



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 2035A -

ANNO: 2016

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Giuffré Esther

MATERIA: Fenomeni di Trasporto - prof. Marchisio

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

## FENOMENI DI TRASPORTO

- ESAME: scritto < 23 voto finale  
 ≥ 24 orale facoltativo

29/2/16

### • da natura molecolare dei fenomeni di trasporto:

Consideriamo un piccolo volume di fluido, omogeneo, contenente un n° finito di atomi o di molecole,  $N_p$ . Questo volume infinitesimo  $dV$  corrisponde, in coord. rettangolari, ad un cubo di dimensioni  $dx dy dz$ . Le molecole interagiscono a coppie tra di loro tramite delle forze, che per un sistema conservativo sono definite come il gradiente cambiato di segno di una funzione potenziale:

$$F(\vec{r}_{ij}) = - \nabla \varphi(\vec{r}_{ij})$$

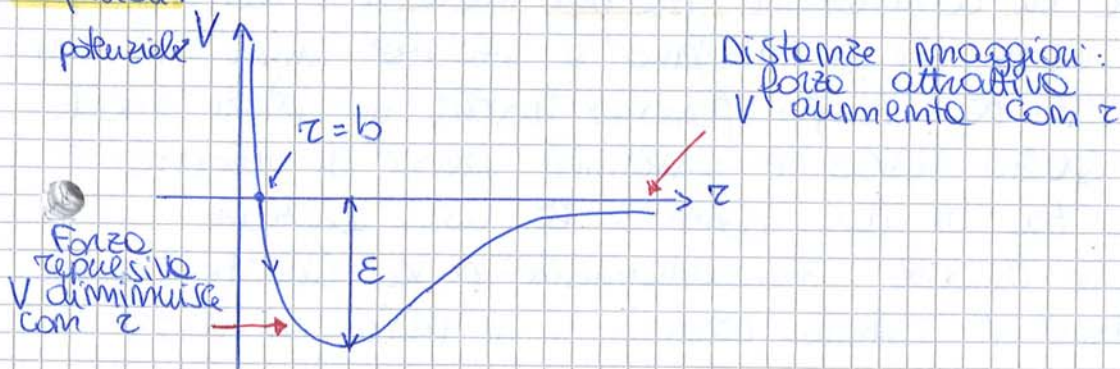
dove  $r_{ij}$  è la distanza tra la molecola  $i$ -esima e la molecola  $j$ -esima.

Un potenziale è simmetrico sferico, in cui cioè l'energia potenziale dipende solo dalla distanza relativa tra le due molecole e non dalle loro orientazioni, e il **potenziale di Lennard-Jones**:

$$\varphi(r_{ij}) = - \epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^6 \right] \quad \sigma, \epsilon \text{ parametri}$$

È un potenziale empirico che descrive bene dei sistemi reali. Il contributo elevato alla 12-esima potenza rappresenta le forze repulsive di corto raggio (ad esempio la

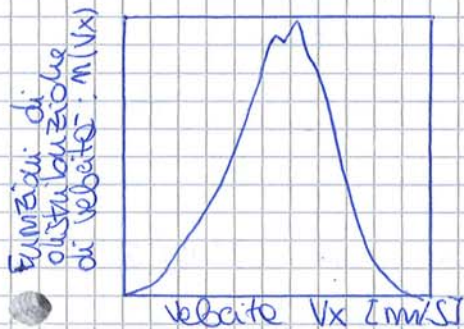
repulsione tra gli elettroni negli orbitali esterni dell'atomo/molecola), mentre il contributo elevato alla 6-esima potenza rappresenta le forze attrattive di lungo raggio (ad esempio le forze di Van der Waals). Questo potenziale viene comunemente usato per descrivere il comportamento di gas, anche ad alta pressione, e di liquidi.



**molecolare.** Il volume di fluido individuato nella figura su metallo e quindi costituito da  $N_p$  molecole che si muovono in moto caotico, entrando ed uscendo dalle 6 facce laterali del cubo, portandosi con se, e scambiando tramite interazioni con le altre molecole, materia, quantità di moto ed energia (quindi non è una vera e propria collisione).

**-Equazione del trasporto di Boltzmann:**

È interessante osservare cosa succede alla distribuzione di velocità delle molecole: conviene determinare la funzione che definisce il  $n^{\circ}$  atteso di molecole con velocità comprese in un certo intervallo infinitesimo. Il problema non è più formulato in funzione della posizione e della velocità delle singole molecole, ma in funzione di tutte le possibili posizioni e di tutte le possibili velocità delle molecole: l'insieme di tutti i possibili valori di velocità assunti dalle molecole è noto come **spazio delle fasi**.



Ogni molecola ha la sua velocità, diversa da quella della molecola adiacente. Inoltre, in questo caso particolare (un cubo immerso in un bicchiere di acqua) la velocità media del

fluido appare prossime allo zero (cioè fluido stagnante) e la distribuzione gaussiana presenta un'evidente simmetria. Nonostante le leggi che governano il moto di ciascuna molecola siano le leggi di Newton, deterministiche e reversibili, il sistema indipendentemente dalla posizione iniziale raggiunge sempre una distribuzione con una forma particolare, nota come **distribuzione di equilibrio**. Essa viene raggiunta indipendentemente dal potenziale di interazione tra le molecole e non distingue le molecole una dalle altre.

Dall'equazione di Liouville, è possibile ricavare l'equazione che definisce l'evoluzione di  $n$  (funzione di distribuzione di velocità): l'equazione risultante è **l'equazione del trasporto**

• Operatore  $\nabla$ :  $\vec{e}$  un vettore =  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$   
 $\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$

•  $\nabla^2 = \Delta \rightarrow$  Laplaciano =  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Cosa succede quando applico  $\nabla$  ad un campo scalare  $P$ :

$\nabla P(x) = (\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}) \rightarrow$  genera un campo vettoriale ed è detto **gradiente di pressione**

$\nabla \cdot \underline{U} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \rightarrow$  **divergenza del campo di velocità**

↳ questo avviene se applico  $\nabla$  ad un campo vettoriale.

Se invece applico  $\nabla$  con prodotto diadico ad  $\underline{U}$ :

•  $\nabla \otimes \underline{U} = \nabla \underline{U} \rightarrow$  ottengo un tensore chiamato **gradiente del campo di velocità**

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

In notazione indiciale:

$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \rightarrow$  divergenza di  $\underline{U}$

quindi riscrivendo dovei mettere indici diversi:

•  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$

$\nabla \underline{U} = \frac{1}{2} \nabla \underline{U} + \frac{1}{2} (\nabla \underline{U})^T + \frac{1}{2} \nabla \underline{U} - \frac{1}{2} (\nabla \underline{U})^T$

Il gradiente di velocità ci dice tutto sullo stato di moto di un fluido:

$S_{ij}$  = velocità di deformazione =  $\frac{1}{2} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$  ( $S$ )

ci dice se un elemento fluido si sta deformando in un moto fluido.

↑  
tensore

$\Omega_{ij}$  =  $\frac{1}{2} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \rightarrow$  velocità di rotazione ( $\Omega$ )

↑  
tensore

• Entrambe le velocità sono dei tensori: quello di rotazione, se diverso da zero, ci dice che il volume di fluido sta ruotando senza subire deformazioni.

zimate dal fluido che magari viene liberato e scambiato.

Energia cinetica:  $\frac{1}{2} m (v^i)^2$

$v^i$  → vettore che mi dice qual è la velocità della singola molecola all'interno della scatola.

Per avere l'energia cinetica totale del sistema:

$$\sum_{i=1}^{N^*} \frac{1}{2} m (v^i)^2$$

Dato che ogni molecola ha una propria velocità diversa dalle altre, faccio una media:

$$\frac{1}{N^*} \sum_{i=1}^{N^*} \frac{1}{2} m (v^i)^2 = \langle E \rangle \rightarrow \text{legata sempre all'energia interna}$$

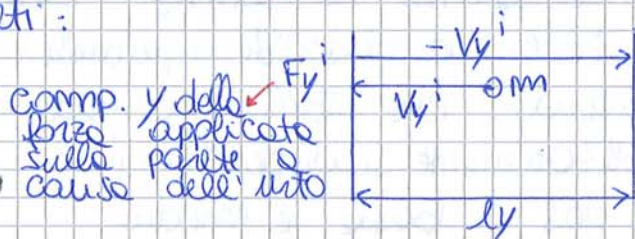
$$\langle E \rangle = \frac{1}{N^*} \sum_{i=1}^{N^*} \left( \frac{1}{2} m (v_x^i)^2 + \frac{1}{2} m (v_y^i)^2 + \frac{1}{2} m (v_z^i)^2 \right) = \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T$$

↳ energia cinetica media e il teor. dell'equipartizione dell'energia dice che questi 3 termini sono uguali.

$$\tilde{C}_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right) = \frac{3}{2} R$$

$$\tilde{C}_P = \frac{5}{2} R = \tilde{C}_V + R$$

In queste scatole ho delle molecole che sbattono alle pareti:



$$F_y^i = \frac{dp_y^i}{dt} = \frac{m v_y^i - (-m v_y^i)}{dt} = \frac{2 m v_y^i}{2 ly / v_y^i} = \frac{m v_y^i^2}{ly}$$

intervallo di tempo tra due urti successivi

Adesso voglio calcolare la forza totale:

$$F_y = \sum_{i=1}^{N^*} \frac{m (v_y^i)^2}{ly} = \frac{m}{ly} \cdot N^* \cdot \frac{1}{N^*} \sum_{i=1}^{N^*} (v_y^i)^2$$

velocità quadratiche medie  $\langle v_y^2 \rangle$

$$P = \frac{F_y}{l_x l_z} = \frac{m N^*}{l_x l_y l_z} \langle v_y^2 \rangle$$

$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$  → il gas ha la stessa energia in tutte e 3 le direzioni

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$

Conviene definire l'urto come moto relativo:

$$\underline{z} = (\underline{z}_1 - \underline{z}_2) / d_0 \rightarrow \text{vettore che ci dice qual è la distanza tra le 2 molecole}$$

(normalizzato per modo di dire per  $d_0$ ,  $v=1$ )

$$\underline{g} = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \rightarrow \text{velocità relativa prima della collisione}$$

$$\underline{g}' = \underline{v}'_1 - \underline{v}'_2 \rightarrow \text{velocità relativa dopo la collisione}$$

Quali sono le 3 proprietà che si conservano durante la collisione?

- le masse  $m + m = m + m$
- quantità di moto  $m\underline{v}_1 + m\underline{v}_2 = m\underline{v}'_1 + m\underline{v}'_2$
- energia cinetica  $m\underline{v}_1^2 + m\underline{v}_2^2 = m\underline{v}'_1^2 + m\underline{v}'_2^2$

Le due incognite sono  $\underline{v}'_1$  e  $\underline{v}'_2$  quindi va bene perché ho due equaz. in due incognite  $\rightarrow$  in uno spazio monodimensionale.

In uno spazio non monodimensionale avremo 2 bilineari di quantità di moto e 1 bilineare di energia cinetica, perché esse non cambiano al variare delle direzioni.

Quindi otteniamo 3 equaz. in 4 incognite: si considera la conservazione del momento delle quantità di moto:

$$\underline{L} = \underline{z} \times m\underline{v}$$

2/3/16

$$\underline{L} = \underline{z} \times m\underline{v} \rightarrow \text{legato alle velocità relative}$$

$$\underline{v}_1 = \underline{v}'_1 - (\underline{g} \cdot \underline{z}) \underline{z}$$

$$\underline{v}_2 = \underline{v}'_2 + (\underline{g} \cdot \underline{z}) \underline{z}$$

$$\underline{v}'_1 = \underline{v}_1 - (\underline{g} \cdot \underline{z}) \underline{z}$$

$$\underline{v}'_2 = \underline{v}_2 + (\underline{g} \cdot \underline{z}) \underline{z}$$

$$\underline{g} = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \rightarrow \text{vettore velocità relative}$$

$$\underline{z} = \frac{(\underline{z}_1 - \underline{z}_2)}{d_0}$$

Adesso il problema è noto.

## - Sezione di collisione:

Le collisioni possono essere descritte in termini di sezione di collisione  $\sigma$ , che è determinato dal potenziale di interazione tra le particelle. Se  $d\sigma$  è piccolo, le  $m^2$  di interazioni sono minime; se non c'è attrazione tra le particelle, l'unico modo per farle interagire è mandare la particella proprio nella direzione dell'altra. La sezione aumenta con il potenziale attrattivo: più grande è la sezione, più le molecole interagiscono.

$$\sigma(g, g') = \iint d\Omega' S$$

$S$  = sezione differenziale di collisione

$d\Omega' \rightarrow$  angolo solido: bidimensionale - è l'estensione di un angolo solido alla superficie. Non sono in un

momento monodimensionale e ha 2 gradi di libertà.



$$\sigma = \frac{h}{R}$$



$$\Omega = \frac{A}{R^2}$$

Sfera  $\rightarrow \Omega = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$

In generale  $\sigma$  dipende dal vettore incidente della velocità relativa  $g$  e dall'ordine di grandezza della velocità relativa di collisione  $g'$ .



Comincio a sparare le molecole proiettate in tutte le possibili direzioni e in tutti i possibili punti: alcune passeranno, altre verranno deflesse con angoli diversi. Dalla 1 partono delle particelle che possono muoversi su e giù lungo l'asse e per calcolare le interazioni uso le formule di  $\sigma$ .

Nel caso di un campo di forze sfericamente simmetrico la sezione differenziale di collisione  $S$  può essere espressa in termini del parametro di impatto  $b$  e dell'angolo azimut  $\phi$  (angolo formato dal piano verticale passante per un estro con il piano meridiano del luogo di osservazione).  $S$  dipende dal potenziale e può essere definita matematicamente:



$\nu$  = conto il n° di collisioni nell'unito di tempo  
 = frequenza di collisione

$$\nu = N \cdot \sigma \cdot \bar{g} \quad \left[ \frac{\#}{m^3} \cdot m^2 \cdot \frac{m}{s} \right] = \left[ \frac{\#}{s} \right]$$

Ho  $\sigma$  perché voglio estendere il tutto ad un potenziale generico: se ci fosse quello di sfere rigide avrei do.  $g$  varia da molecole a molecole quindi devo prendere una velocità media  $\approx$  centinaio m/s.

$g = v_1 - v_2$  (precollisione)

$$|g|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 - 2|v_1||v_2|\cos\theta$$



$$|g|^2 = \bar{g}^2 = 2\bar{v}^2(1 - \cos\theta)$$

Il moto delle particelle è caotico, quindi altro tanti  $\theta$  e faremo una sorta di medio:

$$\bar{g}^2 = 2\bar{v}^2 \rightarrow \bar{g} = \sqrt{2}\bar{v} = \bar{v}\sqrt{2}$$

$$\nu = N \sigma \sqrt{2} \bar{v}$$

$$\tau = \frac{1}{N \sigma \sqrt{2} \bar{v}}$$

$$\lambda = \tau \bar{v} = \frac{1}{N \sigma \sqrt{2}}$$

Queste 3 equaz. mi permettono di calcolare  $\nu$ ,  $\tau$ ,  $\lambda$ :  
 devo conoscere la densità ( $N/m^3$ ), il potenziale di interazione e devo determinare la velocità media.

Per calcolare  $\bar{v}$  devo ottenere una distribuzione, quindi

una funzione distributiva: ci riferiamo alle **proprietà macroscopiche del fluido**. Sappiamo già che  $n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$  rappresenta il n° (infinitesimo) di molecole per unito di volume con velocità lungo  $x$  comprese tra  $v_x$  e  $v_x + dv_x$  (stesso per  $y$  e  $z$ ):

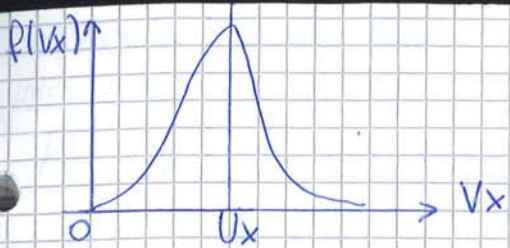
$$N = \int n(v_x, v_y, v_z) f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$$

$\left. \begin{matrix} v_x, v_x + dv_x \\ v_y, v_y + dv_y \\ v_z, v_z + dv_z \end{matrix} \right\} \rightarrow$  velocità relative dei 3 comp. nell'intervallo considerato infinitesimo

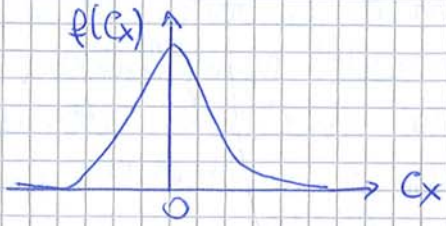
Se quindi la funzione viene integrata in un intervallo finito di ampiezza finita si ottiene il numero di molecole che popolano quell'intervallo.

$$f(v) dv = \frac{N \text{ molecole}}{m^3}$$

3/3/16



$c = v - U$



$c = \text{celerità}$  → deviazione rispetto alle medie

$\int_{-\infty}^{\infty} f(c) dc$

$v = c + U$

$dc = dv$  perché la velocità media è costante per un gruppo di molecole

$\int_{-\infty}^{\infty} f(c) c dc = \text{valore di } \bar{c} = 0$   
 $= \int_{-\infty}^{\infty} f(c) (v - U) dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(c) v dv - U \int_{-\infty}^{\infty} f(c) dc =$   
 $= NU - NU = 0$

Adesso definisco un' energia medio del sistema:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv \cdot \frac{1}{2} m v^2$  → energia totale per unità di volume del sistema  
 m = m. molecole che stanno nelle colonnine  
 energia cinetica delle singole molecole

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m (c + U)^2 f(v) dv =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m c^2 f(v) dv + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m U^2 f(v) dv + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m 2 c U f(v) dv$

$= \rho \hat{u} + \frac{1}{2} m U^2 N = \frac{1}{2} U^2 \rho + m c U f(c) dc =$

energia interna del fluido  
 energia cinetica totale del moto medio per unità di volume (se il fluido sta fermo questo termine è nullo)  
 energia cinetica medio macro del fluido:  $\hat{k}$

$= \rho \hat{u} + \rho \hat{k} + 0$

Adesso valutiamo il flusso di materia, di qdm e di energia.

Se introduciamo la velocità delle molecole scalare rispetto alle velocità medie:  $\underline{c} = \underline{v} - \underline{u}$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \rho \underline{u} &= \iiint_{-\infty}^{\infty} m \underline{v} f(\underline{v}) d\underline{v} = \iiint_{-\infty}^{\infty} m \underline{c} f(\underline{v}) d\underline{v} + \iiint_{-\infty}^{\infty} m \underline{u} f(\underline{v}) d\underline{v} \\ &= \iiint_{-\infty}^{\infty} m \underline{c} f(\underline{v}) d\underline{v} + \underline{u} \iiint_{-\infty}^{\infty} m f(\underline{v}) d\underline{v} = \\ &= \iiint_{-\infty}^{\infty} m \underline{c} f(\underline{v}) d\underline{v} + \rho \underline{u} \end{aligned}$$

da cui si evince che:

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \underline{c} f(\underline{v}) d\underline{v} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \underline{c} f(\underline{c}) d\underline{c} = 0$$

Ciò mette in evidenza che  $f(\underline{v})$  è una funzione di distribuzione la cui velocità media di insieme delle molecole è  $\underline{u}$ , ma in realtà ciascuna molecola ha una sua velocità individuale  $\underline{v}$ . Considerando invece la variazione o deviazione di velocità  $\underline{c}$ , otteniamo una nuova distribuzione  $f(\underline{c})$ , la cui media è sempre zero (per definizione).

Tornando quindi al calcolo del flusso totale di materia lungo la direzione  $x$  otteniamo:

$$\begin{aligned} \rho U_x &= \iiint_{-\infty}^{\infty} m v_x f(\underline{v}) d\underline{v} = \iiint_{-\infty}^{\infty} m u_x f(\underline{v}) d\underline{v} + \iiint_{-\infty}^{\infty} m c_x f(\underline{v}) d\underline{v} = \\ &= \rho U_x + 0 \end{aligned}$$

cioè il flusso totale di materia è dato da 2 contributi, uno legato al moto medio, che chiameremo convettivo, ed uno legato alle fluttuazioni di velocità, che chiameremo molecolare o diffusivo; nel caso di un singolo componente (tutte le molecole sono identiche ed hanno massa  $m$ ) nel calcolo del flusso totale di materia il contributo delle deviazioni di velocità è nullo, perché per ogni molecola che si muove lungo la direzione  $x$  positiva, ne troviamo un'altra (grazie al caos molecolare) che si muove lungo la direzione  $x$  negativa.

Questo ovviamente non è vero nel caso di sistemi a molti componenti.

dove  $\otimes$  individua il prodotto tensoriale o diadico e quindi  $\underline{C} \otimes \underline{C}$  è un tensore che contiene come comp. i termini  $C_i C_j$ . Il tensore  $\underline{P}$  è un **tensore di flusso di q.d.m.** (per fenomeni molecolari e viscosi) e rappresenta il flusso di q.d.m. che un volume di fluido scambia con il fluido circostante e causa delle fluttuazioni caotiche di velocità, cioè le cause delle interazioni molecolari (o collisioni nel caso di potenziali e sfere rigide) fra le molecole che stanno dentro il volume e caoticamente interagiscono con le altre molecole fuori dal volume. È simmetrico.

Immaginiamo quindi il cubetto di volume  $dV = dx dy dz$ , la 1° riga o colonna quantifica le 3 comp. del flusso di q.d.m. nella direzione  $x$  attraverso una faccia ortogonale all'asse  $x$  stesso. Il flusso di q.d.m., essendo una variazione di q.d.m. per unità di tempo e superficie, può essere pensato come una forza per unità di superficie, cioè uno sforzo.

$$\underline{\Sigma} = - \underline{P} \rightarrow \text{tensore degli sforzi}$$

Ci permette di quantificare gli sforzi molecolari che il fluido esterno esercita sul volume di fluido  $dV$ .

Tale flusso viscoso è dovuto quindi alle interazioni tra le molecole che si trovano sui lati opposti delle facce costituenti il volumetto di fluido.

Dato un tensore esistente delle quantità dette **invarianti** che non sono modificate da un cambio del sistema di riferimento; ad esempio la traccia del tensore  $\underline{P}$  e  $\underline{\Sigma}$ , cioè la somma degli elementi sulla diagonale, è una proprietà invariante rispetto a delle rotazioni del sistema di riferimento e rappresenta quindi una proprietà isotropa del fluido.

$$P_{ii} = P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} \rightarrow \text{traccia}$$

$$p = \frac{1}{3} P_{ii} = \frac{1}{3} (P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}) \rightarrow \text{pressione: grandezza scalare}$$

Il tensore flusso viscoso di q.d.m. e tensore viscoso degli sforzi, possono essere quindi divisi nella somma di due tensori, di cui uno a traccia nulla.

$$\frac{1}{2} m \underline{v}^2 v_x f(\underline{v}) d\underline{v}$$

de convezione e legata al moto caotico, ma può essere un moto d'insieme. Nella conduzione realizzo un flusso netto di energie anche se lo vebato medio delle particelle è nullo e non c'è moto di insieme (perché ad esempio per ogni molecola che del termalifone va sulla mano ce me sare' una che compie il progubo opposto).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} m \underline{v}^2 \right) f(\underline{v}) d\underline{v} \rightarrow \text{quantità totale di energia cinetica per unite di volume}$$

Ricordando che:  $\underline{v} = \underline{c} + \underline{U}$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} m \underline{v}^2 \right) f(\underline{v}) d\underline{v} = \rho \frac{1}{2} \underline{U}^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m \underline{c}^2 f(\underline{v}) d\underline{v}$$

$\rho \frac{1}{2} \underline{U}^2 \rightarrow$  prodotto della densità del fluido con l'energia cinetica medio per unite di massa

$$\hat{K} = \frac{1}{2} \underline{U}^2$$

$$\hat{u} = \frac{1}{2} \underline{c}^2$$

e rappresenta quindi l'energia cinetica delle molecole per unite di volume legate al moto d'insieme del fluido.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m \underline{c}^2 f(\underline{v}) d\underline{v} \rightarrow \text{energia cinetica delle molecole (per unite di volume) scorrono del moto medio}$$

È cioè l'energia associata alle fluttuazioni di vebato caotiche del fluido.

Questo secondo contributo viene scritto come:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m \underline{c}^2 f(\underline{v}) d\underline{v} = \rho \hat{u}$$

Se vogliamo adesso calcolare il flusso totale di energia lungo la direzione x, che attraverso quindi una superficie immaginario ortogonale alla direzione x, basta calcolare la seguente quantità:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} m \underline{v}^2 \right) v_x f(\underline{v}) d\underline{v}$$

Ricordando che:  $\underline{v} = \underline{c} + \underline{U}$  e  $v_x = c_x + U_x$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m \underline{v}^2 v_x f(\underline{v}) d\underline{v} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m (\underline{c} + \underline{U})^2 (c_x + U_x) f(\underline{v}) d\underline{v} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m \underline{c}^2 c_x f(\underline{v}) d\underline{v} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m \underline{U}^2 c_x f(\underline{v}) d\underline{v} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m 2 \underline{c} \underline{U} c_x f(\underline{v}) d\underline{v} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m \underline{c}^2 U_x f(\underline{v}) d\underline{v} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m \underline{U}^2 U_x f(\underline{v}) d\underline{v} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m 2 \underline{c} \underline{U} U_x f(\underline{v}) d\underline{v}$$

= flusso totale di energia

D. U: questi sforzi esistono all'interno del fluido; poiché il fluido è viscoso e nel suo movimento trasporta energia legata a questi flussi viscosi.

• Da adesso l'obiettivo è determinare  $f(v)$   
 $v \rightarrow f(v)$

Quando il fluido si trova in cond. di equilibrio termodinamico, la distribuzione sarà gaussiana.

**- Equazione del trasporto:**

Ci dice come una proprietà varia nel tempo e nello spazio. L'oggetto di questa equazione sarà  $f(v)$ .

$$\iiint_{\Omega_v} f(v) dv \quad \frac{\#}{m^3}$$

$\Omega_v =$  intervallo finito di valori di velocità =  $\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq v_x \leq 1 \\ -1 \leq v_y \leq 1 \\ -1 \leq v_z \leq 1 \end{array} \right\} =$  è un cubo nello spazio di velocità

È ancora un'analisi che noi facciamo in un punto.

IN - OUT = ACC

Flusso netto = accumulo

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_v} f(v) dv$$

Le molecole nello scatole cambiano velocità, entrano ed escono e escono dalle scatole, quindi devo tener conto delle collisioni (in generale interazioni molecolari); un altro motivo per cui possiamo cambiare velocità è la presenza di forze continue. Ad esempio se c'è la

forza di gravità si tiene conto delle accelerazioni continue  $\rightarrow$  questi effetti sono chiamati **effetti di forze di campo**. Queste particelle potrebbero essere cariche, quindi ci sarà un campo elettrico. In punti diversi del fluido le "f" avrà valori diversi:  $f(t, x, v)$

Dobbiamo anche integrare rispetto un certo spazio fisico  $\Omega_x$ :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_x} \iiint_{\Omega_v} f(v) dv dx \rightarrow \text{conta il n° assoluto di molecole che stiamo dentro questo scatole nello spazio delle velocità e nello spazio fisico}$$

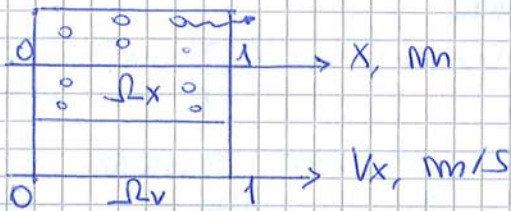
$$dv = dv_x dv_y dv_z$$

$$dx = dx dy dz$$

È un numero in funzione solo del tempo, per via del flusso netto dovuto a 3 fenomeni:

$$\frac{dv}{dt} = a = g$$

Se molecole cambiamo di continuo la loro velocità, purmo  
 anche se non cambiano le loro posizioni, e sono ed  
 entriamo nel 2° volume.



Individuo un pezzo  
 fisso dello spazio x

Conto quante molecole hanno una posizione tra 0 e 1  
 e quante hanno una velocità tra 0 e 1 e vedo come  
 varia nel tempo il numero. In modo continuo le particelle  
 passano attraverso la superficie: le molecole hanno una loro  
 velocità; cambiano posizione e hanno un'accelerazione  
 che le fa passare attraverso la superficie.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta x} \int_{\Delta v} f(v) dv dx + \int_{S_x} \int_{\Delta v} f(v) dv \underline{m} \cdot \underline{v} \cdot dS +$$

$$+ \int_{S_v} \int_{\Delta x} f(v) dx \cdot g \underline{m} dS = \int_{\Delta x} \int_{\Delta v} \rho dx dv$$

↳ termine collisionale

↳ equazione di bilancio macroscopico, perché scritta  
 su volumi finiti.

Ci conviene scriverla in modo diverso, introducendo il  
 teorema del flusso o divergenza di Reynolds: il flusso di  
 una proprietà attraverso una superficie è uguale all'integrale  
 di volume della divergenza di quella proprietà:

$$\int_S \phi \underline{v} \cdot \underline{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\phi \underline{v}) dx$$

$\Omega$  = volume che sta racchiuso dentro la superficie S  
 da proprietà di cui stiamo valutando il flusso e:

$$\int_{\Delta v} f(v) dv = \phi \quad \text{è una proprietà che si muove con una velocità } v$$

Il flusso di materia che entra ed esce dalla superf. è  
 uguale alla divergenza del flusso per la velocità.

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Applico questo teorema all'eq. di bilancio di sopra,  
 chiedendoci quante molecole ci siamo nelle scatole con  
 velocità  $\Delta v$ :

Sono tutte collisioni lineari, quindi tra 2 molecole.  
 Volerò calcolare il n° di collisioni che ho nell'unità di tempo nelle scatole, ci aspettiamo che cresca più linearmente con il n° di molecole.

☐ Sono legato al seguente termine:

$$\underbrace{f(v_1) dv_1}_{\text{n° molecole: } N_1} \underbrace{f(v_2) dv_2}_{N_2} \quad \text{☐} \rightarrow N_1 \cdot N_2$$

A livello microscopico o molecolare sono collisioni reversibili ma non a livello macroscopico.

Trascurerò il 2° e il 3° termine dell'eq. 2.:

$$\frac{\partial f(v)}{\partial t} = \Phi \rightarrow \text{sto contando il n° di molecole con velocità pari a } 1 \text{ m/s che varrà per } 3 \text{ meccanismi}$$

Le collisioni consumano e producono allo stesso tempo molecole che hanno una certa velocità  $v$ .

$v_1$  e  $v_2$  saranno molecole che collidendo scompaiono, nel senso che avremo poi velocità diverse.

$v_1'$  e  $v_2'$  saranno velocità che appaiono positivamente sulle molecole con velocità pari a 1 m/s.

$$\text{☐} \rightarrow - \underbrace{f(v_1) dv_1}_{\text{avremo prima una velocità di } 1 \text{ m/s}} f(v_2) dv_2 + \underbrace{f(v_1') dv_1'}_{\text{viene prodotta una molecola ad } 1 \text{ m/s}} f(v_2') dv_2'$$

Quando ho più molecole devo considerare tutte le possibili interazioni, quindi introduco un integrale.

$$dv_1 = dv_1' \quad dv_2 = dv_2'$$

$$\Phi = \int \left[ - f(v_1) f(v_2) + f(v_1') f(v_2') \right] dv_1 dv_2$$

$\Phi = 0 \Leftrightarrow$  la funzione integranda è uguale a 0  
 la condizione di equil. termodinamico realizza le seguenti condizioni:

- $f_e(v_1) f(v_2) = f_e(v_1') f(v_2')$  → distribuzione di equil. termod. derivata dal termine collisionale
- $m + m = m + m$  → si conserva la massa durante le collisioni
- $m v_1 + m v_2 = m v_1' + m v_2'$
- $\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} m v_2'^2$

Applico al 1° termine il logaritmo:

$$\ln f(v_1) + \ln f(v_2) = \ln f(v_1') + \ln f(v_2')$$

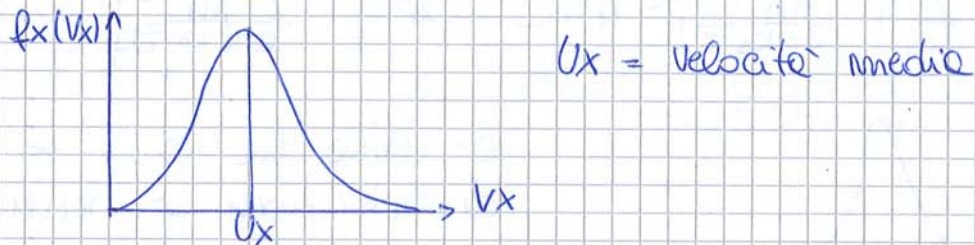


$$f(\underline{v}) = \frac{\rho}{m} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[ - \frac{(v_x - \underline{v}_x)^2 m}{2k_B T} \right] \cdot f_x(v_x) \cdot \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp \left[ - \frac{(v_y - \underline{v}_y)^2 m}{2k_B T} \right] \cdot f_y(v_y) \cdot \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp \left[ - \frac{(v_z - \underline{v}_z)^2 m}{2k_B T} \right] \cdot f_z(v_z)$$

$\underline{c} = \underline{v} - \underline{u} \rightarrow$  essendo un vettore, è costituito dalle somme di 3 componenti

Se tolgo il termine  $\rho/m$ , quello che rimane integro è 1:  $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(v_x) dx = 1$

Se ho un gruppo di molecole in moto caotico, all'equil. termodinamico sono distribuite rispetto alle loro velocità con una distribuzione gaussiana, che diventa di Maxwell-Boltzmann:



**ESEMPIO:**  $2A \rightarrow B$        $R_A = -kC_A^2$        $k(T) = k_0 \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$

Quante sono le molecole che hanno un'energia cinetica maggiore del valore critico  $E_a$ ?

Quando ho un problema cinetico, arrivo sempre a formulare questa espressione: la base per fare questo tipo di calcolo è l'esistenza di questa distribuzione di Boltzmann.

Ricordiamo che l'energia interna per un fluido con 3 soli gradi di libertà (traslazionali) rispetto la seguente relazione:  $\iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m \underline{v}^2 f(\underline{v}) d\underline{v} = \rho \hat{u} = \frac{3}{2} \rho \frac{k_B T}{m}$

Da questa distribuzione di velocità (funzione delle 3 componenti) è possibile calcolare la distribuzione rispetto al modulo del vettore velocità:  $\underline{c} = \underline{v} - \underline{u}$

Ci interessa di più  $|\underline{c}| \rightarrow c$  perché non sono interessato alla direzione in cui vanno le particelle, ma solo al modulo di  $c$ , quindi la distribuzione sarà:

Per calcolare tutti questi integrali, ricordare che:

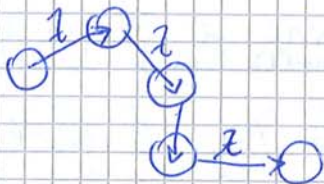
$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$$

$$k_B = 6,6 \cdot 10^{-23}$$

Queste equazioni ci informano della scomente reale: intorno a noi e temp ambiente ci sono molecole di  $O_2$  e  $N_2$  che si muovono (interagendo le une con le altre) alla velocità media di 500 m/s (cioè 2000 km/h)

Posso calcolare il coeff. di diffusione di un gas mota la velocità media:

$D$  [ $m^2/s$ ] → ci dice quanti e la distanza al quadrato che un fluido è in grado di percorrere nell'unità di tempo



$\lambda$  = cammino libero medio

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{v} \quad [m \cdot m/s]$$

per considerazioni geometriche: le molecole si muovono in 3 direzioni diverse

$$\bar{v} = \frac{\lambda}{\tau} \quad \frac{\lambda^2}{\tau^2} = \lambda \bar{v}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} N \sigma} \quad \bar{v} = \left( \frac{8 k_B T}{\pi m} \right)^{1/2}$$

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{v} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2} N \sigma} \cdot \bar{v} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{k_B}{\pi m}} \sqrt{T}$$

Per un potenziale e sfere rigide:  $\sigma = \pi d_0^2$

Man mano aumenta lo temp, il coeff. di

diffusione cresce con  $\sqrt{T}$ : questo è un risultato ricavato con considerazioni teoriche.

$D$  è inversamente proporzionale alle densità numeriche del gas; più ostacoli avrà sul suo percorso, minore sarà la distanza e quindi minore è il coeff.  $D$ .

$k$  = conducibilità termica =  $N \bar{v} \lambda k_B$

Sostituiamo  $\lambda$  e  $\bar{v}$ :  $k = \frac{2 k_B}{\sigma} \sqrt{\frac{k_B}{\pi m}} \sqrt{T}$

Anche  $k$  dipende da  $\sqrt{T}$ .

Per la viscosità:

$$\mu = \frac{1}{3} N m \lambda \bar{v} = \frac{2}{3 \sigma} \sqrt{\frac{m k_B}{\pi}} \sqrt{T}$$

$\mu$  e la velocità con cui la qdm viene trasportata.

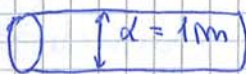
due tubi sono geometricamente simili, esse sono le stesse, quindi ho un'unica soluzione che copre una classe enorme di problemi.

Un altro motivo per cui si preferisce le spaz. normalizzate è che questi  $m$  adimensionali che compaiono nell'eq. li conosceremo, ad esempio il numero di Reynolds.

Il  $m^o$  adimensionale ottenuto dall'eq. di Boltzmann normalizzata è il **numero di Knudsen,  $Kn$** :

$$Kn = \frac{\lambda}{d}$$

$$\lambda = 10^{-6} - 10^{-7} \text{ m}$$



$d$  = diametro del tubo = lunghezza caratteristica

Voglio calcolare il flusso dell'aria intorno a quest'oggetto. Si possono avere 2 configurazioni diverse tra loro:

1)  $\lambda \ll d \rightarrow Kn \ll 1$        $f(v) = f_e(v)$

le molecole di gas hanno così tante interazioni nel percorrere la lunghezza  $d$  da considerare il gas un fluido continuo: queste collisioni sono molto frequenti e ravvicinate  $\rightarrow$  regime continuo.

2)  $\lambda \approx d \rightarrow Kn \approx 1$

$\lambda > d \rightarrow Kn > 1$

Ho talmente poche molecole che le interazioni sono molto scarse, poco frequenti e non posso considerare il flusso continuo  $\rightarrow$  regime molecolare. Siamo nel caso di fluidi rarefatti: fluidi a basse pressioni, distillazione sottovuoto, liofilizzazione o anche fluidi posti in condotti di dimensioni molto piccole (fluidi capillari).

Tra i due regimi vi è il regime di transizione.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nabla_v (f \underline{g}) m d\underline{v} =$$

$$\left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v_x} (f \underline{g}_x) m d\underline{v} = \underbrace{m_f}_{\text{costante}} \underbrace{g_x}_{\text{costante}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 - 0 = 0$$

perché non ci sono molecole che hanno velocità pari a  $+\infty$  e  $-\infty$

Sono 0 per le 3 componenti  $v_x v_y v_z$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underline{v} m d\underline{v} = 0$$

perché l'integrale tra  $-\infty$  e  $+\infty$  dove la velocità è pari a 0.

È la variazione totale di materia (kg) è seguito dalle collisioni perché durante le collisioni la massa si conserva:  $m + m = m + m$ .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_x (\rho u) + 0 = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \rightarrow \text{PG. 77} \text{ equazione di continuità}$$

↳ è prodotto tra vettori genera uno scalare

Questa equaz. corrisponde ad un bilancio di materia: la materia si conserva.

$$\nabla \cdot (\rho \underline{u}) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z)$$

Im motazione indiciale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0$$

$i = 1 \rightarrow$  coord.  $x$   
 $i = 2 \rightarrow$  coord.  $y$   
 $i = 3 \rightarrow$  coord.  $z$

Questa equazione ci dice che la massa totale per unità di volume si conserva nel tempo e nello spazio: quindi se il tempo diminuisce, la densità deve aumentare nello spazio. Il fatto che l'eq. di continuità non contenga un termine diffusivo non ci sorprende perché il moto caotico delle molecole è tale da non produrre (in un sistema monocomponente) un flusso netto di materia.

2) Adesso ripetiamo l'operazione, ma oltre che per la massa delle singole molecole, moltiplichiamo le funz. integrando per la sua quantità di moto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_x \cdot (f \underline{v}) + \nabla_v \cdot (f \underline{g}) \right) = \underline{c} \int m \underline{v} d\underline{v}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} m \underline{v} d\underline{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} f m \underline{v} d\underline{v} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{u})$$

$$\frac{\partial(\rho \underline{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{U} \underline{U}) = -\nabla p + \rho \underline{g} - \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}$$

$$\frac{\partial(\rho \underline{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{U} \underline{U}) = -\nabla p + \rho \underline{g} - \nabla \cdot \underline{\underline{D}}$$

forze per  
unità di volume

→ equaz. vettoriale del bilancio di q.o.l.m

$\nabla \cdot \underline{\underline{D}}$  → forze, perché  $\underline{\underline{D}}$  individua gli sforzi  
 $-\nabla p$  → forze di pressione del fluido

3) Infine ripetiamo l'operazione moltiplicando la funz. integrando per la sua energia cinetica otteniamo:

$$\int_{\infty} \left( \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nabla_x (\underline{U} \underline{U}) + \nabla_v (\underline{U} \underline{g}) = \underline{C} \right) \frac{1}{2} m \underline{U}^2 dV = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho (\hat{K} + \hat{U})] + \nabla \cdot [\rho \underline{U} (\hat{K} + \hat{U})] + \nabla \cdot \underline{J}_q + \nabla \cdot (\rho \underline{U}) - \nabla \cdot (\underline{\underline{D}} \cdot \underline{U}) + \rho \underline{g} \cdot \underline{U} + 0 = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} [\rho (\hat{K} + \hat{U})] + \nabla \cdot [\rho \underline{U} (\hat{K} + \hat{U})] = -\nabla \cdot \underline{J}_q + \rho \underline{g} \cdot \underline{U} + \nabla \cdot (\rho \underline{U}) + \nabla \cdot (\underline{\underline{D}} \cdot \underline{U})$$

↳ bilancio di energia totale PG. 81

I due termini a sinistra dell'uguale rappresentano accumulo e convezione, mentre a destra abbiamo: convezione e potenze per unità di volume (relativo a forze di gravità, pressione e sforzi viscosi).

Quindi per trovare l'energia totale del sistema ( $\rho \hat{U} + \rho \hat{K}$ ) ovvero moltiplicare l'equaz. di partenza per  $1/2 m \underline{U}^2$  invece se moltiplico per  $1/2 m \underline{C}^2$  ottengo il termine di energia interna  $\rho \hat{U}$ .

Per quanto riguarda pressione ed energia interna vengono di solito utilizzate le equaz. delle termodinamiche classiche; metto le 2 equaz. a sistema:

le incognite saranno 3:

$\rho(t, x)$	1	
$\underline{U}(t, x)$	3	→ perché è un'eq. vettoriale
$p(t, x)$	1	

→ 4 equaz. con 5 incognite

Abbiamo bisogno di un'equaz. di stato per avere 5 equaz.: per i fluidi incomprimibili  $\rho = \text{cost}$  o  $\rho = \frac{pM}{RT}$ ; manca però ancora il termine  $\underline{\underline{D}}$ .

10/3/16

Accumulo = portata in - portata out + generazione

$G$  = proprietà estensiva

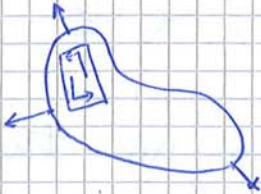
$\hat{G}$  = proprietà estensiva per unità di massa

Proprietà estensiva: dipende dalle dimensioni del sistema, ad esempio volume, massa, qdm, energia, entalpie.

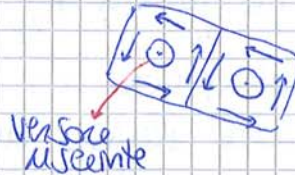
Proprietà intensiva: proprietà il cui valore non dipende dalle quantità di materia o dalle dimensioni del sistema, ad esempio temperatura e pressione.

Le eqnz. di bilancio sono scritte solo per le proprietà estensive.

Definisco un volume di controllo:



$V, S$



Prendo un quadrato della superficie e definisco un verso: una superficie semplicemente orientabile è costituita da più pezzi dove posso definire un tensore entrante o uscente. L'unico per punto di questo volume,  $\rho$  e  $G$  possono variare:

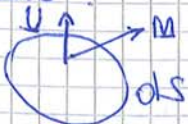
$\frac{d}{dt} \int_V \rho \hat{G} dx$  → termine di accumulo per una generica eqnz. di bilancio applicata ad un volume finito  $V$

Flusso netto: uscente - entrante

Consideriamo 2 tipi di flussi:

- flusso convettivo: legato alle velocità medie  $\underline{U}$

Ho una superficie infinitesima  $ds$  e cui associo un vettore normale  $\underline{m}$  che dice come  $S$  è orientata nello spazio:



$S = \text{superf. finita}$

$\int_S \rho \hat{G} \underline{U} \cdot \underline{m} ds$  → flusso convettivo di quella determinata proprietà

Se  $\underline{m}$  e  $\underline{U}$  sono // → flusso netto

Se  $\underline{U}$  e  $\underline{m}$  stessa direzione:  $\underline{U} \cdot \underline{m} > 0$ :  
proprietà  $\underline{U}$  uscente

Se  $\underline{U}$  e  $\underline{m}$ :  $\underline{U} \cdot \underline{m} < 0$ :  
proprietà  $\underline{U}$  entrante



$$\dot{G} = 1 : \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \underline{U}) + \underline{O} = 0$$

sistema monocomponente: le quantità di materia che trasportano le molecole è uguale, la massa è sempre uguale a m e il moto caotico è bilanciato.

In un sistema monocomponente  $g_0 = 0$ , invece è diverso da 0 nel caso in cui ho una reazione chimica.

In motazione indici:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$$

In coordinate cartesiane:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0$$

In coord. cilindriche e sferiche ??

• Esplicitando l'eq. di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \underline{U} = 0 \quad \text{eq. scalare}$$

In motazione vettoriale:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \underline{U} = 0$

$\downarrow$  gradiente di velocità       $\downarrow$  divergenza di U

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \underline{U}$$

Il termine a sx dell'eq. rappresenta la derivata sostanziale  $\frac{D\rho}{Dt}$ , lagrangiano: è la variazione di densità per un osservatore che non è fisso, ma si muove con il fluido.

Il termine a dx ci dice come varia la densità in un punto fisso del dominio e si parla di variazione euleriana: ovvero cosa fa il fluido in quel punto.

$$\rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \underline{U}$$

$$\frac{D \ln \rho}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{U}$$

$$\frac{D \ln \rho}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{U} \rightarrow \text{dilatazione}$$

Se  $\rho$  aumenta,  $D\rho/Dt$  aumenta: il fluido si sta comprimendo, quindi c'è più materia che arriva di quella che se ne va: questa condizione si realizza quando  $\nabla \cdot \underline{U} < 0$ .

Se  $\rho$  diminuisce, ho più roba che se ne va di quella

Quindi ho un flusso di qdm:



Se le molecole non saltassero da una parte all'altra potrei far scivolare queste molecole; invece in questo caso, proprio perché le molecole saltano, ci sono anche uno sforzo.

• Se il fluido è STAGNANTE e non si muove, vuol dire che non ci sono sforzi tangenziali, ma solamente ci sia un moto d'insieme (il contrario del solido che riesce a contrastare questo sforzo):

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \rightarrow \text{fluido in quiete}$$

Lo sforzo normale è dato dalla pressione: la traccia di  $\underline{\underline{\Sigma}}$  è  $-3P$ .

$$P = -\frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\Sigma}})$$

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} \rightarrow \text{Kronecker}$$

• Se il fluido viene posto in MOVIMENTO, accanto a questi sforzi legati alla pressione, abbiamo degli sforzi aggiuntivi, deviatori rispetto alla situazione di fluido stagnante:

$\underline{\underline{D}}$  → tensore o traccia nulla

$$d_{ij} = \sigma_{ij} + P \delta_{ij}$$

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{D}} - P \underline{\underline{I}}$$

$$\sigma_{ij} = d_{ij} - P \delta_{ij}$$

$$P_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} m c_i c_j f(v) dv$$

$$P_{ii} = 3P$$

$$\tau_{ij} = P_{ij} - P \delta_{ij}$$

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{P}} - P \underline{\underline{I}}$$

• Relazione tra sforzi deviatori, o qdm, con il gradiente di velocità:

$$-d_{ij} = \tau_{ij} = -\mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right]$$

coeff. di viscosità  
dinamica del fluido



$\underline{dxy}$  → sforzo che il fluido esibisce lungo la direz.  $y$  che agisce su una faccia ortogonale all'asse  $x$   
 È una forza che applico per far mantenere in movimento il fluido. Analogamente ho uno sforzo deviatorio  $\underline{dxy}$ .

• da relazione tra gradiente di velocità e sforzo è:  
 $\underline{dxy} = +\mu \frac{\partial u}{\partial x}$

• Adesso possiamo sostituire  $\hat{G}$  con la quantità di massa:  
 $\frac{\partial(\rho \hat{G})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{U} \hat{G}) + \nabla \cdot \underline{J}_G = \rho g$

Nel caso di variazione di  $\rho$  dm l'unica forza che agisce sul sistema è la forza di gravità:

$\rho g =$  forze peso per unità di volume  $= \rho g$   
 $\frac{\rho dm}{\text{volume} \cdot \text{tempo}} = \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}} \right] = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^2} \right] \rightarrow$  variaz. di  $\rho$  dm nell'unità di tempo e volume

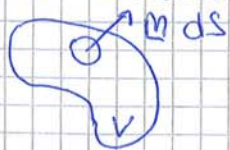
$\rho g = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^2} \right] \rightarrow$  forze per unità di volume

• Posso procedere in 2 modi: sostituire  $\hat{G}$  in  $\rho g$  o sostituire  $\rho$  in  $\underline{J}_G$ :

intento sostituire  $\hat{G} = \underline{U}$  in termini di sforzo:

1)  $\frac{\partial(\rho \underline{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{U} \underline{U}) + \underline{0} = \rho g + \nabla \underline{\underline{\Xi}}$

Per determinare questa forza  $\nabla \underline{\underline{\Xi}}$ :



Forza che agisce sulla superficie:

$\int_S \underline{\underline{\Xi}} \cdot \underline{n} dS \rightarrow$  generazione all'interno del volume  $V$

$\int_S \underline{\underline{\Xi}} \cdot \underline{n} dS = \int_V \nabla \cdot \underline{\underline{\Xi}} dx$  per il teor. di Gauss

2) In termini di flusso di  $\rho$  dm:

$\frac{\partial \rho \underline{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{U} \underline{U}) + \nabla \underline{\underline{P}} = \rho g + \underline{0}$

$\underline{\underline{\Xi}} = \underline{\underline{D}} - p \underline{\underline{I}}$

$\nabla \cdot \underline{\underline{\Xi}} = \nabla \cdot \underline{\underline{D}} - \nabla \cdot (p \underline{\underline{I}})$

$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial p/\partial x \\ -\partial p/\partial y \\ -\partial p/\partial z \end{pmatrix}$

↓  
 gradiente di pressione

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho \underline{g} - \nabla p + \nabla \cdot \underline{D}$$

$$\frac{1}{V} \left( m \frac{DU}{Dt} = F_g + F_p + F_v \right) \rightarrow \text{legge di Newton}$$

Se mi muovo con il fluido e come il fluido, quindi nel caso di osservazione lagrangiana:

$$F_{gravite} + F_{press} + F_{frizo\ viscoso} = \text{accelerazione del fluido}$$

tempe sempre e rallentare l'elemento fluido ed e' sempre un termine negativo

**CASI SPECIALI:**

1)  $\rho = \text{cost}$       $\mu = \text{cost}$      Newtoniano

$$\nabla \cdot \underline{U} = 0$$

Indiciale:  $\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \rho \underline{U} \cdot \nabla \underline{U} = \rho \underline{g} - \nabla p + \nabla \cdot (\mu ((\nabla \underline{U}) + (\nabla \underline{U})^T)) +$$

$$- \frac{2}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \underline{U})$$

perche' contiene la divergenza di U e per un fluido incomprimibile  $\nabla \cdot \underline{U} = 0$ .

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla \underline{U} = \underline{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \underline{U}$$

coeff. di viscosita' cinematica  $\nu$   $[m^2/s^2]$

$$[\nabla \cdot (\mu ((\nabla \underline{U}) + (\nabla \underline{U})^T))] = \mu \nabla^2 \underline{U} \rightarrow \text{fare i calcoli}$$

In notaz. indiciale:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

le equaz. a  $\rho = \text{cost}$ ,  $\mu = \text{cost}$  e l'equaz. di continuita' sono dette equaz. di Navier-Stokes PG. 84

In coord. cartesiane, la 1' equaz (comp. x):

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} =$$

$$= g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right)$$

2) Fluido inviscido:  $\mu = 0$       $\rho = \text{cost}$      velocita' molto alte

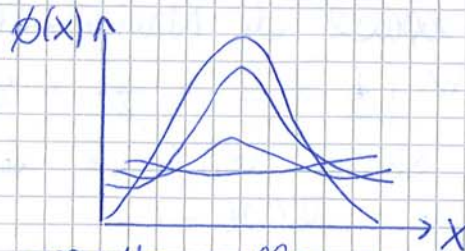
$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla \underline{U} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g} \rightarrow \text{equaz di Eulero PG. 85}$$

$\nabla p$  e  $\underline{g}$  sono viste come forzanti che guidano il moto (non contengono o dipendono da  $\underline{U}$ ).

-ESEMPIO:

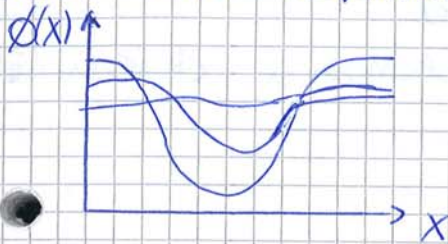
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla^2 \phi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$



da derivate secondo rispetto alle coord. spaziali indica la concavità. Nel punto di max la derivata 1° è nulla, la derivata 2° è negativa; la curva continua a decessere fino ad avere un profilo piatto.

Invece nelle seguenti condizioni:



$\phi$  tende ad aumentare la derivata 2° è positiva

d'equoz. che ci dice come varia la vorticità  $\omega$ :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \omega = \underbrace{\omega \cdot \nabla \underline{u}}_{\text{generazione}} + \nu \nabla^2 \omega$$

Se il fluido ha un certo profilo di vorticità, queste differenze di vorticità tendono ad appiattirsi. Il termine di generazione dipende da  $\omega$ , così come tutti gli altri termini, ma ha un'altra forma.

Prese una certa proprietà  $\phi$ , definisce le legge standard e cui si fa riferimento:

$$\phi \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \phi - \underbrace{\Gamma \nabla^2 \phi}_{\text{termine dissipativo viscoso}} = \dots \xrightarrow{\text{coeff. di trasporto}} \dots \xrightarrow{\text{generazione}}$$

derivata temporale
termine convettivo inerziale

Il termine di generazione dipende dal gradiente di velocità  $\nabla \underline{u} \rightarrow \nabla \otimes \underline{u} : \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

Se la velocità varia in funzione delle coord.  $x, y, z$ , il gradiente è diverso da zero; quindi afferma un fluido abbia dei vortici (vorticità  $\neq 0$ ), esso deve avere un gradiente di velocità  $\neq 0$ , cioè deve individuare delle differenze di velocità.

→  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}$  → forme particolari dell'eq. di N-S

Al suo interno ha il bilancio di qdm e il bilancio totale di quantità di materia.

Note le velocità del fluido, le impresse nel termine a sinistra e a destra rimane il laplaciano di  $p$  quindi diventa un'eq. differenziale ellittica:

$$\left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right)$$

• Possiamo rendere le eq. adimensionate:

1) Continuità:  $\nabla \cdot \underline{u} = 0$

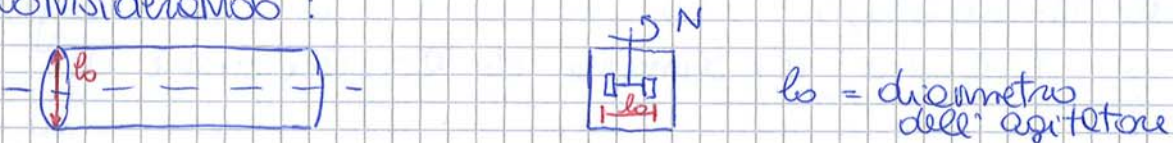
2) N-S:  $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g} + \nu \nabla^2 \underline{u}$

• Dobbiamo definire delle grandezze caratteristiche:

$l_0: \quad \check{x} = \frac{x}{l_0} \quad \check{y} = \frac{y}{l_0} \quad \check{z} = \frac{z}{l_0} \quad \text{PG. 97}$

Vogliamo che queste variabili diventino normalizzate a  $\pm 1$ , perché l'ordine di grandezza di  $x$  sarà circa l'unità.

Considerando:



Devo definire una velocità caratteristica  $v_0$ :

• Nel tubo corrisponde alla velocità media del fluido nel tubo; nell'agitatore è la velocità di rotazione (ci conviene la velocità delle punte delle palette).

$v_0 \quad \check{u} = \frac{u}{v_0} \quad \check{t} = \frac{t}{l_0/v_0}$

- pressione adimensionale:  $\check{p} = \frac{p}{\rho v_0^2}$

Come diventa adimensionate una derivata  $\partial/\partial x$ ?

$$\frac{\partial}{\partial x/l_0} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) l_0 = \frac{\partial}{\partial (x/l_0)} = \frac{\partial}{\partial \check{x}}$$

•  $\check{\nabla} = \nabla l_0$

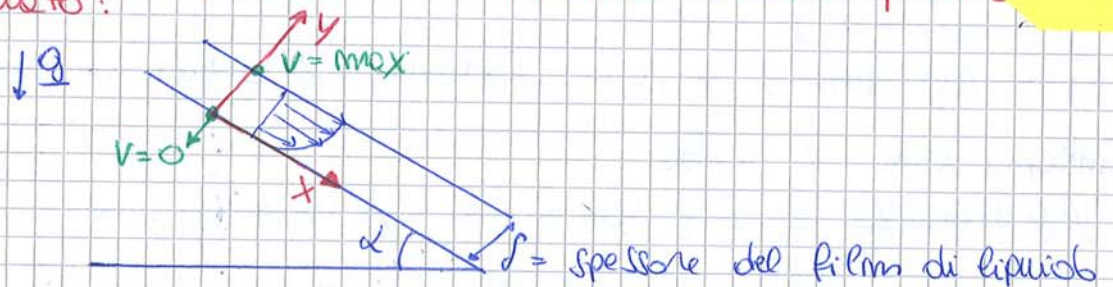
Analogamente:  $\check{\nabla}^2 = \nabla \cdot l_0^2$

invece le Ap edimensionali sono uguali: le soluzioni delle equez. sono le stesse perché Re e Fz hanno lo stesso valore.

• da transizione del laminare al turbolento avviene con un Re intorno a 2500.

Questa procedura vale per qualsiasi tubo e anche una curva per ogni problema. Questi vari problemi si possono risolvere utilizzando le equez. ricavate finora:

### 1) Moto di un fluido newtoniano su un piano inclinato:



#### Ipotesi semplificative:

- flusso stazionario
- definisco un sistema di riferimento: il fluido si muove solo lungo la direzione x, quindi ci sarà solo  $U_x \neq 0$ , invece  $U_y = 0$
- Considero il piano inclinato estremamente lungo, quindi  $U_x = U_x(y) \rightarrow$  non ci sono variaz. lungo la direz. x. la velocità lungo y sarà 0 in  $x=0$  e  $U_{max}$  nel film.
- pressione costante lungo x
- spessore  $\delta$  del film costante
- assumo che dall'altra parte del film ci sia aria, con viscosità  $\ll$  di quella del fluido dentro il film.

#### Equez. di continuità:

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0 \quad 0 + 0 = 0$$

#### N-S, vettoriale:

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}$$

$U_x$  non dipende da x       $U_y = 0$        $p$  non dipende da x

l'equazione diventa un'equez. differenziale ordinaria e coeff. costante:

$$0 = g_x + \nu \frac{d^2 U_x}{dy^2}$$

direzione dell'angolo  $\theta$ , coord. polare

Nelle zone centrali del tubo, l'unica comp. di velocità diversa da zero sarà  $U_z \rightarrow U_z \neq 0$

$$U_z = U_\theta = 0$$

Per qualunque piano con qualsiasi orientazione  $\theta$ , avremo la stessa condizione perché ho la cond. di assiale simmetrica:



$U_z$  non dipende da  $\theta$  perché per ogni piano ho la stessa condizione, non dipende nemmeno dalle cond. assiale perché ipotizzo che il tubo sia molto lungo e non considero l'imbocco e lo sbocco:  $U_z(z)$   
 cioè  $U_z$  sono solo funzione di  $z$ .

Un'altra ipotesi è che la pressione varia mentre il fluido si muove: non meno che il fluido si muove, la pressione diminuisce.

Riscriviamo l'equaz di N-S in notaz vettoriale:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla \underline{U} = - \frac{1}{\rho} \nabla P + \underline{g} + \nu \nabla^2 \underline{U}$$

proiezione  
stezionaria

de comp che ci interessa è solo  $z$ , perché le altre sono nulle, quindi si annullano molti termini:

$$\underline{U} \cdot \nabla \underline{U} \rightarrow \left. \begin{array}{l} U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \\ U_\theta \frac{\partial U_z}{\partial \theta} \\ U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{in coord. cilindriche li} \\ \text{sommo.} \\ \text{vanno a 0 perché} \\ U_z = U_\theta = 0 \end{array}$$

$U_z$  non dipende da  $z$

Il trasporto convettivo di qdm è nullo per la comp.  $z$  se trascuriamo gli effetti di imbocco e sbocco nelle zone centrali: il flusso non si muove lungo  $z$ .

$\underline{g} \rightarrow (g_r, g_\theta, g_z)$        $g_z = 0$  se il tubo è orizzontale

$$0 = - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \underline{U}$$

Per  $z=0$ ,  $C_1$  deve essere uguale a zero (della 1ª cond.) perché se non  $C_1/z$  andrebbe ad  $\infty$  perché gli altri due termini sono uguali a 0.

Integro una 2ª volta:

$$0 = \frac{z^2}{4} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \mu U_z(z) + C_2$$

$$U_z(z) = \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{R^2}{4\mu} \left( 1 - \frac{z^2}{R^2} \right)$$

→ profilo di velocità parabolico

per  $z=R \rightarrow U_z(z) = 0$

• Se voglio calcolare la portata volumica che passa all'interno di questo tubo, devo vedere come varia il profilo di velocità punto per punto:



$$\dot{V} = \int_0^R \int_0^{2\pi} U_z(z) dz z d\theta$$

↳ altezza della sezione di arco

Poiché  $U_z$  non dipende da  $\theta \rightarrow \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_0^R U_z(z) 2\pi z dz \\ &= \int_0^R \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{R^2}{4\mu} \left( 1 - \frac{z^2}{R^2} \right) 2\pi z dz = \\ &= \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{\pi R^4}{8\mu} \end{aligned}$$

quindi posso definire:  $\frac{\dot{V}}{\text{sez. di passaggio del tubo}}$

$$\frac{\dot{V}}{\pi R^2} = \text{velocità media } v_m = \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{R^2}{8\mu}$$

quindi posso scrivere  $U_z(z) = 2 v_m \left( 1 - \frac{z^2}{R^2} \right)$

la velocità al centro del tubo è 2 volte la velocità media, quindi la velocità massima.

Per un flusso laminare la relazione tra  $\dot{V}$  e  $\partial p/\partial z$  è lineare:

$$\dot{V} = \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{\pi R^4}{8\mu} \rightarrow \text{eq. di Poiseuille}$$

In campo turbolento non ho più un profilo parabolico, ma lineare.

Il modello usato per descrivere questi comportamenti è:

$$\sigma_{ij} = K \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^{m-1} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \rightarrow \text{legge di potenza}$$

non è costante, ma dipende da  $\delta$

Ricordando il bilancio di qdm:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \rho \underline{g} + \nabla \underline{D}$$

(non possiamo più svolgere l'eq. di N-S) perché?

$$\frac{\partial (\rho \underline{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \underline{u}) = -\nabla p + \rho \underline{g} + \nabla \underline{D}$$

↳ è uguale all'eq. di sopra perché in mezzo c'è l'eq. di continuità.

Per un flusso in un tubo, quei termini vanno via e altro:

$$\left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (d_{zz} z) = 0$$

$d_{zz}$ : è l'unico comp. di sforzo diverso da zero.

Flusso di qdm, comp.  $z$ : sforzo viscoso che va nella direzione  $z$  su un piano ortogonale all'asse  $z$ .

Flusso di qdm, comp.  $z$ : sforzo viscoso che va nella direz.  $z$  su un piano ortogonale all'asse  $z$ .

Devo adesso risolvere l'equazione:

$$z \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (z d_{zz}) = 0$$

Integro:  $\frac{z^2}{2} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) + d_{zz} \cdot z = \frac{C_1}{z}$

Se  $z=0$ ,  $C_1$  deve essere  $= 0$  perché, se  $C_1 \neq 0$  lo sforzo va a  $\infty$  e ciò non è possibile quindi  $C_1 = 0$ .

Mem memo che più mi muovo lungo la parete, lo qdm rispetto a  $z$  aumenta; alla parete esso sarà massimo.



$$d_{zz} = K \left| \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|^{m-1} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

Se  $z$  aumenta,  $u_z$  diminuisce quindi  $\frac{\partial u_z}{\partial z} < 0$  quindi toglia il valore assoluto.



superficie sempre più grande. Possiamo dividere il tubo in 2 parti: una parte centrale in cui lo sforzo è minore di 0, il gradiente di velocità è uguale a 0 e il profilo di velocità sarà piatto; solo quando lo sforzo è  $\geq \tau_0$ , il fluido di Bingham si comporta come un fluido newtoniano e c'è obbedienza sforzo da mettere in movimento il fluido: il gradiente di velocità è diverso da 0 e il profilo è parabolico.

**CASO PARTICOLARE:**

lastra piana immersa in un fluido che viene messo in movimento. PG 115

Adesso abbiamo 2 variabili indipendenti:



All'istante  $t=0$ , la lastra si muove con una velocità pari a  $U_0$ .

La frazione di fluido in movimento sarà grande quando il fluido è in movimento, infatti per  $t \rightarrow +\infty$  tutto il fluido sarà messo in movimento.

Voglio capire come  $U_x$  varia nel tempo e nello spazio:

$U_x(t, y)$

Ipotesi semplificative:

- $U_y \cong 0$  → il moto lungo y è trascurabile
- $U_x(t, y)$  → all'inizio il fluido è fermo, alla fine è in moto e nel mezzo ci sarà un profilo di velocità

Scritto l'equaz. di N-S applicando queste ipotesi:

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \right) + g_x$$

*Annotations:*  
 -  $\frac{\partial U_x}{\partial t}$  and  $U_x \frac{\partial U_x}{\partial x}$  are functions of t and y.  
 -  $U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = 0$   
 - The right-hand side terms are constant and open, and momentum is conserved in the x-direction.

$\frac{\partial U_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}$  → bilancio di p.d.m

d'equaz. differenziale ci dice che la variazione della p.d.m varia nel tempo perché c'è un trasporto molecolare.

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}$$

$$-2 \frac{d\phi}{d\eta} \cdot \eta \cdot \frac{1}{2t} = \nu \frac{d^2\phi}{d\eta^2} \cdot \frac{1}{4\nu t}$$

$$\frac{d^2\phi}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\phi}{d\eta} = 0$$

equaz. differenziale  
ordi. max. di 2° ordine  
o coeff. non costanti

Condizioni al contorno e iniziali:

1) Alla parete  $y = 0$ :

$$\phi(\eta = 0) = 1$$

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{4\nu t}}$$

2)  $y = +\infty$   $t = 0$ ,  $\eta = +\infty$

$$\phi(\eta \rightarrow +\infty) = 0$$

Adesso posso risolvere l'equaz.:

$$\psi = \frac{d\phi}{d\eta}$$

$$\frac{d\psi}{d\eta} + 2\eta\psi = 0$$

$$\frac{d\psi}{\psi} = -2\eta d\eta$$

$$\ln \psi = -\eta^2 + C_1$$

$$\psi(\eta) = \exp(-\eta^2 + C_1) = C_2 \exp(-\eta^2) = \frac{d\phi}{d\eta}$$

$$\phi(\eta) = C_2 \int_0^\eta \exp(-\eta^2) d\eta + C_3 \quad C_3 = 1 \text{ quando } \eta = 0$$

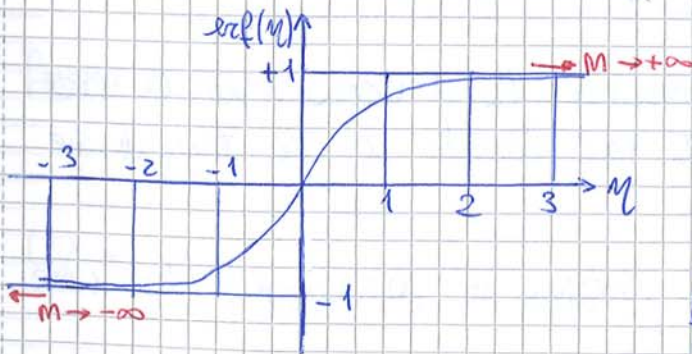
$$C_2 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \text{ quando } \eta = \infty$$

$$\phi(\eta) = \frac{U_x}{U_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta = y/\sqrt{4\nu t}} \exp(-x^2) dx =$$

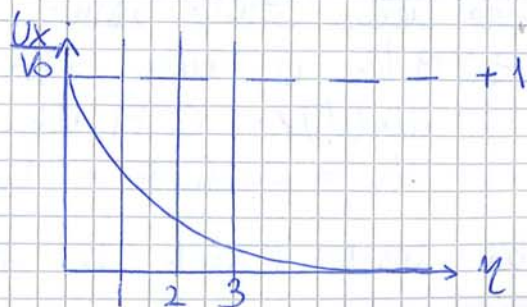
$$= 1 - \text{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu t}}\right)$$

erf è una funz. tabellata

$$\begin{cases} 1 & \eta = \infty \\ 0 & \eta = 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \eta = 3, \text{ erf} &= 1 & \phi &= 0 \\ \eta = -3, \text{ erf} &= -1 \end{aligned}$$



cosa succede lì dentro?

Il trasporto viscoso di qdm è l'elemento predominante perché la velocità del fluido è molto piccola.

Adesso risolviamo il problema bidimensionale per un fluido newtoniano in moto laminare:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)$$

(trascuro l'effetto della gravità)

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right)$$

22/3/16

Definisco una velocità esterna  $U_e$ , che solitamente è uguale a  $U_\infty$  e uno spessore  $\delta$ , che dipende dalle coordinate  $x$ . PG. 135

Si identifichiamo 2 grandezze caratteristiche:  $\delta_0, l_0$

$\delta_0 \ll l_0$  → ad esempio in una sfera  $l_0$  dimensione dello strato limite e  $\ll$  della dimensione delle sfere.

Per capire l'ordine di grandezza dei vari termini che costituiscono la precedente equazione, approssimo le derivate con delle derivate finite:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} \approx \frac{U_\infty - 0}{\delta_0 - 0} = \frac{U_\infty}{\delta_0} \rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial y} = O\left(\frac{U_\infty}{\delta_0}\right)$$

$\delta_0 =$  ordine di grandezza di  $\delta$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = O\left(\frac{U_\infty}{l_0}\right)$$

Anche  $\frac{\partial u_y}{\partial y}$  avrà lo stesso ordine di grandezza di  $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} \approx O\left(\frac{U_\infty}{l_0}\right)$$

$$u_y \approx O\left[\left(\frac{U_\infty}{l_0}\right) \cdot \delta_0\right] = O\left[\frac{\delta_0}{l_0} \cdot U_\infty\right]$$

$\ll 1$  perché  $\delta_0 \ll l_0$

quindi:  $u_y \ll u_x$  perché  $u_x \rightarrow O(U_\infty)$

Il centro di tutto è l'equazione di continuità: se in prossimità della parete il moto del fluido rallentasse

Adesso risolviamo le equaz. trascurando i termini:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$\rho U_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho U_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\rho \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \dots \right)$$

trascurato

Devo risolvere queste equaz.:

$$\left. \begin{aligned} U_x(y=0) &= 0 \\ U_y(y=0) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{cond. al contorno (no slip alle pareti)}$$

$$U_x(y \geq \delta) = U_e \quad U_e = \text{flusso esterno}$$

Questa cond. al contorno mi dice che il bilancio di qdm fuori dallo strato limite sono semplice perché i termini viscosi sono trascurabili:

$$U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Dato che  $\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x}$  posso inserire queste equaz., anche se è stata verificata fuori lo strato limite, nella precedente. Inoltre, formiamo all'equaz. di continuità:

$$U_y = -\int_0^y \frac{\partial u_x}{\partial x} dy \rightarrow \text{se il flusso varia lungo } x \text{ dello strato } y \text{ e deve esserci una velocità } U_y.$$

$U_e$  varia con  $x$  e non lungo  $y$ .

Mettendo insieme tutto

$$\rho U_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - \left( \rho \int_0^y \frac{\partial u_x}{\partial x} dy \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} = \rho U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

L'unica incognita è  $U_x$ ; suppongo che  $U_e$  e le sue variaz. lungo  $x$  sono note.

Moltiplicando per la densità e integrando in  $y$  tra 0 e  $+\infty$ :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} \rho U_x (U_e - U_x) dy + \frac{dU_e}{dx} \int_0^{+\infty} \rho (U_e - U_x) dy = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \Big|_0^{+\infty} + \dots$$

$\rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$

bilancio di qdm integrale, che vale dentro lo strato limite: **VON KÁRMÁN** PG. 136

Conoscendo  $U_e$ , uso l'equaz. per verificare se, preso un profilo di velocità, questo è corretto e coerente con la soluzione dell'equazione.

$$F_x = \int_0^w \int_0^L \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \Big|_{y=0} dx dz = 1,29 \sqrt{\rho \mu} L w^2 v_{00}^3$$

↳  $dxy$ : sforzo viscoso che agisce lungo la comp.  $x$  sulle facce

23/3/16

Per risolvere le equaz. viste nelle scorsa lezione possiamo essere necessari metodi numerici, quindi facciamo un richiamo di met. numerici per la risoluzione di equaz. differenziali alle derivate parziali.

Equazioni  $\left\{ \begin{array}{l} \text{lineari} \\ \text{non lineari} \end{array} \right. \rightarrow$  sono quelle che ci interessano

da non lineari deriva dal termine inziale

1° ordine  $\quad \quad \quad$  2° ordine

I problemi che risolveremo con questi tipi di equaz. sono:

- 1) problemi di propagazione, cioè non stazionari
- 2) problemi di equilibrio, cioè stazionari

I primi sono di solito problemi ai valori iniziali, o **problemi di Cauchy**: un esempio potrebbe essere:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

↑ termine temporale  $\quad \quad \quad$  ↑ termine spaziale

I secondi invece:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = k \quad \text{costante} \rightarrow \text{equaz. di Poisson}$$

Cond. al contorno:  $p = p_0 \quad (x, y) \in D \quad D = \text{dom. spaziale}$

Le equaz. diff. alle derivate parziali possono essere del tipo:

- ELLITTICHE:  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = k \rightarrow$  problemi di Poisson

leghiamo di una variabile potenziale  $\phi$

- PARABOLICHE:  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \rightarrow$  problemi diffusivi

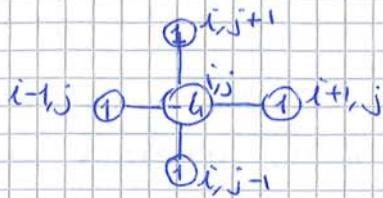
- IPERBOLICHE:  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \rightarrow$  equaz. delle onde

$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \rightarrow$  altro esempio noto

Quindi per il laplaciano, operatore differenziale.



Per esso si utilizza una formula "a croce":



Possiamo quindi costruire tutti gli operatori diff. che ci servono

Per i calcoli ingegneristici non si utilizzano le differenze finite, ma il metodo o ELEMENTI FINITI: i metodi alle diff. finite non garantiscono la conservazione, che è la caratteristica delle equaz. di trasporto trattate nel corso. Sono stati ideati dei metodi conservativi di calcolo, come:

## 2) METODO DEI VOLUMI FINITI:

È basato sulla riscrittura in forma integrale dell'equaz. di conservazione.

La forma tipica dell'equaz. di conservazione è:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + q_\phi \rightarrow \text{in forma scalare}$$

↓ termine di accumulo temporale    
 ↓ trasporto convettivo    
 ↓ termine diffusivo    
 ↓ termine sorgente

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + q_\phi \rightarrow \text{in forma vettoriale}$$

Risolveremo quindi queste equazioni nei vari casi:

- Se  $\phi = 1$       $\Gamma = 0$       $q_\phi = 0$      otteniamo:  
 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0$       $\rightarrow$  equaz. di continuità

non c'è diffusione e il termine sorgente è nullo perché la materia totale si conserva

- Se  $\phi = U_j$       $\Gamma = \mu$       $q_\phi = -\nabla p + \rho g$   
 otteniamo l'equaz. di bilancio di qdm:  
 $\frac{\partial \rho U_j}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U_j \mathbf{U}) = \nabla \cdot (\mu \nabla U_j) + \rho g - \nabla p$

- Il 1° termine ~~representa~~ rappresenta la convezione, mi dice l'integrale della quantità  $\phi$  che attraversa la cella, cioè se immaginiamo che  $\phi$  sia la temp., mi dice quanto calore passa per la superf. della cella nel tempo (cioè che passa per la faccia).

- Il 2° termine rappresenta un trasporto molecolare di qdm e mi dice la diffusione molecolare di calore attraverso la superf. della cella (faccia).

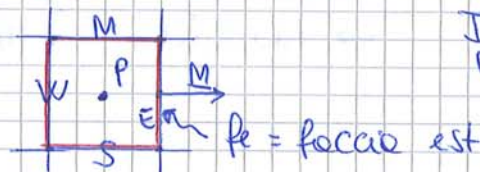
- Il 3° termine rappresenta il termine generativo e mi dice la generazione di calore dovuta ad esempio ad una reazione chimica: se c'è calore, il termine sarà positivo e, dato che si sta scaldando, la temp. in uscita sarà più alta di quella all'ingresso.

• Risolviamo il problema, preso la cella che è noi interesse:

$$\int_S (\rho \mathbf{U} \phi - \Gamma \nabla \phi) \cdot \mathbf{M} \, dS = \int_V q \, dx$$

Il termine di trasporto: costituito da 4 termini è un problema di bilancio stazionario.

Prendiamo queste proprietà al centro della cella e cerchiamo di capire cosa succede sulle facce: ci aiutiamo con la notazione compass notation:

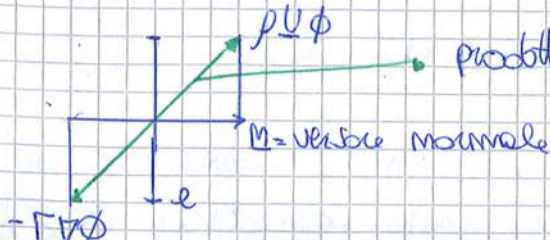


Immaginiamo le facce con nord, sud, est, ovest

$$\rightarrow \sum_{k=M,S,E,O} \int_{S_k} f \, dS$$

$f =$  flusso della proprietà =  $\rho \mathbf{U} \phi \mathbf{M} - \Gamma \nabla \phi \mathbf{M}$   
 non è più un vettore  $f$  convettivo  $f$  diffusivo

Ad esempio, presa la faccia est:



prodotto scalare tra i due tipi di flusso

$f$  varia lungo una faccia punto per punto

cioè dalle facce W e E.

Presi i valori al centro della faccia

$$\underbrace{(\rho U \phi_e)}_{\text{flusso convettivo}} S_e - (\rho U \phi_w) S_w + (-\Gamma \nabla \phi_e) S_e - (-\Gamma \nabla \phi_w) S_w = 0$$

Per i segni, dipende se i versi <sup>delle normali</sup> sono concordi o discordi ~~con~~ con la velocità U.

Posso riscrivere i termini come differenze finite:

$$\rightarrow \nabla \phi_e = \frac{\phi_e - \phi_p}{\Delta x} \quad \nabla \phi_w = \frac{\phi_p - \phi_w}{\Delta x}$$

Se adesso mettiamo tutto insieme e operiamo delle semplificazioni, in questo sistema monodimensionale,  $S_e = S_w$ :

$$\underbrace{\phi_e - \phi_w}_{\substack{\text{flusso convettivo} \\ \text{netto}}} - \underbrace{\frac{\Gamma}{\rho U} \frac{\phi_e - \phi_p}{\Delta x} + \frac{\Gamma}{\rho U} \frac{\phi_p - \phi_w}{\Delta x}}_{\text{flusso diffusivo}} = 0$$

I due termini sono uguali e contrari.

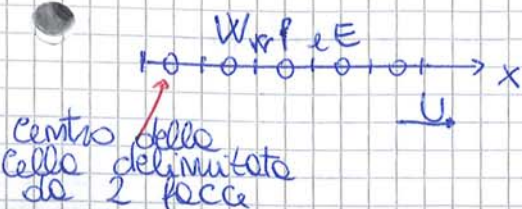
Tutto questo va poi esteso al centro della cella e poi a tutte le celle. Noi cerchiamo la proprietà  $\phi$  al centro della cella: abbiamo come incognite le proprietà al centro delle facce e possiamo interpolare con le 2 celle adiacenti.

31/3/16

La maggior parte dei problemi non hanno una soluzione analitica. Le equazioni da risolvere, in forma integrale, sono del tipo:

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i \phi) \right) dV = \int_V \left( \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} + q \phi \right) dV$$

Considero un problema monodimensionale allo stato stazionario e senza il termine sorgente:



Una cella del dominio è un volume



# 1° METODO: UDS o upwind differencing scheme o first-order upwind

È corretto usarlo quando abbiamo un problema obliquo dalla convezione.

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & U \cdot M > 0 \rightarrow U \\ \phi_E & U \cdot M < 0 \leftarrow U \end{cases}$$

È utile valutare l'ordine di questo metodo: scivolo una serie di Taylor centrata nella cella P:

$$\phi(x) = \phi(x_p) + \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=x_p} (x - x_p) + \dots$$

Se valutato caso succede per  $x = x_e$ :

$$\phi_e = \phi_p + (x_e - x_p) \left( \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x_p} \right) + \dots = O(\Delta x)$$

Confrontando queste ultime espressioni con le UDS:  $\phi_e = \phi_p \rightarrow$  trascuro la variazione di  $\phi$ , cioè un termine del 1° ordine.

Quindi l'ordine di grandezza dell'errore sarà proprio del 1° ordine, cioè dell'ordine di grandezza di  $\Delta x$ .

Definisco il flusso:

$$f_e = \underbrace{\rho U \phi}_f^c - \underbrace{\Gamma \frac{d\phi}{dx}}_f^d = \text{flusso al centro della faccia est}$$



Dallo sviluppo di Taylor precedente:

$$\phi_p = \phi_e - \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x_p} \right)$$

$$f_e = \rho U \phi_p - \Gamma \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x_p} \quad \text{sostituisco:}$$

$$f_e = \rho U \phi_e - \frac{\rho U \Delta x}{2} \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x_p} - \Gamma \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x_p}$$

$$f_e = \underbrace{\rho U \phi_e}_f^c - \underbrace{\left( \Gamma + \frac{\rho U \Delta x}{2} \right)}_f^d \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x_p}$$

viscosità reale
viscosità aggiuntiva
diffusione numerica

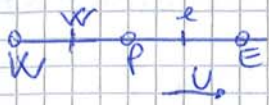
## • OSSERVAZIONE:

- Se  $\phi \rightarrow U$ ,  $\Gamma = \mu \rightarrow$  il secondo termine è un flusso viscoso di ordine comu + viscoso

Per valutare l'ordine, scrivo la serie di Taylor centrata in P:

$$\phi_E = \phi_P + (x_E - x_P) \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x_P} + \frac{1}{2} (x_E - x_P)^2 \frac{d^2\phi}{dx^2} \Big|_{x_P} + \dots + H$$

higher order terms



Per valutare il valore di  $\phi$  al centro delle celle est.:

$$\phi_E = \phi_P + (x_E - x_P) \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x_P} + \frac{1}{2} (x_E - x_P)^2 \frac{d^2\phi}{dx^2} \Big|_{x_P} + H$$

$$\frac{d\phi}{dx} \Big|_{x_P} = \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P} - \frac{1}{2} (x_E - x_P) \frac{d^2\phi}{dx^2} \Big|_{x_P} - \frac{H}{(x_E - x_P)}$$

Sostituisco nella prima:

$$\phi_E = \phi_P + \frac{(x_E - x_P)}{(x_E - x_P)} (\phi_E - \phi_P) - \frac{1}{2} (x_E - x_P) \frac{d^2\phi}{dx^2} \Big|_{x_P} + \frac{1}{2} (x_E - x_P)^2 \frac{d^2\phi}{dx^2} \Big|_{x_P} - \frac{H}{(x_E - x_P)} (x_E - x_P) + H$$

corrisponde alle 1° equaz. del metodo

I termini che trascuro sono di 2° ordine che hanno con  $\Delta x^2$ : se raddoppio il n° di celle, si riduce della metà la dimensione delle celle e l'errore si riduce di 4 volte. Questo metodo però è condizionatamente limitato, quindi non è garantita la stabilità.

- Utilizziamo il metodo UAS:

$$\phi_w = \phi_w \quad \text{tecnica degli elementi finiti}$$

$$\phi_e = \phi_p$$

Sostituiamo nell'equazione originale:

$$\phi_p - \phi_w - \frac{\Gamma}{\rho U \Delta x} \phi_e + \frac{\Gamma}{\rho U \Delta x} \phi_p + \frac{\Gamma}{\rho U \Delta x} \phi_p - \frac{\Gamma}{\rho U \Delta x} \phi_w = 0$$

$$\phi_w (-1 - \frac{\Gamma}{\rho U \Delta x}) +$$

$$\phi_p (1 + \frac{\Gamma}{\rho U \Delta x} + \frac{\Gamma}{\rho U \Delta x}) +$$

$$\phi_e (-\frac{\Gamma}{\rho U \Delta x}) = 0$$

Conviene considerare  $\frac{\rho U \Delta x}{\Gamma}$  perché per le qdm  $\Gamma$  è la viscosità quindi questo rapporto è il n° di Reynolds.

Im generale  $\frac{\rho U \Delta x}{\Gamma}$  è il numero di Peclet di celle,  $P_c$ , dove la dimensione caratteristica è la dimensione della cella.

$$\begin{aligned} \Phi_w \left( -\frac{1}{2} - \frac{\text{Pec}}{2} \right) + \\ \Phi_p \left( \frac{\text{Pec}}{2} + \frac{\text{Pec}}{2} \right) + \\ \Phi_e \left( \frac{1}{2} - \frac{\text{Pec}}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\text{Pec}}{2} = \text{Pec}$$

$$\Phi_w \left( -\frac{\text{Pec}}{2} - 1 \right) + \Phi_p (2) + \Phi_e \left( \frac{\text{Pec}}{2} - 1 \right) = 0$$

$$\boxed{\Phi_{i-1} \left( -\frac{\text{Pec}}{2} - 1 \right) + 2\Phi_i + \Phi_{i+1} \left( \frac{\text{Pec}}{2} - 1 \right) = 0}$$

$$\begin{pmatrix} -(\frac{\text{Pec}}{2} + 1) & & & & \\ & 2 & & & \\ & & (\frac{\text{Pec}}{2} - 1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \Phi_{N-1} \\ & & & & \Phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ad esempio, se  $\Phi_0 = 60^\circ$  e  $\Phi_N = 20^\circ$

$$\Phi_0 = 1 \quad \Phi_N = 0$$

(N = 100)

devo ricordare in questi intervalli.

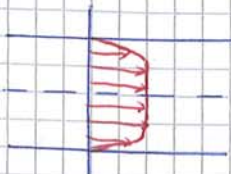
Facendo un'analisi su questi problemi è possibile dimostrare che con l'UDS la soluzione è sempre limitata  $\forall \text{Pec}$  (anche se prendo un  $\Delta x$  gigante); invece con il CDS la soluzione è limitata se  $\text{Pec} < 2$ .

● Il motivo di ciò è che nelle UDS tutte e due le diagonali sono negative, mentre nel CDS una è negativa, l'altra lo è solo in certe condizioni.

- Nel metodo UDS compare la diffusività numerica:

$$\Gamma_{\text{num}} = \frac{\rho U \Delta x}{2} ; \text{ l'errore è: } \Gamma_{\text{num}} \frac{d\phi}{dx} / x_p$$

Questo vuol dire che se  $d\phi/dx$  è nullo, cioè  $\phi$  è costante dunque, l'errore è nullo; quindi se ho problemi in cui il gradiente è piccolo, l'errore sarà piccolo. Ad esempio il trasporto in un tubo



In questo caso il gradiente di velocità è alto in prossimità delle pareti, ma nella zona centrale non devo preoccuparmi della diffusività numerica.

Sostituisco  $X = X_e$  e determino  $\phi_e$ .

Griglia uniforme:  $\phi_e = \frac{3}{8} \phi_w + \frac{6}{8} \phi_p - \frac{1}{8} \phi_e$ .

Se il fluido si muove sempre in una direzione  $\rightarrow$ :

$$\phi_e = \frac{3}{8} \phi_w + \frac{6}{8} \phi_p - \frac{1}{8} \phi_e$$

$$\phi_e = \quad \quad \quad + 1 \phi_p \quad \text{UDS}$$

$$\phi_e = \quad \quad \quad + \frac{1}{2} \phi_p + \frac{1}{2} \phi_e \quad \text{CDS}$$

$$\phi_e = -\frac{1}{2} \phi_w + \frac{3}{2} \phi_p \quad \text{second-order}$$

$$\left( \phi_p + \frac{1}{2} \phi_p - \frac{1}{2} \phi_w \right)$$

Se si muove  $\leftarrow$ : tutti cambiamo tranne il CDS

Quindi:

- UDS: uso solo un punto, approssimo con una retta dritta, 1° ordine
- CDS: approssimo con una retta con una certa pendenza, 2° ordine
- QUICK: è costituito da 3 punti, 3° ordine; se raddoppio il n° di celle, l'errore si riduce di 8 volte

Tutti questi metodi di ordine superiore hanno problemi di limitatezza.

- Un altro metodo è il **MUSCL**, che è un'estensione del quick e delle celle irregolari.

**- ESERCIZIO:**



Prova a vedere quanto vale  $\phi_e$ , usando i vari metodi

UDS:  $\phi_e = \phi_p = 40$

CDS:  $\phi_e = \frac{1}{2} \phi_p + \frac{1}{2} \phi_e = \frac{1}{2} \cdot 40 + \frac{1}{2} \cdot 35 = 37,5$

Second-order:  $\phi_e = -\frac{1}{2} \phi_w + \frac{3}{2} \phi_p = -\frac{1}{2} \cdot 80 + \frac{3}{2} \cdot 40 = 20$

QUICK:  $\phi_e = \frac{3}{8} \phi_w + \frac{6}{8} \phi_p - \frac{1}{8} \phi_e =$

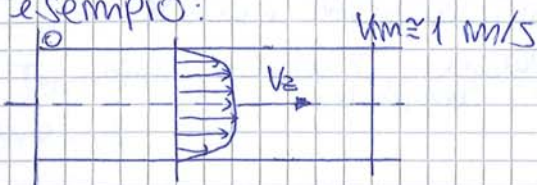
$$= \frac{3}{8} \cdot 80 + \frac{6}{8} \cdot 40 - \frac{1}{8} \cdot 35 = 55,63$$

$$M(\underbrace{\Phi^{m+1} - \Phi^m}_{\mathcal{J}^m}) = Q - (N+M)\Phi^m$$

$\mathcal{J}^m$  è un vettore perché vede come è fatta la soluzione in tutte le celle del dominio, mi dice di quanto sto modificando la soluzione per trasformarla nella soluzione dell'iterato successivo.

È importante avere una soluzione tentativo iniziale  $\Phi^0$ , che non sarà la soluz. finale, ma devo inizializzare la soluz. più le due sono vicine, meno iterate devo fare e risparmio sul tempo da impiegare.

Ad esempio:



Inizializzo a 1 invece che a 0 perché altrimenti il sistema raggiungerebbe la convergenza dopo molto tempo.

$$\begin{aligned} \Phi^0 \quad M \mathcal{J}^0 &= Q - (M+N)\Phi^0 \\ \Phi^1 &= \Phi^0 + \mathcal{J}^0 \\ M \mathcal{J}^1 &= Q - (M+N)\Phi^1 \\ \Phi^2 &= \Phi^1 + \mathcal{J}^1 \end{aligned}$$

Continuo fino a quando la correzione che applico è così piccola da cambiare in modo ininfluente la mia soluz. Tutto ciò si traduce nel **criterio di convergenza**:

$$\frac{\|\mathcal{J}^m\|}{\|\Phi^m\|} \leq 10^{-x} \quad \begin{matrix} < 10^{-3} \\ < 10^{-6} \end{matrix}$$

$10^{-3}$  → il sistema non è molto sensibile, quindi il procedimento è tranquillo

$10^{-6}$  → per problemi più seri che richiedano procedimenti più dettagliati

Per ogni variabile del processo devo un criterio di convergenza da definire.

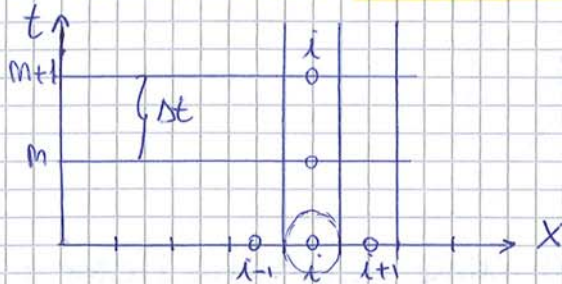
Iterate per iterato le variabili "esplodono", cioè raggiungiamo dei valori che non hanno senso; per fare in modo che il problema converga iterato per iterato, vengono aggiunti dei coefficienti, detti **coefficienti di sottorilascamento**.

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\phi U) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$

$\rho, U, \Gamma$  costanti

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + U \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

Nel risolvere l'equaz., oltre la discretizzazione spaziale lungo la coord.  $x$  con il metodo a volumi finiti (FV), abbiamo anche una coord. tempo.



Devo partire da una soluzione iniziale

Immaginiamo di usare per la discretizzazione spaziale il metodo CAS.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -U \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial t} = -U \left[ \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \right] + \frac{\Gamma}{\rho} \left[ \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} \right]$$

Devo decidere che metodo di discretizzazione scegliere per il tempo: il più semplice è quello di **Eulero esplicito**. Valuto la derivata a "m", quindi vedo come la proprietà  $\phi$  all'istante  $m$  varia nel tempo.

$$\frac{\phi_i^{m+1} - \phi_i^m}{\Delta t} = -U \left[ \frac{\phi_{i+1}^m - \phi_{i-1}^m}{2\Delta x} \right] \Delta t + \frac{\Gamma}{\rho} \left[ \frac{\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m}{\Delta x^2} \right] \Delta t$$

$$\phi_i^{m+1} = \phi_i^m + \left[ -U \frac{\phi_{i+1}^m - \phi_{i-1}^m}{2\Delta x} + \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m}{\Delta x^2} \right] \Delta t$$

Essendo un metodo esplicito, non c'è nessun sistema lineare da risolvere.

$$\phi_i^{m+1} = \phi_{i-1}^m \left( \frac{U\Delta t}{2\Delta x} + \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) + \phi_i^m \left( 1 - \frac{2\Gamma\Delta t}{\rho\Delta x^2} \right) + \phi_{i+1}^m \left( -\frac{U\Delta t}{2\Delta x} + \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right)$$

$$\rightarrow A\phi^m = \phi^{m+1}$$

↳ matrice triangolare

Termini sulla diagonale:  $1 - 2 \frac{\Gamma\Delta t}{\rho\Delta x^2} = d$

Codiagonali:  $\frac{U\Delta t}{2\Delta x} \rightarrow c$  +  $\frac{\Gamma\Delta t}{\rho\Delta x^2} \rightarrow d$

In generale per  $c$  e  $d$  diversi da zero, è difficile garantire che,  $\forall \alpha$ ,  $|\alpha| < 1$ .

Nella matrice è presente una diagonale sempre positiva e l'altra diagonale e la diagonale passano avere dei coefficienti negativi: ciò implica che può succedere che  $\phi$  esca dal dominio e sia negativa:

$$1 - 2d > 0 \quad d - \frac{c}{2} > 0$$

5/4/16

$$1 - 2d > 0 \\ d < \frac{1}{2}$$

$$d - \frac{c}{2} > 0 \\ c < 2d$$

$$\bullet \Delta t < \rho \frac{\Delta x^2}{2\Gamma}$$

$$\rho, c = \frac{\rho U \Delta x}{\Gamma} < 2$$

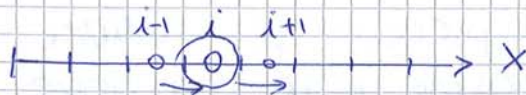
Quindi, utilizzando Eulero esplicito per il tempo e il CDS per lo spazio, devono essere rispettate queste due condizioni.

Affinchè la soluzione sia stabile, devo fare in modo che:

$$\Delta x < \frac{2\Gamma}{\rho U}$$

Nota il  $\Delta x$ , determino il  $\Delta t$  che garantisce la stabilità del sistema. Una simulazione si dice stabile se, l'elemento, arriva a convergenza.

• Adesso utilizziamo un **metodo Eulero esplicito** per il tempo e un **metodo UDS** per lo spazio: ricordiamo che <sup>con</sup> l'UDS la soluzione è limitata per qualsiasi valore di  $\Delta x$



$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} = \int \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Con il metodo UDS, prendiamo il valore a monte per valutare il flusso

$$\bullet \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = -U \left[ \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \right] + \int \left[ \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} \right]$$

$$\phi_i^{m+1} = \phi_i^m + \left[ -U \frac{\phi_i^m - \phi_{i-1}^m}{\Delta x} + \int \frac{\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m}{\Delta x^2} \right] \Delta t$$

La condizione sul  $\Delta t$  esiste perché è un metodo Euler esplicito; per non avere cond. sul  $\Delta t$ , quindi per poter scegliere un  $\Delta t$  qualsiasi, devo usare un metodo implicito.

- Metodo Euler implicito per il tempo e CDS per lo spazio:

Per ridurre l'errore numerico, devo ridurre il  $\Delta t$  e il  $\Delta x$  quindi migliorare la discretizzazione con più celle.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -U \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\phi_i^{m+1} - \phi_i^m}{\Delta t} = -U \frac{\phi_{i+1}^{m+1} - \phi_{i-1}^{m+1}}{2\Delta x} + \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\phi_{i+1}^{m+1} - 2\phi_i^{m+1} + \phi_{i-1}^{m+1}}{\Delta x^2}$$

$$\phi_i^{m+1} = \phi_i^m + \left[ -U \frac{\phi_{i+1}^{m+1} - \phi_{i-1}^{m+1}}{2\Delta x} + \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\phi_{i+1}^{m+1} - 2\phi_i^{m+1} + \phi_{i-1}^{m+1}}{\Delta x^2} \right] \Delta t$$

Non valuto più la derivata nel presente, ma nel futuro perché il metodo è implicito.

$$\phi_i^{m+1} \left( 1 + \frac{2\Gamma \Delta t}{\rho \Delta x^2} \right) + \phi_{i-1}^{m+1} \left( -\frac{U \Delta t}{2\Delta x} - \frac{\Gamma \Delta t}{\rho \Delta x^2} \right) + \phi_{i+1}^{m+1} \left( \frac{U \Delta t}{2\Delta x} - \frac{\Gamma \Delta t}{\rho \Delta x^2} \right) = \phi_i^m$$

$$A \phi^{m+1} = \phi^m$$

A = matrice tridiagonale → problema monodimensionale

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{c}{2} - d & 1 + 2d & \frac{c}{2} - d \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che per un problema stazionario, A era:

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{\rho c}{2} + 1\right) & 2 & \left(\frac{\rho c}{2} - 1\right) \\ & & \end{pmatrix}$$

Quando risolvo un problema transitorio, so a quale soluz. corrisponde correttamente; allo stazionario iterato per iterato, non so esattamente e che istante corrisponde la soluzione.



di valori  $U_x, U_y, U_z$  e li uso per calcolare il campo di pressione e così via fino a quando la soluzione non cambia più; cioè cambia di una quantità che è più piccola di una tolleranza fissata a piacere. Questo metodo viene chiamato **metodo simple**:

$$W_p = 1 - W_u$$

I valori di default che troviamo sono di solito:

$$W_p = 0,7$$

$$W_u = 0,3$$

Se la simulazione è instabile, abbasso questi coeff. Il codice ci fa vedere i residui solo per  $U_x, U_y, U_z$ , ma non per  $p$ .

Iterato per iterato, l'equaz. di continuità ci dona dei residui sempre più bassi. Fin quando

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \neq 0$$

Non dire che in una o più delle celle del dominio c'è uno sbilanciamento tra quello che entra e quello che esce.

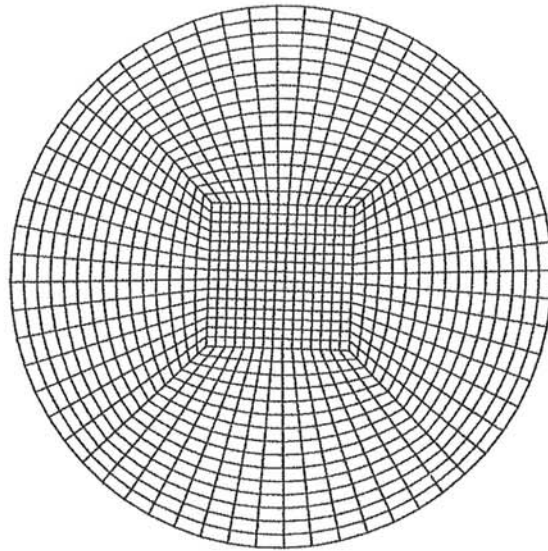


FIGURE 6.8 The generation of a structured O-grid for a circular cylinder

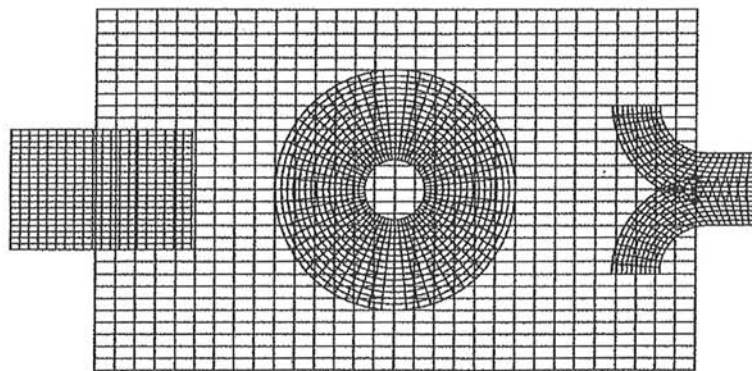


FIGURE 6.9 A structured overlapping grid for a cylinder in a channel with inlet-outlet mappings

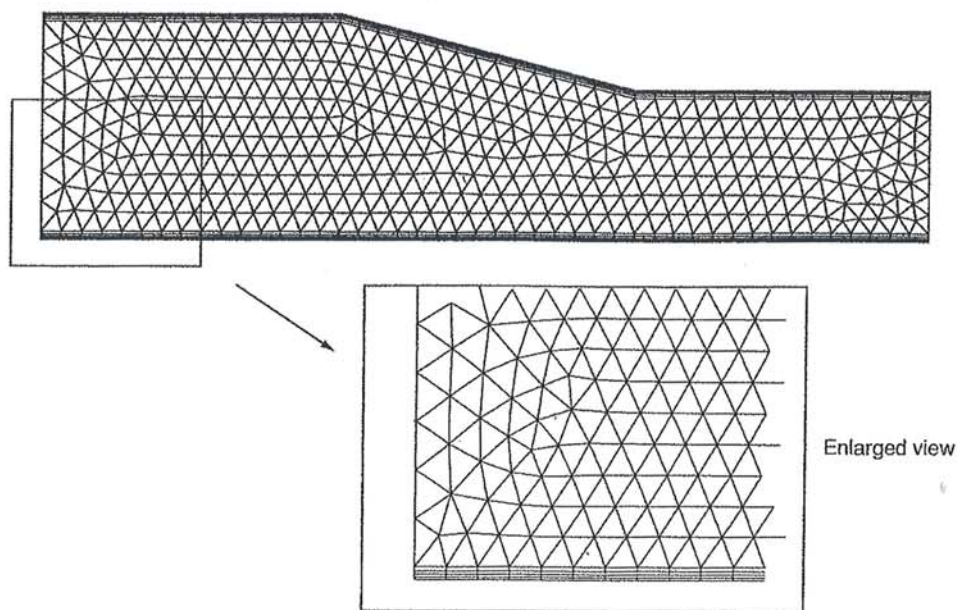


FIGURE 6.10 A grid consisting of structured quadrilateral elements near the walls and unstructured triangular elements in the remaining part of the flow domain