NUMERO: 2038A - ANNO: 2016

A P P U N T I

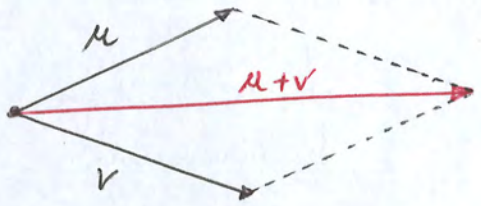
STUDENTE: Pilato Giuseppe

MATERIA: Geometria - Prof. Manno.pdf

Lezione 1 (1 foglio)
29/02/2016

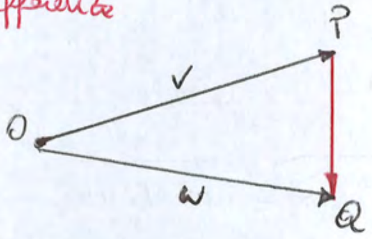
- giovanni.manno@polito.it
- orale max 3 punti
- Testi riferimento: Valabrega (Teoria), Cordovez (esercizi)
- Ricevimento su appuntamento (fatto via e-mail preventivamente)

Somma



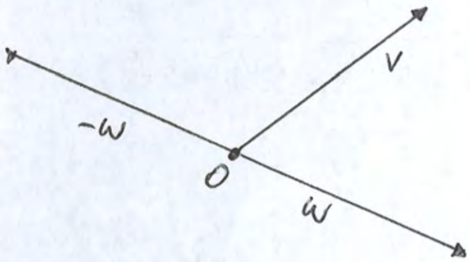
Se abbiamo due vettori applicati ad un punto, la somma si fa con la "regola del parallelogramma"

Differenza



$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ}$$
$$\vec{PQ} = w - v$$

Opposto

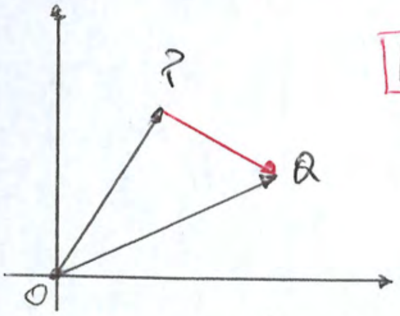


Se dobbiamo fare $v+(-w)$, prima ci troviamo il vettore $-w$ e poi facciamo la somma con la regola del parallelogramma.

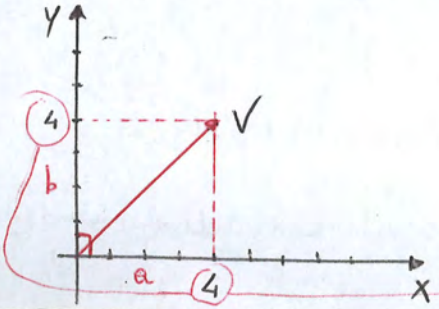
Se il punto di applicazione è lo stesso possiamo calcolare la distanza tra due punti

$$\boxed{\|P-Q\| \to \|\vec{OP} - \vec{OQ}\|}$$

ATTENZIONE: la distanza tra due punti non dipende dal sistema di riferimento



La lunghezza di un vettore si calcola con il teorema di Pitagora:



$V=(a,b) \to$ componenti

$$\|V\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

componenti vettore $V=(4,4)$

①

Lezione 2 (4 fogli).
01/03/2016

- Finire discorso sull'angolo compreso tra 2 vettori:

$V=(v_1,\dots,v_m)\in\mathbb{R}^{ⓜ}$ → numero che indica il numero di componenti del vettore

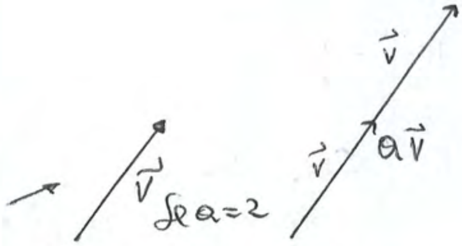
$W=(w_1,\dots,w_m)\in\mathbb{R}^m$

Il prodotto scalare tra i due vettori è:

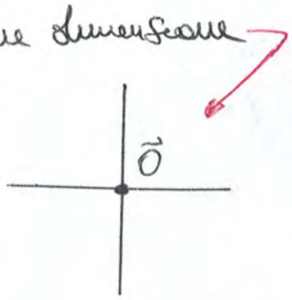
$$V\cdot W = V_1W_1+\dots+V_mW_m=\sum_{i=1}^{m} V_iW_i$$

$V\cdot W=0 \iff V$ e W sono ortogonali ovvero $\perp$

$a\cdot V = a(v_1,\dots,v_m)=(av_1,\dots,av_m)$ con $a\in\mathbb{R}$



Il vettore $\vec{O}=(0,0,\dots,0)$ è uguale all'origine in qualunque dimensione



Proprietà:

Il prodotto scalare è simmetrico perché

i) $V\cdot W = W\cdot V$ → simmetrico

$V+W=W+V$ → simmetrico

$V-W\neq W-V$ → non simmetrico

ii) $(au+bv)\cdot w = au\cdot w + bv\cdot w$

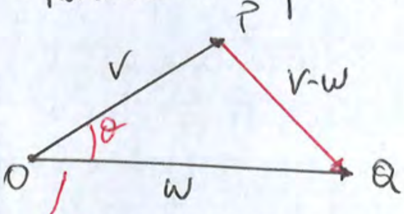
"Precisazione" sul prodotto scalare: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ ↓ vettore, $\mathbb{R}^n$ ↓ vettore, $\mathbb{R}^n$ ↓ numero reale

$\|v\|\geq 0$ ma $\|v\|=0 \iff V=0$

- Ritorniamo al problema dell'angolo compreso tra due vettori

$$\|\vec v-\vec w\|^2=\underbrace{\|\vec v\|^2-2\,\overline{v\cdot w}+\|w\|^2}_{\substack{\shortparallel\\ (\vec v-\vec w)\cdot(\vec v-\vec w)}}$$



$|PQ|^2=|OP|^2+|OQ|^2-2\,|OP||OQ|\cdot\cos(\theta)$ → generalizzazione del teorema di Pitagora

$V\cdot W=\|V\|\cdot\|W\|\cdot\cos\theta$

$\cos\theta=\dfrac{V\cdot W}{\|V\|\|W\|}$ ⟹ Questa formula serve a trovare il valore dell'angolo compreso tra i due vettori, ovviamente usando la funzione inversa del coseno ovvero la funzione dell'arcocoseno

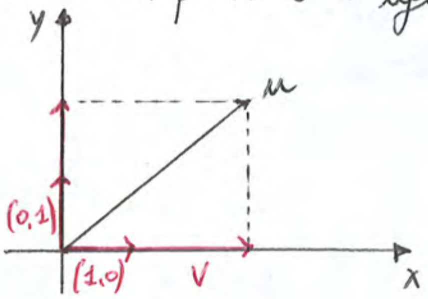
I vettori al denominatore devono essere non nulli se no avremmo 0 al denominatore

$V\cdot W\leq\|V\|\cdot\|W\|$

Sistema di riferimento:

Lezione 2
01/03/2016

- In $\mathbb{R}^2$ qualsiasi vettore è sempre la somma di un multiplo di 2 vettori: se consideriamo il vettore u, questo sarà uguale a $u = av + bw$ con a e b due versori. ovvero $a = (1,0)$ e $b = (0,1)$. Questo vale in generale!



- Un vettore in $\mathbb{R}^2$ è $(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$: i vettori $(1,0)$ e $(0,1)$ generano tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ e quindi sono una base e tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ sono visti come loro somma.

- In $\mathbb{R}^3$ possiamo considerare come base i seguenti vettori:

$$\underbrace{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)}_{\text{base canonica di } \mathbb{R}^3} \longrightarrow \text{vettori dello stesso tipo si creano per tutte le dimensioni}$$

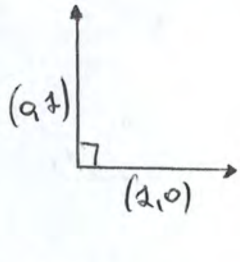
(in $\mathbb{R}^2$ sono $(1,0)$ e $(0,1)$ a formare la base canonica)

Questa base viene chiamata **Ortonormale** perché questa da vettori di norma 1

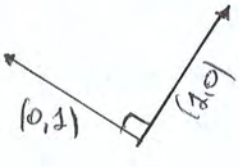
I vettori sono ortogonali ed è la base più semplice di $\mathbb{R}^3$

Questi vettori si possono costruire canonicamente (senza altre ipotesi) da $\mathbb{R}^3$ e dalla loro struttura Euclidea

Domanda: quante basi ortonormali si possono avere in $\mathbb{R}^2$?
- 1
- nessuna → non può essere perché già esiste $(0,1),(1,0)$
- (∞) → risposta ESATTA perché:



Se consideriamo questi due vettori normalizzati, li possiamo ruotare rigidamente e ottenere ancora una base ortonormale →



- Stessa cosa in $\mathbb{R}^3$:

Fissiamo l'origine e facciamo ruotare rigidamente i tre versori attorno ad essa e così abbiamo sempre basi ortonormali: bisogna solo scegliere quella che ci interessa di più, quella più utile.

Lezione 2
01/03/2016

Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ (non canonica)
allora:

$V_1 \cdot V_2 = 0$ $\quad \|v_1\| = 1$
$V_1 \cdot V_3 = 0$ $\quad \|v_2\| = 1$ $\quad V_i \cdot V_j = 0 \quad \forall i \neq j$
$V_2 \cdot V_3 = 0$ $\quad \|v_3\| = 1$ $\quad \|V_i\| = 1$

Possiamo riscrivere quanto detto con la "δ" di Kronecker avremo:

$$\boxed{V_i \cdot V_j = \delta_{ij}} \qquad \delta_{ij} \begin{array}{l} \nearrow 1 \quad i = j \\ \searrow 0 \quad i \neq j \end{array}$$

$$\forall i, j = 1, \dots, n$$

Inoltre:
$V \in \mathbb{R}^3$ può essere espresso univocamente come la somma di multipli dei vettori v_1, v_2, v_3 come una tale combinazione

$$V = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

Base = insieme di vettori, dove il loro numero ≡ dimensione spazio (due vettori in $\mathbb{R}^2$, tre vettori in $\mathbb{R}^3$ ...), dove ogni vettore dello spazio può essere scritto come somma dei multipli dei vettori della base.

Se la base è ortonormale allora: $\boxed{\begin{array}{l} a_1 = V \cdot V_1 \\ a_2 = V \cdot V_2 \\ a_3 = V \cdot V_3 \end{array}}$ → componenti del vettore che è combinazione lineare di V_1, V_2, V_3.

Questo serve se in un esercizio abbiamo un vettore e una base ortonormale: le componenti di V rispetto alla base le calcoliamo con le equazioni scritte sopra

vuol dire che le componenti coincidono con le proiezioni.

- Consideriamo $\mathbb{R}^3$: una sua base è un sistema di 3 vettori dove ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ può essere espresso come combinazione lineare dei 3 vettori
- Se consideriamo 3 vettori che giacciono su uno stesso piano, qualsiasi vettore che non è sul piano non sarà somma dei multipli dei 3 vettori. Tre vettori per formare una base non devono essere proporzionali e non devono stare sullo stesso piano ma devono rappresentare i vettori di tutto lo SPAZIO.
- Se siamo in $\mathbb{R}^2$, due vettori non proporzionali sono una base e generano tutti i vettori del piano dove giacciono.

Lezione 2
01/03/2016

Due vettori ⊥ ad u possono essere:

$$u'^{\perp}=(0,1,3) \quad e \quad u''^{\perp}=(-3,1,0)$$

perché $u\cdot u'^{\perp}=u\cdot u''^{\perp}=0 \Rightarrow$ il vettore ⊥ a u sarà $a(0,1,3)+b(-3,1,0)$

$\Rightarrow u^{\perp}=(-3b,\ a+b,\ 3a)$ $a,b\in\mathbb{R}$

Quindi noi vogliamo scrivere $u=u^{\perp}+cv$ con $c\in\mathbb{R}$ ovvero:

$$(1,3,-1)=a(0,1,3)+b(-3,1,0)+c(1,-1,0)\Rightarrow$$

$\Rightarrow (1,3,-1)=(-3b+c,\ a+b-c,\ 3a)$ e facciamo il sistema

$$\begin{cases}-3b+c=1\\ a+b-c=3\\ 3a=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=1+3b\\ -\frac{1}{3}+b-c=3\\ a=-\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=1+3b\\ -\frac{1}{3}+b-1-3b=3\\ a=-\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=-\frac{11}{3}\\ b=-\frac{13}{6}\\ a=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

Quindi $a=-\frac{1}{3}$, $b=-\frac{13}{6}$, $c=-\frac{11}{3}$

N.B.: $u'^{\perp}$ e $u''^{\perp}$ non formano una base ortonormale.
↳ ne abbiamo scelti due perché in questo caso siamo in $\mathbb{R}^3$ e con i 3 vettori abbiamo trovato una base.

Esercizio: Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ di norma 5 perpendicolare a $2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$

Un vettore generico di $\mathbb{R}^3$ è $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}=(a,b,c)$ La base dell'esercizio è (i,j,k)

(a,b,c) è ⊥ a un vettore di componenti $(2,1,-3)$ quindi il prodotto scalare è uguale a 0 ovvero $\boxed{2a+b-3c=0}$ e $b=3c-2a$

Quindi vettore ⊥ a $(2,1,-3)$ è $(a,\ 3c-2a,\ c)$ perché abbiamo esplicitato b. Se il testo dell'esercizio ci dice che questo vettore deve avere norma 5 allora

$a^2+(3c-2a)^2+c^2=25$ → abbiamo elevato al quadrato per evitare di lavorare con le radici.

$a^2+9c^2+4a^2-12ac+c^2=25$

$5a^2+10c^2-12ac=25$

$\boxed{5a^2+10c^2-12ac-25=0}$ → Soluzione dell'esercizio e la risolviamo ponendo $a^2=x^2$ e ovviamente $a=x$.

Esercizio: Trovare l'angolo tra $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ e $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ e un vettore che sia ortogonale ad entrambi.

$\vec{u}=(1,1,0)$ $\quad\vec{v}=(2,1,1)$

Lezione 3
03/03/2016

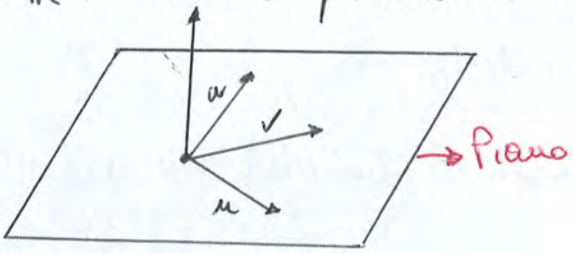
(1 foglio)

-In $\mathbb{R}^2$ due vettori sono proporzionali ($v=\lambda w$) oppure no. Un insieme di 2 vettori non proporzionali (in $\mathbb{R}^2$) formano una base per vettori di $\mathbb{R}^2$ ovvero che qualsiasi vettore v di $\mathbb{R}^2$, se $\{e_1, e_2\}$ è una base, può essere scritto come combinazione lineare della base ovvero

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 \quad \text{con } v \in \mathbb{R}^2.$$

Questo può essere generalizzato a qualunque dimensione.

-In $\mathbb{R}^3$ i vettori complanari (tutti su un piano) non formano una base; formano una base se non sono complanari.



Non c'è nessuna combinazione lineare di u, v e w che mi dà il vettore uscente.

Se in $\{e_1, e_2, e_3\} \in \mathbb{R}^3$ ci sono 2 vettori proporzionali, significa che non è una base.

- Base di $\mathbb{R}^2$ = 2 vettori linearmente indipendenti
- Base di $\mathbb{R}^3$ = 3 vettori linearmente indipendenti (non complanari)

Base = insieme di vettori linearmente indipendenti

-Questo vale solo per $\mathbb{R}^3$: prodotto vettoriale (modo particolare per calcolarlo).

Scegliamo la base canonica di $\mathbb{R}^3$ $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ e due vettori generici

$$u = (u_1, u_2, u_3) \quad e \quad v = (v_1, v_2, v_3)$$

prodotto vettoriale = prodotto tra vettori = vettore $\Rightarrow u \times v =$ vettore

$$u \times v = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \vec{i} \\ u_2 & v_2 & \vec{j} \\ u_3 & v_3 & \vec{k} \end{vmatrix} = \vec{i}\left(u_2 v_3 - u_3 v_2\right) + \vec{j}\left(u_1 v_3 - u_3 v_1\right) + \vec{k}\left(u_1 v_2 - u_2 v_1\right)$$

oppure

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Proprietà:

1) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ con $\vec{0} = (0,0,0)$

2) $u \times v = -v \times u$ → operazione anti simmetrica $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

1bis) $k\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

3) $(au + bv) \times w = au \times w + bv \times w$

Lezione 4 (2 fogli)
Esercitazione 1
04/03/2016

Vettori

Somma → componente per componente

Prodotto scalare → moltiplicare ogni componente per uno stesso numero $\in \mathbb{R}$

Calcolo del versore

$\vec{V} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\hat{V}$ ha stessa direzione e verso di $\vec{V}$ ma con modulo = 1

$$|\vec{V}| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\hat{V} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{(3,4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \Rightarrow \hat{V} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \qquad |V| = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \boxed{1}$$

Esercizio: $\vec{u} = -\hat{\imath} - \hat{\jmath} = (-1,-1)$ $\qquad \vec{v} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} = (2,1)$

Calcolare:

1) $\vec{w} = 3\vec{u} + \vec{v}$
2) vettore // $\vec{w}$ con norma = 5
3) versori associati

1) $\vec{w} = 3(-1,-1) + (2,1) = (-3,-3) + (2,1) = (-1,-2)$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad \|v\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \qquad \|w\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

2) Il generico vettore // a $\vec{w}$ deve rispettare le proporzioni (II° componente = doppio della I° componente) tra componenti, quindi:

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} h \\ 2h \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{t}\| = \sqrt{h^2+4h^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{5h^2} = 5 \Rightarrow \pm h\sqrt{5} = 5 \Rightarrow h = \pm\sqrt{5}$$

Avremo così due vettori $\vec{t}_1$ e $\vec{t}_2$ ovvero $\vec{t}_1 = (\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ e $\vec{t}_2 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$

3) versori associati di $\vec{t}_1$ e $\vec{t}_2$:

$$\hat{t}_1 = \frac{\vec{t}_1}{\|\vec{t}_1\|} = \frac{(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})}{\sqrt{25}} \Rightarrow \hat{t}_1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\hat{t}_2 = \frac{\vec{t}_2}{\|\vec{t}_2\|} = \frac{(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})}{\sqrt{25}} \Rightarrow \hat{t}_2 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

Lezione 4
Esercitazione 1
04/03/2016

Esercizio: $\vec{v}=(1,0,2)$ $\vec{w}=(-1,2,0)$ $\vec{u}=\vec{v}\times\vec{w}$

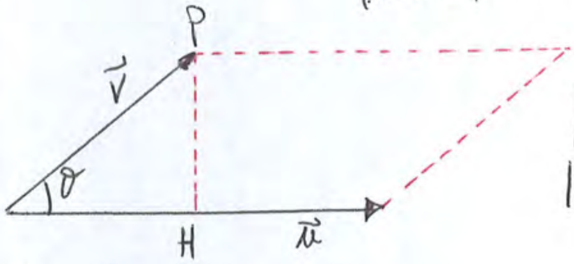
Per trovare $\vec{u}$, poiché siamo in $\mathbb{R}^3$, ci calcoliamo il determinante della seguente matrice:

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & \vec{i} \\ 0 & 2 & \vec{j} \\ 2 & 0 & \vec{k} \end{array}\right)} \\ v & w & B \end{array} \xrightarrow[\text{Utilizziamo Sarrus}]{} \left|\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right|\begin{array}{cc} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{array} = -2\vec{j}+2\vec{k}-4\vec{i} = -4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}=(-4,-2,2)$$

Possiamo scrivere i vettori in riga o in colonna e le cose non cambiano.

Prodotto vettoriale: lo possiamo calcolare anche con la seguente formula:

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\|u\|\,\|v\|\cdot \operatorname{sen}\vartheta$$



$|\vec{u}\times\vec{v}|$ = area del parallelogramma che ha per lati $|\vec{u}|$ e $|\vec{v}|$

Dimostrazione

$\vec{u}=(a,b,e)$ $\vec{v}=(x,y,z)$: impostiamo il prodotto vettoriale

$$\left|\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & e \\ x & y & z \end{array}\right|\begin{array}{cc} \vec{i} & \vec{j} \\ a & b \\ x & y \end{array} = bz\vec{i}+cx\vec{j}+ay\vec{k}-bx\vec{k}-ey\vec{i}-az\vec{j} = (bz-ey)\vec{i}+(ex-az)\vec{j}+(ay-bx)\vec{k}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\boxed{b^2z^2}+\boxed{c^2y^2}\underline{-2bzcy}\boxed{+e^2x^2}+\boxed{a^2z^2}\underline{-2exaz}+\boxed{a^2y^2}+\boxed{b^2x^2}\underline{-2aybx}$$

$$|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2=(a^2+b^2+e^2)(x^2+y^2+z^2)=\underline{a^2x^2}+\boxed{a^2y^2}+\boxed{a^2z^2}+\boxed{b^2x^2}+\underline{b^2y^2}+\boxed{b^2z^2}+\boxed{e^2x^2}+\boxed{c^2y^2}+\underline{c^2z^2}$$

Oltre ai doppi prodotti la parte diversa è: a^2x^2, b^2y^2, e^2y^2

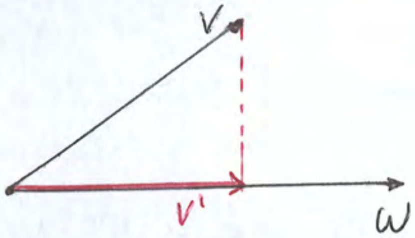
$$=|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-a^2x^2-b^2y^2-e^2y^2+2bzcy+2exez+2ay\,bx=$$

$$=|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\cos^2\vartheta$$

Ma $\vec{u}\cdot\vec{v}=ax+by+ez$

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=(ax+by+ez)^2=|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1-\cos^2\vartheta)=|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\operatorname{sen}\vartheta$$

Lezione 5 (2 fogli)
07/03/2016



$\vec{V}' = \vec{v} \cdot \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ Se vogliamo anche la direzione e il verso di $\vec{V}'$ moltiplichiamo

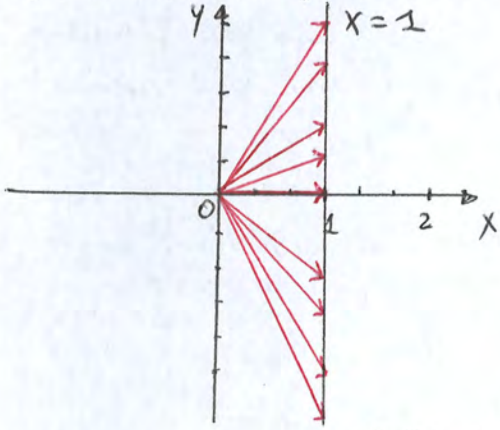
$$\underbrace{\left(\vec{V} \cdot \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}\right)}_{\vec{V}'} \cdot \underbrace{\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}}_{\text{versore di } w}$$

Esercizio:

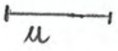
Esiste un'unica tripla (a, b, c) tale che $\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$ è ortogonale a $\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ e parallela a $c\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$?

- Iniziamo il ragionamento considerando $\mathbb{R}^2$:

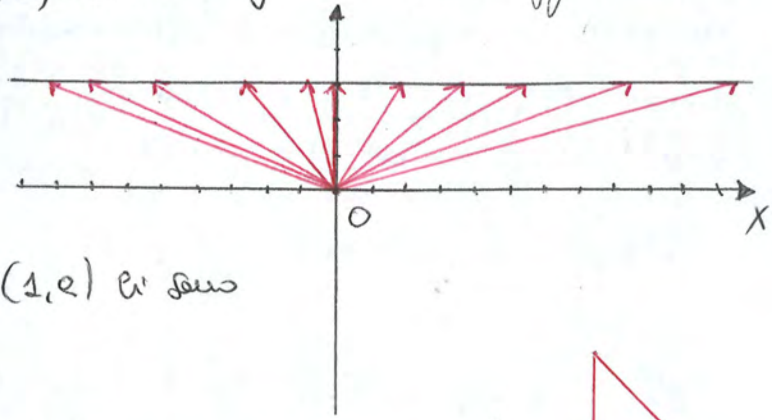
Il vettore $(1, a) \in \mathbb{R}^2$ lo disegniamo come in figura ($\forall a$)

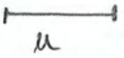


In realtà il vettore (1, a) non è 1 soltanto ma sono infiniti



Il vettore $(a, 1) \in \mathbb{R}^2$ lo disegniamo come in figura ($\forall a$)

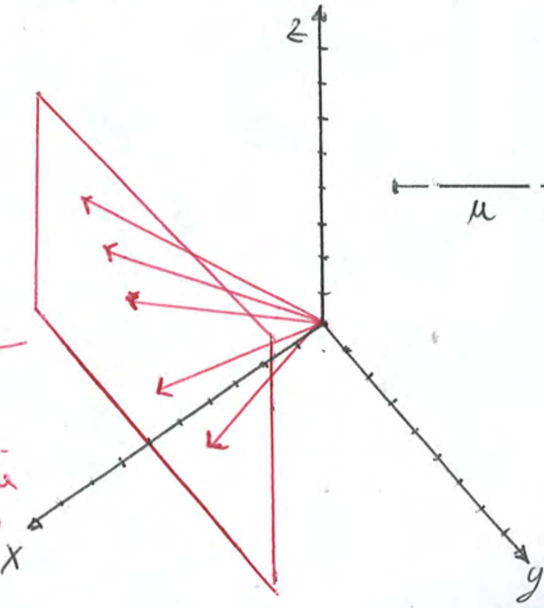




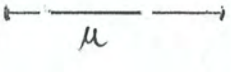
Anche qui per (1, a) ci sono infiniti vettori

Lo stesso ragionamento lo possiamo fare anche in $\mathbb{R}^3$

(a, b, c) lo disegniamo così (figura)



piano X = 1
(1, 0, 0)
Sono tutti quei vettori con coda nell'origine e punta sul piano



Tra i vettori disegnati, ne esiste uno che è contemporaneamente ⊥ a $\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ e // a $c\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$?

↓ Continua

Lezione 5
07/03/2016

O anche le possiamo indicare per colonne:

X colonne $\begin{pmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

La matrice $A + B$ è ancora una volta una matrice, ma due matrici possono essere

$\overset{A}{\downarrow} \; \overset{B}{\downarrow}$
$a_{ij} \; b_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$

sommate se hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne ovvero hanno la stessa dimensione.

- $K \cdot A$ = scalare per matrice e quindi avremo Ka_{ij} con $K \in \mathbb{R}$
- Matrice trasposta A^T = invertire righe con colonne e così cambiano le dimensioni ovvero: se $A \in K^{m,n}$ allora $A^T \in K^{n,m}$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}$$

- Matrice quadrata = $A \in K^{n,n}$
- Dimostriamo che $A + B = B + A$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \qquad B + A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

- Dimostriamo che $(A + B)^T = A^T + B^T$

$$(A + B)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^T + B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Esercizio:

$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow A \cdot B \in \mathbb{R}^{2,2}$

$A \in \mathbb{R}^{2,3}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{3,2}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} R_1 C_1 & R_1 C_2 \\ R_2 C_1 & R_2 C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6,0,4)\cdot(1,0,-2) & (6,0,4)(1,4,2) \\ (1,-1,1)(1,0,-2) & (1,-1,1)(1,4,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 14 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Esiste una matrice con le stesse proprietà dell'1 per i numeri?

Matrice identica/identità

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- la matrice è quadrata
- sulla diagonale principale ci sono soltanto 1.

Esercizio

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,2)(1,0) & (1,2)(0,1) \\ (3,0)(1,0) & (3,0)(0,1) \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow I \cdot A = A \cdot I = A$

2) Proiezione di $\vec{w}$ su $\vec{s}$

$\vec{P} = \left(-h\frac{2}{\sqrt{6}}, -h\frac{1}{\sqrt{6}}, h\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ $\quad \vec{w} = (0, 1, 2)$

$\vec{w} \cdot \vec{P} = -\frac{h}{\sqrt{6}} + \frac{2h}{\sqrt{6}} = \frac{h}{\sqrt{6}}$ => Abbiamo determinare il valore di h

$\vec{P} = |\vec{P}| \cdot \hat{s} = |\vec{P}| \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$ $\quad |\vec{P}| = \vec{w} \cdot \hat{s} = \frac{\overset{1}{\vec{w} \cdot \vec{s}}}{\underset{\sqrt{6}}{|\vec{s}|}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\vec{w} = \vec{P} + \vec{w}_p \longrightarrow \vec{w}_p = \vec{w} - \vec{P} = \left(\frac{2}{6}, \frac{7}{6}, \frac{11}{6}\right)$

① Calcolare vettore ⊥ a $\vec{u}$ e $\vec{v}$

② Calcolare versore

③ Calcolare fattore di scala → per trovare $\vec{P}$, proiezione di $\vec{w}$ sulla direzione perpendicolare → facendo $\frac{\vec{w} \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|} \cdot \hat{s}$

- $\vec{w}_p = \vec{w} - \vec{P}$ = proiezione sul piano

Esempio di esercizio d'esame:

1) Verificare complanarità → prodotto misto
2) Verificare che due vettori sono ortogonali → fare 3 prodotti scalari → quale = 0?
3) Area e perimetro individuati dai due vettori.
4) Verificare che il terzo vettore è la diagonale del rettangolo

$\vec{v} = (1, 1, 1) \quad \vec{w} = (2, -1, -1) \quad \vec{v} = (3, 0, 0)$

Prodotto tra matrici

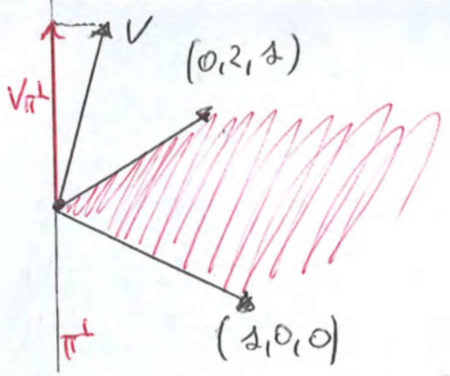
$A(n,m) \quad B(m,p) \quad A \cdot B = C(n,p) \Rightarrow B \cdot A \neq A \cdot B$

$A \cdot B =$ impossibile

Esercizio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$



I due vettori individuano il piano

Problema: Qual è la proiezione di V sul piano?

$$\pi^\perp = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \vec{\imath} \\ 0 & 2 & \vec{\jmath} \\ 0 & 1 & \vec{k} \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 2\vec{k} - \vec{\jmath} = -\vec{\jmath} + 2\vec{k} = (0,-1,2) \rightarrow$$ vettore ⊥ a (0,2,1) e a (1,0,0)

↓ vettore che da la direzione ⊥ al piano

$$V_{\pi^\perp} = (1,2,0) \cdot \frac{(0,-1,2)}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(0,-1,2)}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(0,-1,2)}{\sqrt{5}} = \frac{(0,2,-4)}{5} = \left(0, \frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

$$V_\pi = V - V_{\pi^\perp} = (1,2,0) - \left(0, \frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \left(1, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Se abbiamo v, w indipendenti (non proporzionali), trovare la formula generale della proiezione di u sul piano individuato dai vettori v, w.
Troviamo la proiezione di u su v×w ovvero $\boxed{\left(u \cdot \frac{v \times w}{\|v \times w\|}\right) \frac{v \times w}{\|v \times w\|}}$ * e se facciamo precedere a * "u −" allora
Troviamo la soluzione al problema ovvero:

$$u - \left(u \cdot \frac{v \times w}{\|v \times w\|}\right) \cdot \frac{v \times w}{\|v \times w\|}$$

Matrici prodotte

$$A \cdot B = B \cdot A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizi:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Domanda: $\exists B^{2,2}$ tale che $A \cdot B = I_2$? $I_2 =$ matrice identica 2×2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Se $\det A = 0$ allora e' più colonne e righe linearmente dipendenti $\Rightarrow$
$\Rightarrow \det(A) = \det(A^T)$ non c'è differenza tra righe e colonne.

- Inverso d'una matrice

$A \cdot A^{-1} = I$ si può trovare solo se $\det A \neq 0$

Esercizio:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & \boxed{b_{32}} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Se volessi trovare il posto $b_{3,2} = \boxed{-}\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{\det A}$, bisogna puntare al simmetrico di $b_{2,3}$ su A

Segno negativo perché il posto è dispari $(3+2=5)$

(che sarebbe a_{23}) e dopodiché calcolare il det A con la riga e la colonna cancellate.

$$b_{2,3} = -\frac{\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}}{\det A}$$

Questo determinante si chiama MINORE

Per trovare l'inversa basta fare questo procedimento per tutti gli altri elementi.

Esercizio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Consideriamo questa} \qquad \det A = (-1)^{2+1}\, 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

oppure

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 2$$

Calcoliamo l'inversa di A:

$$b_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{2} = 0 \qquad b_{12} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \qquad b_{13} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{2} = 0$$

b_{11} ↓ il suo simmetrico è a_{11}

b_{12} ↓ SIMM a_{21}

b_{13} ↓ SIMM a_{31}

$$b_{21} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{6}{3} = -3 \qquad b_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3}{2} \qquad b_{23} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{2} = 1$$

b_{21} ↓ SIMM a_{12}

b_{22} ↓ SIMM a_{22}

b_{23} ↓ SIMM a_{32}

$$b_{31} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad b_{32} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{1}{2} \qquad b_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{2} = 0$$

b_{31} ↓ SIMM a_{13}

b_{32} ↓ SIMM a_{23}

b_{33} ↓ SIMM a_{33}

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Verifica: $A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lezione 10 (2 fogli)
14/03/2016

- Inversa di una matrice :

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & -\\ - & +\end{pmatrix}$$

$\det A = ad - cb \neq 0 \iff$ esiste ed è unica $A^{-1} \in R^{2,2}$

$$A^{-1}\cdot A = I_2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = A\cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}$$ → L'abbiamo costruita partendo da A e mettendo uno alla volta il valore rimanente togliendo prima a, poi b ecc...

${}^t(A^{-1}) = \begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$ e così abbiamo $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\dfrac{\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}}{ad-bc}\cdot\dfrac{\begin{pmatrix}ad-bc&0\\0&ad-bc\end{pmatrix}}{ad-bc} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

- Calcolare l'inversa di una matrice 3x3

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \in K^{3,3}$$

Per accertarsi che esiste l'inversa bisogna calcolare il determinante e deve essere $\det A \neq 0$.

Se $\det A = 0$ allora la matrice non è invertibile ovvero non esiste l'inversa.

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

considerando la I^a riga

Quello fatto per la I^a riga si può fare anche considerando la I^a colonna perché $\det A = \det {}^tA$

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

considerando la I^a colonna

Il gioco può essere fatto con qualsiasi riga o con qualsiasi colonna.

- Proprietà determinante :

1) $\det(cA) = c^3 \det A \quad A \in \mathbb{R}^{3,3}$

In generale $\boxed{\det(cA) = c^n \det A}$ $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

2) $\boxed{\det A = \det {}^tA}$

↓ Continua

Lezione 10
14/03/2016

Proprietà matrici:

- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- $(A^{-1})^t \cdot A^t = (A \cdot A^{-1})^t = I^t = I$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(B^{-1}A^{-1})(A \cdot B) = B^{-1}\underbrace{(A^{-1}A)}_{I}B = B^{-1}\underbrace{I\ B}_{B} = B^{-1} \cdot B = I$
- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ $\quad A \in \mathbb{R}^{k,k}$ $\quad A^n$ significa $A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ (n volte) $\in \mathbb{R}^{k,k}$.

Esercizio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 35 \end{pmatrix}$$

Domande: 1) Ammette inversa?
2) Se sì, calcolare l'inversa.

1) Per verificare che la matrice ammetta inversa bisogna verificare che $\det A \neq 0$

$$1\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 21 & 35 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 13 & 35 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 13 & 21 \end{vmatrix} = 175 - 168 - 105 + 104 + 126 - 130 = 2 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ammette inversa; i vettori riga e i vettori colonna sono linearmente indipendenti

2) Calcolare l'inversa: mettere nelle posizioni di ogni elemento il determinante della matrice rimanente

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 21 & 35 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 13 & 35 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 13 & 21 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 21 & 35 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 35 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 13 & 21 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ 7 & 9 & -8 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

A questo punto per trovare l'inversa si fa la trasposta della matrice appena trovata

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & -2 \\ -1 & 9 & -2 \\ -2 & -8 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Bisogna dividere ogni elemento per il $\det A \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 7 & -2 \\ -1 & 9 & -2 \\ -2 & -8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio: (Domanda classica tema d'esame)

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&k&1\\0&1&k\end{pmatrix}$$

Domanda: Per quali valori di K la matrice A è invertibile?

Calcoliamo il det:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&2&1&0\\2&k&1&2&k\\0&1&k&0&1\end{array}\right)=k^2+4-1=k^2+3\neq 0 \Rightarrow \forall K$$

Teorema:

$\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ $u_i \in \mathbb{R}^n$ Questo sistema di vettori è indipendente se:

$$\boxed{a_1u_1+a_2u_2+\dots+a_k u_k=0} \rightarrow \text{Sistema lineare}$$

Prodotto sarebbe una qualsiasi combinazione lineare di vettori uguagliata a 0. Le incognite sono $a_1, a_2, \dots, a_k$ e il sistema è possibile se e solo se $a_1=0, a_2=0, \dots, a_k=0$. Se è vero allora il sistema è detto linearmente indipendente

Esercizio:

$(1,2,3,4)$ $(0,0,1,-1)$ $(2,0,1,1) \in \mathbb{R}^4$ Provare che sono linearmente indipendenti!

N.B.: 1 vettore non nullo è l.i.
2 vettori sono l.i. se non sono proporzionali
3 vettori sono l.i. se sono complanari

$$a(1,2,3,4)+b(0,0,1,-1)+c(2,0,1,1)=(0,0,0,0)$$

$$(a+2c,\ 2a,\ 3a+b+c,\ 4a-b+c)=(0,0,0,0)$$

$$\begin{cases}a+2c=0\\2a=0\\3a+b+c=0\\4a-b+c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c=0\\a=0\\b=0\\0=0\end{cases} \Rightarrow$$ I 3 vettori sono linearmente indipendenti

Esercizio:

I° $\begin{cases}4x+3y=1\\4x+3y=2\end{cases} \Rightarrow$ Non ha soluzioni a causa del termine noto diverso

II° $\begin{cases}3x+y=0\\2x+y=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=-3x\\2x-3x=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=3\\x=-1\end{cases}$

- Costruiamo le matrici dei coefficienti dei due sistemi:

I° $\left(\begin{array}{cc|c}4&3&1\\4&3&2\end{array}\right) \nearrow$ In $\mathbb{R}^3$ i 2 vettori colonna sono l.i. perché non sono proporzionali

det di questa matrice = 0 ⇒ i vettori sono l.d.

II° $\left(\begin{array}{cc|c}3&1&0\\2&1&1\end{array}\right) \Rightarrow$ Ha soluzioni

In $\mathbb{R}^3$ i due vettori sono l.i. perché non sono proporzionali

det di questa matrice $\neq 0 \Rightarrow$ vettori l.i.

Gli esercizi verteranno su:

Lezione 13 (1 foglio)
17/03/2016

1) PRODOTTO SCALARE → è utile per le proiezioni su sottospazi: vettori su piano, vettori su vettori.

2) PRODOTTO VETTORIALE → area parallelogramma, costruire vettore ⊥ a due vettori dati

3) PRODOTTO MISTO → volume del parallelepipedo

4) DETERMINANTE → matrici quadrate; det=0 vettori l.d, det≠0 vettori l.i.

5) DEFINIZIONE DI LINEARE DIPENDENZA (O INDIPENDENZA).

2 vettori sono linearmente indipendenti o linearmente dipendenti? Li scriviamo in una matrice e ne calcoliamo il determinante.

Se abbiamo un sistema di vettori:

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$; possiamo estrarre un sottosistema di questi vettori tale che questo sottosistema è formato da vettori linearmente indipendenti?

In $\mathbb{R}^3$ abbiamo:

$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ → formano la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sono linearmente indipendenti.

Esempio:

$\{(1,2,1),(2,4,2),(0,0,2)\}$ → sicuramente non sono linearmente indipendenti perchè il II° vettore è uguale a 2 volte il I° vettore ⇒ un vettore dipende dall'altro.

↳ Da qui possiamo estrarre una coppia di vettori linearmente indipendenti.

Se consideriamo il seguente sistema

$\{\underset{I°}{(1,2,3)},\underset{II°}{(2,4,6)},\underset{III°}{(3,6,9)}\}$ da qui possiamo estrarre anche 1 solo vettore perchè: II° = 2I°
III° = 3I°

Proprietà:

1) $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$ ⇒ Se all'interno c'è il vettore nullo allora non è un sistema di vettori linearmente indipendenti.

- Se esiste un vettore (del sistema) che dipende dai rimanenti allora il sistema è fatto di vettori linearmente dipendenti e viceversa.

Controesempio:

Consideriamo il seguente sistema

$\{(1,2,3),(2,4,6),(1,0,1)\}$ → sistema di vettori linearmente dipendenti II° = 2I°

↓ Continua

①

Lezione 14 (1 foglio)
Esercitazione 5
18/03/2016

Esercizio

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{V}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \quad \vec{\mu}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \vec{w}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$

$\vec{w} = \alpha\vec{v} + \mu\vec{\mu}$

I tre vettori sono linearmente indipendenti perché:

$$(-1,3,0) = \alpha(1,2,0) + \mu(1,1,1)$$

$$\begin{cases} -1 = \alpha + \mu \\ 3 = 2\alpha + \mu \\ 0 = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = 3/2 \rightarrow \text{contraddizione} \\ \alpha = 3/2 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Unica soluzione è quella banale.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} = -2 - 3 = -5 \Rightarrow$$ è invertibile.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = ? \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$A^{-1} \Rightarrow$

$$b_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{3}{5} \qquad b_{1,2} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{1}{5} \qquad b_{1,3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{4}{5}$$

$$b_{2,1} = \frac{-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{-5} = 0 \qquad b_{2,2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{-5} = 0 \qquad b_{2,3} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-5} = 1$$

$$b_{3,1} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{2}{5} \qquad b_{3,2} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{1}{5} \qquad b_{3,3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{1}{5}$$

$$A \cdot A^{-1} = I? \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2}{5} & \frac{1}{5} - \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} + 1 - \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} - \frac{6}{5} & \frac{2}{5} + \frac{3}{5} & -\frac{8}{5} + 1 + \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^{-1}) = -\begin{vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = -\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}\right) = -\left(\frac{3}{25} + \frac{2}{25}\right) = -\frac{5}{25} = -\frac{1}{5}$$

Lezione 15
Esercitazione 6
21/03/2016

Troviamo l'inversa di BA: poiché è una matrice 2×2 usiamo la formula diretta ovvero

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$(BA)^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sono linearmente indipendenti?

Ricordiamo che 3 vettori sono linearmente indipendenti se $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \lambda, \mu, \gamma = 0$.

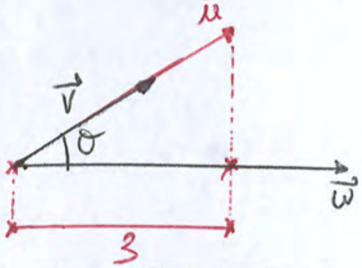
Facciamo il sistema:

$$\begin{cases} \lambda + 3\gamma = 0 \\ 2\lambda + \mu + 2\gamma = 0 \\ -\mu + \gamma = 0 \\ 3\lambda + 2\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu = 0 \\ 2\lambda + \mu + 2\mu = 0 \\ \gamma = \mu \\ 3\lambda + 2\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3\mu \\ -6\mu + \mu + 3\mu = 0 \\ \gamma = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow \lambda = 0 \\ \Rightarrow \mu = 0 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

I 3 vettori sono linearmente indipendenti

Esercizio:

Dati $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ trovare $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ tale che la sua proiezione su $\vec{w} = 3$



$$\vec{u} = \lambda\vec{v} = \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

Condizione imposta prima

$$|\vec{w}| = \sqrt{1+25+4} = \sqrt{30}$$

$$\vec{u}_p = \vec{u}\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{\cancel{2\lambda} + 5\lambda \cancel{-2\lambda}}{\sqrt{30}} = \frac{5\lambda}{\sqrt{30}} \boxed{= 3} \Rightarrow \lambda = 3\cdot\frac{\sqrt{30}}{5}$$ facendo

così abbiamo in realtà trovato due vettori $\lambda_1 = \frac{3\sqrt{30}}{5}$ e $\lambda_2 = -\frac{3\sqrt{30}}{5}$; per entrambi così possiamo lavorare col prodotto $\frac{25\lambda^2}{30} = 9$. (ovvero per evitare di dimenticare λ_2)

$\Rightarrow$ Abbiamo due $\vec{u}$ ovvero $\vec{u}_1 = \left(\frac{6\sqrt{30}}{5}, \frac{3\sqrt{30}}{5}, -\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)$, $\vec{u}_2 = \left(\frac{-6\sqrt{30}}{5}, \frac{-3\sqrt{30}}{5}, \frac{3\sqrt{30}}{5}\right)$

Verifichiamo se è un sottospazio:

- Il vettore nullo ∈ al sottospazio : $\vec{0}=(0,0,0+2\cdot0=0,0)$ ✓
- $\vec{v}+\vec{w}\in V$?

$\vec{v}=(x,y,x+2y,t)$, $\vec{w}=(a,b,a+2b,e) \Rightarrow \vec{v}+\vec{w}=(x+a,y+b,\underbrace{x+2y+a+2b}_{\text{dobbiamo verificare questo}},t+e)$

$x+2y+a+2b=(x+a)+2(y+b)$ ✓

- $\lambda\vec{v}\in V$?

$\lambda\vec{v}=(\lambda x,\lambda y,\underline{\lambda(x+2y)},\lambda t)$

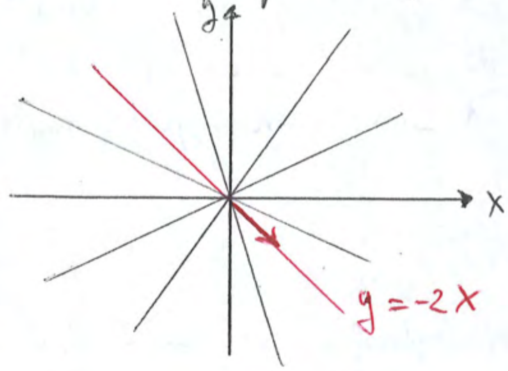
verificando → $x+2y=\lambda x+2\lambda y=\lambda(x+2y)$ ✓

- Consideriamo $-\vec{w}$: $-\vec{w}\in V$?

$\vec{w}=(a,b,a+2b,e)$, $-\vec{w}=(-a,-b,\underline{-(a+2b)},-e)$

verificando → $x+2y=-a+2(-b)=-a-2b=$
$=-(a+2b)$ ✓

Esercizio: Le rette passanti per l'origine sono sottospazi vettoriali.



$\vec{v}=(x,-2x)$

ok verificato!

Esercizio: In $\mathbb{R}^3$ scegliamo vettori così fatti $\vec{v}=(x,y,z)$ con $x=y+z-1$

Prendiamone uno a caso: $\vec{w}=(4,2,3)$

I corrispondenti vettori generici sono $\vec{v}=(y+z-1,\ y,\ z)$ e
$\vec{w}=(b+e-1,\ b,\ e)$

- $\vec{v}+\vec{w}\in V$?

$\vec{v}+\vec{w}=(y+z+b+e\boxed{-2},\ y+b,\ z+e)$

↓ legge violata! Inoltre non esiste il vettore nullo.

Se $\lambda = 5 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow \vec{t} = (6, 2, 10)$ $\quad \vec{t} \in V$

$\vec{t} \perp \vec{w}$

$$|\vec{t}| = \sqrt{36+4+100} = \sqrt{140}$$

$$\hat{t} = \left(\frac{6}{\sqrt{140}} , \frac{2}{\sqrt{140}} , \frac{10}{\sqrt{140}} \right)$$

Esercizio: Consideriamo matrici 2x2

$$M_{2,2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{con } a+b+c=0$$
$$c = -a-b$$

Dimostrare che è sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$M_{2,2} = \begin{pmatrix} a & b \\ (-a-b) & d \end{pmatrix} \rightarrow \text{descrittore del nostro sottospazio}$$

3 componenti liberi

- $\vec{0} \in M_{2,2}$ ✓
- Somma di due matrici è:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ (-a-b) & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ (-x-y) & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ -a-x-b-y & d+z \end{pmatrix} \quad ✓$$

- Moltiplicazione per uno scalare:

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ (-a-b) & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda(-a-b) & \lambda d \end{pmatrix} \quad ✓$$

Esercizio: $v \in \mathbb{R}^5 \;/\; \vec{v} = (x,\ y,\ x+y,\ 3x,\ t)$

Creiamo a piacere 3 vettori poiché abbiamo soltanto 3 tipi di variabili

$\vec{b_1} = (1, 0, 1, 3, 0) \quad \vec{b_2} = (0, 1, 1, 0, 0) \quad \vec{b_3} = (0, 0, 0, 0, 1)$

Questi 3 vettori sono linearmente indipendenti solo se

$$\alpha \vec{b_1} + \beta \vec{b_2} + \gamma \vec{b_3} = \vec{0}$$

ovvero con $\alpha, \beta, \gamma = 0$.

$|\vec{b_1}| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$

Facciamo il sistema:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Sistema già risolto.

$$\hat{b_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{11}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{11}},\ \frac{3}{\sqrt{11}},\ 0\right)$$

$$\hat{b_3} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$$

Troviamo

$\vec{V} = \lambda \vec{b_1} + \mu \vec{b_2}$ tale che $\vec{v} \perp \vec{b_1}$ cioè $\vec{V} \cdot \vec{b_1} = 0$

$\vec{V} = (\lambda,\ \mu,\ \lambda+\mu,\ 3\lambda,\ 0)$

$\vec{V} \cdot \vec{b_1} = 0 \Rightarrow \lambda + \lambda + \mu + 9\lambda = 0 \Rightarrow 11\lambda = -\mu$

$\Rightarrow \mu = 11 \quad \lambda = -1 \Rightarrow \vec{V} = (-1,\ 11,\ 10,\ -3,\ 0)$

$\vec{V} \cdot \vec{b_1} = 0 \Rightarrow$ Non consideriamo $\vec{b_2}$ ma $\vec{V}$ come vettore per la base $\perp$ a $\vec{b_1}$

Esercizio: Dati i 3 vettori $\in \mathbb{R}^3$

$\vec{V} = (1,\ t,\ t^2),\ \vec{w} = (1,\ (t-1),\ (t-1)^2),\ \vec{u} = (1,\ (t+1),\ (t+1)^2)$

$\exists\, t \in \mathbb{R} \;/\; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono linearmente dipendenti?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & t-1 & t+1 \\ t^2 & (t-1)^2 & (t+1)^2 \end{vmatrix} = \left[(t-1)(t+1)^2 - (t+1)(t-1)^2\right] - \left[t(t+1)^2 - t^2(t+1)\right] +$$

$$+\left[t(t-1)^2 - t^2(t-1)\right] =$$

$$= \left[(t-1)(t^2+1+2t) - (t+1)(t^2+1-2t)\right] - \left[t(t^2+1+2t) - t^3 - t^2\right] + \left[t(t^2+1-2t) - t^3 + t^2\right] =$$

$$= \left[\cancel{t^3} + t + 2t^2 \cancel{-t^2} - 1 \cancel{-2t} \cancel{-t^3} \cancel{-t} + 2t^2 \cancel{-t^2} - 1 \cancel{+2t}\right] \cancel{-t^3} \cancel{-t} - 2t^2 \cancel{+t^3} + t^2 \cancel{+t^3} \cancel{+t} - 2t^2 \cancel{-t^3} + t^2 =$$

$$= \cancel{2t^2} - 2 \cancel{-2t^2} \cancel{+t^2} \cancel{+t^2} \cancel{-2t^2} = -2$$

Per qualunque t sono l.i.

②

Esercizio: Data la seguente matrice verificare che è invertibile e trovare A^{-1}.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = 3+1 = 4 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, A^{-1}$$

Calcoliamo la matrice inversa

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Dividiamo gli elementi per il det A $\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Facciamo la trasposta e abbiamo trovato A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio: Date le seguenti matrici, fare il prodotto.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$$

- Calcolare $A \cdot B$ e la sua inversa se esiste $\quad A \cdot B \in \mathbb{R}^{3,3}$
- Calcolare $B \cdot A$ e la sua inversa se esiste $\quad B \cdot A \in \mathbb{R}^{2,2}$

$$A \cdot B = \left(\begin{array}{ccc|cc} 5 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ -7 & 2 & -2 & -7 & 2 \end{array}\right) \qquad \det AB = 20+0+4-28+4 = 28-28 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Non invertibile, non esiste $(AB)^{-1}$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \det BA = -12+8 = -4 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ È invertibile, esiste $(BA)^{-1}$

- $\vec{V_4}$ lo scartiamo perché $\vec{v_4} = 3\vec{v_1} - \vec{v_2}$
- $\vec{V_5}$ lo prendiamo perché la III^a componente di $\vec{V_1}$ e $\vec{V_2}$ è zero e invece in $\vec{V_5}$ abbiamo il numero 1 che è portatore di informazione $\Rightarrow$ $\vec{V_5}$ lo prendiamo $\Rightarrow$ $\vec{V_1}, \vec{V_2}$ e $\vec{V_5}$ l.i.
- $\vec{V_6} = \alpha \vec{V_1} + \beta \vec{V_2} + \gamma \vec{V_5}$?

$$\begin{cases} 2 = \alpha + \beta + \gamma \\ 0 = \alpha + \beta \\ 2 = \gamma \\ 0 = \alpha + \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = \cancel{-2} + \cancel{2} + 2 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 2 \\ \alpha = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\vec{V_6}$ non lo prendiamo perché è combinazione lineare di $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_5}$

- $\vec{V_7} = \alpha \vec{V_1} + \beta \vec{V_2} + \gamma \vec{V_5}$?

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta + \gamma \\ 7 = \alpha + \beta \\ 3 = \gamma \\ 2 = \alpha + \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = -1 + 8 + 3 \\ \beta = 8 \\ \gamma = 3 \\ \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 \neq 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

allora necessariamente

$\Rightarrow$ $\vec{V_7}$ lo prendiamo perché è linearmente indipendente

In conclusione possiamo dire che dim $V = 4$

Esempio:

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1&2\\1&3&1&-3\\1&8&1&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&-2&1&2\\0&5&0&-5\\1&8&1&8\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1}\begin{pmatrix}1&-2&1&2\\0&5&0&-5\\0&10&0&-10\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-2R_2}\begin{pmatrix}1&-2&1&2\\0&5&0&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad r(A)=2 \Rightarrow \dim(V)=2$$

Esercizio:

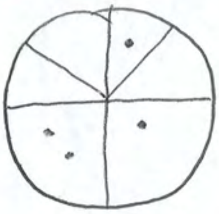
$$A=\begin{pmatrix}2&-2&1&4\\1&-1&-4&2\\-1&1&3&-2\\3&-3&1&6\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_1}\begin{pmatrix}1&-1&-4&2\\2&-2&1&4\\-1&1&3&-2\\3&-3&1&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3+R_1\\R_4-3R_1}]{R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&-1&-4&2\\0&0&9&0\\0&0&-1&0\\0&0&13&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&-1&-4&2\\0&0&-1&0\\0&0&9&0\\0&0&13&0\end{pmatrix}$$

la III^a e la IV^a riga sono proporzionali alla II^a $\Rightarrow$ ci sono soltanto due vettori l. i. $\Rightarrow$

$\Rightarrow r(A)=2$

Relazione di equivalenza:



$A \sim B \Leftrightarrow B$ si ottiene da A tramite le operazioni elementari (ERO)

1) $A\sim A$

2) $A\sim B \Leftrightarrow B\sim A$

3) $A\sim B$ e $B\sim C \Rightarrow A\sim C$

Pivot = è il primo elemento non zero di una riga partendo da sinistra

Proposizione:

- Possiamo applicare ERO in maniera tale da avere al massimo un pivot per ogni colonna
- $\searrow$ (dall'alto verso il basso) → ovvero si procede dall'alto verso il basso.
- Tutte le righe nulle (se esistono) vanno messe alla fine.

Se si verificano questi 3 punti allora la matrice si dice "ridotta"

Continua

Sistema lineare in n incognite x

Lezione 21 (2 fogli)
07/04/2016

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + \dots + a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1} + \dots + a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Esercizio:

$$A \to \mathbb{R}^{m,n} \qquad (A/b) \to \mathbb{R}^{m,n+1}$$

La soluzione è un vettore $\overbrace{(x_1, \dots, x_n)}^{\vec{x}} / A\vec{x} = b$

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad (A/b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} x = 7-2y \\ 3(7-2y)+4y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7-2y \\ 21-6y+4y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7-2y \\ -2y = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = \frac{13}{2} \end{cases}$$

è un vettore $\left(-6, \frac{13}{2}\right)$

Proposizione → Regola di Kramer

Se $m=n$ e la matrice A è invertibile allora $\vec{A}\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = \vec{A} \cdot \vec{b}$

$$A^{-1} A \vec{x} = \vec{A} \vec{b}$$
$$I \, \vec{b} \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 13/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} ax + by = p \\ ex + dy = q \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ e & d \end{pmatrix}$$

Supponiamo $\det(A) \neq 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\det A} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\det A}$$

Lezione 21
07/04/2016

Allora considerando $x = -2y$ le soluzioni è:

$(-2t, t) \Rightarrow \underbrace{t(-2,1)} \rightarrow$ vettore soluzione

↳ infinite soluzioni dipendenti da un solo parametro.

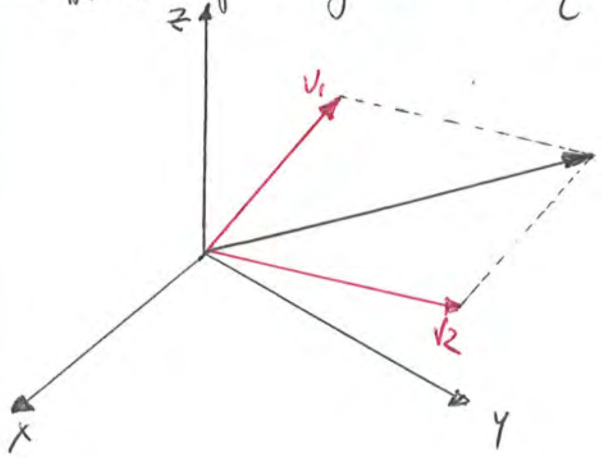
Esercizio:

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

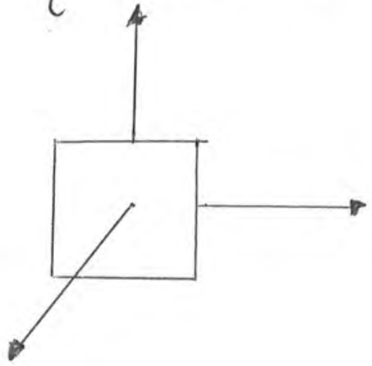
$$\underbrace{r(A) = 1 \qquad r(A|b) = 2}$$

Il sistema è incompatibile

In $\mathbb{R}^3$: sottospazio generato da $\{v_1, v_2\}$ in $\mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti.



$$V=\{a v_1 + b v_2 / a,b\in\mathbb{R}\}$$



Sottospazio generato da $(1,0,1)$ e $(0,-1,3)$

$$V=\{a(1,0,1)+b(0,-1,3)\ /\ a,b\in\mathbb{R}\}=\{(a,-b,a+3b),\ a,b\in\mathbb{R}\}$$

Succede, però, che non sempre i vettori sono linearmente indipendenti:

$\vec{v}=(1,2,-1)$, $\vec{w}=(2,4,-2)$

$$V=\langle\vec{v},\vec{w}\rangle=\{a(1,2,-1)+b(2,4,-2),\ a,b\in\mathbb{R}\}=$$

$$=\{\underbrace{(a+2b,2a+4b,-a-2b)},\ a,b\in\mathbb{R}\}=$$

↓ lo possiamo scrivere così

$$=\{\underbrace{(a+2b)}_{e}(1,2,-1),\ a,b\in\mathbb{R}\}=\{e(1,2,-1),\ a,b\in\mathbb{R}\}.$$

Esercizio:

Dimostrare che $\mathcal{B}=\{(1,0,1),(1,1,0),(1,2,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

$$\det\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}1&0\\1&1\\1&2\end{matrix}=\cancel{1}+0+2\cancel{-1}-0-0=2\neq0$$

I vettori sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio:

Dimostrare che $\mathcal{B}=\{(1,2),(0,1),(-1,1)\}$ non è una base di $\mathbb{R}^2$.

3 vettori non possono essere una base di $\mathbb{R}^2$ perché sono linearmente dipendenti.

Verifichiamo:

$$a(1,2)+b(0,1)+e(-1,1)=(0,0)$$

$$\begin{cases}a-e=0\\2a+b+e=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=e\\2e+b+e=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{a=e}\\\boxed{b=-3e}\end{cases}\longrightarrow$$

3 variabili in 2 equazioni

Soluzione non nulla

Soluzione problema $(e,-3e,e)$

Esercizio:

Base di $\mathbb{R}^4$ che contenga il vettore $\vec{v}(1\ 0\ 0\ 2)$

Costruiamo la matrice con i vettori della base canonica

$$\left(\begin{array}{ccccc} \vec{v} & \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} & \vec{e_4} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Perché stiamo cercando una base di $\mathbb{R}^4$ dobbiamo avere una matrice di soli 4 vettori

Riduzione per colonne

$$C_2 \to C_2 - C_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C_2 \to C_2 + 2C_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↳ si elimina; i vettori risultanti formano una base di $\mathbb{R}^4$ perché i vettori sono linearmente indipendenti

Esercizio:

$\dim V = \mathcal{L}\{(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}, \vec{t})\}$?

$\vec{v} = (1, 1, 0, 1)$ $\vec{w} = (0, 1, 0, 1)$ $\vec{u} = (1, 2, 0, 2)$ $\vec{t} = (-2, 3, 0, 3)$

$$\left(\begin{array}{cccc} \vec{v} & \vec{w} & \vec{u} & \vec{t} \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) C_3 \to C_3 - C_1 - C_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} C_4 \to 2C_1 + C_2 - C_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↳ non si considerano

$\dim V \neq \mathcal{L}\{(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}, \vec{t})\}$ ⇐

Esercizio:

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2z = 4\lambda \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

$\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ / sistema ammette soluzione?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & 4\lambda \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) R_2 \to R_1 - 2R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & 4\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 4\lambda - 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\underbrace{2 \quad 2 \quad 1}_{r=2}$

↳ $R_2 = 0 \to r = 2$

$4\lambda - 2 = 0 \quad \lambda = \frac{1}{2}$

$r(A) = r(A|b)$

Lezione 23 (2 fogli)
11/04/2016

Esercizio:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow$$

3 equazioni in 3 incognite ⇒ ammette soluzioni?

Da 3 equazioni in poi usiamo le matrici e Rouché-Capelli. La matrice associata al sistema è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 - \frac{1}{3}R_1]{R_3 - \frac{1}{3}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2/3 & -8/3 & -5 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2/3 & -8/3 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

(L'insieme delle soluzioni della matrice incompleta è uguale a quella della completa)

Il nuovo sistema è:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \frac{2}{3}x_2 - \frac{8}{3}x_3 = -5 \\ 3x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

SOLUZIONE

È equivalente a quello di partenza.
Con Rouché-Capelli possiamo dire che $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$ e il sistema ha soluzione.
$\rho = 3$, incognite $= 3 \Rightarrow$ Soluzione $= \infty^{3-3} = ①$

Una sola soluzione.

Esercizio:

$$\begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ 3x + y + 2z + t = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

1) Il sistema è compatibile?
2) Se sì, quante soluzioni ha?
3) Quali sono le soluzioni?

Variabili (x, y, z, t)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{calcoli otteniamo}]{\text{Dopo tutti i}} \left(\begin{array}{cccc|c} & & & t & \\ \boxed{2} & 1 & -1 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & \boxed{-\frac{1}{2}} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & 0 \end{array}\right) *$$

Il sistema è compatibile perché:
$\rho(A) = \rho(A|b) = 3$

Soluzioni: $\infty^{\text{variabili} - \text{rango}} = \infty^{4-3} = \infty^1 = \infty$
le soluzioni dipendono da un parametro e di solito si sceglie quello della colonna non marcata (ovvero non ha un marker)

Dall'ultima matrice * possiamo ricavare il sistema equivalente
↓

Lezione 23
11/04/2016

Il nuovo sistema equivalente è:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Scegliamo x_4 come parametro libero e lo chiamiamo t.

$$\begin{cases} x_1 - 3t + t + 2t = 0 \\ x_2 = -t \\ x_3 = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -t \\ x_3 = -t \end{cases}$$

Soluzione generale:

$$(0, -t, -t, t) = t\underbrace{(0, -1, -1, 1)}$$

↳ Questo vettore genera, cioè è una base di Ker(A)

Esercizio:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -10 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 + x_4 = 6 \end{cases}$$

Perché non è omogeneo non è detto che sia compatibile

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & -10 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & -10 \\ 0 & -6 & +1 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & -1 & -10 \\ 0 & \boxed{-6} & 1 & 2 & 23 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{1}{6}} & \frac{4}{3} & \frac{59}{6} \end{array}\right)$$

$\rho(A) = \rho(A|b) = 3$

Sistema di 3 equazioni in 4 incognite.

Soluzione $= \infty^{\text{incognite - rango}} = \infty^{4-3} = \infty^1 = \infty$ soluzioni che dipendono da un parametro libero (x_4)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -10 \\ -6x_2 + x_3 + 2x_4 = 23 \\ \frac{1}{6}x_3 + \frac{4}{3}x_4 = \frac{59}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5t + 37 \\ x_2 = -t + 6 \\ x_3 = -8t + 59 \\ x_4 = t \end{cases}$$

→ Il risultato è una retta

Soluzione generale:

$$(-5t + 37, -t + 6, -8t + 59, t) =$$

$$= \underbrace{(37, 6, 59, 0)}_{\text{Soluzione particolare}} + t\underbrace{(-5, -1, -8, 1)}_{\text{↳ Ker(A) = Kernel}} \rightarrow \text{Vettore velocità rispetto a } t$$

③

Lezione 24 (3 fogli)
12/04/2016

Esercizio:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & -8 & -2 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \rho(A)=3 \\ \rho(A|b)=4 \end{array} \Rightarrow \text{Sistema incompatibile}$$

Esercizio:

1) Determinare la dimensione di $V = \mathcal{L}\{(1,2,0,1),(-1,0,2,1),(1,4,2,3)\}$

2) Trovare una base di V

3) Completare la base trovata ad una base di $\mathbb{R}^4$.

$\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv$

1) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(A) = 2 \Rightarrow \dim V = 2$$

2) Una base di V è $\{(1,2,0,1),(0,1,1,1)\}$

3) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ e il suo det è ① $\Rightarrow$ formano una base di $\mathbb{R}^4$

Lezione 24
12/04/2016

Il grafico della pagina precedente lo abbiamo ottenuto così: facciamo $(0,1)$ + un multiplo di $(1,0)$. Per qualsiasi s abbiamo qualcosa che sta sulla stessa linea $y = 1 \Rightarrow$ punto per s volte un altro punto è una linea. $s(1,0)$ passa per l'origine, ma se aggiungiamo $(0,1)$ lo trasliamo.

Se abbiamo $\vec{P_0} + t\vec{v}$ lo possiamo scrivere (retta di $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{cases} x = x_0 + t\, v_1 \\ y = y_0 + t\, v_2 \\ z = z_0 + t\, v_3 \end{cases} \boxed{\begin{matrix} + s\, w_1 \\ + s\, w_2 \\ + s\, w_3 \end{matrix}} \qquad \vec{V} = \underbrace{(v_1, v_2, v_3)}_{\text{direzione = coefficiente } t}$$

Se vogliamo un piano basta aggiungere un altro vettore cioè $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

⊖ Le rette e i piani si possono vedere o parametricamente o in modo cartesiano.

Piano: $ax + by + cz = d$ → equazioni cartesiane

Piano: $ax + by + cz = 0$

Equazione retta: $\vec{P} = \vec{P_0} + t\vec{v}$

Equazione piano: $\vec{P} = \vec{P_0} + s\vec{v_1} + t\vec{v_2}$

} Questa scrittura va bene sempre in qualsiasi dimensione.

Ad esempio: in $\mathbb{R}^5$, $\vec{P_0}, \vec{v}, \vec{v_1}, \vec{v_2}$ saranno vettori di $\mathbb{R}^5$

Equazione cartesiana del piano in $\mathbb{R}^3$: $ax + by + cz = d$

Il sistema lineare è l'equazione cartesiana di uno di questi oggetti.

$A\vec{x} = \vec{b}$ se A ha 10 variabili (n) e se $r(A) = 9 = r(A|b)$, il sistema ha soluzioni ovvero $\infty^{10-9} = \infty^1 =$ retta.

⊖ Se $r(A) = n-2 = r(A|b)$ piano

⊖ Se $r(A) = n-1 = r(A|b)$ retta

Caso particolare:

Se abbiamo $\begin{cases} \boxed{ax + by + cz = d} \\ 2ax + 2by + 2cz = 2d \end{cases}$ è sempre un piano, se riduciamo abbiamo solo la prima equazione

$$\rightarrow (a, b, c)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = d$$ → questo sistema lineare è sempre compatibile.

Lezione 24
12/04/2016

Prendiamo due punti P_1 e P_2 e ne facciamo la differenza e poi verifichiamo che è ortogonale a (a, b, e).
$(P_1 - P_2)$ è ortogonale a (a, b, e).

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \pi \iff ax_1 + by_1 + ez_1 = \boxed{d}$$
$$P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \pi \iff ax_2 + by_2 + ez_2 = \boxed{d}$$

→ d è sempre lo stesso

Se facciamo la differenza tra le 2 equazioni abbiamo:

$$a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) + e(z_1 + z_2) = 0$$
$$= (a, b, e) \cdot \boxed{(P_1 - P_2)} = 0 \Rightarrow$$ ogni vettore sul piano è ortogonale a (a, b, e)

→ vettore che sta sul piano

- Se consideriamo la parte in blu del grafico, vogliamo la distanza del punto P dal piano. Se abbiamo la formula del piano $(ax + by + ez = d)$, il vettore ortogonale è (a, b, e).

Domande da orale:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + e_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + e_2z = d_2 \end{cases}$$

Questi due piani (in $\mathbb{R}^3$), tutte le possibili posizioni dei due piani.

Se sono paralleli, la matrice incompleta ha rango 1 e le direzioni ortogonali. Sono parallele, ovvero:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A} \quad \underbrace{\quad}_{b}$$

Abbiamo soluzione se
$\rho(A) = \rho(A|b)$

- Se $\rho(A) = 1$ sono proporzionali
- Se $\rho(A|b) = 1 \Rightarrow$ abbiamo $3 - 1 = 2 \Rightarrow \infty^2$ soluzioni: piani coincidenti
- Se $\rho(A) = 1$ e se $\rho(A|b) = 2$ i piani sono paralleli; ad esempio:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ 6x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

Il Ker della matrice incompleta
$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ è $\{x, y, z / 3x + y + z = 0\}$

Se $\rho(A) = 2$ anche $\rho(A|b) = 2$ e ha come soluzione una retta $= \infty^1$

In $\mathbb{R}^4$ due piani possono incontrarsi in un punto

Lezione 25 (1 foglio)
Esercitazione 11
14/04/2016

Esercizio:

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$$

Costruiamo la matrice associata

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \text{Alla fine otteniamo} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2y-7z=-17 \\ \frac{1}{2}z=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$$

Esercizio:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ -2x+y+3z=2 \\ -x+2y+3z=-1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Alla fine:} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$\rho(A) < \rho(A|b) \Rightarrow$ Non risolubile.

Esercizio:

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 3x+y+2z=0 \\ 4x+hz=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & h & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Alla fine:} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & h-1 & 0 \end{array}\right)$$

$\rho(A)=\rho(A|B)=3$

⊝ $h-1\neq0 \Rightarrow h\neq1 \Rightarrow$ Soluzione banale

⊝ $h-1=0 \Rightarrow h=1 \Rightarrow \rho(A)=\rho(A|B)=\boxed{2}$ → È ammessa la soluzione non banale: 1 variabile libera.

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 4y+5z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{5}{4}z \\ x+\frac{5}{4}z-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{5}{4}z \\ 4x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{4}z \\ y=-\frac{5}{4}z \end{cases}$$

Esercizio:

3 variabili libere
1 variabile dipendente

$$\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ x-y+z+t=0 \\ 3x+y+3z-t=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\rho(A)=\rho(A|B)=2$

Lezione 26 (2 fogli)
Esercitazione 12
15/04/2016

Esercizio:

$$\begin{cases} x+2y+kz=1 \\ 2x+ky+8z=-1 \\ 4x+7y+z=b \end{cases} \qquad b, k \in \mathbb{R}$$

(Infine per $b \neq \frac{56}{17}$ $k \neq -\frac{1}{4}$ $k \neq 4$)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & k & 8 & -1 \\ 4 & 7 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2-2R_1]{R_3 \to R_3-4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & k-4 & 8-2k & -3 \\ 0 & -1 & 1-4k & b-4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1-4k & b-4 \\ 0 & k-4 & 8-2k & -3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1-4k & b-4 \\ 0 & 0 & (k-4)(1-4k)+(8-2k) & -3(b-4)(k-4) \end{array}\right)$$

$$(k-4)(1-4k) = k-4k^2-4+16k+8-2k = -4k^2+15k+4 =$$

$$= \frac{-15 \pm \sqrt{15 \cdot 15 + 4 \cdot 4 \cdot 4}}{-8} = \frac{-15 \pm \sqrt{225+64}}{-8} = \frac{-15 \pm \sqrt{289}}{-8} =$$

$$= \frac{-15 \pm 17}{-8} = \begin{cases} \dfrac{-15-17}{-8} = 4 \\[2ex] \dfrac{-15+17}{-8} = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Se $k=4$ (Parliamo dell'ultima riga)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -15 & b-4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \rho(A)=2 \\ \rho(A|B)=3 \end{array}$$

Sistema non risolubile per $\forall b$.

Se $k=-\frac{1}{4}$ perché $-1-4k=0 \Rightarrow k=-\frac{1}{4}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & -1 & 0 & b-4 \\ 0 & 0 & 0 & 3(b-4)\left(-\frac{17}{4}\right) \end{array}\right) \qquad \rho(A)=2$$

$$(b-4)\left(-\frac{17}{4}\right)-3=0 \qquad \frac{17}{4}b-14=0 \qquad \boxed{b=\frac{56}{17}} \quad \rho(A|B)=2$$

Caso Frullino se

$$\begin{cases} x+2y+kz=1 \\ -y+(1-4k)z=b-4 \\ (k-4)(1+4k)z=3-(b-4)(k-4) \end{cases} \Rightarrow z=\frac{3-(b-4)(k-4)}{(k-4)(1+4k)}$$

e poi si va a ritroso.

①

Lezione 26
Esercitazione 12
15/04/2016

$$\bar{X}\begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{-x_1-11x_3}{2} \\ x_3 \\ \frac{-3x_1-11x_3}{2} \end{pmatrix}$$ → Se prendiamo $\vec{v}$ e $\vec{u}$ oppure $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono scelti di Trovare una base

↳ equazioni cartesiane servono a scrivere le variabili libere e quello ciò.

↳ È un sottospazio e dim $U = 2$

Esercizio:

$$\begin{cases} x+y+(2K-1)z=8 \\ Kx+y+z=1 \\ Kx+(K-2)y+2(4-3K)z=3K-26 \\ 2x+(K-1)y+(5-2K)z=3K-11 \end{cases}$$

↓ Costruiamo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2K-1 & 8 \\ K & 1 & 1 & 1 \\ K & K-2 & 2(4-3K) & 3K-26 \\ 2 & K-1 & 5-2K & 3K-11 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3\to R_3-KR_1 \\ R_4\to R_4-2R_1}]{R_2\to R_2-KR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2K-1 & 8 \\ 0 & 1-K & -2K^2+K+1 & 1-8K \\ 0 & -2 & -2K^2-5K+8 & -5K-26 \\ 0 & K-3 & 7-6K & 3K-27 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\Leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2K-1 & 8 \\ 0 & -2 & -2K^2-5K+8 & -5K-26 \\ 0 & 1-K & -2K^2+K+1 & 1-8K \\ 0 & K-3 & 7-6K & 3K-27 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to -R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2K-1 & 8 \\ 0 & 2 & 2K^2+5K-8 & 5K+26 \\ 0 & 1-K & -2K^2+K+1 & 1-8K \\ 0 & K-3 & 7-6K & 3K-27 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2K-1 & 8 \\ 0 & 2 & 2K^2+5K-8 & 5K+26 \\ 0 & -2 & -2K^2-5K+8 & -5K-26 \\ 0 & K-3 & 7-6K & 3R-27 \end{array}\right)$$

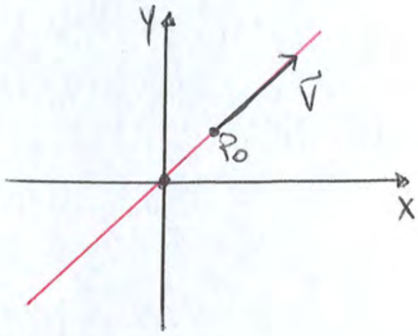
$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2K-1 & 8 \\ 0 & 2 & 2K^2+5K-8 & 5K+26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K-3 & 7-6K & 3K-27 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-\frac{(K-3)}{2}R_2]{R_3\Leftrightarrow R_4}$$

Equazione della retta:

Lezione 27 (2 fogli)
18/04/2016

Forma parametrica in $\mathbb{R}^n$ (per tutte le dimensioni):

$$P(t) = \boxed{P_0} + t\vec{v}$$ punto all'istante $t = 0$.



$$x_1(t) = x_{10} + t v_1$$
$$x_2(t) = x_{20} + t v_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$x_n(t) = x_{n0} + t v_n$$

⊖ La direzione della retta è $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ e all'istante $t = 0$ passa per il punto P_0 di coordinate $P_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$

parametri direttori (o coefficienti)

⊖ Su $\mathbb{R}^3$ la retta è data da
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t v_1 \\ y(t) = y_0 + t v_2 \\ z(t) = z_0 + t v_3 \end{cases} \qquad \underbrace{\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)}$$
parametri direttori

Una retta è quella che si può esprimere in forma parametrica in forma lineare rispetto a t.

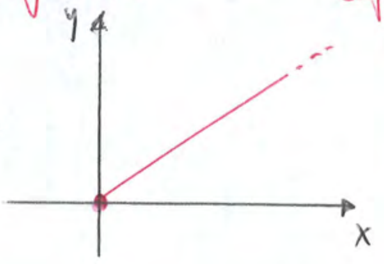
Esempio:
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$
lineari in t è una retta

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^3 \\ z = t^3 \end{cases} \qquad \text{Se } s := t^3 \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = s \end{cases}$$
immagine di

stesso è una retta perché appare il coefficiente s.

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 \\ z = t^2 \end{cases} \longrightarrow$$ semiretta perché $s = \boxed{t^2}$ non è invertibile

valori sempre positivi



Equazioni cartesiane della retta in $\mathbb{R}^3$

$$r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c}z = \bar{d} \end{cases}$$

Se rank $\begin{pmatrix} a & b & c \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix} = 2$ allora

anche rank $\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \end{array}\right) = 2$

$\rho(A) = \rho(A|b) = 2 \Rightarrow$ la soluzione dipende da 1 solo parametro perché
$3(\text{variabili}) - 2(\text{rango}) = 1$

Lezione 27
18/04/2016

Esercizio:

$$\begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = 2 + 2s - t \\ z = 3 + s - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = x - 1 - t \\ y = \cancel{2} + 2x \cancel{-2} - 2t - t \\ z = 3 + x - 1 - t - 3t \end{cases} \Rightarrow$$

↳ soluzione particolare

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 3t \\ z = 2 + x - 4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-y + 2x}{3} \\ z = x + 2 - 4\left(\frac{2x - y}{3}\right) \end{cases}$$

Piano: $\boxed{-5x + 4y - 3z + 6 = 0}$

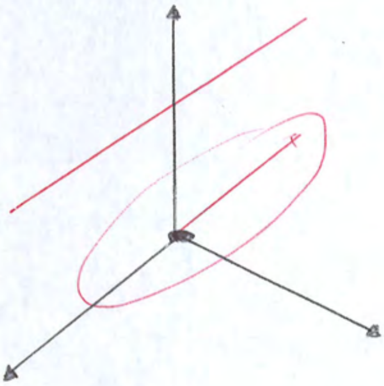
Sistema omogeneo associato è

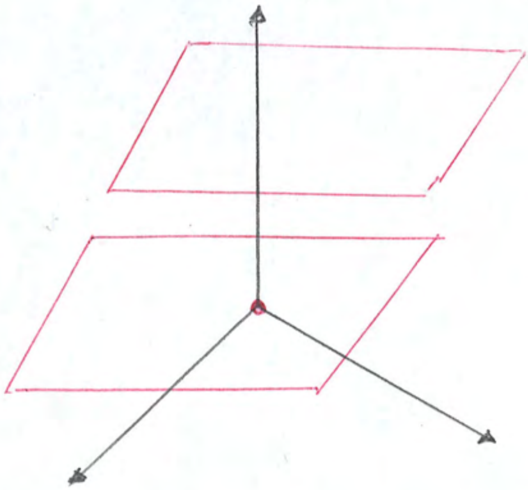
$-5x + 4y - 3z = 0$ → Risolvendolo si ricava

$s(1,2,1) + t(1,-1,-3)$

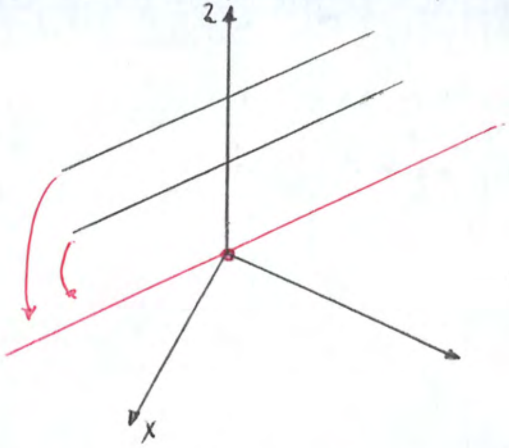
Espressione cartesiana in $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = e \\ \bar{a} x_1 + \bar{b} x_2 + \bar{c} x_3 + \bar{d} x_4 = \bar{e} \end{cases}$$





Queste due rette sono parallele; se traslate per il centro, esse sono coincidenti.
=> lo stesso vale per i piani e per le rette.



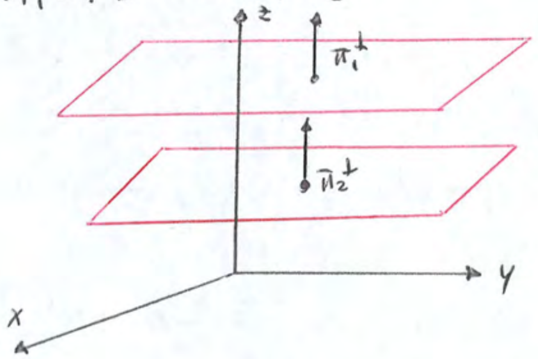
Parallelismo tra due piani:

$\pi_1 : P_1 + s\bar{v}_1 + t\bar{w}_1 = 0$ $\qquad$ π_1: passante per P_1 e $<\bar{v}_1, \bar{w}_1>$

$\pi_2 : P_2 + s\bar{v}_2 + t\bar{w}_2 = 0$ $\qquad$ π_2: passante per P_2 e $<\bar{v}_2, \bar{w}_2>$

⊖ π_1 parallelo a π_2 $\iff < \bar{v}_1, \bar{w}_1 > = < \bar{v}_2, \bar{w}_2 >$

$\Updownarrow$ $\pi_1^\perp = \pi_2^\perp$



Osservazione:

$ax + by + ez = d$ $\qquad$ ⊖ se $d \neq \tilde{d}$ i piani sono paralleli

$ax + by + ez = \tilde{d}$ $\qquad$ ⊖ se $d = \tilde{d}$ i piani sono coincidenti

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & e & d \\ a & b & e & \tilde{d} \end{array}\right)$$

$\rho(A) = 1 = \rho(A|b) \Rightarrow$ i piani sono coincidenti $(d = \tilde{d})$

$\rho(A) = 1 \neq \rho(A|b) \Rightarrow$ i piani sono paralleli $(d \neq \tilde{d})$

Esercizio:

Vedere se le due rette r_1 e r_2 sono parallele

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$\bar{V}_{r1} = (1, 2, 2)$

$\bar{V}_{r2} = (1, -1, 0)$

$\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$

Non sono parallele

②

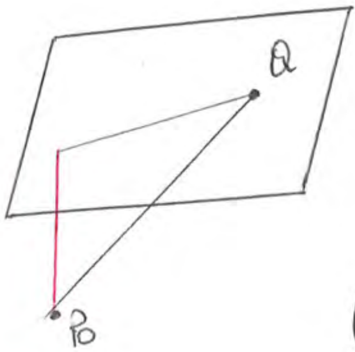
In quella cartesiana se i termini noti sono 0 passano per l'origine, in quella cartesiana no.

π_1 passa per il centro se esiste la soluzione di:

$$\begin{cases} 2+s+t=0 \\ 1+2s+t=0 \\ 1+3s-2t=0 \end{cases} \Rightarrow \quad (*) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \hat{i} \\ 2 & -1 & \hat{j} \\ 3 & -2 & \hat{k} \end{pmatrix} = (-1, 5, -3) = -\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$$

Esercizio:

Distanza di un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dal piano π: $ax + by + cz = \boxed{d}$



$$\left| (\vec{P_0} - \vec{Q}) \cdot \vec{n} \right|$$

$\vec{n}$ ortogonale a π di norma unitaria

$$\left| \vec{P_0} \cdot \vec{n} - \vec{Q} \cdot \vec{n} \right|$$

$$\frac{(x_0, y_0, z_0) \cdot (a, b, c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} - \boxed{\frac{(x_a, y_a, z_a) \cdot (a, b, c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}} \to = d$$

$\Rightarrow$ Abbiamo così la formula

$$\left| \frac{(x_0, y_0, z_0) \cdot (a, b, c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} - \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right| \Rightarrow \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right|$$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \qquad ax + by + cz = d \Rightarrow$

$\Rightarrow ax + by + cz - d = 0$

Esercizio:

Calcolare la distanza di $P_0 = (1, -1, 2)$ dal piano $\pi: 3x + 2y + z = 1$

Scriviamo il piano nel seguente modo:

$$3x + 2y + z - 1 = 0$$

$$\left| \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 2 - 1}{\sqrt{14}} \right| = \left| \frac{2}{\sqrt{14}} \right| = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

- Retta generica passante per un punto (in $\mathbb{R}^2$): $\boxed{a(y - y_0) + b(x - x_0) = 0}$
- Piano generico passante per il punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$: $\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$

Esercizio!

Scrivere in forma parametrica il piano passante per $(1,-1,2)$ e ortogonale alla retta di equazione

$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3+3t \end{cases}$$

$\vec{V}_r = (1,-1,3)$

$\vec{V}_r^{\perp} \; < \underset{\overset{\parallel}{V}}{(1,1,0)}, \underset{\overset{\parallel}{W}}{(3,0,-1)} >$ → Si trova con il prodotto scalare

$\vec{V}_r \cdot v = 0$

$\vec{V}_r \cdot w = 0$

Equazione parametrica del piano è:

$$\begin{cases} x = 1 + s + 3t \\ y = -1 + s \\ z = 2 - t \end{cases}$$

Equazione cartesiana:

$x - y + 3z = d$

$1 - (-1) + 3 \cdot 2 = d \Rightarrow d = 8$

Piano: $x - y + 3z = 8$

Esercizio:

Scrivere l'equazione dei punti che hanno distanza 3 dal piano $\pi: x - y - z = 1$

$\Rightarrow$ Ci aspettiamo due piani:

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ha distanza 3 dal piano $\pi \iff \pi: x - y - z - 1 = 0.$

$$\left| \frac{a x_0 + b y_0 + c z_0 - d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right| = 3 \Rightarrow \left| \frac{x_0 - y_0 - z_0 - 1}{\sqrt{3}} \right| = 3 \Rightarrow |x_0 + y_0 - z_0 - 1| = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x_0 + y_0 - z_0 - 1 = \pm 3\sqrt{3}$$

I° piano: $x_0 + y_0 - z_0 = -3\sqrt{3} + 1$

II° piano: $x_0 + y_0 - z_0 = +3\sqrt{3} + 1$

Esercizio!

$$r: \begin{matrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{matrix} \begin{cases} ax + by + cz - d = 0 \\ \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c}z - \bar{d} = 0 \end{cases}$$

Supponiamo che l'intersezione sia una retta.

Domanda 1: Qual è il piano "generale" che contiene r?

Risposta 1: Uno dei due piani.

Domanda 2: Quali sono tutti i piani che contengono la retta?

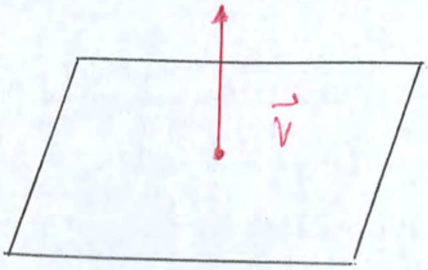
Risposta 2:

$$\underbrace{\alpha(ax + by + cz - d) + \beta(\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c}z - \bar{d})}_{r \text{ la retta appartiene a } \uparrow} = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

↓ Continua

Lezione 29 (2 fogli)
Esercitazione 13
21/04/2016

Piani: $ax+by+cz+d=0$



$\vec{v} \perp \vec{u} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Rette:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ ex+fy+gz+h=0 \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x=\alpha+\lambda t \\ y=\beta+\mu t \\ z=\gamma+\delta t \end{cases} \qquad \vec{u}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \delta \end{pmatrix} \qquad \vec{u} \parallel r$$

$\pi \perp \vec{v}$

$\delta \perp \vec{w}$

$r \parallel \vec{u}$

$s \parallel \vec{t}$

- $\pi \parallel \delta \Rightarrow \vec{v} \parallel \vec{w}$ $\quad \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ (prodotto vettoriale)
- $\pi \perp \delta \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$ $\quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ (prodotto scalare)
- $r \parallel s \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{t}$ $\quad \vec{u} \times \vec{t} = \vec{0}$ $\quad \lambda\vec{u} = \vec{t}$
- $r \perp s \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{t}$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{t} = 0$
- $\alpha \parallel r$ se $\vec{v} \perp \vec{u}$ $\quad \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$
- $\alpha \perp r$ se $\vec{v} \parallel \vec{u}$ $\quad \vec{v} \times \vec{u} = 0$ oppure $\vec{v} = \lambda\vec{u}$

Riassunto di parallelismo e perpendicolarità

Rette SGHEMBE

- Non sono parallele (//)
- Non sono incidenti
- Non appartengono allo stesso π (piano)

Per verificare se due rette sono sghembe:

- $r \cap s = \phi$ → intersezione 4 piani; → intersezione 6 equazioni
- $r \nparallel s$ → la distanza tra le due rette cambia a seconda dei punti considerati
  → la distanza tra 2 rette sghembe viene definita come "distanza minima" → lunghezza del segmento dell'unica retta $\perp$ ad entrambe

Lezione 29
Esercitazione 13
21/04/2016

⊖ Non sono parallele: sono sghembe? Per verificare ciò dobbiamo uguagliare le 2 equazioni e non devono avere punti in comune.

(Seguiamo la freccia verso il basso ⇓)

$$\begin{cases} t = -m+1 \\ t = 3m \\ -2t = -2m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+m = 1 \\ t-3m = 0 \\ -2t+2m = 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

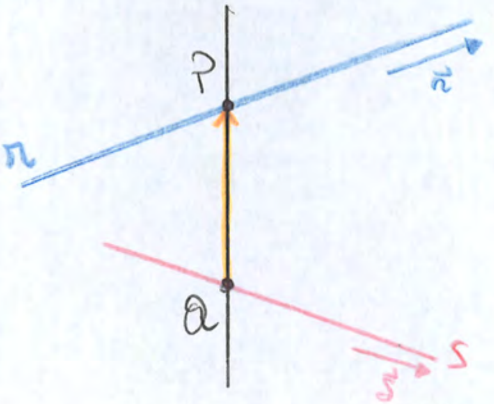
$$\begin{cases} 3m = -m+1 \\ t = 3m \\ -2t = -2m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{4} \\ t = \frac{3}{4} \\ -2t = -2m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ t = \frac{3}{4} \\ -2 \cdot \frac{3}{4} = -2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ t = \frac{3}{4} \\ \boxed{-\frac{3}{2} = \frac{1}{2}} \end{cases} \longrightarrow \text{IMPOSSIBILE}$$

⊖ Con Rouché - Capelli

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

4) Siccome le due rette sono sghembe, troviamo la distanza



(r e s non si toccano perché sono sghembe; non stanno sullo stesso piano)

⊖ Dobbiamo trovare un vettore $\vec{PQ}$ che sia ortogonale ad entrambe le rette.

$$\begin{cases} \vec{PQ} \cdot \vec{r} = 0 \\ \vec{PQ} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases}$$

$P \in r\,(t, t, -2t)$

$Q \in s\,(-m+1, 3m, -2m+1)$

$$\vec{PQ}(t+m-1,\ t-3m,\ -2t+2m-1) \longrightarrow \underset{(\text{vettore})}{\vec{PQ}} \begin{pmatrix} t+m-1 \\ t-3m \\ -2t+2m-1 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTE

$$p^\perp \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 11\hat{i} - 10\hat{j} + 18\hat{k}$$

$\hookrightarrow 11x - 10y + 18z + d = 0$

$11 - 30 + 18 + d = 0 \Rightarrow d = 1$

II° METODO:

$$\begin{array}{c} P-A \\ v \\ w \end{array} \begin{pmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = 0$$

$$(x-1)(11) - (y-3)10 + (z-1)18 = 0$$

III° METODO: → scrittura piano in forma parametrica

$$\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \begin{cases} x = 4t + 2s + 1 \\ y = -t + 4s + 3 \\ z = -3t + s + 1 \end{cases}$$

IV° METODO: → nel caso fossero parallele e non coincidenti

↳ fascio di piani per una delle due a scelta

Esempio per r:

$$\lambda(x + y + z - 5) + \mu(2x - y + 3z - 2) = 0$$

Cerchiamo quello che contiene un punto di s diverso da A

$P_1(3, 7, 2)$

$$\lambda(3 + 7 + 2 - 5) + \mu(6 - 7 + 6 - 2) = 0$$

$\hookrightarrow 7\lambda + 3\mu = 0$

$3x + 3y + 3z - 15 - 14x + 7y$

Domanda da esame orale:

Dimostrare che la curva (t, t^2, t^3) di $\mathbb{R}^3$ non è contenuta in nessun piano.

$ax+by+cz=d$ → equazione del generico piano di $\mathbb{R}^3$

⊙ Da (t, t^2, t^3) si ricava:

$$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$$

⊙ Dall'equazione del piano otteniamo:

$at+bt^2+ct^3-d=0$ $\quad$ $\forall t$ deve essere soddisfatta

$\Rightarrow a=b=c=d=0$

↳ perché deve valere per qualunque t.

Possiamo concludere dicendo che la curva non è PIANA!

⊖ $U\wedge V$; supponiamo che U e V siano sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale W $(W,+,\cdot)$

i) $\vec{u}_1+\vec{u}_2 \in U$, $\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$

U è un sottospazio $\Longleftrightarrow$ ii) $a\vec{u} \in U$, $\forall \vec{u} \in U$

Domande: 1) $U\wedge V$ è sottospazio vettoriale di W?

2) $U\cup V$ è sottospazio vettoriale di W?

---

1) $U\wedge V$ è sottospazio vettoriale di W

Dimostrazione:

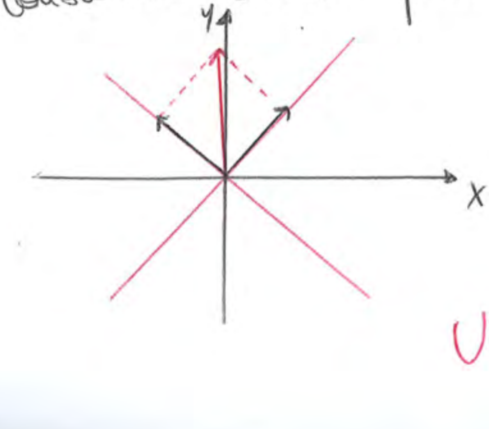
w_1 e $w_2 \in U\wedge V$

$$\left.\begin{array}{l} w_1+w_2 \in U \\ w_1+w_2 \in V \end{array}\right\} \Rightarrow w_1+w_2 \in U\wedge V$$

Analogamente se $w \in U\wedge V$ allora $a\cdot w \in U\wedge V$ $\quad \forall a \in \mathbb{R}$

2) $U\cup V$ non è detto che sia uno spazio vettoriale di W

Consideriamo due rette passanti per l'origine:



Se facciamo la somma di due vettori appartenenti a rette diverse, il vettore risultante non appartiene a nessuna delle due.

$U\cup V$ è uno spazio vettoriale sempre se $V\subset U \Rightarrow U\cup V=U$ e viceversa.

⊙ Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare allora:

$$\text{Ker} f = \{ \vec{v} \in V \, / \, f(\vec{v}) = \vec{0}_W \}$$

$$\text{Im} f = \{ f(\vec{v}) \, / \, \vec{v} \in V \}$$

1) Ker f è un sottospazio vettoriale di V

⊙ $\vec{V}_1, \vec{V}_2 \in \text{Ker} f \quad f(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = f(\vec{V}_1) + f(\vec{V}_2) = \vec{0}_W + \vec{0}_W = \vec{0}_W$

⊙ $\vec{v} \in \text{Ker} f \quad f(a \cdot \vec{v}) = a f(\vec{v}) = \vec{0}_W$

2) Im f è sottospazio vettoriale di W

⊙ $w_1, w_2 \in \text{Im} f \quad \exists \, v_1, v_2 \, / \, f(v_1) = w_1$

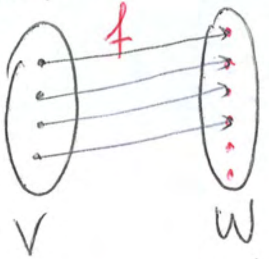
$f(v_2) = w_2$

⊙ $w_1 + w_2 \in \text{Im} f$? Sì perché $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = w_1 + w_2$.

Analogamente $a \vec{w} \in \text{Im} f$ se $\vec{w} \in \text{Im} f$

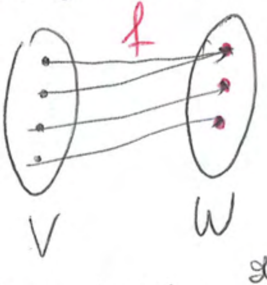
Sia $v \in V \, / \, f(v) = w \Rightarrow a \underset{\overset{\parallel}{f(a\vec{v})}}{f(v)} = a \cdot \vec{w}$

⊙ f è iniettiva $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $f(v_2) = f(v_1) \Rightarrow v_2 = v_1 \qquad v_1 \neq v_2 \Rightarrow f(v_1) \neq f(v_2)$



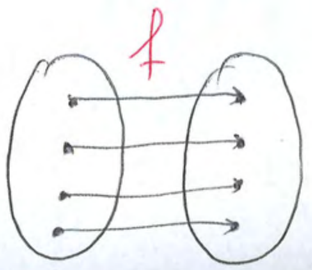
→ ad un vettore a sinistra corrisponde uno ed un solo vettore a destra; iniettiva ma non suriettiva.

⊙ f è suriettiva $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\text{Im} f = W$



→ non è iniettiva, ma è suriettiva

⊙ f è biettiva $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f è iniettiva e suriettiva



⊖ f è suriettiva $\iff$ $\mathrm{Im}\, f = W$ → $\exists !\, f^{-1} : W \to V$

⊖ f è biettiva (isomorfismo) $\iff$ f è iniettiva e suriettiva

V e W $\boxed{\text{isomorfi}}$ $\overset{def}{\iff}$ esiste un isomorfismo (lineare)

$f: V \to W$ è lineare

↳ hanno le stesse forme: se studiamo il I° o il II° non cambia nulla. Tutte le proprietà di V tramite f le troviamo in W e e poiché esiste l'inversa, le proprietà di W le troviamo in V tramite f^{-1}.

$f^{-1} W \to V$ è lineare

Ogni spazio vettoriale V di dimensione finita è ISOMORFO, non canonicamente a $\mathbb{R}^n$, $n = \dim V$.

$$f: V \to \mathbb{R}^n$$

Scegliamo una base $\underline{\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}}$ di V → f dipende dalla base

$$V = a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

$$f: \vec{v} \in V \longrightarrow (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

Proposizione: $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ definisce un'applicazione lineare

$$f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad f_A(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}.$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad f_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f_A: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + 4x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

oppure $(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (2x_2 + 4x_3, 3x_1 + 5x_2 + x_3)$

Domanda: posso fare il contrario? Più precisamente, posso associare una matrice ad ogni applicazione lineare?

$$\left. \begin{array}{l} f: \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\shortparallel}{V_n}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^m}{\overset{\shortparallel}{W_m}} \end{array} \right\} \text{ Scegliendo una base di V e di W.}$$

Esempio: $f: (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (2x_2 + 4x_3, 3x_1 + 5x_2 + x_3)$

$$\begin{array}{l} (1,0,0) \longrightarrow (0,3) \\ (0,1,0) \longrightarrow (2,5) \\ (0,0,1) \longrightarrow (4,1) \end{array} \qquad A_f = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

↳ Immagini

Scegliamo le basi canoniche sia dello spazio di partenza che di quello di arrivo.

I° METODO: (Vecchia maniera) → forma cartesiana

Prendiamo un punto generico $R(x,y,z)$

$$\frac{x-x_P}{x_Q-x_P}=\frac{y-y_P}{y_Q-y_P}=\frac{z-z_P}{z_Q-z_P}$$

Adesso dobbiamo fare il sistema uguagliandole a 2 a 2:

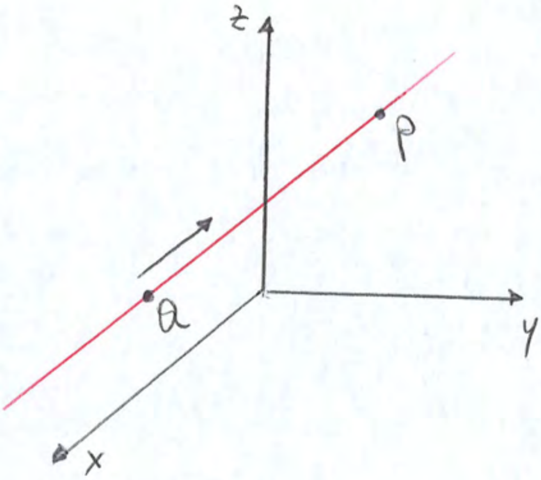
$$\begin{cases}\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-0}{1-0}\\ \frac{y-0}{1-0}=\frac{z-2}{1-2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x+1}{3}=y\\ y=\frac{z-2}{-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+1=3y\\ y=-z+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-3y+1=0\\ y+z-2=0\end{cases}$$

II° METODO: → forma parametrica

$$\vec{PQ}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

→ Facendo la differenza fra le componenti dei vettori $(Q-P)$

↓ Sono i 3 denominatori della forma cartesiana.



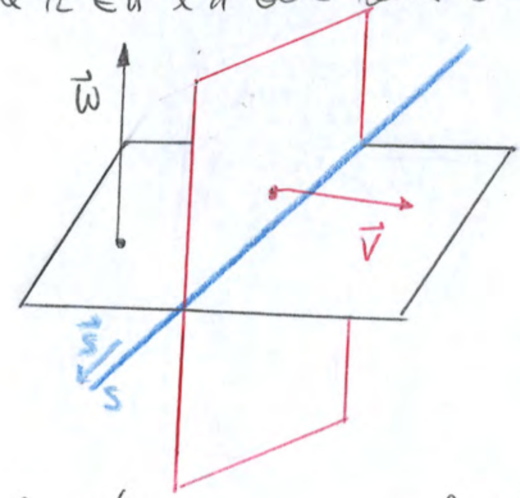
$$\begin{cases}x=-1+3t\\ y=0+t\\ z=2-t\end{cases}\quad\text{oppure}\quad\begin{cases}x=2+3t\\ y=1+t\\ z=1-t\end{cases}$$

↓ valori di P ↓ valori di Q

Possono anche essere scambiati

Trovare il piano π tale che $r\in\pi$ e // alla retta $s:\begin{cases}x+y-2z=1\\ x+3z=8\end{cases}$

$$\begin{cases}x=3t-1\\ y=t\\ z=-t+2\end{cases}$$



$$\begin{cases}x=t\\ t-2\cdot\frac{8-t}{3}-1=-y\\ z=\frac{8-t}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=t\\ y=\frac{-3t+16-2t+3}{3}\\ z=\frac{8}{3}-\frac{t}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=t\\ y=-\frac{5}{3}t+\frac{19}{3}\\ z=-\frac{t}{3}+\frac{8}{3}\end{cases}$$

Poniamo $u=\frac{1}{3}t$

$t=3u$

②

⊖ Trovare $p \perp s$ passante per $Q\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 3\right)$

$$s: \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu - \frac{1}{2} \\ z = \frac{3}{2}\mu \end{cases}$$

Dobbiamo trovare 2 piani

→ $\pi \perp r$ e che contenga Q

→ σ che contenga r e Q

$$x + y + z + d = 0$$

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{4} + 3 + d = 0 \Rightarrow d = -\frac{23}{4}$$

$$x + y + z - \frac{23}{4} = 0$$

$R: r \cap \pi$

$$t + 1 + t - 3 + t - \frac{23}{4} = 0$$

$$3t - \frac{31}{4} = 0 \Rightarrow t = \frac{31}{12}$$

$$R\left(\frac{31}{12}, \frac{43}{12}, -\frac{5}{12}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{x - \frac{3}{2}}{\frac{31}{12} - \frac{3}{2}} = \dfrac{y - \frac{5}{4}}{\frac{43}{12} - \frac{5}{4}} \\[2ex] \dfrac{y - \frac{5}{4}}{\frac{43}{12} - \frac{5}{4}} = \dfrac{z - 3}{-\frac{5}{12} - 3} \end{cases}$$

Esercizio:

$\{2, x+1, \frac{x^2}{2}\}$ base di $R_2[x]$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Matrice rappresentativa rispetto a questa base

$$A_f = \begin{pmatrix} | & | & | \\ f(2) & f(x+1) & f\left(\frac{x^2}{2}\right) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Ricavate da

$f(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f(x+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f\left(\frac{x^2}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 + \frac{b_1}{2} \\ b_1 \\ -b_1 \\ \frac{b_2}{6} \end{pmatrix}$$

→ Queste 4 componenti sarebbero le componenti del vettore immagine rispetto alla base scelta.

Esercizio:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$ Sono due matrici trovate con due basi differenti.

Domanda: Come si fa a capire quando due matrici sono rappresentative della stessa applicazione lineare? (In basi diverse).

Esercizio:

$f: V \to W$ lineare:

$\text{Ker}(f) = \{v \in V \,/\, f(v) = 0\}$ $\boxed{A_f(v) = 0}$

$\text{Im}(f) =$ generato dalle colonne di A_f →

$$A_f = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$\{e_1, \dots, e_n\}$ base di V.

Esercizio: Calcolare il Ker della matrice

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ chiaramente $\text{Im} f = \langle (1,1) \rangle$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ → Se riduciamo per righe non otteniamo $\text{Im} f \leq \langle (1,1) \rangle$, per cui ridurre per righe serve per trovare ρ e Ker!

$\boxed{\text{Importante}}$:

$$\left.\underbrace{\dim V}_{\text{N° variabili}} = \underbrace{\dim \text{Ker}(f)}_{\{v / A_f(v) = 0\}} + \underbrace{\dim \text{Im}(f)}_{\rho(A_f)}\right] \to \text{Ottenuto da Rouché-Capelli}$$

$\shortparallel$

$\rho(A_f) =$ N° variabili

$\rho(A_f) = \dim \text{Im}(f)$

$$\dim U + \dim V = \dim(U \cap V) + \dim(U+V)$$
$$3 + 3 = 2 + ?$$

Facendo le somme otteniamo $\dim(U+V) = 4$

Esercizio: Siano $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) / 2x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ x_4 - 3x_5 = 0\}$

e $U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) / 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0\}$

Trovare l'intersezione $U_1 \cap U_2$ e $U_1 + U_2$.

$\dim U_1 = 3$ e $\dim U_2 = 4$ → Si trovano in base alle variabili libere che ci sono.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Costruiamo la matrice associata:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ 3 equazioni indipendenti

$\rho(A) = 3$ parametri $= 5$

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) \Rightarrow \dim U \cap V = 5 - 3 = \boxed{2}$$
$$3 + 4 = 2 + 5$$

Esercizio:

$$V = \{p \in \mathbb{R}_n[x] : p(1) = 0\}$$

1) Dimostrare che V è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_n[x]$

2) Calcolare la dimensione

1) (i) $p_1 + p_2 \in V, \quad \forall\, p_1, p_2 \in V$

(ii) $\alpha p \in V, \quad \forall\, \vec{v} \in V,\ \alpha \in \mathbb{R}$

$$p_1(1) = 0,\ p_2(1) = 0 \Rightarrow (p_1 + p_2)(1) \overset{def}{=} p_1(1) + p_2(1) = 0$$

Se un polinomio si annulla in 1 vuol dire che è divisibile per: $x - 1$

$p(1) = 0$, $p = (x-1) \cdot q \quad q \in \mathbb{R}_{n-1}(x)$

2) $\dim(V) = n$ ↳ polinomio appartenente a $\mathbb{R}_{n-1}(x)$

dim $U=2$, dim $V=2$ per $\forall K$ perché i vettori non sono mai proporzionali:

$$\dim U + \dim V = \dim(U \cap V) + \dim(U+V)$$
$$2 + 2 = \underset{\uparrow}{?} < \underset{\uparrow}{4}$$

almeno deve essere 1 ⇒ non deve essere 4

⊖ Mettiamo i vettori in una matrice: troviamo il rango e speriamo che non sia massimo ⇒ oppure possiamo calcolare il det perché è una matrice quadrata.

$$\begin{array}{l} U\left\{ \right. \\ \\ V\left\{ \right. \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 3 & K & 2 \\ 1 & 0 & 0 & K \\ k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3-3K^2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} K=-1 \\ K=1 \end{array}\right] \rightarrow$$

Si intersecano per questi valori!

Intersezione:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Per } K=-1 & \mathcal{L}\{(1,0,0,-1)\} = U \cap V \\ \text{Per } K=1 & \mathcal{L}\{(1,0,0,1)\} = U \cap V \end{array}\right\}$$

L'intersezione è sempre = 1

Esercizio: Dire per quali valori di K i sottospazi

$U=\mathcal{L}\{(1,k,k^2),(1,1,1)\}$ e

$V=\mathcal{L}\{(K,0,1)\}$ non sono in $\boxed{\text{somma diretta}} \rightarrow$ $U \wedge V =$ nessun vettore

Per definizione U e V in somma diretta $U \oplus V \iff U \cap V = \{\vec{0}\}$.

Per $K=1$ $\dim(U)=1 \Longrightarrow U=\mathcal{L}\{(1,1,1)\}$

Per $K\neq 1$ $\dim(U)=2$

$V=\mathcal{L}\{(1,0,1)\}$

$\rightarrow U \wedge V = \{\vec{0}\}$ quindi sono in somma diretta

$K\neq 1$ sono in somma diretta $\iff \dim(U+V)=3$, allora facciamo la matrice e vediamo il determinante

$$\det\begin{pmatrix} 1 & K & K^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ K & 0 & 1 \end{pmatrix} = -K^3+K^2-K-1 = (1-K)(1+k^2)$$

sempre somma diretta.

②

Esercizio: Consideriamo i polinomi: $p_1(x) = 3 + x^2$ $\quad p_2(x) = x - x^2 + 2x^3$

$p_3(x) = 2 - x^2$ $\quad p_4(x) = x - 2x^2 + 3x^3$

1) Verificare che formano una base di $\boxed{R_3[x]}$ → ha dim = 4

2) Esprimere quindi x^2 come combinazione lineare nella base $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$

1) Abbiamo verificare che sono linearmente indipendenti

$$a(3+x^2)+b(x-x^2+2x^3)+c(2-x^2)+d(x-2x^2+3x^3)=\boxed{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = b = c = d = \boxed{0}$$ → perché l'abbiamo posto = 0 prima

$$\begin{cases} 3a + 2c = 0 \\ b + d = 0 \\ a - b - c - 2d = 0 \\ 2b + 3d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se ha rango max = 4 i vettori sono linearmente indipendenti oppure se det=0 rango non è max

Infatti det = -5 ⇒ i 4 vettori sono linearmente indipendenti e formano una base

2) $x^2 = \frac{2}{5}(3+x^2) + 0(x-x^2+2x^3) - \frac{3}{5}(2-x^2) + 0(x-2x^2+3x^3)$

Esercizio:

$$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \to (x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3)$$

Scrivere la matrice rappresentativa (rispetto alle basi canoniche) e trovare un $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $f(v) = (0, 1, 1)$

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ rango$(M_f) = 3$ quindi f suriettiva.

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$$

$$4 = 1 + 3$$

Poiché $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ovvero $4 > 3$ il Ker non ha dim = 0.

$$M_f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(1,1,1) \to (0,0,0)$

$(1,1,0) \to (0,1,2)$

$(1,0,0) \to (1,2,1)$

Scrivere M_f rispetto alle basi canoniche

$(1,0,0) \to (1,2,1)$

$(0,1,0) = (1,1,0) = (1,0,0) \longrightarrow (-1,-1,1)$

$(0,-1,-2)$

Esercizio: Come calcolare gli autovalori di un endomorfismo?

$\vec{v}$ autovettore $\longleftrightarrow f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$

Sia M_f la matrice rappresentativa di f in una base (che abbiamo fissato)

$M_f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ $\vec{v}$ è il vettore delle componenti rispetto alla base scelta

$M_f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v} \Rightarrow M_f(\vec{v}) - \lambda \vec{v} = 0 \Rightarrow (M_f - \lambda I)(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow M_f - \lambda \cdot I$ ha kernel non banale e $M_f - \lambda I$ ha rango $< n$

$$\boxed{\det(M_f - \lambda I) = 0}$$

↳ polinomio caratteristico → è di grado n $(-1)^n \lambda^n$

Esercizio:

- Polinomio caratteristico di una matrice 2x2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - (a_{21} \cdot a_{12})$$

Il termine noto del polinomio caratteristico $\boxed{|A - \lambda I| \text{ è } \det(A)}$

- Per una matrice 3x3 invece

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \det = \text{polinomio caratteristico}$$

Esercizio:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 0 \Rightarrow 0$ è un autovalore

$(1, 1, 1)$ genera il Ker A

$\vec{v}(1, -1, 0)$ $\vec{w}(1, 0, -1)$

$A\vec{v} = -\textcircled{3}\vec{v}$

$A\vec{w} = -\textcircled{3}\vec{w}$

→ v e w autovettori relativi all'autovalore -3

↓

$\vec{v}$ e $\vec{w}$ formano un sottospazio di $\mathbb{R}^3$

$$a\vec{v} + b\vec{w} = \begin{pmatrix} a+b \\ -a \\ -b \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow A\begin{pmatrix} a+b \\ -a \\ -b \end{pmatrix} ?$$

⊖ $\vec{v}(x,y)$ $\quad (x+z, y+t) = \vec{v}+\vec{w} \Rightarrow f(\vec{v}+\vec{w}) = (x+z+y+t)$

$\vec{w}(z,t)$

⊖ $\lambda\vec{v} = (\lambda x, \lambda y)$

$f(\lambda\vec{v}) = (\lambda x + \lambda y) = \lambda(x+y) = \lambda f(\vec{v})$

⊖ Ker f: tutti i vettori $\vec{v} / f(\vec{v}) = \vec{0}_v$

$\vec{v} / x+y=0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow \vec{v}(x,-x)$

Esercizio:

Im f = elementi dello spazio di arrivo che hanno almeno un vettore controimmagine nello spazio di partenza

$\vec{w} / \exists\, \vec{v} / f(\vec{v}) = \vec{w}$

$\boxed{\text{dim spazio partenza} = \text{dim Ker} + \text{dim Im}}$

Anche in questo caso rango $=2 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 1$ e $\dim \operatorname{Im} f = 2$

$$\operatorname{Im} f = \mathcal{L}\{(2,1,2),(0,2,1)\}$$

Facciamo il sistema per il Ker:

$$\begin{cases} 2x=0 \\ x+2y+2z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-z \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow (0,y,-y)$$

⊖ Proviamo a farlo per $h=1$

$$\begin{cases} x=0 \\ x+y+2z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2z \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow$$ Unico valore che soddisfi il sistema è 0 $\Rightarrow$ Unica soluzione è $(0,0,0) \Rightarrow \operatorname{Ker} f = (\vec{0})$

⊖ Dire a cosa è uguale per $h=1$

$$f\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3+0+10\\6+0+5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\13\\11\end{pmatrix}$$

⊖ Qual è la controimmagine di un vettore? (per $h=1$)

$$f^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \cancel{x}+y+2z=1 \\ \cancel{2x}+y+z=1 \\ \hline // \quad z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Esercizio: $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ matrice 3×4

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-5t\\y+z+t\\x-y-z-t\end{pmatrix} (*)$$

Trovare: ⊖ M_f ⊖ $\operatorname{Ker} f$ ⊖ $\operatorname{Im} f$

⊖ $\vec{w} \in \mathbb{R}^3 / \vec{w} = f\begin{pmatrix}3\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$

$$M_f = \begin{pmatrix} \overset{W}{\downarrow} & \overset{V}{\downarrow} & & \overset{U}{\downarrow} \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Facciamo il sistema per trovare il Ker f:

$$\begin{cases} x-5t=0 \\ y+z+t=0 \\ x-y-z-t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5t \\ y+z+t=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=-z \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\y\\-y\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\downarrow$ Continua

②

Come calcolare gli autospazi:

Lezione 39 (4 fogli)
10/05/2016

$f: V_n \to V_n$ → endomorfismo (se non fosse così non si potrebbe di autovalori e autospazio)

λ autovalore $\longleftrightarrow \exists \vec{v} \neq 0 / f(\vec{v}) - \lambda \vec{v}$

$\|M_f - \lambda I\| = 0$ stessa cosa → $\det(M_f - \lambda I) \boxed{=0}$ → non ha rango massimo

V_λ = autospazio $= \{\vec{v} \in V / f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}\} = \{\vec{v} \in V / M_f \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}\}$

$$(M_f - \lambda I) \cdot \vec{v} = 0 \qquad \vec{v} = (x_1, \dots, x_n)$$

$r(M_f - \lambda I) < n \Rightarrow$ lo spazio avrà almeno dimensione 1

Esercizio:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &(x,y) \to (-6x+9y, -4x+7y) \end{aligned}$$

matrice rappresentativa dell'endomorfismo

Se la matrice è quadrata allora è un endomorfismo

1) Calcolo degli autovalori

$$\det \begin{pmatrix} -6-\lambda & 9 \\ -4 & 7-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-3)$$ → lo impongo $=0$ e ottengo:

$$(\lambda+2)(\lambda-3) = 0 \iff \lambda = -2 \text{ e } \lambda = 3$$

$V_{-2} = \text{Ker}(A + 2I) = \text{Ker}\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Ker non banale; rango $= 1 \Rightarrow \dim \text{Ker} = 1$

$= \mathcal{L}\{(9, 4)\}$ $\dim V_2 = 2 - 1 = 1$

$V_3 = \text{Ker}(A - 3I) = \text{Ker}\begin{pmatrix} -9 & 9 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \text{Ker} = 1 = \mathcal{L}\{(1, 1)\}$

$$(x, y) / \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = y$$

- **Proposizione:** → Se stiamo parlando di endomorfismi.

Siano $v_1, \dots, v_k$ autovettori relativi ad autovalori distinti. Allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti

- **Corollario**

Se il polinomio caratteristico ha n radici distinte, allora i corrispettivi autovettori formano una base (di V) $f: V \to V$

Esercizio: (matrice senza autovalori reali)

Lezione 39
10/05/2016

Nel campo complesso il polinomio caratteristico ha sempre soluzioni

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \quad p(\lambda) = \det\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2+1$$

Se $\lambda^2+1=0$ => non ci sono autovalori reali

DIAGONALIZZABILITÀ

Un endomorfismo $f: V_n \to V_n$ si dice "diagonalizzabile" se ammette una base di autovettori.

↳ oppure "semplice"

di V

Sia f diagonalizzabile. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di autovettori. Rispetto a questa base calcolare la matrice rappresentativa.

$$v_1 \xrightarrow{f} \lambda_1 v_1$$
$$v_2 \xrightarrow{f} \lambda_2 v_2$$
$$\vdots$$
$$v_n \xrightarrow{f} \lambda_n v_n$$

$$M_f = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$

→ matrice rappresentativa di un endomorfismo diagonalizzabile

⊙ Come fare a riconoscere se un endomorfismo è diagonalizzabile?

Criterio:

$$1 \le \underbrace{MG(\lambda)}_{\dim V_\lambda} \le MA(\lambda)$$

$$1 \le \dim V_\lambda < MA(\lambda)$$

Un endomorfismo $f: V \to V$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$

1) gli autovalori sono tutti reali
2) la $\dim V_\lambda = MA(\lambda) \ \forall \lambda$

} => esiste una base di autovettori

⊙ L'identità è una matrice diagonalizzabile? Sì, è già in forma diagonale.

Se consideriamo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (matrice identica) ha come autovalore 1 con $MA = 2$ e $MG = 2$ perché l'autospazio relativo è tutto $\mathbb{R}^2$

MATRICI DIAGONALIZZABILI

$\Leftrightarrow$ è simile ad una matrice diagonale

$\Leftrightarrow \exists$ P invertibile : $P^{-1} \underline{A} P = D$

↳ due matrici simili rappresentano lo stesso endomorfismo in basi diverse.

Lezione 39
10/05/2016

$= (5-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)+3(1-\lambda) =$ omettendo tutti i passaggi $=$

$= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4)$

Ponendo: $(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4)=0$ allora $\underbrace{\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4}_{\text{è diagonalizzabile per il II° punto}}$

Autospazi:

$\dim(V_{\lambda_1}) = 1$ $\qquad \dim(V_{\lambda_2}) = 1$ $\qquad \dim(V_{\lambda_3}) = 1$

$1 \leq MG(\lambda) \leq MA(\lambda)$

$$V_1 = \mathrm{Ker}(A-I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\{(-6, 3, -5)\}$$

1 vettore perché dim Ker = 1

$$V_2 = \mathrm{Ker}(A-2I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\{(1,0,1)\}$$

$$V_3 = \mathrm{Ker}(A-4I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\{(3,0,1)\}$$

Una base di autovettori è: $B = \{\underset{I}{(-6, 3, -5)}, \underset{II}{(1,0,1)}, \underset{III}{(3,0,1)}\}$

3) $P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} I & II & III \end{matrix} \end{array}$ $\qquad P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} I & II & III \end{matrix} \end{array}$

è invertibile perché $\det(P) \neq 0$

l'ordine è importante $\Rightarrow$ ad ogni colonna scelta in P, in D ci va il rispettivo autovalore

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Lezione 39
10/05/2016

Proposizione:

Siano V_1 e V_2 autovettori di una matrice simmetrica corrispondenti ad autovalori λ_1, λ_2 distinti. Allora $V_1 \cdot V_2 = 0$

$$S \text{ simmetrica} \iff S^T = S$$

Dimostrazione:

Ricordiamo $\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{v}^T\cdot\vec{w}$

$$(S\cdot V_1)\cdot V_2 = (SV_1)^T V_2 = V_1^T S^T V_2 = V_1^T(SV_2) = V_1\cdot(SV_2)$$

$$SV_1 = \lambda_1 V_1 \qquad SV_2 = \lambda_2 V_2$$

$$\lambda_1(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2) = (\lambda\vec{v}_1)\cdot\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 0$$

$$\lambda_1(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2) = \lambda_2(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2).$$

Esercizio:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{diagonalizzabile in quanto simmetrica}$$

⊖ Calcolare autovalori, autospazi e matrice P: $P^{-1}\cdot A\cdot P = D$ (diagonale)

Autovalori: $\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(8-\lambda)-4 =$

$$= 40 - 5\lambda - 8\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 13\lambda - 36$$

Controllo → $\lambda = \dfrac{13 \pm \sqrt{169+144}}{2} = \begin{cases}\lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = 4\end{cases}$

$V_9 = \mathcal{L}\{(1,2)\}$ $\qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$V_4 = \mathcal{L}\{(-2,1)\}$

V_9 è ortogonale a V_4 $\qquad (1,2)(-2,1) = -2+2 = 0$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$\uparrow V_9 \quad \uparrow V_4$

$\dfrac{(1,2)}{\sqrt{5}} \qquad \dfrac{(-2,1)}{\sqrt{5}}$

↗ ci sono vettori ortogonali di lunghezza 1

Per avere la matrice ortogonale, la dobbiamo normalizzare $\Longrightarrow$ $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ → Matrice ortogonale

Lezione 40 (2 fogli)
Esercitazione 13
12/05/2016

Esercizio:

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \to (x+y, x+y, z)$$

⊖ Trovare Ker f, Im f, autovalori e autovettori.

$$\text{Ker } f: \begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow (x, -x, 0)$$

dim Ker $f = 1$
dim Im $f = 2$

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \Rightarrow f(\vec{v}) - \lambda \vec{v} = \vec{0}$$

Annullo il polinomio caratteristico $=0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)^2 - (1-\lambda) = 0$$
$$\Rightarrow (1-\lambda)(1+\lambda^2-1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 2$$

Abbiamo 3 autovalori reali distinti ⇒ Endomorfismo semplice.

Attenzione: Se compare il valore $\lambda = 0$ → è quello che ha come autospazio il vettore nullo.

$$V_0 = \text{Ker } f \quad (x, -x, 0) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \mathcal{L}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = (x, x, 0)$$

Lezione 40
Esercitazione 18
12/05/2016

Esercizio: (DIAGONALIZZAZIONE) → Continuazione esercizio precedente

$$P\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

det = -6 linearmente indipendenti e i vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$

Dopo tutti i calcoli otteniamo:

$$P^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{3}{6} & -\frac{3}{6} & \frac{3}{6} \\ \frac{7}{6} & \frac{3}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & 0 & -\frac{2}{6} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \cdot M \cdot P = D$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{6} & -\frac{3}{6} & \frac{3}{6} \\ \frac{7}{6} & \frac{3}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & 0 & -\frac{2}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{28}{6} & \frac{12}{6} & -\frac{4}{6} \\ \frac{4}{6} & 0 & \frac{4}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Tutti zeri tranne la diagonale che contiene gli autovalori che rispecchiano la posizione degli autovettori.

⇒ Questo serve a studiare le rotazioni nello spazio.

$V_3 \quad \vec{v} / f(\vec{v}) = -3\vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - z \\ -x + 4x - 2z - z = 0 \\ -x - 2x + z + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x - x \\ 3x - 3z = 0 \\ -x - 2x + x + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = z \Rightarrow z = x \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Soluzioni dell'insieme $(x, x, x) \Rightarrow$

$\Rightarrow V_3$ ha dim $= 1$

Sappiamo che $1 \le \underbrace{\dim V}_{MG} \le MA$

Esercizio: Endomorfismi semplici → n° autovalori = dim spazio partenza

Endomorfismo generale = esercizio precedente

Endomorfismo ancora più bello:

$$f(x, y, z) = (x + 3z, 3y, x + z)$$

$$f: R^3 \to R^3$$

$$Mf = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{matrice simmetrica}$$

$$\text{Ker } f: \begin{cases} x + 3z = 0 \\ 3y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = 0 \\ -9z + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{Ker } f = \vec{0}$ è un endomorfismo iniettivo

$\Rightarrow \dim \text{Ker } f = 0$ e $\dim \text{Im} = 3 = R^3$

Dim Im è uguale alla dim dello spazio di partenza ma anche a quello di arrivo $\Rightarrow$ è anche un endomorfismo suriettivo $\Rightarrow$ endomorfismo biettivo

ISOMORFISMO

Autovalori:

$$|Mf - \lambda I| = 0 \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 1-\lambda & 0 & 3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 3-\lambda \\ 3 & 0 & 1-\lambda & 3 & 0 \end{array}\right| = (1-\lambda)^2(3-\lambda) - 9(3-\lambda) = 0$$

↓ Continua

$$\left.\begin{array}{l} \overline{V_3}\cdot\overline{V_4} = 0\cdot x + y\cdot 0 + 0\cdot x = 0 \\ \\ \overline{V_4}\cdot\overline{V_{-2}} = x^2 + 0 - x^2 = 0 \\ \overline{V_3}\cdot\overline{V_{-2}} = 0 \end{array}\right\}$$

vettore preso da V_3 — vettore preso da V_4

Endomorfismi simmetrici sono le matrici che è precisamente: si parla di rotazione rigida nello spazio di 45°.

Cerchiamo una base per calcolare la matrice P che è quella che ci permette di diagonalizzare:

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 01 \\ 10 \\ 01 \end{matrix} \qquad M_f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice P è simmetrica: $\det P = 1+1=2$

Calcoliamo P^{-1}: dopo vari passaggi arriviamo a:

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Adesso facciamo $P^{-1} M \cdot P = D$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$V_{-1}\begin{cases} -2x+\sqrt{2}\,z=0 \\ 2y=0 \\ \sqrt{2}\,x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}z \\ y=0 \\ \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}z-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}z \\ y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,1\right) \Rightarrow \boxed{(\sqrt{2},0,2)}$$

I tre autospaz. sono ortogonali e quindi si parla di endomorfismo semplice

⑥ Come sono fatte le matrici ortogonali? (2×2)

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p^2 + r^2 = 1 \\ q^2 + s^2 = 1 \\ pq + rs = 0 \end{cases}$$

Cos'è che ci dà questo tipo di risultati?

$$\Rightarrow \boxed{P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}} = R_\theta \qquad \det P = 1$$

se moltiplichiamo $R_\theta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\,\text{sen}(\theta) \\ x\,\text{sen}(\theta) + y\cos(\theta) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ ROTAZIONE del piano $\mathbb{R}^2$ di un angolo θ

(Questa matrice, applicata ad un vettore, ci dà la rotazione di θ del vettore stesso)

Avendo la matrice R_θ: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, cerchiamo gli autovalori.

$$R_\theta - \lambda I = \begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(R_\theta - \lambda I) = (\cos\theta - \lambda)^2 + \text{sen}^2\theta$$

$$\Rightarrow \cos^2(\theta) - 2\cos(\theta)\lambda + \lambda^2 + \text{sen}^2\theta$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\cos(\theta)\lambda + 1 = 0$$ (equazione di II° grado)

$$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = \cos^2\theta - 1$$ $\Rightarrow$ soluzioni reali solo quando $\cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \cos^2\theta = 1 \Rightarrow$ se e solo se $\theta = 0$ oppure $\theta = 180°$

Matrici ortogonali in $\mathbb{R}^{3,3}$ (solo esempio):

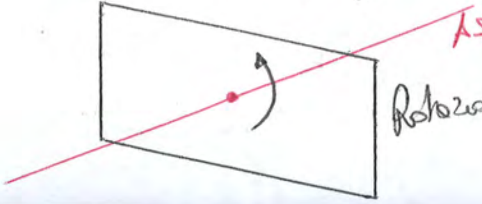
$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cosa rappresenta M_θ in $\mathbb{R}^3$?

$$M_\theta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ → Questo ci dice che abbiamo almeno un autovalore 1 e il relativo autovettore (0, 0, 1)

Autospazio $V_{(1)} = \mathcal{L}\{(0,0,1)\}$

Rappresenta una rotazione in $\mathbb{R}^3$ con asse fisso $(0,0,1)$ →



Rotazione d'un angolo θ in $\mathbb{R}^3$

Le coniche

Lezione 43 (4 fogli)
17/05/2016

⊖ Considerazioni sulle matrici 2x2:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{Traccia}(A) \overset{def}{=} a+d$$

$$tr(A) = a + d$$

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

$$Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - cb = \underbrace{ad - cb}_{\det A} - \underbrace{(a-d)}_{Tr(A)}\lambda + \lambda^2 =$$

$$\det A - Tr(A)\cdot\lambda + \lambda^2$$

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = \lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1+\lambda_2)\lambda + \lambda^2$$

Esercizio/teoria:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad q(x,y) = 5x^2 + 4xy + 8y^2$$

Problema: Cosa rappresenta $q(x,y)=1$? Cioè, cosa rappresentano i punti $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : q(x,y)=1\}$?

$$\boxed{5x^2+4xy+8y^2} = \boxed{1}$$

polinomio omogeneo di grado 2

la scriviamo in nuove coordinate

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 1$$

sempre uguali

autovalori di A

$$R_\theta : R_\theta^{-1}\cdot A \cdot R_\theta = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

4, 9 sono gli autovalori di A

diagonalizza A

A è diagonalizzabile

$$= R_\theta \cdot A \cdot R_\theta = R^T \cdot A \cdot R_\theta$$

perché è ortogonale

$$R_\theta \cdot A \cdot R_\theta = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad (\star)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (\cdot)$$

abbiamo fatto una rotazione della matrice.

lo sostituiamo qui

$$q(x,y) = (xy \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})) \quad (\cdot\,\cdot)$$

Perché Rθ è ortogonale

$$(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \overset{(\cdot)}{=} \left(R_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)^T = (X\ Y)\, R_\theta^T = (X, Y)\, R_\theta$$

Lezione 43.
17/05/2016

⊖ Come si fa a classificare le coniche?

Data una conica:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad (*)$$

Proviamo a cercare nuove coordinate X, Y tale che la conica nelle nuove coordinate abbia espressione:

$$AX^2+2BXY+CY^2+F'=0$$

$$\begin{cases} x = X+u \\ y = Y+v \end{cases}$$

N.B.: La parabola è l'unica che non ha simmetria.

Sostituiamo queste condizioni in (*) e otteniamo:

$$A(X+u)^2+2B(X+u)(Y+v)+C(Y+v)^2+$$
$$+2D(X+u)+2E(Y+v)+F=0$$

Quindi:

$$AX^2+2BXY+CY^2+2(Au+Bv+D)X+2(Bu+Cv+E)Y+$$
$$+ \text{-- -- -- -- -- --} = 0.$$

Vogliamo che (trovare u e v tale che)

$$\begin{cases} Au+Bv+D=0 \\ Bu+Cv+E=0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} A & B & -D \\ B & C & -E \end{array}\right)$$
$$\underbrace{\begin{matrix} A & B \\ B & C \end{matrix}}_{A}$$

⊖ Se $\det A \neq 0$ allora il sistema avrà sempre soluzione unica (u,v) e sarà il centro della conica.

⇒ la conica può così ridotta:

$$AX^2+2BXY^2+CY^2+F'=0$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$ Troviamo gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+F'=0$ oppure .... $=-F'$

⊖ Procedure per la classificazione delle coniche:

1) Scrivere la matrice associata 3x3 all'equazione di II° grado

$$\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$$

↓ Continua

Esercizio:

Lezione 43.
17/05/2016

$$11x^2 - 24xy + 4y^2 + 94x - 48y + 99 = 0$$

$$M = \left(\begin{array}{ccc|cc} 11 & -12 & 47 & 11 & -12 \\ -12 & 4 & -24 & -12 & 4 \\ 47 & -24 & 99 & 47 & -24 \end{array}\right) \Rightarrow \det = 4356 + 13536 + 13536 - 8836 - 6336 + -14256 = 2000 > 0$$

$$r(M) = 3$$

$$\begin{cases} x = X + u \\ y = Y + v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11u - 12v + 47 = 0 \\ -12u + 4v - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 3 \end{cases}$$

e sostituendo nell'equazione della conica otteniamo:

$$11X^2 - 24XY + 4Y^2 = 20$$

Troviamo gli autovalori di $\begin{pmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ svolgendo i calcoli otteniamo $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 20$

⊖ Somma = Tr = 15 = somma diagonale principale

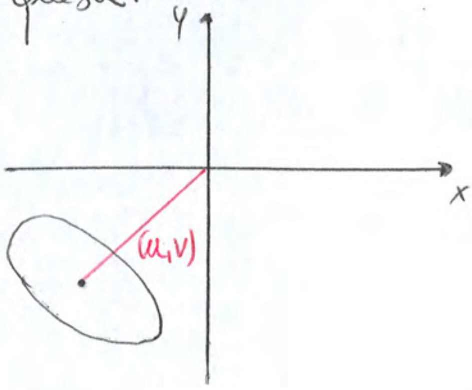
⊖ prodotto = det = -100

$\Rightarrow$ IPERBOLE

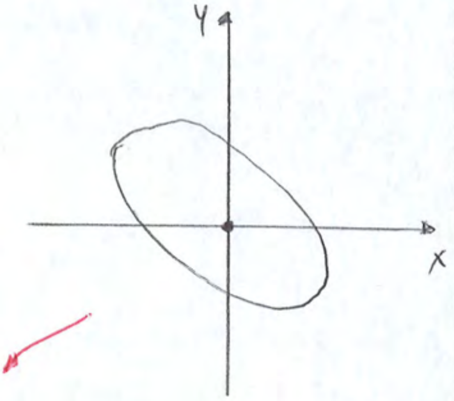
$$-5X^2 + 20Y^2 = 20$$

Teoria:

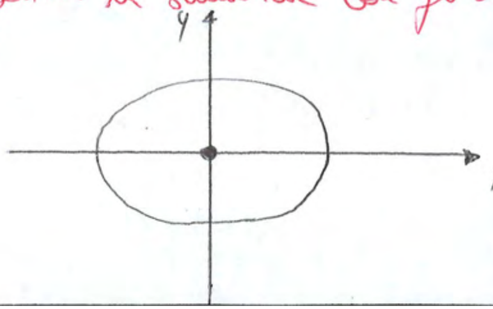
Di solito abbiamo una situazione come questa:



Da qui possiamo
$\Rightarrow$ ruotare l'ellisse oppure il sistema d'assi in modo da ottenere



In seguito, dobbiamo ancora ruotare l'ellisse o il sistema d'assi in modo che venga rispettata la simmetria con gli assi:



Lezione 43
17/05/2016

$$\begin{cases} x = X - \frac{3}{8} \\ y = Y + \frac{7}{8} \end{cases}$$

=> Sostituendo nell'equazione della conica otteniamo: [autovalori discordi]

$$(\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{X + 5Y})(\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{3X - Y}) = 0$$

=> Unione di due rette

Ritornando indietro abbiamo

$$(\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{x + 5y - 4})(\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{3x - y + 2}) = 0$$

Perché $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} < 0$ e gli autovalori sono discordi => $\cap$ tra 2 rette se $\mu = 0$ di $\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 = \mu$ (forma canonica della conica)

Se λ_1 o λ_2 = zero μ => rette ∥.

Esercizio:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 6x - 3y + 2 = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3/2 \\ 3 & -3/2 & 2 \end{pmatrix} \qquad r(M) = 2$$

Provare a risolvere la conica rispetto a y:

$$y = \frac{4x + 3 \mp 1}{2} \Rightarrow (\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{2y - 4x - 2})(\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{2y - 4x - 1}) = 0$$

$$y^2 - (4x + 3)y + 4x^2 + 6x + 2 = 0$$

Esercizio:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y + 5 = 0$$

Autovalori di $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ sono 0 e 10 $\quad 10x^2 + 1 = 0$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad r(M) = 2$$

$$x^2 + (6y + 4)x + 9y^2 + 12y + 5 = 0$$

$\Delta = -4 < 0$ => non ci sono soluzioni => INSIEME VUOTO

$$\begin{matrix} x = X + \mu \\ y = Y + \nu \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \mu + 3\nu + 2 = 0 \\ 3\mu + 9\nu + 6 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \boxed{\mu = -3\nu - 2} \Leftarrow$ Soluzione => infiniti centri => potrebbe essere una retta.

Sostituiamo

↓

QUADRICHE

Lezione 44 (3 fogli)
19/05/2016

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

Si associa una matrice:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

bisogna determinare il tipo di quadrica.
(classificazione NON banale)

Esempi:

SFERA: $x^2+y^2+z^2=1$

PUNTO: $x^2+y^2+z^2=0$ (la somma dei quadrati è zero se e solo se $x=y=z=0$)

INSIEME VUOTO: $x^2+y^2+z^2=-1$

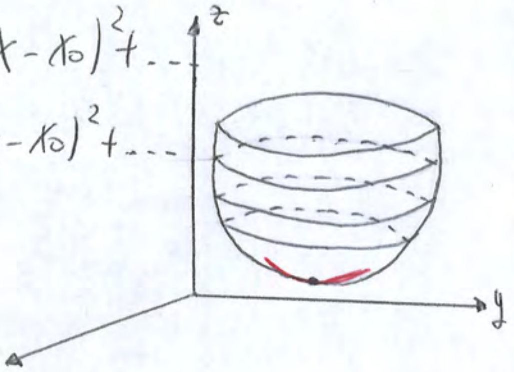
Ci sono 17 esempi di quadriche, ma non li faremo tutti

Ricordiamo le espressioni di Taylor.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\dots$$

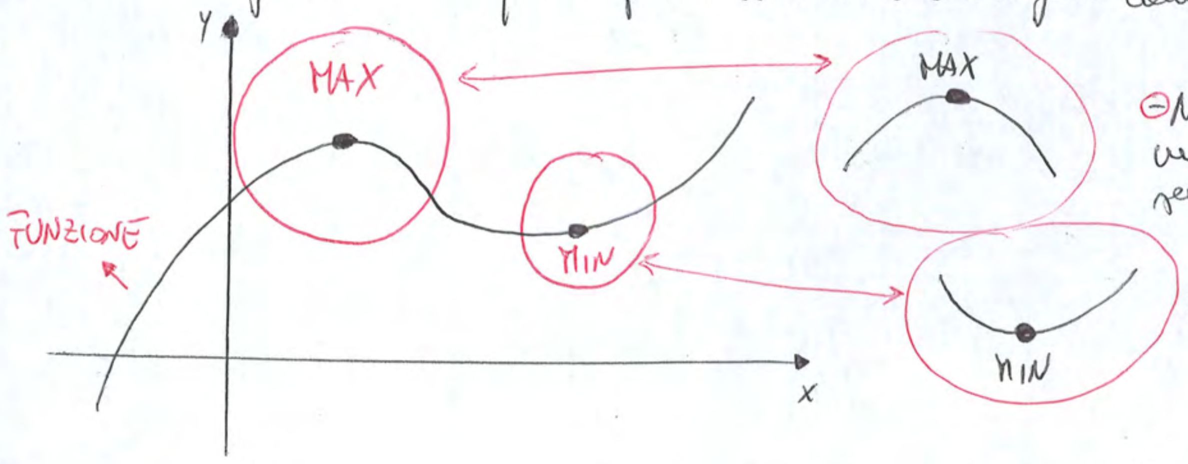
$$y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}g''(x_0)(x-x_0)^2+\dots$$

$\Rightarrow 0$
punto stazionario
(tangente parallela all'asse)



Avendo una funzione, questa ha punti stazionari:

⊖ Ci mettiamo negli intorni di questi punti e vediamo che vengono delle "parabole"



⊖ Nell'intorno molto piccolo sembrano delle "parabole" con le relative concavità.

Per studiare MAX e MIN si studiano poi le quadriche

Lezione 44
19/05/2016

Esercizio: (prodotto di 2 piani → da una quadrica)

$$(x-2y+z)(x+3y+4z-1)=0$$

Viene zero solo se uno dei due piani è zero!

Come si classificano le quadriche:

Abbiamo l'equazione della quadrica: tentiamo di eliminare il termine lineare

⊖ 1) Provare ad eliminare la parte lineare:
se è possibile, la quadrica sarà di questo tipo:

$$\boxed{a_{11}X^2+2a_{12}XY+2a_{13}XZ+a_{22}Y^2+2a_{23}YZ+a_{33}Z^2+a_{44}=0}$$

$$\begin{cases} x = X+u \\ y = Y+v \\ z = Z+t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ per cui se è possibile, si può sfruttare la matrice 3x3 associata:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ scrivere poi il polinomio caratteristico

$\Rightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ autovalori della matrice

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 \bar{X}^2+\lambda_2 \bar{Y}^2+\lambda_3 \bar{Z}^2=\boxed{K}}$$

con $K \in \mathbb{R}$ $\quad X+Y^2-Z^2=0$

valore da calcolare

⊖ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0 \quad K>0 \Rightarrow$ "ELLISSOIDE"

⊖ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0 \quad K<0 \Rightarrow$ "VUOTO"

⊖ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow$ "SFERA"

⊖ $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \quad \lambda_3 < 0 \quad K>0 \Rightarrow$ "IPERBOLOIDE"

In fine: per classificare una QUADRICA, bisogna vedere come sono fatti gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e K.

↓ continua

Lezione 44
19/05/2016

Esercizio: $x^2+y^2-z^2+xy+xz+4x-8y-1=0$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & -4 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=33 \quad \begin{cases} x = X + u \\ y = Y + v \\ z = Z + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} u+\frac{v}{2}+\frac{t}{2}+2=0 \\ \frac{u}{2}+v-4=0 \\ \frac{u}{2}-t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=-4 \\ v=6 \\ t=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

Alla fine otteniamo

$$X^2+Y^2-Z^2+XY+XZ=33$$

$$\boxed{p(\lambda)=-\lambda^3+\lambda^2+\frac{3}{2}\lambda-1}$$

$+ \quad - \quad +$

Regola di Cartesio:

⊖ se si susseguono due segni uguali — radice negativa

⊖ se si susseguono due segni opposti + radice positiva

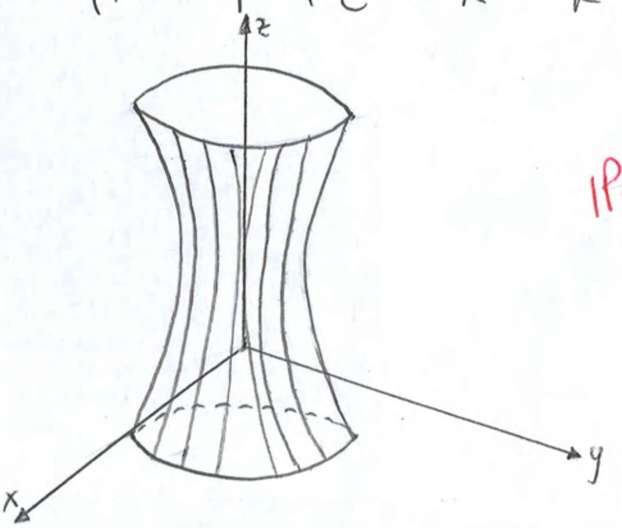
$\Rightarrow$ perciò si può avere ⊖ radici reali

⊖ 1 radice reale e 2 complesse

N.B: Se la matrice è simmetrica ha gli autovalori reali

$$\Rightarrow \lambda_1 \bar{X}^2+\lambda_2\bar{Y}^2-\lambda_3\bar{Z}^2=33$$ (le radici sono per forza reali)

$$(\bar{X}^2+\bar{Y}^2+\bar{Z}^2=K \quad K\in\mathbb{R})$$

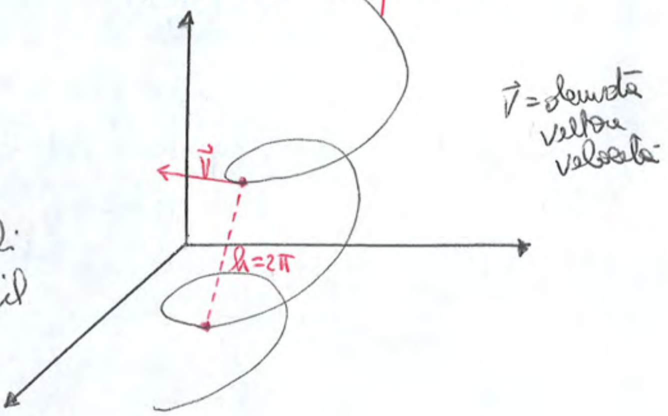


IPERBOLOIDE A UNA FALDA

è derivabile ← **ELICA CIRCOLARE** → non si chiude mai, rimane aperta e varia solo la parte z

$P(R\cos t, R\sin t, ht)$.

$t \in \mathbb{R} \quad h \neq 0$



- ⊖ È iniettiva
- ⊖ sen e cos non sono contemporaneamente nulli
- ⊖ la derivata non è mai nulla ed è h che il PASSO dell'elica rimane costante

Se $P'(t) = (-R\sin t), R \cos t, 3)$

per $t=0$ $P = (R, 0, 0)$ e

per $t=\pi$ $P = (0, -R, 3\pi)$

Esempi:

$$\gamma \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$$

⊖ le tre funzioni sono continue da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$P = (t, t^2, t^3)$

per $t=0$ $P_0 = (0,0,0)$

per $t=2$ $P_2 = (2, 4, 8)$

$$\gamma' \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2t \\ z' = 3t^2 \end{cases}$$

per $t=0$ $P' = (1,0,0) \Rightarrow \forall t \ P' \neq \vec{0}$

$\Rightarrow P$ non si ferma mai e punti $\vec{v} \neq 0$

CURVA REGOLARE

Esempio:

$$\gamma : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ z = t^4 \end{cases} \Rightarrow \gamma' \begin{cases} x' = 2t \\ y' = 3t^2 \\ z' = 4t^3 \end{cases}$$

per $t=0$ $P_0 = (0,0,0) \to$

0 è un punto in cui la pallina si ferma

CURVA NON REGOLARE

Vettore tangente alla curva

Consideriamo:

$P'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ λ $\hat{t}$ versore tangente

Se

$$r : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 \\ z = 1 - 6t \end{cases}$$

- ⊖ Regolare?
- ⊖ Per $t=0$ com'è $\hat{t}$?

↓ continua

Facciamo partire il cammino da A con $t=0$ ⇒ dobbiamo riformulare tutte le equazioni in t.

$$\gamma : \begin{cases} (-t+1, 2t, 0) & 0 \le t < 1 \\ (0, -2t+4, 3t-3) & \textcircled{1} \le t < 2 \\ (t-2, 0, -3t+9) & 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

→ perché già visto e $\delta : [0, 1]$, allora sappiamo che $\delta = t - 1$

→ stesse cose: $\omega = t - 2$

⇒ Regolare a tratti perché le derivate prime sono diverse.

Esercizio:

$$\gamma : \begin{cases} x = \ln(1+t) \\ y = t - t^2 \\ z = e^t \end{cases} \qquad t \in [2, 3]$$

→ non c'è problema perché $t = -1$ è escluso dall'intervallo.

- è regolare?
- si può calcolare $\hat{t}$ per $t=2$?

$$\gamma' : \begin{cases} x' = \frac{1}{1+t} \neq 0 \text{ per l'intervallo} \\ y' = 1 - 2t \\ z' = e^t \neq 0 \ \forall t \end{cases}$$

⇒ derivata continua anche perché non c'è mai $t = -1$

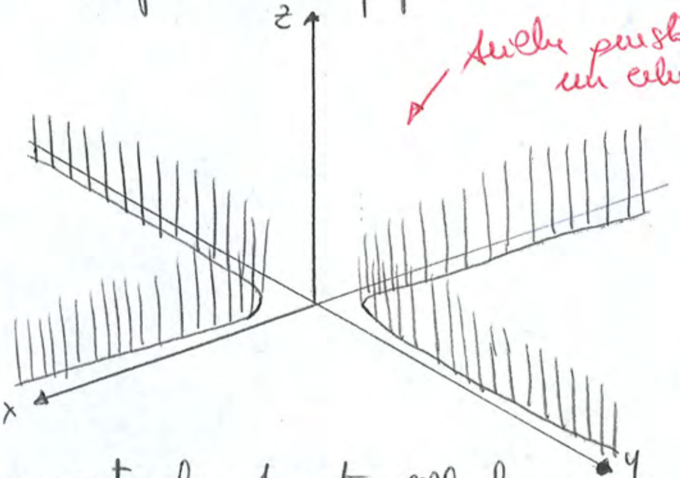
La derivata prima $\neq 0$, il punto non si ferma e la velocità $\neq 0$.

$P_2' \left(\frac{1}{3}, -3, e^2 \right)$

$$\|P\| = \sqrt{\frac{1}{9} + 9 + e^4} = \sqrt{\frac{82}{9} + e^4}$$

I cilindri possono essere anche di altri tipi: i cilindri propriamente detti sono anche di questo tipo.

$x^2-y^2=1$
$xy = 1$
} Sono 2 iperboli



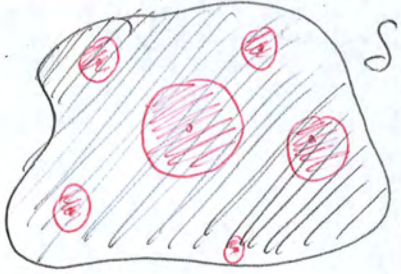
Otteniamo questo perché non c'è alcuna restrizione di z

In $\mathbb{R}^3$ prendiamo una curva e poi un punto, facendo partire delle linee otteniamo dei cilindri:

"ANALISI"

Iniziamo parlando di 3 tipi di insiemi: aperto, chiuso e bordo.

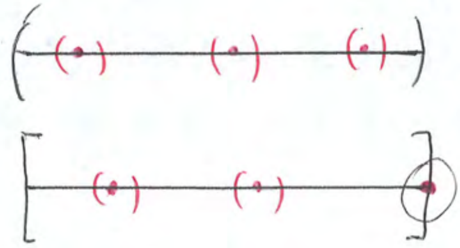
⊖ Insieme aperto:



$\forall p \in S \quad \exists B_p \subset S$

↳ sfera di centro p

ovvero: è aperto quando per ogni punto dell'insieme S deve esistere una sfera D (o B) che ha centro in p totalmente contenuta in S

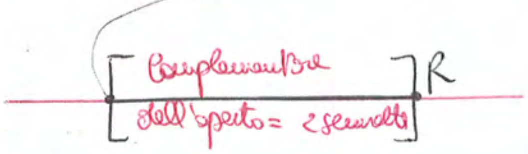


Non troviamo una sfera

⊖ Insieme chiuso:

⊖ Per ogni punto all'interno dell'insieme troviamo una sfera. Se ci mettiamo sul bordo invece no.

⊖ L'insieme chiuso è il complementare di un insieme aperto



Continua ↓

Proposizione:

Una funzione $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è continua $\Leftrightarrow$ sono continue le sue componenti. Per questo studieremo principalmente funzioni a valori scalari (per cui un solo valore) cioè:

$$f : \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^n \to \boxed{\mathbb{R}} \to \text{Cioè abbiamo un solo termine}$$

Una funzione è uniformemente continua se δ non dipende dal punto scelto (x_0).

Proposizione:

Se f e g sono continue su $\overset{\text{insieme}}{\Omega} \in \mathbb{R}^n$, allora $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ sono continue su Ω. $\frac{f}{g}$ è continua su $\Omega - \{\vec{x} : g(x) = 0\}$

f e g sono definite su un dominio comune ovvero Ω

Proposizione: Date:

$$f : \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad g : \text{dom} g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p,$$

Se consideriamo l'applicazione composta

$$h = g \circ f,$$ anche questa è continua.

schematizzando otteniamo

$$x_0 \xrightarrow{f} f(x_0) \xrightarrow{g} g(f(x_0))$$

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

  ↳ piccolo a piacere

Studieremo le funzioni scalari ovvero con spazio di arrivo $= \mathbb{R}$

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \qquad \forall A > 0\ \exists \delta : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x)| > A$

  ↳ grande a piacere

- $\lim_{x\to \infty} f(x) = l \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0 : \|x\| > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
- $\lim_{x\to \infty} f(x) = +\infty \qquad \forall A > 0\ \exists B > 0 : \|x\| > A \Rightarrow |f(x)| > B$

  ↳ quando x è molto grande, anche f(x) deve essere molto grande

Se parliamo di funzioni scalari possiamo parlare di ± ∞

Esercizio:

$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$ → Si può estendere anche ai punti in cui non è definita?

$\text{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (I polinomi sono funzioni continue)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \overset{?}{=} 0$$ Come si risolve?

$$x^4+y^4 \le x^4+2x^2y^2-y^4 = (x^2+y^2)^2$$

$$\left|\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right| \le x^2+y^2 < \varepsilon \quad \text{se } \|x\| < \boxed{\sqrt{\varepsilon}} = \delta$$

- Se ε è 0 allora tutto va a 0.

Esercizio: Verificare che $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} = +\infty$$

$$x^2+y^2 \le x^2+2|x|\,|y|+y^2 = (|x|+|y|)^2$$

In particolare $\boxed{\|(x,y)\| \le |x|+|y|}$

$$\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} = \frac{|x|+|y|}{\|(x,y)\|^2} = \underbrace{\frac{|x|+|y|}{\|(x,y)\|}}_{\ge 1} \cdot \frac{1}{\|(x,y)\|}$$

Se la funzione va a 0:

$$\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} \ge \frac{1}{\|(x,y)\|}$$

Esempio:

$$f(x,y)=\begin{cases} x e^{\frac{x}{y}} & \text{se } y\neq 0 \\ 0 & \text{se } y=0 \end{cases}$$

Calcolare se esiste il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

- $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$
- $\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

I limiti sono uguali, ma fissiamo calcolati solo lungo x e lungo y.

Se invece facciamo:

$\lim_{x\to 0} f(x, Kx) =$ obtiamo

Serve a restringere la funzione

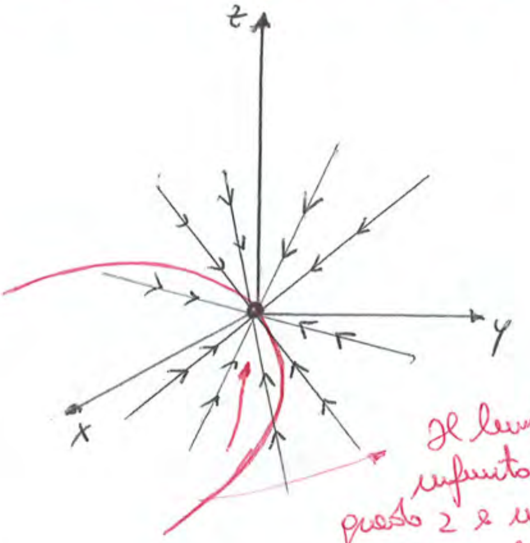
$= \lim_{x\to 0} x e^{\frac{1}{K}} = 0 \quad \forall K$

Qualsiasi restrizione della funzione consideriamo, la facciamo rispetto ad un'altra retta.

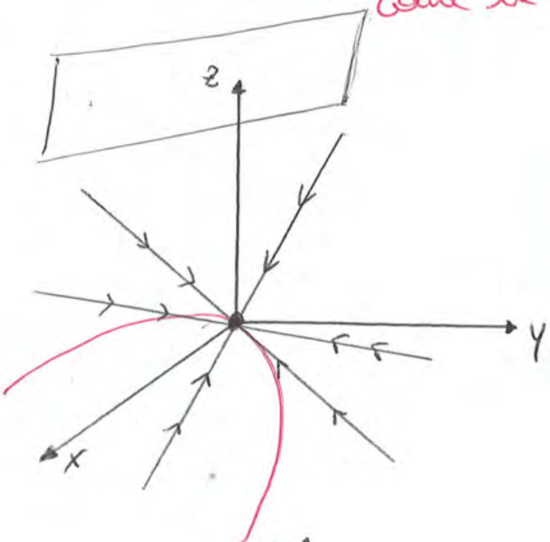
- Se prendiamo una parabola:

$\lim_{x\to 0^+} f(x, x^2) =$ obtiamo e

$= \lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ e per le rette il limite è sempre 0



Il limite va ad infinito perché la grado 2 e non 1 come la retta



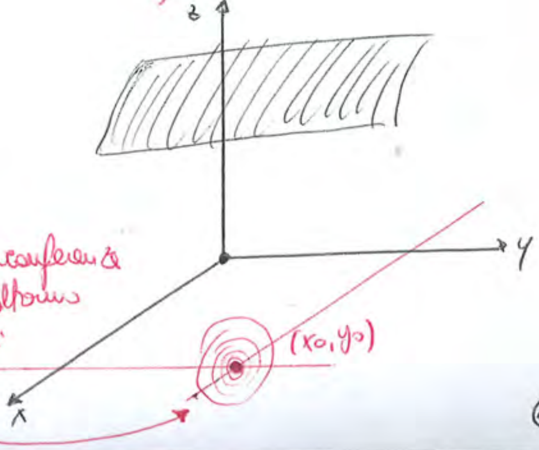
Proposizione:

f: dom $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left| f(\underbrace{x_0 + r\cos(\theta)}_{x}, \underbrace{y_0 + r\,\text{sen}(\theta)}_{y}) - l \right| < g(r)$$

$\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$ allora

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$



Se troviamo circonferenze sempre più piccole attorno al punto, questo ci può dire qualcosa di importante

Gradiente di una funzione:

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$$

il gradiente in un punto (x_0,y_0) è un VETTORE

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)=\nabla f(x_0,y_0)$$

In generale

$$f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$$

$(x_1,\dots,x_n)\rightarrow$ variab. di $\mathbb{R}^n$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ → così facciamo

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=\nabla f$$

Esempio:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{dom } f=\mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cancel{2}x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cancel{2}y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\nabla f=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Elica circolare

$$\gamma \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\,\text{sen}\,t \\ z = 3t \end{cases} \Rightarrow$$ elica di passo 3, t varia da $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\gamma' \begin{cases} x' = -R\,\text{sen}\,t \\ y' = R\cos t \\ z' = 3 \end{cases} \qquad \|\gamma'\| = \sqrt{R^2\text{sen}^2 t + R^2\cos^2 t + 9} = \sqrt{R^2+9}$$

$(\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1)$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2+9}\;dt = \left[\sqrt{R^2+9}\cdot t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{R^2+9}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Curva piana

$\forall t$ il punto $P(\gamma(t)) \in \pi \rightarrow$ piano osculatore

piano generico: $ax + by + cz + d = 0$

$$\gamma \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \qquad a(x(t)) + b(y(t)) + c(z(t)) + d = 0$$

↳ è zero quando tutti i coefficienti sono zero (d)

Esempio:

Consideriamo la seguente curva:

$$\gamma \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t \\ z = 4t+6 \end{cases}$$

è una curva piana? Sì perché una volta che passa per il punto $(1,0,6)$ e direzione $(1,2,4)$; sostituendo la γ nel piano generico abbiamo:

$$a(t+1) + 2bt + c(4t+6) + d = 0$$

$$at + a + 2bt + 4ct + 6c + d = 0$$ e poniamo:

$$\begin{cases} a + 6c + d = 0 \\ a + 2b + 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -a - 6c \\ b = -\frac{a+4c}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

↳ termini senza la t (prima equazione)

↳ parte che rimane dopo aver raccolto la t (seconda equazione)

↓ Continua

Lezione 49 (3 fogli)
26/05/2016

Gradiente:

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

stessa cosa ma con strutture diverse

$$\vec{f}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Matrice jacobiana

$$\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \qquad f_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \partial\vec{f} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$$

Esempio:

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y,z) = \underbrace{(\underbrace{x \cdot y \cdot z}_{f_1}, \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{f_2})} = \underbrace{(xyz)\hat{\imath} + (x^2+y^2+z^2)\hat{\jmath}}$$

stessa cosa

La jacobiana è:

$$\partial f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

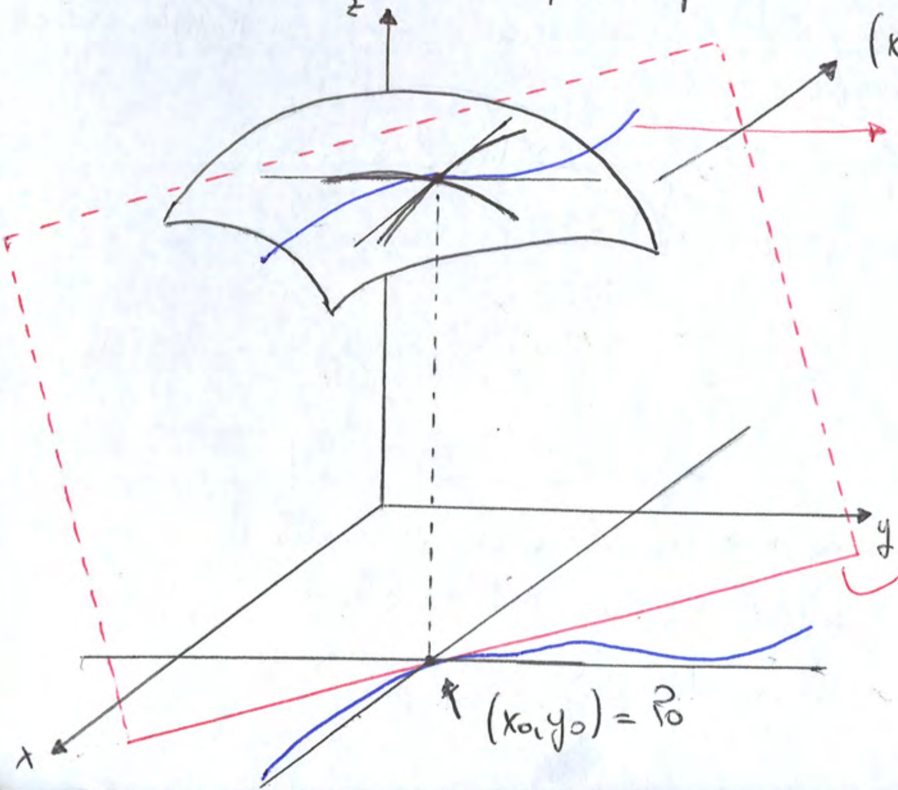
derivate parziali di f_1

derivate parziali di f_2

ci vanno le x — ci vanno le y — ci vanno le z

(Jacobiana nel punto (x,y,z))

(per definire le superfici regolari)



Curva ottenuta dal piano che taglia la superficie e passante per la retta

Retta che passa per P_0 e possiamo scrivere come: $(P_0 + t\vec{v})$
$\vec{v}$ = vettore che sta in $\mathbb{R}^2$

Possiamo così calcolare la derivata direzionale

Lezione 49
26/05/2016

Consideriamo: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Il candidato per rimpiazzare la formula è:

$$\star \quad f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

→ stessa cosa di prima $\lim_{x \to x_0} \frac{o\|x-x_0\|}{\|x-x_0\|} = 0$

il gradiente e non più f'

Per definizione di o piccolo la possiamo scrivere così

Se mostriamo la formula, basta solo sostituire e abbiamo risolto. Non è detto che la formula valga anche se il gradiente esiste.

$$(*) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

Dove $\vec{x_0}$ è un vettore $\in \mathbb{R}^n$

la formula ★ è vera se vale il limite (il limite in più variabili non è detto che esiste sempre) ⇒ per definizione: diciamo che f è differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ($x_0 \in \text{dom} f$) ⟺ il gradiente $\vec{\nabla} f(x_0)$ esiste e vale (la formula) la proprietà (*)

Esercizio:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dimostrare che non è differenziabile in (0,0). Esempio in cui il gradiente esiste ma non è differenziabile.

$$\left.\begin{array}{ll} f(x,0) = 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\ f(0,y) = 0 & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$$

esiste in (0,0)

Calcolate usando la definizione. $(0,0) = (x_0, y_0)$

Il gradiente esiste, è differenziabile?

Usiamo la formula:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}} - \nabla \overset{(0,0)}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}} \cdot (x,y)}{(x^2+y^2) \cdot \sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{=} 0$$

$f(x,y)$

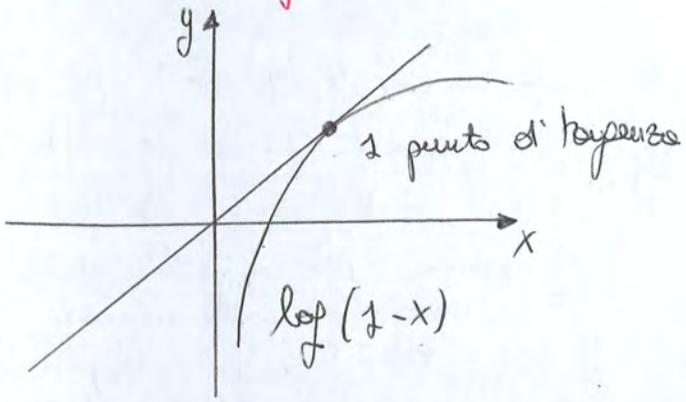
e poi esiste o non esiste?

Lezione 49
26/05/2016

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overset{=0}{f(0,0)} - \vec{\nabla} f\overset{=(0,0)}{(0,0)} \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|\log(1+x)}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{=} 0$$ Provare che è uguale a 0

N.B.: $\log(1+x) \le x$ e lo dimostriamo graficamente



funzione x = bisettrice I° e III° quadrante

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|\log(1+x)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad \text{e quindi}$$

$$\overset{*}{0} \le \frac{|y|\log(1+x)}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sempre vero per quello detto nel grafico.

Il pezzettino in rosso è ≤ 1 e $\sqrt{x^2+y^2}$ sarà più grande di $|x|$ e tutto sarà $\le |x|$.

perchè è maggiorato da $|x|$ ⟹ se il limite va a "0" allora $|x|$ va a "0" e * va a "0"

Quindi una funzione è differenziabile se ammette il gradiente e vale:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)$$

Una funzione è differenziabile (II° definizione) nel punto (x_0) ⟺ esiste il piano tangente in x_0 → 1 variabile

↳ significa prendere la funzione e togliere l'o piccolo e prendere l'approssimazione migliore ovvero:

$$z = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)$$

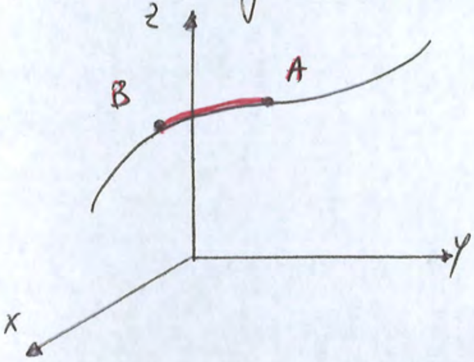
Lezione 50 (3 fogli)
Esercitazione 22
27/05/2016

Esercizio: → curva piana (verificare se è semplice e/o regolare)

$$\gamma \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Prendiamo 2 punti ∈ alla curva
$A(-1, 1, 2)$
$B(0, 0, 2)$

Trovare la lunghezza dell'arco di questa curva ovvero:



La pallina arriva in A: (sostituire i valori di A)

$$A \begin{cases} -1 = t \\ 1 = t^2 \\ 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{t = -1}$$

estremi di integrazione

Per B si fa la stessa cosa:

$$B \begin{cases} 0 = t \\ 0 = t^2 \\ 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{t = 0}$$

Troviamo adesso γ' ovvero la derivata prima:

$$\gamma' \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2t \\ z' = 0 \end{cases} \quad e \quad \|\gamma'\| = \sqrt{1+4t^2}$$

$$\Downarrow$$

Facciamo l'integrale

$$\int_1^0 \sqrt{\underbrace{1}_{\text{costante}} + \underbrace{4t^2}_{\text{funzione alla } 2^a}}\, dt \Rightarrow$$ facciamo questa sostituzione:

vanno fuori dalla definizione di lunghezza d'arco

$$\int \sqrt{[f(x)]^2 \pm a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = f(x) + \sqrt{[f(x)]^2 \pm a^2}$$

↓ Continua

Lezione 50.
Esercitazione 22
27/05/2016

Allora:

$P(x_0, y_0, z_0)$

$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_0} = m \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_0} = n$

Piano tangente: $\boxed{z - z_0 = m(x - x_0) + n(y - y_0)}$

$z = x^3y^2 - 3xy^2 + y^2 + 6y \qquad P(0, 1, z_P)$

$z_P = 7$

dom $= \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y^2 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - 6xy + 2y + 6$

Sostituendo: $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_P = -3 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_P = 8$

Allora il piano tangente è:

$z - 7 = -3(x - 0) + 8(y - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = -3x + 8y - 8 + 7 \Rightarrow \boxed{3x - 8y + 1 = 0}$

Esercizio:

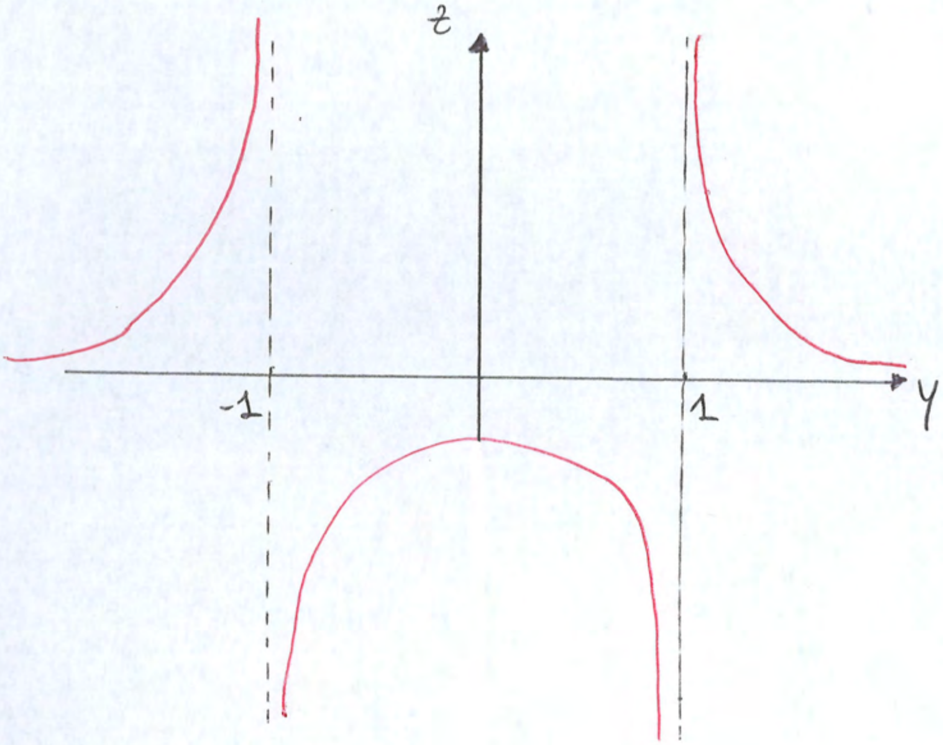
$z = e^{2x} - 2e^x - y^4 + 2y^2 \qquad P(0, 2, z_P)$

$z_P = 1 - 2 - 16 + 8 = -9 \qquad$ dom $= \mathbb{R}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x} - 2e^x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -4y^3 + 4y$

$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_P = 0$ ⓜ $\qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_P = -32 + 8 = -24$ ⓝ

Piano tangente: $z + 9 = -24(y - 2) \Rightarrow \boxed{z = -24y + 39}$



$P(1, 1, z_P)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y^2-1)^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2+y^2-1)^2}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P = \frac{-2}{1} = \underset{m}{\underset{\downarrow}{-2}} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P = \frac{-2}{1} = \underset{n}{\underset{\downarrow}{-2}}$$

Piano tangente:

$z_P = 1$

$z - 1 = -2(x-1) - 2(y-1)$

$z - 1 = -2x + 2 - 2y + 2$

In fine $\boxed{2x + 2y + z - 5 = 0}$

5

$f_x = 2xe^y$ $\qquad$ $f_y = x^2 e^y$

$\| \qquad\qquad \|$

$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}$

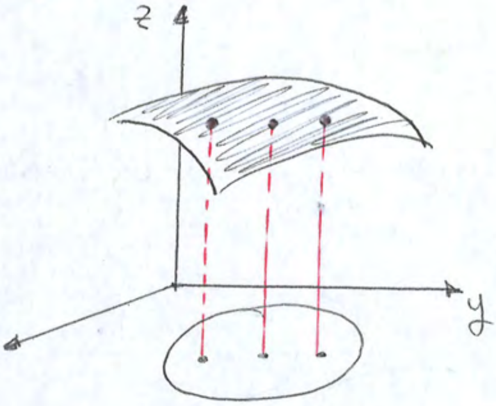
$$z = 1 + \underset{m}{\underset{\downarrow}{\textcircled{2}}}(x-1) + \underset{n}{\underset{\downarrow}{\textcircled{1}}}(y-0) = 2x + y - 1$$

$\boxed{z = 2x + y - 1}$ oppure $\boxed{2x + y - 1 - z = 0}$

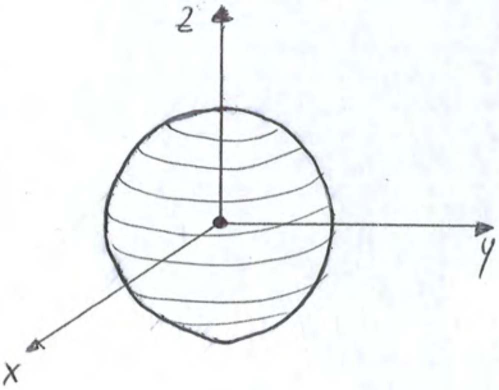
Teoria:

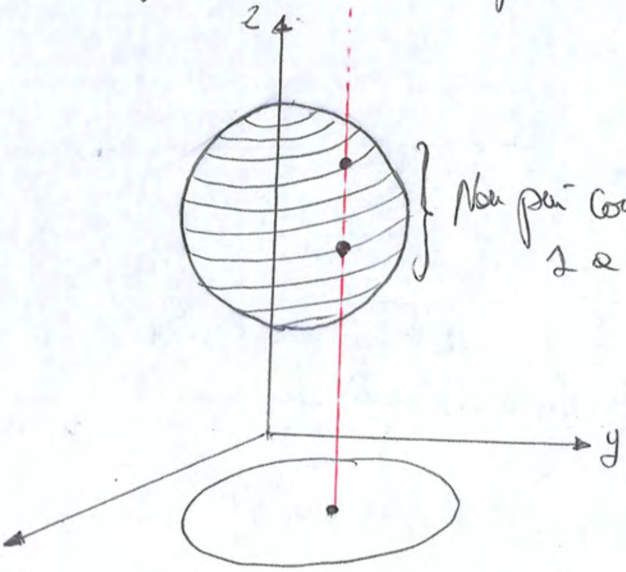
Piano tangente ad $F(x,y,z)=0$

Il grafico è una corrispondenza 1 a 1 tra dominio e grafico della funzione:



Se consideriamo $x^2+y^2+z^2=1$ è la funzione di una sfera di raggio 1 e non ha grafico.





Non più corrispondenza 1 a 1

Piano tangente alla superficie $\{x,y,z : F(x,y,z)=0\}$ nel punto $\textcircled{(x_0,y_0,z_0)}$

deve appartenere alla curva

Consideriamo: $(x(t), y(t), z(t)) \subset \{F(x,y,z)=0\}$

$$* \quad \underbrace{F(x(t), y(t), z(t)) = 0}$$

La derivata di questo rispetto a t abbiamo:

$x(t_0) = x_0$
$y(t_0) = y_0$
$z(t_0) = z_0$

↓ continua

Per questa funzione $F(x,y,z)-K$ avrà lo stesso gradiente; il valore di K indica una velocità di evoluzione

Il gradiente non dipende da K, perché è una costante. Lo stesso vale per la sfera $x^2+y^2+z^2-k^2=0$: la velocità di evoluzione è misurata dal gradiente

↳ così come diventano più grandi i cerchi attorno.

Esempio:

$$f(x,y)=x^2e^y \qquad \boxed{z=x^2e^y}=f(x,y) \text{ oppure}$$

$$F(x,y,z)=z-x^2e^y=0$$

$$\begin{cases} F(x,y,z)=\boxed{z-f(x,y)} \end{cases} \longrightarrow$$ piano tangente al grafico in base a quello detto prima.

$$\nabla F=(-2xe^y,-x^2e^y,1) \rightarrow \text{vettore in } \mathbb{R}^3$$

Sarà sempre ortogonale a $\{F=0\}$ cioè al grafico della funzione $f(x,y)$

$$\nabla F=(-2xe^y,-x^2e^y,1)$$

Calcolato nel punto $(\underset{x_0}{1},\underset{y_0}{0},\underset{z_0}{1})$ è uguale a $(-2,-1,1)$

$$-2(x-1)-1(y-0)+1(z-1)=0$$ (abbiamo usato la formula generale del piano tangente)

Serve a trovare i vettori ortogonali ad una superficie e il piano tangente

$$\boxed{z=2x+y+1}$$

Esercizio:

$$e^{xy}z^3-xz-1=0$$

Calcolare il piano tangente in $(0,2,1)$

⊖ Il punto appartiene alla superficie ⇒ ha senso calcolare il piano tangente: calcoliamo le derivate parziali

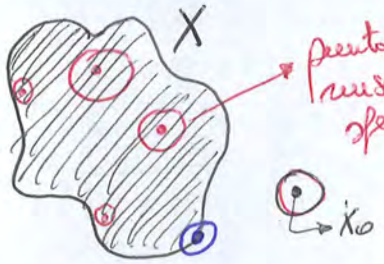
$$\frac{\partial f}{\partial x}=z^3e^{xy}y-z \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=z^3e^{xy}x \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=3z^2e^{xy}-x$$

↓ Continua

Lezione 52 (7 fogli)
31/05/2016

- **Punto interno** x_0 di un insieme $X \iff \exists \underbrace{B(x_0,\varepsilon)} \subset X$

  ↳ sfera di centro x_0 e raggio ε

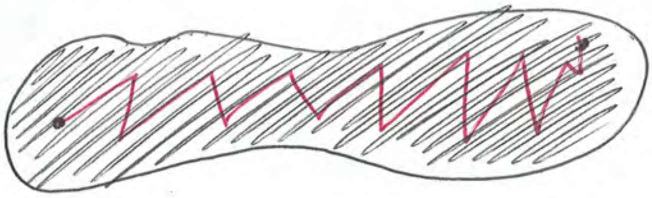


punto interno perché ingrandisco e trovo una sfera piccola tutta contenuta in X anche molto vicini al bordo (senza toccarlo)

- **Punto esterno**: se è al di fuori dell'insieme X ovvero $\mathbb{R}^2 \setminus X$ ovvero se si trova nel complementare dell'insieme. Deve esistere una sfera di centro x_0 e raggio ε (sufficientemente piccolo), inclusa nel complementare di X ovvero nello spazio non occupato da X.

x_0 punto esterno dell'insieme $X \iff \exists B(x_0,\varepsilon) \subset \complement X = \mathbb{R}^n \setminus X$

- x_0 è un punto di bordo ($x_0 \in \partial X$) se x_0 non è interno né esterno
- X è un insieme aperto $\iff$ tutti i suoi punti sono interni.
- X è un insieme chiuso $\iff$ se X è complementare di un insieme aperto
- Un insieme è connesso se presi due punti presi dall'insieme, esiste una poligonale inclusa nell'insieme che li connette.



→ insieme connesso

→ insieme sconnesso (la poligonale sta nell'ambiente e non nell'insieme)

→ insieme connesso

$$\partial X = \overline{X} - \dot{X}$$

è il bordo, è chiuso perché il complementare è un insieme aperto

Bordo di X = il più piccolo insieme chiuso che contiene X − tutti i punti interni di X

①

Lezione 52
31/05/2016

Esempio: Se abbiamo un quadrato aperto, questo è una regione di $\mathbb{R}^2$ perché il bordo è vuoto e segue la definizione ovvero che $\emptyset \subseteq Z \subseteq \partial A$

oppure

è una regione perché Z è una parte del bordo.

oppure

oppure

Sono sempre delle regioni

⊖ Arriviamo finalmente al concetto di superficie parametrizzata

Definizione:

Sia $\mathbb{R}$ una regione di $\mathbb{R}^2$. Una superficie di $\mathbb{R}^3$ (parametrizzata) è un'applicazione (o una funzione) continua (la chiamiamo δ).

$$\delta : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \boxed{Im(\delta)} \to \text{è ciò che misuriamo e visualizziamo in } \mathbb{R}^3.$$

$$\delta(u,v) = \underbrace{\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)}_{\text{Immagine ci descrive qualcosa d' dimensione 2}}$$

⊖ δ è una superficie semplice $\iff$ se restringiamo δ ai punti interni della nostra regione è una corrispondenza 1 a 1 ovvero

$$\delta|_{\mathring{R}} \text{ è } 1-1 \quad \text{(parametrizzazione semplice)}$$

⊖ δ è una superficie compatta $\iff$ la nostra regione R è un insieme compatto (Una curva è compatta se l'intervallo da cui viene è compatto)

La superficie va tra la sua $\boxed{\text{traccia}}$ e la sua parametrizzazione
↳ quello che noi vediamo.

Lezione 52
31/05/2016

Esempio: $z = f(x,y)$ dove $f: \longrightarrow \mathbb{R}^3$

↓ da qui abbiamo una parametrizzazione bella e fatta

$(x, y, f(x,y))$ $\quad x = u$, $y = v$

$\delta(u,v) = (u, v, f(u,v))$

Se il problema ci dà f solo continua, verificare se la superficie è regolare.

→ Calcolare la Jacobiana di questa funzione vettoriale

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \underbrace{f_x} & \underbrace{f_y} \end{pmatrix}$$ → I vettori non sono proporzionali

Su queste colonne stanno i vettori tangenti alla superficie

$f \in C^1 \Leftrightarrow \exists$ derivate parziali continue ⇒ implica la differenziabilità della funzione f

↓

Un vettore ortogonale ai due è quello che viene fuori dal prodotto vettoriale →

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \hat{i} \\ 0 & 1 & \hat{j} \\ f_x & f_y & \hat{k} \end{vmatrix} = \underbrace{(-f_{x_1}, -f_{y_1}, 1)}$$

↳ vettore ortogonale al nostro grafico

Il vettore ortogonale alla superficie → quello usato ieri.

funzione → $\boxed{z - f(x,y)} = 0$ era uguale al gradiente di questa

gradiente $= (-f_x, -f_y, 1) \Rightarrow$ TUTTO TORNA

⊖ Se la superficie è regolare, allora i due vettori individuano il piano tangente e il vettore ortogonale.

Piano tangente

$$\delta(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

Tangente in $\delta(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^3$

I due vettori $(x_u(u_0,v_0), y_u(u_0,v_0), z_u(u_0,v_0))$ e
$(x_v(u_0,v_0), y_v(u_0,v_0), z_v(u_0,v_0))$ se la superficie è regolare,
sono indipendenti e generano il piano tangente nel punto $\delta(u_0,v_0)$: in

Lezione 52
31/05/2016

Matrice Hessiana: → rappresenta la $f''(x)$

Se abbiamo una funzione f differenziabile, sappiamo che le derivate prime esistono e sono continue.

$$f: \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad f = f(x_1, \dots, x_n)$$

→ esistono e sono continue

Inoltre mettiamoci nel caso in cui esiste anche la derivata seconda ovvero la derivata di $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ cioè $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Domanda: esistono queste derivate seconde? Dipende! La questione è delicata.

Teorema di SCHWARZ: (principale per le derivate seconde)

Se le derivate miste $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ esistono in un intorno di x_0 cioè

punto di $\mathbb{R}^n$

$x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in \mathbb{R}^n$ e sono continue in $\vec{x_0}$, allora

intorno

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x_0}) \overset{\text{COINCIDE}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x_0})$$

nel punto

Il teorema dice che l'ordine di derivazione è molto importante perchè le cose non sono uguali. In generale, data una funzione, per il nostro scopo facciamo sì che non sia importante, se le derivate sono nell'intorno e non nel punto

$$\boxed{Hf(\vec{x_0})_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x_0})}$$

MATRICE HESSIANA

Controesempio per vedere che il teorema non vale

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

sono diversi ⇒ è importante l'ordine

N.B.: Per questa funzione il teorema di Schwarz non vale ⇒ noi considereremo solo condizioni in cui il teorema vale e che le derivate seconde esistono e sono continue

Lezione 52
31/05/2016

Teorema di Taylor: (serie di Taylor)

Sia f di classe C^2 in un intorno di $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{f(\vec{x})}_{\text{funzione in un intorno di un punto regolare}} = f(\vec{x_0}) + \nabla f(\vec{x_0}) \odot (\vec{x} - \vec{x_0}) + \underbrace{\frac{1}{2}(x - x_0)^T \odot Hf(x_0) \odot (x - x_0)}_{\text{forma quadratica}} + \underbrace{o(\|x - x_0\|^2)}_{\text{funzione che va a zero più velocemente di } \|x-x_0\|^2 \text{ solamente}}$$

$\nabla f(\vec{x_0})$: derivata prima

$\odot$: prodotto scalare

$\odot$: prodotto scalare

$Hf(x_0)$: derivata seconda

$\odot$: moltiplicazione per un vettore

In un intorno di x_0 $(x \longrightarrow x_0)$

Formula per descrivere max e min per una funzione

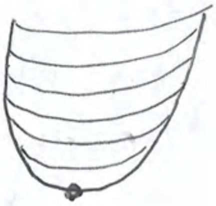
$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Massimo e minimo sono per i punti stazionari perché il gradiente va via e rimane $f(\vec{x_0})$ + forma quadratica.

$f(\vec{x}) = z$ = forma quadratica in x e y

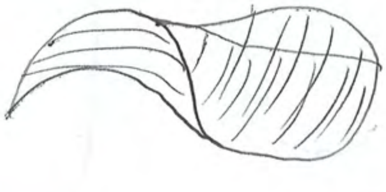
Può essere di tre tipi e dipende dai valori degli autovalori della matrice Hessiana (è importante anche il segno).

- PUNTO DI MINIMO (localmente)



- PUNTO DI MASSIMO (localmente)

- PUNTO DI SELLA



Se c'è un solo autovalore nullo allora $\det Hf = 0$

Teorema:

Lezione 52
31/05/2016

Una funzione continua su un insieme compatto assume sempre massimo e minimo (assoluti).
Se il dom f è un insieme compatto è facile di trovare massimo e minimo è un po' complicato.

Punti stazionari:

$\vec{x_0}$ è un punto stazionario (o critico) per $f \iff \nabla f(\vec{x_0}) = 0$.

E' importante perché c'è un teorema simile in analisi I dove si cercano i punti di massimo e minimo relativo tra i punti stazionari (anche a volte tra gli assoluti)

un massimo o un minimo

può essere anche assoluto a patto che la funzione sia definita in un intorno di x_0.

Teorema:

Sia f differenziabile in un estremo $\vec{x_0}$. Allora x_0 è stazionario; f definita almeno in un intorno di $\vec{x_0}$ (sfera piccola e definita) → Non deve essere punto di bordo

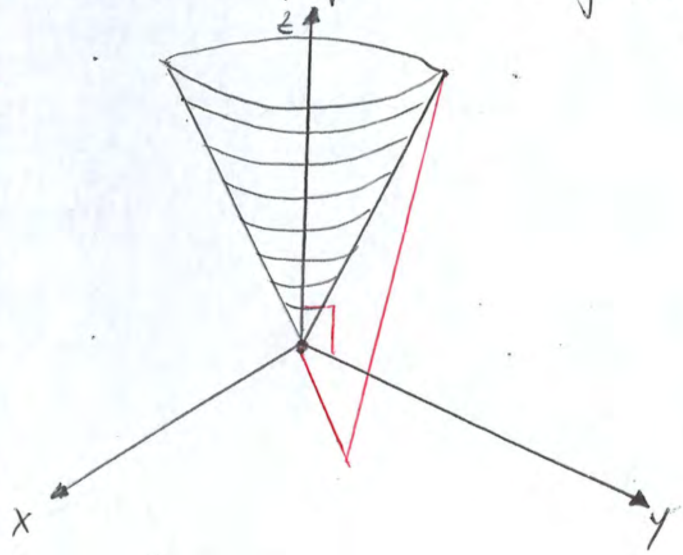
Questo teorema si dimostra come in analisi I.

N variabili → fissiamo N−1 variabili e usiamo il "teorema di Fermat"

Se ci chiedono massimo e minimo relativo, li cerchiamo tra i punti stazionari. Se vogliamo massimo e minimo dobbiamo porre il gradiente = 0 e cercare tra questi punti.

Avere un estremo non significa che la funzione sia differenziabile.

⊖ Prendiamo il grafico di una funzione (cono):



$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\underbrace{z = \sqrt{x^2+y^2}}_{\text{è il corpo disegnato}}$$

⊖ Se eleviamo al quadrato ambo i membri abbiamo una quadrica = cono

⊖ Inoltre abbiamo un triangolo isoscele = cono

* "Non tutti i punti stazionari sono estremi"

Lezione 52
31/05/2016

Cioè:

$$X = x - x_0 \qquad Y = y - y_0 \implies Z = z - f(x_0,y_0)$$ così non consideriamo $f(x_0,y_0)$

$$\implies Z = \cancel{f(x_0,y_0)} + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0,y_0)X^2 + f_{xy}(x_0,y_0)XY + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0,y_0)Y^2$$

possiamo non considerarlo e scrivere

Abbiamo una quadrica ovvero:

$$Z = (X\,Y)^T \, Hf(x_0,y_0) \, (X\,Y)$$

Bisogna studiare solo l'Hessiana della quadrica → non sarà centrale perché non possiamo eliminare la z

- Per avere la forma normale ci calcoliamo autovalori e autovettori di Hf:

$$\begin{tikzcd} & \text{autovalori concordi } \substack{++\\--} \\ Hf(x_0,y_0) \arrow[ur, "\text{det positivo}"] \arrow[r, "\text{det negativo}"] \arrow[dr, "\text{det}=0"'] & \text{autovalori discordi } \substack{+-\\-+} \\ & 1 \text{ autovalore nullo } \substack{0+\\0-} \end{tikzcd}$$

$$Z = Q(x,y) = (x,y)^T \cdot \boxed{Hf(x_0,y_0)} \cdot (x,y)$$

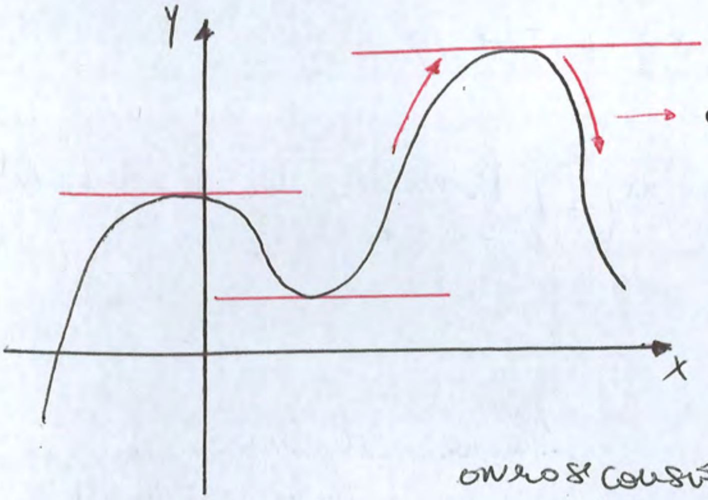
↳ tutto dipende da qui.

- $\det Hf(x_0,y_0) > 0$
$$\begin{cases} f_{xx}(x_0,y_0) > 0 & (x_0,y_0) \text{ minimo locale} \\ f_{xx}(x_0,y_0) < 0 & (x_0,y_0) \text{ massimo locale} \end{cases}$$

- $\det Hf(x_0,y_0) < 0$ $\quad (x_0,y_0)$ punto di sella

- $\det Hf(x_0,y_0) = 0$ $\quad$ la natura di (x_0,y_0) non può essere determinata da $Hf(x_0,y_0)$

Lezione 53 (3 fogli)
Esercitazione 23
03/06/2016



→ Segno: prima cresce e poi decresce

⊖ Punti stazionari: punti di equilibrio con $\bar{E}p$ max e $\bar{E}_K=0$

Il segno si fa con la derivata seconda, ovvero si considerano le parabole abbiamo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y' = 2ax + b$$

$$y'' = 2a \begin{cases} \to >0 & \cup \\ \to <0 & \cap \end{cases}$$

Esercizi

$$f(x,y) = 3x^2 + 5xy + 6y^2 - 1 \qquad \text{dom} = \mathbb{R}^2$$

$f'_x = 6x + 5y$

$f'_y = 5x + 12y$

$\vec{\nabla} f$ = gradiente = è il vettore che indica la massima pendenza in quel punto.
Nel punto stazionario deve essere $= \vec{0}$ e quindi le due componenti devono essere uguagliate a zero

$$\begin{cases} 6x + 5y = 0 \\ 5x + 12y = 0 \end{cases}$$ è l'unico punto in cui $\vec{\nabla} f = 0$ è $P(0,0)$

Facciamo le derivate seconde per vedere se il paraboloide da vicino è allegro ∪ o triste ∩.

$f''_{xx} = 6$

$f''_{yy} = 12$

$f''_{xy} = f''_{yx} = 5$

L'Hessiano è uguale per qualunque punto

$$H \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} \boxed{>0}$$

→ Vuol dire che le curvature sono tutte concordi => ben fatto (forma quadratica definita)

La traccia = 18 > 0; potremo considerare solo $a_{11} = 6 > 0$ => paraboloide allegro => MINIMO ①

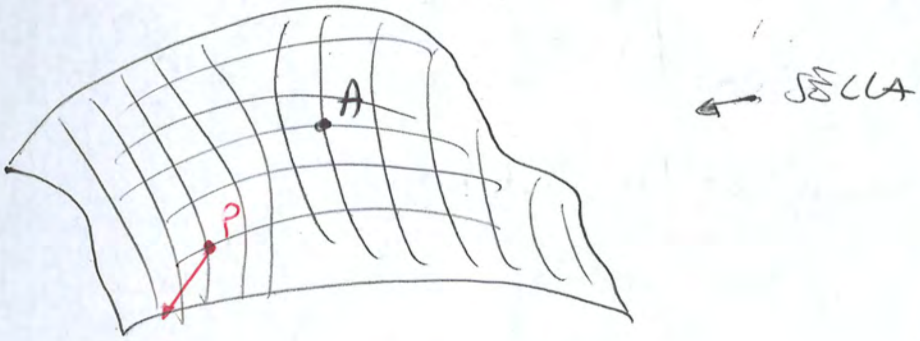
Lezione 53
Esercitazione 23
03/06/2016

$$\left.\begin{aligned} f''_{xx} &= 6xy^2 \\ f''_{yy} &= 2x^3 - 6x + 2 \\ f''_{xy} = f''_{yx} &= 6x^2y - 6y \end{aligned}\right] \rightarrow$$ Adesso dobbiamo calcolare la sua Hessiana per ogni punto.

⊖ Hessiana nel punto A:

$$H_A = \begin{vmatrix} 54 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -108 < 0$$ SELLA ⇒ le curvature non sono concordi ⇒ da una parte salgono e da una parte scendono.

Vediamo il profilo per capire meglio:

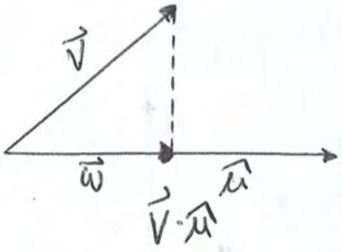


⊖ Hessiana nel punto B:

$$H_B = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -36 < 0$$ SELLA

⇒ La funzione non ha né max né min

2) Derivata direzionale:



$\vec\nabla f|_P \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ = vettore gradiente
↳ si trova sostituendo il punto P nelle derivate prime

$||\hat u|| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

derivata direzionale in P

$$\hat u \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec\nabla f|_P \cdot \hat u} = -\frac{6}{\sqrt5} + \frac{8}{\sqrt5} = \boxed{\frac{2}{\sqrt5}}$$ → la pendenza in quella direzione avrà questo valore

③

Lezione 53
Esercitazione 23
03/06/2016

- La retta tangente = polinomio di Taylor al primo ordine:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

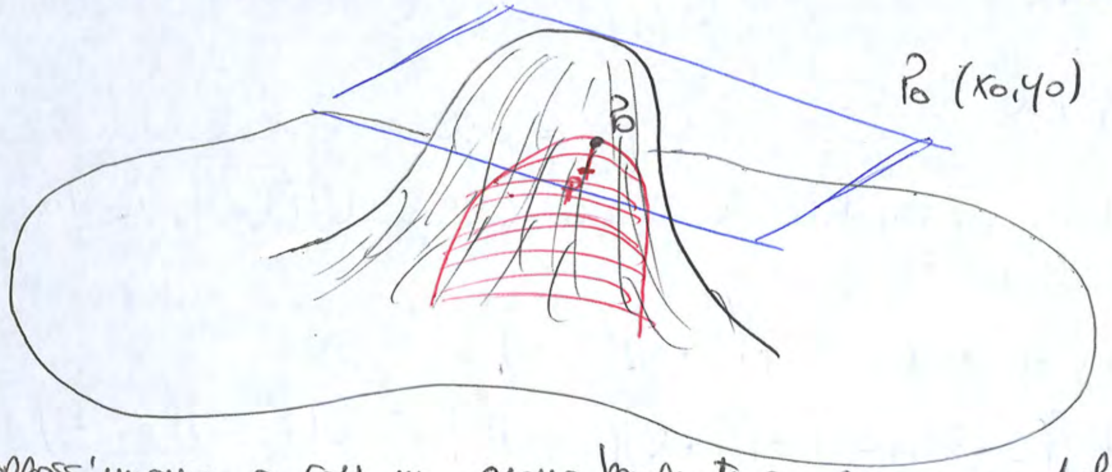
$$y = \ ? \quad \overset{\downarrow}{m} x$$

- La parabola così:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{pezzo di retta}} + \underbrace{\frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2}_{\text{pezzo di parabola}} + \boxed{o(x - x_0)^2}$$

↘ Trascurabile rispetto alla differenza

- Stessa cosa se siamo in 2 variabili:



- Lo approssimiamo o con un piano tangente o con un paraboloide: abbiamo così:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \underbrace{f'_x\big|_{P_0}(x - x_0) + f'_y\big|_{P_0}(y - y_0)}_{} +$$

piano tangente = $\vec{\nabla f}$ = ottenuto dal prodotto delle derivate dopo aver sostituito il punto

$$\underbrace{+ \frac{1}{2} f''_{xx}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2} f''_{yy}(y - y_0)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} f''_{xy}(x - x_0)(y - y_0) +}_{\downarrow}$$

Matrice Hessiana moltiplicata per il vettore $P - P_0$

$$+ \boxed{o \| P - P_0 \|^2}$$

↳ rispetto al quadrato della norma di un vettore

Esercizio:

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + e^{xy}$$

Domanda: Calcolare Taylor al II° ordine in $P(1,1)$

↓ Continua

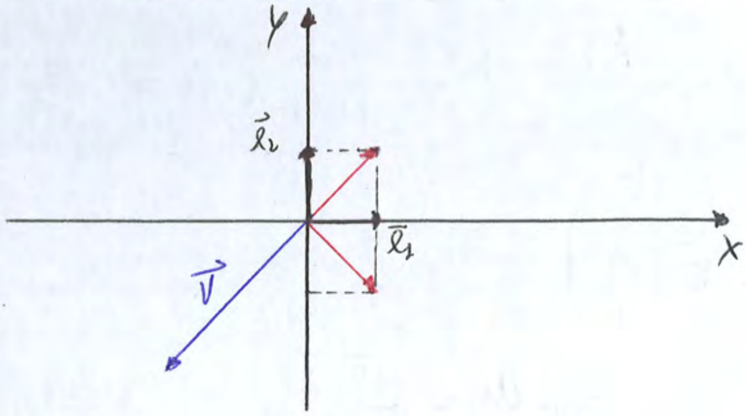
Lezione 54 (2 fogli)
Esercitazione 24
06/06/2016

Esercizi → passaggi di base

Base $\mathcal{E}$ $\qquad$ Base $\mathcal{B}$

$$\vec e_1 \; \vec e_2 \qquad \vec b_1 \; \vec b_2$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$



⊖ Vettore $\vec v$ nella base $\mathcal{E}$ ha queste componenti:

$$\vec V_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$$

⊖ Vettore $\vec v$ nella base $\mathcal{B}$ ha queste componenti:

$$\vec V_B \begin{pmatrix}0\\ \textcircled{-2}\end{pmatrix} \rightarrow 2 \text{ volte } \vec b_2$$

⊖ Come scriviamo $\vec b_1$ e $\vec b_2$ nella base $\mathcal{E}$? Ovvero in funzione di $\vec e_1$ e $\vec e_1$?
Vettori nella base nuova (B) scritti secondo la base vecchia ($\mathcal{E}$)

$$\vec b_1 = \bar i - \bar j$$
$$\vec b_2 = \bar i + \bar j$$

base V $\quad$ base V
Endomorfismo

⇒ la matrice associata all'endomorfismo è:

$$M \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det M = 2$

↓

Matrice che ci porta dalla nuova base (B) alla vecchia ($\mathcal{E}$)

$$\vec V_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix} \cdot \vec V_B = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ → va da vecchia a nuova

$$\vec V_B = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \cdot \vec V_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

Lezione 54
Esercitazione 24
06/06/2016

$$r \perp \Sigma \begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t + 3 \\ z = -2t + 0 \end{cases}$$

Adesso facciamo l'intersezione tra retta e π:

$$r \wedge \bar{\pi} \Rightarrow t + 3 + 2(2t+3) - 2(-2t) = 0 \Rightarrow \boxed{t = -1} \Rightarrow$$

Per t = -1, troviamo il punto della retta che incontra il piano ovvero il centro della circonferenza.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Centro circonferenza } (2, 1, 2)$$

$$d(C_\Sigma, C_e) = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$R_{circ} = \sqrt{18-9} = 3$$

3) Una matrice 4x3 ha una sola soluzione quando: $(AX=\underline{b})$

- $\boxed{a}$) $\rho(A|B)<4$
- b) $\rho(A)=1$
- c) $\rho(B)=1$
- d) $\rho(A|b)=\rho(A|2b)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right)$$

Il rango deve essere 3 perché ci sono 3 colonne nella matrice incompleta => Risposta: $\boxed{a}$

4) Non c'era

5) Consideriamo la curva $L: x=1-t^4, y=t, z=3t^2$ Trovare la risposta giusta.

La curva possiamo scriverla così:

$$* \begin{cases} x=1-t^4 \\ y=t \\ z=3t^2 \end{cases} \rightarrow$$

Per essere contenuta nella superficie $S: x+y^2-3z^2=0$ le componenti devono soddisfare l'uguaglianza:

$$1-t^4+t^2-3(9t^4)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-t^4+t^2-27t^4 \neq 0 \Rightarrow \text{Non è contenuta}$$

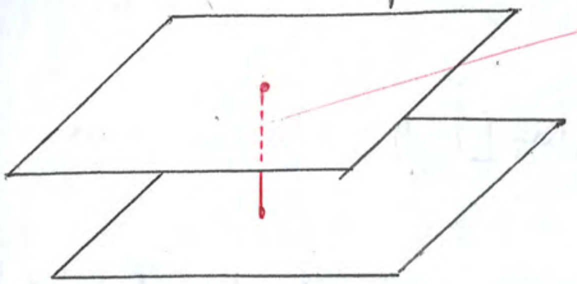
⊖ È piana e contenuta nel piano $\alpha: y-z=0$?
Sostituendo viene $t-3t^2\neq 0$ che è soddisfatto per $t=0$ ma non $\boxed{\forall t}$ → che è la condizione affinché la curva sia piana

⊖ Non ha vettore tangente in $P=(1,0,0)$ => FALSO
vediamo se il punto appartiene a L. Questo è vero per $t=0$ =>
=> ha vettore tangente

Risposta: $\boxed{b}$ Non è piana. Verifichiamo:

piano generico: $ax+by+cz+d=0$; sostituiamo quello che c'è in * e otteniamo: $a(1-t^4)+bt+3ct^2+d=0$ => dobbiamo trovare a, b e c affinché sia un'identità e ciò è vero se $a=b=c=0$ => Non esiste nessun piano che contiene questa curva.

Se consideriamo due piani abbiamo:



retta ortogonale ad entrambi; si calcolano i punti e poi si trova la distanza tra i due.

Per il nostro caso abbiamo: $x - z = 0$

$x - z - 2 = 0$

Una retta ortogonale ad entrambi è data dalla seguente direzione della retta $\vec{v} = \boxed{(1, 0, -1)} \rightarrow$ coefficienti dei piani.

La retta passante per l'origine è:
$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$$
ed è ortogonale ad entrambi:

Intersechiamo la retta con il primo piano α e poi con il piano β e abbiamo:

$r \wedge \alpha = (0, 0, 0) = A$ perché $t = -t = 0$.

$r \wedge \beta = (1, 0, -1) = B$ $\quad r \cap \beta \Rightarrow t + t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$

Adesso calcoliamo la norma del vettore $B - A$:

$B - A = (1 - 0, 0 - 0, -1 - 0) = (1, 0, -1)$

$\|B - A\| = \sqrt{1 + 1} = \boxed{\sqrt{2}} \rightarrow$ RISPOSTA CORRETTA

8) ~~La~~ Date la retta $\underbrace{r: x = y = z = t}_{\text{parametrica}}$ e la retta $\delta: \underbrace{x + y + z = x - y}_{\text{cartesiana}} = 0$,

trovare la risposta corretta:

a) sono complanari

b) sono perpendicolari ad uno stesso piano

c) sono sghembe

d) sono parallele con distanza $= 1$

Riscriviamo bene le rette

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \delta: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

↓ Continua

Teniamo presente che $\boxed{\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2}$ → Questo serve per vedere se i punti critici devono essere presi oppure devono essere scartati.

1) $\nabla f = (\underbrace{e^x(2x+y^2+2)}_{f'_x}, 2e^x y) \boxed{=} (0,0)$ → Lo imponiamo per i punti critici

$2e^x y = 0$ se e solo se $y = 0 \Rightarrow x = -1$

C'è un unico punto critico $(-1,0)$; studiamolo e classificarlo:

$$H_f = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x(2x+y^2+4) & 2e^x y \\ 2e^x y & 2e^x \end{vmatrix}$$ ⇒ Se sostituiamo $(-1,0)$ otteniamo

$$\Rightarrow Hf(-1,0) \begin{vmatrix} \frac{2}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \det(Hf(-1,0)) > 0 \\ f''_{xx}(-1,0) > 0 \end{array}\right\} \text{MINIMO}$$

2) Il punto $(0,1,1)$ appartiene al grafico della funzione? Basta sostituendo.

$(0,1,1) = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ se $x = 0$ allora $y = 1$

Quindi il piano è:

$$z = f(\overset{0}{x_0}, \overset{1}{y_0}) + \underbrace{f'_x(\overset{0}{x_0}, \overset{1}{y_0})}_{3}(x - x_0) + \underbrace{f_y(\overset{0}{x_0}, \overset{1}{y_0})}_{2}(y - y_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 1 + 3(x-0) + 2(y-1) = 3x + 2y - 1 \Rightarrow$$

$^*\Rightarrow \boxed{z = 3x + 2y - 1}$ → Non passa per l'origine perché c'è il termine noto ovvero -1.

3) Il piano parallelo a quello dato* che passa per l'origine è

$\boxed{z = 3x + 2y}$ → abbiamo tolto il "-1"

4) Trovare la distanza tra i due piani: bisogna trovare la distanza del piano dall'origine; trovare la retta ortogonale ai due piani passante per l'origine ovvero:

$x = 3t \quad y = 2t \quad z = -t$

(iii) $\det(M_{f_3} - \lambda I) = 0$

perchè il Kr non è zero, allora il polinomio caratteristico avrà un autovalore $= 0$

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 3 \\ \lambda = 4 \end{array}\right\}$$

3 autovalori distinti
3 autospazi di dim $= 1$
$\Rightarrow$ È DIAGONALIZZABILE

$V_0 = \mathcal{L}\{(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)\}$

$V_3 = \text{Ker}(M - 3I) = \mathcal{L}\{(1, -2, 0)\}$

$V_4 = \text{Ker}(M - 4I) = \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$

(iv) Spieghiamo perchè $f_3^{-1}(3, 6, 4)$ è una retta: riprendiamo la Mf e facciamo il seguente calcolo

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$ quindi abbiamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \rho(A) = \rho(A|B) = 2$$

$\infty^{3-2} = \infty^1 =$ retta

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 3x + z = 3 \\ 3y + z = 6 \\ \text{la terza è ridondante} \end{cases}$$

Adesso dobbiamo trovare il piano passante per l'origine che contiene la retta. Facciamo una combinazione lineare delle equazioni:

$$* \ \underbrace{(3x + z - 3) + h(3y + z - 6) = 0}$$

generico piano che contiene l
non passa per l'origine e
quindi ci imponiamo il passaggio

$-3 + h(-6) = 0 \Rightarrow h = -\frac{1}{2}$ per $x = y = z = 0$

Sostituiamo h nell'equazione * e troviamo il piano cercato

5) $\boxed{f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}}$ con $f(x,y,z) = (1,2,3)\cdot(x,y,z)$

↳ questa condizione impedisce la iniettività.

Qual è quella corretta?

a) è iniettiva → FALSA

b) f è un isomorfismo ⇒ non può essere perchè un isomorfismo è un endomorfismo e quindi dovrebbe essere $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ oppure $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

e) (1,2,1) è un autovettore di 1

↳ non può esistere perchè un autovettore o un autovalore esistono solo se f è un endomorfismo.

(d) dim Ker f = 2 ⇒ o è "2" o è "3"; perchè l'immagine ha dimensione 1 allora dim Ker f = 2

6) Consideriamo il piano π: $\boxed{x-2y+3z=0}$, quale affermazione è corretta?

a) P(1,2,3) è un punto di π ⇒ FALSO perchè la sostituzione ≠ 0

b) π interseca il piano $x+y+z=0$ in un punto ⇒ non può essere perchè due piani in $\mathbb{R}^3$ si intersecano sempre in una retta

e) π è ortogonale al vettore (1,2,3) ⇒ FALSO

(d) π è parallelo al piano σ: $2x-4y+6z-5=0$

possiamo scriverlo come:

$$\boxed{x-2y+3z}=0 \Rightarrow \boxed{x-2y+3z}-\frac{5}{2}=0$$

↳ per essere paralleli basta avere la parte lineare uguale oppure proporzionale.

7) Data la conica $tx^2+2xy+ty^2+2y=0$, classificarla.

$$\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $t=1$ $\det A = -1 \neq 0$

$\det A_{33} = 0$

⇓

PARABOLA.

Lezione 56 (2 fogli)
09/06/2016

Esercizio:

Sia $f(x,y) = x^4+2y^2+4xy$

1) Determinare i punti critici di f e stabilire la natura. Nello spazio di $\mathbb{R}^3$ si considera la superficie S di equazione $z=f(x,y)$ e il punto $P_0=(0,1,2)$.

2) Si verifichi che $P_0 \in S$ e si determini il piano tangente a S in P_0 e la retta ortogonale a S in P_0

1) Max, min o selle?

$$\nabla f = \Big(4x^3+4y,\ \overbrace{4y+4x}^{x=-y}\Big) = (0,0)$$

$$4x^3-4x = 4x(x^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & Ⓐ \\ x=-1 & Ⓑ \\ x=1 & Ⓒ \end{cases}$$

Sostituendo otteniamo i seguenti punti:

$$\underbrace{A(0,0),\ B(-1,1),\ C(1,-1)}_{\text{PUNTI CRITICI}}$$

Troviamo l'Hessiana:

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det H(0,0) = -16$

$\det H(-1,1) = 32 > 0 \Rightarrow$ MINIMO $\quad (\mathrm{Tr}\, H(-1,1)) > 0$

$\det H(1,-1) = 32 > 0 \Rightarrow$ MINIMO $\quad$ "

2) S: $z = x^4+2y^2+4xy$

$P_0(0,1,2) = (x_0, y_0, f(x_0,y_0)) = (x_0, y_0, z_0)$

P_0 appartiene a S perché sostituendo x_0, e y_0 nella formula otteniamo il valore di z_0 $\Rightarrow$ possiamo trovare il piano tangente.

Lezione 56
09/06/2016

Esercizio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

Si consideri l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(X) = A \cdot X$

ovvero

$$f(x,y,z) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

cioè

$$f(x,y,z) = (x+2y-z, -y+z, 8y-3z)$$

i) f è un isomorfismo? → Calcolare il determinante. ⇒ $\det(A) = -5$

ii) Determinare autovalori e molteplicità

iii) Determinare una base per ogni autospazio. A è diagonalizzabile?

iv) Determinare una matrice N invertibile tale che $N^{-1} \cdot A \cdot N$ sia diagonale.

ii)

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 8 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(-1-\lambda)(-3-\lambda) - 8\right) \Rightarrow$$

Poiché è un isomorfismo, lo zero non è un autovalore perché $\det \neq 0$

$$\Rightarrow -(\lambda - 1)^2 (\lambda + 5)$$

$\lambda = 1$ molteplicità algebrica $= 2$
$\lambda = -5$ molteplicità algebrica $= 1$

} Può anche non essere DIAGONALIZZABILE

iii) Abbiamo verificare le dimensioni dell'autospazio relativo a (-5)

$$V_{-5} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1+5 & 2 & -1 \\ 0 & -1+5 & 1 \\ 0 & 8 & -3+5 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$ → due dipendenti

$$(x,y,z): \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$V_{-5} = \mathcal{L}\{(-1, 1, -4)\}$
ha dimensione 1

Lezione 57 (2 fogli)
Esercitazione 25
10/06/2016

Esercizio:

$$f(x,y) = \ln(xy^3) + x + y$$

1) Calcolare il gradiente
2) Calcolare i punti stazionari
3) Calcolare il piano tangente in $P_0(\cancel{1},1,2)$

Il dominio della funzione è: dom $f(x,y)$: $xy^3 > 0$ ⇒ x e y devono essere concordi in modo da essere $\neq 0$. Viene fuori una superficie con due vele molto alte nel I° e nel III° quadrante esclusa l'origine.

1)
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cancel{y^3}}{\cancel{y^3}x} + 1 = \frac{1}{x} + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^{\cancel{3}}\cancel{x}} \cdot 3\cancel{y^2}\cancel{x} + 1 = \frac{3}{y} + 1$$

$$\vec{\nabla f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{1}{x} + 1, \frac{3}{y} + 1\right)$$

2) Cerchiamo i punti critici, ovvero dove la pendenza è massima:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + 1 = 0 \\ \frac{3}{y} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + x = 0 \\ 3 + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$$

→ Concordi è va bene

$A(-1,-3) \in \text{dom} f(x,y)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial^2} = -\frac{3}{y^2}$$

Sostituiamo il punto A nelle derivate parziali seconde:

$$H(-1,-3) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} > 0$$

guardiamo solo a_{11} ⇒
⇒ MASSIMO.

3) $f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x|_{P_0}(x - x_0) + f'_y|_{P_0}(y - y_0)$

$$z = 2 + 2(x-1) + 4(y-1) \Rightarrow z = \cancel{2} + 2x - \cancel{2} + 4y - 4 \Rightarrow \boxed{z = 2x + 4y - 4}$$

①

Lezione 57
Esercitazione 25
10/06/2016

2) Calcolare Ker f.

⊖ $\mathrm{Ker} f : \begin{cases} -x-y-z=0 \\ x+3y+5z=0 \\ x-y-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y+4z=0 & \text{I°+II°} \\ 2y+4z=0 & \text{I°+III°} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=-2z \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \mathrm{Ker} = 1$$

$\mathrm{Ker} f \neq \vec{0}$ e contiene vettori del tipo $(1,-2,1)$

Poiché c'è una variabile libera allora $\dim \mathrm{Ker} = 1$ e $\dim \mathrm{Im} f = 2$

⊖ Calcoliamo $\mathrm{Im} f$ usando M_f :

$$M_f \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$f(\vec{e}_1)$ $f(\vec{e}_2)$ $f(\vec{e}_3)$ ↗ Vettori immagine dei vettori della base canonica

$f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ $\quad M_f - \lambda I = 0$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 5 \\ 1 & -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\left[(3-\lambda)(-3-\lambda)+5\right] + \left[(-3-\lambda)-5\right] - \left[-1-(3-\lambda)\right] = 0$$

$\Rightarrow (-1-\lambda)(\lambda^2-4) + [-\lambda-8] - [\lambda-4] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\lambda^2 + 4 - \lambda^3 + 4\lambda - \lambda \cancel{-8} - \lambda \cancel{+4} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(-\lambda^2 - \lambda + 2) = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} \nearrow -2 \\ \rightarrow 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 1 \end{matrix}$

$f(\vec{v}) = \vec{0}$ per $\lambda_1 = 0$ → questo è il Ker

$f(\vec{v}) = -2\vec{v}$ per $\lambda_2 = -2$] Come autospazi e' danno 2 vettori che

$f(\vec{v}) = \vec{v}$ per $\lambda_3 = 1$] generano Im ⇒ ci danno una base dell'immagine

CLASSIFICATION OF CONICS

Let

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + k = 0$$

be a conic of $\mathbb{R}^2$. Its associated matrix is

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & k \end{pmatrix}$$

Consider also the matrix

$$A_{33} = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

Below we discuss the cases that can occur. We recall that trace$(A_{33}) = a + c$.

- $\det(A) \neq 0$, $\det(A_{33}) > 0$, $\det(A) \cdot \text{trace}(A_{33}) < 0$ — Ellipse $(\lambda_1 \neq \lambda_2) > 0$ tr >0 det <0
- $\det(A) \neq 0$, $\det(A_{33}) > 0$, $\det(A) \cdot \text{trace}(A_{33}) > 0$ — No real points (empty) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ tr >0 det >0
- $\det(A) \neq 0$, $\det(A_{33}) < 0$ — Hyperbola $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ tr >0 det <0
- $\det(A) \neq 0$, $\det(A_{33}) = 0$ — Parabola $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$

$\det(A) = 0$ $\{$

- rank$(A) = 2$, $\det(A_{33}) > 0$ — Point $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$
- rank$(A) = 2$, $\det(A_{33}) < 0$ — Two intersecting lines $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$
- rank$(A) = 2$, $\det(A_{33}) = 0$ — Solve the equation of conic w.r.t. x or y: the conic is either an union of 2 parallel lines or it is empty
- rank$(A) = 1$ — One single line

- $\det(A) \neq 0$, det <0, tr >0, $(\lambda_1 = \lambda_2) > 0$ CIRCONFERENZA

- $||u \times v|| = ||u|| \, ||v|| \operatorname{sen} \vartheta$ $\quad ||u \times v||^2 = ||u||^2 \, ||v||^2 \operatorname{sen}(\vartheta)^2$

  $u \times v = 0$ se $u // v$ $(u \times u = 0)$ prodotto vettoriale solo per i vettori di $\mathbb{R}^3$

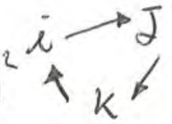
  $u \times v = - v \times u$

  Si può calcolare anche usando il determinante di una matrice (vettori in riga)

  Se $u, v \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow u \times v = (u^2 v^3 - u^3 v^2, -u^1 v^3 + u^3 v^1, u^1 v^2 - u^2 v^1)$

  $\operatorname{sen} \vartheta = 0$ se paralleli e $u \times v = 0$ se sono l.d.

  $0 \leq \vartheta \leq \pi$



senso orario = +

senso antiorario = −

$||u \times v||^2 = |u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2$

$|u|^2 |v|^2 (1 - \cos^2 \vartheta) = |u|^3 |v|^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta$

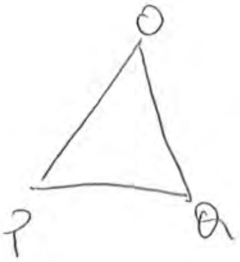
- u e v non paralleli sono collineari

- $[u, v, w] = (u \times v) \cdot w = (u^2 v^3 - u^3 v^2) w^1 - (u^1 v^3 - u^3 v^1) w^2 + (u^1 v^2 - u^2 v^1) w^3$

  oppure si può calcolare trovando il determinante della matrice 3×3 con i vettori messi in ordine (in riga)

  $[u, v, w] = [v, w, u]$ $\quad ||[u, v, w]||$ = volume del parallelepipedo

  $[u, v, w] = -[u, w, v]$ $\quad [u, v, w] = 0$ se solo l.d. anche se solo 1 è zero

- 

  $$|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ| \cos \vartheta$$

  $$\vartheta = \measuredangle POQ$$

3 vettori sono complanari se det = 0

- $$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

  $a_p = v \cdot e_p \quad p = 1, 2, 3$

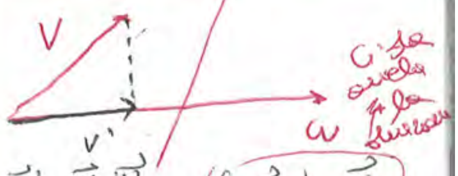
- Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base ortonormale e v un vettore otteniamo allora

  $$v = (v \cdot v_1) v_1 + (v \cdot v_2) v_2 + (v \cdot v_3) v_3 = \sum_{p=1}^{3} (v \cdot v_p) v_p .$$

- $$u \times v = \begin{vmatrix} a & x & \hat{\imath} \\ b & y & \hat{\jmath} \\ c & z & \hat{k} \end{vmatrix}$$

- $$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_j v_i = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

$\vec{v}' = \underbrace{|\vec{u}| \cos \vartheta}_{\text{NORMA}} \cdot \hat{s}$



$\underbrace{\vec{v}' = \vec{v} \cdot \frac{\vec{w}}{||\vec{w}||}}_{\text{numero}}$ $\quad \left(\vec{v} \cdot \frac{\vec{w}}{||\vec{w}||} \right) \cdot \frac{\vec{w}}{||\vec{w}||}$

OBIS

⊖ MATRICE ORTOGONALE • $P^T P = I_n$

↳ VEDERE DIAGONALIZZABILITÀ

⊖ MATRICE NULLA → COMPOSTA DA SOLI ZERI

⊖ MATRICE TRIANGOLARE • → SUPERIORE = SOTTO DIAGONALE TUTTI ZERO

↘ INFERIORE = SOPRA DIAGONALE TUTTI ZERO

↳ det = PRODOTTO ELEMENTI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE

⊖ MATRICE TRASPOSTA → SCAMBIARE LE RIGHE CON LE COLONNE

$A \in R^{m,n}$ $\quad {}^tA \in R^{n,m}$

↳ ${}^tA = A^t$

↳ PROPIETÀ:

1) ${}^t({}^tA) = A$

2) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

3) ${}^t(aA) = a\,{}^tA$

4) ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$

5) ${}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = A + {}^tA$

$A \in K^{m,n}$

$B \in K^{m,n}$

$a \in K$

⊖ OPERAZIONI TRA MATRICI:

1) SOMMA TRA MATRICI ⟺ $A \in K^{m,n}$ e $B \in K^{m,n}$ CIOÈ STESSO NUMERO DI RIGHE E DI COLONNE

$A+B \in K^{m,n}$

2) PRODOTTO MATRICE PER NUMERO: $a \in K$ VA MOLTIPLICATO PER OGNI ELEMENTO DELLA MATRICE

3) PRODOTTO RIGHE PER COLONNE: SE $A \in K^{m,\textcircled{n}}$ e $B \in K^{\textcircled{n},p}$

ALLORA $A \cdot B = C$ DOVE $C \in K^{m,p}$

⊖ MATRICE INVERSA • $\boxed{\det \neq 0}$ → FONDAMENTALE

↳ A^{-1} SE $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ E $B = A^{-1} \in \mathbb{R}^{2,2}$ ALLORA

$A \cdot B = I_2 = B \cdot A$ (VALE PER TUTTE LE DIMENSIONI)

CONDIZIONI ~ DI INVERTIBILITÀ

→ LA MATRICE DEVE ESSERE QUADRATA PER ESSERE INVERTIBILE

→ MATRICE DEVE AVERE RANGO MASSIMO

→ $AX = 0$ HA SOLO LA SOLUZIONE NULLA

→ $AX = B$ HA 1 SOLUZIONE $\forall B$

⊖ SE LA MATRICE È INVERTIBILE ALLORA:

1) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

2) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (ANCHE B INVERTIBILE)

3) $A \cdot B$ È INVERTIBILE

4) $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$ con $m \in N$

5) $(A^{-1})^t \cdot A^t = I$

6) $(B^{-1} A^{-1})(A \cdot B) = I$

⊖ CALCOLARE L'INVERSA:

2x2 → SE $ad - bc \neq 0$ ALLORA

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

SE $ad - bc = 0$ ALLORA $A^{-1} \cdot A = 0$

3X3 → SE $\det \neq 0$ ALLORA

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^t \qquad \tilde{A} = \tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$$

mxm $\xrightarrow{I°}$ SI PARTE DA $(A | I_m)$ E SI ARRIVA A $(I_m | A^{-1})$

II° ↳ $\det A \neq 0$, $\rho(A) =$ N° INCOGNITE ⇒ 1 SOLUZIONE

$Ax = e$ CRAMER: $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ → SI OTTIENE SOSTITUENDO LA i-ESIMA COLONNA DI A CON IL VETTORE e