NUMERO: 2039A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Salomone Lorenzo

MATERIA: Scienza delle costruzioni 2 - Prof. Ferro

POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di ing. Strutturale, Edile e Geotecnica

INSEGNAMENTO SCIENZE DELLE COSTRUZIONI II

a.a. 2015/2016

APPUNTI DEL CORSO

Studente Salomone Lorenzo

Professore Giuseppe Andrea Ferro

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 198

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI 2

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Prof. Ing. Giuseppe Andrea FERRO
Politecnico di Torino

29 settembre 2014

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

INDICE

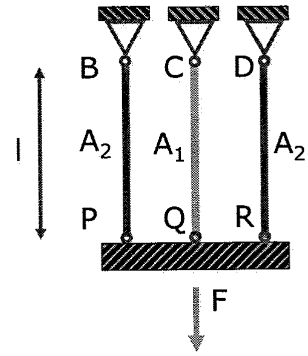
- Impostazione metodologica
- Sistemi di bielle in parallelo
- Matrice di rigidezza per la singola trave
- Esempi di risoluzione strutture iperstatiche col MdS
- Ricadute teoriche

RISCHIO SISMICO

Il Metodo degli Spostamenti è il duale del Metodo delle Forze.
Si tratta di individuare quell'unico insieme di parametri cinematici che, oltre alla congruenza, implichi anche l'equilibrio.
Il MdS consiste nell'imporre alcuni spostamenti o rotazioni, caratteristici del sistema, in modo tale che le $(v-g)$ reazioni iperstatiche soddisfino $(v-g)$ relazioni di equilibrio.

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

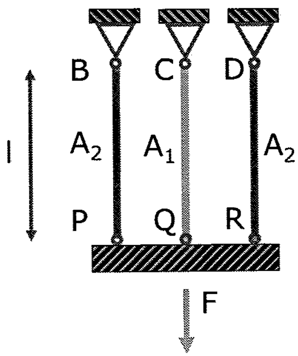
IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI



Ipotesi: il traverso è infinitamente rigido

Le biella centrale ha sezione di area A_1, le laterali di area A_2

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

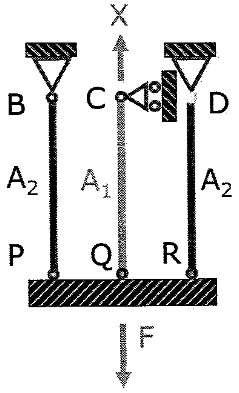


La struttura è simmetrica caricata simmetricamente

Il traverso trasla verso il basso, non ruota

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 198

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI



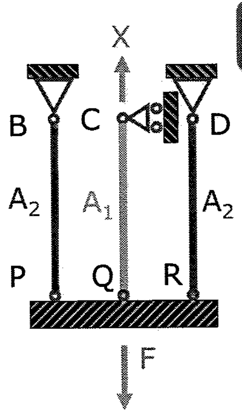
Per effetto di **X** il punto C si sposta di

$$v_C(X) = -\frac{l}{EA_2}\frac{X}{2} - \frac{l}{EA_1}X$$

Per effetto di **F** il punto C si sposta di

$$v_C(F) = +\frac{l}{EA_2}\frac{F}{2}$$

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI



Equazione di congruenza

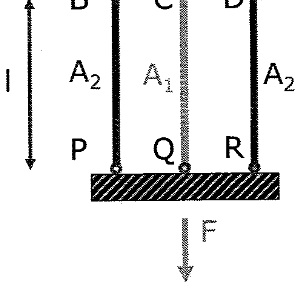
$$v_C = 0$$

$$X = \frac{A_1}{A_1 + 2A_2}F = N_{CQ}$$

$$N_{BP} = N_{DR} = \frac{A_2}{A_1 + 2A_2}F$$

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

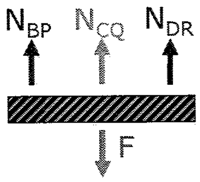
Risoluzione con il metodo degli spostamenti



$v_P = v_Q = v_R = \delta$

La struttura è 1 volta cinematicamente indeterminata

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI



Equazione di equilibrio

$$N_{BP} + N_{CQ} + N_{DR} = F$$

$$\delta = \frac{F}{k_1 + 2k_2}$$

$$N_{CQ} = \frac{A_1}{A_1 + 2A_2}F \qquad N_{BP} = N_{DR} = \frac{A_2}{A_1 + 2A_2}F$$

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Osservazioni

Nel caso le bielle fossero (2n+1)

il metodo delle forze richiede n equazioni di congruenza

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Osservazioni

Nel caso le bielle fossero (2n+1)

il metodo degli spostamenti richiede sempre un' unica equazione

MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE

Il metodo delle forze

Per scrivere le equazioni di **congruenza** era necessario conoscere gli **spostamenti** di alcuni schemi elementari isostatici (**staticamente determinati**) per effetto di **forze o momenti**

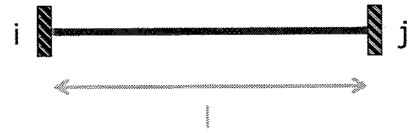
MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE

Il metodo degli spostamenti

Per scrivere le equazioni di **equilibrio** è necessario conoscere le **reazioni** di alcuni schemi elementari **cinematicamente determinati** per effetto di **cedimenti vincolari**

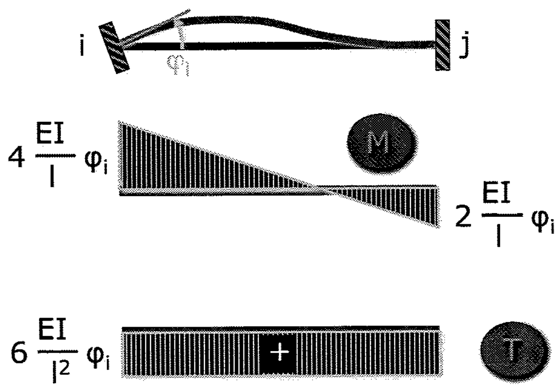
MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE

Trave doppiamente incastrata

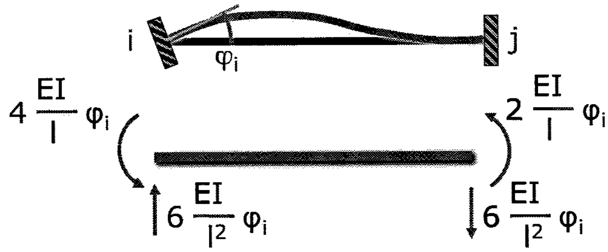


Occorre calcolare le reazioni vincolari per effetto di cedimenti vincolari (spostamenti nodali) imposti

MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE



MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE



$$M_i = 4\frac{EI}{l}\varphi_i \qquad T_i = -6\frac{EI}{l^2}\varphi_i \qquad N_i = 0$$

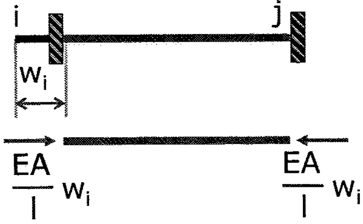
$$M_j = 2\frac{EI}{l}\varphi_j \qquad T_j = +6\frac{EI}{l^2}\varphi_i \qquad N_j = 0$$

MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE

Terzo schema

$w_i \neq 0$

$\varphi_i = v_i = \varphi_j = v_j = w_j = 0$



$M_i = 0$

$T_i = 0$

$N_i = \frac{EA}{l} w_i$

$M_j = 0$

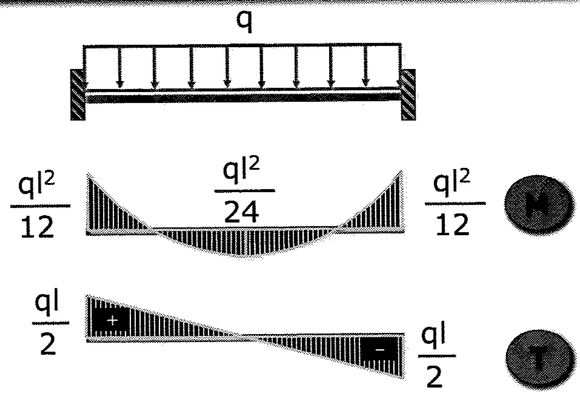
$T_j = 0$

$N_j = -\frac{EA}{l} w_i$

N.B.: gli ultimi tre schemi sono analoghi ai primi tre

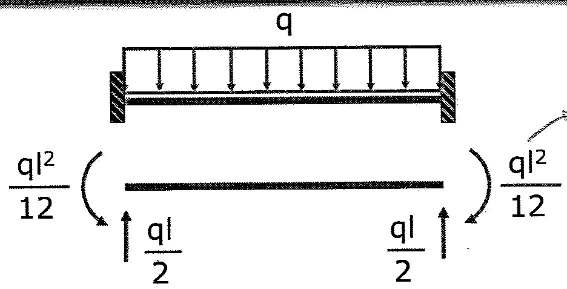
MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE

Carico uniformemente distribuito q



MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE

Carico uniformemente distribuito q



$$\{F\}^T = \{-\frac{ql^2}{12}, +\frac{ql}{2}, 0, +\frac{ql^2}{12}, +\frac{ql}{2}, 0\}$$

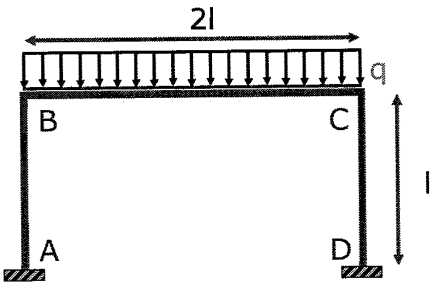
RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Il metodo degli spostamenti

Tra le ∞^s soluzioni cinematicamente ammissibili (congruenti) si sceglie l'unica che rispetti anche l'equilibrio

RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI



Esempio

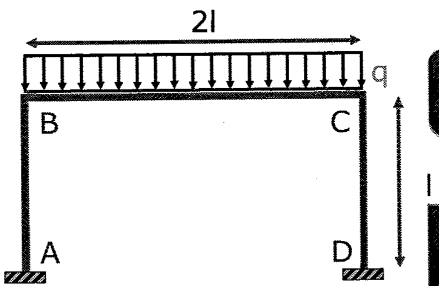
Incognite cinematiche

φ_B, $(\eta_H)_B$, $(\eta_V)_B$

φ_C, $(\eta_H)_C$, $(\eta_V)_C$

Struttura 6 volte cinematicamente indeterminata

RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI



Indeformabilità assiale

φ_B, $(\eta_H)_B$, $\cancel{(\eta_V)_B}$

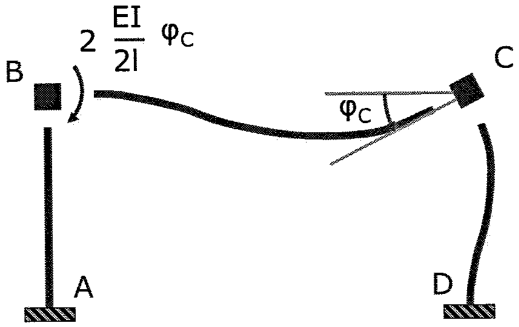
φ_C, $(\eta_H)_C$, $\cancel{(\eta_V)_C}$

$(\eta_H)_B = (\eta_H)_C = \eta_H$

Struttura 3 volte cinematicamente indeterminata

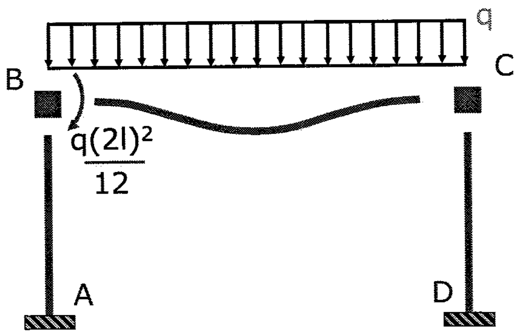
RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Rotazione φ_C



RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Carico esterno



RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

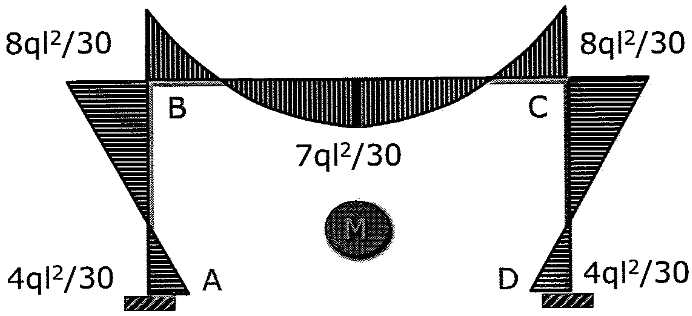
Equazioni di equilibrio alla rotazione del nodo B

$$4\frac{EI}{2l}\varphi_B + 4\frac{EI}{l}\varphi_B + 2\frac{EI}{2l}\varphi_C + \frac{q(2l)^2}{12} = 0$$

Per simmetria
$\varphi_C = -\varphi_B$

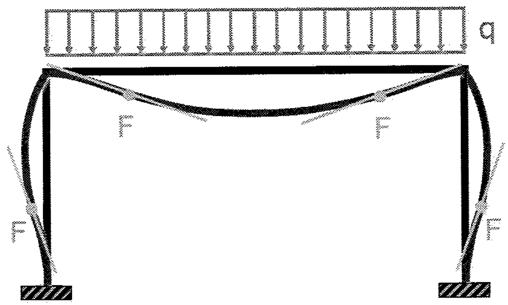
$$\varphi_B = -\frac{1}{15}\frac{ql^3}{EI}$$

RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI



RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Configurazione deformata



RISOLUZIONE DI TELAI COL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Osservazioni

Nella struttura considerata, il metodo delle forze richiede 2 equazioni di congruenza, il metodo degli spostamenti 1 equazione di equilibrio

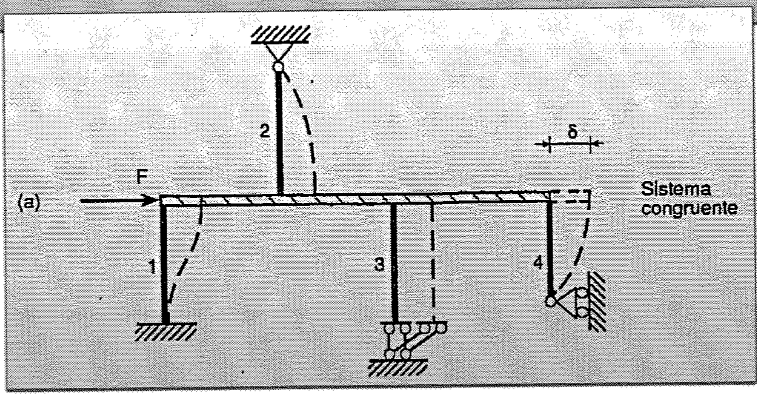
IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

SISTEMI DI TRAVI IN PARALLELO

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

SISTEMI DI TRAVI IN PARALLELO

Si consideri un traverso rigido orizzontale, vincolato al suolo da una serie di piedritti di varia lunghezza, diverso momento di inerzia e costituiti da materiali diversi.
Il traverso orizzontale sia sollecitato da una forza orizzontale F.



IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

SISTEMI DI TRAVI IN PARALLELO

A deformazione avvenuta, il traverso risulterà traslato orizzontalmente della quantità δ, così come le estremità dei piedritti.
Per la congruenza si ha:

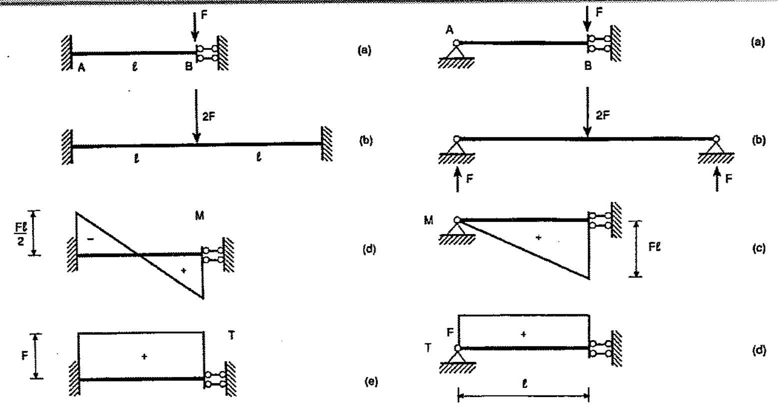
$$\delta_i = \frac{T_i \ell_i^3}{c_i E_i I_i} = \delta,$$

dove T_i è il taglio trasmesso al traverso dal piedritto i-esimo, l_i, I_i, E_i sono le caratteristiche dello stesso piedritto, mentre c_i è un coefficiente numerico dipendente dal vincolo con cui il piedritto è vincolato al suolo.

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

SISTEMI DI TRAVI IN PARALLELO

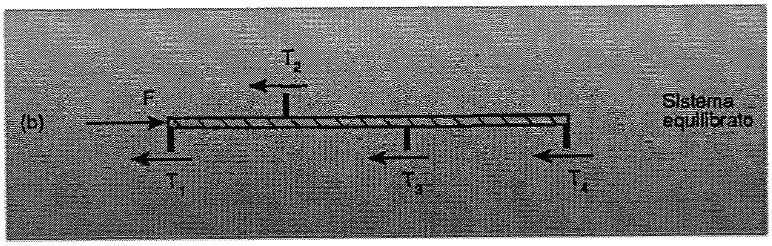
Imposto lo spostamento δ_i, si ricava la reazione iperstatica di taglio T_i. Invertendo i ruoli è possibile applicare la forza T_i e ricavare lo spostamento elastico δ_i. È sufficiente considerare rispettivamente gli schemi per il calcolo dei coefficienti c_1 e $c_2 = c_4$.



IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

SISTEMI DI TRAVI IN PARALLELO

L'equazione risolvente è quella di equilibrio alla traslazione orizzontale del traverso:



$$F = \sum_i T_i$$

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

SISTEMI DI TRAVI IN PARALLELO

Da cui si ottiene:

$$\delta_i = \frac{T_i \ell_i^3}{c_i E_i I_i} = \delta,$$

$$\delta = \frac{F}{\sum_i \frac{c_i E_i I_i}{\ell_i^3}} = \frac{F}{K}$$

la rigidezza totale K fornita dalla sommatoria delle rigidezze parziali. Le reazioni iperstatiche T_i sono esprimibili come:

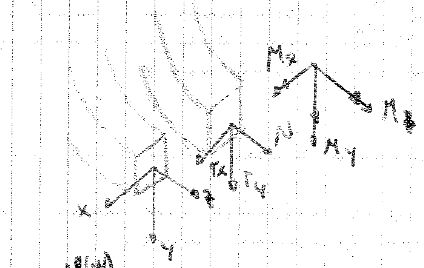
$$T_i = F \frac{\frac{c_i E_i I_i}{\ell_i^3}}{\sum_i \frac{c_i E_i I_i}{\ell_i^3}} = F \frac{K_i}{K}$$

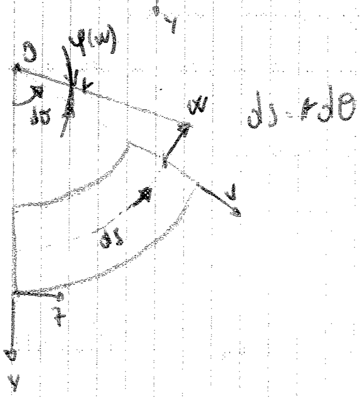
Il rapporto K_i/K è il *coefficiente di ripartizione a taglio.*

CONCIO ASSE SGHEMBO: SI FISSA UN VERSO DI PERCORRENZA E PER OGNI SEZIONE SI DETERMINA UNA TERNA DI RIFERIMENTO INTRINSECA SINISTRORSA

TANGENTE, NORMALE, BINORMALE (ALLA CURVA NON ALLA SEZIONE)
ASSE Z

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE:
- SFORZO NORMALE N
- TAGLIO T_y + TAGLIO T_x
- MOMENTO TORCENTE M_z + MOMENTO FLETTENTE M_y + MOMENTO FLETTENTE M_x



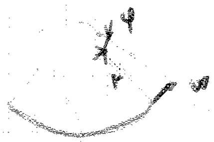


EQ. CINEMATICHE

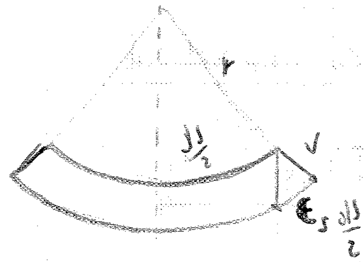
SPOSTAMENTO ASSIALE W →

SPOSTAMENTO RADIALE V

w)



v)



1.a $\boxed{\varepsilon_{(w)} = \frac{dw}{ds}}$ $\varphi = \frac{w}{r}$

SIMILITUDINE TRA TRIANGOLI

$r / \frac{ds}{2} = V / \varepsilon_v \frac{ds}{2} \rightarrow \boxed{\varepsilon_{(v)} = \frac{V}{r}}$ 1.b

1 $\boxed{\varepsilon = \frac{dw}{ds} + \frac{V}{r}}$

PER QUANTO RIGUARDA LA DEFORMAZIONE ANGOLARE LA CAUSA ~~GLI SPOSTAMENTI~~ CHE NE DETERMINANO UNA VARIAZIONE OLTRE AL TAGLIO E AL MOMENTO È LO SPOSTAMENTO LUNGO LA COORDINATA z (w)

SE SI OSSERVA SI NOTA COME UNO SPOSTAMENTO w PRODUCA UNO SPOSTAMENTO ANGOLARE $\gamma(w)$ DA CUI

$$w = -\frac{\gamma_{(w)}}{R} \qquad \gamma = -\frac{w}{R}$$

QUINDI LA VARIAZIONE ANGOLARE TOTALE PUÒ ESSERE SCRITTA 2 $\boxed{\underset{(w)}{\gamma = -\frac{W}{R}} + \underset{(T)}{\frac{\partial V}{\partial s}} + \underset{(M)}{\varphi_x}}$

MENTRE LA VARIAZIONE DI CURVATURA RIMANE SEMPRE 3 $\boxed{\chi = \frac{\partial \varphi_x}{\partial s}}$

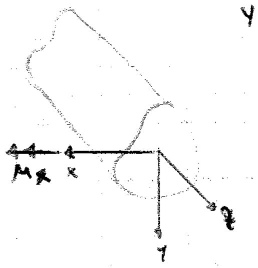
(SI RICORDA CHE ESSENDO ASSE CURVILINEO SI FA UN CAMBIO DI COORDINATE DI RIFERIMENTO $\partial z \to \partial s$)

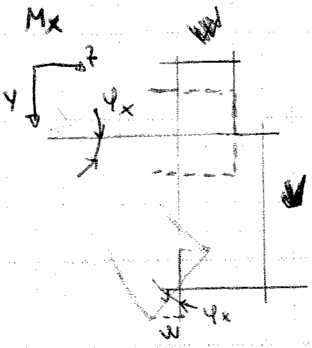
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \chi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & +\frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{1}{R} & \frac{\partial}{\partial s} & +1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ V \\ \varphi_x \end{Bmatrix}$$

EQ. CINEMATICHE
CARATTERISTICHE DEFORMATIVE

LASTRE PIANE

TRAVE IN FLESSIONE M_x





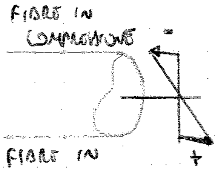
$$dv = -\varphi_x\, dz \rightarrow \varphi_x = -\frac{dv}{dz}$$

$$dw = \varphi_x\, y \rightarrow w = -\frac{dv}{dz}\, y$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\, y \xrightarrow{\times E} \sigma_z = -E\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\, y$$

$$M_x = \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA = E \cdot \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \cdot \int_A y^2\, dA$$

→ MOMENTO DI INERZIA



$$M_x = E\left(-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) I_x \qquad \chi_x = +\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\chi_x = -\frac{M_x}{E I_x} \longrightarrow \boxed{\sigma_z = +\frac{M_x}{I_x}\, y}$$

FORMULA DI NAVIER

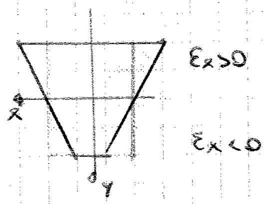
STATO TENSIONALE MONO ASSIALE

LO STATO DEFORMATIVO INVECE È PLURI ASSIALE

(COME ERA INTUITIVO)

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\,\varepsilon_z = -\nu\,\frac{M_x}{E I_x} \cdot y$$

DEFORMAZIONI ANTICLASTICHE

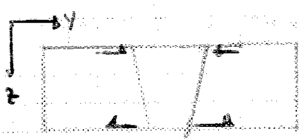


LE TRAVI SONO LIBERE DI DILATARE O COMPRIMERE LA SEZIONE

MA SE TALI LASTRE FOSSERO UNITE CIÒ NON SAREBBE POSSIBILE X IPOTESI DI NON COMPENETRAZIONE O DISTACCAMENTO

PIASTRA ~~LASTRA~~ PIANA

LE DEFORMAZIONI ANTICLASTICHE SONO OSTACOLATE DA CONCI ADIACENTI



CONTRASTO DELL'EFFETTO POISSON X RIPRISTINO LA CONGRUENZA

LA DEFORMATA IN DIREZIONE Y

NASCONO QUINDI COPPIE DI FORZE IN GRADO DI CONTRASTARE L'EFFETTO POISSON E MANTENERE LE SEZIONI NORMALI ALLA SUPERFICIE DELLA LASTRA

SUPPONIAMO LASTRA INCASTRATA SU UN BORDO CARICATA LONGITUDINALMENTE CON FORZA F

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) \quad (\sigma_z = 0) \longrightarrow \sigma_y = \nu\sigma_x$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu(\nu\sigma_x)\right) = \frac{1-\nu^2}{E}\,\sigma_x \rightarrow E' = \frac{E}{(1-\nu^2)}$$

$$E' > E$$

LA RIGIDEZZA DELLA LASTRA È MAGGIORE DELLA TRAVE NELLE STESSE CONDIZIONI.

LO STATO TENSIONALE NELLA REALTÀ NON È PIANO MA AVENDO SUPPOSTO UNO SPESSORE h PICCOLO POSSIAMO ELIMINARE LE TENSIONI IN DIREZIONE z

PER LO STATO TENSIONALE PIANO LE **EQ COSTITUTIVE** DIVENTANO

1 $\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$

2 $\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$

3 $\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$

È UNO STATO DEFORMATIVO PIANO CHE NON IMPLICA UNO STATO TENSIONALE PIANO MA X LE IPOTESI DI h PICCOLO POSSIAMO DEFINIRE PIANO ANCHE LO STATO TENSIONALE

1 $\sigma_x - \nu\sigma_y = E\varepsilon_x$

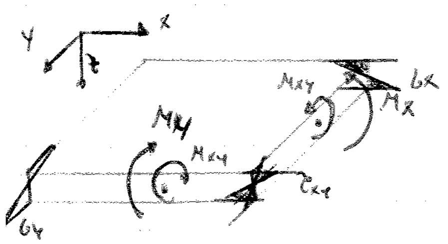
2·ν $\nu\sigma_y - \nu^2\sigma_x = \varepsilon_y \nu E$

2 → 1 $\sigma_x - \varepsilon_y \nu E - \nu^2\sigma_x = \varepsilon_x \nu E$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\chi_x + \chi_y\nu)z \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\chi_y + \chi_x\nu)z \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\chi_{xy}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\nu\right)z \\ \sigma_y = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\nu\right)z \\ \tau_{xy} = -\frac{E}{2(1+\nu)}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)z \end{cases}$$

OSSERVIAMO I MOMENTI AGENTI SUL CONCIO



$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z\, dz \rightarrow M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_x + \nu\chi_y)$

$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z\, dz \qquad M_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_y + \nu\chi_x)$

$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z\, dz \qquad M_{xy} = M_{yx} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\chi_{xy}$

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ = RIGIDEZZA FLESSIONALE PIASTRA

$= \int \frac{E}{2(1+\nu)}(\chi_x + \nu\chi_y) z^2 dz =$

$= \frac{E}{2(1+\nu)}(\chi_x + \nu\chi_y)\left.\frac{z^3}{3}\right|_{-h/2}^{h/2} =$

$= \frac{h^3}{12}\frac{E}{(1-\nu^2)}\cdot\frac{(1-\nu)}{2}\chi_{xy}$

EQ STATICHE IN FORMA MATRICIALE

PROBLEMA ELASTICO DELLA LASTRA PIANA INFLESSA

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ABBIAMO 3 EQ CON 5 INCOGNITE (LE CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE)

CONSIDERANDO ORA GLI SCORRIMENTI ANGOLARI γ_x e γ_y DOVUTI AGLI SFORZI TAGLIANTI T_x e T_y POSSIAMO SCRIVERE LE EQUAZIONI COSTITUTIVE

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}Gh & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6}Gh & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & \nu D & 0 \\ 0 & 0 & \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu D}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{yx} \end{Bmatrix}$$

EQ COSTITUTIVE

$\frac{5}{6}$ È IL FATTORE INVERSO DEL FATTORE DI TAGLIO RELATIVO AD UNA SEZIONE RETTANGOLARE DI BASE UNITARIA E ALTEZZA h

LE EQ. CINEMATICHE DEFINISCONO LE CARATTERISTICHE DEFORMATIVE IN FUNZIONE DEGLI SPOSTAMENTI GENERALIZZATI

$$\begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & +1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & +1 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix}$$

$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \left(= \frac{\partial u}{\partial z}\right)$

$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \left(= \frac{\partial v}{\partial z}\right)$

$\chi_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$

$\chi_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}$

$\chi_{xy} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} =$

IN FORMA COMPATTA

EQ STATICHE $[\partial]^T \{Q\} + \{F\} = 0$

EQ COSTITUTIVE $\{Q\} = [H]\{q\}$

EQ CINEMATICHE $\{q\} = [\partial]\{\eta\}$

$\{Q\} = [H]\{\partial\}\{\eta\}$

$\underbrace{[\partial]^T[H][\partial]}_{\text{OPERATORE DI LAMÉ } [\mathcal{L}]}\{\eta\} + \{F\} = 0$

$[\mathcal{L}] \cdot \{\eta\} = -\{F\}$ + CONDIZIONI AL CONTORNO CINEMATICHE + CONDIZIONI AL CONTORNO STATICHE

TELAI A NODI SPOSTABILI

LASTRE PIANE INFLESSE

La soluzione dell'*equazione di Sophie Germain:*

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}$$

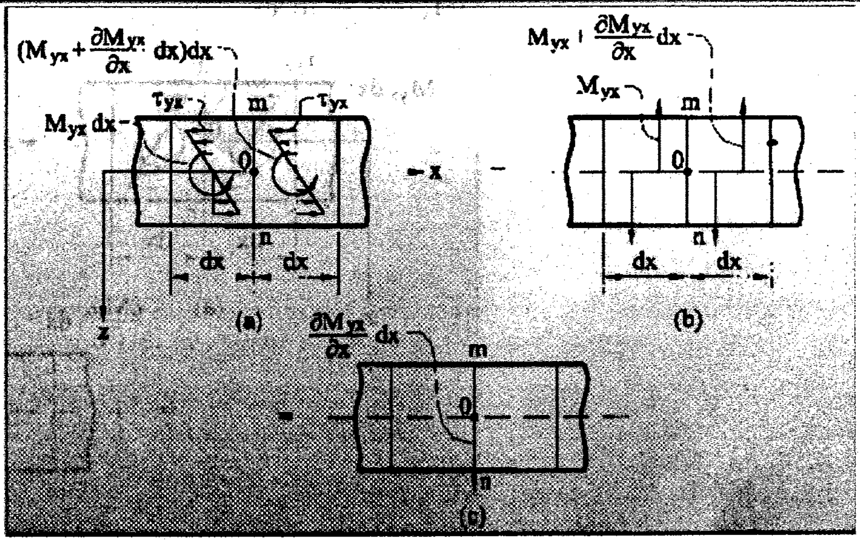
richiede che siano soddisfatte per ciascun bordo due condizioni al contorno che possono essere di tipo cinematico (abbassamenti o rotazioni), di tipo statico (forze o momenti) o miste.

LASTRE PIANE INFLESSE

Bordo libero (y=b) se non ci sono forze applicate le risultanti di delle forze e dei momenti si annullano

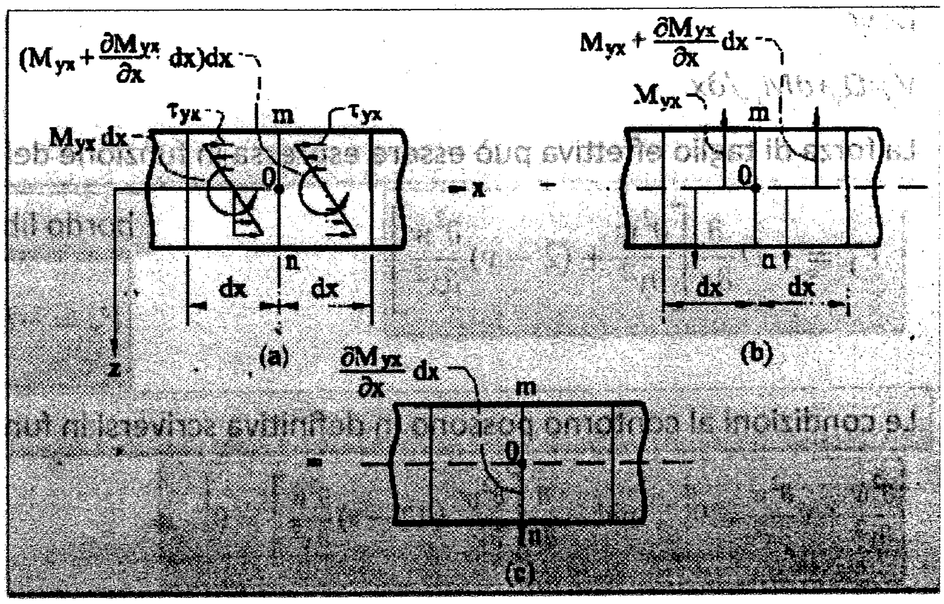
M_y=0, Q_y=0 e M_{yx}=0

che fornirebbero tre condizioni al contorno, troppe rispetto a quelle necessarie per l'equazione differenziale. Le condizioni imposte sul momento torcente e sul tagli non sono indipendenti e possono ridursi ad un'unica condizione.



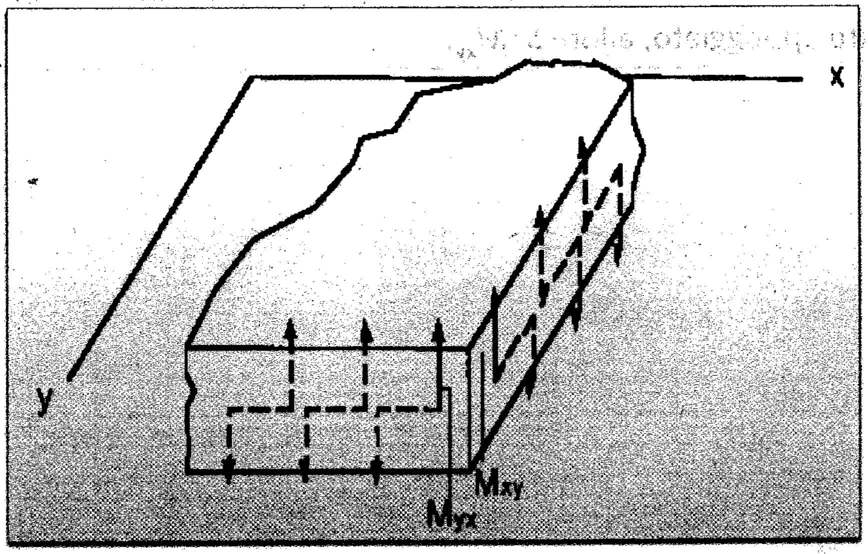
LASTRE PIANE INFLESSE

In figura sono mostrati due elementi adiacenti, ciascuno di lunghezza dx appartenenti al bordo y=b. Si può osservare come l'elemento a destra sia soggetto a $(M_{yx}+(\partial M_{yx}/\partial x)dx)dx$. Questi momenti derivano da coppie prodotte da un sistema di tensioni da taglio orizzontali τ_{yx}. Possono staticamente essere sostituiti con coppie di forze verticali M_{yx} e $M_{yx}+\partial M_{yx}/\partial x\, dx$ aventi lo stesso momento risultante



LASTRE PIANE INFLESSE

Si noti che trasformando il momento torcente, si ottengono non soltanto forze distribuite lungo il bordo V_x e V_y, ma anche forze concentrate nei punti angolari (su ciascun lato del vertice) di una piastra rettangolare diverse da zero. Queste sono numericamente uguali al valore della corrispondente coppia torcente. La direzione e l'intensità della forza d'angolo può essere stabilita analizzando le condizioni al contorno della piastra e l'abbassamento prodotto dal carico assegnato.



LASTRE PIANE INFLESSE

Il concetto delle forze d'angolo non è limitato all'intersezione di due bordi liberi, dove ovviamente tali forze sono nulle. In generale, qualunque angolo dove almeno una dei due bordi può sviluppare M_{xy} e M_{yx} avrà una forza d'angolo.

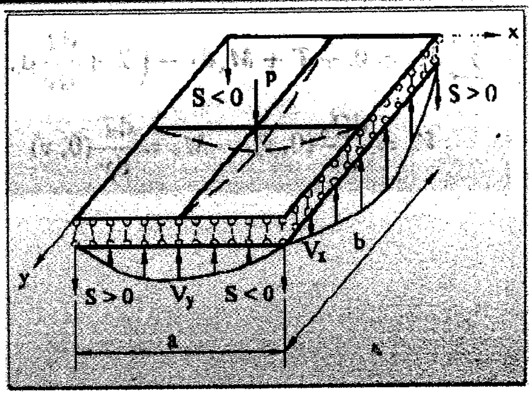
Si consideri come esempio il caso di una piastra simmetricamente caricata semplicemente appoggiata.

Nell'angolo x=a e y=b il momento torcente risulta:

$$S = 2M_{xy} = -2D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Allora, i momenti torcenti sono staticamente equivalenti a forze di bordo distribuite pari a $\partial M_{yx}/\partial x$ e $\partial M_{xy}/dy$ su tutta la frontiera della lastra, oltre che a forze concentrate agli spigoli pari a $S=2M_{xy}$ per una data piastra rettangolare.

Si osservi che la direzione della forza concentrata allo spigolo S mostrata in figura per un carico simmetrico diretto verso il basso. Ad ogni spigolo il segno di M_{xy} si alterna, ma le forze saranno sempre dirette verso il basso per carichi simmetrici



LASTRE PIANE INFLESSE

Relativamente ad un punto della lastra inflessa, si dicono *direzioni principali dei momenti* quelle due direzioni ortogonali secondo cui si annulla il momento torcente M_{xy}, e quindi si annullano le tensioni tangenziali τ_{xy}. Tali direzioni coincidono quindi con quelle principali delle tensioni.

Si dicono invece *direzioni principali delle curvature*, quelle due direzioni ortogonali secondo cui si annulla l'angolo unitario di torsione $\chi_{xy}/2$.

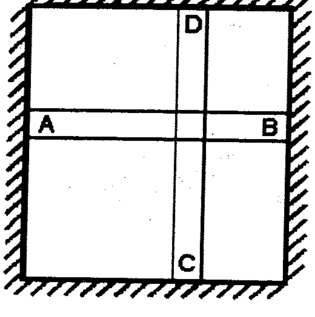
Nel caso in cui il materiale si supponga isotropo, l'equazione costitutiva mostra come le direzioni principali dei momenti e le direzioni principali delle curvature debbano coincidere.

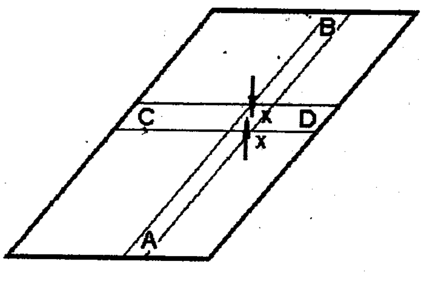
LASTRE PIANE INFLESSE

Una lastra di lunghezza infinita, cioè vincolata lungo due soli lati paralleli, si comporta come una serie di travi affiancate che si aiutano con la sola contrazione trasversale impedita.

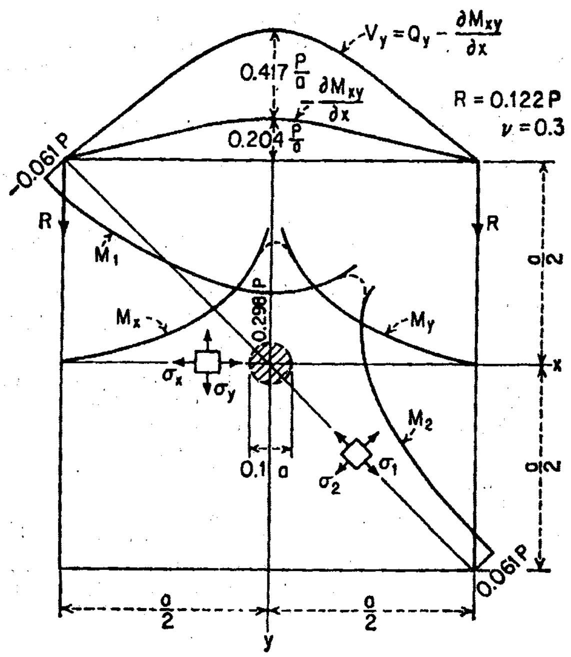
Per questo contributo la rigidezza passa dal termine *EJ* al termine $EJ/(1-\nu^2)$, maggiore di *EJ*. La massima freccia *w* diminuisce di una quantità rappresentata da $1/(1-\nu^2)$.

Quando invece la lastra, assunta di forma rettangolare, sia vincolata lungo tutti e quattro i lati, essa può essere considerata costituita da due serie di strisce ortogonali collaboranti. Le strisce in una direzione sostengono quelle in direzione perpendicolare. La flessione delle strisce AB costringe inoltre le strisce CD a torcersi e queste, a loro volta, reagendo, trasmettono i momenti torcenti e viceversa. Questi momenti, denominati momenti di sostentamento, sono di versi opposti sulle due metà, ...





LASTRE PIANE INFLESSE



Distribuzione dei momenti flettenti e delle reazioni vincolari nel caso di una lastra quadrata soggetta ad un carico centrale avente impronta circolare di diametro 0,1 a

LASTRE PIANE INFLESSE

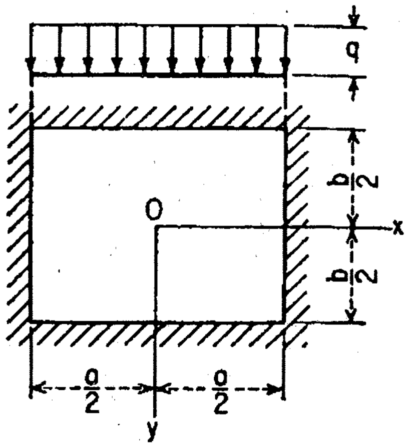


TABLE 35. DEFLECTIONS AND BENDING MOMENTS IN A UNIFORMLY LOADED RECTANGULAR PLATE WITH BUILT-IN EDGES (FIG. 91)
$\nu = 0.3$

b/a	$(w)_{x=0,y=0}$	$(M_x)_{x=a/2,y=0}$	$(M_y)_{x=0,y=b/2}$	$(M_x)_{x=0,y=0}$	$(M_y)_{x=0,y=0}$
1.0	$0.00126qa^4/D$	$-0.0513qa^2$	$-0.0513qa^2$	$0.0231qa^2$	$0.0231qa^2$
1.1	$0.00150qa^4/D$	$-0.0581qa^2$	$-0.0538qa^2$	$0.0264qa^2$	$0.0231qa^2$
1.2	$0.00172qa^4/D$	$-0.0639qa^2$	$-0.0554qa^2$	$0.0299qa^2$	$0.0228qa^2$
1.3	$0.00191qa^4/D$	$-0.0687qa^2$	$-0.0563qa^2$	$0.0327qa^2$	$0.0222qa^2$
1.4	$0.00207qa^4/D$	$-0.0726qa^2$	$-0.0568qa^2$	$0.0349qa^2$	$0.0212qa^2$
1.5	$0.00220qa^4/D$	$-0.0757qa^2$	$-0.0570qa^2$	$0.0368qa^2$	$0.0203qa^2$
1.6	$0.00230qa^4/D$	$-0.0780qa^2$	$-0.0571qa^2$	$0.0381qa^2$	$0.0193qa^2$
1.7	$0.00238qa^4/D$	$-0.0799qa^2$	$-0.0571qa^2$	$0.0392qa^2$	$0.0182qa^2$
1.8	$0.00245qa^4/D$	$-0.0812qa^2$	$-0.0571qa^2$	$0.0401qa^2$	$0.0174qa^2$
1.9	$0.00249qa^4/D$	$-0.0822qa^2$	$-0.0571qa^2$	$0.0407qa^2$	$0.0165qa^2$
2.0	$0.00254qa^4/D$	$-0.0829qa^2$	$-0.0571qa^2$	$0.0412qa^2$	$0.0158qa^2$
∞	$0.00260qa^4/D$	$-0.0833qa^2$	$-0.0571qa^2$	$0.0417qa^2$	$0.0125qa^2$

Valori dei momenti flettenti e delle reazioni vincolari nel caso di una lastra incastrata soggetta ad un carico uniforme.

PIASTRE → Bazzucchi

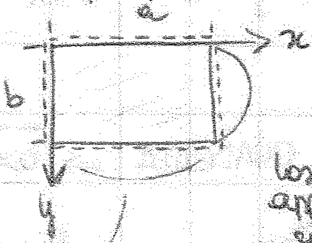
Elem. caricato ortogonalm. al piano medio; ma in genere noi chiamiamo piastre gli elementi che hanno anche rigidezza al taglio (che originariamente la piastra di Kirchoff non ha) ⇒ stiamo studiando un elemento intrinsecam. 3 volte iperstatico (8 eq. cong. ma solo 5 di equilibrio)

eq. Sophie-Germain: $\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \dfrac{q(x,y)}{D} \iff \dfrac{d^4 v}{dz^4} = -\dfrac{q}{EI}$ (trave!)

ottenuta per dx-dy ma valida perciò per ∀ forma di piastra e ∀ condiz. di carico (verso alto ↑, verso il basso ↓, ...)

1) RISOLUZIONE ANALITICA

Per un carico del tipo: $\boxed{q = q_0 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right)}$ carico sinusoidale come una semionda lungo x e y



lastre appoggiate su 4 lati

posso esprimere le inflessioni come SEMIONDE (seni!)

l'eq. diff. diventa: $\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \dfrac{q_0}{D} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right)$

BC: $\begin{cases} w = 0 & \text{spostamento} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 & \text{momento flettente nullo} \end{cases}$ $x = 0,\ x = a$

$\begin{cases} w = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$ $y = 0,\ y = b$

lungo gli appoggi. ABBASSAM. e MOMENTO nulli

(Timoshenko)

Per esperienza, si è visto che qst eq. diff. è soddisfatta da:

$w = C \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ → sostituisco w in $\partial^4 w$ .... + BC condizioni al contorno

inflessione come ~~prodotto di~~ 2 semionde

$$C = \frac{q_0}{\pi^4 D \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2}$$

$$w(x,y) = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

↓

ricavo χ curvature $\qquad \chi_x = -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\chi_y = -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

↓

ricavo M momenti! $\qquad M_x = D(\chi_x + \nu \chi_y)$

$M_y = D(\chi_y + \nu \chi_x)$ ottengo gli M dall' eq. di legame

3

$$-\frac{b}{\pi}\cos\frac{\pi y}{b}\Big|_0^b \qquad 1+2 \qquad \frac{b}{\pi} - \frac{b}{\pi} \cdot \frac{2b}{\pi}$$

$$-\sin\frac{\pi y}{b}\cdot\frac{\pi}{b}$$

$$2\cdot(V_x+V_y) =$$

$$= 2\cdot\frac{q_0}{\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}\left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2-\nu}{b^2}\right)\int_0^b \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)dy + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{2-\nu}{a^2}\right)\int_0^a \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx\right] =$$

$$= \frac{4q_0\,ab}{\pi^2} + \frac{8q_0(1-\nu)}{\pi^2 ab\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)} \Rightarrow$$ somma di tutte le reazioni lungo il bordo maggiore del carico applicato!

$$\int_0^a\int_0^b q_0\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) =$$ INTEGRALE DEL CARICO APPLICATO! e questo?

Sono le reazioni R agli spigoli, che tirano giù ciò che tenderebbe ad alzarsi $= 4\cdot R$

$$R = \frac{2q_0(1-\nu)}{\pi^2 ab\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}$$

↳ infilzione agli spigoli avviene superiormente!

SOLUZIONE DI NAVIER (DOPPIA SENO)

1) L'idea era già venuta a Navier, che aveva ipotizzato che la q potesse essere una funzione qualsiasi di x e y e che potesse essere espressa come una doppia serie:

$$\boxed{q = q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\cdot\sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)}$$ $\Rightarrow$ con m e n possiamo modulare il carico come vogliamo

per: $a=b$, $\nu=0{,}3$, $q=q_0$

$$w = 0{,}0454\,\frac{qa^2}{\pi^6\cdot D} = \frac{1}{\pi^4 D}\sum_m\sum_n \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\cdot\sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$ → q

e anche rapidamente

quindi come si procede? Si introduce w nell'eq. di Sophie-Germain, si trova a_{mn}

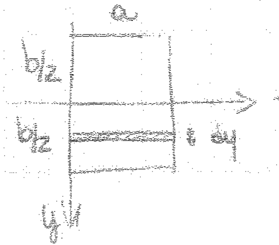
q = serie che va ad ∞ → deve convergere ⇒ con w ~~così~~ la serie converge sempre

q converge a un numero e se poi inseriamo $a=b$, $q=$cost e $\nu=0{,}3$ possiamo scrivere l'infilzione come $(\ldots)qa^2$ (come prima)

3) SOLUZIONE LÉVY

x = asse di simmetria → l'unico coeff che descrive la serie è Y_m che è solo funzione di y

$Y_m = f(y)$



$$w = \sum_m^{\infty} Y_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$$

(5)

essendo che l' inflessione in una direzione è molto più grande che in quella $\perp$ nasce un sou. torcente altissimo affinché ci sia congruenza $\rightarrow$ in realtà tutto ciò è teorico, questi sou. torcenti sono fittizi! Perché qst si comporta praticam. come una trave

se $-\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ grande fa cambiare segno alla $V_x \rightarrow T_x$ darà errore $> 0{,}5$!

Infatti: $V_x = T_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ $\qquad \frac{b}{a} > 3 \longrightarrow$ TRAVE

onere computazionale ALTISSIMO

1) FDM metodo ESPLICITO

Metodo delle differenze finite - FDM $\rightarrow$ buono per Sophie-Germain (4° ordine)

Uno dei modi x risolvere eq. diff. è il metodo delle diff. finite: discretizziamo la derivata da punto a punto così da non avere più derivata continua ma NUMERICA

es: non conosco funzione ma discretizzo dominio in + punti i e valuto la derivata come

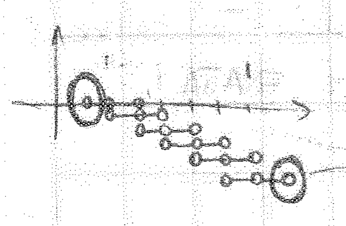
$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$ (metodo FORWARD) $\rightarrow$ xk prendo i+1 e i $\qquad f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$ (metodo BACKWARD)

Queste sono incognite, ma se noi impostiamo un sistema lineare e poi imponiamo le condizioni al contorno il tutto si chiude e troviamo soluzione.

Applichiamo 2 volte il metodo: $f'(f') = f''(x_i) = \frac{(1)f(x_{i+1}) \, (-2) f(x_i) + (1) f(x_{i-1})}{h^2} = \frac{f'(x_{i+1}) - f'(x_i)}{h}$

metodo più STABILE ✓ (non utilizza né la backward né la forward ma una combinazione delle due)

$\hookrightarrow$ MOLECOLA DI CALCOLO (1)-(-2)-(1)

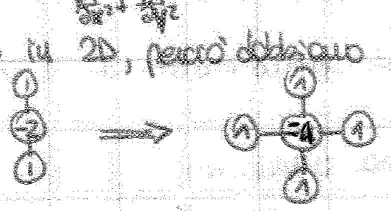


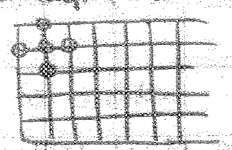
Sposto la molecola di calcolo lungo x (1)(-2)(1) ...

Ma gli estremi che cadono fuori dal dominio non li abbiamo $\rightarrow$ BC. (2 estremi $\rightarrow$ 2 BC)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

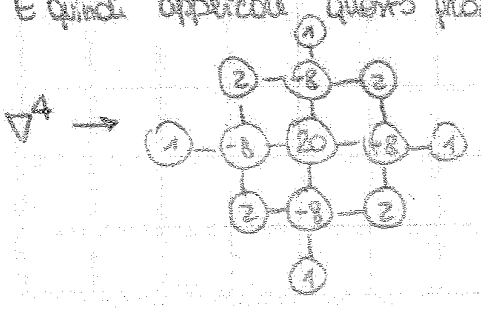
Noi però siamo in 2D, perciò dobbiamo derivare rispetto a x (1)-(-2)-(1) ma anche rispetto a y

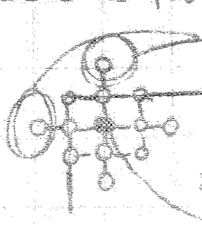




Inoltre noi abbiamo la derivata quarta! $\nabla^2(\nabla^2) = \nabla^4$ grad (gradiente) = laplaciano 4°

E quindi applicare questo procedimento e poi ri-applicarlo a quanto ottenuto prima



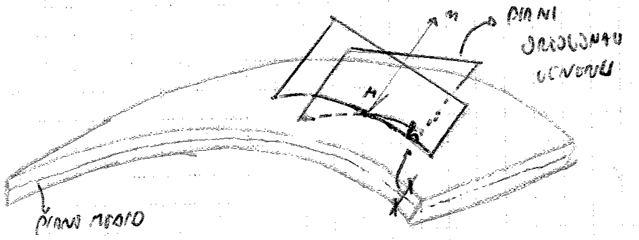


condizioni al contorno (come fatto nel caso lineare)

Punti fuori dal dominio x trovare punto interno al dominio!!

GUSCI SOTTILI

Posizione preminente in ingegneria strutturale → vantaggi:
- efficienza del comportamento di reggere a carichi
- alto grado di resistenza aggiuntiva e integrità strutturale
- alta resistenza in rapporto ai pesi
- elevata rigidezza
- contenimento dello spazio



Sono formati da 2 superfici curve, distanti tra esse piccola e chiamata spessore (h) (rispetto alle altre dimensioni del corpo) (in generale no h = cost)

↓

Gusci sottili max $\left(\frac{h}{R}\right) \leq \frac{1}{20}$

R = raggio curvatura

Luogo di punti equidistanti dalle due superfici

↓

Piano medio

Determinato un punto M sono infiniti i piani che contengono la normale al guscio in tale punto → le sezioni che si formano determinano infiniti raggi di curvatura diversi

2 sezioni ortogonali che individuano il max e il min raggio di curvatura → sezioni principali, direzioni principali

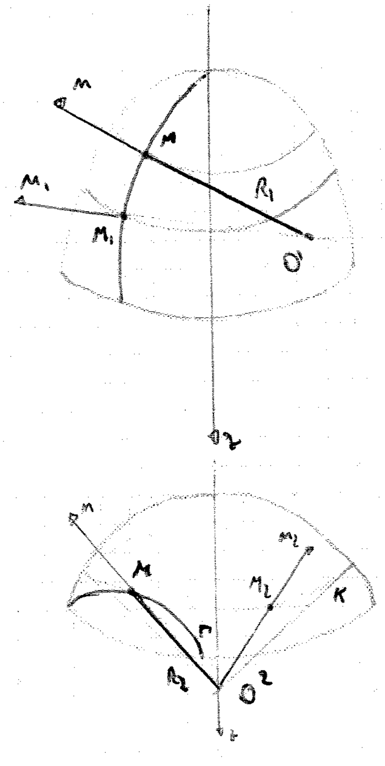
↓

Curvature principali (K_1, K_2) con raggi principali $\left(R_1 = \frac{1}{K_1} \quad R_2 = \frac{1}{K_2}\right)$

Le superfici di rivoluzione sono ottenute dalla rotazione di una curva piano (MERIDIANO) intorno all'asse z

Il piano che contiene il meridiano contiene l'asse di rivoluzione

Ciascun punto del meridiano nella sua rotazione descrive un cerchio parallelo contenuto in un piano perpendicolare all'asse z



Le normali M e M_1 relative a 2 punti M e M_1 appartenenti allo stesso meridiano si intersecano in O'

I meridiani in ogni punto sono una delle linee di curvatura e sono una delle sezioni principali → raggio principale MO' R_1 primo raggio principale

Cerchio sul parallelo detto K

↑

2 punti sullo stesso parallelo determinano con le loro normali un punto O_2 sull'asse z

Si determina una seconda sezione normale principale detta Γ

$MO_2 = R_2$ secondo raggio di curvatura principale

R_1 varia con la latitudine con la coordinata S

R_2 varia con la longitudine con la coordinata S

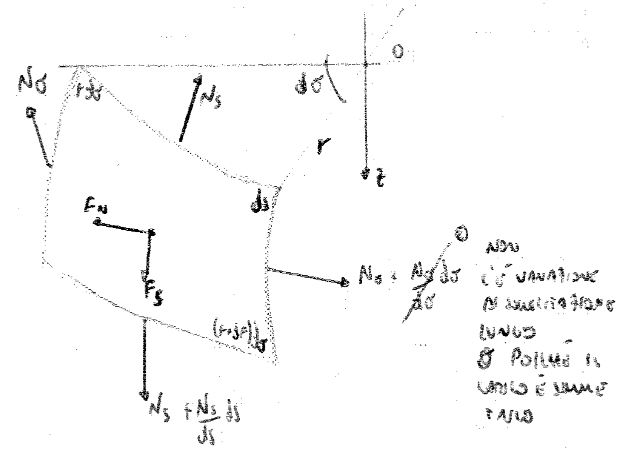
3 La forma del guscio deve essere descritta da un'equazione che cambia con regolarità, non deve presentare spigoli, punti angolosi, la derivata prima dell'equazione non deve cambiare di segno

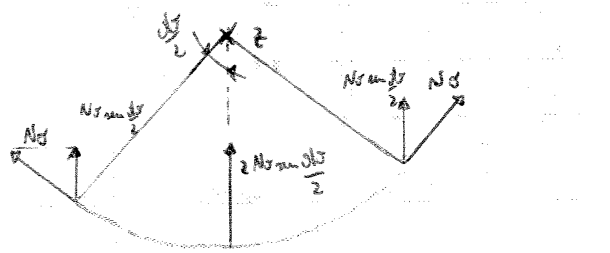
4 Carichi applicati con regolarità

(strutture convesse chiuse non possono subire deformazioni × il teorema di Lagrange)

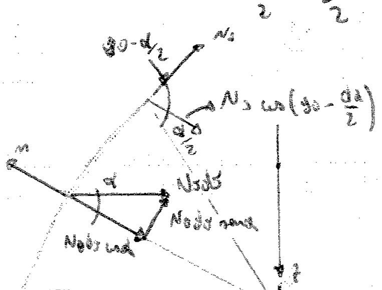
Con carico simmetrico e osservando il dis regime membranale possiamo scrivere

LE EQ. STATICHE DI EQUILIBRIO



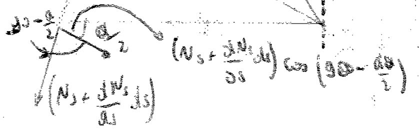


$\sin\frac{d\vartheta}{2} \cong \frac{d\vartheta}{2} \Rightarrow 2 N_\vartheta \sin\frac{d\vartheta}{2} = N_\vartheta d\vartheta$



$\cos(90 - \frac{d\alpha}{2}) = \sin\frac{d\alpha}{2}$

Equilibrio lungo s



$$\left(N_s + \frac{\partial N_s}{\partial s} ds\right)(r + dr) d\vartheta - N_s r d\vartheta + f_s (r d\vartheta) ds + N_\vartheta d\vartheta \sin\alpha \, ds = 0$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} ds\, r d\vartheta + \cancel{\frac{\partial N_s}{\partial s} ds\, dr\, d\vartheta} + N_s dr\, d\vartheta + f_s r d\vartheta\, ds + N_\vartheta d\vartheta \sin\alpha \, ds = 0$$

Divido × $r\, ds\, d\vartheta$ con $dr = ds \sin\alpha$

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{N_s\, ds\, d\vartheta \sin\alpha}{r\, ds\, d\vartheta} + f_s - N_\vartheta \frac{\sin\alpha}{r} = 0 \qquad 1 \quad \boxed{\frac{\partial N_s}{\partial s} + N_s \frac{\sin\alpha}{r} + f_s - N_\vartheta \frac{\sin\alpha}{r} = 0}$$

Equilibrio lungo n

$$+ f_N r d\vartheta ds - N_\vartheta d\vartheta \cos\alpha\, ds - N_s \cancel{\sin} \frac{d\alpha}{2} r d\vartheta - \left(N_s + \cancel{\frac{\partial N_s}{\partial s} ds}\right)(r + \cancel{dr}) d\vartheta \sin\frac{d\alpha}{2} = 0$$

$$f_N r d\vartheta ds - N_\vartheta d\vartheta \cos\alpha\, ds - 2 N_s \frac{d\alpha}{2} d\vartheta\, r = 0$$

Divido × $r\, d\vartheta\, ds$

$$f_N - N_\vartheta \frac{\cos\alpha}{r} - N_s \frac{d\alpha}{ds} = 0 \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R_1} \qquad \frac{\cos\alpha}{r} = \frac{1}{R_2}$$

$$2 \quad \boxed{-\frac{N_\vartheta}{R_2} - \frac{N_s}{R_1} + f_N = 0}$$

N_ϑ e N_s sono sforzi × unità di lunghezza, possono essere sostituiti da $\sigma \cdot h = N$

$N_\vartheta = \sigma_\vartheta h$ Membrana cilindrica Membrana sferica

$N_s = \sigma_s h$ $R_1 \to \infty$ $R_2 = R$ $R_1 = R_2 = R$

soggetto a pressione interna $p = cost$

$\sigma_\vartheta = \frac{pR}{h}$ $\sigma_s = \sigma_\vartheta = \frac{pR}{2h}$

* per eq. di equilibrio in forma canonica EQ COSTITU $\frac{\sigma_\vartheta}{R_2} + \frac{\sigma_s}{R_1} = \frac{p}{h}$

Dalle equazioni costitutive di lastre piane con opportuno cambio di variabili $(x,y) \to (r,\theta)$

$$M_r = D(\chi_r + \nu \chi_\theta)$$

Occorre definire le 2 curvature $\chi_r \; \chi_\theta$

$$M_\theta = D(\chi_\theta + \nu \chi_r)$$

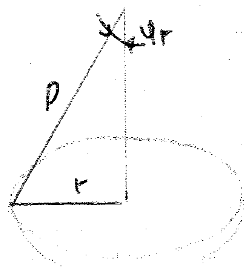
$$\chi_r = \frac{d\varphi_r}{dr}$$

~~si trascura nullo lo scorrimento angolare~~

$dw^T = \gamma_r \, dr$ (taglio)

$dw^M = -\varphi_r \, dr$ (momento)

$$dw^{tot} = \gamma_r \, dr - \varphi_r \, dr \to \gamma_r = \frac{dw}{dr} + \varphi_r$$



Si trascura nullo lo scorrimento angolare $\gamma_r = 0$

$$\frac{dw}{dr} = -\varphi_r$$

$$\Rightarrow \boxed{\chi_r = -\frac{d^2w}{dr^2}}$$

Per trovare $\chi_\theta = \dfrac{1}{\text{raggio di curvatura } (\rho)}$

$$\rho = \frac{r}{\sin\varphi_r} = \frac{r}{\varphi_r} \Rightarrow \boxed{\chi_\theta = \frac{\varphi_r}{r}}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} M_r &= D\left(-\frac{d^2w}{dr^2} - \nu \frac{dw}{dr}\frac{1}{r}\right) \\ M_\theta &= D\left(-\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} - \nu \frac{d^2w}{dr^2}\right) \end{aligned} \to 2$$

$$+D\left(+\frac{d^2w}{dr^2}\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\nu\frac{dw}{dr}\right) + D\frac{d}{dr}\left(+\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)$$

$$+T_r - \frac{D}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr^2}\right) = 0$$

$$\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr} + \frac{T_r}{D} = 0$$

Eq. differenziale che lega l'abbassamento di una piastra sottoposta a carico a T_r

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r^2}\varphi_r = +\frac{T_r}{D}$$

Se con $Q(r)$ si indica ~~il carico~~ l'integrale del carico verticale agente sulla lastra dentro una circonferenza di raggio r

$$Q(r) = 2\pi r T_r \to T_r = \frac{Q(r)}{2\pi r}$$

Eq. differenziale

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\varphi_r)\right) = \frac{Q(r)}{2\pi D r}$$

1° integrazione

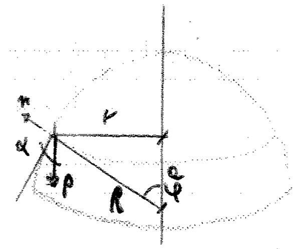
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\varphi_r) = \int_0^r \frac{Q(r)}{2\pi D r}\,dr + C_1$$

CUPOLE

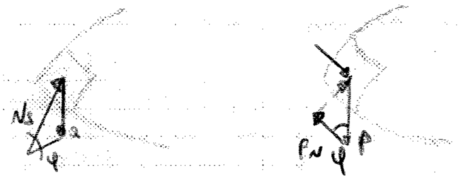
Sono strutture membranali a guscio sottile quindi vale $\frac{N_\vartheta}{R_2}+\frac{N_s}{R_1}=F_N$

con $R_1=R_2=R$

Si ottiene $N_\vartheta = R F_N - N_s$ e $\frac{dN_s}{ds} + 2\frac{tg\,\alpha}{R} N_s = F_N\, tg\,\alpha - F_s$



Consideriamo solo il peso della cupola dove p = peso proprio x unità di superficie



$S = 2\pi R h$ dove $h = R - a$

$a = R\cos\varphi$

$h = R - R\cos\varphi$

$S = 2\pi R(1-\cos\varphi)R$

Peso cupola $\rightarrow$ $p\cdot S = p\,2\pi R(1-\cos\varphi)R = Q$

Ma considerando solo il parallelo di raggio r $\rightarrow$ $N_s = \frac{-Q}{2\pi r\sin\varphi}$

$$N_s = -\frac{p\,2\pi R(1-\cos\varphi)R}{2\pi r\sin\varphi} \quad \text{con } R\sin\varphi = r$$

devo moltiplicare x R devo considerare solo coefficiente ...

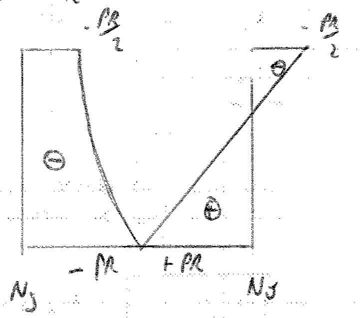
$$= -\frac{p\,\cancel{2\pi}R(1-\cos\varphi)R}{\cancel{2\pi}R^2\sin^2\varphi} = -\frac{pR(1-\cos\varphi)}{(1-\cos^2\varphi)} = -\frac{pR\cancel{(1-\cos\varphi)}}{\cancel{(1-\cos\varphi)}(1+\cos\varphi)}$$

$$N_\vartheta = -pR\cos\varphi + N_s = -pR\cos\varphi + \frac{pR}{1+\cos\varphi} \quad \text{poiché } F_N = -p\cos\varphi$$

con $\varphi = 0$ all'apice della cupola $N_\vartheta = N_s = -pR/2$

con $\varphi = \frac{\pi}{2}$ al fondo della cupola $N_s = -pR$

$N_\vartheta = +pR$

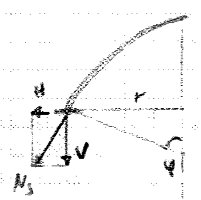


Si può notare come lo sforzo N_s rimane sempre di compressione, invece N_ϑ cambia di segno

$N_\vartheta = 0 \rightarrow \cos\varphi + \frac{1}{1+\cos\varphi} = 0 \rightarrow \varphi \cong 52°$ coordinata alla quale si ha il parallelo dove si ha il cambio di segno

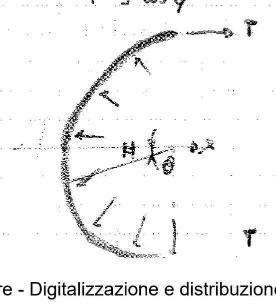
La deformazione in sommità è permessa così si può sviluppare uno stato di tensione puramente membranale. Affinché si verifichi anche al bordo non devo essere impediti il movimento senno si possono ottenere momenti flettenti

Si immagini una generica cupola poggiante su un anello collegante e il piano medio della cupola coincida con la sezione dell'anello x evitare eccentricità



$V = N_s\sin\varphi$

$H = +N_s\cos\varphi$



Se T è la tensione circonferenziale dell'anello è calcolata sommando le componenti di H in direzione x e sommando il raggio dell'anello pari a r

$$2T = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -N_s\cos\varphi\cos\theta\, r\, d\theta \qquad 2T = -N_s\cos\varphi\, r\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta$$

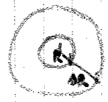
$$= -N_s\cos\varphi\, r\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$2T = 2(-N_s\cos\varphi\, r)$$

DALLE LEGGI COSTITUTIVE $N_\sigma = \sigma_\sigma h$ $\quad \sigma_\sigma = \varepsilon_\sigma E$ ma ε_σ dall'eq. cinematica

$$\varepsilon_\sigma = \frac{w}{R}$$

visto anche come $\varepsilon_\sigma = \frac{\Delta R}{R}$ ma $\Delta R = w$



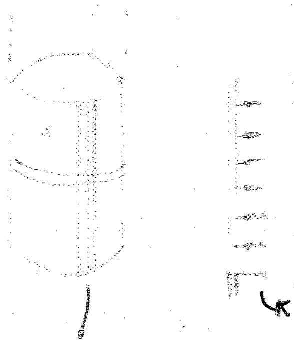
$$M_x = D\chi_x = D\frac{d\varphi_x}{dx} \qquad \text{inoltre} \quad \gamma_x = \frac{dw}{dx} + \varphi_x - \frac{u}{R_1} = 0$$

pongo $\chi_\sigma = 0$ $\qquad \varphi_x = -\frac{dw}{dx}$

$$M_x = -D\frac{d^2w}{dx^2}$$

sostituendo nell'equazione $\quad D\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2}w - q = 0$

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2D}w - \frac{q}{D} = 0 \qquad \text{se } q=0 \quad \boxed{\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4 w = 0} \quad \text{OMOGENEA}$$



anelli visti come molle con rigidezza $\frac{Eh}{R^2}$

con $\beta = \sqrt[4]{\frac{Eh}{R^2 D 4}}$ $\qquad \frac{Eh}{R^2}$ rigidezza flessionale dell'anello

D rigidezza flessionale piastra

le singole molle sono anche collegate tra loro e questo come in una piastra che collegano tra loro con rigidezza D

(cilindri molto + sottili hanno rigidezza + alta) R + piccola

CILINDRI CORTI O LUNGHI (tubi)

$\beta = \sqrt[4]{\frac{Eh}{R^2 D 4}}$, $\quad \ell = \frac{2\pi}{\beta}$ $\quad$ se h + grande, β + piccolo, ℓ + grande, smorzamenti di M minori

se $h <$ → $\beta >$, $\ell <$ smorzamenti maggiori

IN TALI CONDIZIONI VALE IL PRINCIPIO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

SI IMMAGINA LA SEZIONE COME UNA TRAVE 0-∞ CON FORZA APPLICATA ALL'ESTREMO, QUESTA FA X ALCUNI FATTORI → CEDEVOLEZZA (COEFFICIENTE DI INFLUENZA) CI DA UNA SOLUZIONE DEGLI SPOSTAMENTI

POSSIAMO APPLICARE QUESTA TEORIA QUANDO $\ell = \frac{2\pi}{\beta} < L$ (LUNGHEZZA DEL CILINDRO)

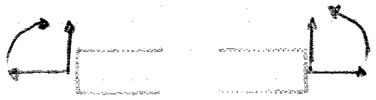
LUNGHEZZA D'ONDA

GLI EFFETTI DELLA FORZA NON SI RIPERCUOTONO SU TUTTO IL CILINDRO

LA SOLUZIONE DELLA DIFFERENZIALE ASSOCIATA È UN ESPONENZIALE CON ESPONENTE NEGATIVO (SMORZAMENTO)

GLI EFFETTI SI ESTENDONO FINO AD ℓ POI SOLUZIONE MEMBRANALE SOLTANTO

CONVENZIONI



CEDEVOLEZZA = SPOSTAMENTO DOVUTO A FORZA O MOMENTO UNITARI

λ_{FF} = CEDEVOLEZZA IN DIREZIONE F (SPOSTAMENTO VERTICALE) DOVUTO ALLA FORZA F

λ_{FM} = CEDEVOLEZZA IN DIREZIONE F DOVUTO AL MOMENTO M

λ_{MF} = CEDEVOLEZZA ROTAZIONALE DOVUTA ALLA FORZA F

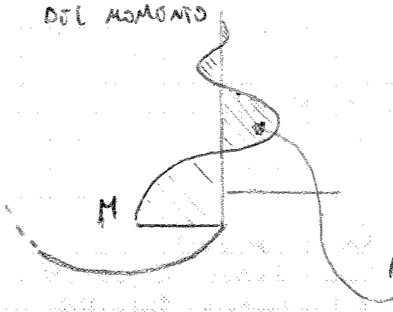
λ_{MM} = CEDEVOLEZZA ROTAZIONALE DOVUTA ALLA ~~FORZA~~ MOMENTO M

POI DEFINISCO GLI SPOSTAMENTI $w(x) \to \varphi(x) \to \chi(x) \to M(x)$

TENSIONE AL BORDO $\sigma = \frac{NJ}{h} \pm \nu \sigma_x$ SI AFFORO DEL MOMENTO CHE DA UNA TENSIONE MASSIMA SIA LO CHE σ_x

↓

SI LIMITA MOMENTO CO LEMONE DEL MOMENTO

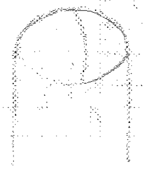


IL SEGNO DIPENDE DAL FATTO CHE IL MOMENTO SI PUÒ DETERMINARE UN AUMENTO O UNA DIMINUZIONE DI σ_θ ALL'INIZIO SICURAMENTE AVRÒ UN VALORE + BASSO DI σ_J MA POI HO DIAGRAMMA DI MOMENTO A DX AVRÒ UN PUNTO DI CONTRORSO POICHÉ σ_θ È MAGGIORE DI σ_x

CON $\sigma_x = \frac{6M}{h^2}$

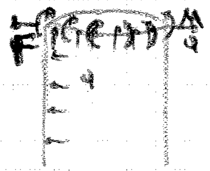
$\sigma_x = \frac{M}{J} y = \frac{M}{\frac{h^3}{12}} \cdot \frac{h}{2}$

$= \frac{M}{h^2} 6$



, CASO CILINDRO **TAPPATO** (FONDO PIANO O FONDO A CUPOLA) CASO CIRCOLARE CASO SEMISFERICO

A FONDO PIANO CAMBIANO LE EQ DI CONGRUENZA



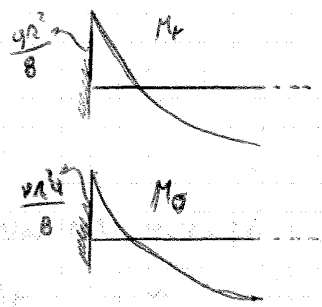
SI CALCOLANO CON LE CEDE VOLETTE

$w_{cilindro} = w_{fondo}$

$\varphi_{cilindro} = \varphi_{fondo}$

NON CI DEVONO ESSERE ROTAZIONI DIFFERENZIALI

RELATIVO ALLA LASTRA CIRCOLARE



DIAGRAMMI MOMENTO MASSIMO DOVUTO SI A q DISTRIBUITO

ROTAZIONE

$$-\lambda_{MF} F + \lambda_{MM} M = \frac{q R^3}{8(1+\nu)D} - \frac{MR}{(1+\nu)D}$$

↓

φ DOVUTA A q

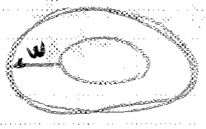
(OTTENUTO DAL M_r)

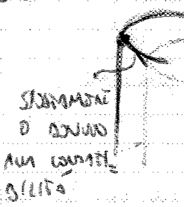
ROTAZIONE DOVUTA AL MOMENTO APPLICATO AL BORDO

$M = M_R = M_\theta$ SUL BORDO SI RIPARTISCONO A COORDINATE xy

LE INCOGNITE SONO M E F INCOGNITE QUINDI CI OCCORRE ANCHE LA SECONDA EQ DI CONGRUENZA MA A QUESTO PUNTO MODELLIAMO LA LASTRA DEL TAPPO COME SE FOSSE SOLO UNA MEMBRANA CIRCOLARE

M_x M_y DOVREBBERO NASCERE M_{xy} MA SAPPIAMO CHE X SIAMO TRA NON CIÒ





SPOSTAMENTI DOVUTO ALLA CONGRUENZA

$M_x = D(\chi_x + \nu \chi_y)$

$M_y = D(\chi_y + \nu \chi_x)$

$\chi_y = \chi_x = \chi$

$M = D(\chi + \nu \chi) \to \chi = \frac{M}{(1+\nu)D}$

$\varphi = \int \chi = \frac{MR}{(1+\nu)D}$

SPOSTAMENTO W RADIALE

$$-\lambda_{FF} F + \lambda_{FM} M + \frac{q R^2}{\ldots}(1-\nu) = \frac{FR}{\ldots}(1-\nu)$$

SPOSTAMENTO RADIALE DOVUTO A FORZA F È SIMILE MA...

SPOSTAMENTO DOVUTO A M

IN A

$$w_A = 0 = \frac{\gamma R^2}{Eh} e + \frac{1}{2D\beta^2} T_A - \frac{1}{2D\beta^2} M_A$$

$$\varphi_A = 0 = \frac{\gamma R^2}{Eh} - \frac{1}{2D\beta^2} T_A + \frac{1}{D\beta} M_A$$

CON INCOGNITE M_A E T_A

↓

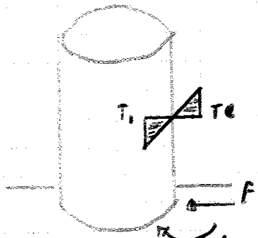
CALCOLATE POSSIAMO TROVARE LE σ QUINDI POSSIAMO STRUTTURARE IL SERBATOIO

DALLA SOLUZIONE PARTICOLARE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA PER $x = l$

(SOLUZIONE MEMBRANALE)

DALLE EQUAZIONI DI COMPATIBILITÀ

. CASO CARICO IDROSTATICO CON TEMPERATURA DIVERSA DALL'ARIA

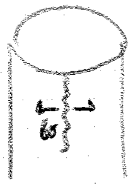


$$M = \frac{E\alpha \Delta T h^2}{12(1-\nu)}$$

X EFFETTO DEL GRADIENTE TERMICO IL SERBATOIO SI INFLETTE AL BORDO INCASTRATO RISPONDERÀ CON UN MOMENTO M MENTRE AL BORDO LIBERO IL MOMENTO SI ANNULLA POICHÉ IL CILINDRO RISPONDE CON UN MOMENTO ELASTICO INTERNO CHE ANNULLA IL MOMENTO DOVUTO AL GRADIENTE (CURVATURA STATICA)

CONSIDERANDO F E M POSSIAMO TROVARE LE σ E SI OTTIENE

$\sigma_\theta = 1{,}25\ \sigma_x$ POICHÉ IL SERBATOIO RISPONDE LUNGO IL SUO ASSE CON N_θ E MOMENTO ELASTICO



SI PUÒ FESSURARE QUINDI OCCORRE ARMARE MAGGIORMENTE IN MODO ANULARE IN MODO DA EVITARE LA APERTURA DEI "CERCHI"

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 198

LASTRE DI RIVOLUZIONE NON CARICATE SIMMETRICAMENTE

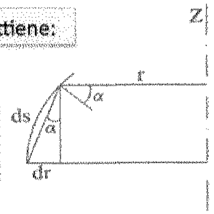
EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE LUNGO s

Sommando tutti i contributi e dividendo per dA = r$d\vartheta$ds si ottiene:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}+\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\right)N_s+\left(-\frac{\sin\alpha}{r}\right)N_\theta+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)N_{\theta s}+\left(-\frac{d\alpha}{ds}\right)T_s+F_s=0$$

Sostituendo R_1=-ds/dα e considerando che dr/ds ≈ sinα si ottiene:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\sin\alpha}{r}\right)N_s+\left(-\frac{\sin\alpha}{r}\right)N_\theta+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)N_{\theta s}+\left(\frac{1}{R_1}\right)T_s+F_s=0$$



LASTRE DI RIVOLUZIONE NON CARICATE SIMMETRICAMENTE

EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE LUNGO t

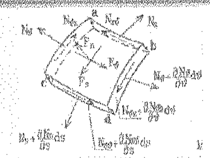
2) **Traslazione lungo la direzione *t*:**

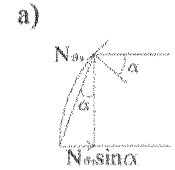
- Contributo di N_θ:

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial\vartheta}d\vartheta ds$$

- Contributo di $N_{s\theta}$, a meno di infinitesimi di III ordine:

$$\left[\left(N_{s\theta}+\frac{\partial N_{s\theta}}{\partial s}ds\right)\left[(r+dr)d\vartheta\right]\right]-N_{s\theta}(rd\vartheta)\approx N_{s\theta}drd\vartheta+\frac{\partial N_{s\theta}}{\partial s}dsrd\vartheta$$



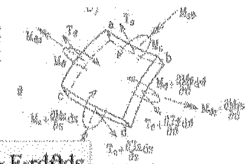


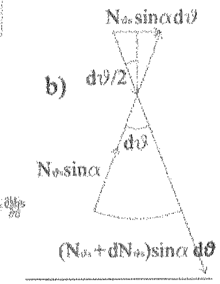
Contributo di $N_{\theta s}$: si consideri dapprima la componente ($N_{\theta s}$ sinα) di $N_{\theta s}$ sul piano orizzontale; sommando vettorialmente le due componenti si ottiene:

$$2(N_{\theta s}\sin\alpha)\sin\frac{d\vartheta}{2}ds\approx(N_{\theta s}\sin\alpha)d\vartheta ds$$

Contributo di T_θ: $-(T_\theta\cos\alpha)d\vartheta ds$

Contributo dei carichi esterni: $F_\theta dA\approx F_\theta rd\vartheta ds$





LASTRE DI RIVOLUZIONE NON CARICATE SIMMETRICAMENTE

EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE LUNGO t

Sommando tutti i contributi (considerato che $N_{s\vartheta}=N_{\vartheta s}$) e dividendo per l'area dell'elemento infinitesimo dA = r$d\vartheta$ds si ottiene

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)N_\theta+\left(\frac{\partial}{\partial s}+\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}+\frac{\sin\alpha}{r}\right)N_{s\theta}+\left(-\frac{\cos\alpha}{r}\right)T_\theta+F_\theta=0$$

Sostituendo R_2=-r/cos α e considerando che dr/ds ≈ sin α si ottiene:

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)N_\theta+\left(\frac{\partial}{\partial s}+\frac{2\sin\alpha}{r}\right)N_{s\theta}+\left(\frac{1}{R_2}\right)T_\theta+F_\theta=0$$

LASTRE DI RIVOLUZIONE NON CARICATE SIMMETRICAMENTE

EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE LUNGO n

3) Traslazione lungo la direzione *n*:

Contributo di N_s, ottenuto componendo gli N_s lungo la direzione *n*: $-(N_s d\alpha)rd\vartheta$

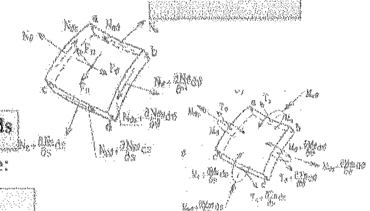
Contributo di N_θ: $-(N_\theta\cos\alpha)d\vartheta ds$

Contributo di T_θ: $-\frac{\partial T_\theta}{\partial\vartheta}d\vartheta ds$

Contributo dei carichi esterni: $F_n dA\approx F_n rd\vartheta ds$

Contributo di T_s, a meno di infinitesimi di III ordine:

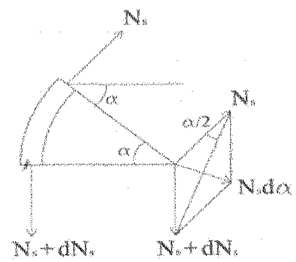
$$T_s rd\vartheta-\left[\left(T_s+\frac{\partial T_s}{\partial s}ds\right)\left[(r+dr)d\vartheta\right]\right]\approx -T_s drd\vartheta-\frac{\partial T_s}{\partial s}rdsd\vartheta$$



Sommando tutti i contributi e dividendo per dA = r$d\vartheta$ds si ha:

$$\left(-\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)N_s+\left(-\frac{\cos\alpha}{r}\right)N_\theta+\left(-\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}-\frac{\partial}{\partial s}\right)T_s+\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)T_\theta+F_n=0$$

$$-\left(\frac{1}{R_1}\right)N_s+\left(\frac{1}{R_2}\right)N_\theta+\left(-\frac{\partial}{\partial s}-\frac{\sin\alpha}{r}\right)T_s+\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)T_\theta+F_n=0$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 198

2

LASTRE DI RIVOLUZIONE NON CARICATE SIMMETRICAMENTE

EQUAZIONI CINEMATICHE

Le equazioni cinematiche per le lastre di rivoluzione caricate in modo generico si presentano in maniera duale rispetto a quelle statiche

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\vartheta \\ \gamma_{s\vartheta} \\ \gamma_s \\ \gamma_\vartheta \\ \chi_s \\ \chi_\vartheta \\ \chi_{s\vartheta} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial s} & 0 & +\frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\
+\frac{\sin\alpha}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} & +\frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} & \left(\frac{\partial}{\partial s}-\frac{\sin\alpha}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{R_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial s} & +1 & 0 \\
0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} & 0 & +1 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\
0 & 0 & 0 & +\frac{\sin\alpha}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} & \left(\frac{\partial}{\partial s}-\frac{\sin\alpha}{r}\right)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_s \\ \varphi_\vartheta \end{bmatrix}
$$

LASTRE DI RIVOLUZIONE CARICATE SIMMETRICAMENTE

EQUAZIONI CINEMATICHE

Nel caso in cui una lastra di rivoluzione sia caricata simmetricamente rispetto all'asse Z, le equazioni statiche e cinematiche si semplificano, intervenendo come variabile indipendente del problema la sola coordinata curvilinea s ed annullandosi lo spostamento v lungo i paralleli, le deformazioni $\gamma_{s\vartheta}$, γ_ϑ, $\chi_{s\vartheta}$, così come le corrispondenti sollecitazioni interne $N_{s\vartheta}$, T_ϑ, $M_{s\vartheta}$:

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\vartheta \\ \gamma_s \\ \chi_s \\ \chi_\vartheta \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\frac{d}{ds} & \frac{1}{R_1} & 0 \\
+\frac{\sin\alpha}{r} & \frac{1}{R_2} & 0 \\
-\frac{1}{R_1} & \frac{d}{ds} & +1 \\
0 & 0 & \frac{d}{ds} \\
0 & 0 & +\frac{\sin\alpha}{r}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_s \end{bmatrix}
$$

LASTRE DI RIVOLUZIONE CARICATE SIMMETRICAMENTE

EQUAZIONI CINEMATICHE

Nel caso in cui una lastra di rivoluzione sia caricata simmetricamente rispetto all'asse Z, le equazioni statiche e cinematiche si semplificano, intervenendo come variabile indipendente del problema la sola coordinata curvilinea s ed annullandosi lo spostamento v lungo i paralleli e la rotazione intorno a t, le deformazioni $\gamma_{s\vartheta}$, γ_ϑ, $\chi_{s\vartheta}$, così come le corrispondenti sollecitazioni interne $N_{s\vartheta}$, T_ϑ, $M_{s\vartheta}$:

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\vartheta \\ \cancel{\gamma_{s\vartheta}} \\ \gamma_s \\ \cancel{\gamma_\vartheta} \\ \chi_s \\ \chi_\vartheta \\ \cancel{\chi_{s\vartheta}} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial s} & 0 & +\frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\
+\frac{\sin\alpha}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} & +\frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} & \left(\frac{\partial}{\partial s}-\frac{\sin\alpha}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{R_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial s} & +1 & 0 \\
0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} & 0 & +1 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\
0 & 0 & 0 & +\frac{\sin\alpha}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} & \left(\frac{\partial}{\partial s}-\frac{\sin\alpha}{r}\right)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u \\ \cancel{v} \\ w \\ \varphi_s \\ \cancel{\varphi_\vartheta} \end{bmatrix}
$$

REGIME MEMBRANALE

LASTRE DI RIVOLUZIONE CARICATE SIMMETRICAMENTE

EQUAZIONI STATICHE

[illegible] IL REGIME MEMBRANALE

$$
\begin{bmatrix}
\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\sin\alpha}{r}\right) \quad -\frac{\sin\alpha}{r}} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} & \left(\frac{\partial}{\partial s}+\frac{2\sin\alpha}{r}\right) & 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 \\
\boxed{-\frac{1}{R_1} \quad -\frac{1}{R_2}} & 0 & \left(\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\sin\alpha}{r}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} & 0 & 0 & 0 \\
0 \quad 0 & 0 & -1 & 0 & \left(\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\sin\alpha}{r}\right) & -\frac{\sin\alpha}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} \\
0 \quad 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} & \left(\frac{\partial}{\partial s}+\frac{2\sin\alpha}{r}\right)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \boxed{N_s} \\ \boxed{N_\vartheta} \\ N_{s\vartheta} \\ \cancel{T_s} \\ T_\vartheta \\ \cancel{M_s} \\ \cancel{M_\vartheta} \\ M_{s\vartheta} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \boxed{p_s} \\ p_\vartheta \\ \boxed{q} \\ 0 \\ m \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Si osservi che, ancora per ragioni di simmetria, sono identicamente soddisfatte, e quindi non compaiono, le condizioni di equilibrio alla traslazione lungo i paralleli e alla rotazione attorno ai meridiani.

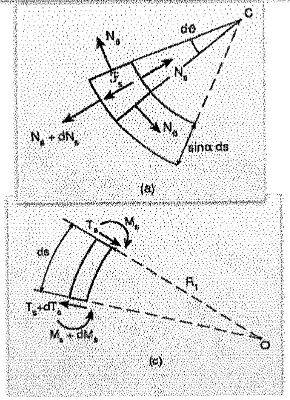
LASTRE DI RIVOLUZIONE CARICATE SIMMETRICAMENTE

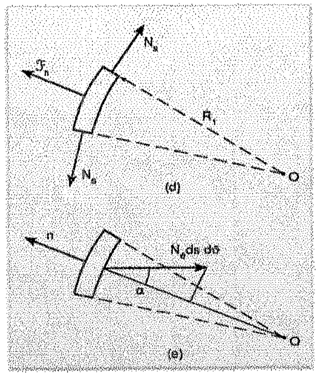
EQUAZIONE DI EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE LUNGO LA NORMALE n

La condizione di equilibrio alla traslazione lungo la normale *n* fornisce l'equazione:

$$-N_s \frac{\mathrm{d}s}{R_1} r\,\mathrm{d}\vartheta - N_\vartheta\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\vartheta \cos\alpha + \mathrm{d}T_s r\,\mathrm{d}\vartheta + T_s\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta + \mathscr{F}_n r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\vartheta = 0$$

La quale divisa per $r\,ds\,d\vartheta$ coincide con la seconda delle equazioni statiche.





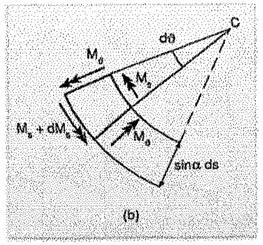
LASTRE DI RIVOLUZIONE CARICATE SIMMETRICAMENTE

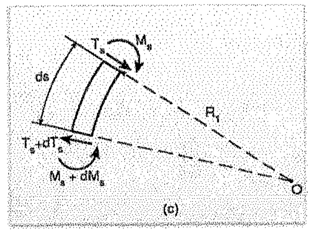
EQUAZIONE DI EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE ATTORNO AI PARALLELI

La condizione di equilibrio alla rotazione attorno ai paralleli fornisce l'equazione:

$$-T_s r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}s + \mathrm{d}M_s r\,\mathrm{d}\vartheta + M_s\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta - M_\vartheta \sin\alpha\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\vartheta = 0$$

La quale divisa per $r\,ds\,d\vartheta$ coincide con la terza delle equazioni statiche.
Si noti come, nelle equazioni indefinite di equilibrio, vi siano dei contributi aggiuntivi che, ad esempio nel caso della lastra piana circolare, risultano non trascurabili. Tali contributi sono dovuti al fatto che i lati curvilinei paralleli dell'elemento di lastra differiscono della quantità $r\,ds\,d\vartheta$.





6

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 198

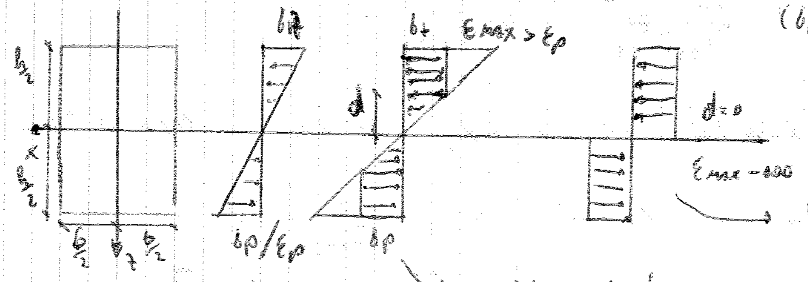
CASI ESTREMI

$\frac{\ell_I}{\ell_{II}} = 0$ LA "BIELLA CENTRALE" ASSORBE TUTTO LO SFORZO FINO ALLA PLASTICIZZAZIONE FINO AD ALLORA SI È IN ASSENZA DI SPOSTAMENTI

$\frac{\ell_I}{\ell_{II}} = 1$ NON VI È LA FASE INCRUDENTE LE TRE BIELLE SI PLASTICIZZANO CONTEMPORANEAMENTE QUANDO $\frac{F}{\sigma_p A} \neq 2$

FLESSIONE ELASTO PLASTICA

SEZIONE RETTANGOLARE DI MATERIALE PERFETTAMENTE PLASTICO SOGGETTO A MOMENTO FLETTENTE (σp SIA IN COMPRESSIONE CHE IN TRAZIONE)



LA PLASTICIZZAZIONE COMPLETA DELLA SEZIONE AVVIENE QUANDO TUTTE LE FIBRE SI SONO PLASTICIZZATE AVENDO $\varepsilon_{max} \to \infty$

LA TENSIONE σ_z NELLE FIBRE NON PUÒ SUPERARE IL VALORE DI σ_p

MOMENTO DI PRIMA PLASTICIZZAZIONE

QUANDO SI PLASTICIZZANO LE FIBRE + ESTERNE

$$M_e = \sigma_p \frac{h}{2} b \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} h$$

$$\boxed{M_e = \sigma_p \frac{h^2 b}{6}}$$

LE FIBRE DA QUELLE + ESTERNE ARRIVANDO VERSO IL CENTRO DELLA SEZIONE INIZIANO A PLASTICIZZARSI

MOMENTO PLASTICO

$$M_p = \sigma_p b \frac{h}{2} \frac{h}{2}$$

$$\boxed{M_p = \sigma_p \frac{b h^2}{4}}$$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \to \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{M_x}{I_x E} y = \chi_x y \to \chi_x = \frac{\varepsilon_{max}}{h/2} = \frac{\varepsilon_p}{d}$$

LEGGE MOMENTO CURVATURA

$$M_x = 2\int_0^d \sigma_p \frac{y}{d} y b \, dy + 2\int_d^{h/2} \sigma_p b y \, dy \qquad d = \frac{\varepsilon_p}{\chi_x}$$

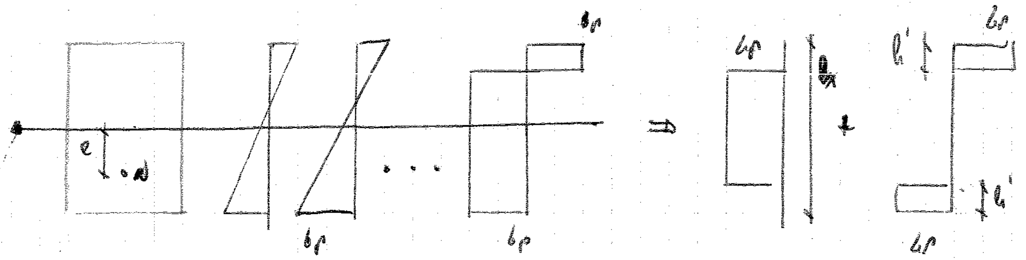
$$= 2\int_0^{\varepsilon_p/\chi_x} \sigma_p y^2 \frac{\chi_x}{\varepsilon_p} b \, dy + 2\int_{\varepsilon_p/\chi_x}^{h/2} \sigma_p y \, dy$$

$$= 2\sigma_p \left(\frac{\varepsilon_p}{\chi_x} \int_0^{\varepsilon_p/\chi_x} y^2 dy + \int_{\varepsilon_p/\chi_x}^{h/2} y \, dy \right)$$

$$= 2\sigma_p \left(\frac{\varepsilon_p}{\chi_x} \frac{y^3}{3} \Big|_0^{\varepsilon_p/\chi_x} + \frac{y^2}{2} \Big|_{\varepsilon_p/\chi_x}^{h/2} \right)$$

$$= 2\sigma_p \left(\frac{\varepsilon_p}{\chi_x} \left(\frac{\varepsilon_p}{\chi_x}\right)^3 \frac{1}{3} + \frac{h^2}{8} - \frac{\varepsilon_p^2}{2\chi_x^2} \right)$$

SFORZO NORMALE ECCENTRICO



PRIMA SI PLASTICIZZANO LE FIBRE DA UNA PARTE E POI DALL'ALTRA

$$N = \sigma_p b (h - 2h') \qquad N_p = \sigma_p b h$$

$$M = \sigma_p b h' \left(\frac{h}{2} - \frac{h'}{2}\right) 2 = \sigma_p b h' (h - h') \qquad M_p = 2\sigma_p b (S^{h/2}_{*}) = 2\sigma_p b \frac{bh^2}{8} = \sigma_p b \frac{h^2}{4}$$

$$\frac{N}{N_p} = \frac{\cancel{\sigma_p b}(h - 2h')}{\cancel{\sigma_p} h \cancel{b}} = \frac{(h - 2h')}{h} = 1 - 2\frac{h'}{h}$$

$$\frac{M}{M_p} = \frac{\cancel{\sigma_p b} h' (h - h')}{\cancel{\sigma_p b} \frac{h^2}{4}} = 4\left(1 - \frac{h'}{h}\right)\left(\frac{h'}{h}\right) = 4\frac{h'}{h} - 4\left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

$$\left(\frac{N}{N_p}\right)^2 = \left(1 - 2\frac{h'}{h}\right)^2 = 1 + 4\left(\frac{h'}{h}\right)^2 - 4\frac{h'}{h} = 1 - \frac{M}{M_p} \rightarrow \boxed{\frac{M}{M_p} = 1 - \left(\frac{N}{N_p}\right)^2}$$

DOMINIO PLASTICO

TEOREMI PLASTICITÀ

- TEOREMA DI TRESCA
- TEOREMA DI VON MISES → DOMINI PLASTICI

POSTULATO DI DRUCKER

↓

- TEOREMA MASSIMA ENERGIA DISSIPATA $\phi(\dot{\varepsilon}_p)$
- TEOREMA STATICO CAMPO TENSIONALE STATICAMENTE AMMISSIBILE
- TEOREMA DINAMICO CAMPO TENSIONALE CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE

TEORIA DELLA PLASTICITÀ

Prof. Ing. Giuseppe Andrea FERRO
Politecnico di Torino

18 novembre 2013

INDICE

LINEARITÀ DEL PROBLEMA ELASTICO

In base alle ipotesi di comportamento elastico lineare del materiale e di piccoli spostamenti, il problema del solido elastico è risolubile tramite l'equazione operatoriale di Lamé, il cui operatore è in ogni caso lineare.
Se cioè $\{F\}$ e il vettore delle forze esterne ed $\{\eta\}$ è il corrispondente vettore degli spostamenti, moltiplicando le sollecitazioni per una costante c, anche gli spostamenti, e quindi le deformazioni e le caratteristiche statiche, risulteranno moltiplicati per la stessa costante:

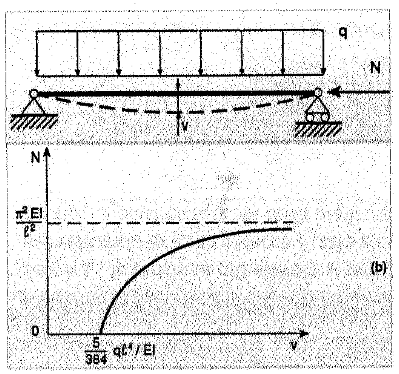
$$[L]\{c\eta\} = -\{cF\}$$

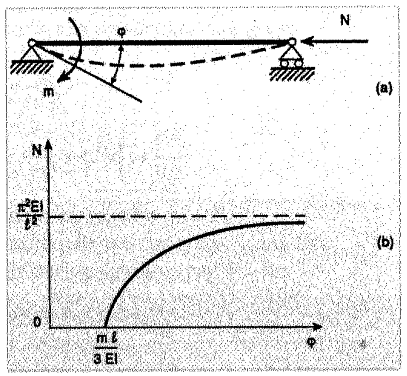
Inoltre, se $\{F_a\}$, $\{F_b\}$ sono due diversi vettori delle forze esterne, ed $\{\eta_a\}$, $\{\eta_b\}$ i relativi campi di spostamento, nel caso di sovrapposizione delle forze anche per gli spostamenti varrà il Principio di Sovrapposizione degli Effetti:

$$[L]\{\eta_a + \eta_b\} = -\{F_a + F_b\}$$

NON LINEARITÀ GEOMETRICHE

Nel caso di instabilità euleriana si riscontra una non linearità di tipo geometrico. La teoria della plasticità, viceversa, analizza non linearità costitutive del materiale.





© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 198

TEORIA DELLA PLASTICITÀ

ESEMPI DI NON LINEARITÀ MECCANICA – SISTEMI DI TRAVI

Nel caso di sistemi di travi, la caratteristica prevalente è il **momento flettente**.
In tali casi il **FLUSSO PLASTICO LOCALE** è rappresentato da una **ROTAZIONE LOCALIZZATA.**
All'aumentare del numero di tali rotazioni, diminuirà contemporaneamente il grado di iperstaticità del telaio.

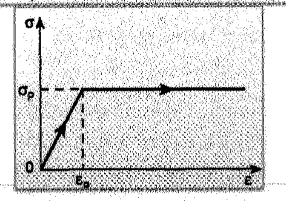
FLESSIONE ELASTO-PLASTICA

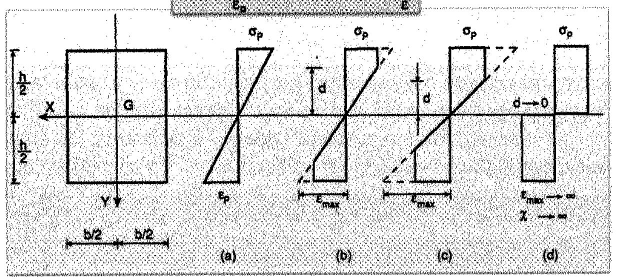
FLESSIONE ELASTO-PLASTICA

FLESSIONE ELASTO-PLASTICA

SEZIONE RETTANGOLARE

Si consideri la **sezione rettangolare**, di base b e altezza h, di una trave di **materiale elastico-perfettamente plastico**, con uguali modulo elastico E e tensione di snervamento σ_p sia in trazione che in compressione.

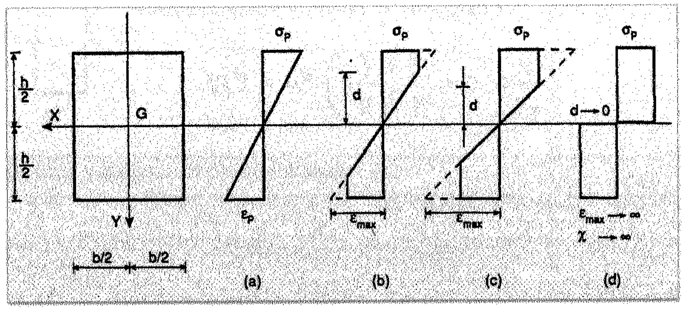




FLESSIONE ELASTO-PLASTICA

SEZIONE RETTANGOLARE

All'<u>**aumentare del momento flettente**</u> applicato, **la sezione** della trave **rimane piana**, pur plasticizzandosi parte di essa. Ciò equivale a considerare variazioni lineari della dilatazione assiale ε_z lungo l'altezza della trave. La tensione assiale σ_z non potrà superare il suo valore limite σ_p, e mostrerà, una volta superato il momento di prima plasticizzazione M_e, una variazione lineare nella parte centrale della sezione e due pianerottoli nelle parti esterne. Nei diagrammi si riporta la successione degli andamenti che assumono lungo l'altezza sia ε_z che σ_z, uniformando le scale rispettivamente con i valori allo snervamento, ε_p e σ_p.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 198

FLESSIONE ELASTO-PLASTICA

SEZIONE RETTANGOLARE

Sostituendo la semi-estensione *d* della zona elastica con l'espressione derivante da:

$$\chi_x = \frac{\varepsilon_{max}}{h/2} = \frac{\varepsilon_P}{d}.$$

si ha:

$$M_x = 2\int_0^d \left(\sigma_P \frac{y}{d}\right) yb\,dy + 2\int_d^{h/2} \sigma_P yb\,dy = 2\int_0^{\varepsilon_P/\chi_x} \sigma_P \frac{\chi_x}{\varepsilon_P} y^2 b\,dy + 2\int_{\varepsilon_P/\chi_x}^{h/2} \sigma_P yb\,dy =$$

$$= 2\sigma_P b\left[\frac{\chi_x}{\varepsilon_P}\int_0^{\varepsilon_P/\chi_x} y^2\,dy + \int_{\varepsilon_P/\chi_x}^{h/2} y\,dy\right] = 2\sigma_P b\left[\frac{\chi_x}{\varepsilon_P}\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{\varepsilon_P/\chi_x} + \left.\frac{y^2}{2}\right|_{\varepsilon_P/\chi_x}^{h/2}\right] =$$

$$= 2\sigma_P b\left[\frac{\chi_x}{\varepsilon_P}\frac{\varepsilon_P^3}{3\chi_x^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\varepsilon_P^2}{\chi_x^2}\right)\right] = 2\sigma_P b\left[\frac{\varepsilon_P^2}{3\chi_x^2} + \frac{h^2}{8} - \frac{\varepsilon_P^2}{2\chi_x^2}\right] =$$

$$= \sigma_P b\frac{h^2}{4}\left[1 - \frac{1}{3}\frac{\left(\varepsilon_P/\frac{h}{2}\right)^2}{\chi_x^2}\right] = M_P\left[1 - \frac{1}{3}\frac{\chi_e^2}{\chi_x^2}\right]$$

$- \frac{\varepsilon_P^2}{\frac{8}{3}\chi_x^2} \cdot \frac{8}{h^2}$

$\frac{2}{3}\,\frac{\left(\varepsilon_P/\frac{h}{2}\right)^2}{\chi_x^2}$

17

FLESSIONE ELASTO-PLASTICA

SEZIONE RETTANGOLARE

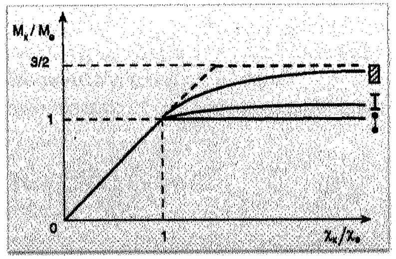
Poiché

$$M_e = \frac{\sigma_P}{W_x} = \sigma_P b\frac{h^2}{6} = \frac{2}{3}M_P$$

$$M_x = M_P\left[1 - \frac{1}{3}\frac{\chi_e^2}{\chi_x^2}\right]$$

$$\frac{M_x}{M_e} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\chi_e}{\chi_x}\right)^2$$

ove con χ_e si è indicata la curvatura all'atto della prima plasticizzazione. Il diagramma rappresenta quindi una legge lineare per $\chi_x < \chi_e$, ovvero $M_x<M_e$ e la legge iperbolica per $\chi_x>\chi_e$, ovvero $M_x>M_e$. Tale legge incrudente viene sostituita nella pratica dalla legge elastica-perfettamente plastica.



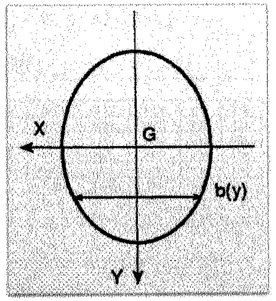
18

FLESSIONE ELASTO-PLASTICA

SEZIONE A DOPPIA SIMMETRIA

Quando la sezione retta della trave è a doppia simmetria, la larghezza b(y) resta sotto il segno di integrale:

$$M_x = 2\sigma_P\left[\frac{\chi_x}{\varepsilon_P}\int_0^{\varepsilon_P/\chi_x} y^2 b(y)\,dy + \int_{\varepsilon_P/\chi_x}^{h/2} yb(y)\,dy\right]$$



Il momento plastico vale dunque:

$$M_P = \lim_{\chi_x\to\infty} M_x = 2\sigma_P\int_0^{h/2} yb(y)\,dy, \quad = 2\sigma_P S_x^{A/2}$$

ove l'integrale rappresenta il momento statico $S_x^{A/2}$ di mezza sezione rispetto all'asse X. Si ha pertanto:

$$\frac{M_P}{M_e} = \frac{2\sigma_P S_x^{A/2}}{\sigma_P W_x} = \frac{2S_x^{A/2}}{W_x} = \frac{2S_x^{A/2}}{I_x}\frac{h}{2}$$

$\frac{I_x}{W_x}\ \frac{2}{h}$

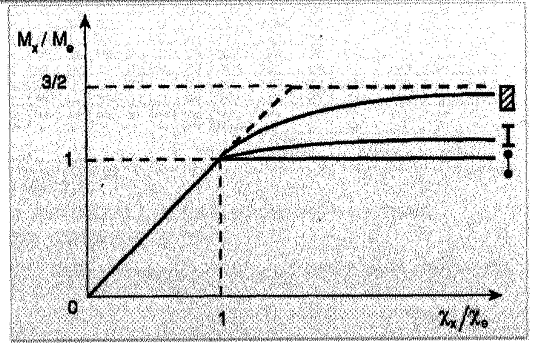
19

FLESSIONE ELASTO-PLASTICA

SEZIONE A DOPPIA SIMMETRIA

Questo rapporto vale 1.5 nel caso di sezione rettangolare, mentre, nel caso limite di sezione costituita da due aree concentrate poste a distanza h , esso è pari all'unità. Ciò significa che in tal caso il momento di prima e quello di ultima plasticizzazione coincidono. Nel caso assai ricorrente di sezione a doppio T, non ci si discosta di molto dal caso limite appena considerato.
Le sezioni a doppio T sono quindi le più convenienti in regime elastico, mentre in regime plastico esse rivelano scarse riserve di capacità portante a flessione.

$$\frac{M_P}{M_e} = \frac{2S_x^{A/2}}{W_x}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 198

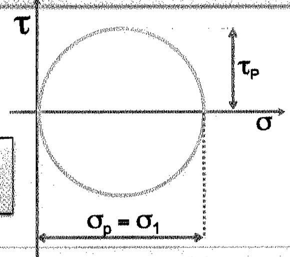
FLESSIONE ELASTO-PLASTICA

TORSIONE

ho

Per quanto riguarda le altre caratteristiche interne, il **momento torcente** applicato ad una ***sezione circolare*** mostra un comportamento del tutto analogo a quello descritto in precedenza per il momento flettente retto.
Il momento torcente di prima plasticizzazione vale infatti:

$$M_{ze} = \frac{I_p}{R}\tau_P = \frac{\pi}{2}R^3\tau_P,$$



$$\tau_P = \frac{1}{2}\sigma_P$$

Il momento torcente plastico risulta, d'altra parte, uguale al prodotto della tensione di snervamento τ_p per il momento statico polare della sezione:

$$M_{zP} = \frac{2\pi}{3}R^3\tau_P.$$

Il rapporto M_{zP} / M_{ze} vale pertanto 4/3.

25

FLESSIONE ELASTO-PLASTICA

SFORZO NORMALE

Nel caso di **sforzo normale centrato**, lo sforzo normale plastico vale:

$$N_P = \sigma_P A,$$

Per il **taglio retto** andrebbe considerato assieme a quello della flessione retta, sebbene in genere l'influenza di tale caratteristica sia trascurabile nell'ambito del calcolo plastico.

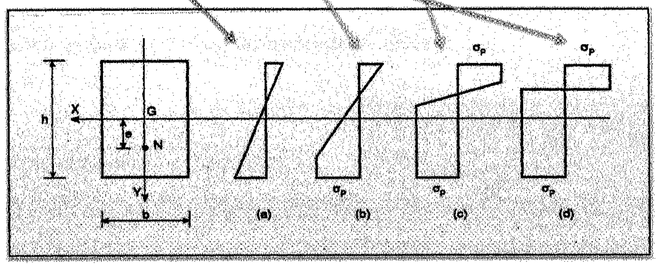
26

FLESSIONE ELASTO-PLASTICA

SEZIONE RETTANGOLARE – SFORZO NORMALE ECCENTRICO

ho

Per una sezione rettangolare sollecitata dallo sforzo normale N, applicato sull'asse Y con eccentricità *e*, si susseguono quattro diverse fasi all'aumentare di N. Tali fasi sono relative alle condizioni seguenti:
(a) elastica;
(b) elasto-plastica, con snervamento solo ad un lembo;
(c) elasto-plastica, con snervamento ad entrambi i lembi;
(d) di completa plasticizzazione.

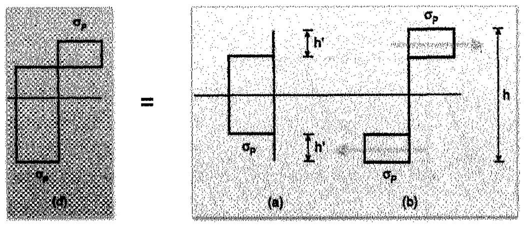


27

FLESSIONE ELASTO-PLASTICA

SEZIONE RETTANGOLARE – SFORZO NORMALE ECCENTRICO

Il diagramma nel caso di *completa plasticizzazione* può decomporsi nella parte centrale che rappresenta la forza risultante *N* e nella coppia di risultanti delle zone esterne che rappresentano il momento *M=Ne*:



$$N = \sigma_P b(h - 2h')$$

$$M = \sigma_P bh'(h - h').$$

28

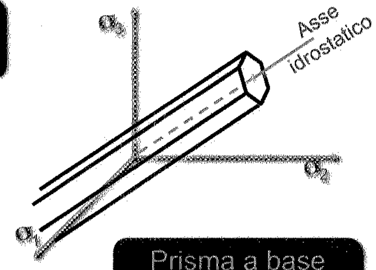
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 198

CRITERIO DI TRESCA

Rappresentazione nello spazio $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$

Dominio tridimensionale

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_p$$
$$|\sigma_1 - \sigma_3| < \sigma_p$$
$$|\sigma_2 - \sigma_3| < \sigma_p$$



Prisma a base esagonale

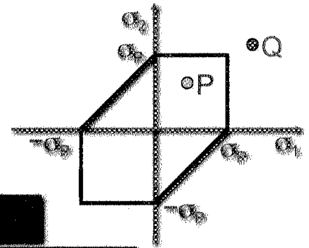
33

TEOREMI DELL'ANALISI LIMITE PLASTICA

CRITERIO DI TRESCA

Caso biassiale ($\sigma_3 = 0$)

$$|\sigma_1| < \sigma_p$$
$$|\sigma_2| < \sigma_p$$
$$|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_p$$



P (σ_1, σ_2): verificato

Q (σ_1, σ_2): non verificato!

34

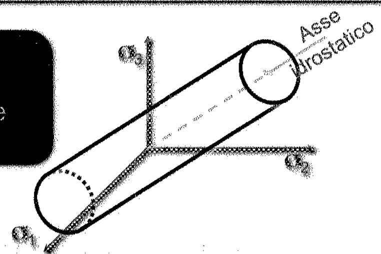
TEOREMI DELL'ANALISI LIMITE PLASTICA

CRITERIO DI VON MISES

Rappresentazione nello spazio $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$

$$\left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\right] = \sigma_p^2$$

Cilindro a base circolare indefinito sull' asse idrostatico



La frontiera è continua e descritta da una sola equazione

35

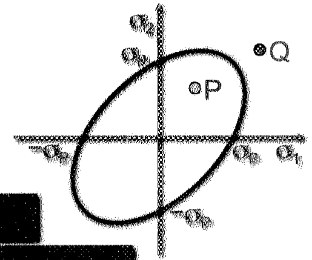
TEOREMI DELL'ANALISI LIMITE PLASTICA

CRITERIO DI VON MISES

Stato tensionale piano ($\sigma_3 = 0$)

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) \leq \sigma_p^2$$

Ellisse con asse maggiore sui quadranti positivi



P(σ_1, σ_2): verificato

Q(σ_1, σ_2): non verificato!

36

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 198

TEOREMI DELL'ANALISI LIMITE PLASTICA

LEGGE DI NORMALITÀ DELLA DEFORMAZIONE INCREMENTALE PLASTICA

Il dominio elastico include l'origine, e pertanto la disequazione, quando $\{\sigma_0\} = \{0\}$, diventa:

$$\left(\{\sigma\}-\{\sigma_0\}\right)^T\{\dot{\varepsilon}_P\}\geq 0 \quad \longrightarrow \quad \{\sigma\}^T\{\dot{\varepsilon}_P\}=\dot{\Phi}\left(\{\dot{\varepsilon}_P\}\right)\geq 0$$

$\dot{\Phi}$ rappresenta l'energia dissipata nell'unità di volume e risulta essere funzione solo della deformazione incrementale plastica.
Questa considerazione resta valida anche quando la superficie di plasticizzazione presenta punti angolosi e tratti lineari. Perciò, la seguente asserzione è equivalente al ***Postulato di Drucker***: **l'energia dissipata nell'unità di volume è funzione soltanto della deformazione incrementale plastica.**
Da questa asserzione, peraltro, è possibile dedurre la legge di normalità e la convessità della superficie di plasticizzazione.

41

TEOREMI DELL'ANALISI LIMITE PLASTICA

LEGGE DI NORMALITÀ DELLA DEFORMAZIONE INCREMENTALE PLASTICA

Ciascuno stato tensionale $\{\sigma\}$ capace di produrre la deformazione incrementale plastica $\{\dot{\varepsilon}_P\}$, deve trovarsi sul piano normale a $\{\dot{\varepsilon}_P\}$ e distante $\Phi'(\{\varepsilon'_P\})$ dall'origine.
Facendo ruotare $\{\varepsilon'_P\}$ attorno all'origine, tutti questi piani inviluppano la superficie di plasticizzazione, che risulta quindi essere convessa.
Se $\{\sigma'\}$ è il vettore incrementale di tensione corrispondente alla deformazione incrementale plastica $\{\varepsilon'_P\}$, si ha:

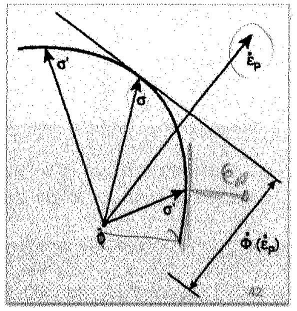
$$\{\dot{\sigma}\}^T\{\dot{\varepsilon}_P\}\geq 0,$$

assumendo $\{\sigma\}$ come stato tensionale iniziale.

$$\left(\{\sigma\}-\{\sigma_0\}\right)^T\{\dot{\varepsilon}_P\}\geq 0$$

Per un materiale elastico-perfettamente plastico si ha in particolare:

$$\{\dot{\sigma}\}^T\{\dot{\varepsilon}_P\}=0,$$



42

TEOREMI DELL'ANALISI LIMITE PLASTICA

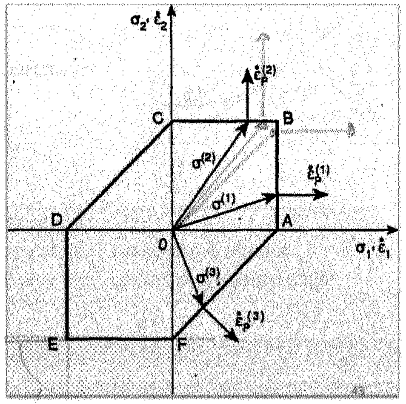
LEGGE DI NORMALITÀ DELLA DEFORMAZIONE INCREMENTALE PLASTICA

mentre per un materiale ad incrudimento negativo (softening) risulta:

$$\{\dot{\sigma}\}^T\{\dot{\varepsilon}_P\}<0,$$

e il Postulato di Drucker è violato.

In figura è rappresentato il criterio di Tresca in due dimensioni e i relativi meccanismi di flusso plastico (deformazioni incrementali plastiche). Lungo i lati AB , BC, DE, EF , si attiva solo una delle due dilatazioni principali ε'_1 , ε'_2, mentre lungo i lati CD ed FA, una dilatazione risulta positiva e l'altra negativa. Esse sono attivate contemporaneamente e con pari intensità.

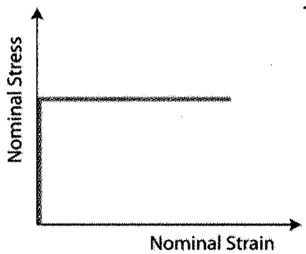


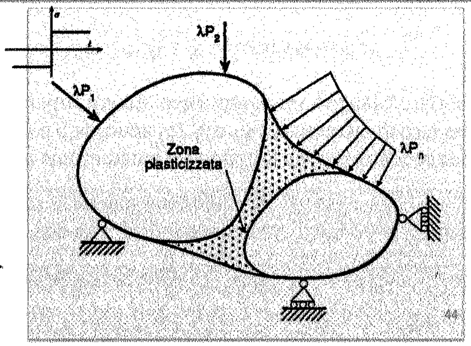
43

TEOREMI DELL'ANALISI LIMITE PLASTICA

TEOREMI DELL'ANALISI LIMITE PLASTICA

Si consideri un **solido rigido-perfettamente plastico**, soggetto ad una condizione di carico proporzionale, misurata dal parametro λ.
Un campo tensionale è detto staticamente ammissibile quando esso è in equilibrio con il carico esterno e in ciascun punto del solido si ha F ≤ 0.
Viceversa, <u>un meccanismo di collasso è detto cinematicamente ammissibile quando i vincoli esterni sono rispettati e la corrispondente energia dissipata risulta positiva.</u>





44

D) AGGIUNTA DI MATERIALE

<u>Un incremento dimensionale di un solido perfettamente plastico non può produrre un decremento del carico di collasso.</u>

La somma del campo tensionale di collasso nel solido originale e di un campo tensionale identicamente nullo nella porzione di materiale aggiunta, costituisce un campo tensionale staticamente ammissibile. Ciò significa che *<u>il carico di collasso del nuovo solido risulta essere maggiore o uguale a quello del solido originale, e sicuramente non minore.</u>*

Le proprietà di convessità del dominio elastico e di normalità della deformazione incrementale plastica, nonché i teoremi dell'analisi limite, per i solidi tridimensionali, possono essere facilmente estesi ai solidi bidimensionali (lastre) e unidimensionali (travi), sostituendo al vettore dello stato tensionale, $\{\sigma\}$, il vettore delle caratteristiche statiche, $\{Q\}$, e al vettore delle deformazioni incrementali plastiche, $\{\varepsilon'_p\}$, il vettore incrementale delle caratteristiche deformative, $\{q'_p\}$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 198

ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI

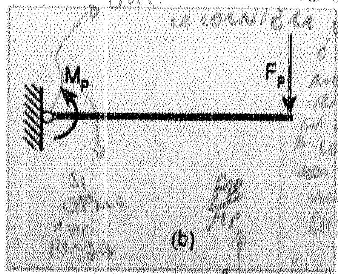
CERNIERA PLASTICA PER SEZIONI RETTANGOLARI

A quel punto si produce una **rotazione localizzata nella sezione d'incastro** mentre il momento d'incastro non può crescere ulteriormente e resta stazionario al suo valore limite M_p. Questa fenomeno viene rappresentato inserendo una cerniera al posto dell'incastro e applicando un momento M_p nelle adiacenze della cerniera. La cerniera permette infatti rotazioni localizzate, mentre il momento M_p rappresenta la reazione rotazionale esplicata dalla sezione d'incastro. Il sistema è quindi diventato labile, ma è in equilibrio per la particolare condizione di carico.

$$F_P = \frac{3}{2}F_e$$

per sezione rettangolare

F_e = massima forza applicabile nell'ambito del criterio delle tensioni ammissibili.
Il rapporto 3/2 rappresenta quindi una sorta di fattore di sicurezza nell'ambito del criterio delle tensioni ammissibili, nei confronti dello stato ultimo plastico.

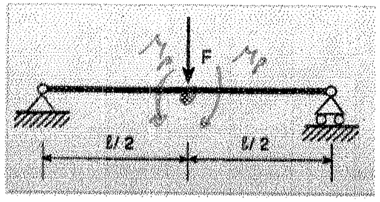


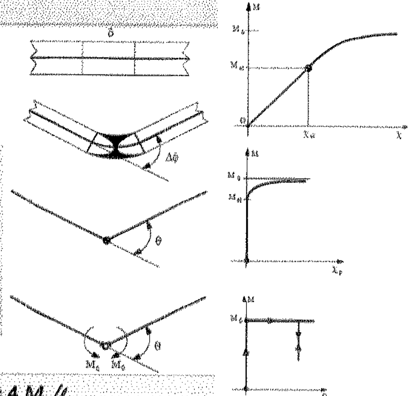
ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI

STRUTTURE ISOSTATICHE

Trave appoggiata con forza in mezzeria.
Il collasso plastico si raggiunge non appena il momento in mezzeria uguagli il momento plastico:

$$\frac{1}{4}F_P l = M_P$$



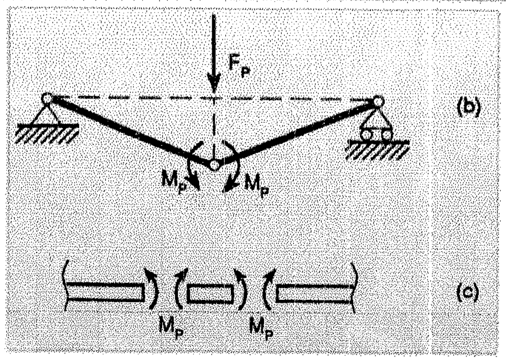


da cui si ottiene il carico di collasso $F_p = 4\ M_p/\ell$.
A quel punto si crea una cerniera plastica in mezzeria, una cerniera cioè dotata di una reazione rotazionale costante e uguale a M_p.

ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI

STRUTTURE ISOSTATICHE

I momenti M_p agenti nello schema tendono ad opporsi all'azione del carico esterno e a far ruotare i due bracci in senso inverso a quello del meccanismo di collasso.
In questo caso il meccanismo è in equilibrio per la particolare condizione di carico.
Tale condizione di equilibrio è indifferente per piccoli spostamenti.
Se si isola il concio di trave plasticizzato, i momenti M_p agenti sul concio stesso e sui due bracci della trave tendono in tutti i casi le fibre longitudinali inferiori.

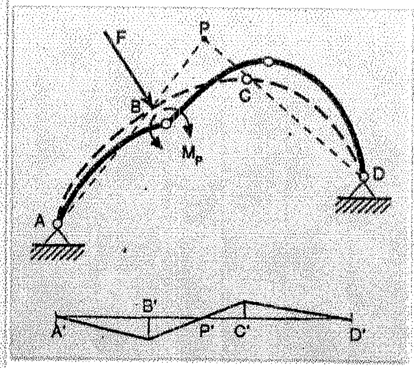


7

ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI

FATTORE DI SICUREZZA

Il fattore di sicurezza vale 3/2 per tutti i sistemi isostatici di travi inflesse a sezione rettangolare, (trascurando i contributi dello sforzo normale e del taglio). La formazione di un'unica cerniera plastica conduce infatti il sistema direttamente al collasso.
Nelle travature reticolari isostatiche, tale fattore è invece uguale a 1. Nel caso invece dei sistemi iperstatici di travi inflesse, il fattore di sicurezza è generalmente maggiore di 3/2. La formazione della prima cerniera plastica non produce infatti il collasso della struttura. In generale si può affermare che, in un telaio n volte iperstatico, il numero delle cerniere plastiche che si attivano per il collasso è minore o uguale ad (n+1).



8

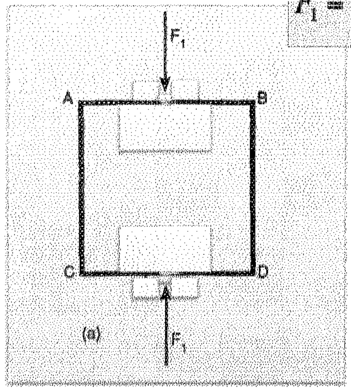
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 198

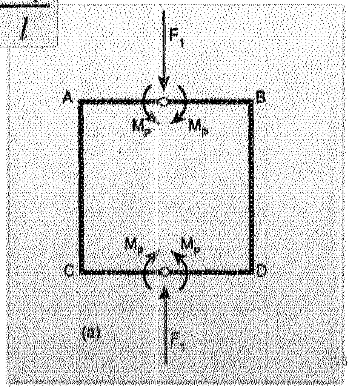
ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI

MAGLIA CHIUSA

Il massimo momento flettente in fase elastica è dunque pari a 3/16 *Fl* nelle sezioni soggette alle forze *F*, per cui il valore delle forze F_1 che produce le prime due cerniere plastiche è pari a:

$$F_1 = \frac{16}{3}\frac{M_P}{l}$$

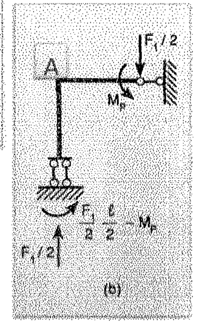


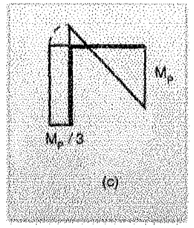


ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI

MAGLIA CHIUSA

Le successive quattro cerniere si formano contemporaneamente in A, B, C, D, quando il momento nei nodi raggiunge anch'esso il valore M_p, all'aumentare delle forze esterne *F*:

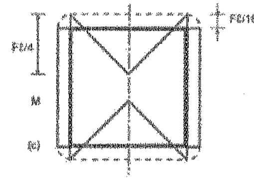




$$M_A = \frac{Fl}{4} - M_P = M_P$$

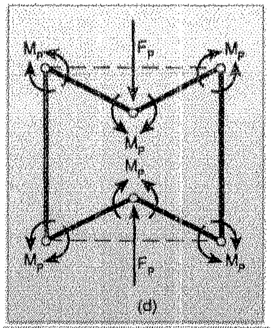
da cui si ricava il carico di collasso:

$$F_2 = F_P = \frac{8M_P}{l}$$



ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI

FATTORE DI SICUREZZA



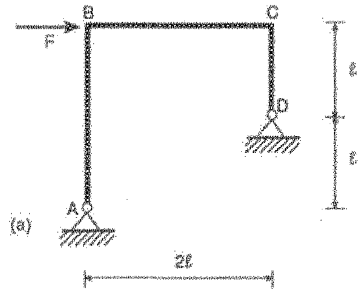
Il fattore di sicurezza, nell'ambito del criterio delle tensioni ammissibili e nei confronti del collasso plastico, sempre nell'ipotesi di sezione rettangolare vale nel presente caso:

$$\frac{F_P}{F_e} = \frac{F_2}{\frac{2}{3}F_1} = \frac{3}{2}\frac{\frac{8M_P}{l}}{\frac{16}{3}\frac{M_P}{l}} = \frac{9}{4}$$

ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI

TELAI A NODI SPOSTABILI

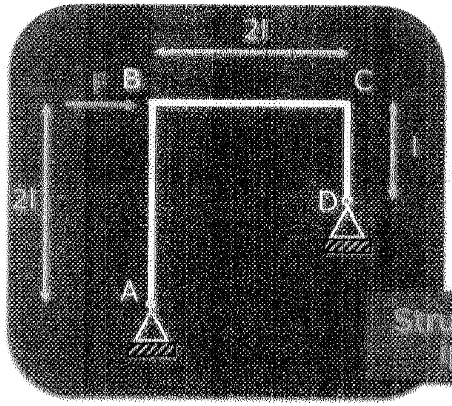
Nel caso del **portale zoppo**, si determini la forza che provoca la formazione della prima cerniera plastica mediante il metodo dei telai.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 198

ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI

TELAI A NODI SPOSTABILI



g = 3
v = 2 + 2

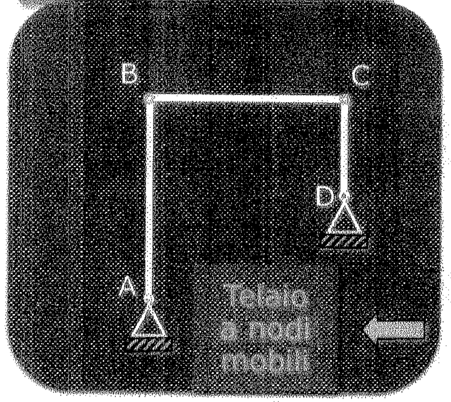
Struttura 1 volta iperstatica

21

ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI

TELAI A NODI SPOSTABILI

Reticolare associata



g = 3 × 3
v = 2 × 4

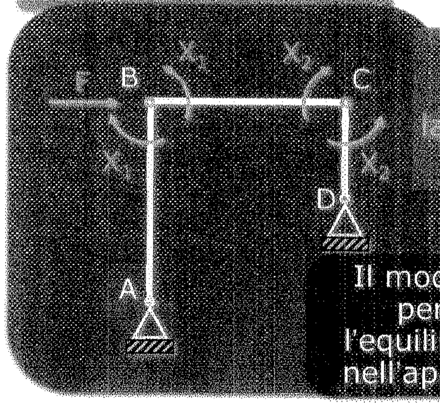
Reticolare associata labile

22

ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI

TELAI A NODI SPOSTABILI

Reticolare associata



La reticolare associata, labile, è però in equilibrio!

Il modo più rapido per imporre l'equilibrio consiste nell'applicare il PLV

23

ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI

TELAI A NODI SPOSTABILI

Applicazione del PLV

Sistema di forze (a) reale (r)

Sistema di spostamenti (b) fittizio (f) costituito dal cinematismo della reticolare associata

Il lavoro virtuale interno è nullo

$L_{ve} = 0$

Nell'equazione di equilibrio compaiono solo le X ed i carichi

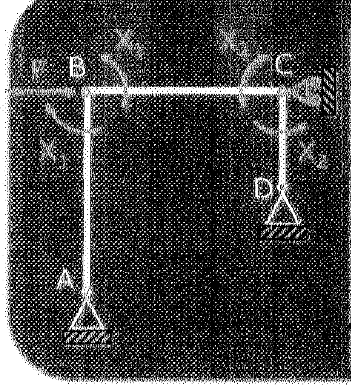
24

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 198

ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI

TELAI A NODI SPOSTABILI

Componenti di rotazione elastica



$$\varphi_{BA} = -\frac{X_1(2l)}{3EI}$$

$$\varphi_{BC} = +\frac{X_1(2l)}{3EI} + \frac{X_2(2l)}{6EI}$$

$$\varphi_{CB} = -\frac{X_1(2l)}{6EI} - \frac{X_2(2l)}{3EI}$$

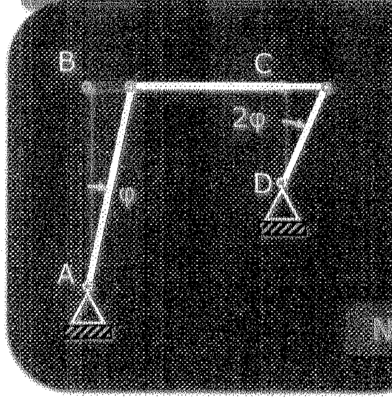
$$\varphi_{CD} = +\frac{X_2 l}{3EI}$$

29

ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI

TELAI A NODI SPOSTABILI

Componenti di rotazione rigida



$$\varphi_{BA} = -\varphi$$

$$\varphi_{BC} = 0$$

$$\varphi_{CB} = 0$$

$$\varphi_{CD} = -2\varphi$$

N.B.: φ è reale!

30

ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI

TELAI A NODI SPOSTABILI

Equazioni di congruenza angolare

$$\begin{cases} \varphi_{BA} = \varphi_{BC} \\ \varphi_{CB} = \varphi_{CD} \end{cases}$$

31

ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DEI SISTEMI DI TRAVI

TELAI A NODI SPOSTABILI

Equazioni di congruenza angolare

$$\begin{cases} -\dfrac{X_1(2l)}{3EI} - \varphi = +\dfrac{X_1(2l)}{3EI} + \dfrac{X_2(2l)}{6EI} \\ -\dfrac{X_1(2l)}{6EI} - \dfrac{X_2(2l)}{3EI} = +\dfrac{X_2 l}{3EI} - 2\varphi \end{cases}$$

32

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 198