



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2043A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Meniconi Andrea

MATERIA: Applicazioni avanzate di fisica tecnica - Prof.
Chiavazzo

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

NOTAZIONI TENSORIALI

GRANDEZZE FISICHE:

- SCALARI $\rightarrow a \in \mathbb{R}$

- VETTORIALI $\rightarrow \bar{a} \in \mathbb{R}^D$

- TENSORIALI $\rightarrow \underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{D \times D}$

oppure $\bar{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_D \end{Bmatrix}$

oppure $\underline{\underline{A}} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{D1} & a_{D2} & \dots & a_{DD} \end{Bmatrix}$

Se $a \in \mathbb{R}$ $a(x, t)$

$\bar{a} \in \mathbb{R}^D$ $a_i \rightarrow$ se a è un vettore, le sue componenti vanno indicate con un indice

$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{D \times D}$ $a_{ij} \rightarrow$ se A è un tensore, le sue componenti vanno indicate con 2 indici

OPERAZIONI TRA GRANDEZZE

- PRODOTTO SCALARE (INTERNO) :

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \sum_{i=1}^D a_i b_i$$

$$\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^D \rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{b} = \sum_{j=1}^D A_{ij} b_j$$

$$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{D \times D} \rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{b} \in \mathbb{R}^D$$

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^D A_{ij} B_{ij}$$

$$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{D \times D} \rightarrow \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}$$

In generale

$$x \in \mathbb{R}^{nD} \xrightarrow{\nabla \cdot} \nabla \cdot x \in \mathbb{R}^{(n-1)D}$$

- OPERATORE LAPLACIANO $\nabla^2(x) = \nabla \cdot \nabla(x)$

Se

$$a \in \mathbb{R} \rightarrow \nabla^2(a) = \nabla \cdot \nabla(a) = \sum_{i=1}^D \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_i} = \sum_{i=1}^D \frac{\partial^2 a}{\partial x_i^2} \in \mathbb{R}$$

$$\underline{a} \in \mathbb{R}^D \rightarrow \nabla^2(\underline{a}) = \sum_{j=1}^D \frac{\partial a_j}{\partial x_j \partial x_j} \in \mathbb{R}^D$$

In generale:

$$x \in \mathbb{R}^{nD} \xrightarrow{\nabla^2(x)} \nabla^2(x) \in \mathbb{R}^{nD}$$

- CONVENZIONE DI EINSTEIN

Se

$$\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^D \quad \underline{a} \cdot \underline{b} = a_i b_i$$

Teaching Formulas

Pietro Asinari¹

*¹Energy Department, Politecnico di Torino,
Corso Duca degli Abruzzi 24, Torino, Italy*

(Dated: April 20, 2013)

3. Inner product and its generalization

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^D &\quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \doteq \sum_{i=1}^D a_i b_i = \sum_{j=1}^D a_j b_j = \dots = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \in \mathbb{R}, \\
 \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{D \times D}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^D &\quad \rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{b} \doteq \sum_{j=1}^D A_{ij} b_j = \dots = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} A_{11}b_1 + A_{12}b_2 + \dots + A_{1D}b_D \\ A_{21}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{2D}b_D \\ \dots \\ A_{D1}b_1 + A_{D2}b_2 + \dots + A_{DD}b_D \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^D, \\
 \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{D \times D} &\quad \rightarrow \quad \mathbf{A} : \mathbf{B} \doteq \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^D A_{ij} B_{ij} = \dots = \\
 &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + \dots + A_{1D}B_{1D} + \\
 &+ A_{21}B_{21} + A_{22}B_{22} + \dots + A_{2D}B_{2D} + \\
 &+ \dots + A_{D1}B_{D1} + A_{D2}B_{D2} + \dots + A_{DD}B_{DD} \in \mathbb{R},
 \end{aligned}$$

4. Outer (or dyadic) product

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^D \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b} \doteq a_i b_j \doteq \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_D \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_D \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_D b_1 & a_D b_2 & \dots & a_D b_D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{D \times D},$$

5. Operators: Gradient $\nabla()$ or $\text{grad}()$

$$\begin{aligned}
 a \in \mathbb{R} &\quad \nabla &\rightarrow \quad \nabla a \doteq \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial a}{\partial x_D} \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^D, & (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \in \mathbb{R}^D &\quad \nabla &\rightarrow \quad \nabla \mathbf{a} \doteq \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial x_D} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial a_2}{\partial x_D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial a_D}{\partial x_1} & \frac{\partial a_D}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial a_D}{\partial x_D} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{D \times D}, & (8)
 \end{aligned}$$

9. Operators: Laplacian $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla()$

$$a \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} \nabla^2 \\ \rightarrow \end{array} \quad \nabla^2 a \doteq \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 a}{\partial x_D^2} \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^D \quad \begin{array}{l} \nabla^2 \\ \rightarrow \end{array} \quad \nabla^2 \mathbf{a} \doteq \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_D^2} \\ \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_D^2} \\ \dots \\ \frac{\partial^2 a_D}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_D}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 a_D}{\partial x_D^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^D, \quad (14)$$

10. Operators: Laplacian in components

$$a \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} \nabla^2 \\ \rightarrow \end{array} \quad \nabla^2 a \doteq \sum_{i=1}^D \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_i} \doteq \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 a}{\partial x_D^2} \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^D \quad \begin{array}{l} \nabla^2 \\ \rightarrow \end{array} \quad \nabla^2 \mathbf{a} \doteq \sum_{j=1}^D \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} \doteq \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_D^2} \\ \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_D^2} \\ \dots \\ \frac{\partial^2 a_D}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_D}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 a_D}{\partial x_D^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^D,$$

$$\text{IF } x \in \mathbb{R}^{nD} \quad \text{THEN } \nabla^2(x) \in \mathbb{R}^{nD} \quad (16)$$

11. Einstein

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^D \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \doteq a_i b_i \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{D \times D}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^D \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{A} \doteq A_{ij} b_j \in \mathbb{R}^D,$$

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{D \times D} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} : \mathbf{B} \doteq A_{ij} B_{ij} \in \mathbb{R},$$

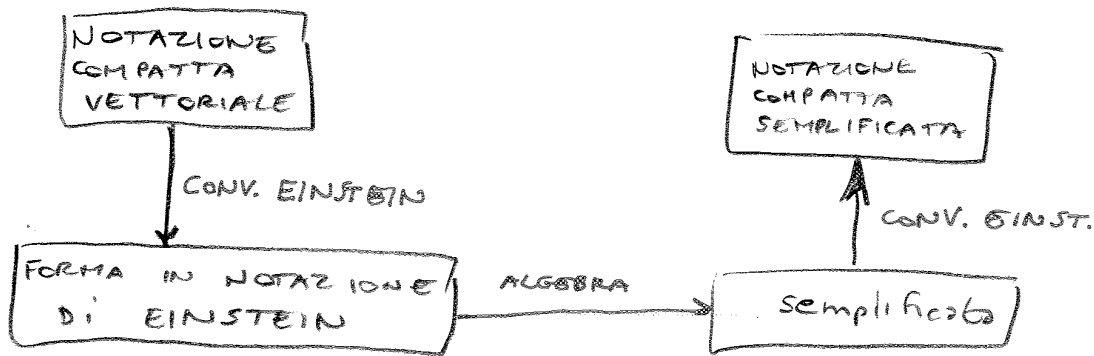
$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^D \quad \begin{array}{l} \nabla \cdot \\ \rightarrow \end{array} \quad \nabla \cdot \mathbf{a} \doteq \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{D \times D} \quad \begin{array}{l} \nabla \cdot \\ \rightarrow \end{array} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} \doteq \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \in \mathbb{R}^D,$$

$$a \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} \nabla^2 \\ \rightarrow \end{array} \quad \nabla^2 a \doteq \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_i} \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^D \quad \begin{array}{l} \nabla^2 \\ \rightarrow \end{array} \quad \nabla^2 \mathbf{a} \doteq \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} \in \mathbb{R}^D, \quad (18)$$

→ UTILITÀ DELLA CONVENZIONE DI EINSTEIN



esempio:

$$\underline{A} \in \mathbb{R}^{D \times D} \rightarrow \nabla \cdot \nabla \cdot \underline{A} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\begin{aligned} \underline{a} \in \mathbb{R}^D, \underline{A} \in \mathbb{R}^{D \times D} &\rightarrow \nabla \cdot (\underline{A} \cdot \underline{a}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ij} a_j) = \\ &= a_j \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} + A_{ij} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \\ &= a_j \frac{\partial (A_{ji})^T}{\partial x_i} + A_{ij} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right)^T = \\ &= a_j \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} + A_{ij} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \\ &= a_j \frac{\partial (A_{ji})^T}{\partial x_i} + A_{ij} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right)^T = \\ &= \underline{a} \cdot \nabla \cdot \underline{A}^T + \underline{A} : (\nabla \underline{a})^T \end{aligned}$$

$$\underline{a} \in \mathbb{R}^D \rightarrow \nabla \cdot (\underline{a} \otimes \underline{a}) \in \mathbb{R}^D$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_i a_j) &= a_i \frac{\partial a_j}{\partial x_j} + a_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \\ &= (\nabla \cdot \underline{a}) \underline{a} + \nabla \underline{a} \cdot \underline{a} \end{aligned}$$

$$\underline{a} \in \mathbb{R}^D \rightarrow \nabla \cdot \nabla \cdot (\underline{a} \otimes \underline{a}) \in \mathbb{R}^D =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (a_i a_j) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_i \frac{\partial a_j}{\partial x_j} + a_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} + a_i \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_i \partial x_j} + \\ &= (\nabla \cdot \underline{a})^2 + \underbrace{a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial a_j}{\partial x_j}}_{\underline{a} \cdot \nabla (\nabla \cdot \underline{a})} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + a_j \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_i \partial x_j} = \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI GAUSS

Per capire questo teorema basta pensare a ciò (ove i bilanci si effettuano mediante lo sviluppo di Taylor):

• BILANCIO SU X:

$$-F_x dy + \left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \right) dy$$

• BILANCIO SU Y:

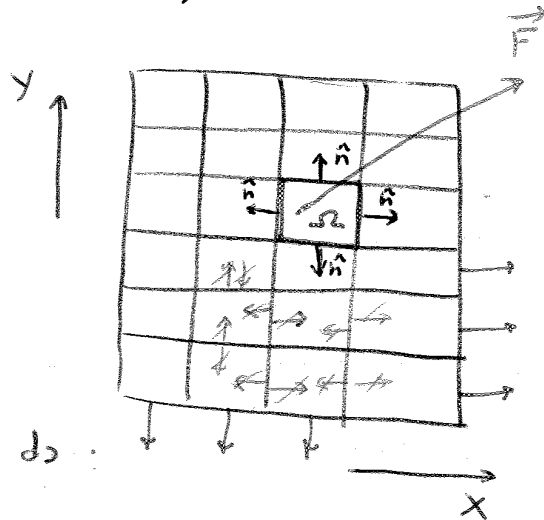
$$-F_y dx + \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y} dy \right) dx$$

Che mettendole insieme mi dà:

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial F_y}{\partial y} dx dy = \nabla \cdot \vec{F} dV$$

Se facciamo il bilancio su tutte le cellette, i contributi interni si elidano tutti e restano solo quelli alla frontiera, ottenendo perciò:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$



Ritornando al continuo:

$$M = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \underline{u}) dV$$

N.B. Il segno meno è dato dal fatto che se la \underline{u} è positiva e quindi diretta verso l'esterno la massa deve diminuire.

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) \right] dV = 0$$

poiché vale $\forall \Omega$, cioè per ogni dominio si ha l'eq. di conservazione della massa.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0}$$

EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA

Vediamo ora come questa eq. si riscrive con la convenzione di Einstein:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0$$

• $Y = Y(t(x, t), x'(x, t))$

imposto:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = f(x, t)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = f(x', t) \quad \text{--- } C$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - C \frac{\partial Y}{\partial x'} = f(x', t)$$

→ non può essere questa una legge fondamentale perché non rispetta il principio galileano

• $\frac{DY}{Dt} = f(x, t)$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} = f(x, t)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + (u' + c) \left[\frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} \right] = f(x', t)$$

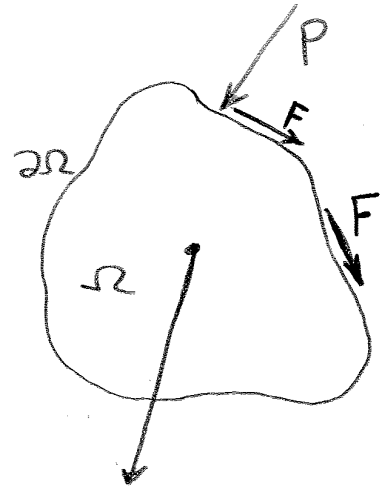
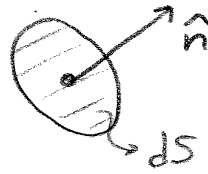
$$\frac{\partial Y}{\partial t} - C \frac{\partial Y}{\partial x'} + (u' + c) \left(\frac{\partial Y}{\partial x'} \right) = f(x', t)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + u' \frac{\partial Y}{\partial x'} = f(x', t) \rightarrow \text{è una legge fisica perché è invariante secondo le trasformazioni di Galileo}$$

TENSORE DEGLI SFORZI

$$\underline{\underline{S}} \cdot \hat{n} = \frac{N}{m^2}$$

$$\underline{\underline{S}} \cdot \hat{n} dS = F$$



Perciò :

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) \right] dV = \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{S}} \cdot \hat{n} dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{\underline{S}} dV$$

N.B.

$\underline{\underline{S}}$ = tensore degli sforzi. Nel caso 3D è una matrice 3×3 ed i suoi elementi hanno dimensioni $[N/m^2]$ e se moltiplicato scalarmente $\underline{\underline{S}}$ per \hat{n} otteniamo lo sforzo nella direzione \hat{n}

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} dV = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) dV - \underbrace{\oint_{\partial \Omega} \underline{\underline{S}} \cdot \hat{n} dS}_{\int_{\Omega} \nabla \cdot (\underline{\underline{S}}) dV} + \dots$$

Bisogna aggiungere il contributo del movimento di un fluido che si muove all'interno di un campo di forze:

$$dF_{vol} = \rho \underline{a} dV$$

$$\Rightarrow F_{vol} = \int_{\Omega} \rho \underline{a} dV$$

con \underline{a} si considera un campo di forze qualunque ed esterno che agisce sulla massa (es. la gravità)

E dunque ottengo in conclusione:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} dV = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) dV - \int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{\underline{S}} dV + \int_{\Omega} \rho \underline{a} dV$$

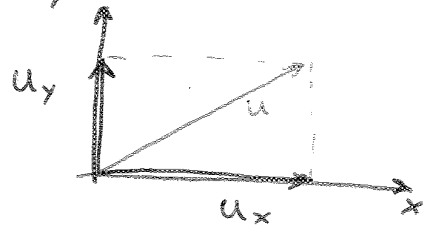
$$\Rightarrow \int_{\Omega} \rho \underline{a} dV = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) + \nabla \cdot \underline{\underline{S}} \right] dV \quad \forall \Omega$$

Che parts a scrivere, poiché vale $\forall \Omega$:

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \boxed{\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) = - \nabla \cdot \underline{\underline{S}} + \rho \underline{a}} \quad \text{VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO}$$

Perché la formula precedente era non simmetrica y e quindi variava se venivano scambiati gli indici, andiamo a scrivere:



$$\underline{\underline{S}} - p \underline{\underline{I}} \propto \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Questa formulazione ancora non ci piace, allora scriviamo:

$$T_z(\underline{\underline{S}} - p \underline{\underline{I}}) = 3p - 3p = 0$$

e per il secondo membro per renderlo a braccio nullo dobbiamo imporre $i=j$:

$$T_z\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = T_z\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) = T_z(2 \nabla \cdot \underline{u}) = 0$$

quindi in questo caso va bene.

Continuiamo inserendo il δ di Kronecker:

$$\delta_{ij} \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\underline{\underline{S}} - p \underline{\underline{I}} \propto \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \underline{u} \delta_{ij}$$

e quindi:

$$\underline{\underline{S}} - p \underline{\underline{I}} = \overset{\text{costante di proporzionalità}}{\bar{K}} \left[\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \underline{u} \underline{\underline{I}} \right]$$

$$\left[\frac{N}{m^2} \right] = [\bar{K}] \left[\frac{m}{s} \quad \frac{1}{m} \right]$$

dunque:

$$[\bar{K}] = \frac{N}{m^2} s = kg \frac{m}{s^2} \frac{s}{m^2} \frac{m}{m} = \frac{kg}{m^3} \frac{m^2}{s} = \rho \nu$$

e perciò, possiamo scrivere:

$$\underline{\underline{S}} - p \underline{\underline{I}} = \pm \rho \nu \left[\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \underline{u} \underline{\underline{I}} \right]$$

coeff. di trasporto cinetico
" viscosità cinematica ν

Per capire se il segno nell'eq. è positivo o negativo assumiamo il fluido incomprimibile e quindi:

$$\rho \approx \rho_0 = \text{cost} \quad (\text{nel tempo e nello spazio})$$

Concentrandosi sul punto di intersezione della gaussiana con $x=0$ avrà in quel punto:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=0 \\ t=0}} < 0 \quad \rightarrow \text{dato dalla concavità che in questo caso è negativa}$$

Se sceglie il segno + questo punto si abbassa e se sceglie il segno meno questo punto si alza e poiché nella fisica i fenomeni tendono a smorzarsi bisogna assumere il segno più, ottenendo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \rightarrow \text{equazione che mi dice come la funzione varierà nel tempo dato un qualunque profilo di velocità (precedentemente noi avevamo scelto quello gaussiano)}$$

$$\underline{\underline{\underline{S}}} - p \underline{\underline{\underline{I}}} = -\rho \nu \left[\nabla \underline{\underline{u}} + \nabla \underline{\underline{u}}^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \underline{\underline{u}} \underline{\underline{I}} \right] \quad (2)$$

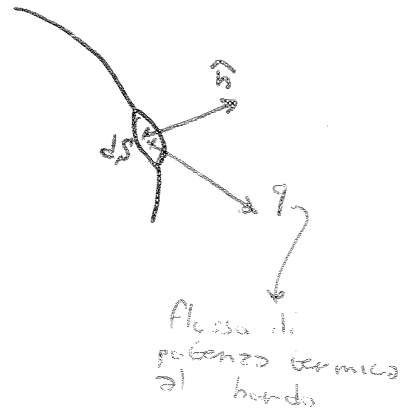
$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \underline{\underline{u}}) = 0 \\ (2) \quad & \frac{\partial p \underline{\underline{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (p \underline{\underline{u}} \otimes \underline{\underline{u}}) = -\nabla \cdot \underline{\underline{S}} + \rho \underline{\underline{a}} \\ (3) \quad & \underline{\underline{\underline{S}}} = p \underline{\underline{\underline{I}}} - \rho \nu \left[\nabla \underline{\underline{u}} + \nabla \underline{\underline{u}}^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \underline{\underline{u}} \underline{\underline{I}} \right] \end{aligned}$$

NAVIER-STOKES-FOURIER PER FLUIDI ISOTERMICI
(si bilancia solo massa e quantità di moto)

18

→ FLUSSO TERMICO

$$-\int_{\partial\Omega} \underline{q} \cdot \hat{n} \, dS$$

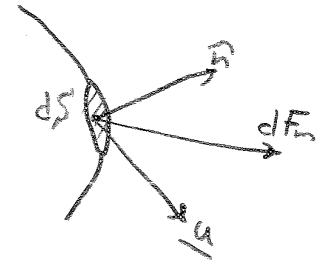


→ FLUSSO MECCANICO

$$\underline{\underline{S}} \cdot \hat{n} \, dS \cdot \underline{u}$$

e perciò:

$$-\int_{\partial\Omega} \underline{\underline{S}} \cdot \hat{n} \cdot \underline{u} \, dS$$



trasformando tutti gli integrali di superficie in integrali di volume mediante Gauss otteniamo:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t \underline{u}) \right] dV = - \int_{\Omega} \left[\nabla \cdot \underline{q} + \nabla \cdot (\underline{\underline{S}} \cdot \underline{u}) \right] dV \quad \forall \Omega$$

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t \underline{u}) = - \nabla \cdot \underline{q} - \nabla \cdot (\underline{\underline{S}} \cdot \underline{u})$$

Questa è l'equazione di conservazione dell'energia ove \underline{q} è espressa dall'equazione fenomenologica di Fourier:

$$\underline{q} = -\lambda \nabla T$$

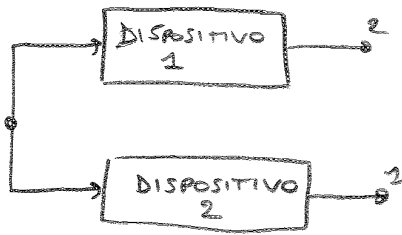
$$\left[\frac{W}{mK} \right]$$

conduttività termica

Se di nuovo si divide $\underline{\underline{S}}$ nella sua parte idrostatica e viscosa e in S_v si inserisce anche $p \underline{I}$ si ha:

$$\underline{\underline{S}} = p \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{S}}_v$$

Per analizzare le prestazioni di un impianto non servono grandezze conservative, ma non conservative e quindi bisogna modificare l'eq. dell'energia totale, la quale è conservativa.



$$\int_{IN} f(\varphi) \cdot \hat{n} \, dS = \int_{OUT} f(\varphi) \cdot \hat{n} \, dS'$$

Se φ è una grandezza conservativa, anche se le prestazioni dei 2 dispositivi sono diverse in 1 e 2 avranno gli stessi valori e quindi non mi permetterebbe di determinare le prestazioni dei 2 dispositivi.

→ ENERGIA CINETICA

$$\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{S} + \rho \underline{a}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) = -\nabla \cdot \underline{S} + \rho \underline{a}$$

molteplico scalarmente per \underline{u} tutti i membri:

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \cdot \underline{u} + \rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = -\nabla \cdot \underline{S} \cdot \underline{u} + \rho \underline{a} \cdot \underline{u}$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} u_i + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_i = -\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} u_i + \rho a_i u_i$$

Utilizzando la definizione di energia cinetica specifica:

$$e_k = \frac{1}{2} \underline{u}^2 = \frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{u} = \frac{1}{2} u_i u_i$$

$$\frac{\partial e_k}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \right]$$

$$\frac{\partial e_k}{\partial t} = u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

2
Ritornandoci alla definizione di energia totale abbiamo che:

$$e_t = e_m + e_i$$

$$e_i = e_t - e_m$$

possiamo dunque ricavare l'eq. dell'energia interna:

$$\frac{\partial(\rho e_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_i \underline{u} + \underline{q}) = - \underline{\underline{S}} : \nabla \underline{u}$$

La quale è una equazione non conservativa a causa del termine $\underline{\underline{S}} : \nabla \underline{u}$. Poiché in quest'ultima eq. abbiamo $-\underline{\underline{S}} : \nabla \underline{u}$ ed in quella dell'energia meccanica avevamo $\underline{\underline{S}} : \nabla \underline{u}$ ciò indica che tutta l'energia persa dall'energia meccanica va a finire nell'energia interna.

Quindi riassumendo:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho e_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_m \underline{u} + \underline{\underline{S}} \cdot \underline{u}) = \underline{\underline{S}} : \nabla \underline{u}} \quad \text{EQ. DELL'ENERGIA MECCANICA}$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho e_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_i \underline{u} + \underline{q}) = - \underline{\underline{S}} : \nabla \underline{u}} \quad \text{INTERNA}$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t \underline{u} + \underline{q} + \underline{\underline{S}} \cdot \underline{u}) = 0} \quad \text{TOTALE}$$

L'eq. dell'energia totale è l'unica eq. conservativa delle 3.

Si vogliono fare alcune considerazioni sul termine:

$$-\underline{\underline{S}} : \nabla \underline{u} = \Sigma$$

Se io dico che:

$$\underline{\underline{S}} = p \underline{\underline{I}}$$

$$-\underline{\underline{S}} : \nabla \underline{u} = -p \underline{\underline{I}} : \nabla \underline{u}$$

$$-p \underbrace{\delta_{ij}}_{\substack{\text{S di Kronecker} \\ \searrow}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -p \nabla \cdot \underline{u}$$

che, dall'equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

Dunque si può scrivere, trascurando la parte viscosa:

$$-\underline{\underline{S}} : \nabla \underline{u} = \frac{\rho}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \gtrless 0$$

Infatti $\frac{D\rho}{Dt}$ può essere $\gtrless 0$ però se il fluido è incomprimibile
 $\nabla \cdot \underline{u} \sim 0$ e perciò:

$$\boxed{-\underline{\underline{S}} : \nabla \underline{u} = \Sigma \sim 0}$$

il quale viene chiamato **CONTRIBUTO IDROSTATICO** Σ

Facendo riferimento alla parte viscosa chiamo:

$$\boxed{\Sigma_v = -\underline{\underline{S}}_v : \nabla \underline{u}}$$

Facendo riferimento al **FLUSSO INCOMPRESSIBILE** e quindi
 che $\nabla \cdot \underline{u} \sim 0$.

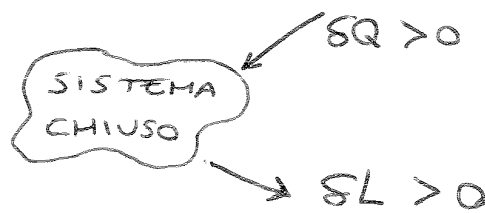
Sotto questa ipotesi abbiamo che:

$$\underline{\underline{S}}_v = \rho \nu (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)$$

Perché nella maggioranza dei casi l'influenza del termine $\frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$ è meno influente di $\sum v$ dunque $-\underline{S} : \nabla u$ è nella maggioranza dei casi $>$ di zero.

Le irreversibilità^{sono} prodotte anche da fenomeni viscosi di origine termica, quindi esiste anche un'altra equazione dissipativa:

I PRINCIPIO PER SISTEMI CHIUSI:



Il PRIMO PRINCIPIO dice:

$$SQ - SL = dE_m + dU$$

Successivamente abbiamo una seconda eq:

EQUAZIONE DI BERNOLLI

$$-SL = -pdV + dE_m + SL_{attenuata}$$

Si ha anche una terza eq. data dal II principio della termodinamica per sistemi chiusi:

$$dS = \frac{SQ}{T} + \delta S_{irr.}$$

ENTROPIA

S = ENTROPIA = grandezza scalare

\underline{S} = tensore degli sforzi = grandezza matriciale

6 Risolva l'eq. dell'energia interna per fluidi incomprimibili:

$$\rho \frac{De_i}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{q} + \frac{\rho}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \Sigma_v$$

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = -\frac{\rho}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \nabla \cdot \underline{q} + \frac{\rho}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \Sigma_v$$

Perché quei 2 contributi si elidono posso scrivere:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\frac{1}{T} \nabla \cdot \underline{q} + \underbrace{\left(\frac{\Sigma_v}{T} \right)}_{\geq 0}$$

Valutiamo ora la componente di cui non conosciamo il segno:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\underline{q} \frac{1}{T} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q_j \frac{1}{T} \right) = \frac{1}{T} \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + q_j \frac{\partial \left(\frac{1}{T} \right)}{\partial x_j} = \\ &= \frac{1}{T} \nabla \cdot \underline{q} + \underline{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) = \frac{1}{T} \nabla \cdot \underline{q} - \frac{1}{T^2} \underline{q} \cdot \nabla T \end{aligned}$$

ove:

$$\frac{1}{T} \nabla \cdot \underline{q} = \nabla \cdot \left(\frac{\underline{q}}{T} \right) + \frac{1}{T^2} \underline{q} \cdot \nabla T = \nabla \cdot \left(\frac{\underline{q}}{T} \right) - \frac{\lambda}{T^2} \nabla T \cdot \nabla T$$

nell'ultima eq ho sostituito q con l'eq di Fourier.

ora posso sostituire tutto questa nell'eq di GIBBS:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot \left(\frac{\underline{q}}{T} \right) + \frac{\lambda}{T^2} \nabla T \cdot \nabla T + \frac{\Sigma_v}{T}$$

L'eq viene scritta in questa forma perché l'eq. dissipativa dovuta agli scambi termici viene espressa nella seguente maniera:

$$\boxed{\Sigma_\alpha = \frac{\lambda}{T} \nabla T \cdot \nabla T} \quad \begin{array}{l} \text{EQ. DISSIPATIVA DOVUTA} \\ \text{AGLI SCAMBI TERMICI} \end{array}$$

è quindi:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot \left(\frac{\underline{q}}{T} \right) + \frac{\Sigma_v + \Sigma_\alpha}{T}$$

ciò permette di scrivere:

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho s \underline{u} + \frac{\underline{q}}{T} \right) = \frac{\Sigma_v + \Sigma_\alpha}{T} \geq 0 \quad \rightarrow \text{L'entropia non si conserva, ma aumenta}$$

Abbiamo:

$$\frac{\partial(\rho e_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_i \underline{u} + \underline{q}) + \rho \nabla \cdot \underline{u} = \underline{S}_v : \nabla \underline{u}$$

ed essendo valida $\rho e_i = \rho h - p$ avrà:

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h \underline{u} - p \underline{u} + \underline{q}) + \rho \nabla \cdot \underline{u} = \underline{S}_v : \nabla \underline{u}$$

$$\textcircled{*} \frac{\partial \rho h}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h \underline{u} + \underline{q}) - \nabla \cdot (p \underline{u}) + \rho \nabla \cdot \underline{u} = \underline{S}_v : \nabla \underline{u}$$

potendo scrivere:

$$\nabla \cdot (p \underline{u}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (p u_j)$$

possiamo scrivere:

$$\nabla \cdot (p \underline{u}) = p \nabla \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla p$$

Sostituendo quest'ultima nella $\textcircled{*}$ e semplificando otteniamo:

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h \underline{u} + \underline{q}) - \cancel{p \nabla \cdot \underline{u}} - \underline{u} \cdot \nabla p + \cancel{p \nabla \cdot \underline{u}} = \underline{S}_v : \nabla \underline{u}$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h \underline{u} + \underline{q}) - \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla p \right] = \underline{S}_v : \nabla \underline{u}$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h \underline{u} + \underline{q}) = \frac{Dp}{Dt} + \underline{S}_v : \nabla \underline{u}$$

$$\boxed{\rho \frac{Dh}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{q} + \frac{Dp}{Dt} + \underline{S}_v : \nabla \underline{u}} \quad \text{EQ. DELL'ENTALPIA}$$

Quest'ultima si aggiunge alle altre equazioni.

Si moltiplica ora tutta la prima equazione per $\frac{\partial}{\partial t}$ e la seconda per $\nabla \cdot$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \\ \nabla \cdot \frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \nabla P = 0 \end{cases}$$

È possibile invertire $\nabla \cdot$ e $\frac{\partial}{\partial t}$ nella prima eq. ottenendo, combinando le 2 eq.:

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p}$$

Questo è un'eq. non chiusa che diventa chiusa grazie all'eq. di stato dei gas perfetti.

$$\nabla P(p, s) = \frac{\partial P}{\partial x_s}(p, s)$$

Possiamo scrivere:

$$\nabla P(p, s) = \frac{\partial P}{\partial x_s}(p, s) = \frac{\partial P}{\partial p} \Big|_{s=\text{cost}} \frac{\partial p}{\partial x_s} + \frac{\partial P}{\partial s} \Big|_{p=\text{cost}} \frac{\partial s}{\partial x_s} =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial p} \Big|_s \nabla p + \frac{\partial P}{\partial s} \Big|_p \nabla s$$

$\nabla s = 0$ perché trascuriamo i fenomeni dissipativi

$$\nabla p = \frac{\partial P}{\partial p} \Big|_s \nabla p$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{\partial P}{\partial p} \Big|_s} = c_s}$$

→ VELOCITÀ DEL SUONO: Velocità di propagazione dei piccoli segnali di pressione

$$\boxed{\nabla p = c_s^2 \nabla p}$$

e quindi possiamo scrivere:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p = \nabla \cdot \nabla p$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla \cdot \nabla p = c_s^2 \nabla^2 p$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 p} \text{ EQ. DELLE ONDE}$$

4 e quindi avremo che la velocità del suono vale:

$$C_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\gamma \bar{c} \rho^{\gamma-1}} = \sqrt{\gamma \bar{c} \frac{\rho^\gamma}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

e volando l'eq. di stato per i gas ideali:

$$\frac{p}{\rho} = RT$$

avremo infine che:

$$C_s = \sqrt{\gamma RT}$$

VELOCITÀ DEL SUONO
PER GAS IDEALE E
FLUSSO ISENTROPICO

L'eq. delle onde diventa uguale a:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$$p(x,t) = f(x - c_s t) + g(x + c_s t)$$

f e g sono due qualsiasi funzioni di nostra scelta perché se dico che:

$$p(x,t) = f(\overbrace{x - c_s t}^{\alpha}) = f(\alpha(x,t))$$

mediante la regola della catena abbiamo:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -c_s \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

derivando ora rispetto alla spaziale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) = -c_s \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = c_s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot 1$$

∴ perciò f rispetta l'eq. delle onde e quindi anche g ed la loro somma è ancora una soluzione.

Un'altro è il bilancio di energia:

$$\phi - W_c = \frac{d}{dt} (U + E_c + E_p + P_0 V)_{CV} + \sum_{k=2}^{DN} \pm G_k (h_k + e_{ck} + e_{pk})$$

ϕ → potenza termica scambiata
 W_c → la potenza meccanica scambiata con l'esterno (potenza tecnica)
 $(U + E_c + E_p + P_0 V)_{CV}$ → termine che considera la deformazione del sistema durante il tempo
 $\sum_{k=2}^{DN} \pm G_k (h_k + e_{ck} + e_{pk})$ → considero gli scambi di energia riguardanti la massa entrante ed uscente dal sistema

→ SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA PER UN SISTEMA APERTO

$$\frac{\phi}{T} + \sum_i \dots = \left(\frac{dS}{dt} \right)_{CV} + \sum_{k=1}^{DN} \pm G_k \cdot S_k$$

$\sum_i \dots$ → termine irreversibile dell'entropia

L'exergia tiene in conto del 1° e 2° principio. Si tiene dunque conto della:

- QUANTITÀ dell'energia → tenuto conto dal 1° principio
- QUALITÀ " " " " " " 2° principio

Un sistema evolve spontaneamente verso una condizione di disordine e di caos. Anche questa condizione di disordine è a sua volta una condizione di equilibrio.

Quando i sistemi evolvono in maniera spontanea l'entropia totale aumenta (l'entropia del sistema aumenta). Se l'entropia del nostro sistema diminuisce, l'entropia del sistema esterno aumenta di una quantità maggiore della diminuzione del nostro sistema.

Lo stato di riferimento è l'ambiente di riferimento, poiché essa impone le caratteristiche di equilibrio al quale evolverà il sistema in esame.

EXERGIA : Quantità massima di lavoro che si può ottenere da un sistema fino a quando quest'ultimo raggiunge l'equilibrio con l'ambiente esterno.

Il lavoro è la forma di energia più pregiata che si può avere.

Un sistema può interagire con l'esterno scambiando:

- calore → L'ambiente ha capacità termica infinita
- massa → Sono le interazioni chimiche tra sistema ed ambiente.
- lavoro → Il lavoro scambiato per variazione di volume viene completamente dissipato dall'ambiente poiché l'ambiente non varia il suo volume

→ CO_2 in atmosfera oggi è di 400 ppm ed ogni anno aumento di 2 ppm

→ differenza tra STATO MORTO E RISTRETTO è data dal fatto che il secondo fa riferimento ad un equilibrio termico ed il primo ad un equilibrio completo, sia chimico che termico.
Quindi per lo stato morto ristretto non è considerato o squilibrio chimico. (ha un equilibrio di velocità, quota, pressione).

Il concetto di qualità porta anche al fatto che è possibile trasformare completamente lavoro in calore, ma non il viceversa. E' meglio aumentare la qualità di un'energia dove sacrificare una parte di energia ad una sorgente a temperatura più bassa.

¹²
Il contributo cinetico e potenziale sono coincidenti con l'energia cinetica e quella potenziale.

L'exergia fisica e chimica necessitano di diverse considerazioni:

→ EXERGIA FISICA

Guardare sulla pagina accanto b_{ph} →

→ EXERGIA CHIMICA

Trasformazione che può avere una portata in massa passando dallo stato morto ristretto allo stato morto, cioè raggiunge la condizione di equilibrio che può subire una sostanza quando si porta in condizioni anche di equilibrio chimico con la bioster.

EQUAZIONE DI BILANCIO DELL' EXERGIA (EQ. DELL' ENERGIA UTILIZZABILE)

Abbiamo 3 possibili forme:

1. exergia associata ai flussi termici
2. " " ai trasferimenti di energia meccanica
3. exergia associata ai trasferimenti di massa

Il secondo principio per sistemi aperti è invece:

$$\sum \frac{\phi_j}{T_j} + \frac{\phi_0}{T_0} + \sum \dot{z}_i = \left(\frac{d}{dt} S \right)_{VC} + \sum \pm G_k S_k$$

ora sottraiamo al primo principio il secondo moltiplicato per T_0 :

$$PPSA - T_0 SPSA$$

$$\sum \phi_j \left(1 - \frac{T_0}{T_j} \right) - W_k = \left[\frac{d}{dt} (U + E_c + E_p + P_0 V - T_0 S) \right]_{VC} + \sum \pm G_k (h + e_c + e_p - T_0 s) + T_0 \sum \dot{z}_i$$

Questa equazione viene espressa in termini di energia nel seguente modo:

$$\sum \phi_j \left(1 - \frac{T_0}{T_j} \right) - L_k = \Delta (U + E_c + E_p + P_0 V - T_0 S) + \sum \pm \int_{t_1}^{t_2} G_k (h + e_c + e_p - T_0 s) dt + T_0 \Sigma$$

ϕ_0 = flusso termico che il sistema scambia con l'ambiente

ϕ_i = flussi termici che il sistema può scambiare con altri sistemi interni

Introduciamo ora la QUOTA DISPONIBILE DI ENTALPIA:

$$\xi = h - T_0 s$$

Definiamo exergia ^{fisica} come la quota disponibile di entalpia ξ meno quella associata allo stato ristretto ξ_0 :

$$b = \xi - \xi_0 = (h - T_0 s) - (h_0 - T_0 s_0)$$

ottenendo dunque:

$$\sum \phi_j \left(1 - \frac{T_0}{T_j} \right) - W_k = \left[\frac{d}{dt} (U + E_c + E_p + P_0 V - T_0 S) \right]_{VC} + \sum \pm G_k \left[\underbrace{(h - T_0 s) - (h_0 - T_0 s_0)}_b + \underbrace{(h_0 - T_0 s_0)}_{\xi_0} + e_c + e_p \right] + T_0 \sum \dot{z}_i$$

° Nel caso di sistema stazionario, fluido non comprimibile e sistema non reattivo allora posso scrivere che il termine:

$$\sum \pm G_k \bar{f}_{a_k} = 0$$

e posso semplificare l'eq precedente come:

$$\sum \psi_{q_j} - W_t = \left(\frac{dA^t}{dt} \right)_{vc} + \sum \pm G_{bk}^t + \psi_i$$

ove

$$\psi_{q_j} = \phi_j \left(1 - \frac{T_0}{T_j} \right)$$

$$G_{bk}^t = G_k b_k^t = \text{Flusso exergetico associato ad una portata di massa.}$$

$$\psi_i = T_0 \sum_i = \text{exergia distrutta}$$

Si definisce il LAVORO PERSO mediante il teorema di Jouy-Stodola :

$$W_b = \sum \psi_{q_j} - \left(\frac{dA^t}{dt} \right)_{vc} - \sum \pm G_{bk}^t - \psi_i$$

Se la trasformazione è reversibile e quindi $\sum_i = 0$ allora $\psi_i = 0$ e perciò:

$$W_{t,max} = \psi_q - \left(\frac{dA^t}{dt} \right)_{vc} - \sum \pm G_{bk}^t$$

e quindi:

$$W_{perso} = W_{t,max} - W_t = T_0 \sum_i$$

$$\frac{\partial p \cdot a_t}{\partial t} + \nabla \cdot [p a_t \underline{u} + \underline{q} \theta + \rho p \underline{u} - \underline{S}_v \cdot \underline{u}] = -\frac{T_0}{T} (\Sigma_v + \Sigma_a)$$

$$\boxed{\frac{\partial p a_t}{\partial t} + \nabla \cdot [p b_t \underline{u} + \underline{q} \theta - \underline{S}_v \cdot \underline{u}] = -\frac{T_0}{T} (\Sigma_v + \Sigma_a)}$$

FORMULAZIONE DELL'ESERIZIO IN FORMA LOCALE

EQUAZIONE DELLA CONDUZIONE NEI SOLIDI

È un bilancio di entalpia nei mezzi solidi

$$\frac{\partial p h}{\partial t} + \nabla \cdot (p h \underline{u}) \overset{=0}{=} = -\nabla \cdot \underline{q} + \frac{\partial p}{\partial t} \overset{=0}{=} + \underline{S}_v \cdot \nabla \underline{u} \overset{=0}{=}$$

nei solidi la velocità (\underline{u}) è uguale a zero ed inoltre la pressione nei solidi non varia $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$

All'interno di un solido

$$\begin{aligned} \rho &= \text{cost} \\ C_p &= \text{cost} \\ \lambda &= \text{cost} \end{aligned}$$

$$h = C_p T$$

e dunque se la relazione fenomenologica di Fourier vale, avremo che:

$$\underline{q} = -\lambda \nabla T$$

e quindi:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (-\lambda \nabla T)$$

Solo se il mezzo è omogeneo ed isotropo la λ può essere portata fuori dalla divergenza

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \nabla^2 T$$

parametro dinamico $[\frac{W}{m \cdot K}]$

$\frac{\lambda}{\rho C_p}$

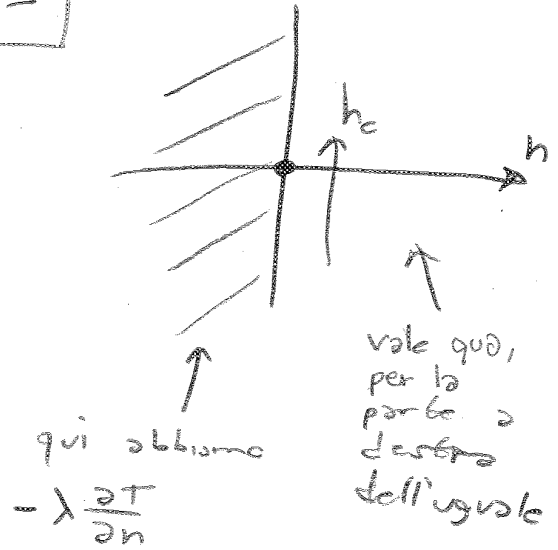
α DIFFUSIVITÀ TERMICA $\alpha = [\frac{m^2}{s}]$ coefficiente cinematico, non ha dimensioni dinamiche

Fourier vale sugli scambi stazionari e quindi avremo:

$$- \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h_c [T_\infty - T(s, t)]$$

$$\forall x \in \Omega \quad \forall t > 0$$

Le due quantità devono essere uguali per una condizione di continuità del flusso e quindi deve valere $\forall x \in \Omega$ e $\forall t > 0$



Ed indico con W_t la POTENZA tecnica:

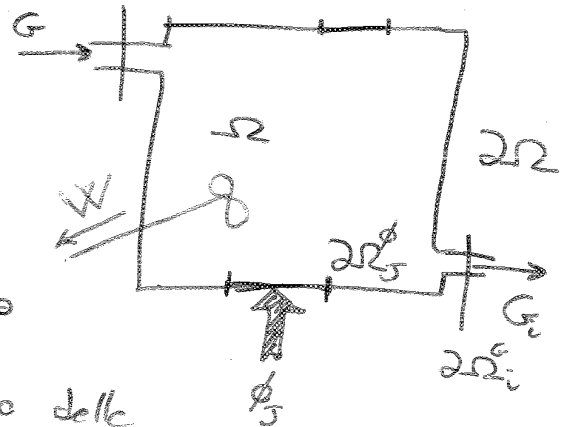
$$\Rightarrow W_t = - \int_{\partial\Omega} (\underline{S}_v \cdot \underline{u}) \cdot \hat{n} dA$$

↑
lavoro entrante nel sistema

Considero una superficie permeabile alla massa ed indico con G la massa di fluido che entra.

Indico con i l'ingresso/uscita i-esima del sistema.

Indico con j le sezioni in cui il sistema scambia calore con l'esterno in modo conduttivo dovuto a differenze di temperatura



sto distinguendo di tutto il dominio delle sezioni permeabili alla massa ed altre solo al calore.

in generale potremmo avere un organo meccanico all'interno del mio volume che estrae o immette potenza tecnica.

Detto ciò, posso scrivere, inserendo nello (*) le (**):

$$\sum_{j=1}^M \phi_j - W_t^* = \frac{d}{dt} (U + E_m)_{VC} + \sum_{i=1}^N G_i (h + e_m)_i$$

PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA PER SISTEMI APERTI

$$\phi_j = - \int_{\partial\Omega_j} \underline{q} \cdot \hat{n} dA$$

$$G_i (h + e_m)_i = \int_{\partial\Omega_i} \rho (h + e_m) \underline{u} \cdot \hat{n} dA$$

$$\Rightarrow G_i = \int_{\partial\Omega_i} \rho \underline{u} \cdot \hat{n} dA$$

Si definisce:

$$W_t = W_t^* - P_0 \frac{dV}{dt}$$

EQ. IN FORMA INTEGRALE PER L'ENTROPIA

$$\textcircled{*} \frac{\partial \rho s}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \underline{u} s + \frac{\underline{q}}{T} \right) = \frac{\Sigma_v + \Sigma_\alpha}{T}$$

$$\textcircled{*} \int_{\Omega} \frac{\partial \rho s}{\partial t} dV = \frac{dS_{vc}}{dt} \rightarrow \text{TERRINE INSTAZIONARIO}$$

$$\textcircled{*} \oint_{\partial\Omega} \rho s \underline{u} \cdot \hat{n} dA = \int_{\partial\Omega^e} \rho s \underline{u} \cdot \hat{n} dA = G_i s_i$$

ove s_i è l'entropia specifica media sulla corona $\partial\Omega_i^e$
 G_i è la portata massica che attraversa la sezione $\partial\Omega_i^e$

Dico ora che:

$$\textcircled{*} \frac{1}{T_j} \phi_j = \int_{\partial\Omega_j^*} \frac{q}{T} \cdot \hat{n} dA$$

ove $T_j = \frac{\int_{\partial\Omega_j^*} q \cdot \hat{n} dA}{\int_{\partial\Omega_j^*} \frac{q}{T} \cdot \hat{n} dA} =$ è una temperatura media calcolata in questa maniera

Definiamo ora la quantità di entropia irreversibile:

$$\textcircled{***} \Psi_{irre} = \int_{\Omega} \frac{\Sigma_v + \Sigma_\alpha}{T} dV$$

Mettiamo ora insieme i vari termini per ottenere la FORMULAZIONE INTEGRALE DELL'ENTROPIA partendo da quella locale:

$$\sum_{i=1}^M \frac{\phi_j}{T_j} + \Psi_{irre} = \frac{dS_{vc}}{dt} + \sum_{i=1}^N G_i s_i$$

USO DELLE EQ INTEGRALI DELL'EXERGIA 15/04/15

Se non si definisce il volume di controllo questa formula non ha senso.

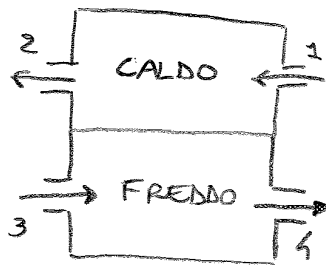
Noi ci troveremo a lavorare con la seguente eq.:

$$\frac{d(E_e - T_0 S)_{VC}}{dt} = \sum_i \phi_i \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) - W_e^* + \sum_{j=1}^{in} G_j b_j - \sum_{k=1}^{out} G_k b_k - T_0 \Psi_{irr}$$

In tale formula si divide il flusso di massa in ingresso e in uscita tenendo conto dei segni nell'eq.

$$b_i = h - h_0 - T_0 (s - s_0) + e_c + e_p \quad \text{flusso specifico di exergia}$$

In un recuperatore controcorrente di calore:



Definiamo l'EFFICIENZA EXERGETICA come la spesa exergetica per far funzionare un determinato componente:

$$\eta_{ex} = \frac{Ex_{utile}}{Ex_{spesa}}$$

e dunque in questo caso

$$\eta_{ex} = \frac{G_3 (b_1 - b_3)}{G_{caldo} (b_2 - b_1)}$$

$$\eta_{ex} = \frac{Ex_{out}}{Ex_{in}} = \frac{Ex_{in} - Ex_{distrutta}}{Ex_{in}} = 1 - \frac{Ex_{distrutta}}{Ex_{in}}$$

Dal punto di vista della seconda legge della termodinamica:

$$\frac{d(S)_{VC}}{dt} + \sum_k G_k S_k = \sum_j \frac{\dot{\phi}_j}{T_j} + \Psi_{122}$$

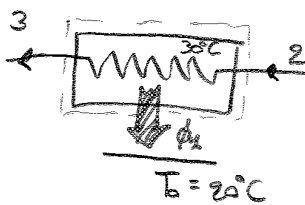
Per il compressore

In regime stazionario nel VC l'entropia non varia $\rightarrow \frac{d(S)_{VC}}{dt} = 0$

In condizioni di adiabaticità le $\dot{\phi}$ sono uguali a zero:

$$G_{R134a} (S_2 - S_1) = \Psi_{122}$$

Per il CONDENSATORE



$$G_{R134a} (S_3 - S_2) = \frac{\dot{\phi}_2}{T_0} + \Psi_{122}$$

In questo caso abbiamo anche un flusso di calore.

Il problema nasce ora per stimare T_2

Nella Valvola di laminazione, considerando il processo adiabatico si ha:



$$G(S_4 - S_3) = \Psi_{122}$$

Riscrivendo l'eq. dell'exergia:

$$\frac{d}{dt} (A_e + P_e V) = \sum_i \dot{\phi}_i \left(1 - \frac{T_0}{T_i} \right) - W_e + \sum_{j=2}^{in} G_j b_j - \sum_{k=2}^{out} G_k b_k - T_0 \Psi_{122}$$

Per il COMPRESSORE:

$$-W_e = G(b_2 - b_1) + T_0 \Psi_{122}$$

$$T_0 \Psi_{122} = -W_e - G_{R134a} (b_2 - b_1)$$

Per calcolare l'exergia complessivamente distrutta si può analizzare l'intero sistema o analizzare componente per componente e poi andare a sommare i vari contributi.

La modifica su di un componente porta a modificare i valori degli altri componenti e quindi il peggioramento di un componente comporta un peggioramento anche degli altri.

Example 1. Exergy destruction and efficiency of an heat-exchanger

The exergy analysis of a simple counterflow heat-exchanger is carried out.

The exergy equation at steady state for a control volume can be written as:

$$\underbrace{\frac{d(E_t - T_0 S)_{CV}}{dt}}_{\text{Rate of exergy change}} = \underbrace{\sum_i \Phi_i \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)}_{\text{Rate of exergy transfer}} - W_t + \underbrace{\sum_{j=1}^{in} G_j b_j - \sum_{k=1}^{out} G_k b_k}_{\text{Rate of exergy destruction}} - T_0 \Sigma_{irr}$$

$$b_i = h - h_0 - T_0(s - s_0) + e_c + e_p \quad \text{Specific flow exergy}$$

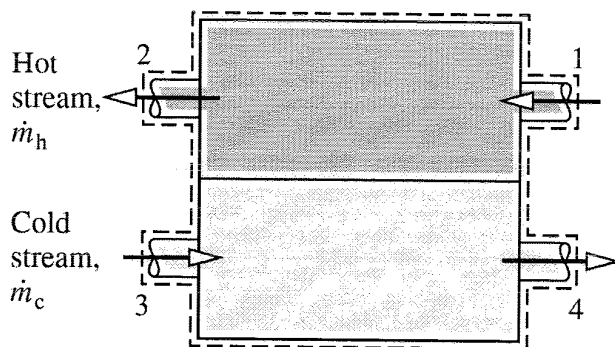
For the sake of exergy analysis, a reference 'dead-state' (denoted by subscript '0' generally corresponding to the external environment must be also defined.

Example 1. Exergy destruction and efficiency of an heat-exchanger

The heat-exchanger under investigation is a counterflow air recuperator.

Hot air enters the heat-exchanger at 1020 K, 1.1 bar, and exits at 1 bar.
Cold air enters at 610 K, 10 bar, and exits at 860 K, 9.7 bar.

A control volume and dead state must be defined prior to starting the exergy accounting.



Bio-sphere 'dead state':

T_0 [K] 300

p_0 [bar] 1,0

h_0 [J/kg] 1571,0

s_0 [J/kg/K] 9,22

Example 2. Exergy analysis of a vapor-compression refrigeration cycle

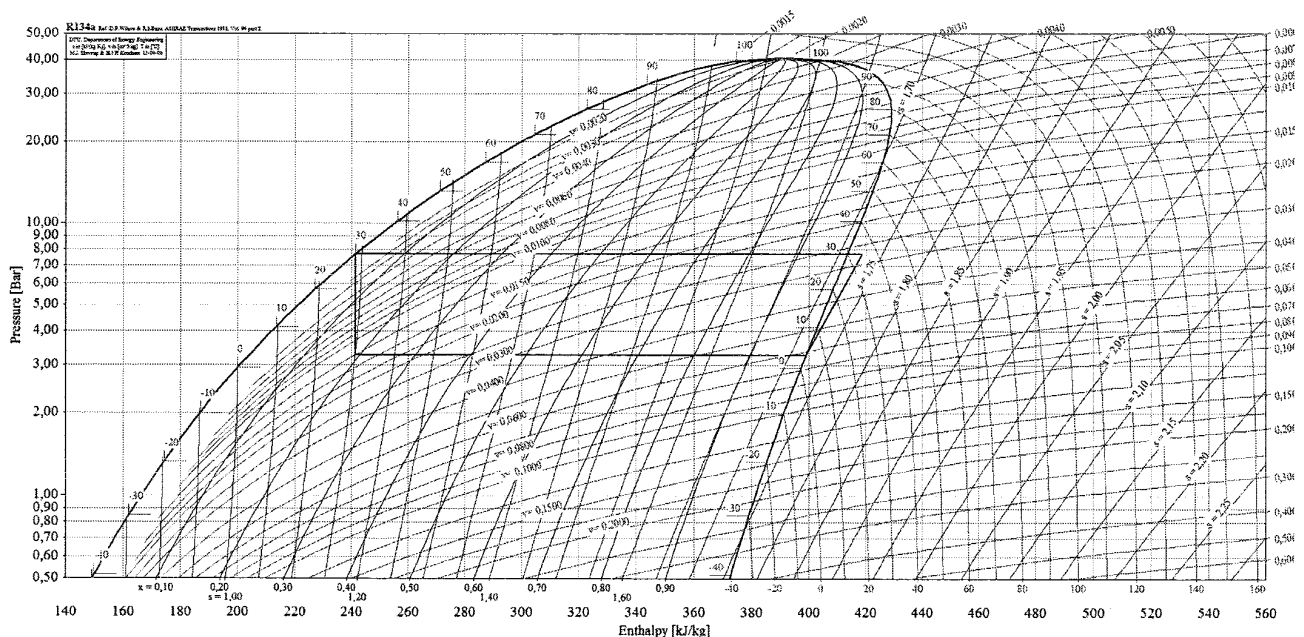
Given parameters of the cycle are the evaporation and condensation temperatures of the refrigerant fluid, its mass flow rate and isentropic efficiency of the compressor.

$$T_e = 3^\circ\text{C} \quad T_c = 30^\circ\text{C} \quad G_{R134a} = 0.057 \text{ kg/s} \quad \eta_{ic} = 0.9$$

The condensation process takes place in an heat-exchanger where the refrigerant fluid release heat to the external environment found at a temperature $T_1 = T_H = 20^\circ\text{C}$.

The *useful* heat change rate is accomplished in the evaporator component, where the refrigerant fluid receives heat from a cold environment found at $T_2 = T_C = 20^\circ\text{C}$.

Example 2. Exergy analysis of a vapor-compression refrigeration cycle



Coolpack tool can be used to draw the cycle and evaluate thermodynamic fluid properties.

Example 2. First law analysis

The first law of thermodynamics (energy conservation) can be applied to the CV immediately surrounding each component:

$$\Phi - W_i = \frac{d}{dt}(E_t)_{VC} + \sum_{k=1}^{NC} G_k (h + e_c + e_p)_k$$

The specific work and energy exchanged in each component are evaluated as following:

Compressor, Γ_{12} (irreversible adiabatic process) $-l_c = (h_2 - h_1)$

Condenser, Γ_{23} (isobaric process) $q_1 = (h_3 - h_2)$

Lamination valve, Γ_{34} (isoenthalpic process) $h_3 = h_4$

Evaporatore, Γ_{41} (isobaric process) $q_2 = (h_1 - h_4)$

First law analysis - Results

Energy Analysis	Entalphy/Exergy (kJ/kg)
$\Delta h_{\text{CMPR}} = h_B - h_A$ (kJ/kg)	19,8
$\Delta h_{\text{COND}} = h_C - h_B$ (kJ/kg)	-178,5
$\Delta h_{\text{VALVE}} = h_D - h_C$ (kJ/kg)	0,0
$\Delta h_{\text{EVAP}} = h_A - h_D$ (kJ/kg)	158,7
$\Delta b_{\text{CMPR}} = b_B - b_A$ (kJ/kg)	17,9
$\Delta b_{\text{COND}} = b_C - b_B$ (kJ/kg)	-6,0
$\Delta b_{\text{VALVE}} = b_D - b_C$ (kJ/kg)	-2,2
$\Delta b_{\text{EVAP}} = b_A - b_D$ (kJ/kg)	-9,7
Compressor work, kW	-1,13
Condenser heat duty, kWt	-10,17
Evaporator heat duty, kWt	9,05
COP	8,02
COP_{id}	28,32
$W_{\text{CMPR},id}$, kW	-0,319

Bio-sphere dead state:	
T_0 [K]	293,15
p_0 [bar]	1
$T_{amb} T_H$ [°C]	293,15
$T_{cold} T_C$ [°C]	283,15

$$COP = \frac{\Phi_{EVAP}}{W_{mech}} = \frac{\Phi_{EVAP}}{-W_{CMPR}} = \frac{h_A - h_D}{h_A - h_B}$$

$$COP_{id} = \frac{T_C}{T_H - T_C} \quad W_{\text{CMPR},id} = \Phi_{EVAP} \cdot COP_{id} \quad \text{Minimum work required}$$

Exergy efficiency of components (I)

Compressor, Γ_{12} (irreversible adiabatic process):

$$-W_c = G_R(b_2 - b_1) + T_0 \Sigma_{irr} \quad -W_c = (G'_{b2} - G'_{b1}) + \Psi_i$$

$$\varepsilon = \frac{G'_{b2} - G'_{b1}}{|-W_c|}$$

Condenser, Γ_{23} (constant pressure process):

$$\Phi_1 \cdot \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right) = G_R(b_3 - b_2) + T_0 \Sigma_{irr} \quad (G'_{b2} - G'_{b3}) = -\Phi_1 \cdot \left(1 - \frac{T_0}{T_0}\right) + \Psi_i$$

$$\varepsilon = \frac{-\Phi_1 \cdot \left(1 - \frac{T_0}{T_0}\right)}{G'_{b2} - G'_{b3}}$$

$$T_1 = T_0 = T_H$$

Exergy efficiency of components (II)

Lamination valve, Γ_{34} (isoenthalpic process):

$$0 = G_R(b_4 - b_3) + T_0 \Sigma_{irr} \quad G'_{b3} = G'_{b4} + \Psi_i$$

$$\varepsilon = \frac{G'_{b4}}{G'_{b3}}$$

Evaporator, Γ_{41} (constant pressure process):

$$\Phi_2 \cdot \left(1 - \frac{T_0}{T_2}\right) = G_R(b_1 - b_4) + \Psi_i \quad (G'_{b4} - G'_{b1}) = -\Phi_e \cdot \left(1 - \frac{T_0}{T_2}\right) + \Psi_i$$

$$\varepsilon = \frac{-\Phi_e \cdot \left(1 - \frac{T_0}{T_2}\right)}{G'_{b4} - G'_{b1}}$$

$$T_2 = T_C$$

Exergy analysis – Sensitivity analysis

Sensitivity analysis toward the isentropic efficiency of the compressor:

	η_{ic}	1	η_{ic}	0.9	η_{ic}	0.7
	W (kW)	W(%)	W (kW)	W(%)	W (kW)	W(%)
ideal	-0.317	31.4%	-0.317	28.3%	-0.317	22.0%
ψ_i, Γ_{12}	0.000	0.0%	-0.107	9.5%	-0.409	28.4%
ψ_i, Γ_{23}	-0.337	33.4%	-0.342	30.5%	-0.359	24.9%
ψ_i, Γ_{34}	-0.117	11.6%	-0.117	10.4%	-0.117	8.1%
ψ_i, Γ_{41}	-0.238	23.6%	-0.238	21.3%	-0.238	16.5%
	-1.009	100.0%	-1.121	100.0%	-1.441	100.0%

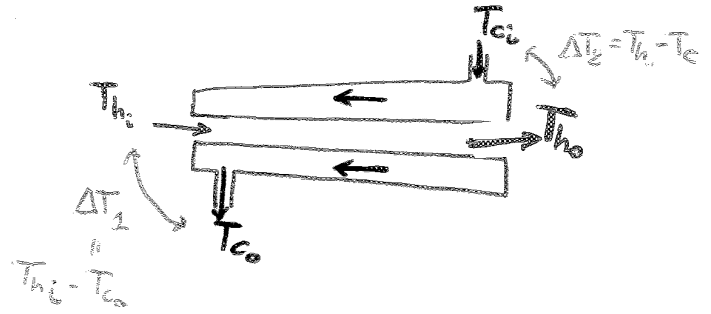
By decreasing the isentropic efficiency of the compressor, the (internal) irreversibility of the compressor is increased. The amount exergy dissipation in the condenser unit increases as well.

Perché la temperatura varia lungo lo scambiatore si utilizza la temperatura media logaritmica

$$\dot{Q} = AU\Delta T_{me}$$

ove

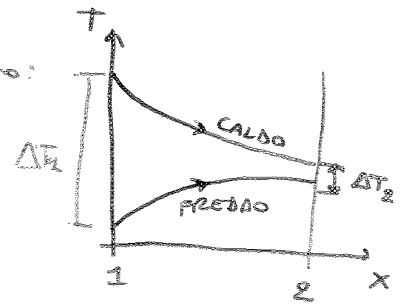
$$\Delta T_{me,cs} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}}$$



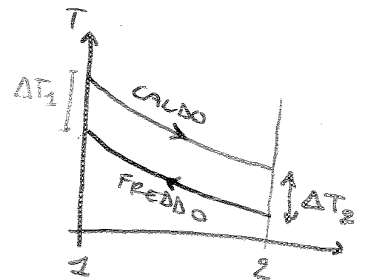
In questo caso non ha nessuna importanza se lo scambiatore è in controcorrente o in equicorrente.

Infatti in quest'ultima caso combaciano le formule per il calcolo di ΔT_1 e ΔT_2 , ma il principio di ragionamento resta lo stesso.

Per uno scambiatore in equicorrente abbiamo:



Per una configurazione controcorrente abbiamo invece:



Passando a configurazioni un po' più realistiche degli scambiatori di calore le cose si complicano

Per calcolare il valore di ΔT_{lm} , che da non essere influenzato dalla struttura (configurazione) dello scambiatore si moltiplica il valore precedentemente calcolato per un fattore F che si trova tabellato per ogni tipo di configurazione:

$$\Delta T_{lm} = F \cdot \Delta T_{me,cs}$$

È perciò mediante i 2 metodi si può impostare un ciclo iterativo per la progettazione e verifica dello scambiatore.

La ϵ viene calcolata mediante una tabella che riassume delle relazioni tra ϵ e NTU per ogni tipo di scambiatore.

Per C che tende a zero ϵ dipende solo da NTU:

$$\epsilon = 1 - \exp(-NTU)$$

Consideriamo ora di mettere delle alette sulla superficie esterna per aumentare il coeff di scambio termico su questa superficie.

Andiamo ora a definire dei coeff adimensionali che ci servono ad analizzare il problema:

$$Re = \frac{\rho u d}{\mu}$$

$$Nu = \frac{h d}{\lambda}$$

Nel tubo interno avremo

$$Re_i = \frac{\rho u d_i}{\mu}$$

$$Nu_i = \frac{h_i d_i}{\lambda}$$

Nella sezione anulare avremo

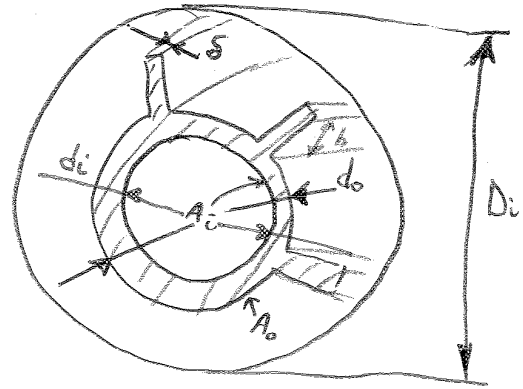
$$Re_e = \frac{\rho u \tilde{d}_o}{\mu}$$

$$Nu_e = \frac{h_o d_o}{\lambda}$$

\tilde{d}_o è il diametro idraulico equivalente e vale:

$$\tilde{d}_o = \frac{4 A}{P} = \frac{4 \left(\pi \frac{D_i^2}{4} - \pi \frac{d_o^2}{4} - N_f \delta b \right)}{\pi D_i + \pi d_o + 2 L N_f}$$

area bagnata
NUMERO ALETTE
perimetro bagnato



26

$$\eta_{ov} S = S - S_a + \eta S_a$$

$$\eta_{ov} = 1 - \frac{S_a (1 - \eta)}{S}$$

RENDIMENTO GLOBALE DEL
TUBO ALETTATO

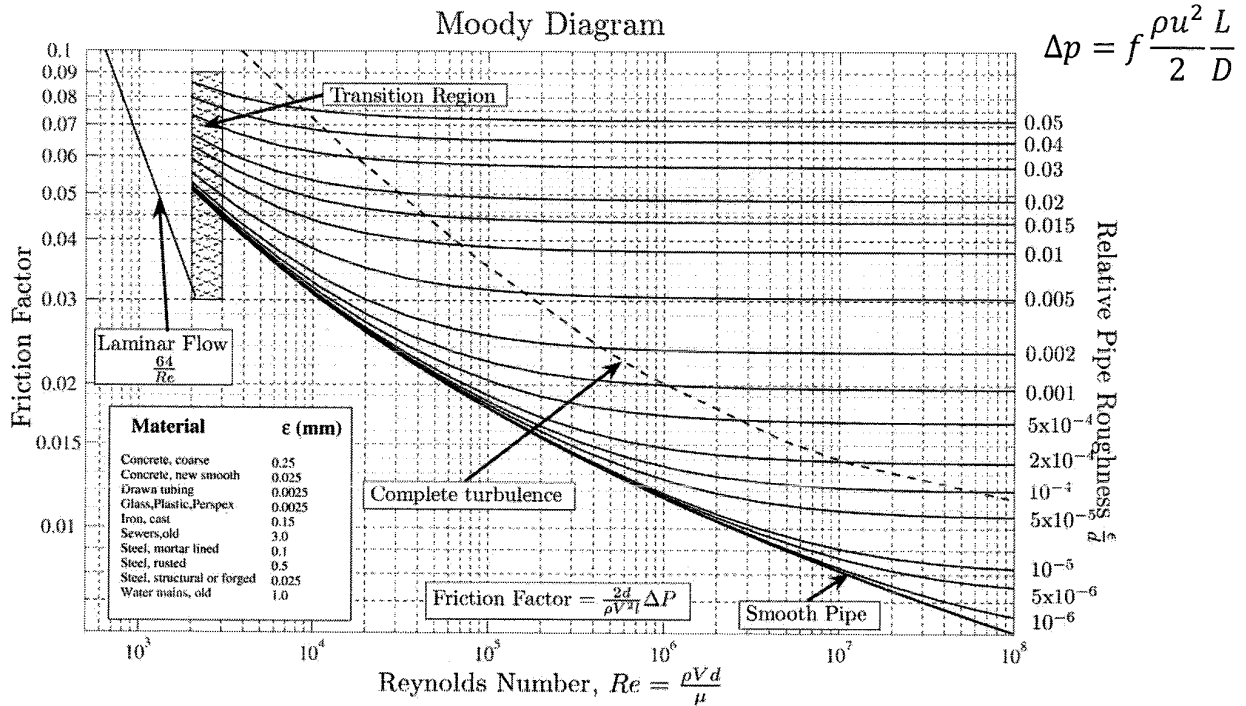
È importante definire tale rendimento per poi andare a modificare le formule precedenti per avere quelle per il tubo alettato:

$$A_i U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln(d_o/d_i)}{2\pi \lambda L} + \frac{1}{h_o S \eta_{ov}}} \quad \text{ove } S > A_o$$

Se si alettasse il tubo interno si andrebbe a sostituire A_i con un $S_i \cdot \eta_{ov}$ come abbiamo fatto ora per il tubo esterno.

Aumentando il numero di alette si aumenta lo scambio termico e si riducono le dimensioni dello scambiatore, ma si ha il problema delle perdite di carico e del relativo aumento del lavoro di pompaggio.

Pressure losses



Heat Exchangers – Summary

4

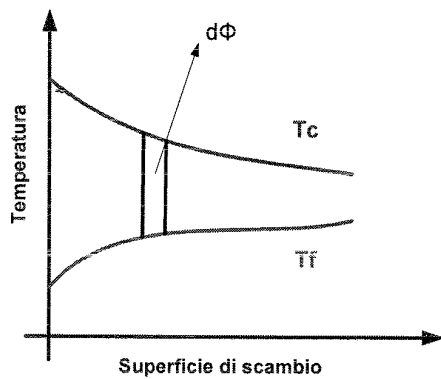
1. **The LMTD method and the effectiveness-NTU method.**
2. **Case study 1: double-pipe heat exchanger.**
3. **Case study 2: Shell-and-Tube heat exchanger .**

Logarithmic mean temperature difference (LMTD)

PARALLEL FLOW

$$\Delta T_{lm,cf} = \frac{(T_{ci} - T_{fi}) - (T_{co} - T_{fo})}{\ln \frac{T_{ci} - T_{fo}}{T_{co} - T_{fi}}}$$

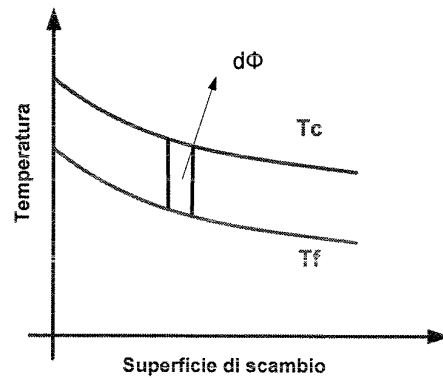
Configurazione equicorrente



COUNTER FLOW

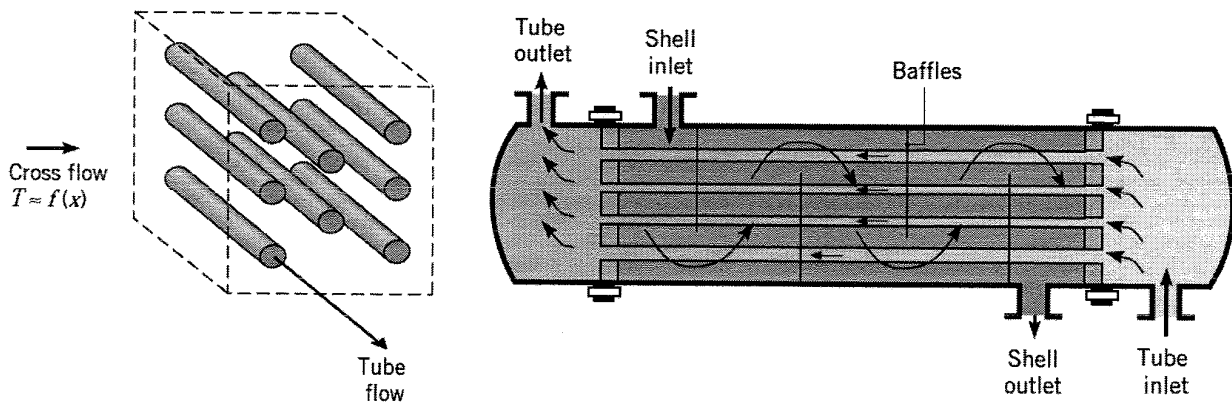
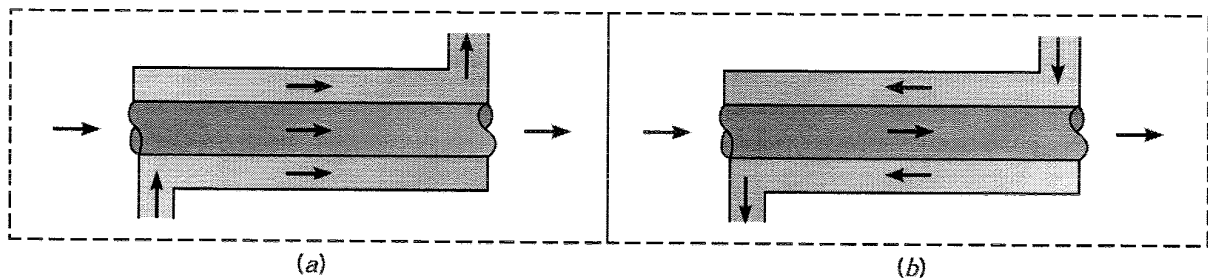
$$\Delta T_{lm,cf} = \frac{(T_{ci} - T_{fo}) - (T_{co} - T_{fi})}{\ln \frac{T_{ci} - T_{fo}}{T_{co} - T_{fi}}}$$

Configurazione controcorrente



Legend (valid for this slide only):
 c ('caldo') = hot stream
 f ('freddo') = cold stream

Fattori di correzione per altre geometrie



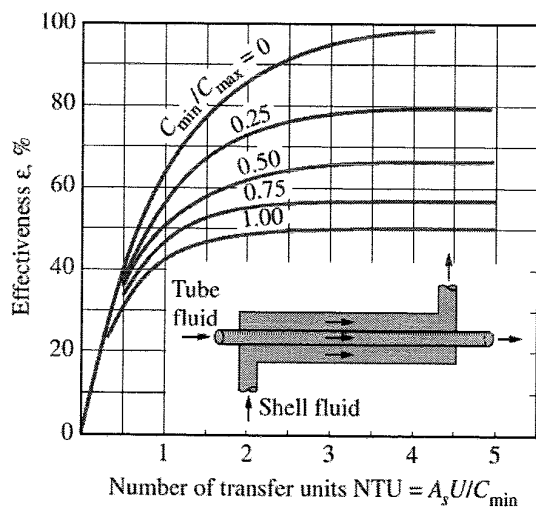
Source: F. P. Incropera et al., *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 6th Edition

Effectiveness relations

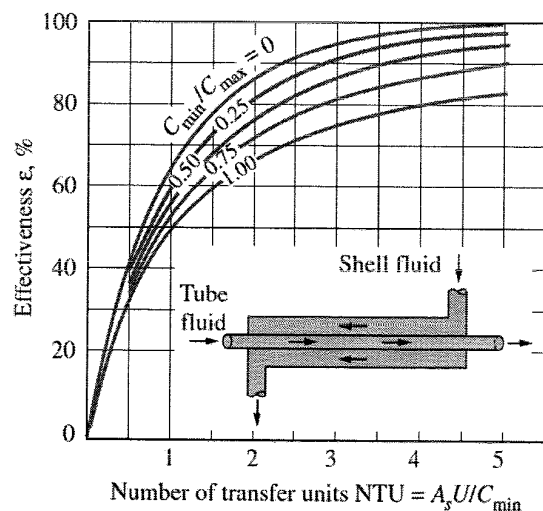
Effectiveness relations for heat exchangers: $NTU = UA_s/C_{min}$ and $c = C_{min}/C_{max} = (\dot{m}C_p)_{min}/(\dot{m}C_p)_{max}$ (Kays and London, Ref. 5.)

Heat exchanger type	Effectiveness relation
1 <i>Double pipe:</i>	
Parallel-flow	$\epsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1 + c)]}{1 + c}$
Counter-flow	$\epsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1 - c)]}{1 - c \exp[-NTU(1 - c)]}$
2 <i>Shell and tube:</i>	
One-shell pass	
2, 4, ... tube passes	$\epsilon = 2 \left\{ 1 + c + \sqrt{1 + c^2} \frac{1 + \exp[-NTU\sqrt{1 + c^2}]}{1 - \exp[-NTU\sqrt{1 + c^2}]} \right\}^{-1}$
3 <i>Cross-flow (single-pass)</i>	
Both fluids unmixed	$\epsilon = 1 - \exp \left\{ \frac{NTU^{0.22}}{c} [\exp(-c NTU^{0.78}) - 1] \right\}$
C_{max} mixed, C_{min} unmixed	$\epsilon = \frac{1}{c} (1 - \exp[1 - c(1 - \exp(-NTU))])$
C_{min} mixed, C_{max} unmixed	$\epsilon = 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{c} [1 - \exp(-c NTU)] \right\}$
4 <i>All heat exchangers with $c = 0$</i>	$\epsilon = 1 - \exp(-NTU)$

Effectiveness graphs

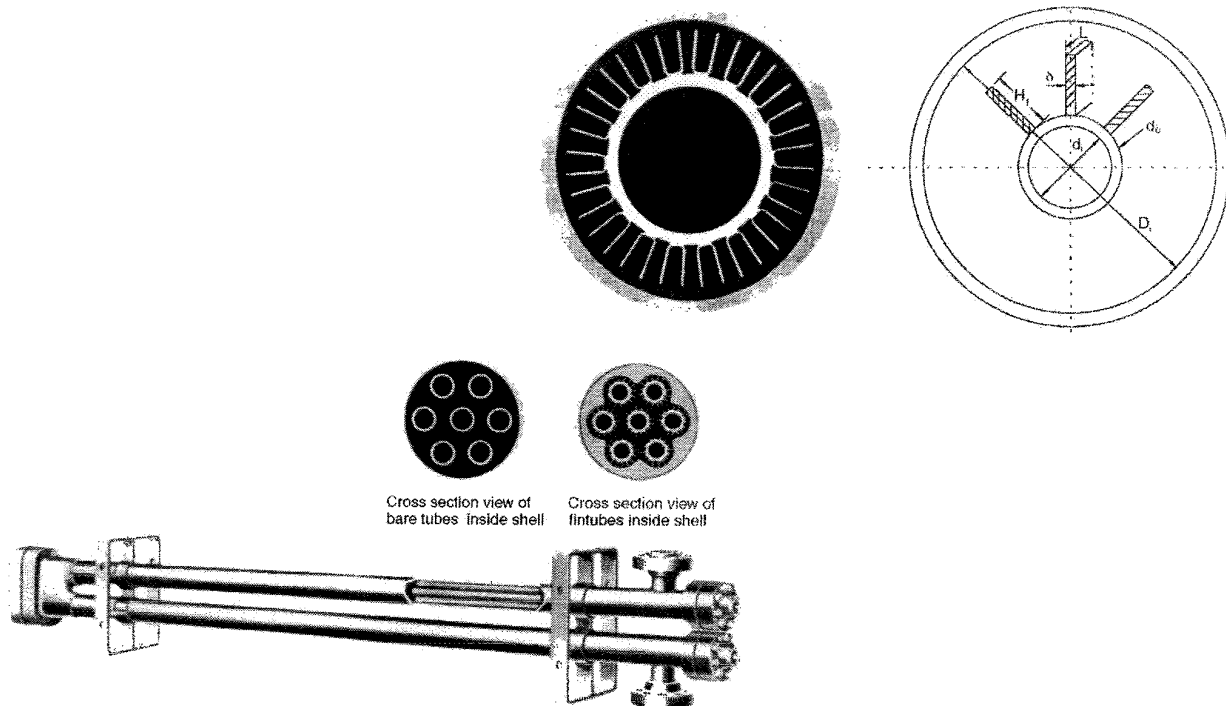


PARALLEL FLOW



COUNTER FLOW

Double-pipe heat-exchanger with either bared or finned surface in the annulus region



15

Water properties

	HOT-IN	HOT-OUT	COLD-IN	COLD-OUT
Temperature, °C	140	125	20	35
Pressure, Pa	370.000	370.000	370.000	370.000
Vapor Frac	0%	0%	0%	0%
Liquid Frac	100%	100%	100%	100%
Enthalpy, J/kg	-1,5E+07	-1,5,E+07	-1,6E+07	-1,6E+07
Entropy, J/kg-K	-7,7,E+03	-7,8,E+03	-9,1,E+03	-8,9,E+03
ρ , kg/m ³	925,9	938,8	998,5	994,2
Average M.W.	18,0	18,0	18,0	18,0
c_p , J/kg-K	4280	4248	4176	4171
λ , W/m-K	0,682	0,683	0,598	0,623
μ , Pa-sec	1,964E-04	2,220E-04	1,002E-03	7,196E-04
Pr (Prandtl number)	1,23	1,38	6,99	4,82

Average values (between inlet and outlet conditions) can be used, provided that the temperature dependency of the physical property is low and/or the operating temperature interval is rather small.

Note that hot water flows through the inner tube.

16

Friction factor and Nusselt number correlations - Results

	INNER TUBE (HOT SIDE)	ANNULUS (COLD SIDE)
Inner tube internal diameter (d_i), m	0,0525	-
Inner tube external diameter (d_o), m	0,0603	-
Outer tube internal diameter (D_i), m	-	0,0779
Hydraulic diameter for annulus, m	-	0,0176
Equivalent diameter for annulus, m		0,0403
Flow area, m ²	0,0022	0,0019
Mass flow, kg/s	1,36	1,39
Velocity, m/s	0,674	0,730
Reynolds number (Re)	157.671	14.866
Prandtl (Pr)	1,31	5,88
Friction factor (f)	0,0041	0,0071
Nusselt number (Nu)	376,3	87,6
Heat transfer coefficient (h), W/m ² -K	4893	1325

19

Heat exchanger required length

	INNER TUBE (HOT SIDE)	ANNULUS (COLD SIDE)
External convective linear resistance (R_c), W/m-K	-	3,98E-03
Wall thermal conductivity, W/m-K		54
Wall linear resistance (R_m), W/m-K		4,08E-04
Overall thermal resistance (R_{tot}), W/m-K	5,63E-03	-
Overall heat transfer coefficient (U), W/m ² -K	1076,8	937,5
$LMTD$, °C		104,3
Heat-exchanger surface area, m²	0,77	0,89
Heat-exchanger required length, m	4,70	4,70
Pressure loss, Pa	310	1998

$$\Phi = UA\Delta T_{lm} \quad \frac{1}{UA} = R_{tot} = \frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln(d_o/d_i)}{2\pi kL} + \frac{1}{h_o A_o}$$

$$U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{\ln(d_o/d_i)A_i}{2\pi kL} + \frac{A_i}{h_o A_o}} = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{\ln(d_o/d_i)d_i}{2k} + \frac{d_i}{h_o d_o}}$$

20

Overall fin efficiency

$$\eta_{ov}S = S_b + \eta S_f$$

$$S_b = (\pi d_o - \delta N_f)L \quad \text{Bare surface}$$

$$S_f = 2bN_fL \quad \text{Finned surface}$$

$$S = (\pi d_o - \delta N_f + 2bN_f)L \quad \text{Total surface available for heat exchange}$$

$$\eta_{ov}S = S - S_f + \eta S_f$$

$$\eta_{ov} = 1 - \frac{S_f(1 - \eta)}{S} = 1 - \frac{2bN_f(1 - \eta)}{\pi d_o - \delta N_f + 2bN_f} \quad \text{Overall fin efficiency}$$

$$U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{\ln(d_o/d_i)A_i}{2\pi kL} + \frac{A_i}{\eta_{ov,o}h_oA_o}} = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{\ln(d_o/d_i)d_i}{2k} + \frac{d_i}{\eta_{ov,o}h_o d_o}}$$

Results

	INNER TUBE	ANNULUS
Fin height (b), m	8,00E-03	
Fin width (δ), m	1,00E-03	
Fin width max. (δ_{max}), m	8,80E-03	
Fins maximum number	83	
Number of fins, N_f	45	
Flow area, m ²	0,0022	0,0016
Hydraulic diameter for annulus, m	-	0,0054
Equivalent diameter for annulus, m	-	0,0068
Velocity, m/s	0,674	0,899
Reynolds number (Re)	157.671	5.592
Prandtl (Pr)	1,307	5,884
Friction factor (f)	0,0041	0,0093
Nusselt number (Nu)	376,3	39,3
Heat transfer coefficient (h), W/m ² -K	4893	3519
Fin thermal conductivity, W/m-K	-	54
Fin efficiency	-	0,344
Overall finned surface efficiency, η_{ov}		0,45
A/A_o		0,19
Overall heat transfer coefficient (U), W/m ² -K	2556,0	487,7
HX surface area, m²	0,33	1,71
Heat-exchanger length, m	1,98	
Pressure loss, Pa	131	5527
Pump load, kWe	0,25	10,27