow$  flusso di massa     $\rightarrow$  diffusione di massa
- Quantitá di moto     $mv' \rightarrow$  flusso di q.d.m.    $\rightarrow$  sforzi viscosi
- Energia                 $e \rightarrow$  flusso di energia    $\rightarrow$  flusso di calore

Per flusso si intende la quantitá di una data grandezza che attraversa una superficie nell' unitá di tempo.

$D :$	<i>coefficiente di diffusione</i>
$\mu :$	<i>viscositá dinamica</i>
$\lambda :$	<i>conducibilitá termica</i>

### 3.2. PROPRIETÁ DI TRASPORTO

Adesso troviamo la relazione che lega gli sforzi al gradiente di velocità. Dato:

$$\partial \bar{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot \partial y \quad \text{con } \partial y \approx l \quad (3.13)$$

Sostituisco le relazioni (3.13) nella seconda delle (3.12) ed ottengo:

$$\overline{\rho u'v'} = -m \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} l \right) n v_{at} = -\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} l \right) v_{at} = -\rho l v_{at} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.14)$$

$$\tau_{xy} = \overline{\rho u'v'} = -\rho l v_{at} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.15)$$

Dove:

$$\rho v_{at} l \approx \underbrace{\mu}_{\text{Maxwell}} = 1/3 \rho v_{at} l$$

Quindi  $\tau_{ij}$  esiste solamente in presenza di un gradiente di velocità. Gli effetti della viscosità sono più vistosi nello strato limite, dove la parete impone la condizione di aderenza ed il gradiente è tanto più elevato quanto più elevata è la velocità di volo. Quindi:

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \text{Legge di Newton} \quad (3.16)$$

$$\int \tau = D_f \quad (\text{Drag friction}) \quad (3.17)$$

$$\int P \partial s = D_p \quad (\text{Drag pressure}) \quad (3.18)$$

I fluidi che seguono la legge (3.16) vengono detti Newtoniani, per i fluidi non Newtoniani la viscosità segue la legge:

$$\mu = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.19)$$

e dipende anche dalle deformazioni.

#### 3.2.2 Flusso di calore

$$q_n = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right) \quad (\text{Legge di Fourier}) \quad (3.20)$$

### 3.2. PROPRIETÁ DI TRASPORTO

---

Se  $Pr \approx 1 \rightarrow \nu \propto \kappa \rightarrow$  diffusione q.d.m.  $\propto$  diffusione energetica

Per i gas  $Pr < 1$ , per l'aria  $Pr = 0.71$  quindi  $\delta$  cinematico  $<$   $\delta$  termico, gli strati limiti hanno spessori diversi.

Per la relazione di Eucken:

$$Pr = \frac{2L + 4}{2L + 9} = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5} \quad (3.26)$$

#### 3.2.3 Diffusione della massa

La diffusione di una specie chimica in un'altra viene regolata dalla Legge di Fick:

$$J_x = -D \frac{\partial S}{\partial x}; \quad J_y = -D \frac{\partial S}{\partial y}; \quad J_z = -D \frac{\partial S}{\partial z} \quad (3.27)$$

La legge (3.27) é valida anche per 2 fluidi con concentrazioni diverse, permettendo il passaggio di materia da zone ad alta densità a zone a bassa densità.

# Capitolo 4

## Quarta Lezione

### 4.1 Richiami di Termodinamica

08/10/15

Data l'energia interna per unità di massa:

$$e = c_v T \quad (4.1)$$

$$de = c_v \partial T \quad (4.2)$$

Introduciamo il I e II Principio della termodinamica:

- I Principio:

$$de = \partial q + \partial W = \partial q - p \partial V \quad (4.3)$$

Che lega le variazioni di calore e lavoro alla variazione di energia interna, e dove il differenziale esatto su  $e$  è dovuto al fatto che si tratta di una variabile di stato quindi dipende dallo stato iniziale e da quello finale, mentre su  $q$  e  $L$  si tratta di una quantità infinitesima che dipende da come avviene il processo.

- II Principio:

$$ds = \frac{\partial q}{T} + ds_{IRR} \quad (4.4)$$

la quale si riferisce ad una generica trasformazione irreversibile, che nel caso reversibile  $ds_{IRR} = 0$  diventa:

$$ds = \frac{\partial q}{T} \quad (4.5)$$

ed ancora, nel caso adiabatico ( $\partial q = 0$ ) porta ad avere  $ds = 0$ , ovvero ad entropia costante  $\rightarrow$  isentropico.

#### 4.1. RICHIAMI DI TERMODINAMICA

- A) Arresto isentropico:  
avviene solamente in un punto, nel quale lo strato limite é molto sottile e comunque gli effetti della viscosità sono irrilevanti per quanto riguarda l'arresto della corrente. In questo punto:

$$V_A = 0 \rightarrow T_A = T_0 = T_{Serb} \text{ e } P_A = P_0 = P_{Serb}$$

- B) Arresto non isentropico:  
la corrente avvolge il corpo e si arresta, per la condizione di aderenza, a causa degli sforzi di attrito. Anche qui:

$$V_B = 0 \text{ ma } T_B \neq T_0 \text{ e } P_B \neq P_0$$

poiché non si tratta di un arresto isentropico dal momento che vi é stata dissipazione di energia cinetica.

Quando in flusso conserva la sua entalpia in tutto il campo (uguale in ogni punto del tubo di flusso) si dice omoentalpico. Allo stesso modo se mantiene costante la sua entropia si dice omoentropico.

Relazioni in caso isentropico da uno stato 1 ( $P_1, T_1, \rho_1, V_1$ ) ad uno stato 2 ( $P_2, T_2, \rho_2, V_2$ ).

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \rightarrow \left(\frac{P_0}{P}\right) = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma \rightarrow \frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cost} \quad (4.10)$$

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rightarrow \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (4.11)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{s=\text{cost.}} = \text{cost} \gamma \rho^{\gamma-1} = \text{cost} \gamma \frac{\rho^\gamma}{\rho} \quad (4.12)$$

moltiplicando e dividendo l'ultima per  $P$ , e considerando la (4.10):

$$\text{cost} \frac{\rho^\gamma}{P} \gamma \frac{P}{\rho} = \gamma \frac{P}{\rho} = a^2 \quad (4.13)$$

come già visto in (3.8), con  $a$ :

$$a = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T}$$

## 4.2. LEGGI DI CONSERVAZIONE (BILANCIO)

---

Scrittura equazioni

Volume di controllo finito → eq. scritte in forma integrale

Volume di controllo infinitesimo → eq. scritte in forma differenziale

Tipologia di formulazione:

- Euleriana:  
Equazioni scritte considerando un volume di controllo di forma qualsiasi, fissato nello spazio, circondato da una superficie  $S$ ;
- Lagrangiana:  
Equazioni scritte muovendosi con il volume di controllo. Viene qui introdotta la derivata sostanziale :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla^1 (\dots) \quad (4.14)$$

LAGRANGE STA SULLA BARCA, EULERO SUL PONTE.

Utilizziamo ora questi metodi per scrivere le Leggi di conservazione di:

Massa                      Q.d.m.                      Energia

### 4.2.1 Conservazione della massa

$$\text{massa} = \int_V \rho dV$$

Time rate of change:  $\frac{\partial}{\partial t} m = \Sigma \text{flussi}$  (entranti/uscenti).

Flusso di massa:

$$\begin{aligned} & \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \\ & = - \int_S \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \end{aligned}$$

ovviamente positivo se uscente, negativo entrante. Per le leggi di conservazione, quanto detto si può scrivere come:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (4.15)$$

---

<sup>1</sup>Dove  $\nabla$  indica il gradiente della funzione tra parentesi.

# Capitolo 5

## Quinta Lezione

09/10/15

### 5.1 Conservazione dell'energia

Indispensabile per i flussi incompressibili. Come per la massa e la quantità di moto dobbiamo arrivare all'uguaglianza tra i flussi e tutte le grandezze che concorrono alla variazione di energia, ed il Time rate of change dell'energia stessa:

$$\Sigma \text{Flussi} + \text{Calore} + \text{Lavori} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \text{Energia}$$

Anche qui ci rifacciamo a quanto scritto nel paragrafo 4.2 ed otteniamo:

$$\Sigma \text{Flussi} = - \int_S \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad \left[ \frac{J}{s} \right] = [W] \quad (5.1)$$

dove il segno meno deriva dalle stesse considerazioni fatte per la massa e la q.d.m. Mentre il Time rate of change in questo caso vale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV \quad (5.2)$$

Consideriamo il Calore che viene fornito da 2 contributi distinti:

---

## 5.2. DA EQUAZIONI INTEGRALI AD EQUAZIONI DIFFERENZIALI

---

### 5.2 Da equazioni integrali ad equazioni differenziali

Ora ci proponiamo di passare dalle equazioni di conservazione scritte in precedenza in forma integrale (con un volume finito) a delle equazioni scritte in forma differenziale (volume infinitesimo). Per fare questo bisogna passare da

$$\int_S \rightarrow \int_V$$

attraverso il teorema della divergenza, che permette di passare dal flusso di un vettore  $\vec{A}$  attraverso una superficie S ad un integrale di volume della divergenza dello stesso vettore:

$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

oppure dal flusso di uno scalare  $\phi$  attraverso una superficie all' integrale nel volume racchiuso dalla superficie del gradiente dello stesso scalare:

$$\int_S \phi \vec{n} dS = \int_V (\nabla \phi) dV$$

$$\nabla \phi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

Adesso applichiamo questo strumento per trasformare le equazioni di conservazione di massa, quantità di moto ed energia.

#### 5.2.1 Conservazione della massa in forma differenziale

Come detto in precedenza dobbiamo passare dagli integrali di superficie ad integrali di volume. Nell' equazione della conservazione della massa (4.15) trasformiamo il secondo integrale in un integrale sul volume V:

$$\int_S \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \rightarrow \int_V \nabla(\rho \vec{v}) dV$$

otteniamo quindi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_V \nabla(\rho \vec{v}) dV = 0 \quad (5.7)$$

5.2. DA EQUAZIONI INTEGRALI AD EQUAZIONI DIFFERENZIALI

5.2.2 Conservazione della q.d.m. in forma differenziale

Per la scrittura in forma differenziale dell'equazione della conservazione della q.d.m. procediamo come prima, trasformando in integrali di volume gli integrali di superficie presenti, portando tutto sotto lo stesso integrale (anche la derivata temporale essendo il volume sempre lo stesso nel tempo) e ponendo uguale a zero la funzione integranda. Iniziamo dalla (4.18) che riscrivo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV = - \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \int_S (P \vec{n}) dS + \int_V \rho \vec{f} dV \quad (4.18)$$

e notiamo che il primo e secondo termine a secondo membro sono integrali di superficie e li andremo a trasformare. Il secondo termine si trasforma immediatamente:

$$\int_S (P \vec{n}) dS = \int_V \nabla P dV \quad (5.14)$$

Mentre per il primo termine dobbiamo procedere prima proiettando il prodotto  $(\vec{v} \cdot \vec{n})$  sulle direzioni  $x, y, z$  di  $v$  ed infine trasformare in integrale di volume:

– Direzione  $x$ )

$$\rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \quad \rightarrow \quad \rho u (\vec{v} \cdot \vec{n})$$

quindi possiamo scrivere per la direzione  $x$ , applicando la divergenza:

$$\int_S \rho u (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \nabla \cdot (\rho u \vec{v}) dV \quad (5.15)$$

Sostituendo ora (5.14) ed (5.15) nella (4.18) ed effettuati gli opportuni passaggi, ponendo la funzione integranda = 0 e considerando che:

$$\nabla \cdot (\rho u \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u w) \quad (5.16)$$

abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \vec{v}) + \frac{\partial P}{\partial x} - \rho f_x = 0 \quad (5.17)$$

avendo utilizzato per la (5.14) solamente la derivata relativa alla direzione  $x$ . Facendo le stesse considerazioni per la direzione  $y$  e  $z$  otteniamo:

– Direzione  $y$ )

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \vec{v}) + \frac{\partial P}{\partial y} - \rho f_y = 0 \quad (5.18)$$

– Direzione  $z$ )

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \nabla \cdot (\rho w \vec{v}) + \frac{\partial P}{\partial z} - \rho f_z = 0 \quad (5.19)$$

Queste tre equazioni rappresentano le equazioni euleriane della conservazione della q.d.m. scritte in forma differenziale nelle tre direzioni  $x, y$  e  $z$ .

5.2. DA EQUAZIONI INTEGRALI AD EQUAZIONI DIFFERENZIALI

5.2.3 Conservazione dell' energia in forma differenziale

Anche in questo caso operiamo come fatto in precedenza. Riscriviamo l' equazione in forma integrale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV &= - \int_S \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \int_V \dot{q} \rho dV \\ &- \int_S P (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \int_V \rho (\vec{f} \cdot \vec{v}) dV + W_{Viscosi} + W_{Attrito} \end{aligned} \quad (5.6)$$

ed anche in questo caso dobbiamo trasformare gli integrali dovuti alla somma dei flussi attraverso la superficie e ai contributi delle forze di pressione sulla superficie del volume di controllo in integrali di volume. Per il primo contributo si procede come fatto per la q.d.m. andando a proiettare prima lungo le 3 direzioni e poi trasformando l' integrale (saltiamo per semplicità i passaggi, scrivendo direttamente la forma compatta):

$$\int_S \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right] dV \quad (5.27)$$

mentre il secondo si trasforma con semplicità applicando il teorema della divergenza:

$$\int_S P (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \nabla \cdot (P \vec{v}) dV \quad (5.28)$$

Come abbiamo già fatto 2 volte, dopo aver sostituito (5.27) ed (5.28) in (5.6), si procede portando tutto nello stesso integrale e ponendo uguale a zero la funzione integranda ottenendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right] = -\nabla \cdot (P \vec{v}) + \rho \dot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v}) \quad (5.29)$$

che rappresenta l'equazione euleriana della conservazione dell' energia scritta in forma differenziale.

**Forma Lagrangiana** Anche qui (evitando la lunga dimostrazione con annesse formule) si può passare alla seguente forma lagrangiana :

$$\rho \frac{D \left( e + \frac{v^2}{2} \right)}{Dt} = -\nabla \cdot (P \vec{v}) + \rho \dot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v}) \quad (5.30)$$

dove a primo membro  $\rho$  si trova fuori dal simbolo di derivata sostanziale, ma per i flussi compressibili dipende da  $t, x, y$  e  $z$ .

### 5.3. ENTALPIA TOTALE E COSTANTI AERODINAMICHE

a)

$$\begin{aligned}
 h + \frac{v^2}{2} &= cost \\
 C_P T + \frac{v^2}{2} &= cost = C_P T_0
 \end{aligned}
 \tag{5.37}$$

b) Moltiplicando e dividendo per  $\gamma R/M$  il primo termine a primo membro ed il secondo membro della (5.37):

$$C_P T \frac{\gamma R/M}{\gamma R/M} + \frac{v^2}{2} = C_P T_0 \frac{\gamma R/M}{\gamma R/M}
 \tag{5.38}$$

Dati:

$$C_P = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M} \rightarrow \frac{C_P}{\gamma R/M} = \frac{1}{\gamma - 1} \qquad a^2 = \gamma \frac{R}{M} T$$

abbiamo:

$$\left[ \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{v^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1} \right]^{H=cost} \qquad \text{dove } a_0 = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T_0}
 \tag{5.39}$$

c) Velocità limite  $\rightarrow$  se  $T \rightarrow 0K$  ;  $V \rightarrow V_{lim}$   
 la (5.39) diventa:

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{v^2}{2} = \frac{v_{lim}^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1}
 \tag{5.40}$$

dal momento che se  $T \rightarrow 0$  la velocità del suono tende anche a 0 (non la  $a_0$  che si riferisce alla temperatura totale). Con  $v \rightarrow v_{lim}$   $a \rightarrow 0$   $M \simeq \infty$

d) Condizioni critiche (localmente  $M = 1$ )

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{v^2}{2} = \frac{a^{*2}}{\gamma - 1} + \frac{a^{*2}}{2} = \frac{a^{*2}}{2} \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)
 \tag{5.41}$$

In conclusione, unendo le (5.37), (5.39), (5.40) e (5.41), abbiamo:

$$H = h + \frac{v^2}{2} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{v^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{v_{lim}^2}{2} = \frac{a^{*2}}{2} \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) = cost
 \tag{5.42}$$

Adesso con (5.42) possiamo ricavare delle costanti (che per l'aria con  $\gamma = 1.4$  hanno un valore definito):

$$\frac{V_{lim}}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} = 2.236 \qquad \frac{V_{lim}}{a^*} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} = 2.449 \qquad \frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} = \sqrt{\frac{T^*}{T_0}} = 0.913
 \tag{5.43}$$

### 5.3. ENTALPIA TOTALE E COSTANTI AERODINAMICHE

---

Le (5.48), (5.50) e (5.51) per l'aria valgono rispettivamente:

$$\begin{aligned}\left(\frac{T^*}{T_0}\right) &= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right) = 0.833 \\ \left(\frac{P^*}{P_0}\right) &= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.528 \\ \left(\frac{\rho^*}{\rho_0}\right) &= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0.634\end{aligned}$$

Riepilogando:  $a^*$  si riferisce alla velocità del suono in condizioni critiche ( $M = 1$ ),  $T^*$ ,  $P^*$  e  $\rho^*$  si riferiscono alla temperatura, pressione e densità in condizioni critiche mentre  $M^*$  si riferisce al numero di mach ottenuto dalla (5.44) ma non è da confondere con il mach critico. Come già detto in precedenza, con  $M \rightarrow \infty$ ,  $M^* \simeq \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$ .  $T^*$  si ottiene ponendo  $M = 1$  nella (5.49)

CAPITOLO 6. SESTA LEZIONE

---

ora esplicitiamo il termine  $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ :

$$T\nabla s = \nabla h + \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) \quad (6.4)$$

adessi ricordando che:

$$H = h + \frac{v^2}{2} \rightarrow h = H - \frac{v^2}{2} \rightarrow \nabla h = \nabla H - \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right)$$

allora:

$$T\nabla s = \left[ \nabla H - \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] + \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right] \quad (6.5)$$

A questo punto, ricordando l'identità vettoriale (*Grassman Identity*):

$$-(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) = \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) \quad (6.6)$$

otteniamo, sostituendo:

$$T\nabla s = \nabla H - \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (6.7)$$

che rappresenta l'equazione del **Teorema di Crocco**. Cerchiamo ora di dare un significato al risultato ottenuto. Distinguiamo tre casi:

A) Flusso stazionario  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$   
 la (6.7) diventa:

$$T\nabla s = \nabla H - \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) \quad (6.8)$$

dalla (6.8) possiamo fare due osservazioni:

- Osservazione cinematica:  
 se il campo é irrotazionale ( $\nabla \wedge \vec{v} = 0$ )  
 possiamo trovare un legame tra il gradiente di entropia ed il gradiente di entalpia:

$$T\nabla s = \nabla H \quad (6.9)$$

- Osservazione termodinamica:

$$\text{se } \nabla H \neq 0 \text{ e } \nabla s \neq 0 \text{ allora } \nabla \wedge \vec{v} \neq 0$$

ovvero se i gradienti sono diversi da zero, il campo é rotazionale (a meno del caso in cui  $T\nabla s$  sia proprio uguale a  $\nabla H$ ;

CAPITOLO 6. SESTA LEZIONE

nuovamente nella (6.11) ricordiamo l' altra assunzione di irrotazionalità che abbiamo fatto ed otteniamo infine:

$$\rho \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\nabla P \tag{6.12}$$

ed ora passiamo da  $\nabla \rightarrow d$  ovvero da grandezze finite a grandezze infinitesime:

$$\rho d \left( \frac{v^2}{2} \right) = -dP \quad \rightarrow \quad dP = -\rho(vdv) \tag{6.13}$$

che rappresenta l'equazione di **Eulero** la quale ci dice che, se abbiamo una diminuzione di velocità del flusso ( $dv < 0$ ) allora P deve necessariamente aumentare. Integrando e considerando  $\rho$  costante otteniamo l' equazione di **Bernoulli**:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = cost = P_0 \tag{6.14}$$

### 6.2.2 Velocità potenziale $\phi$

Iniziamo col ricordare che, considerando un vettore  $\vec{A}$ , se risulta  $\nabla \wedge \vec{A} = 0$  allora possiamo scrivere il vettore  $\vec{A} = \nabla f$  con f scalare (il gradiente di uno scalare é un vettore), detto funzione potenziale. Allo stesso modo per  $\vec{v}$ , se irrotazionale, abbiamo che:

$$\vec{v} = \nabla \phi \tag{6.15}$$

con  $\phi$  (scalare) = velocità potenziale e con:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \tag{6.16}$$

$$\vec{v} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \tag{6.17}$$

Dall'uguaglianza tra le (6.16) e (6.17) otteniamo:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_y \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \phi_z \tag{6.18}$$

Adesso vogliamo trovare un'espressione che dipenda esclusivamente da  $\phi$ :

1) Utilizziamo l' equazione di continuità:

$$\nabla(\rho \vec{v}) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \rho \phi_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho \phi_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho \phi_z = 0 \tag{6.19}$$

utilizzando  $\phi_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$  possiamo riscrivere la (6.19) come:

$$\rho (\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}) + \phi_x \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \phi_y \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \phi_z \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = 0 \tag{6.20}$$

CAPITOLO 6. SESTA LEZIONE

6) Ora si può sostituire  $a^2$  per avere una  $f(\phi)$  che non dipenda da altro. Utilizziamo la (5.39) in modo che si ottenga un'equazione che dipenda solo da  $\phi$ , dal momento che  $a_0$  è costante:

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{v^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1} \tag{5.39}$$

quindi:

$$\begin{aligned} a^2 &= a_0^2 - \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) v^2 = a_0^2 - \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) (u^2 + v^2 + w^2) = \\ &= a_0^2 - \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) \end{aligned} \tag{6.27}$$

effettuata tale sostituzione si ottiene una  $\phi = \phi(x, y, z)$  risolvibile con le condizioni al contorno.

Questa è valida per flussi compressibili ed incompressibili ed in campo:

- Basso subsonico (Incompressibile)  
in tal caso,  $a$  può raggiungere valori molto alti quindi tutti i termini che contengono  $a^2$  al denominatore sono trascurabili e si ottiene l'equazione di **Laplace**:

$$\nabla^2 \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \tag{6.28}$$

- Alto subsonico (Compressibile)
- Transonico
- Supersonico
- Ipersonico

### 6.3 Flussi monodimensionali 1D

Iniziamo con queste assunzioni:

- I Considero solamente  $f(x)$ ;
- II  $\vec{v} = u; \vec{i} \quad v = 0; \quad w = 0;$
- III  $u = u(x); \quad P = P(x); \quad \rho = \rho(x); \quad T = T(x)$
- IV Flusso costante su ogni sezione trasversale alla direzione  $x$ .

CAPITOLO 6. SESTA LEZIONE

che per le assunzioni da noi fatte si riduce a:

$$\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S (P \vec{n}) dS \quad (6.31)$$

Il contributo dato dal secondo membro diventa nel caso specifico:

$$- \int_S (P \vec{n}) dS = - \int_{A_1} - \int_{A_2} = - [-P_1 A_1] - [+P_2 A_2] = P_1 A_1 - P_2 A_2 \quad (6.32)$$

dove il segno - davanti alle parentesi quadre si riferisce al fatto che in entrambe le sezioni  $A_1$  ed  $A_2$  abbiamo le forze di pressione  $F_P$  discordi con il versore  $\vec{n}$ , mentre il segno all'interno delle quadre si riferisce al verso di  $x$ .

Il primo membro invece si trasforma:

$$\begin{aligned} \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS &= \int_S \rho u (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \\ &= \rho_1 u_1 (-u_1) A_1 + \rho_2 u_2 (u_2) A_2 \end{aligned} \quad (6.33)$$

Tornando ad eguagliare ora (6.33) e (6.32), con  $A = cost$  otteniamo:

$$-\rho_1 u_1^2 A_1 + \rho_2 u_2^2 A_2 = P_1 A_1 - P_2 A_2$$

ovvero:

$$P + \rho u^2 = cost \quad (6.34)$$

**Energia** Partendo dall'equazione di conservazione dell' energia e considerando le assunzioni fatte in precedenza, riscriviamo direttamente la (5.6) che nel nostro caso diventa:

$$\int_S \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S P (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \int_V \dot{q} \rho dV \quad (6.35)$$

Il primo membro lo trasformiamo in:

$$\int_{A_1} + \int_{A_2} = \rho_1 \left( e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) (-u_1) A_1 + \rho_2 \left( e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) (u_2) A_2 \quad (6.36)$$

il primo termine a secondo membro, facendo le stesse considerazioni per i segni fatte per la q.d.m., diventa:

$$- \int_S P (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_{A_1} - \int_{A_2} = P_1 A_1 u_1 - P_2 A_2 u_2 \quad (6.37)$$

# Capitolo 7

## Settima Lezione

16/10/15

### 7.1 Piccole perturbazioni

- 1) Piccole perturbazioni;
- 2) Grandi perturbazioni.

Entrambe le tipologie di perturbazione derivano da effetti di pressione. Un esempio di piccole perturbazioni (perturbazioni di piccola entità), sono quelle sonore.

Le perturbazioni si propagano in onde sferiche, tutte concentriche se  $V_{sorgente} \simeq 0$ . Le condizioni prima e dopo il passaggio dell'onda tornano le stesse quindi, se il processo è adiabatico  $q = 0$ , essendo reversibile è anche isentropico. Distinguiamo vari casi:

- $V_s < a$   
Dato che  $r = a\Delta t =$  raggio dell'onda e  $\Delta x = V_s\Delta t =$  distanza percorsa dalla sorgente, dopo un primo impulso, l'onda si espande con velocità  $a$  mentre la sorgente si muove con  $V_s$  quindi, per impulsi successivi la sorgente si trova sempre all'interno del contorno di tutte le onde successive.
- $V_s = a$   
In questo caso la sorgente dopo un istante  $\Delta t$  si troverà esattamente alla distanza  $\Delta x = r$  e questo avviene anche per istanti successivi, quindi la sorgente si troverà sempre sul contorno delle sfere.
- $V_s > a$  La sorgente sarà in questo caso sempre fuori dal contorno di ogni onda dal momento che dopo un tempo  $\Delta t$  si troverà ad una distanza  $\Delta x > r$  ed anche per istanti successivi. Si viene a formare una serie di onde sferiche racchiuse da una superficie conica, con all'estremità la Sorgente. La superficie conica viene chiamata **cono di Mach** e rappresenta lo spazio entro cui

## 7.2. GRANDI PERTURBAZIONI

Queste grandi perturbazioni generano urti e quindi dissipazione di energia, in quella che viene chiamata **resistenza d'onda**, l' unica resistenza generata da forze di pressione, nella quale non viene considerata la  $\mu$  del fluido dato che non influisce e quindi vengono utilizzate le teorie per il fluido inviscido.

Se per le onde sonore (piccole perturbazioni) il fenomeno viene considerato isentropico, per gli urti (grandi perturbazioni) il fenomeno é irreversibile a causa della natura dissipativa del processo di propagazione dell'onda d'urto che porta ad un aumento di entropia. Consideriamo un volume di controllo che racchiuda la zona in cui avviene l' urto, dividendolo in una zona 1 antecedente l' urto ed una zona 2 successiva all' urto, uniformi ed in equilibrio termodinamico, rispettivamente con grandezze  $(a, T, P, \rho)$  e  $(a + da, T + dT, P + dP, \rho + d\rho)$ . Ci poniamo a cavallo dell'onda e ci muoviamo con essa (punto di vista lagrangiano) anziche considerare un volume di controllo fisso.

Vogliamo arrivare a scrivere la formula della velocità del suono con dipendenza da  $P$  e  $\rho$ . Consideriamo il flusso unidimensionale (lo consideriamo simmetrico quindi l' approssimazione é valida).

Partiamo dall'equazione di continuità:

$$\rho u = cost \quad (6.30)$$

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2; \quad (6.29)$$

adesso considerando  $\rho_1 = \rho$ ;  $\rho_2 = \rho + d\rho$ ;  $u_1 = a$ ;  $u_2 = a + da$ :

$$\rho a = (\rho + d\rho)(a + da) = \rho a + \rho da + a d\rho + da d\rho \quad (7.4)$$

Semplificando e trascurando gli infinitesimi di ordine 2 otteniamo:

$$\frac{da}{d\rho} = -\frac{a}{\rho} \quad (7.5)$$

Adesso utilizziamo l' equazione della quantità di moto:

$$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (6.3)$$

ed effettuando le stesse sostituzioni di prima per il volume 1 e 2:

$$P + \rho a^2 = (P + dP) + (\rho + d\rho)(a + da)^2 = (P + dP) + (\rho + d\rho)(a^2 + 2ada + da^2) \quad (7.6)$$

anche qui semplificando e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore ad 1 otteniamo:

$$dP = -2a\rho da - a^2 d\rho \quad \rightarrow \quad da = \frac{dP + a^2 d\rho}{-2a\rho} \quad (7.7)$$

### 7.3. URTI RETTI

quale si propaga. All'istante 0 prima del primo impulso del pistone, la  $T$  e  $P$  davanti e dietro al pistone sono identiche e quindi sono identiche anche le velocità di propagazione dell'onda. Generando un impulso verso  $dx$ , viene generato un aumento di pressione e temperatura nello stesso verso e una diminuzione di pressione e temperatura nel verso opposto. Questo aumento (e diminuzione) di pressione e temperatura fa sì che, generando dopo un intervallo di tempo un ulteriore impulso, questo si trovi a spostare aria in un mezzo che ha  $T_2 > T_1$  e  $P_2 > P_1$  a destra e  $T_2 < T_1$  e  $P_2 < P_1$  a sinistra, pertanto la velocità dell'onda sarà  $a_2 > a_1$  a destra ed  $a_2 < a_1$  a sinistra del pistone. Lo stesso avverrà per impulsi successivi, avendo velocità sempre maggiori a destra e velocità sempre minori a sinistra. Anche se a destra le onde successive avranno velocità superiore a quella delle onde che precedono, non avverrà mai che un'onda superi la precedente in quanto fisicamente impossibile: l'onda si troverebbe a viaggiare in un mezzo più freddo e quindi la velocità diminuirebbe. A destra le onde si andranno quindi sempre più ad avvicinare fino a compattarsi (**onde di compressione**) mentre a sinistra le onde si diraderanno (**onde di espansione**).

- Prendiamo ora il caso di una corrente che investe un corpo. Indichiamo con  $v_\infty$  la velocità della corrente e  $a_\infty$  la velocità del suono. Ed analizziamo 2 casi:
  - $V_\infty < a_\infty$  Colpendo la parete del corpo, le particelle fluide vengono deviate ed alcune di esse "rimbalzano" verso monte. La velocità con cui si propaga questo fronte di particelle che rimbalzano verso monte è dell'ordine della  $v_{at}$ . Nel caso subsonico le particelle di fluido che viaggiano a  $v_\infty$  sentono a monte il "penetrare" delle particelle che tornano indietro e le linee di flusso deflettono molto prima;
  - $V_\infty > a_\infty$  In questo caso, essendo  $M_\infty > 1$ , le particelle che tornano indietro vanno a compattarsi, non riuscendo a penetrare nel fluido che viaggia a velocità  $V_\infty > a_\infty$ . La corrente risulta imperturbata fino all'onda d'urto che si trova poco distante dal corpo e la cui grandezza è dell'ordine del libero cammino medio delle particelle  $\simeq 10^{-4}$ mm.

Per poter descrivere le equazioni che regolano gli urti retti, dobbiamo prima fare le seguenti assunzioni:

- ◇ Onda unidimensionale 1D;
- ◇ Onda stazionaria;
- ◇ Adiabatico ( $q = 0$ ).

### 7.3. URTI RETTI

- $u_1 < u_2$  ovvero  $u_1 < a^*$  e  $u_2 > a^*$   
quindi subsonico prima dell'urto, il che vuol dire che si tratta di un'onda di espansione e quindi  $s_2 < s_1$
- $u_1 > u_2$  ovvero  $u_1 > a^*$  e  $u_2 < a^*$   
supersonico prima dell'onda d'urto, ovvero un onda di compressione con  $s_2 > s_1$ .

Tra i due casi ovviamente l'unico che abbia un significato fisico é il secondo, che comporta un aumento di entropia. Quindi affinché si formi un onda d'urto la velocità prima dell'urto e di avanzamento dell'onda devono essere supersoniche. Tuttavia affinché sia rispettata la relazione di Prandtl, subito dopo l'urto la velocità deve essere subsonica, il che vuol dire grandi quantità di energia dissipate.

Posso riscrivere la (7.16) dividendo ambo i membri per  $a^{*2}$  ottenendo:

$$1 = \frac{u_1 u_2}{a^* a^*} = M_1^* M_2^* \quad \rightarrow \quad M_2^* = \frac{1}{M_1^*} \quad (7.17)$$

Elevando al quadrato la (7.17) ed utilizzando le relazioni (5.47) troviamo una relazione tra i numeri di mach prima e dopo l'urto:

$$\frac{M_2^2 (\gamma + 1)}{2 + M_2^2 (\gamma - 1)} = \frac{1}{M_1^*} = \left[ \frac{M_1^2 (\gamma + 1)}{2 + M_1^2 (\gamma - 1)} \right]^{-1}$$

$$M_2^2 = \frac{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_1^2}{\gamma M_1^2 - \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)} = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \quad (7.18)$$

la quale rappresenta una relazione fondamentale per ricavare il numero di Mach dopo l'urto conoscendo  $\gamma$ .

- se  $M_1 > 1$ ;  $M_2 < 1$  urto intenso, dissipa più di un urto obliquo dove in 2 la corrente può essere ancora supersonica
- se  $M_1 \simeq 1$ ;  $M_2 \simeq 1$  : allora non siamo più in presenza di un urto ma si tratta di un'onda di semplice compressione.

Possiamo notare come, aumentando  $M_1$ , il  $M_2$  tenda asintoticamente ad un valore finito  $\sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$  che per l'aria  $M_2 = \underline{0.378}$  ed il  $M_2^*$  corrispondente vale 0.17.

### 7.3. URTI RETTI

Quest'ultima detta anche **Relazione di Rankine-Hugoniot**. Da questa importante relazione notiamo come l'urto sia effettivamente un processo non isoentropico, altrimenti la relazione (7.25) sarebbe:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma$$

Vogliamo ora trovare una formulazione del rapporto  $\rho_2/\rho_1$  che dipenda esclusivamente dal numero di Mach prima dell'urto e dal valore  $\gamma$ . Partiamo dall'equazione di continuità:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1 u_1}{u_2 u_1} = \frac{u_1^2}{u_1 u_2} = \frac{u_1^2}{a^{*2}} = M_1^{*2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \quad (7.26)$$

Dalla quale notiamo che, aumentando  $M_1$ , tale rapporto tende al numero  $\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$  (per l'aria = 6). Adesso utilizzando la (7.26) in (7.25) otteniamo una formulazione del rapporto  $P_2/P_1$  anch'essa dipendente esclusivamente da  $\gamma$  e  $M_1$ :

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1) \quad (7.27)$$

Facendo tendere ad infinito il numero di Mach, il rapporto  $\frac{P_2}{P_1}$  tende anch'esso ad infinito.

Per quanto riguarda il rapporto tra le temperature statiche prima e dopo l'urto utilizziamo l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 \rho_1}{P_1 \rho_2}$$

quindi:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1)\right] \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2}\right] \quad (7.28)$$

e quindi, all'aumentare del numero di Mach a monte aumenta anche la temperatura a valle dell'urto. Tali equazioni sono valide fintanto che ci siano queste condizioni:

- Non alte temperature (inferiori alla temperatura alla quale avvengono dissociazioni): gas calorificamente perfetto;
- Non temperature troppo basse (altrimenti non valgono le equazioni di stato);
- Non in miscele reagenti.

# Capitolo 8

## Ottava Lezione

22/10/15

### 8.1 Flusso di Rayleigh

Anche per il flusso di Rayleigh possiamo considerare una situazione unidimensionale. A differenza degli urti (adiabatici) il flusso di Rayleigh avviene con fornitura di calore (diabatico) e con  $\tau_{visc} = 0$ , con situazione di equilibrio termodinamico prima e dopo la fornitura di calore. Ci riferiamo ad un flusso in un condotto, in cui consideriamo le sezioni di ingresso e di uscita, con la fornitura di calore  $q$ , ad esempio una sezione di un turbofan. Assegnate le condizioni iniziali "1", ci proponiamo di ricavare le grandezze a valle del volume di controllo in "2". Utilizziamo ora le equazioni della quantità di moto, energia e massa valide per il caso unidimensionale e le adattiamo al nostro caso:

- Massa:  $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ ;
- Q.d.m.:  $P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2$
- Energia:  $H_1 + q = H_2$

Dall'equazione dell'energia ricaviamo:  $h_1 + \frac{u_1^2}{2} + q = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$   
 $H_1 < H_2 \rightarrow C_P T_{01} < C_P T_{02} \rightarrow T_{01} < T_{02}$  se ( $q > 0$ ), quindi:  $q = H_2 - H_1 = C_P(T_{02} - T_{01})$ .

Ricaviamo ora il rapporto  $P_2/P_1$ :

### 8.1. FLUSSO DI RAYLEIGH

Adesso utilizzando le relazioni isentropiche per passare dalle grandezze statiche a quelle totali, ricaviamo anche  $P_{02}/P_{01}$  e  $T_{02}/T_{01}$ :

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}\right) \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (8.6)$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_2}{T_1} \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}\right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}\right) \quad (8.7)$$

mentre la differenza di entropia la troviamo sempre come:

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= C_P \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{P_2}{P_1} = \\ &= C_P \ln \left[ \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}\right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 \right] - \frac{R}{M} \ln \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}\right) = \quad (8.8) \\ s_{02} - s_{01} &= C_P \ln \frac{T_{02}}{T_{01}} - \frac{R}{M} \ln \frac{P_{02}}{P_{01}} \end{aligned}$$

dal momento che il salto di entropia é lo stesso anche in condizioni di arresto, essendo in entrambi i casi una trasformazione isentropica.

Ora andiamo ad analizzare l'evoluzione sul piano T/s: Analizzando la tangente del grafico  $\frac{dT}{ds}$  é possibile, combinando le solite equazioni, ricavare le seguenti

per  $\frac{dT}{ds}$  e  $\frac{du}{ds}$ :

$$\frac{dT}{ds} = \frac{T}{C_P} \frac{(\gamma M^2 - 1)}{(M^2 - 1)} \quad (8.9)$$

$$\frac{du}{ds} = -\frac{u}{C_V} \frac{1}{\gamma(M^2 - 1)} \quad (8.10)$$

Discutiamo il caso con ingresso a monte:

- Supersonico ( $M_1 > 1$ ) essendo  $\gamma = \frac{C_P}{C_V} > 0$   $M_1^2 - 1 > 0$   $\frac{dT}{ds} > 0$  la curva ha pendenza positiva sempre;

8.1. FLUSSO DI RAYLEIGH

3) Ricaviamo le altre grandezze  $P_2$  e  $T_2$  utilizzando le (8.1) e (8.4).

B) Rapporti in condizioni critiche  $f/f^*$ : Ponendo  $M_1 = 1$  (critico) otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{P}{P^*} &= \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2}; & \frac{T}{T^*} &= M^2 \left( \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right)^2; \\ \frac{\rho}{\rho^*} &= \frac{1}{M^2} \left( \frac{1 + \gamma M^2}{1 + \gamma} \right); \\ \frac{P_0}{P_0^*} &= \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \left( \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}; \\ \frac{T_0}{T_0^*} &= \frac{(1 + \gamma)M^2}{(1 + \gamma M^2)^2} [2 + (\gamma - 1)M^2] \end{aligned} \tag{8.11}$$

Con queste equazioni, e considerando che  $T_{02} = T_{01} + \frac{q}{C_P}$ , possiamo calcolare il

rapporto  $\frac{T_{02}}{T_0} = \frac{T_{02} T_{01}}{T_{01} T_0^*}$  dalla quale possiamo infine ricavare  $T_{02}$  e  $q = C_P(T_{02} - T_{01})$ ,

se in condizioni critiche:  $q^* = C_P(T_0^* - T_{01})$  dove abbiamo  $T_{01}$  da ingresso e  $\frac{T_{01}}{T^*}$  dalle tabelle.

## CAPITOLO 9. NONA LEZIONE

- Q.d.m.:

$$\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S P \vec{n} dS - \int_S \tau_w dS \quad (9.1)$$

dove  $\tau_w$  indica lo sforzo a parete.

Sviluppando la (9.1) otteniamo:

$$-\rho_1 u_1^2 A + \rho_2 u_2^2 A = P_1 A - P_2 A - \int_S \tau_w dS = P_1 A - P_2 A - \pi D \int_0^L \tau_w dx$$

con  $x$  coordinata lungo l'asse del tubo e  $\pi D$  circonferenza del tubo, dato che gli sforzi avvengono sulla superficie laterale di questo. Sostituendo ad  $A = \frac{\pi D^2}{4}$  e riordinando i termini otteniamo:

$$(P_2 - P_1) + (\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2) = -\frac{4}{D} \int_0^L \tau_w dx \quad (9.2)$$

Che nel caso di flusso incompressibile si ridurrebbe a:

$$\begin{aligned} (P_2 - P_1) &= -\frac{4}{D} \tau_w L \\ \frac{(P_2 - P_1)}{L} &= -\frac{4\tau_w}{D} \end{aligned} \quad (9.3)$$

che rappresenta il gradiente di pressione  $dP/dx$  che normalizzato diventa:

$$\lambda = \frac{\frac{dP}{dx}}{(\frac{1}{2}\rho u_{max}^2)/D} = \frac{-4\tau_w}{D [(\frac{1}{2}\rho u_{max}^2)/D]} = -4C_f \quad (9.4)$$

A noi interessa la forma differenziale della (9.2):

$$dP + d(\rho u^2) = -\frac{4}{D} \tau_w dx \quad (9.5)$$

Ora considerando che  $\rho u = cost$ , quindi  $d(\rho u^2) = d(\rho u \cdot u) = (\rho u) du$ , e che  $\frac{\tau_w}{2\rho u^2} = C_f$  quindi  $\tau_w = C_f 1/2 \rho u^2$  otteniamo:

$$dP + \rho u du = -\frac{4}{D} \left( \frac{1}{2} \rho u^2 C_f \right) dx \quad (9.6)$$

Sostituendo le relazioni:  $a^2 = \gamma P/\rho$ ;  $M^2 = \frac{u^2}{a^2}$ ;  $P = \frac{\rho RT}{M}$  otteniamo infine:

$$\frac{4}{D} C_f dx = \frac{2}{\gamma M^2} (1 - M^2) \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{-1} \frac{dM}{M} \quad (9.7)$$

CAPITOLO 9. NONA LEZIONE

Il problema é ora: date le condizioni in 1, come trovo le grandezze  $T_2$ ,  $P_2$ ,  $\rho_2$  e  $M_2$ ? Grafichiamo nuovamente il flusso sul grafico  $T/s$  al variare di  $L$ : e ricaviamo le stesse equazioni  $\frac{dT}{ds}$  e  $\frac{du}{ds}$ :

$$\frac{dT}{ds} = \frac{T}{C_P} \gamma \frac{M^2}{(M^2 - 1)} \tag{9.15}$$

$$\frac{du}{ds} = - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{T}{u} \frac{M^2}{(M^2 - 1)} \tag{9.16}$$

distinguendo anche qui il caso con ingresso a monte:

- Supersonico ( $M_1 > 1$ )  
 dove  $\frac{dT}{ds} > 0$  sempre e  $\frac{du}{ds} < 0$  sempre,  
 quindi la pendenza della curva é sempre positiva, fino a raggiungere asintoto  $\frac{dT}{ds} = \infty$  (condizione di Choking) e la corrente che rallenta  $M_1 > M_2 > 1$ .  
 Esiste un valore di  $L = L_{max} = L^*$  per cui si avrá  $M_2 = M^* = 1$ .
- Subsonico ( $M_1 < 1$ )  
 con  $\frac{dT}{ds} < 0$  sempre e  $\frac{du}{ds} > 0$  sempre,  
 quindi la pendenza della curva é sempre decrescente e la corrente accelera  $M_1 < M_2 < 1$ . In condizioni opportune ( $L$  opportuno) si puó raggiungere lo stesso punto sulla curva raggiunto dal ramo inferiore (condizione di Choking)  $M_2 = M^* = 1$ . La lunghezza  $L^*$  dipende solamente dalle condizioni in ingresso  $L^* = L(M_1)$ .

Possiamo fare adesso tre osservazioni:

- L'area sotto la curva di Fanno, nel grafico  $T/s$  deriva dagli effetti di dissipazione;
- Dal momento che la densità non é costante, se  $H_1 = h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} = H_2$  e la  $u$  diminuisce (o aumenta), questa va ad accrescere (o diminuire) l'entalpia statica. É quindi come se fosse un ugello convergente, dato che il fluido comprimendosi e creando vortici, diminuisce la sezione utile al flusso e la zona nella quale si sentono gli effetti viscosi si ispessisce lungo  $x$ ;
- Se il tubo ha una lunghezza  $L > L^*$  allora a monte avvengono effetti dissipativi, come per il flusso di Rayleigh, causando urti retti (e passando sul ramo superiore, dal momento che la corrente diventa subsonica e dissipando

CAPITOLO 9. NONA LEZIONE

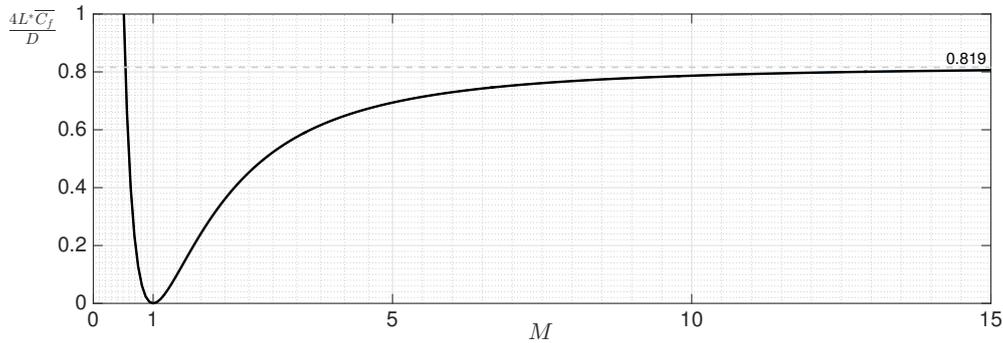


Figura 9.1: Coefficiente adimensionale in funzione di Mach

fossimo in ingresso con le condizioni 2:

$$\left(\frac{4L^* \overline{C_f}}{D}\right)_2 = \left(\frac{4L^* \overline{C_f}}{D}\right)_1 - \left(\frac{4L \overline{C_f}}{D}\right) \tag{9.22}$$

grazie alla quale, tornando nella tabella (??), possiamo ritrovare i rapporti tra le grandezze in 2 e le grandezze critiche. Ora possiamo calcolare le grandezze in 2 come per esempio:

$$P_2 = \frac{P_2 P^*}{P^* P_1} P_1$$

e così anche per le altre grandezze. Come detto nella (9.4),  $\lambda \simeq 4C_f$  ed entrambi dipendono dal numero di Reynolds =  $Re = \frac{\bar{u}D}{\nu}$ . Ora  $\lambda$  assume valori diversi a seconda che  $Re$  sia critico ( $Re \simeq 2300$ ) o meno, come possiamo vedere nella figura 9.2:

- Per  $Re < 2300$  (flusso laminare)  $\lambda = \frac{64}{Re}$
- Per  $2300 < Re < 10^5$  (flusso turbolento)  $\lambda = \frac{0.32}{Re^{1/4}}$
- Per  $10^5 < Re < 10^8$   $\lambda = \frac{0.16}{Re^{1/6}}$

# Capitolo 10

## Decima Lezione

### 10.1 Urti Obliqui

Quando una corrente uniforme ed in equilibrio termodinamico che lambisce una parete incontra una curvatura possono avvenire situazioni di onde d'urto oblique oppure onde di espansione.

- 1) Onde semplici di compressione:  
quando la curvatura della parete é molto alta;
- 2) Onde d'urto (oblique):  
quando il corpo subisce una rapida variazione di geometria (Rampa) come per esempio nell'unione tra ala e fusoliera;
- 3) Onde semplici di espansione:  
quando una corrente supersonica lambisce una parete che curva non bruscamente verso l'esterno;
- 4) Onde o Fasci di espansione:  
quando la geometria varia bruscamente verso l'esterno (presenza di fasci di espansione supersonica).

In ogni caso, in seguito all'urto, il flusso deve rispettare la condizione di tangenza. Definiamo 2 angoli:

- $\theta$  Angolo tra  $M_1$  e la parete deflessa (data la condizione di tangenza rappresenta l'angolo tra  $v_1$  e  $v_2$ );
- $\beta$  Angolo di deflessione dell'urto (angolo tra  $v_1$  ed il piano che contiene l'urto).

## 10.1. URTI OBLIQUI

Iniziamo dall'equazione di continuità (4.15):

$$\int_S \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (4.15)$$

dato che il flusso é stazionario. Calcolando il flusso di massa attraverso le varie superfici ( $a, b, c, d, e, f$ ) ottenendo:

$$-\rho_1 u_1 A_a + \rho_2 u_2 A_d = 0 \quad (10.1)$$

dato che, avendo preso  $A$  uguale per tutte le facce, i contributi nel campo 1 di  $\rho_1 w_1 A_b$  e  $\rho_1 w_1 A_f$  si annullano ed allo stesso modo nel campo 2. Come per l'urto retto abbiamo quindi:

$$\rho u = cost \quad (10.2)$$

dove qui tuttavia  $u$  indica esclusivamente la componente di  $v$  perpendicolare al piano dell'urto. Adesso utilizziamo l'equazione della quantità di moto (4.18) che si riduce a:

$$\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S (P \vec{n}) dS \quad (4.18)$$

essendo stazionaria ed escludendo forze esterne. Come fatto in precedenza, proiettiamo il primo termine lungo  $\vec{N}$  e  $\vec{T}$  e poi effettuiamo il prodotto scalare:

N)

$$\int_S \rho u (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S P \cdot \vec{n} dS \quad (10.3)$$

$$\begin{aligned} & \rho_1 u_1 (-u_1) A_a + \rho_2 u_2 (u_2) A_d + \\ & + \underline{\rho_1 u_1 (-w_1) A_f} + \underline{\rho_1 u_1 (w_1) A_b} + \\ & + \underline{\rho_2 u_2 (-w_2) A_e} + \underline{\rho_2 u_2 (w_2) A_c} = (-P_1 A_a + P_2 A_d) \end{aligned} \quad (10.4)$$

dove i termini sottolineati si semplificano, ottenendo:

$$P + \rho u^2 = cost \quad (10.5)$$

con  $u$  solo componente normale;

T)

$$\int_S \rho w (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S P \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (10.6)$$

in quanto la pressione é sempre la stessa se non si passa da 1 a 2. Facendo lo stesso ragionamento fatto in precedenza per le grandezze sottolineate, otteniamo ora:

$$\rho_1 w_1 (-u_1) A_a + \rho_2 w_2 (u_2) A_d = 0 \quad (10.7)$$

### 10.1. URTI OBLIQUI

- $P_2/P_1$

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_{1n}^2 - 1) = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \quad (10.14)$$

- $T_2/T_1$

ottenuto utilizzando le precedenti:  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 \rho_1}{P_1 \rho_2}$

- $M_2$

riprendiamo la (7.18) ma considerando il  $M_{1n}$ :

$$M_{2n} = \frac{2 + (\gamma - 1) M_{1n}^2}{2\gamma M_{1n}^2 - (\gamma - 1)} = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)} = M_2^2 \sin^2(\beta - \theta) \quad (10.15)$$

come vediamo dagli angoli della figura 10.1. Quindi abbiamo infine:

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)} \frac{1}{\sin^2(\beta - \theta)} \quad (10.16)$$

Dal quadrato notiamo come, per assegnati valori di  $M_1$  e  $\theta$  otteniamo 2 valori di  $M_2$  entrambi positivi e minori di  $M_1$ :

- $M_2 < 1$  urto forte;
- $M_2 > 1$  urto debole.

- $\beta, \theta$

A monte abbiamo  $\tan \beta = \frac{u_1}{w_1}$  e a valle  $\tan(\beta - \theta) = \frac{u_2}{w_2}$  quindi:

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta} \quad (10.17)$$

da cui otteniamo:

$$\tan \theta = \frac{2}{\tan \beta} \left[ \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos(2\beta)) + 2} \right] \quad (10.18)$$

Questa funzione ha 2 zeri:

- $\frac{1}{\tan \beta} = 0$  quando  $\beta = \pi/2$ ;

- $M_1^2 \sin^2 \beta = 1$  quando  $\beta = \arcsin\left(\frac{1}{M_1}\right) = \mu$

ovvero nel caso di piccola perturbazione, in cui il numero di mach non cambia ( $M_2 \simeq M_1$ ).

## 10.2. URTI CURVI E STACCATI

---

Graficando questa relazione notiamo che si ottengono vari valori di  $M_2^*$  e varie  $v_2$  al variare di  $\theta$ . Variando  $M_1$ , cambiano le curve.

- se  $M_1^* = 1$  abbiamo un cerchio di raggio 1 centrato nell'origine (*cerchio sonico*);
- se  $M_1 \rightarrow \infty$ ;  $M_1^* = 2.449$  e la curva diventa un cerchio;
- la retta uscente dall'origine e che incontra il grafico, definisce  $V_2$  per  $M_1^* > 1$ .

Possiamo calcolare  $V_2 - V_1$  dal grafico. Quando questo  $\Delta V \rightarrow 0$  otteniamo la tangente al grafico in corrispondenza del punto angoloso. Indichiamo con  $\mu$  l'inclinazione della linea di  $M$ .

## 10.2 Urti curvi e staccati

Per  $\theta > \theta_{max}$  per il fissato  $M_1$  otteniamo un urto curvo e staccato. L'odografa non descrive piú completamente l'urto ma vale ancora subito a valle di esso. Le linee di corrente partono come descritte dall'odografa ma poi curvano, rispettando comunque la condizione di tangenza ma le linee di corrente sono curve.

La stessa cosa avviene per profili alari: piú sono sottili ( $\theta$  geometrico basso), maggiori sono le velocità che può raggiungere ( $M_2$  elevati).

Piú mi allontano dalla parete, piú il  $\beta$  decresce e  $V_2$  cresce fino ad avere  $V_2 = a_2$ , dopo aver attraversato una zona con  $M_2 < 1$ . Allontanandoci ancora si raggiunge il  $\beta$  minimo, e l'urto diventa evanescente. Considerando un flusso omoentropico  $\Delta H = cost$  confrontiamo l'urto obliquo generato dalla presenza di un cuneo (2D) e di un cono (3D) con stesso angolo di semi-apertura  $\theta_W = \theta_{cono}$ . Notiamo come sul cono l'urto é piú debole a causa di effetti tridimensionali. Per esempio, con  $M_1 = 2$ ,  $\theta_W = \theta_{cono} = 10^\circ$  abbiamo  $\beta_W = 39^\circ$  e  $\beta_{cono} = 31^\circ$ .

CAPITOLO 11. UNDICESIMA LEZIONE

Si crea comunque un'onda d'urto curva e staccata, a valle della quale avviene il cosiddetto row shock. Subito a valle dell'onda valgono le relazioni degli urti obliqui. Passando da una configurazione 2D ad un 3D, ci crea ovviamente una superficie staccata che avvolge il corpo. Assegnati geometria,  $\alpha$  e  $M_1$  possiamo calcolare la superficie dell'urto ed effettuare calcoli a valle dell'urto con metodi C.F.D.

Trattiamo ora le interazioni tra urti, che si dividono in 2 categorie:

- Riflessione;
- Interazione.

### 11.1 Riflessione Regolare

Una condizione da rispettare in ogni caso è quella di tangenza tra il campo 2 e 3. Per questo l'angolo  $\theta_2$  tra  $v_3$  e  $v_2$  è uguale a  $-\theta_1$  (ovvero l'angolo tra  $v_2$  e  $v_1$ ) come vediamo in Figura 11.1(b). Invece abbiamo sempre  $\beta_2 \neq \beta_1$  nel caso di riflessione non speculare, dato che rappresentano gli angoli tra la velocità prima dell'urto e il piano dello stesso. In ogni caso avremo sempre

$$M_3 < M_2 < M_1 \qquad P_3 > P_2 > P_1$$

Affinché la riflessione sia regolare,  $\theta$  deve essere minore sia di  $\theta_{max1}$  che di  $\theta_{max2}$  (nel grafico in Figura 10.2). La riflessione fa comprimere il fluido con salti di pressione ad ogni urto.

Nella polare, in base agli angoli ottenuti, possiamo trovare graficamente tutte le grandezze richieste. Sul grafico della **Cardioide** possiamo trovare la pressione a valle del primo urto e, partendo di lì, trovare la pressione a valle della riflessione.

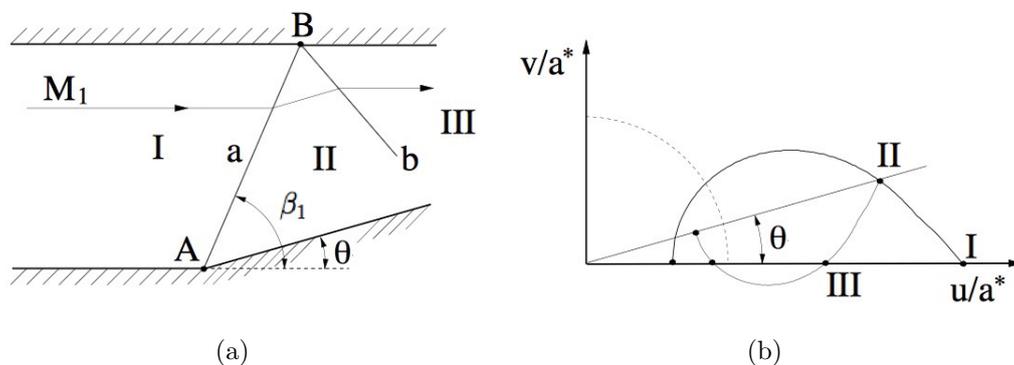


Figura 11.2: Riflessione e polare della riflessione dell'urto

CAPITOLO 11. UNDICESIMA LEZIONE

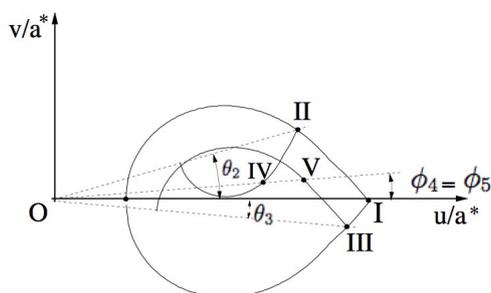


Figura 11.4: Polare dell'interazione di urti di famiglie diverse.

**Urti della stessa famiglia.** Trovandoci di fronte a 2 variazioni di geometria, nascono onde d'urto prima tra il campo 1 e 2 e poi tra il campo 2 e 3 ed i piani dell'urto, allontanandosi dalla parete convergono nel punto D come vediamo in Figura 11.5. Alcune linee di corrente, come vediamo, attraversano il primo piano d'urto in  $a$  ed il secondo in  $b$  arrivando nel campo 3, mentre altre linee di corrente passano direttamente dal campo 1 ad un campo 5. Per questo motivo, tra il campo 5 ed il 3 nasce anche qui una *slip line*. Tuttavia, per adeguare le pressioni del campo 3 e 5 nasce tra i 2 un'onda debole (riflessa), a valle della quale abbiamo  $P_4 = P_5$ ;  $\phi_4 = \phi_5$ .

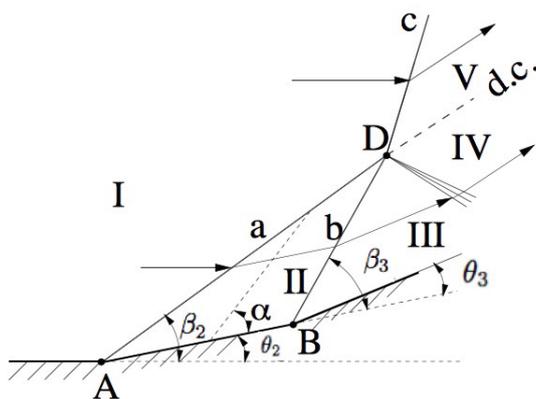


Figura 11.5:

---

*CAPITOLO 11. UNDICESIMA LEZIONE*

---

anche un gradiente  $\left(\frac{dP}{dx}\right)^a$  lungo la linea di corrente 'a' che rappresenta la linea di corrente lungo la quale la velocità del flusso è quella sonora  $a$ . Allontanandosi dalla parete il gradiente è sempre più alto. In corrispondenza dell'urto la pressione passa da  $P_1$  a  $P_2$  attraverso un salto di pressione.

La stessa configurazione la otteniamo considerando la viscosità delle pareti. All'interno dello strato limite possiamo individuare una linea sonora. Gli urti nascono a partire dallo strato sonico dello strato limite. Lo strato subsonico nel frattempo, serve a smussare gli spigoli del corpo e sembra che la parete diventi curvata anziché avere uno spigolo vivo. Per questo motivo, considerando la viscosità del fluido, nasceranno sempre prima onde semplici di compressione e poi, a distanza dalla parete, un'onda d'urto obliqua.

CAPITOLO 12. DODICESIMA LEZIONE

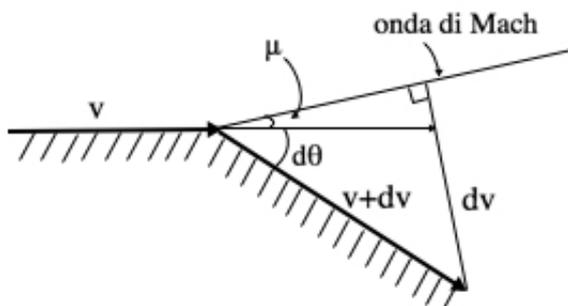


Figura 12.1:

al teorema dei seni abbiamo:

$$\frac{v + dv}{v} = \frac{\sin(\pi/2 + \mu)}{\sin(\pi/2 - \mu - d\theta)}$$

Tramite trasformazioni trigonometriche possiamo scrivere  $\sin(\pi/2 + \mu) = \cos \mu$  e  $\sin(\pi/2 - \mu - d\theta) = \cos(\mu + d\theta) = \cos \mu \cos d\theta - \sin \mu \sin(d\theta)$  quindi otteniamo:

$$1 + \frac{dv}{v} = \frac{\cos \mu}{\cos \mu \cos d\theta - \sin \mu \sin d\theta} \tag{12.1}$$

ora avendo assunto l'angolo  $d\theta$  infinitesimo, riscriviamo la (12.1) come:

$$1 + \frac{dv}{v} = \frac{\cos \mu}{\cos \mu - d\theta \sin \mu} = \frac{1}{1 - d\theta \tan \mu} \tag{12.2}$$

che, scritta come espansione in serie di potenze (dall'espansione  $\frac{1}{1-x} = 1 + x(x^2 + x^3 + \dots)$ ) diventa:

$$\frac{dv}{v} = d\theta \tan \mu \quad \rightarrow \quad d\theta = \frac{dv/v}{\tan \mu} \tag{12.3}$$

avendo trascurato i termini di ordine superiore. Ricordando che

$$\tan \mu = \frac{\sin \mu}{\cos \mu} = \frac{\sin \mu}{\sqrt{1 - \sin^2 \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \mu} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

essendo  $\mu = \sin^{-1} \left( \frac{1}{M} \right)$ , riscriviamo finalmente (12.3) come:

$$d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \left( \frac{dv}{v} \right) \tag{12.4}$$

CAPITOLO 12. DODICESIMA LEZIONE

---

sostituita in (12.4) ci porta a:

$$d\theta = \left( \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \right) \frac{dM}{M} \quad (12.11)$$

Integrando otteniamo

$$\nu(M) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \theta_2 - 0 = \int_{M_1}^{M_2} \left( \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \right) \frac{dM}{M} \quad (12.12)$$

detta **Funzione di Prandtl Meyer**, dove:

$$\nu(M) = \left[ \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2 - 1) \right) - \tan^{-1}(\sqrt{M^2 - 1}) \right] \quad (12.13)$$

nella quale, la costante di integrazione é stata posta uguale a zero per  $M = 1$  dove  $\nu(M) = 0$ . La (12.13) serve a studiare le espansioni supersoniche. Nel caso di deflessione totale:

$$\theta_2 - \theta_1 = \nu(M_2) - \nu(M_1)$$

quindi:

- Nel caso di espansioni abbiamo:  
 $\Delta\nu(M) > 0$   
 $\theta_2 - \theta_1 > 0$ ;
- Nel caso di compressioni abbiamo:  
 $\Delta\nu(M) < 0$   
 $\theta_2 - \theta_1 < 0 \rightarrow \theta_2 < \theta_1$ ;

Nel calcolo delle condizioni a valle si procede nei calcoli come segue:

- 1) Dato  $M_1$  in ingresso, si consulta la tabella per ricavare  $\nu(M_1)$ ;
- 2) Dato l' angolo  $\theta$  geometrico di deflessione, si ricava  $\nu(M_2) = \theta + \nu(M_1)$ ;
- 3) Si riconsulta la tabella a ritroso, avendo  $\nu(M_2)$  per ricavare  $M_2$ ;
- 4) Dalla tabella ricaviamo anche  $\mu_1$  e  $\mu_2$  che indicano gli angoli rispettivamente della prima e ultima onda del fascio di espansione.
- 5) Abbiamo infine:

$$\star T_{02} = T_{01} = T_1 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2 \right) = T_2 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2 \right);$$

CAPITOLO 12. DODICESIMA LEZIONE

---

- Epicicloidi  $C_-$ :

$$\theta = -\nu(M) + K_- \qquad \text{ovvero:} \qquad \theta + \nu(M) = K_-.$$

Dove  $K$  é un angolo. Ricordando che  $\theta_2 = \nu(M_2) - \nu(M_1)$  ricaviamo che  $K = \nu(M_1)$ . In questo modo si puó andare ad indagare nelle tabelle e, dato  $M_1$  ricavare  $\nu(M_1)$  con il quale, tramite formula inversa, ricavare  $\nu(M_2)$  ed infine  $M_2$ .

Per disegnare le epicicloidi in Figura 12.1 bisogna seguire vari step:

- I Tracciare il cerchio sonico ( $M = M^* = 1$ ):

$$\left(\frac{v}{a^*}\right)^2 + \left(\frac{u}{a^*}\right)^2 = 1;$$

- II Tracciare il cerchio limite ( $M \rightarrow \infty$ ;  $M^* = 2.449$ ):

$$\left(\frac{v}{a^*}\right)^2 + \left(\frac{u}{a^*}\right)^2 = \left(\frac{V_{lim}}{a^*}\right)^2 = 6$$

- III Abbiamo che  $K_+ = K_-$  in modulo e  $\theta > 0$  indica che ci si trova nel primo quadrante, tuttavia gli angoli nel piano fisico sono positivi quando si hanno rotazioni verso il basso (in senso orario). Fissato questo punto di partenza dell' epicicloide, la curva va verso l' alto o verso il basso, a seconda che si segua la  $C_+$  o la  $C_-$  e si raggiunge asintoticamente il cerchio limite.

Quindi, quando si percorre una linea in segno orario, si hanno  $K$  positivi e si segue la  $C_-$  che ruota anch'essa in senso orario dal punto  $C$  sul cerchio sonico (individuato da  $K = \nu(M_1)$ ) fino a raggiungere asintoticamente il cerchio limite oppure se si percorre una linea che percorre una traiettoria antioraria, si hanno  $K = \nu(M_1)$  negativi e si segue la curva  $C_+$ .

Tramite tali curve é possibile anche studiare compressioni elementari (**NON URTI**) percorrendo l' epicicloide in senso opposto (andando verso il cerchio sonico). L'angolo  $\mu$  delle linee di Mach (per ogni linea che compone il fascio di espansione) si trova calcolando l' angolo tra la linea di  $M_1$  (solitamente orizzontale) e la perpendicolare alla tangente all'epicicloide nel punto corrispondente al Mach desiderato.

CAPITOLO 13. TREDICESIMA LEZIONE

Per calcolare la componente  $u(P')$  ci spostiamo dalla linea  $l$  lungo una linea retta parallela all' asse  $y$  con  $x = x_0$ . Essendo note  $V_P, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$  abbiamo che:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{2uv}{a^2} \frac{\partial u}{\partial y} - \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y}}{\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)} \quad (13.2)$$

Quindi posso calcolare  $\partial u / \partial x$  ovunque tranne in  $\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) = 0$  ovvero se la componente perpendicolare alla linea é sonica. Dato che  $\sin \mu = \frac{u}{V_P} = \frac{u}{V} = \frac{1}{M}$ , la linea in questione é una linea di Mach. Queste linee (nelle quali la componente perpendicolare é sonica) sono dette *Linee Caratteristiche*. Ricaviamo adesso una regola generale per individuare le direzioni caratteristiche. Scriviamo il potenziale delle velocità nella seguente forma:

$$\left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2}\right) \phi_{xx} + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{a^2}\right) \phi_{yy} - 2 \frac{\phi_x \phi_y}{a^2} \phi_{xy} = 0 \quad (13.3)$$

Abbiamo che:

$$d\phi_x = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} dy = \phi_{xx} dx + \phi_{xy} dy = du \quad (13.4)$$

$$d\phi_y = \frac{\partial \phi_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} dy = \phi_{xy} dx + \phi_{yy} dy = dv \quad (13.5)$$

Scriviamo ora (13.3) in forma mista:

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \phi_{xx} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \phi_{yy} - 2 \frac{uv}{a^2} \phi_{xy} = 0 \quad (13.6)$$

Mettendo a sistema la (13.6) con (13.4) ed (13.5) otteniamo:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \phi_{xx} - 2 \frac{uv}{a^2} \phi_{xy} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \phi_{yy} = 0 \\ \phi_{xx} dx + \phi_{xy} dy + 0 = du \\ 0 + \phi_{xy} dx + \phi_{yy} dy = dv \end{cases} \quad (13.7)$$

CAPITOLO 13. TREDICESIMA LEZIONE

---

Approfondimenti su Anderson pag. 390. Riprendendo (13.11) la riscriviamo considerando che  $u = V \cos \theta$  e  $v = V \sin \theta$ :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{caratt} = \frac{-\frac{V^2 \sin \theta \cos \theta}{a^2} \pm \sqrt{\frac{V^2}{a^2}(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 1}}{1 - \frac{V^2}{a^2} \cos^2 \theta} \quad (13.12)$$

essendo  $\mu = \arcsin \frac{1}{M} \rightarrow \frac{V^2}{a^2} = M^2 = \frac{1}{\sin^2 \mu}$  abbiamo:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{caratt} = \frac{-\frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \mu} \pm \sqrt{\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \mu} - 1}}{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \mu}} \quad (13.13)$$

che tramite passaggi trigonometrici diventa:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{caratt} = \tan(\theta \mp \mu) \quad (13.14)$$

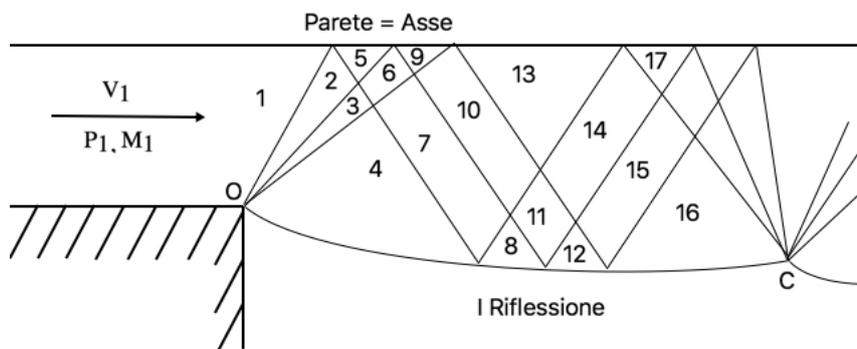
Riprendendo le epicicloidi, notiamo che anche esse sono delle curve caratteristiche:

$$C_+ \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{caratt.+} = \tan(\theta + \mu)$$

$$C_- \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{caratt.-} = \tan(\theta - \mu)$$

Dove  $\theta$  é l' angolo di deflessione geometrico. In ogni punto del flusso supersonico abbiamo 2 curve (linee caratteristiche) che si incrociano nel punto stesso.  $\mu$  é l' angolo tra la direzione e la tangente alla curva caratteristica. Queste linee indicano l' espansione o la compressione del fluido (non gli urti) qualora si abbia, passando da  $P$  a  $P'$  , rispettivamente  $V_{P'} > V_P$  o  $V_{P'} < V_P$ .

CAPITOLO 14. QUATTORDICESIMA LEZIONE



essendo  $P_4 = P_{amb}$ . Da questa ricaviamo  $M_4$  con il quale possiamo calcolare  $\nu(M_4)$ , mentre  $\nu(M_1)$  la ricaviamo con il  $M_1$ . Con questi dati calcoliamo infine

$$\theta = \nu(M_4) - \nu(M_1)$$

che rappresenta l'angolo di "deflessione" della corrente, ovvero la tangente alla slip-line nel punto  $O$ . Ogni onda del fascio di espansione a sua volta si riflette regolarmente sull'asse ed in seguito si riflettono sulla slip-line ed interagiscono con essa che inizia a curvare. Riflettendosi sulla slip line la pressione si è abbassata troppo ( $P < P_{amb}$ ) quindi le successive onde riflesse sono onde di compressione che vanno in coalescenza culla slip line, interagendovi e curvandola nuovamente. Nel punto  $C$ , nel quale le onde di compressione vanno in coalescenza, la  $P > P_{amb}$  quindi si genera una nuova espansione. Da questo momento in poi la geometria del getto si ripete e le forme assunte dalla slip-line prendono il nome di "lobi", ovvero il contorno della slip-line. Volendo si può studiare la situazione sull'epicicloide, dove sulla stessa direzione di  $M_1$  si collocano anche le direzioni di  $M_5, M_9, M_{13}, M_{17} \dots$  mentre le altre velocità nei vari campi vengono prese ognuna col proprio angolo rispetto all'orizzontale.

- 2) In questo caso, come detto, la  $P_1 < P_{amb}$  mentre la  $P_2 = P_{amb}$ . Per questo nasce prima un'urto in corrispondenza del punto  $O$ , al di là del quale la corrente (sotto lo spigolo) è ferma ( $v = 0$ ). Noto il rapporto  $P_2/P_1$  che è funzione di  $M_1$  e  $\beta$  ricaviamo infine  $\beta$  stesso. Da qui, indagando nel grafico

# Capitolo 15

## Quindicesima Lezione

20/11/15

### 15.1 Teoria dell'urto-espansione

In questa lezione parleremo della teoria dell'urto-espansione, ovvero dello studio e calcolo dei campi nel caso di corpi sui quali si sviluppano entrambi gli effetti, sia compressione sia espansione. Prendiamo in considerazione vari corpi:

- Profilo alare a **Diamante**:

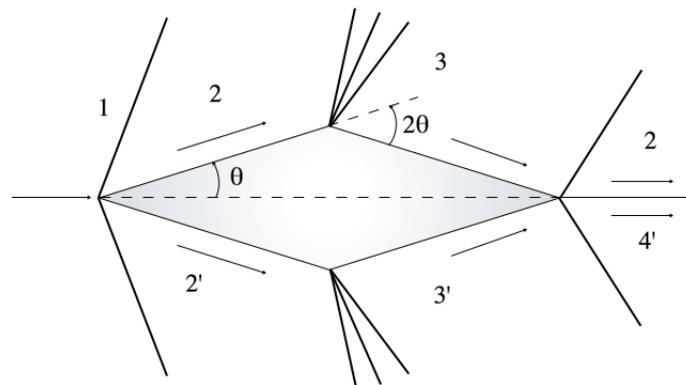


Figura 15.1: Profilo a diamante, dove le frecce indicano la direzione del flusso.