NUMERO: 2042A - ANNO: 2016

A P P U N T I

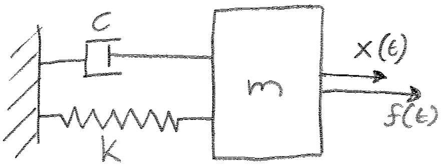
STUDENTE: Meniconi Andrea

MATERIA: Dinamica dei sistemi meccanici - Prof. Fasana

1. STUDIO DELL' INTEGRALE GENERALE
2. STUDIO DELL' INTEGRALE PARTICOLARE DELL' EQ COMPLETA
   a) GRADINO
   b) FORZANTE ARMONICA
   c) FORZANTE ECCENTRICA
      - TRASMISSIBILITÁ
   d) FORZANTE QUALUNQUE
      - FUNZIONE IMPULSO
      - INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

3. BATTIMENTO E RISONANZA ∞
4. ACCELEROMETRO / SISMOGRAFO
5. SISTEMI CON PIÚ DI UN GRADO DI LIBERTÁ
   - ANALISI MODALE
   - ORTOGONALITÁ DELLE FORME MODALI $\{\psi_i\}$
   - TEOREMA DI ESPANSIONE
   - TRASFORMAZIONE MODALE
   - SISTEMA FORZATO
      - FORZANTE QUALUNQUE
      - FORZANTE ARMONICA
         - RICETTANZA
6. METODO LAGRANGIANO
   - LAVORO E DEFINIZIONE DI FORZA CONSERVATIVA
      - FORZA ELASTICA
      - FORZA PESO
   - PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI
      - DIMOSTRAZIONE
      - EQUAZIONE DI HEMILTON
      - FUNZIONE DISSIPATIVA DI RAYLEIGH
7. ASSORBITORE DINAMICO

SISTEMI AD UN GRADO DI LIBERTÁ: RISPOSTA LIBERA



La massa m é vincolata a traslare orizzontalmente, e:

k = rigidezza della molla
c = costante dello smorzatore viscoso.

- Si indica con $x(t)$ lo spostamento della massa m a partire dalla configurazione di equilibrio statico, perció anche se il moto avvenisse in direzione verticale non si dovrebbe tener conto della forza peso in quanto giá bilanciata dalla forza statica di richiamo elastico della molla.
- Inoltre tutta la capacitá di deformazione attribuita al sistema viene assimilata alla molla.
- Si hanno le seguenti leggi per:
  - la molla: $F_k = kx$ → eq. di tipo lineare
  - lo smorzatore: $F_c = c\dot{x}$ → eq. di tipo viscoso (proporzionale a $\dot{x}$)
- Avremo la seguente **EQUAZIONE DI MOTO**:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

Per risolverla seguiamo i seguenti passi:

1. STUDIARE L'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

la quale é un'equazione differenziale lineare, a coefficienti costanti e omogenea del secondo ordine,

N.B. É lineare perché le potenze della x sono zero o uno.

La soluzione di tale equazione si cerca nella forma:

$$x(t) = A \cdot e^{st}$$

ove A ed s sono 2 costanti che eventualmente possono essere complesse $(A, s \in \mathbb{C})$

$$\frac{c}{m} \doteq 2\xi\omega_n$$

ove:

ξ = FATTORE DI SMORZAMENTO [adimensionale] (solitamente viene espresso in percentual

otteniamo dunque:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

ove:

$C_{cr} = 2 \cdot \sqrt{km}$ = COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO CRITICO

$$\xi = \frac{c}{C_{cr}}$$

4. RISULTATO

L'evoluzione nel tempo dello spostamento x varia di conseguenza con il segno del radicando $s_{1,2}$:

- Se $\xi > 1$ il sistema si dice **SOVRASMORZATO** e gli zeri $s_{1,2}$ sono entrambi reali e negativi.
  Infatti il sistema, dissipando energia, comporta che il moto oscillante decresca linearmente fino a svanire.
- Se $\xi = 1$ il sistema si dice **CRITICAMENTE SMORZATO** e gli zeri $s_{1,2}$ sono reali e coincidenti:

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

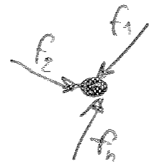
  e la soluzione è la seguente:

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{-\omega_n t}$$

- Se $0 \leq \xi < 1$ il sistema si dice **SOTTOSMORZATO** e gli zeri $s_{1,2}$ sono complessi e coniugati (CASO PIÙ COMUNE).
  Se $\xi = 0 \Longleftrightarrow c = 0$

DIAGRAMMI DI CORPO LIBERO

- Seconda Legge di Newton $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ ove $\vec{F} = \sum \vec{f_i}$
- Eq. di Lagrange : Approccio di d'Alambert:



$$F - m\vec{a} = 0$$

$-m\vec{a}$ = FORZA DI INERZIA

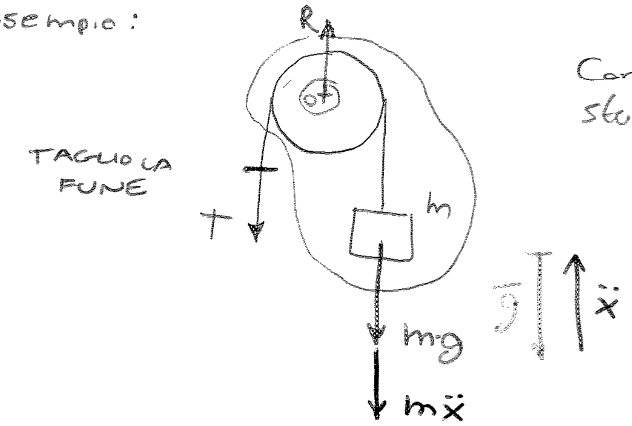
Dal principio di D'Alembert si passa alla MECCANICA ANALITIC

DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO: rappresentazione grafica di un insieme a sistema a nostra scelta.

Consideriamo:

1. FORZE PESO
2. FORZE sulle SUPERFICI di SEPARAZIONE
3. FORZE D' INERZIA

esempio:

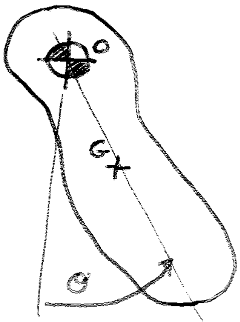


Considero solo il sistema che voglio studiare

Impongo l'equilibrio intorno al punto O

STUDIO DI UN PENDOLO COMPOSTO

SDOF $\frac{1}{8}$



$\vec{g}\downarrow$

$\overline{OG} = l$

m, I_G

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgl}{I_o}\sin\theta$$

$\sin\theta = 0$

$\theta_{eq} = 0, \pm\pi \pm 2\pi, \dots$

Abbiamo 2 soli punti di equilibrio:

STABILE: $\theta = 0 \quad = \theta_{eq_1}$

INSTABILE: $\theta = \pi \quad = \theta_{eq_2}$

Voglio dimostrare che θ_{eq_2} sia un punto di equilibrio instabile.
Procedo con lo sviluppo di una serie di Taylor

$$f(\theta,\dot{\theta}) \simeq f(\theta_{eq}, 0) + \left.\frac{\partial f}{\partial \theta}\right|_{eq}(\theta - \theta_{eq}) + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}}\right|_{eq}(\dot{\theta} - 0)$$

$$f(\theta,\dot{\theta}) \simeq 0 + \left.\frac{\partial f}{\partial \theta}\right|_{eq}(\theta - \theta_{eq}) + 0 = -\frac{mgl}{I_o}\cos(\theta_{eq})(\theta - \theta_{eq})$$

1) $\theta_{eq_1} = 0 \qquad \cos\theta_{eq} = 1$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I_o}\theta = 0 \implies \ddot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0 \qquad \text{SDOF}$$

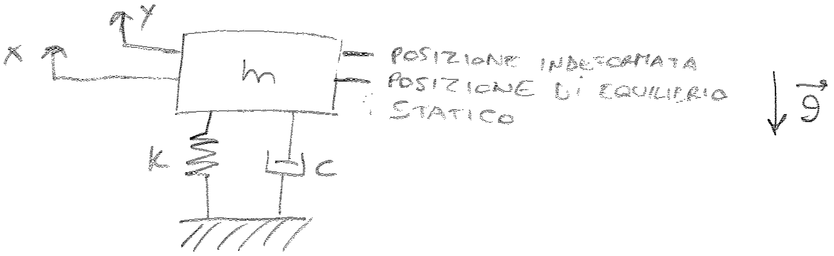
$$\theta(t) = (A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t)$$

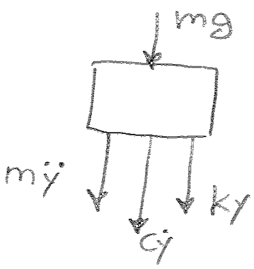
A e B dipendono dalle condizioni iniziali

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgl}{I_o}}$$

RUOLO DELLA FORZA PESO

Va messa oppure no?





$$+\downarrow)\quad m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + mg = 0$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k\left(y + \frac{mg}{k}\right) = 0$$

$$x = y + \frac{mg}{k}$$

$$\dot{x} = \dot{y}$$

$$\ddot{x} = \ddot{y}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

ove $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ → essa non dipende da g

Se g modifica il coefficiente dell'incognita non di derivata di ordine zero, deve essere inserita, altrimenti non influisce perché sposta solo l'altezza del baricentro e viene bilanciata dalla molla.

"Si considerino solo i contributi dinamici" sta ad intendersi di non considerare (scrivere) nelle equazioni la gravità.

TERZO CASO $0 \leq \xi < 1$

$x(t=0) = X_0$

$\dot{x}(t=0) = v_0$

$$\dot{x}(t) = (-a\omega_d \sin\omega_d t + b\omega_d \cos\omega_d t)\, e^{-\xi\omega_n t} - \xi\omega_n (a\cos\omega_d t + b\sin\omega_d t) \cdot e^{-\xi\omega_n}$$

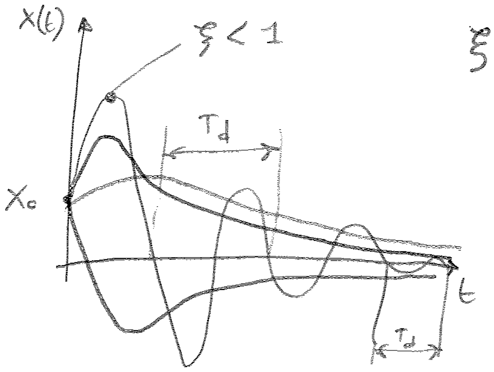
Impongo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} a = X_0 & >0 \\ b\omega_d - \xi\omega_n a = v_0 & >0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0$$

$$b = \frac{v_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_d}$$

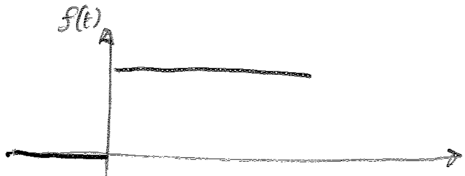
l'Integrale del sistema viene anche chiamato TRANSITORIO DEL SISTEMA:



STUDIO DELL'INTEGRALE PARTICOLARE DELL'EQ COMPLETA

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

GRADINO (STEP)



$f(t) = 0 \quad , t < 0$

$f(t) = f_0 \quad , t \geq 0$

$t \geq 0$ $\quad x(t) =$ costante

$$\left.\begin{matrix} \dot{x} = 0 \\ \ddot{x} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{X_{st} = \frac{f_0}{k}} = \text{SPOSTAMENTO STATICO (DEFORMAZIONE)}$$

per $\xi < 1$

$$x(t) = (a\cos\omega_d t + b\sin\omega_d t)\, e^{-\xi\omega_n t} + \frac{f_0}{k}$$

LA FORZANTE HA UN ANDAMENTO ARMONICO

$$f(t) = f_0 \cos \Omega t$$

oppure

$$f(t) = f_0 \sin \Omega t$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

$\omega_d \neq \Omega$

$x(t) = X_0 \cos(\Omega t + \varphi)$ oppure $x(t) = X_0 \sin(\Omega t + \varphi)$

$$x = X_0 \cos(\Omega t + \varphi) = X_0 \cos \Omega t \cos \varphi - X_0 \sin \Omega t \sin \varphi$$

$$\boxed{f(t) = f_0 e^{i\Omega t}}$$

NOTAZIONE DI EULERO
che comprende sia quello in seno che in coseno
essa è molto utile per risolvere i calcoli

$$\boxed{x(t) = \underline{X} e^{i\Omega t}} \qquad \underline{X} \in \mathbb{C}$$

$$= X_0 e^{i\varphi} e^{i\Omega t}$$

φ = FASE

$X_0 = |\underline{X}|$

$$\dot{x} = i\Omega \underline{X} e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x} = -\Omega^2 \underline{X} e^{i\Omega t}$$

$$(k - m\Omega^2 + i\Omega c)\underline{X} \cancel{e^{i\Omega t}} = f_0 \cancel{e^{i\Omega t}}$$

① $$\underline{X} = \frac{f_0}{k - m\Omega^2 + i\Omega c}$$

② $$|\underline{X}| = X_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (\Omega c)^2}}$$

③ $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Im[\underline{X}]}{Re[\underline{X}]} = -\frac{\Omega c}{k - m\Omega^2}$$

$$x(t) = X_0 e^{i(\Omega t + \varphi)}$$

08/10/2015

Risposta per $0 \leq \xi < 1$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 e^{i\Omega t}$$

$$x = X e^{i\Omega t} = x_0 e^{i(\Omega t + \varphi)}$$

$$\boxed{x_0 = \frac{f_0/k}{\sqrt{(1-\tau^2)^2 + (2\xi\tau)^2}}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\xi\tau}{1-\tau^2}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\Omega}{\omega_n}}$$

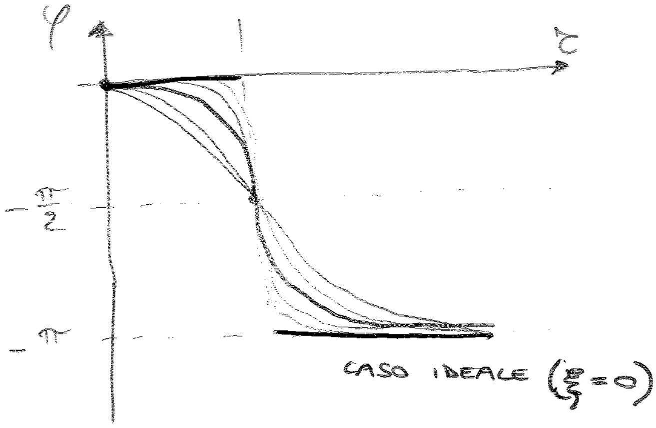
Per τ compreso tra 0 e 1 la fase è negativa.

Poiché la fase φ è sempre in ritardo (negativo) si tende a scrivere:

$$\theta = -\varphi$$

e quindi:

$$x(t) = x_0 e^{i(\Omega t + \varphi)} = x_0 e^{i(\Omega t - \theta)}$$



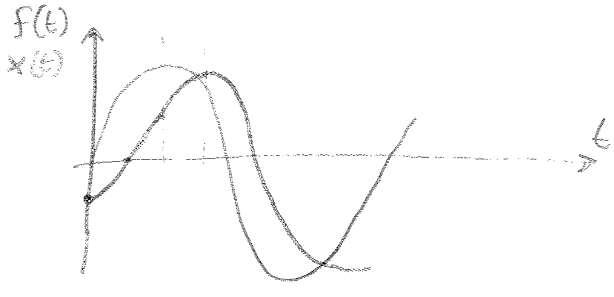
Scrivendo così la fase positiva.

Forza e spostamento si verificano allo stesso istante

$$f(t) = f_0 \sin \Omega t$$

$$x(t) = x_0 \sin(\Omega t + \varphi)$$

traccio il grafico di $x(t)$ con $\varphi = -\frac{\pi}{4}$



N.B. Si sta parlando di una condizione a regime

Si considera $\Omega t = \Delta\varphi$. Avremo $\Omega t + \varphi = \Omega t - \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4\Omega}$

Se $\xi = 0,1$ $\quad \frac{\omega_R}{\omega_n} \simeq 0,99$

$\xi = 0,05$ $\quad \frac{\omega_R}{\omega_n} \simeq 0,997$

e quindi lo spostamento di r da ω_n é trascurabile per smorzamenti plausibili ($\xi = 0,1$, $\xi = 0,05$, ecc...)
La differenza elevata al variare di ξ é data dall'ampiezza X_0 dell'oscillazione.

Si insiste tanto sulla risposta armonica perché:

1. La risposta del sistema é fortemente influenzata dalla frequenza della forzante. A certe frequenze la risposta può essere molto grande (risonanza)
2. Tutte le funzioni periodiche possono essere scomposte secondo serie di fourier (somma di più funzioni armoniche). Quindi trovate le forzanti posso calcolarmi le risposte X_0 e poiché il sistema é lineare, il risultato é dato dalla somma delle risposte.

Mancano le altre 2 equazioni di equilibrio, le quali per essere verificate, devo inserire un vincolo che verifichi l'equilibrio in modo da ridurre il sistema ad 1 GdL:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = m\varepsilon\Omega^2 e^{i\Omega t}$$

ove

$$M = m_1 + m.$$

Mi interessa solo la soluzione a regime e trascuriamo il transitorio.

La soluzione a regime ha la seguente struttura.

$$x(t) = X e^{i\Omega t} = x_0 e^{i(\Omega t - \theta)}$$

$$|X| = x_0$$

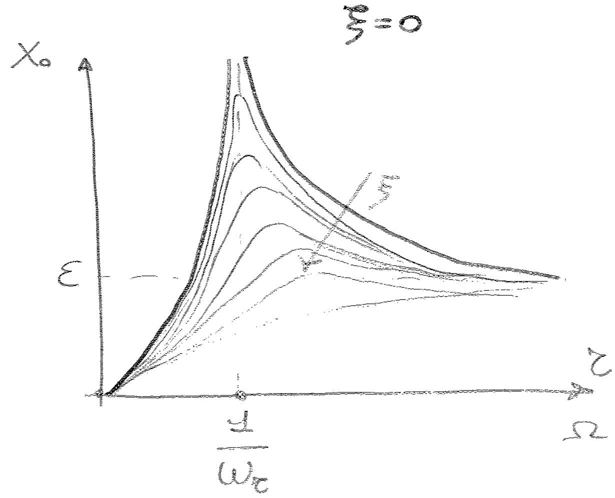
$$x_0 = \frac{f_0/K}{\sqrt{(1-\tau^2)^2 + (2\xi\tau)^2}} \overset{\text{MOLTIPLICO E DIVIDO PER } M}{=} \frac{\frac{m\varepsilon\Omega^2 M}{K}}{M\sqrt{(1-\tau^2)^2 + (2\xi\tau)^2}}$$

faccio comparire anche al numeratore τ:

$$\frac{M}{K} = \frac{1}{\omega_n^2}$$

$$x_0 = \varepsilon \frac{\tau^2 \cdot m}{M\sqrt{(1-\tau^2)^2 + (2\xi\tau)^2}}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_R}{\sqrt{1 - 2\xi^2}}$$



All'aumentare dello smorzamento l'ampiezza diminuisce, Inoltre se vogliamo spostamenti molto piccoli Ω deve essere molto minore di $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$:

$$\omega_n \gg \Omega$$

Poiché Ω mi varia con lo squilibrio preferisco usare una grandezza che non mi vari con la frequenza, ma che resti costante come ω_n e quindi la sostituisco:

$$T(\Omega) = \frac{(k + i\Omega c) X \cancel{e^{i\Omega t}}}{m\varepsilon\omega_n^2 \cancel{e^{i\Omega t}}} = \frac{(k + i\Omega c)}{\cancel{m\varepsilon\omega_n^2}} \cancel{\varepsilon} \frac{m}{M} \frac{r^2}{1 - r^2 + i2\xi r}$$

$$= \frac{\omega_n^2 + i\Omega 2\xi\omega_n}{\omega_n^2} \frac{r^2}{1 - r^2 + i2\xi r}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(\Omega) = \frac{r^2(1 + i2\xi r)}{1 - r^2 + i2\xi r}}$$

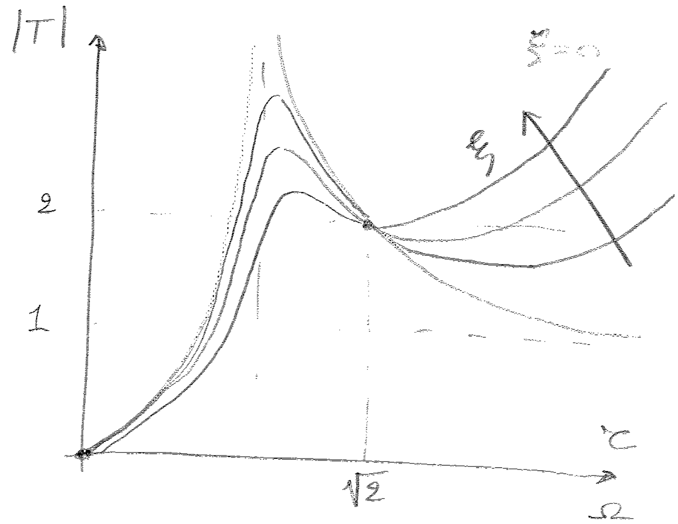
Voglio conoscere il modulo (la fase non mi interessa):

$$\boxed{|T| = \frac{r^2\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}}$$

Nel caso in cui r^2 sia uguale a 2 avrò che

$$|T| = 2 \qquad \text{qualunque sia } \xi$$

Nel caso di $\xi \neq 0$ il massimo si sposta verso destra e per ogni valore di ξ si ha il passaggio per il punto $(2, \sqrt{2})$ e poi ricomincia a crescere. Cresce tanto di più quanto maggiore è il valore di ξ.



Nel caso di oscillazione libera un grande valore di ξ non elimina l'oscillazione poiché $\dot{c}$ può non far tornare a 0 l'oscillazione, ma può farla continuare intorno ad un certo valore.

Per $\xi < 1$ avrò una risposta del tipo:

$$x(t) = (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t)\, e^{-\xi \omega_n t}$$

ove a, b si trovano mediante le condizioni iniziali.
tali condizioni iniziali sono:

$$x\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

$$\dot{x}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

Infatti considero che l'impulso abbia durata costante nell'intervallo di tempo che va da $-\frac{\varepsilon}{2} < t < \frac{\varepsilon}{2}$

A questo punto prendo l'eq. del moto e la integro tra τ e $-\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx)\, dt = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} f_0 \, d\tau$$

ove $-\frac{\varepsilon}{2} < \tau < \frac{\varepsilon}{2}$, infatti voglio successivamente far tendere questo intervallo a zero.

$$m\dot{x}\Big|_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} + c \cdot x\Big|_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} + k\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} x(t)\, dt = f_0\left(\tau + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$m\dot{x}(\tau) - \overbrace{\cancel{m\dot{x}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}^{=0} + c\,x(\tau) - \overbrace{\cancel{c\,x\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}^{=0} + k\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} x(t)\, dt = f_0\left(\tau + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Proseguo integrando nuovamente tutta questa espressione che dipende da τ tra $\frac{\varepsilon}{2}$ e $-\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} (\dots)\, d\tau$$

$$m\,x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - \overbrace{\cancel{m\,x\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}^{=0} + \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} c\,x(\tau)\, d\tau + \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \left[\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau} k\,x(t)\, dt\right] d\tau = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} f_0\left(\tau + \frac{\varepsilon}{2}\right) d\tau$$

09-10-15

BATTIMENTO E RISONANZA ∞

Non sono lo stesso caso, ma per entrambi bisogna risolvere sia l'integrale generale che quello particolare, poiché in questi casi l'integrale generale non si smorza nel tempo.

Prendiamo ora un sistema con forzante armonica e smorzamento nullo ($c=0$):

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Consideriamo che $x(t) = x_g(t) + x_p(t)$
otteniamo perciò:

$$x(t) = a \cos \omega_n t + b \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

Non si è indicata la fase φ poiché è già inglobato in $\frac{F_0}{k-m\omega^2} \cos \omega t$, infatti se:

$$\omega < \omega_n \longrightarrow \varphi = 0$$
$$\omega > \omega_n \longrightarrow \varphi = \pi$$

Impongo delle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

e derivo:

$$\dot{x} = \omega_n(-a \sin \omega_n t + b \cos \omega_n t) - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \omega \sin \omega t$$

$$x(0) = a + \frac{F_0}{k - m\omega^2} = x_0$$

$$\dot{x}(0) = b\,\omega_n$$

ottengo così, mettendo tutto insieme:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}\right) \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

→ RISONANZA INFINITA (FASE)

Gli zeri dei seni sono sfasati da quelli dei coseni di 90°, cioé quelli della RISPOSTA sono sfasati di 90° da quelli della forzante.

Per $\omega \to \omega_n$ ho la RISONANZA INFINITA.

BATTIMENTO

→ VOGLIAMO VEDERE COSA SUCCEDE PER $\omega \simeq \omega_n$

Consideriamo la formula di PROSTAFERESI:

$$\cos \omega t - \cos \omega_n t = 2 \sin\left(\frac{\omega_n + \omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_n - \omega}{2} t\right)$$

e indichiamo con:

$$\overline{\omega} = \frac{\omega_n + \omega}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{\omega_n - \omega}{2}$$

Possiamo scrivere:

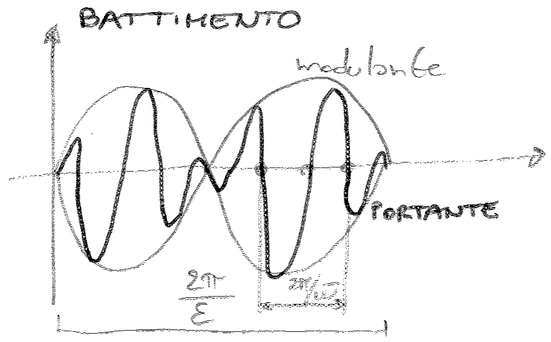
$$K - m\omega^2 = m(\omega_n - \omega)(\omega_n + \omega) = m 2 \varepsilon 2 \overline{\omega}$$

ottenendo:

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\overline{\omega}\varepsilon} \overbrace{\sin(\overline{\omega} t)}^{\text{PORTANTE}} \overbrace{\sin(\varepsilon t)}^{\text{MODULANTE}}$$

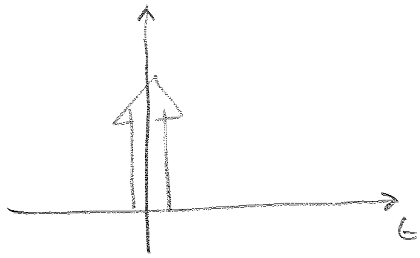
Stiamo sollecitando il sistema con un ω vicino a ω_n quindi anche se ω é piccolo $x(t)$ diventa grande.

Abbiamo una modulazione in ampiezza:



Essendo un'espressione esatta se faccio tendere $\overline{\omega}$ a zero ottengo l'eq. della risonanza infinita.

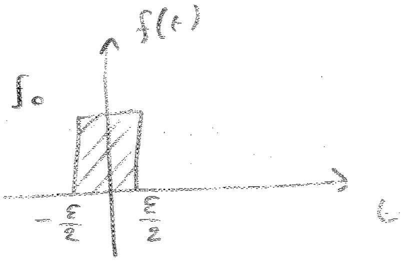
15-10-15



$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \delta(t) \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \\ t > 0 \end{cases}$$

$$x(t) = (a\cos\omega_d t + b\sin\omega_d t)\, e^{-\xi\omega_n t} \qquad \xi < 1$$



$$f_0\,\varepsilon = 1$$

$$\begin{cases} f_0 \to \infty \\ \varepsilon \to 0 \end{cases}$$

a e b dipendono dalle condizioni iniziali le quali dipendono da come risponde la massa

Come determino a e b ?

Quando l'impulso termina la sua azione $x(0^+) = 0$ la massa non si é ancora spostata

$\boxed{x(0^+) = 0}$ PRIMA CONDIZIONE INIZIALE

Prendiamo l'equazione del moto $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0$ e la integro su tutto l'intervallo:

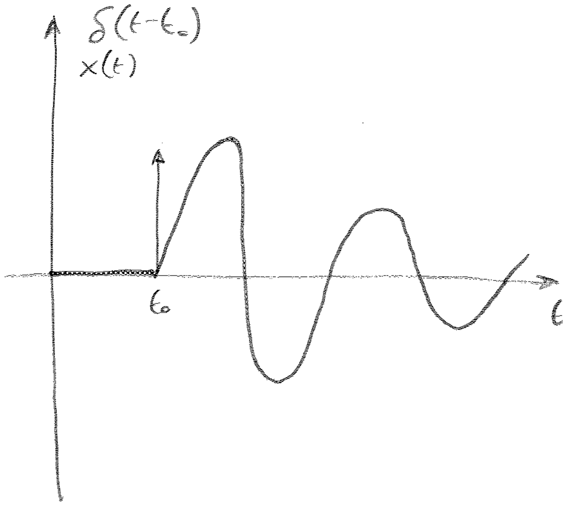
$$\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx)\, dt = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} f\, dt$$

$$m\left[\dot{x}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - \underbrace{\cancel{\dot{x}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}_{=0}\right] + c\left[x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - \underbrace{\cancel{x\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}_{=0}\right] + \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} kx\, dt = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} f_0\, dt$$

Per definizione $\dot{x}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ e $x\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ sono uguali a zero

Se l'impulso non fosse nell'origine

$$x(t) = \begin{cases} = 0 & t \leq t_0 \\ \frac{1}{m\omega_d} \sin \omega_d (t-t_0)\, e^{-\xi\omega_n (t-t_0)} & t > t_0 \end{cases}$$



Prima di t_0 la massa non si muove e dopo ha il precedente andamento.
Il t presente in $e^{-\xi\omega_n t}$ indica il tempo che è passato prima che avessimo applicato l'impulso.

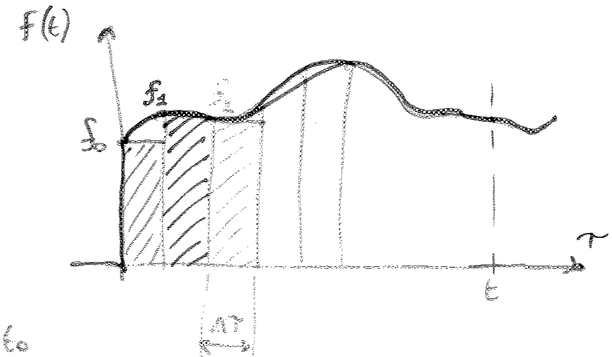
La risposta all'impulso $h(t)$ ci permette, se riusciamo a costruirci quest'ultima e se conosciamo la forza applicata sul sistema, di calcolarci la risposta di qualsiasi sistema LINEARE:

$$f(t) + h_0(t) \Longrightarrow x(t^*)$$

Allora:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

Quanto vale $x(t)$?



Noi abbiamo ipotizzato che prima dell'istante zero la forza è uguale a zero. L'asse tempi parte dal momento in cui parte la forza.

Indico con τ la successione tempi e con t l'istante particolare nel quale vado ad individuare il valore della forza.

$$f(\tau) \quad 0 \leq \tau \leq t \Longrightarrow x(t)$$

Divido a questo punto l'asse tempi in intervalli finiti $\Delta\tau$, i quali faremo tendere a zero. La rilevazione di tali intervalli prende il nome di CAMPIONATURA

Poiché il sistema è lineare vale il principio di sovrapposizione degli effetti e quindi la risposta del sistema è data dalla somma dei vari contributi:

$$\boxed{f(\tau) = f(k\Delta\tau) = f_k} \qquad \text{ove } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=0}^{n} X_k(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k\, h(t - k\Delta\tau)\Delta\tau} \qquad n \cdot \Delta\tau = t = \text{tempo di campionamento}$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} f(k\Delta\tau)\, h(t - k\Delta\tau)\, \Delta\tau$$

Poiché la variazione della forza è continua e non va a gradini:

$$\Delta\tau \longrightarrow d\tau$$

cioè lo faccio diventare infinitesimo, in modo da ritrasformare l'asse tempi da discreto a continuo.
Inoltre man mano che $\Delta\tau$ diventa sempre più piccolo k diventerà sempre più grande e:

$$k\Delta\tau \longrightarrow \tau$$

τ individua uno spazio temporale.
Passerò quindi agli integrali:

$$\boxed{x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau} \qquad \text{INTEGRALE DI CONVOLUZIONE}$$

Se sappiamo risolvere l'integrale, qualunque sia il sistema lineare saprò calcolarmi la risposta qualunque essa sia $f(t)$ e $h(t)$

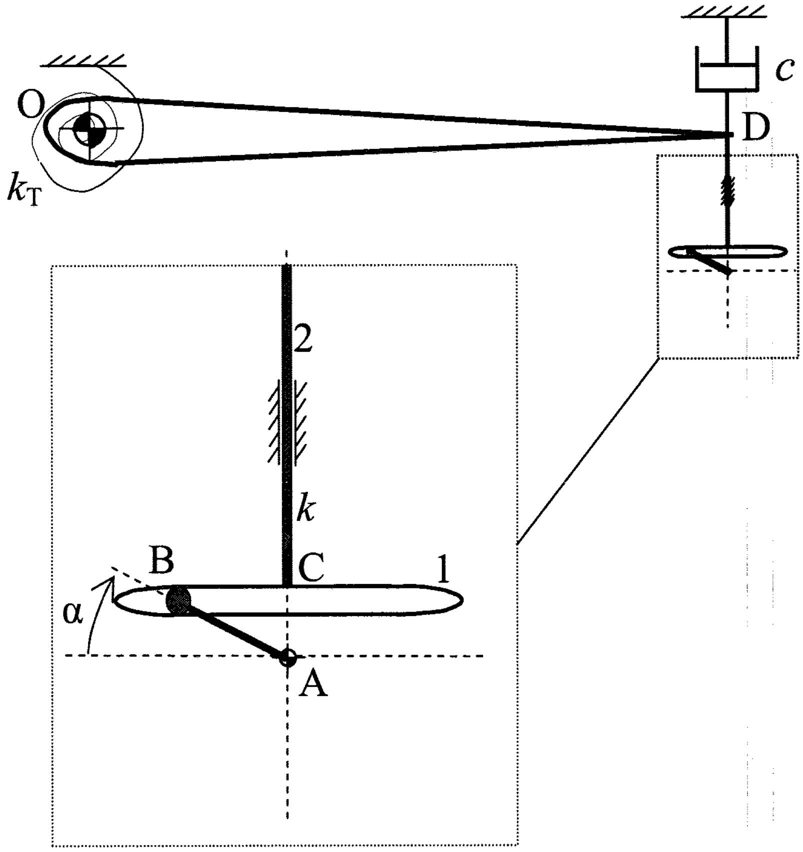
Tale integrale si chiama di CONVOLUZIONE

N.B. La risoluzione di tale integrale prevede che le condizioni iniziali siano entrambe nulle, altrimenti bisogna aggiungere l'integrale generale:

$$(a\cos\omega_d t + b\sin\omega_d t)\,e^{-\xi\omega_n t}$$

ove le condizioni iniziali generano a e b.

'rova dinamica su un alettone



Nella figura è rappresentato lo schema di un alettone, che è portato dall'ala con accoppiamento rotoidale di traccia O. La rotazione dell'alettone è ottenuta per mezzo di opportune leve, che devono presentare una sufficiente rigidezza perché la rotazione attorno ad O a comandi bloccati, dovuta alla loro cedevolezza elastica e all'azione aerodinamica, sia abbastanza piccola. Poiché il calcolo della rigidezza k_T alla rotazione intorno ad O presenta parecchie incertezze, essa può essere determinata sperimentalmente nel modo indicato schematicamente figura: un motore, il cui rotore gira intorno all'asse di traccia A, produce con un bottone di manovella B, impegnato nella feritoia ad asse rettilineo 1 e tramite l'asta rettilinea 2 di rigidezza assiale k, lo spostamento del punto D all'alettone. Le prove consistono nella misura della risposta a regime dell'alettone, in termini di rotazione ϑ, per diverse velocità di rotazione del motore $\dot{\alpha} = \omega$. In particolare l'ampiezza massima di oscillazione misurata è $\vartheta_{\max} = 5°$. Gli effetti smorzanti sono tenuti in considerazione aggiungendo nel modello del sistema uno smorzatore viscoso collegato al punto D, che determina un fattore di smorzamento $\zeta = 60\%$. Si assumano i seguenti dati: OD = L = 50 cm; k = 40 kg/mm; AB = R = 5 cm; massa per unità di lunghezza dell'alettone: $\mu = \mu_0(1 - y/L)$, essendo y la coordinata misurata lungo la mezzeria dell'alettone con origine in O e μ_0 = 100 kg/m.

Si determini l'equazione del moto dell'alettone, la rigidezza k_T dei comandi, la pulsazione propria ω_n e quella di risonanza ω_{ris}, lo sfasamento della risposta φ rispetto alla forzante in condizioni di risonanza e l'ampiezza della forza F_{a0} applicata dall'asta 2 all'alettone.

[k_T = 19000 Nm/rad ; ω_n = 335.2 rad/s; ω_{ris} = 177.4 rad/s; φ = 41.4°; F_{a0} = 13200 N]

Il moto del punto C varrà:

$$X_C = R \sin \omega t$$ → trasformiamo il moto rotatorio in un moto armonico

In questo caso il peso non modifica la dinamica e quindi non viene inserito.

Facendo una foto al sistema in un momento in cui D si sposta in alto più di C, se D si è spostato più di C la molla si è allungata e quindi la forza è diretta verso il basso. Se avessi ipotizzato il contrario avrei che la forza sarebbe uguale a $K(X_C - X_D)$ ma è rivolta verso l'alto e quindi la cosa sarebbe equivalente.

Ora risolvo il sistema rispetto alla cerniera O:

$$O) \; I_G \ddot{\theta} + m \overline{OG}^2 \ddot{\theta} + cl^2 \dot{\theta} + K_T \theta + LK(X_D - X_C) = 0$$

Questa è l'eq. del moto e è un moto forzato e la forzante è qui (X_C)

$$X_G \simeq \overline{OG}\, \theta$$
$$\dot{X}_D \simeq L \dot{\theta}$$

In questo esercizio ci serve il teorema di Huygens-Steiner:

$$I_O = I_G + m \overline{OG}^2$$

$$I_O = \int_0^L \underbrace{\mu \, dy}_{dm} \, y^2 =$$

μ = densità lineare
y = distanza da O

$$= \int_0^L \mu_0 \left(1 - \frac{y}{L}\right) y^2 \, dy = \mu_0 \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4L}\right]_0^L = \frac{1}{12} \mu_0 L^3 = 1{,}42 \frac{Kg}{m^2}$$

A questo punto avendo Θ_{MAX} voglio conoscere il valore di ω.

Esiste una $\omega_{RISONANZA}$ che dalla definizione vale:

$$\omega_{ris} = \omega_{MAX\ AMPIEZZA} = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$$

$|\Theta_0|_{MAX}$ vale anche:

$$|\Theta_0|_{MAX} = \frac{\overset{= F_0 = KLR}{F_0}/K_{eq}}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \underbrace{5\frac{\pi}{180}}_{\text{come esprimere i } 5^\circ \text{ in radianti}}$$

$\Rightarrow K_{eq} = 117100\ N\cdot m/rad = K_T + KL^2$

$\Rightarrow K_T = 19000\ N\cdot m/rad$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{J_0}} = 335\ \frac{rad}{s}$$

$$\omega_{ris} = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} = 177,4\ \frac{rad}{s}$$

$$\varphi = 41,4^\circ$$

Poiché ci interessa il MOTO ARMONICO inseriamo cra l'armonica e quella più semplice, poiché non ci interessa del seno o del coseno é:

$$y = Y_0 e^{i\omega t}$$

La cui derivata seconda vale:

$$\ddot{y} = (i\omega)(i\omega) Y_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 Y_0 e^{i\omega t}$$

La soluzione dell'equazione ✱,
poiché z é una funzione del tempo, la esprimo nella seguente maniera:

$$z = Z_0 e^{i\omega t}$$

$Z_0 \in \mathbb{C}$
$\parallel$
ampiezza complessa

e avró quindi:

$$(k - m\omega^2 + i\omega c) Z_0 = m\omega^2 Y_0$$

ove $\Omega = \omega =$
$=$ pulsazione della forzante

Poiché voglio una soluzione adimenzionale e far comparire ω_n e ξ scrivo (dividendo tutto per k):

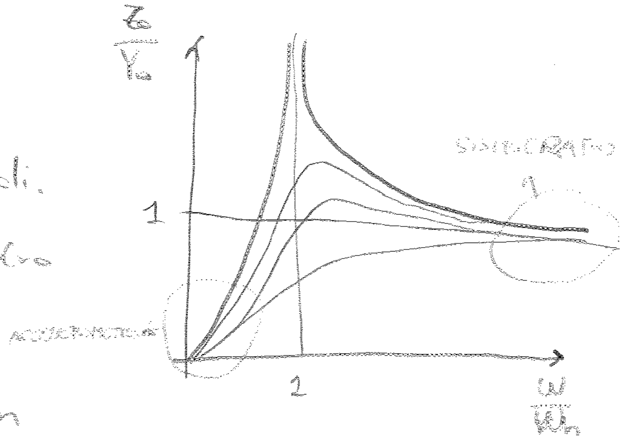
$$\boxed{\frac{Z_0}{Y_0} = \frac{(\omega/\omega_n)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}}$$

.B.
Per tutte le dimostrazioni basta ricordare a memoria:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{c}{m} &= 2\xi\omega_n \\ \omega_n^2 &= \frac{k}{m} \end{aligned}}$$

In conclusione noi stiamo considerando il moto del corpo m che é sollecitato dallo spostamento armonico del vincolo.
Abbiamo scritto le equazioni del moto passando per il diagramma di corpo libero e siamo arrivati ad un'eq. che ci dá l'ampiezza complessa dello spostamento relativo rapportato all'ampiezza di oscillazione del vincolo. Quindi so dire quant'é lo spostamento relativo data una certa ampiezza armonica ad una certa frequenza.
Il COMPORTAMENTO DINAMICO DIPENDE da questo rapporto

Nel caso della lavatrice avevamo una situazione analoga.

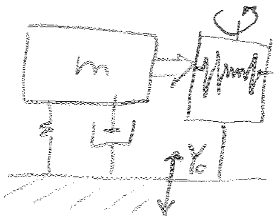


Affinché l'accelerometro funzioni deve lavorare al di sotto della sua frequenza di risonanza → si lavora con ω molto piccoli.
Perciò un dato essenziale dell'accelerometro è la sua ω_R

Il SISMOGRAFO funziona nel caso in cui $\omega/\omega_n \gg 1$

Se $\frac{\omega}{\omega_n} \to \infty$ $\quad \frac{Z_0}{Y_0} \simeq -1$

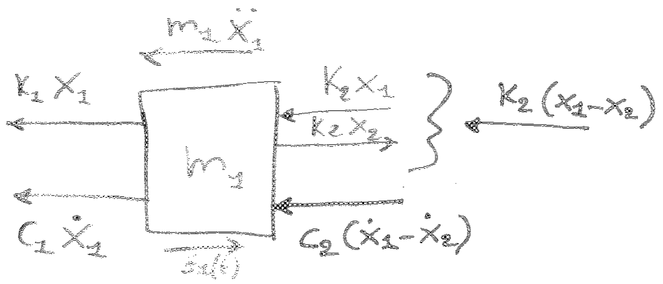
In questo caso devo trasformare un moto assoluto in uno schiacciamento.



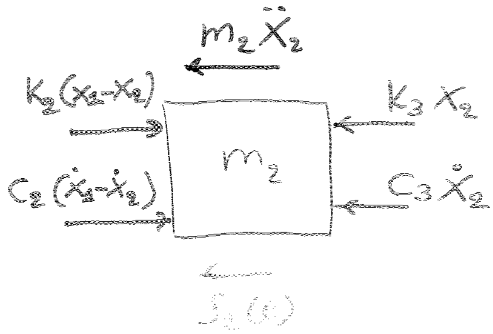
Alla massa è attaccato un pennino che può scrivere su un rullo di carta verticale, perciò quando la massa oscilla scrive su questo rullo.
Quindi misurando l'ampiezza delle oscillazioni abbiamo Y_0 cioè l'oscillazioni del supporto (la terra).
ω è l'oscillazione del supporto (della terra).
Quindi non potendo modificare ω possiamo agire solo su $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$. ω_n deve essere piccolo e quindi m grande.
Quindi la zona di funzionamento del sismografo è $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$

B.
Poiché misurando si modifica il sistema dobbiamo scegliere accelerometri con pesi trascurabili rispetto l'oggetto di cui dobbiamo misurare l'accelerazione

Ora procedo facendo i diagrammi di corpo libero isolando le masse del sistema



Poiché tutti i nostri sistemi sono lineari vale il principio di sovrapposizione degli effetti.



In quest'ultimo caso le forze in arancione sono date dalla legge di azione e reazione (le forze sono uguali, ma di verso opposto al caso precedente)

L'influenza su m_2 di f_1 vi é e é indicata dagli spostamenti x_1 poiché f_1 non é applicata direttamente su m_2.

Procedo scrivendo l'EQUAZIONI DI EQUILIBRIO:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2(x_1 - x_2) + k_1 x_1 = f_1(t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3 \dot{x}_2 + k_3 x_2 - k_2(x_1 - x_2) = -f_2(t)$$

2 gradi di libertà, 2 eq. di moto.

Delle matrici $[m]$, $[c]$ e $[k]$ ci interessano in particolare quella $[m]$ e $[c]$.

Tratteremo solo dello SMORZAMENTO VISCOSO PROPORZIONALE:

$$[c] = \alpha [m] + \beta [k]$$

Ipotizzeremo che la matrice degli smorzamenti sarà una composizione lineare delle matrici $[m]$ e $[k]$.

Si può dimostrare che $[m]$ e $[k]$ sono sicuramente e sempre simmetriche:

La matrice delle rigidezze si dimostra essere simmetrica grazie al teorema di Betty

La matrice delle masse si dimostra grazie a Lagrange.

Poiché $[m]$ e $[k]$ sono simmetriche anche $[c]$ è simmetrica.

$$\Rightarrow \quad [m] = [m]^T$$
$$[k] = [k]^T$$
$$[c] = [c]^T$$

La situazione migliore è che queste matrici siano diagonali perché in questa situazione le ε equazioni sono indipendenti ed è possibile risolverle anche una alla volta.

Le matrici $[m]$ e $[k]$ sono definite POSITIVE

Una qualunque matrice $\underset{\text{reale}}{}$ $[A]$ $\underset{\text{quadrata}}{}$ è definita positiva se post moltiplicata per qualunque vettore v e moltiplicata a sinistra per lo stesso vettore trasposto $\{v\}^T$ il risultato è uno scalare maggiore di zero:

$$\underset{1\times n}{\{v\}^T} \underset{n\times n}{[A]} \underset{n\times 1}{\{v\}} > 0 \quad \Rightarrow \quad [A] \text{ è definita positiva}$$

Quindi noi da un sistema di equazioni accoppiate, invece di calcolare le x cercheremo di trovare una matrice mediante la quale scrivere le equazioni non più in funzione della variabile x, ma in funzione di nuove variabili che mi permetteranno di avere delle equazioni differenziali tra di loro disaccoppiate per ricondurre il sistema a n gradi di libertà a n sistemi ciascuno ad un grado di libertà.

Pre-Moltiplico questo insieme di equazioni per $\{x_0\}^T$

N.B. L'ordine delle moltiplicazioni è importante

$$\underbrace{\overset{1\times n}{\{x_0\}^T}[m]\{x_0\}\ddot{g}}_{\text{SCALARE}} + \underbrace{\{x_0\}^T[k]\{x_0\}g}_{\text{SCALARE}} = \underbrace{\{x_0\}^T\{0\}}_{\text{SCALARE}}$$

Questa cosa mi serve per ottenere uno scalare.

Ricavo l'espressione

$$\ddot{g} + \frac{\{x_0\}^T[k]\{x_0\}}{\{x_0\}^T[m]\{x_0\}}g = 0$$

Ho un'equazione differenziale a coeff. costanti

Al momento x_0 non ce l'ho e non posso calcolare questo rapporto.

So però:

$$\{x_0\}^T[m]\{x_0\} > 0$$

Questo lo so perché $[m]$ è simmetrica e definita positiva.

Il numeratore per definizione è:

$$\{x_0\}^T[k]\{x_0\} \geq 0$$

IMPORTANTE

Per scoprire se una matrice è simmetrica e definita positiva i determinanti di tutti i suoi minori devono essere positivi.

Avrò perciò che il rapporto nell'eq. precedente è positivo e lo chiamo ω, ottenendo:

$$\ddot{g} + \omega^2 g = 0$$

La quale è un'equazione differenziale, omogenea di secondo grado, a coefficienti costanti.

Ottengo dunque

$$g(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t = g_0\sin(\omega t + \varphi)$$

Oppure l'altra soluzione é che:

$$\det\left([k]-\omega^2[m]\right) = 0$$

$[k]-\omega^2[m]$ é la soluzione di un auto-problema.

$$[k]\{a_0\} = +\omega^2[m]\{a_0\}$$

Se moltiplico primo e secondo termine per $[m]^{-1}$ (poiché abbiamo matrici, per eliminare le matrici dobbiamo premoltiplicare per la propria inversa):

$$\underbrace{[m]^{-1}[k]}\{a_0\} = \omega^2[m]^{-1}[m]\{a_0\}$$

$$\underset{n\times n}{[B]}\{a_0\} = \omega^2[I]\{a_0\}$$

otteniamo dunque un AUTO-PROBLEMA (EIGENVALUE PROBLEM):

$$\boxed{[B]\{a_0\} = \lambda\{a_0\}}$$

Data $[k]$ e $[m]$ mi so calcolare $[B]$ e quindi posso ricavarmi le varie ω^2

In un sistema a 2 GdL possiamo scrivere:

$$\det\left(\begin{bmatrix} k_{11}-\omega^2 m_{11} & k_{12}-\omega^2 m_{12} \\ k_{21}-\omega^2 m_{21} & k_{22}-\omega^2 m_{22} \end{bmatrix}\right) = 0$$

Da tale determinante esce una costante C_0 che non dipende da ω:

$$C_0 = K_{11}\cdot K_{22} - K_{12}K_{21}$$

Avró solitamente un'altra costante C_1 che moltiplica ω^2 ed un'altra, C_2, che moltiplica ω^4, ottenendo:

$$C_0 + C_1\omega^2 + C_2\omega^4 = 0$$

L'insieme di:

$$\underbrace{\underset{\text{AUTOVALORE}}{\omega_r^2} \Longleftrightarrow \underset{\text{AUTOVETTORE}}{\{\psi_r\}}}_{\text{MODO } r\text{-esimo}}$$

Il significato fisico degli zeri del polinomio é:
se io determino la risposta libera del sistema $[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$, questa risposta libera, in forma sincrona, é un'armonica.
Questa forma sincrona, armonica, non avviene a qualunque frequenza, ma soltanto ad una di quelle frequenze che mi sono calcolato.

Dentro $\{a_0\}$ si hanno gli spostamenti (rotazioni) del sistema.
Per ogni frequenza ω_r si avrá un determinato spostamento (o una determinata deformazione) dato da $\{\psi_r\}$ che prende anche il nome di FORMA MODALE.

$$\{\psi_r\} = \begin{Bmatrix} \psi_{1r} \\ \psi_{2r} \\ \vdots \\ \psi_{nr} \end{Bmatrix}$$

avrá che $\psi_{\underset{\text{GdL}}{J}\,\underset{\text{modo}}{K}}$

ESERCIZIO N° 6 (SDOF)

per far sì che $f(0^-)=0$

$$m\ddot{x} + kx = F \sin \omega_n t \cdot u(t)$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

Usiamo l'integrale di CONVOLUZIONE (perché richiesto dal testo):

Per utilizzare l'integrale di convoluzione $f(0^-) = 0$
e si deve avere che $x(0) = \dot{x}(0) = 0$
se quest'ultimo non è nullo si moltiplica la soluzione
per l'integrale generale della soluzione con le condizioni generali.

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, dt$$

ove $f(t)$ è la forzante.

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n t \quad (\text{IRF} = \text{funzione di risposta all'impulso})$$

Fino a quando la h non è di un sistema smorzato si procede facendo conti abbastanza semplici:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \underbrace{\int_0^t F \sin(\omega_n \tau) \cdot \sin[\omega_n (t-\tau)]\, d\tau}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n} I(t)$$

$$I = \int_0^t \sin \omega_n \tau \left[\sin \omega_n t \cos \omega_n \tau - \sin \omega_n \tau \cos \omega_n t\right] d\tau =$$

$$= \sin \omega_n t \left[\frac{\sin^2 \omega_n \tau}{2\omega_n}\right]_{\tau=0}^{\tau=t} - \cos \omega_n t \int_0^t \frac{1-\cos^2 \omega_n \tau}{2}\, d\tau =$$

lo tiro fuori perché non dipende da τ

?

non torna, ma non importa!!!

23-10-15

$$[m]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\}$$

SOLUZIONE SINCRONA

$$\{x(t)\}=\{a_0\}\sin(\omega t+\varphi)$$

$$([k]-\omega^2[m])\{a_0\}=\{0\} \quad \text{EVP}$$

$$\omega_r^2,\ \{\psi_r\} \qquad r=1,2,\dots,n$$ numero di GdL

ω_r = PULSAZIONI NATURALI

$\{\psi_r\}$ = FORME MODALI

La forma modale mi dice come si spostano le masse

ω_r mi dice quanto si spostano.

Tali problemi si risolvono per passi:

PASSO 1: $\det([k]-\omega^2[m])=0$

PASSO 2: si inseriscono le ω nell'eq. originale.

Qualsiasi soluzione otteniamo é definita a meno di una costante moltiplicativa:

$$([k]-\omega_r^2[m])\{a_0\}=\{0\}$$

$$\Rightarrow \{\psi_r\}=\begin{Bmatrix}1\\-0{,}5\\\pi\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1\\0{,}5\\-\pi\end{Bmatrix}$$

Poiché il sistema precedente é omogeneo.
Perció gli autovettori sono definiti a meno di una costante.
Quale sia il ~~vettore~~ giusto non lo sappiamo quindi lo scegliamo "a caso", ció implica che dentro $\{\psi_r\}$ non vi sono unitá di misura perché esse possono essere scalate.

La stessa espressione posso riscriverla utilizzando un altro autovettore (ψ_s) e la rispettiva ω_s

A questo punto pre-moltiplico la prima eq. per la $\{\psi_s\}^T$ e pre-moltiplico la seconda eq. per $\{\psi_r\}^T$:

① $\{\psi_s\}^T [k] \{\psi_r\} = \omega_r^2 \{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\}$

② $\left(\{\psi_r\}^T [k] \{\psi_s\} = \omega_s^2 \{\psi_r\}^T [m] \{\psi_s\}\right)^T$

Voglio che le 2 matrici abbiano gli stessi pedici e per fare questo traspongo tutto la seconda espressione:

$$\{\psi_s\}^T [k] \{\psi_r\} = \omega_r^2 \{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\}$$

$$\{\psi_s\}^T [k]^T \{\psi_r\} = \omega_s^2 \{\psi_s\}^T [m]^T \{\psi_r\}$$

Per Betty e Lagrange, poiché le matrici sono simmetriche abbiamo che:

$$[k] = [k]^T$$
$$[m] = [m]^T$$

e quindi la seconda diventa:

② $\{\psi_s\}^T [k] \{\psi_r\} = \omega_s^2 \{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\}$

① $\{\psi_s\}^T [k] \{\psi_r\} = \omega_r^2 \{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\}$

Sottraendo alla prima la seconda, otteniamo:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\} = 0$$

Se considero 2 modi diversi ($r \neq s$) avrò $\omega_r \neq \omega_s$ e quindi:

$$\{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\} = 0$$

L'ortogonalità ci serve per dimostrare che gli autovettori sono LINEARMENTE INDIPENDENTI, cioé che gli autovettori non si possono combinare linearmente per ottenere zero.

Per dimostrarlo si procede per assurdo scrivendo il contrario e vedendo che é un assurdo:

$$c_1 \{\psi_1\} + c_2 \{\psi_2\} + \dots + c_n \{\psi_n\} = \{0\}$$

Uso la diagonalità, premoltiplicando prima per $[m]$:

$$c_1 [m] \{\psi_1\} + c_2 [m] \{\psi_2\} + \dots + c_n [m] \{\psi_n\} = \{0\}$$

Pre-moltiplicando ancora per $\{\psi_r\}^T$:

$$c_1 \underbrace{\cancel{\{\psi_r\}^T [m] \{\psi_1\}}}_{=0} + \dots + c_r \{\psi_r\}^T [m] \{\psi_r\} + \dots + c_n \underbrace{\cancel{\{\psi_r\}^T [m] \{\psi_n\}}}_{=0}$$
$$= \{\psi_r\}^T \{0\}$$

Per ciò che abbiamo detto prima, tutti i prodotti con $r \neq s$ si annullano ottenendo

$$c_r m_r = 0$$

ma poiché $m_r > 0$ c_r deve essere uguale a zero per $r = 1, 2, \dots, n$

Quindi l'eq. di partenza é valida se tutti i c_r sono uguali a zero.

$\Rrightarrow$ GLI AUTOVETTORI SONO TUTTI LINEARMENTE INDIPENDENTI

La nostra eq. di partenza è questa:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = f(t)$$

Per risolverla bisogna svolgere le precedenti eq. in modo generalizzato, ma noi non lo faremo.
Affrontiamo soltanto il caso in cui si ha lo SMORZAMENTO PROPORZIONALE, cioè se:

$$[c] = \alpha[m] + \beta[K]$$

Se così è, gli AUTOVETTORI calcolati dal sistema non smorzato, diagonalizzano anche la matrice degli smorzamenti e quindi ottengo anche la MATRICE MODALE DEGLI SMORZAMENTI:

$$[\psi]^T[c][\psi] = \alpha[\psi]^T[m][\psi] + \beta[\psi]^T[K][\psi] =$$

$$= \alpha \, \mathrm{diag}(m_r) + \beta \, \mathrm{diag}(K_r) = \mathrm{diag}(C_r)$$

Ciò dimostra che dalla matrice modale ricavata dal sistema non smorzato si può ricavare la MATRICE MODALE DEGLI SMORZAMENTI la quale anch'essa è diagonale.

TRASFORMAZIONE MODALE

È un passaggio di coordinate:

$$\{x(t)\} = \sum_{r=1}^{n} \{\psi_r\}\, \eta_r(t)$$

$\{x(t)\}$ per il teorema di espansione può essere scritto come una combinazione lineare degli autovettori, ma poiché x varia nel tempo saranno gli α a variare nel tempo e prenderanno così il nome di $\eta_r(t)$ che indicano le nuove coordinate, funzione del tempo che descrivono il sistema.

$\eta_r(t)$ = COORDINATE MODALI (O NATURALI) (O PRINCIPALI)

Avremo che:

$$\begin{cases} x_1 = \psi_{11}\eta_1 + \psi_{12}\eta_2 + \dots + \psi_{1n}\eta_n \\ \vdots \\ x_n = \psi_{n1}\eta_1 + \psi_{n2}\eta_2 + \dots + \psi_{nn}\eta_n \end{cases}$$

Tutto ciò lo posso scrivere più comodamente:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \dots & \psi_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{n1} & \psi_{n2} & \dots & \psi_{nn} \end{bmatrix}}_{\left[\{\psi_1\}\{\psi_2\}\dots\{\psi_n\}\right]} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{Bmatrix}$$

ottengo dunque un secondo modo equivalente per scrivere la trasformazione modale:

$$\{x(t)\} = [\Psi]\{\eta(t)\}$$

$$[\Psi]^T[m][\Psi]\{\ddot{\eta}\}+[\Psi]^T[c][\Psi]\{\dot{\eta}\}+[\Psi]^T[k][\Psi]\{\eta\}=\underset{n\times n}{[\Psi]^T}\underset{n\times 1}{\{0\}}$$

poiché:

$[\Psi]^T[m][\Psi] = \mathrm{diag}(m_r)$ = matrice diagonale con tutte le masse modali sulla diagonale tutte > 0

$$[\Psi]^T[k][\Psi] = \mathrm{diag}(k_r)$$

$$[\Psi]^T[c][\Psi] = \mathrm{diag}(c_r) \qquad r=1,2,\dots,n$$

ottenendo:

$$\begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\eta}_1\\ \vdots \\ \ddot{\eta}_n\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\eta}_1\\ \vdots \\ \dot{\eta}_n\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\eta_1\\ \vdots \\ \eta_n\end{Bmatrix}=\{0\}$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{\eta}_1 + c_1\dot{\eta}_1 + k_1\eta_1 = 0 \\ m_2\ddot{\eta}_2 + c_2\dot{\eta}_2 + k_2\eta_2 = 0 \\ \vdots \\ m_n\ddot{\eta}_n + c_n\dot{\eta}_n + k_n\eta_n = 0 \end{cases}$$

La generica equazione che rappresenta tutte queste è dunque:

$$m_r\ddot{\eta}_r + c_r\dot{\eta}_r + k_r\eta_r = 0 \qquad r=1,2,\dots,n$$

abbiamo dunque r sistemi ad un grado di libertà.
Trovate le eq ad un grado di libertà dividiamo per m_r ottenendo:

$$\frac{k_r}{m_r} \doteq \omega_r^2 \longrightarrow \omega_r: \text{PULSAZ NATURALE}$$

$$\frac{c_r}{m_r} \doteq 2\,\xi_r\,\omega_r$$

ξ_r = FATTORE DI SMORZAMENTO MODALE

Però conosciamo:

$$\{X(t=0)\} = \{x_0\}$$

$$\{\dot{x}(t=0)\} = \{v_0\}$$

e quindi applichiamo la trasformazione modale:

$$\{x\} = [\Psi]\{\eta\} \implies \{x\} = [\Psi]\{\eta\}_0$$

$$\{\dot{x}\} = [\Psi]\{\dot{\eta}\} \implies \{v_0\} = [\Psi]\{\dot{\eta}\}_0$$

Invertendo la matrice $[\Psi]$ ottengo le condizioni iniziali:

$$[\Psi]^{-1}\{x_0\} = \{\eta_0\} = \begin{Bmatrix} \eta_{10} \\ \eta_{20} \\ \vdots \\ \eta_{n0} \end{Bmatrix}$$

$$[\Psi]^{-1}\{v_0\} = \{\dot{\eta}_0\}$$

Questo teoricamente va bene, ma non è quello che faremo perché le matrici non si invertono mai!!!

La modalità più efficiente dal punto di vista numerico è la seguente:

Scrivo la trasformazione modale nella seguente maniera:

$$\{x\} = \sum_{r=1}^{n} \{\Psi_r\}\eta_r = \sum_{r=1}^{n}\{\Psi_r\}\left(a_r \cos\omega_{dr} t + b_r \sin\omega_{dr} t\right) e^{-\xi_r \omega_r t}$$

$$\{\dot{x}\} = \sum_{r=1}^{n}\{\Psi_r\}\dot{\eta}_r = \sum_{r=1}^{n}\{\Psi_r\}\Big[\omega_{dr}\left(-a_r \sin\omega_{dr} t + b_r \cos\omega_{dr} t\right) e^{-\xi_r \omega_r t} + $$
$$ - \xi_r \omega_r \left(a_r \cos\omega_{dr} t + b_r \sin\omega_{dr} t\right) e^{-\xi_r \omega_r t}\Big]$$

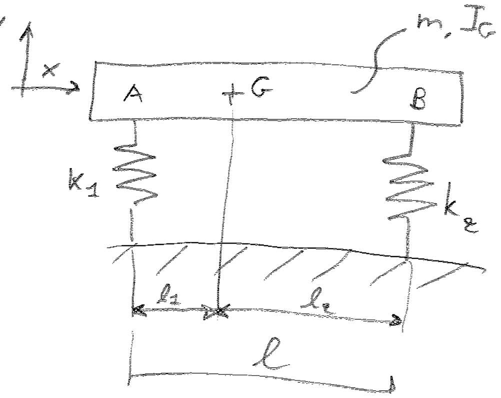
adesso calcoliamo tutto per le condizioni iniziali $t=0$:

$$\{x_0\} = \sum_{r=1}^{n}\{\Psi_r\} a_r$$

$$\{V_0\} = \sum_{r=1}^{n}\{\Psi_r\}\left[\omega_{dr} b_r - \xi_r \omega_r a_r\right]$$

13-11-15

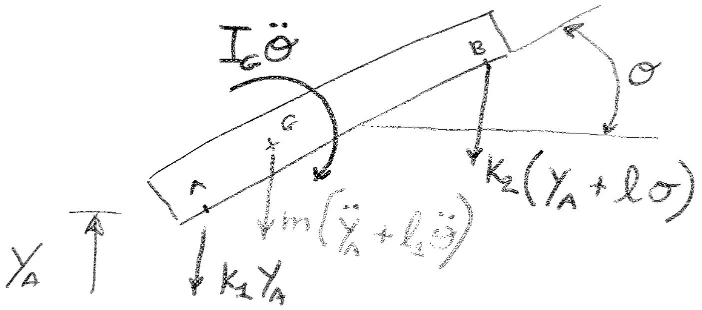
5. MDOF 2/1



$l = l_1 + l_2$

Lo spostamento avviene soltanto lungo Y.
Il sistema è a 2 GdL

Facciamo il diagramma di corpo libero:



Facciamo l'**IPOTESI DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI**:

$$Y_B \simeq Y_A + l\theta$$

$$Y_G \simeq Y_A + l_1\theta$$

Imponiamo l'equilibrio alla traslazione verticale:

$$\downarrow) \quad m(\ddot{Y}_A + l_1\ddot{\theta}) + K_1 Y_A + k_2(Y_A + l\theta) = 0$$

Se scrivo l'equazione intorno al baricentro elimino la forza d'inerzia, però ciò comporta che le matrici non vengono simmetriche. Per far sì che le matrici vengano simmetriche prendo come polo il punto A.

$$A) \quad I_G\ddot{\theta} + l_1 m(\ddot{Y}_A + l_1\ddot{\theta}) + lK_2(Y_A + l\theta) = 0$$

Scrivo queste 2 equazioni nella configurazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} m & ml_1 \\ ml_1 & I_G + ml_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_A \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l \\ k_2 l & k_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_A \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Il grado di accoppiamento del sistema è funzione del sistema di riferimento

È possibile dimostrare che sia il caso 1 che il 2 portano alle stesse pulsazioni proprie, poiché esse esprimono una caratteristica propria del sistema.

Per calcolare le pulsazioni proprie ed i modi svolgo l'auto problema

$$\left([k] - \omega^2 [m]\right) \begin{Bmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} = [0 \ 0]$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_2 l_2^2 + k_1 l_1^2 - \omega^2 I_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65673 - 1461\omega^2 & 31151 \\ 31151 & 165423 - 2034\omega^2 \end{bmatrix}$$

Non riuscendo a svolgere il problema in forma numerica inserisco i numeri che mi dice di inserire il testo.

Si calcola ora il determinante della matrice e si impone uguale a zero ottenendo:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{375,2 \pm 152,3}{5,944} \begin{cases} \to 37,5 \ rad^2/s^2 \\ \to 88,7 \ rad^2/s^2 \end{cases}$$

devono essere quantità positive, quindi se vengono negative deve esserci qualche errore:

$$\omega_1 = 6,12 \ rad/s$$

$$\omega_2 = 9,42 \ rad/s$$

Vado a cercare ora i MODI DI VIBRARE inserendo prima ω_1 e poi ω_2.

Si hanno dunque 2 MOTI DI BECCHEGGIO

Si introduce la matrice dello smorzamento [C] e devo calcolare i fattori di smorzamento:

$$[C] = \alpha[m] + \beta[k]$$

$$\frac{c_r}{m_r} = \alpha \frac{m_r}{m_r} + \beta \frac{k_r}{m_r}$$

$$2 \xi_r \omega_r = \alpha + \beta \omega_r^2$$

$$\xi_r = \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\omega_r} + \frac{\beta}{2} \omega_r$$

$$\Rightarrow \quad \xi_1 = 62{,}83\ \%$$

$$\xi_2 = 95{,}26\ \%$$

Si imposta ora una traslazione verticale alla trave e si studiano gli spostamenti:

CONDIZIONI INIZIALI:

$$Y_0 = \Delta \qquad \theta_0 = 0$$

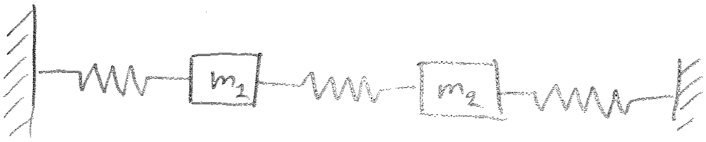
$$\dot{Y}_0 = 0 \qquad \dot{\theta}_0 = 0$$

FARE DA SOLI!!

30-10-15

ESERCITAZIONE

ES 1.



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$([k] - \omega^2 [m]) \{x_0\} = \{0\}$$ EVP (forma dell'autoproblema)

$$\begin{pmatrix} 4-5\omega^2 & -2 \\ -2 & 6-10\omega^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X_{10} \\ X_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Impongo il det = 0 per trovare le soluzioni

$$\det = (4-5\omega^2)(6-10\omega^2) - 4 = 0$$

$$5\omega^4 - 7\omega^2 + 2 = 0$$ POLINOMIO CARATTERISTICO

$$\omega^2_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{10} = \frac{7 \pm 3}{10} \begin{cases} \to \frac{2}{5} \\ \to 1 \end{cases}$$

↓ in ordine crescente

Le ω sono sempre positive perché le matrici sono definite positive

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{5}} \ \text{rad/s}$$

$$\omega_2 = 1 \ \text{rad/s}$$

A questo punto posso fare una verifica e inserire al posto di k_2 un'asta e calcolarmi ω_1:

$$\omega_1^2 = \frac{k_1 + k_3}{m_1 + m_2} = \frac{2+4}{5+10} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \qquad \text{ok! torna}$$

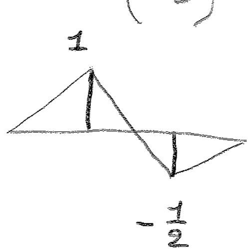
Nel secondo modo risolvo questo sistema

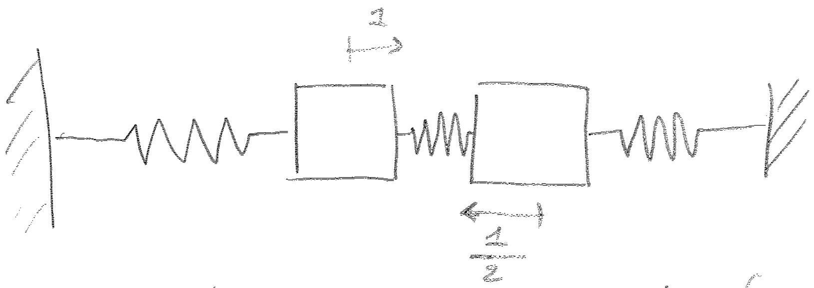
$$\begin{pmatrix} 4-5 & -2 \\ -2 & 6-10 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X_{10} \\ X_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$-X_{10} - 2X_{20} = 0$$

$$X_{10} = -2X_{20} = \text{impongo io il valore} = 1 \Rightarrow \{\psi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

Il secondo modo, graficamente, è:





Si ha un moto in opposizione di fase.

Nella realtà il sistema è una composizione dei modi e quindi vanno considerati tutti i modi

Il testo ci dice di indicare la matrice modale:

$$[\psi] = [\{\psi_1\}\{\psi_2\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

trasferisca le condizioni iniziali in A_1, A_2, B_1, B_2

$$\{X_0\}, \{V_0\} \longrightarrow A_1, A_2, B_1, B_2$$

Effettuo la TRASFORMAZIONE MODALE INDIRETTA:

$$\{\eta(t)\} = [\Psi]^{-1}\{x(t)\} \qquad \text{(TMI)}$$

vale $\forall t$ e quindi la posso derivare

$$\{\dot{\eta}(t)\} = [\Psi]^{-1}\{v(t)\}$$

per $t=0$ avrò i seguenti sistemi:

$$\{\eta(0)\} = [\Psi]^{-1}\{X_0\}$$

$$\{\dot{\eta}(0)\} = [\Psi]^{-1}\{V_0\}$$

Perciò i due metodi sono:

1. inversione di $[\Psi]$
2. sistema algebrico con → sostituzione, → cramer, → Gauss

2ª STRADA

$$\{X_0\} = [\Psi]\{\eta_0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [\Psi]\begin{Bmatrix} \eta_{10} \\ \eta_{20} \end{Bmatrix} \Longrightarrow \underset{A_1}{\eta_{10}} = \underset{A_2}{\eta_{20}} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\eta}_{10} \\ \dot{\eta}_{20} \end{Bmatrix}$$

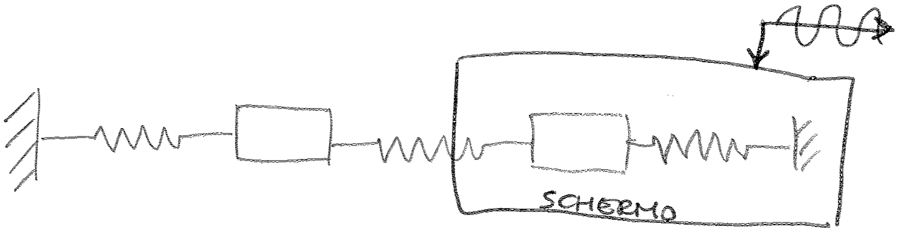
Poiché $\eta_r(0) = A_r$ avrò $\eta_{10} = A_1$ e $\eta_{20} = A_2$

$\eta_r(0) = A_r$ perché $\eta_r = A_r \cos\omega_r t + B_r \sin\omega_r t$

Se faccio i prodotti di questo sistema ottengo:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{10}\ \sin \omega_1 t \\ \sqrt{10}\ \sin \omega_1 t \end{Bmatrix}$$

TEOREMA DI ESPANSIONE



Con opportune condizioni iniziali il sistema inizia ad oscillare con $\sqrt{10}\ \sin \omega_1 t$. Schermando una sola massa e misurando con un sensore ottengo una sola sinusoide che mi indica un sistema ad 1 GdL che é sbagliato, infatti dall'analisi sperimentale é possibile non riuscire ad individuare dei modi perché nascosti.

2° CASO $\{X_0\} = [1 \ \ 0]^T \qquad \{V_0\} = [0 \ \ 0]^T$

Tale caso é facile da realizzare sperimentalmente

Scelgo la 2ª STRADA:

Essa sfrutta la m ortogonalità, la quale si basa sul

$$\{\psi_r\}^T [m]$$

AMMAZZA AUTOVETTORI

Applicando tale dizione vengono ammazzati tutti gli autovettori tranne uno.

Per il compito ci sono delle formule:

$$\boxed{A_r = \frac{\{\psi_r\}^T [m] \{X_0\}}{M_r}}$$

$$\boxed{B_r = \frac{\{\psi_r\}^T [m] \{V_0\}}{M_r \omega_r}}$$

30-10-15

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\{x(t=0)\} = \{x_0\} \\ \{\dot{x}(t=0)\} = \{v_0\}\end{array}\right\} \Rightarrow \{x(t)\}$$

$$\{x\} = [\Psi]\{\eta\}$$

$$\eta_r = (a_r \cos \omega_{dr} t + b_r \sin \omega_{dr} t)\, e^{-\xi_r \omega_r t}$$

$$a_r = \frac{\{\Psi_r\}^T [m] \{x_0\}}{m_r}$$

$$b_r = \frac{\{\Psi_r\}^T [m] (\{v_0\} + \xi_r \omega_r \{x_0\})}{m_r \omega_{dr}}$$

→ COMPLETIAMO LA TRATTAZIONE: SISTEMA FORZATO

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f(t)\}$$

abbiamo un insieme di forze:

$$\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{Bmatrix}$$

Vogliamo sapere quanto vale l'output $\{x(t)\}$ dato l'input $\{f(t)\}$

Possiamo da un sistema di equazioni accoppiate ad un sistema di equazioni disaccoppiate.

Per $\xi_r < 1$

$$\boxed{h_r(t) = \frac{1}{m_r \omega_{dr}} \sin \omega_{dr} t \; e^{-\xi_r \omega_r t}}$$

Nota $h_r(t)$ e la forza $P_r(t)$ possiamo ricavare la soluzione al problema.
Nota $\{\eta\}$, infatti, possiamo calcolarci $\{x\}$ da:

$$\{x\} = [\Psi]\{\eta\}$$

RICAPITOLANDO

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f(t)\}$$

voglio calcolarmi $\{x(t)\}$

PASSO 1 Impongo $[c]=[0]$ e $\{f(t)\}=\{0\}$

e cerco una soluzione sincrona e scopro che la soluzione sincrona esiste e ha soluzione

$$\{x(t)\} = \{A\}\cos(\omega t + \varphi)$$

PASSO 2 La soluzione mi porta all' EVP:

$$([k] - \omega^2[m])\{A\} = \{0\}$$

da cui ricavo ω_r^2 e $\{\psi_r\}$ $r = 1, 2, \ldots, n$

MODI → i modi dipendono unicamente da $[m]$ e $[k]$

PASSO 3: Scopro che i modi sono ortogonali rispetto $[m]$ e $[k]$ e l' ortogonalità mi permette di calcolare $[m_r]$ e $[k_r]$

$\{X_0\}$ può essere complesso e quindi $\in \mathbb{C}^{n \times 1}$

Ci interessa la soluzione a regime perché quella nel transitorio prima o poi sparisce:

$$\{\dot{x}\} = i\Omega \{X_0\} e^{i\Omega t}$$

$$\{\ddot{x}\} = -\Omega^2 \{X_0\} e^{i\Omega t}$$

sostituisco:

$$\left([k] - \Omega^2 [m] + i\Omega [c]\right) \{X_0\} \cancel{e^{i\Omega t}} = \{f_0\} \cancel{e^{i\Omega t}}$$

tale soluzione vale in qualsiasi istante di tempo e quindi semplifichiamo le "e".

La matrice a primo membro, dati $[k]$, $[m]$ e $[c]$ me la posso calcolare e prende il nome di MATRICE DI RIGIDEZZA DINAMICA $[K_{DIN}(\Omega)]$ e dipende dalla pulsazione. Dunque abbiamo.

$$[K_{DIN}]\{X_0\} = \{f_0\}$$

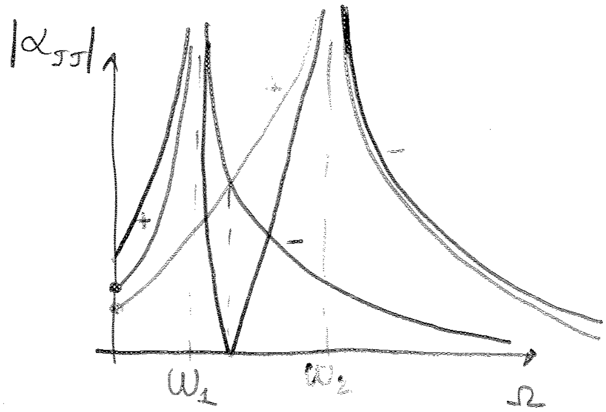
e quindi possiamo trovare $\{X_0\}$

$$\{X_0\} = [K_{DIN}]^{-1}\{f_0\} = [\alpha(\Omega)]\{f_0\}$$

quindi formalmente il problema è risolto, ma a noi non piace invertire le matrici ed inoltre $[K_{DIN}]$ va calcolata per ogni Ω.

$[K_{DIN}]^{-1}$ viene chiamata RECETTANZA ed indicata con $[\alpha(\Omega)]$

$$\alpha_{JJ} = \sum_{r=1}^{2} \frac{\psi_{Jr}\,\psi_{Jr}}{K_r - \Omega^2 m_r} = \underbrace{\frac{\psi_{J1}^2}{K_1 - m_1\Omega^2}}_{1^\circ \text{ MODO}} + \underbrace{\frac{\psi_{J2}^2}{K_2 - m_2\Omega^2}}_{2^\circ \text{ MODO}}$$



MODO 1 + MODO 2

α_{JJ} viene anche chiamato **recettanza** punto punto

$$\alpha_{JJ} = \frac{\dfrac{\psi_{J1}^2}{m_1}}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{\dfrac{\psi_{J2}^2}{m_2}}{\omega_2^2 - \Omega^2}$$

QUANTITÀ POSITIVE

Per un sistema a 2 GdL vediamo una risonanza ad ω_1 ed una ad ω_2 e tra le 2 vi é una pulsazione per cui l'ampiezza del moto va a zero (CONDIZIONE DI ANTI-RISONANZA) = applico una forzante alla massa ed essa non si muove.

In presenza di smorzamento non ho piú antirisonanza e ampiezza di risonanza infinita.