NUMERO: 2034A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Gentile Denise

MATERIA: Meccanica delle macchine - Prof Eula

MECCANICA delle MACCHINE

(1)

5.03.15

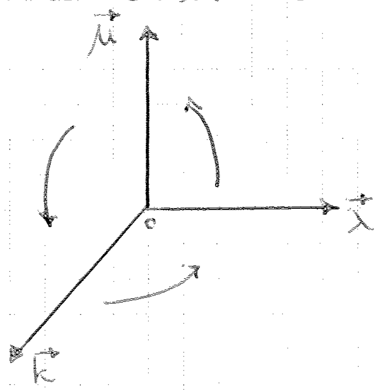
Ferraresi → del Belfiore solo alcuni cap.
- geometria delle masse
- Flessibili
- Ruote dentate (solo gli fatte in aula)
- Rotismi

CINEMATICA

Sia r il vettore posizione, rotante nel piano, di versore $\vec{\lambda}$ e con velocità angolare $\omega\vec{k}$ allora si ha

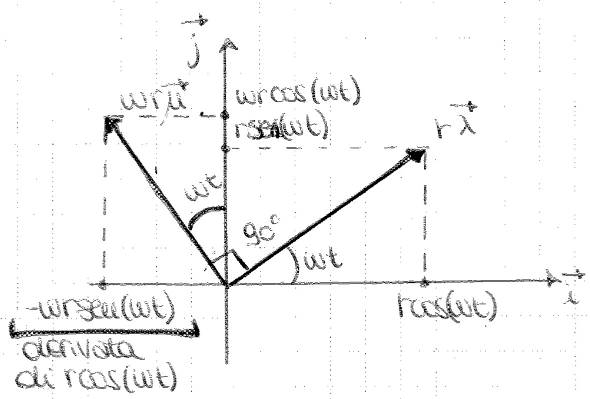
$$\frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \omega\vec{k} \times r\vec{\lambda}$$

⇒ derivata di un vettore = sua VELOCITÀ



$$\left.\begin{aligned} \vec{\lambda} \times \vec{\mu} &= \vec{k} \\ \vec{\mu} \times \vec{k} &= \vec{\lambda} \\ \vec{k} \times \vec{\lambda} &= \vec{\mu} \end{aligned}\right\} \text{terna ANTIORARIA}$$

$$\vec{\lambda} \times \vec{k} = -\vec{\mu}$$
$$\vec{\mu} \times \vec{\lambda} = -\vec{k}$$
$$\vec{k} \times \vec{\mu} = -\vec{\lambda}$$



→ vettore ROTANTE nel piano

→ Ho proiettato i due vettori sui due assi

⇒ le proiez del 2° vettore sono le derivate del primo vettore $(r\vec{\lambda})$
⇒ allora il vettore $\omega r\vec{\mu}$ è derivata di $r\vec{\lambda}$

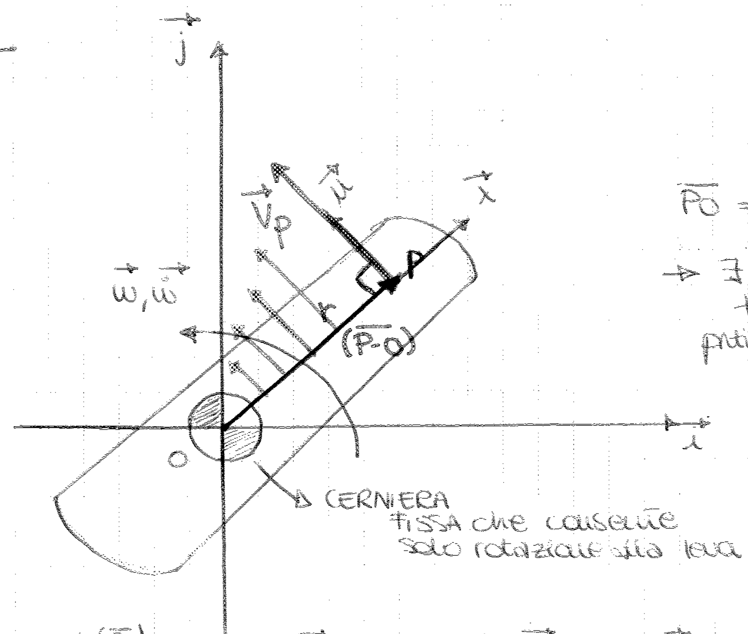
$$\Rightarrow \frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \omega r\vec{\mu}$$

con $\vec{\mu} = \vec{k} \times \vec{\lambda}$

$$\Rightarrow \frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \omega r\vec{\mu} = \omega r(\vec{k} \times \vec{\lambda}) = \omega\vec{k} \times r\vec{\lambda}$$

⇒ se ho il vettore rotante nel piano e voglio farne derivata basta ~~scegliere~~ che prendere il vettore ruotato di 90° rispetto al primo e moltiplicare il suo modulo per ω

ROTAZIONE



$\overline{PO} = r = cost$

→ ∃ 1 DISTRIBUZ di velocità triangolare perchè se prendo pti + vicini ad O chiaramente $\vec{v}$ diminuisce

⇒ $V_0 = 0$
⇒ $a_0 = 0$

$$\rightarrow \vec{V}_P = \frac{d(\overline{PO})}{dt} = \frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{=0 \text{ perchè } r = cost}\vec{\lambda} + r\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \frac{r\,d\vec{\lambda}}{dt} = r\left[\omega\vec{k} \times \vec{\lambda}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_P = \omega\vec{k} \times r\vec{\lambda}} = \omega\vec{k} \times (P-O)$$

appartiene al piano ed è perpendicolare a vettore posizione e a $\vec{\omega}$

$\vec{V}_P$ è derivata di r ⇒ lo prendo a 90° rispetto a r ruotato nel senso di ~~che~~ ω

→ M ⇒ $V_P = \omega\overline{PO}$
→ D ⇒ ⊥ $\overline{PO}$
→ V ⇒ ω ↺+ (= ha verso di ω)

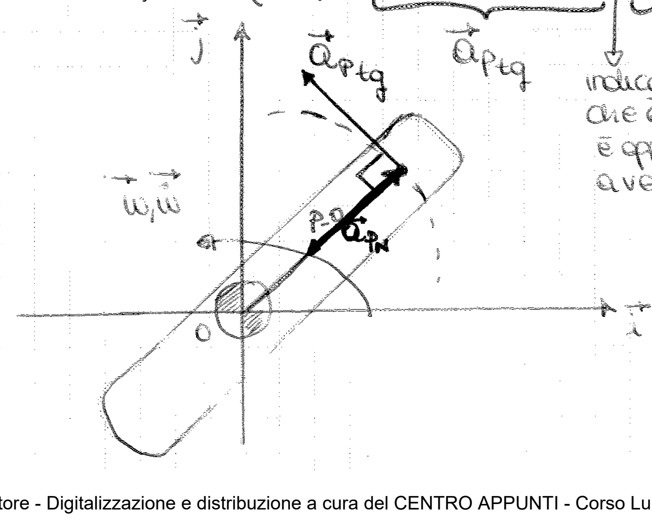
$$\rightarrow \vec{a}_P = \frac{d\vec{V}_P}{dt} = \frac{d(\omega\vec{k} \times r\vec{\lambda})}{dt} = \frac{d(\omega r(\vec{k} \times \vec{\lambda}))}{dt} = \frac{d(\omega r\vec{\mu})}{dt} =$$

$$= \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{0}\omega\vec{\mu} + r\frac{d\omega}{dt}\vec{\mu} + r\omega\frac{d\vec{\mu}}{dt} = r\dot{\omega}\left[\vec{k} \times \vec{\lambda}\right] + r\omega\left[\omega\vec{k} \times \vec{\mu}\right] =$$

$$= \dot{\omega}\vec{k} \times r\vec{\lambda} + r\omega^2(-\vec{\lambda})$$

$$\Rightarrow \vec{a}_P = \dot{\omega}\vec{k} \times (P-O) - \omega^2(r\vec{\lambda}) = \underbrace{\dot{\omega}\vec{k} \times (P-O)}_{\vec{a}_{Ptg}} \ominus \underbrace{\omega^2(P-O)}_{\vec{a}_{PN}}$$

⊖ indica che $\vec{a}_N$ è opposta a vettore posiz.

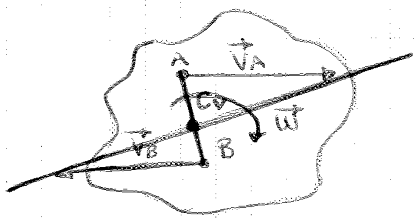


⇒ C'è 1 distribuz triangolare anche per $\vec{a}_{tg}$, perchè suo modulo dipende da distanza dal punto a O

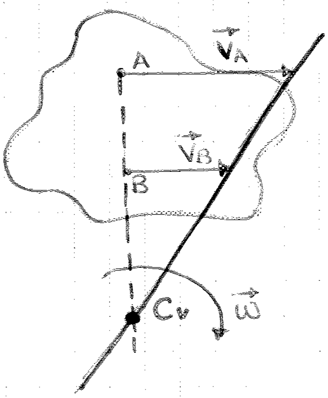
2) Date $\vec{V}_A$ e $\vec{V}_B$ // ⇒ in qst caso dv conoscere sia M, D, V e dei vettori

→ $\vec{V}_A$ e $\vec{V}_B$ <u>DISCORDI</u>

→ Cv smp interno a $\overline{AB}$



→ $\vec{V}_A$ e $\vec{V}_B$ <u>CONCORDI</u> e $|V_A| \neq |V_B|$

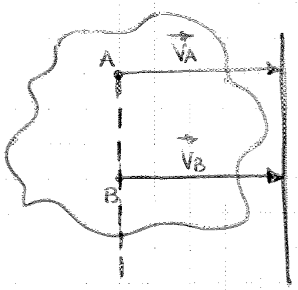


3) $\vec{V}_A \,//\, \vec{V}_B$, dv conoscere M, D, V, $\vec{V}_A$, $\vec{V}_B$ CONCORDI, $|V_A| = |V_B|$ ⇒ <u>TRASLAZIONE</u>

⇓

$\omega = 0$

$\omega = 0$



$\omega = \infty$

⇒ In generale il pnto Cv è a velocità nulla, ma <u>non</u> ad accelerazz nulla

→ <u>Polare fissa:</u>
Luogo dei pnti del piano fisso che diventano istante per istante successivamente centri di istantanea rotaz.

→ <u>Polare mobile</u> = luogo dei pnti del piano mobile che diventano istante per istante successivamente Cv

→ Rotola senza strisciare sulla polare fissa

→ <u>Puro rotolamento</u>:

Corpi a contatto con velocità relativa nulla

CALCOLO dei GdL

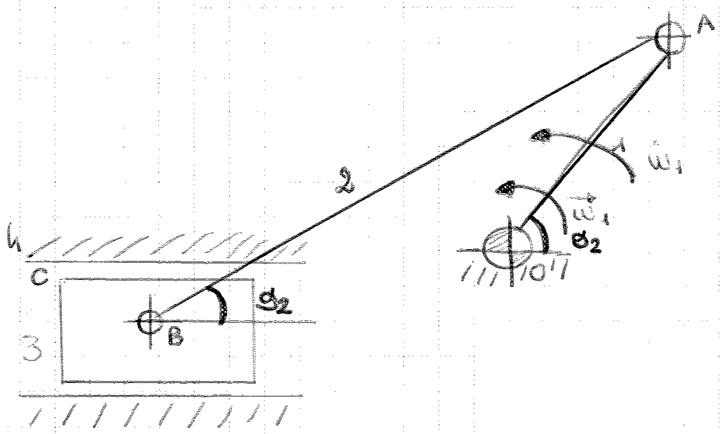
4

Viene utilizzata FORMULA di GRÜBLER

$\Rightarrow \boxed{x = 3(m-1) - 2C_1 - C_2}$

- x = n° di GdL del sistema
- m = n° C.R. compreso il telaio
- C_1 = n° di vincoli a 1 GdL
- C_2 = n° di vincoli a 2 GdL

SISTEMA BIELLA-MANOVELLA



→ n_1 = 1500 giri min.
→ $\dot{\omega}_1$ = 1000 rad/s²
→ OA = 0,21 m
→ θ_1 = 45°
→ AB = 0,61 m
→ θ_2 = 30°

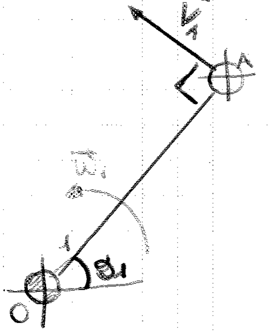
OA = manovella
AB = biella
A = bottone di manovella
B = piede di biella
C = cassa

1) a cosa serve e come funziona il meccanismo?
2) calcolare GdL
3) Calcolare velocità } parto dal punto in
4) " accelerazione } cui ho > info.

2) GdL : $x = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$

$m = 4$
$C_1 = 4$ (O, A, B, C) $\Rightarrow \boxed{x = 1}$
$C_2 = 0$

3) AO :



→ $V_O = 0$
→ $a_O = 0$
$\Rightarrow \vec{V}_A = \underbrace{\cancel{\vec{V}_O}}_{=0} + \vec{V}_{A/O} - \omega_1 \vec{k} \times (\overline{A-O})$

M ⇒ $\omega_1 (\overline{AO})$
D ⇒ ⊥ $\overline{AO}$
V ⇒ ω_1 ↺

→ ricavo ω_1 da n_1 ⇒ $\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = 157{,}07$ rad/s

$\Rightarrow \boxed{v_A = 32{,}98 \text{ m/s}}$

4) $\underline{AO}$, $\underline{AB}$:

Uso Teorema di Rivals: $\Rightarrow \vec{a}_A = \underbrace{\vec{a}_O}_{=0} + \vec{a}_{A/O_N} + \vec{a}_{A/O_{tg}}$

$\Rightarrow \vec{a}_A = -\omega_1^2 (\overline{A-O}) + \dot{\omega}_1 \vec{k} \times (\overline{A-O})$

$\Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/O_N} + \vec{a}_{B/O_{tg}} = \vec{a}_A - \omega_2^2 (\overline{B-A}) + \dot{\omega}_2 \vec{k} \, (\overline{B-A})$

$\rightarrow a_{A/O_N} = \omega_1^2 \, \overline{AO} = 5180{,}91 \ m/s^2$

$\rightarrow a_{A/O_{tg}} = \dot{\omega}_1 \, \overline{AO} = 210 \ m/s^2$

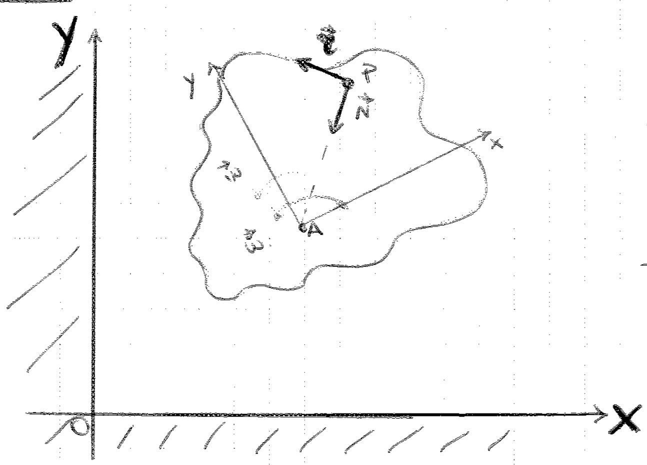
$\rightarrow a_{B/A_N} = \omega^2 \, \overline{AB} = 1192{,}26 \ m/s^2$

$\rightarrow a_{B/A_{tg}} = \dot{\omega}_2 \, AB = ?$

$\rightarrow a_B = ?$

12.03.15

MOTO COMPOSTO



→ sistema di riferimento fisso esterno

→ dentro corpo rigido sistema di riferimento mobile

→ nel moto composto ho delle distanze che cambiano DENTRO il sistema!

$\Rightarrow \overline{PA} \neq cost$

1) MOTO RELATIVO = moto di P nel C.R. ($\overline{PA} \neq cost$)
2) MOTO DI TRASCINAMENTO = moto di P con [A, x, y] (= con sistema di riferimento mobile)
3) MOTO ASSOLUTO di P è la composiz. dei moti 1) e 2) ed è quello che vede l'osservatore fisso su [O, X, Y]

$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_{P_{ass}} = \vec{V}_{P_{rel}} + \vec{V}_{P_{tr}}}$

$\rightarrow \boxed{\vec{a}_{P_{ass}} = \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_{tr}} + \vec{a}_{P_{co}}}$, con $\vec{a}_{P_{co}}$ = accelerazione di CORIOLIS

$\rightarrow \boxed{\vec{a}_{co} = 2\omega_{tr} \vec{k} \times \vec{V}_{P_{rel}}}$

6

→ corpo 2:

$$\vec{V}_{P_{ASS}} = \vec{V}_{P_{Rel}} + \vec{V}_{P_{Tr}}$$

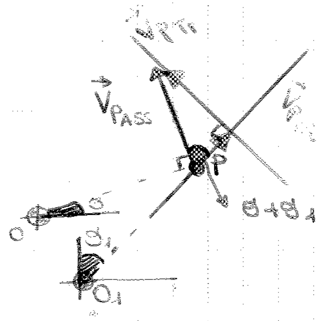
→ $\vec{V}_{P_{Rel}} = \pm V_{P_{rel}} \vec{\lambda}$

→ $\vec{V}_{P_{Tr}} = \underbrace{\cancel{\vec{V}_{O_1}}}_{=0} + \vec{V}_{P/O_1} = \vec{\omega}_1 \times (\overline{PO_1})$

⇒ $\vec{V}_{P_{ASS}} = \pm V_{P_{rel}} \vec{\lambda} + (\vec{\omega}_1 \times (\overline{P-O_1}))$

$\vec{V}_{P_{ASS}} = \vec{\omega} \times (\overline{P-O})$

M	NOTA	?	?
D		// $\vec{\lambda}$	$\perp \overline{PO_1}$
V		?	$\vec{\omega}_1$?



→ Ho scelto i versi di $\vec{V}_{P_{rel}}$ e $\vec{V}_{P_{Tr}}$ nel disegno tenendo conto che $\vec{V}_{P_{ASS}} = \vec{V}_{P_{rel}} + \vec{V}_{P_{Tr}}$

→ $\vec{V}_{P_{rel}} = \vec{V}_{P_{ASS}} \cos(\vartheta + \vartheta_1) = \boxed{27{,}91 \text{ m/s}}$

→ $\vec{V}_{P_{Tr}} = \vec{V}_{P_{ASS}} \sin(\vartheta + \vartheta_1) = \boxed{37{,}93 \text{ m/s}}$

→ $\vec{\omega}_1 = \dfrac{\vec{V}_{P_{Tr}}}{\overline{O_1P}} = \boxed{63{,}22}$ rad/s

→ $\vec{a}_{P_{ASS}} = \vec{a}_{P_{Rel}} + \vec{a}_{P_{Tr}} + \vec{a}_{P_{Co}}$

→ $\vec{a}_{P_{rel}} = \pm a_{P_{rel}} \vec{\lambda}$

→ $\vec{a}_{P_{Tr}} = \underbrace{\cancel{\vec{a}_{O_1}}}_{=0} + \vec{a}_{P/O_1} = \underbrace{\dot{\vec{\omega}}_1 \times (\overline{P-O_1})}_{\vec{a}_{P/O_1 Tg}} - \underbrace{\omega_1^2 (\overline{P-O_1})}_{\vec{a}_{P/O_1 N}}$

→ $\vec{a}_{P_{ASS}} = \underbrace{\cancel{\vec{a}_O}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\vec{a}_{P/O\,Tg}}}_{=0} + \vec{a}_{P/O\,N} = \underbrace{\cancel{\dot{\omega}\vec{k}}}_{=0} \times (P-O) - \omega^2 (P-O)$

→ $\vec{a}_{P_{Co}} = 2\omega_{Tr} \vec{k} \times \vec{V}_{P_{rel}} = 2\omega_1 \vec{k} \times \vec{V}_{P_{rel}}$

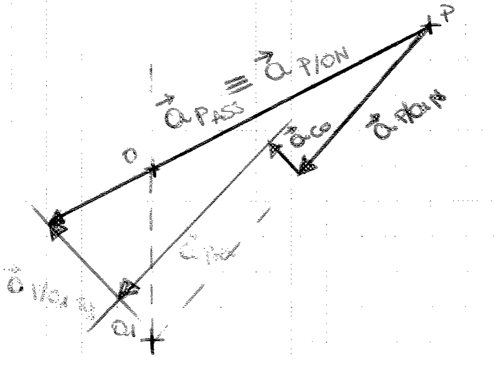
→ $|\vec{a}_{P/O\,N}| = \omega^2 (PO) = 7394{,}4 \text{ m/s}^2$

→ $|\vec{a}_{P/O_1 N}| = \omega_1^2 (\overline{PO_1}) = 2398 \text{ m/s}^2$

→ $|\vec{a}_{P_{Co}}| = 2\omega_1 V_{P_{rel}} = 3528{,}9 \text{ m/s}^2$

① $\vec{a}_P = \vec{a}_{P_{ASS}} = \vec{a}_{P/O\,N}$

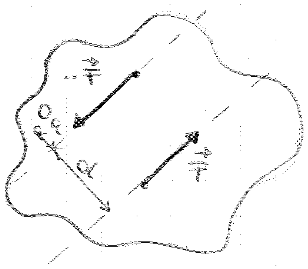
② $\vec{a}_{P_{ASS}} = \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_{Tg}} + \vec{a}_{P_{Co}} = \pm \vec{a}_{P_{rel}} \vec{\lambda} + \vec{a}_{P/O_1 Tg} + \vec{a}_{P/O_1 N} + \vec{a}_{P_{Co}}$



→ i versi li ho det. tenendo conto che $\vec{a}_{P_{ASS}}$ è la risultante

COPPIA di FORZE

(7)



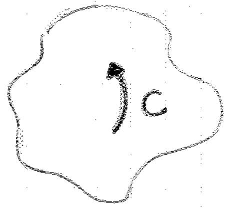
$\begin{cases} \vec{F} \parallel -\vec{F} \\ |\vec{F}| = |\vec{F}| \end{cases}$ ⇒ ≠ retta di azione ⇒ verso opposto

→ $M_O = F(a+d) - Fa = Fd$

SOLO:
se valgono le condizioni sopra il momento non dipende + da O, dipende solo da distanza tra le due $\vec{F}$

⇒ Le due forze diventano 1 coppia di forze ⇒ $\boxed{C = Fd}$ (= è 1 momento)

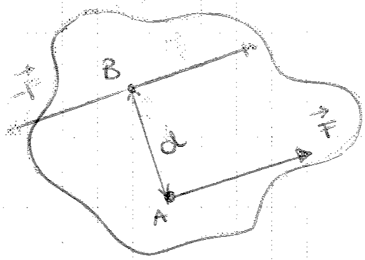
⇒



⇒ qst corpo rigido è equivalente a quello di sopra

C = Fd

TRASPORTO di 1 $\vec{F}$ FUORI DALLA SUA RETTA



→ voglio portare $\vec{F}$ da A in B

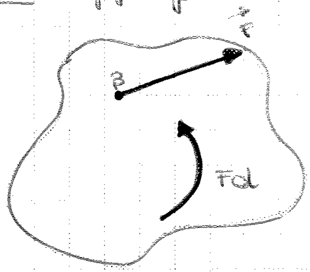
→ applico in B 2 $\vec{F}$ = e contrarie

⇒ la $-\vec{F}$ in B, e $\vec{F}$ in A mi danno 1 momento di trasporto

⇓ $\boxed{M_{tr} = Fd}$

⇒ quindi se sposto 1 $\vec{F}$ fuori dalla sua retta d'azione devo aggiungere M_{tr}

⇒



19.03.15

TIPI di FORZE

1) Forze concentrate

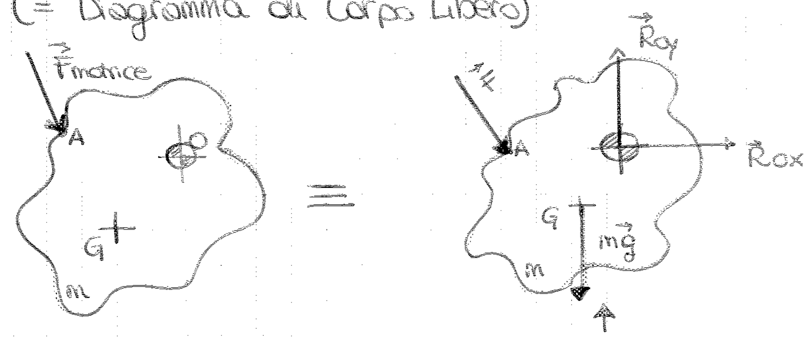
2) Forze distribuite

3) Forze esterne : $\vec{F}_{peso}$, $\vec{F}_{inerzia}$

4) Forze interne : Reazioni vincolari

→ sempre incognite! → sappiamo p.nto di applicaz. e a volte direzione!

D.C.L (= Diagramma di Corpo Libero)



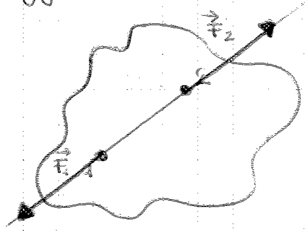
[$\vec{R}_{oy}$, $\vec{R}_{ox}$ prese con verso arbitrario]

D.C.L ⇒ riscrivo 1 parte del C.R., la isolo, e scrivo tutte le azioni interne e esterne che agiscono su esso

METODO GRAFICO (per risoluzione degli equilibri)

Tre regole: [lavoriamo solo con le risultanti]

1) C.R. soggetto a 2 $\vec{F}$

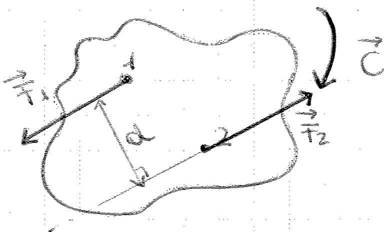


M → $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$

D → stessa retta d'azione

V → opposto

2) C.R. soggetto a 2 $\vec{F}$ e 1 coppia $\vec{C}$



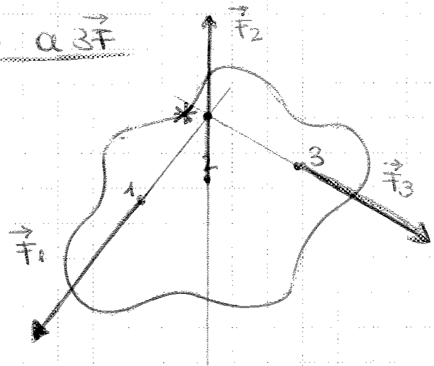
→ conosciamo $\vec{C}$ e 1 delle 2 $\vec{F}$ ($\vec{F}_1$)

$\vec{F}_2 = ?$
M $|\vec{F}_2| = |\vec{F}_1|$
D $\vec{F}_2 \parallel \vec{F}_1$
V opposto a $\vec{F}_1$

} essendo poste così $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$ formano 1 coppia di $\vec{F}$ opposta a $\vec{C}$ ed uguale

⇒ deve essere $\vec{C} = \vec{F}_2 d$

3) C.R. soggetto a 3 $\vec{F}$



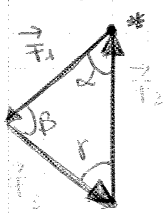
→ conosco $\vec{F}_1$ e la direz. di $\vec{F}_2$

→ prolungo $\vec{F}_1$ e trovo intersez. (= p.nto di STELLA)

→ anche $\vec{F}_3$ deve passare per il p.nto di stella ⇒ in qst modo trovo direz di $\vec{F}_3$

⇒ in qst modo rispetto a * $\Sigma M = 0$ perché tutte le $\vec{F}$ hanno braccio nullo

⇒ faccio il poligono delle 3 $\vec{F}$



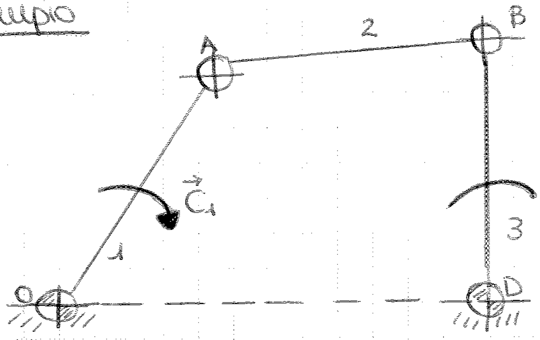
→ deve avere $\Sigma \vec{F} = 0$

⇒ $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$

⇒ verso delle forze devono "inseguirsi"

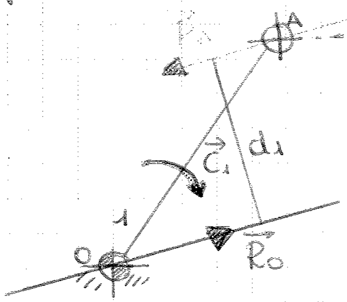
→ Trovo poi i moduli lavorando sulla geometria

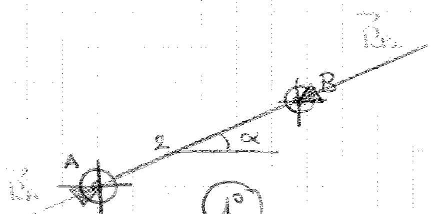
Esempio

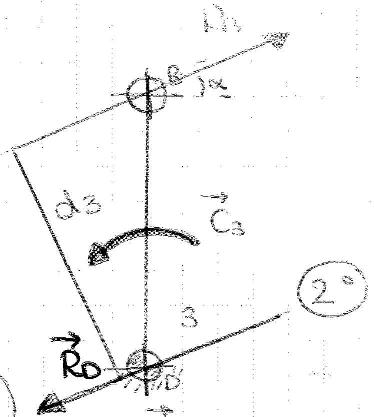


$\rightarrow C_3 = ?$

$\rightarrow$ Separo i corpi







(1°)

$|\vec{R}_A| = |\vec{R}_B|$

D di R_A, R_B

si ricava immediatamente

$\Rightarrow$ $\vec{R}_A$ è nota!

$\Rightarrow$ $\vec{R}_B$ la ricavo di conseguenza

$\Rightarrow$ $\vec{R}_B$ = e opposta a $\vec{R}_A$

(2°)

$\Rightarrow$ R_O deve avere direz. // a $\vec{R}_A$

$\Rightarrow$ $|\vec{R}_A| = |\vec{R}_O|$

$\Rightarrow$ $\vec{C}_1$ è in senso orario

$\Rightarrow$ $\vec{R}_A$ deve essere antiorario!

$\Rightarrow$ $\vec{R}_O$ opposta ad $\vec{R}_A$

$\Rightarrow$ $C_1 = R_A d_1$

$\Rightarrow$ ora R_A ed R_O sono noti

(2°)

$\rightarrow$ $\vec{R}_B$ è nota!

$\rightarrow$ R_O ed R_B devono formare 1 coppia = e opposta a $\vec{C}_3$

$\Rightarrow$ D $\vec{R}_B$ e D $\vec{R}_D$ sono //

$\Rightarrow$ $\vec{R}_B$ opposta a $\vec{R}_D$

$\Rightarrow$ $C_3 = R_D d_3$

$\rightarrow$ C_3 è antioraria perché $\vec{R}_D$ e $\vec{R}_B$ formano 1 coppia oraria

LEGGI della DINAMICA

1) Una particella continua a muoversi di moto rettilineo uniforme se la risultante di tutte le forze ad essa applicate è = a zero

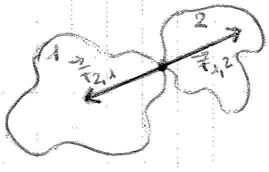
2) L'acceleraz. di 1 particella è proporzionale alla risultante di tutte le forze ad essa applicate

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}}$$

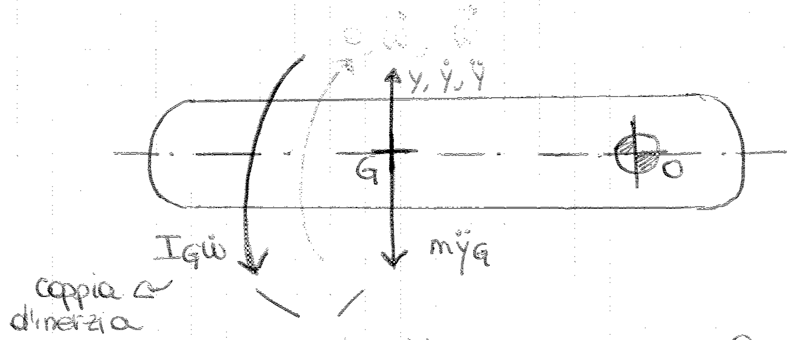
m = massa, indica la resistenza del corpo a modificare la sua velocità lineare

3) Le forze di azione e reazione tra corpi che interagiscono sono = in modulo, stessa retta di azione e verso opposto

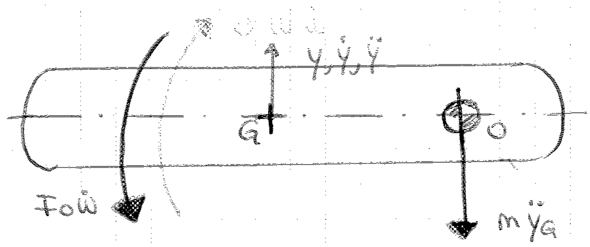
$$|\vec{F}_{1,2}| = |\vec{F}_{2,1}|$$



AZIONE d' INERZIA



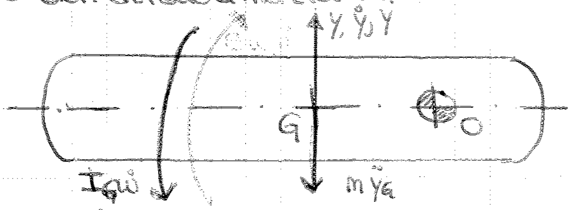
Azioni d'inerzia rispetto a G



→ azione d'inerzia rispetto ad O

→ $I_O = I_G + m(\overline{GO})^2$

→ come det. azione d'inerzia:



→ $\vec{a}_G = \underbrace{\vec{a}_O}_{=0} + \vec{a}_{G/O\,n} + \underbrace{\vec{a}_{G/O\,tg}}$

$$\ddot{y}_G = \vec{a}_{G/O\,tg} = \dot{\omega}\vec{k} \times (G-O)$$

M $\ddot{y}_G = \dot{\omega}\overline{GO}$

D $\perp \overline{GO}$

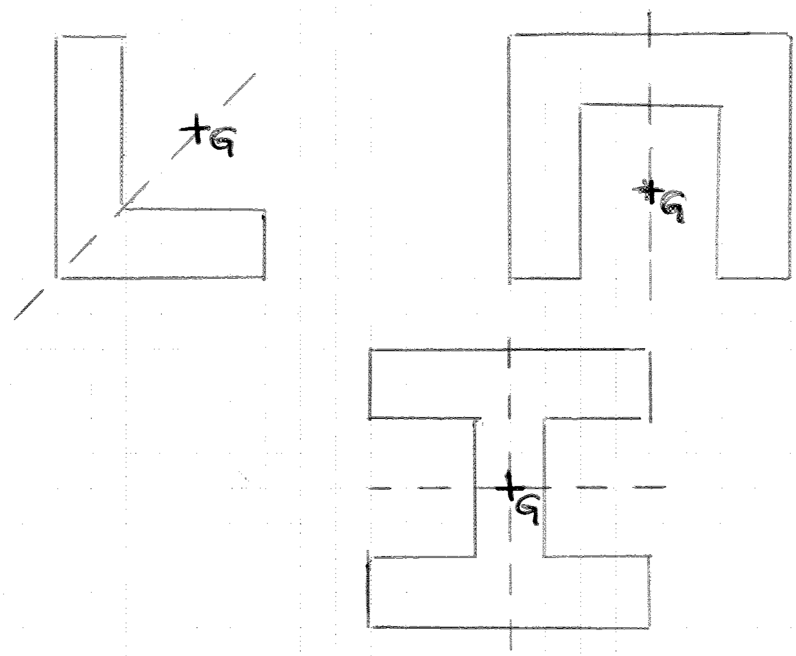
V $\dot{\omega}$

→ eq. di equilibrio di momento intorno ad O

$O)$ $\quad I_G\dot{\omega} + m\ddot{y}_G\overline{GO} + \ldots = 0$

$[\,O)\quad I_O\dot{\omega} + \ldots = 0\,]$ → se facessi azione d'inerzia rispetto ad O

→ IL baricentro su assi di simmetria geometrica



MOMENTI D'INERZIA

a) Massa concentrata

$$\boxed{I_O = m\,(PO)^2} \qquad [kg\, m^2]$$

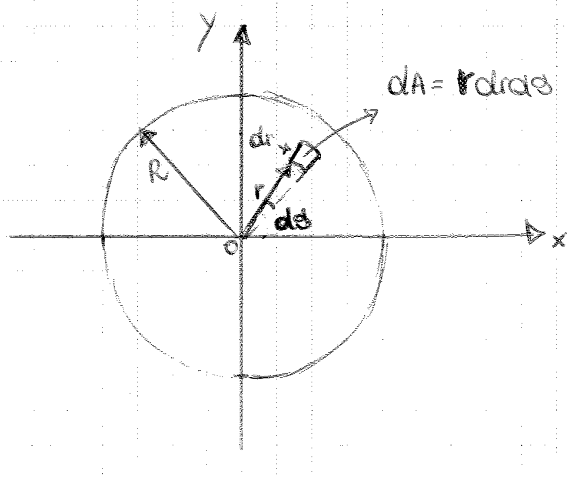
b) Sistema discreto

$$\boxed{I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i\,(PO)^2}$$

c) Sistema continuo

$$\boxed{I_O = \int_M r^2\, dm} = \int_V r^2 \rho\, dV = \int_A r^2 (\rho h\, dA)$$

Esempio (Disco sottile)



$$\rightarrow I_O = \int_M r^2\, dm = \int_A r^2 (\rho h\, dA) =$$

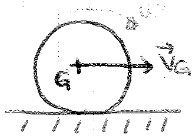
$$= \rho h \int_0^R r^3\, dr \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \rho h \left(\frac{R^4}{\cancel{4}\,2}\right) \cancel{2}\pi$$

$$\Rightarrow I_O = \rho h (\pi R^2) \frac{R^2}{2} = \boxed{\frac{MR^2}{2} = I_O}$$

ENERGIA CINETICA

$$E_k = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$



EQUAZIONE dell'ENERGIA

$$L_{F_{est}} + L_{F_{int}} = \underbrace{\Delta E_k + \Delta E_{pg} + \Delta E_{pel}}$$

$L_{F_{est}}$ ↓ (carichi, F peso, azioni di inerzia)

$L_{F_{int}}$ ↘ = attrito nei vincoli

↓ grandezze di stato → dipendono solo da condiz. iniziale e finale

POTENZA

$$\boxed{P = \frac{dL}{dt} \quad [W]}$$

- Potenza di 1 forza

$$P = \frac{dL}{dt} = F_t \frac{ds}{dt} = F_t V$$

- Potenza di 1 coppia

$$P = \frac{dL}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{tot} = F_t V + M\omega}$$

RENDIMENTO

$$\eta = \frac{P_u}{P_e} \leq 1$$

→ P_u = potenza utile
→ P_e = potenza entrante

QUANTITÀ di MOTO

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_G$$

$$\vec{F}_{inerzia_G} = -m\vec{a}_G = -m\frac{d\vec{v}_G}{dt} = -\frac{d\vec{Q}}{dt} \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{est_i}\right) + \vec{F}_{inG} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{est_i} = -\vec{F}_{inG}$$

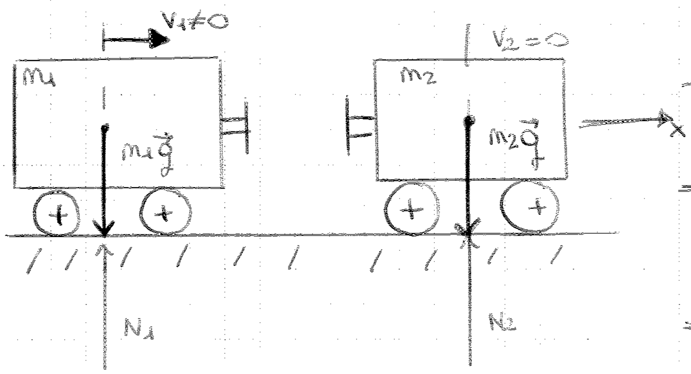
$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{est_i} = \frac{d\vec{Q}}{dt}}$$

⇒ TEOREMA della QUANTITÀ di MOTO: se 1 sistema isolato vede assenza di $\vec{F}_{est}$ o $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{est_i} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow Q = cost$ (= Teorema della conservazione di $\vec{Q}$)

27.03.15 (13)

URTI

URTO ELASTICO



→ supponiamo di non avere perdite di Energia durante l'urto

→ m_1 urta m_2 e lo mette in movimento

→ dopo l'urto i due carrelli avanzano separati

→ $\Sigma \vec{F}_{est} = 0$
(perché i pesi dei due carrelli vengono bilanciati dalle reaz. vincolari)

$\Rightarrow \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{Q} = cost}$

→ lungo asse x si deve conservare $\vec{Q}$

$\Rightarrow Q_i = Q_f$

(1) $m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$

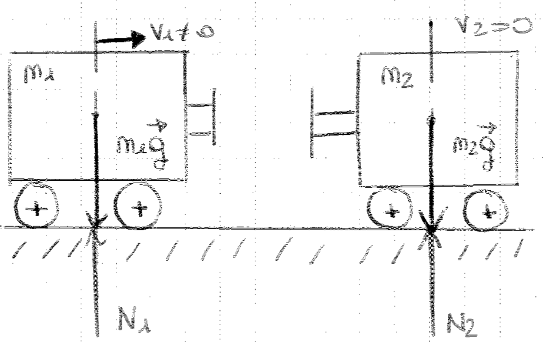
$\Rightarrow \boxed{E_{k_i} = E_{k_f}} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$ (2)

→ Da (1) e (2) mi posso det. le due velocità finali

$v_{f1} = v_{1i} \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}$ → non tutte e due le soluz. sono valide → se ci fosse + Num. e Den. si semplificherebbero

$$\begin{cases} v_{1f} = v_{1i} \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \\ v_{2f} = v_{1i} \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

URTO ANAELASTICO



→ in seguito all'urto i due carrelli si agganciano e si muovono insieme

→ si trascurano gli attriti — qst produce perdita di energia

→ $\Sigma \vec{F}_{est} = 0$

$\Rightarrow \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{Q} = cost}$

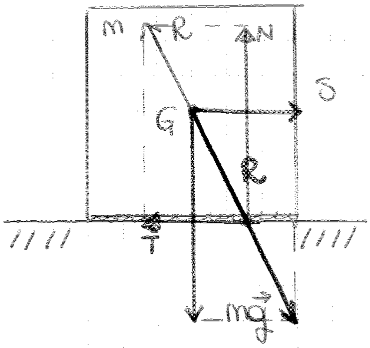
→ $Q_i = Q_f \Rightarrow m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f$

$\Rightarrow v_f = \frac{m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$

→ c'è variaz. di energia cinetica $\boxed{\Delta E_k = E_{kf} - E_{ki}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$

ATTRITO RADENTE

Se $T > f_a N \Rightarrow v \neq 0 \Rightarrow$ inizia il moto e quindi attrito non è + STATICO



$\Rightarrow v = cost$

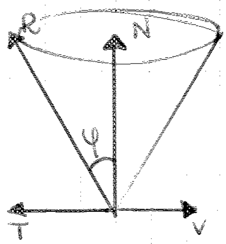
$\rightarrow$ se $v = cost \Rightarrow T = S$

$\Rightarrow \boxed{T = f N}$, f = coeff. di attrito di strisciamento

$\rightarrow$ se $T > S \Rightarrow$ nasce acceleraz. $\ominus \Rightarrow \ddot{x} < 0$

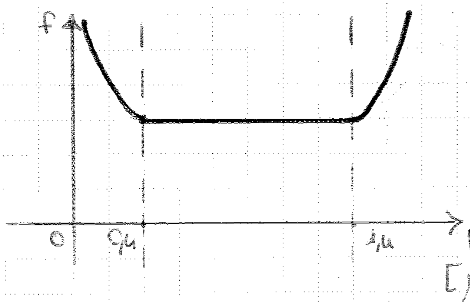
$\rightarrow$ se $T < S \Rightarrow$ nasce acceleraz. $\oplus \Rightarrow \ddot{x} > 0$

$\Rightarrow$ Modello geometrico:

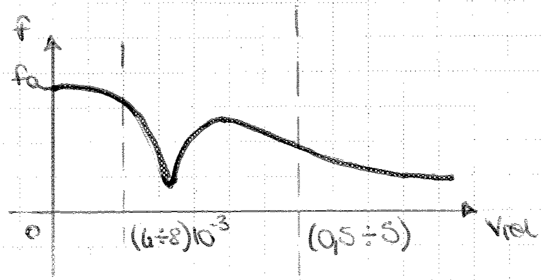


φ = angolo di attrito di strisciamento

$\Rightarrow \boxed{f = tg\,\varphi}$

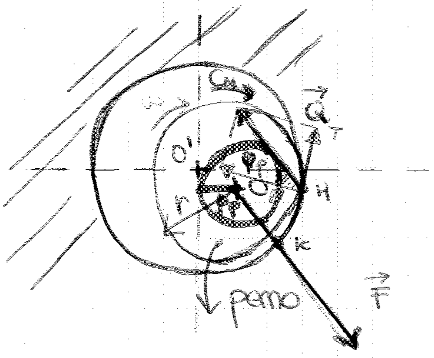


$\Rightarrow$ f in funzione della RUGOSITÀ



$\Rightarrow$ f in funzione della velocità relativa

ATTRITO AL PERNO



$\vec{F}$ = carico applicato al perno

→ $\vec{Q}$ = e opposta a $\vec{F}$ e //
→ formano 1 coppia opposta a $\vec{C}_M$

→ ω = cost

→ φ_p = angolo di attrito al perno

$\boxed{tg\,\varphi_p = f_p}$ $\boxed{T = f_p N}$

→ H si sposterà progressivamente mentre il perno ruota

→ $\vec{Q}$ sarà smp // a $\vec{F}$ e tangente al cerchio di attrito al perno

→ $(\rho_p) = OH \operatorname{sen}\varphi_p = r \operatorname{sen}\varphi_p$

↳ raggio del cerchio di attrito al perno

→ 3 regole dell'attrito al perno:

1) La reaz. vincolare della cerniera non passa + per O ed è tg al centro di attrito al perno
↓ $\vec{Q}$

2) $\vec{Q}$ è opposto a $\vec{\omega}$

3) $\vec{Q}$ rispetta l'equilibrio del corpo

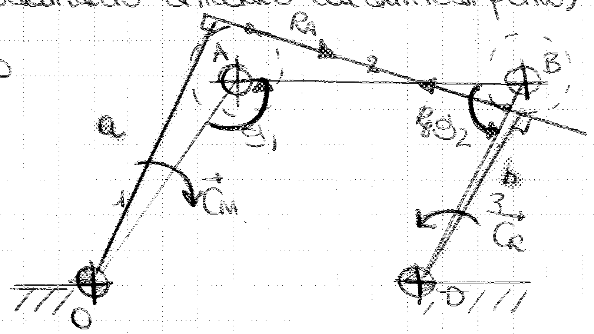
→ se faccio eq. di equilibrio in O

→ O) $C_M - Q\rho_p = 0$ → $\boxed{C_M = Q\rho_p}$

Esempio (quadrilatero articolato con attrito al perno)

① CASO

OK



→ A e B con attrito al perno

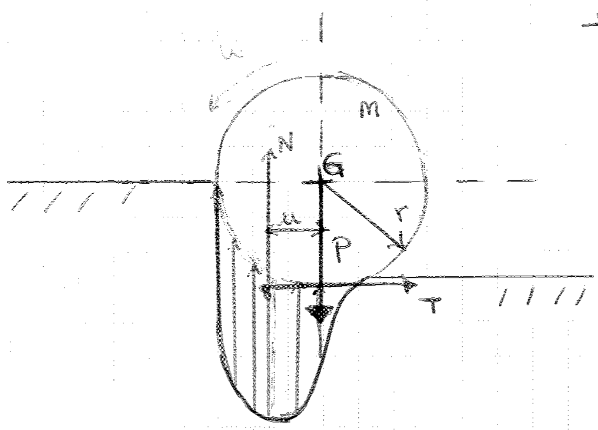
→ se R_A e R_B sono così va bene perché sono opposte a ω e rispettano tutte le regole dell'attrito al perno

→ a = braccio di $\vec{R}_A$ rispetto ad O è + grande rispetto a braccio che avrei senza attrito al perno

→ b = braccio di $\vec{R}_B$ rispetto a D è invece + piccolo del braccio senza attrito al perno

ATTRITO VOLVENTE

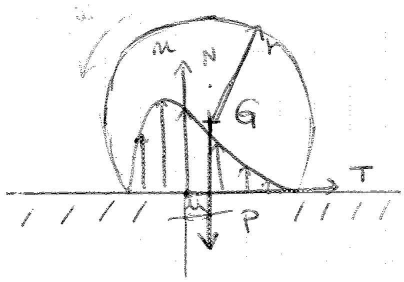
→ legato a imperfetta elasticità dei corpi a contatto



→ Terreno deformabile

→ si genera 1 distribuzione di contatto e N è la risultante

→ u = parametro di attrito volvente



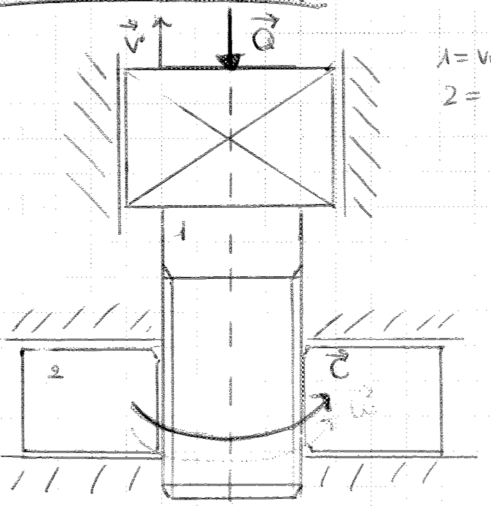
→ in qst caso è il corpo a essere deformabile

→ $G\circlearrowright$ $Nu = Tr$ → $T = N\dfrac{u}{r} = f_v N$ → $f_v = \dfrac{u}{r}$ = coeff di attrito volvente

→ Attrito volvente solo nel caso di rotolamento

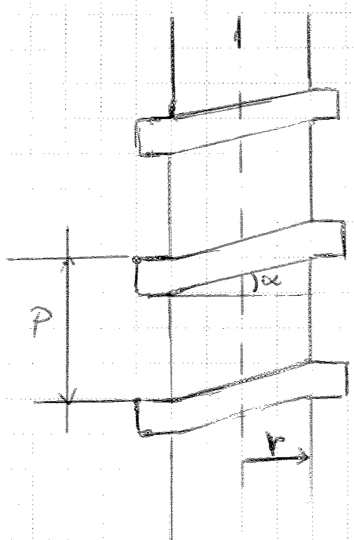
10.04.15

SISTEMA VITE - MADREVITE



1 = vite
2 = madrevite

Vite a profilo rettangolare



p = passo
α = inclinaz. del filetto
r = raggio dell'elica

COMPONENTI

16.04.15

FRENI e FRIZIONI

Nel caso di freni e frizioni c'è 1 superficie di contatto NON puntiforme
→ si parla di CONTATTI ESTESI

→ occorre conoscere la distribuz. delle PRESSIONI DI CONTATTO per risalire alla

$$N = \int_A p\,dA \quad e \quad T = f N$$

a) Ipotesi della PRESSIONE UNIFORME, $p = cost$

b) Ipotesi dell'usura o Reye

→ Il volume di materiale asportato nell'unità di tempo per usura è proporzionale al lavoro fatto dalle FORZE DI ATTRITO nella stessa unità di tempo

$$\underbrace{dV}_{\substack{\text{Volume}\\ \text{di materiale}\\ \text{asportato}}} = \delta dA = \underbrace{\frac{dh}{dt}}_{\substack{=\delta\\ \text{usura}\\ \text{del materiale}\\ \text{nell'unità di}\\ \text{tempo}}} dA = \underbrace{k\,dT\frac{ds}{dt}}_{\substack{\text{Lavoro delle}\\ \text{FORZE DI ATTRITO}\\ \text{nell'unità di}\\ \text{tempo}}} = k\,dT\underbrace{V_{rel}}_{=\frac{ds}{dt}} = k\underbrace{(f\,p\,dA)}_{T = f\cdot N = f p dA}V_{rel}$$

$$\Rightarrow \delta \cancel{dA} = k f \cancel{dA}\, p\, V_{rel} \quad \Rightarrow \boxed{\delta = k f p V_{rel}}$$

δ = usura
f = coeff. di attrito
k = cost. di proporzionalità
p = pressione di contatto
V_{rel} = $\vec{V}$ relativa

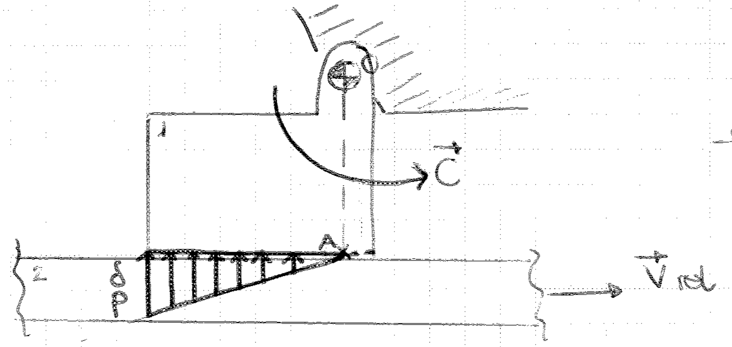
TIPI di FRENO (Tipologie base)

1) Freno a pattino ad accostamento rigido
2) Freno a pattino ad accostamento libero
3) Freno a tamburo ad accostamento rigido
4) Freno a tamburo ad accostamento libero
5) Freno a disco ad accostamento rigido
6) Freno a nastro

TIPI di FRIZIONI

1) Frizione piana
2) Frizione piana a dischi multipli
3) Frizione conica

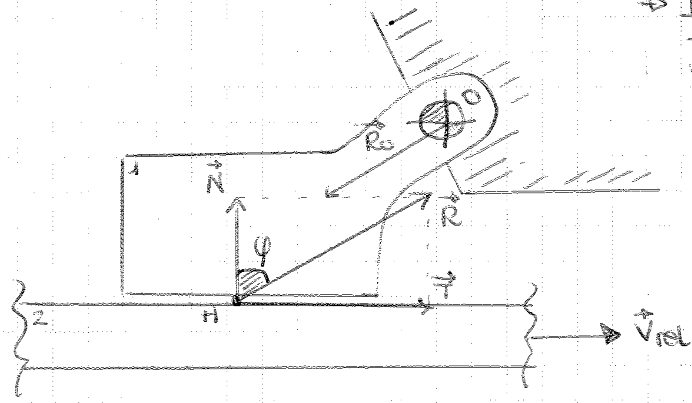
→ CASO PARTICOLARE : Pattino Porzializzato



1 = pattino
2 = nastro

→ A cade nella zona di contatto e distribuz. non è + trapezoidale ma TRIANGOLARE

→ CASO PARTICOLARE : Autoimpuntamento

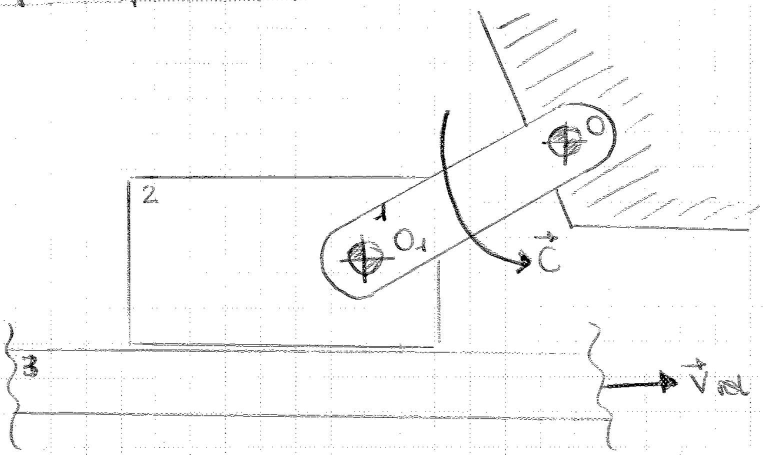


→ In qst modo $\vec{R}$ ed $\vec{R}_0$ formano 1 coppia che va a sostituire la coppia $\vec{C}$ → freni di emergenza che non hanno bisogno di energia per entrare in funzione

→ $|\vec{R}| = |\vec{R}_0|$ → $\vec{R} \parallel \vec{R}_0$

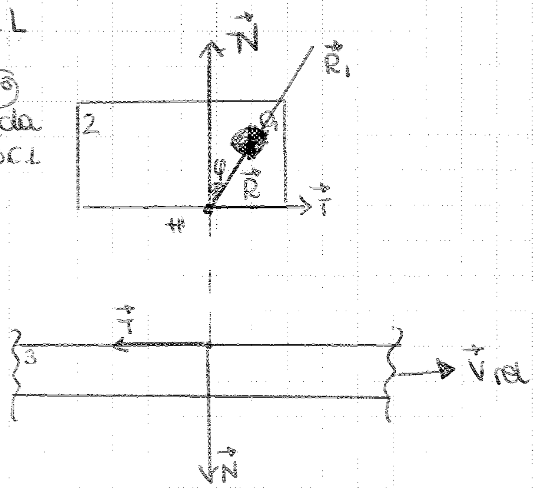
• Freno a pattino piano ad accostamento libero

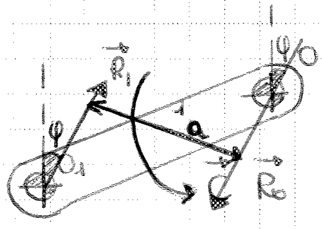
1 = biella
2 = pattino (2 GdL)
3 = nastro



→ D.C.L

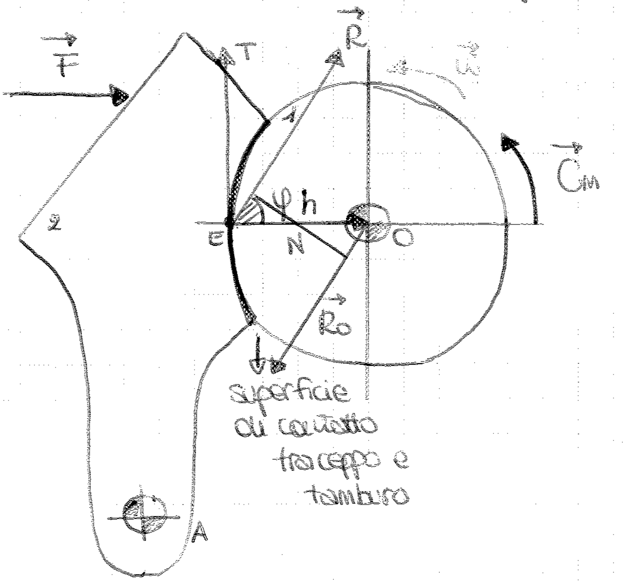
1° regola dei D.C.L





2° regola dei D.C.L.

- Freno a tamburo ad accostamento rigido



1 = tamburo
2 = ceppo

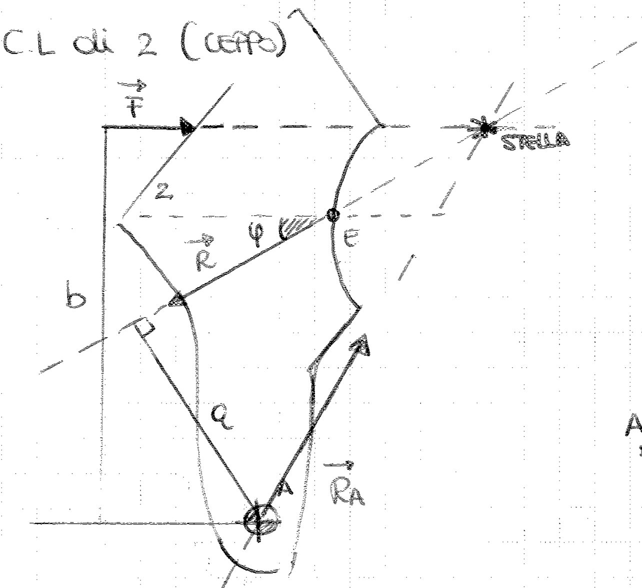
→ non uso ipotesi dell'usura
→ ipotizzo di concentrare N e T in E = mezzeria zona contatto
[T opposta a $\vec{\omega}$]

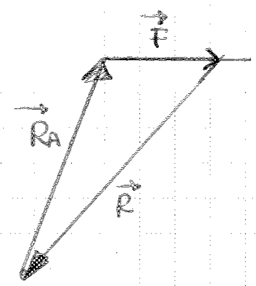
→ $\vec{R_0}$ = e opposta a $\vec{R}$
→ $|\vec{R_0}| = |\vec{R}|$, $\vec{R} \parallel \vec{R_0}$

→ eq. di rotazione
O) $\boxed{C_M = Rh}$

→ D.C.L di 2 (ceppo)

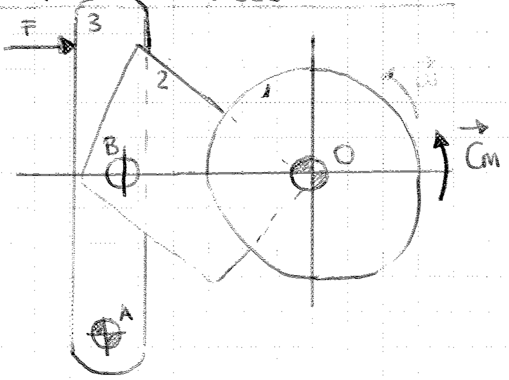
3° regola





A) $Fb - Ra = 0$
$R = \frac{T}{\sin\varphi}$

- Freno a tamburo ad accostamento libero

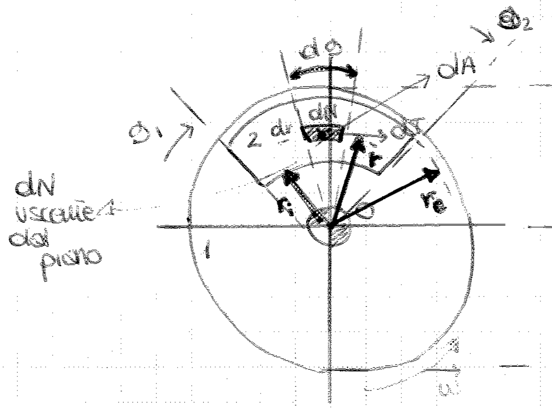


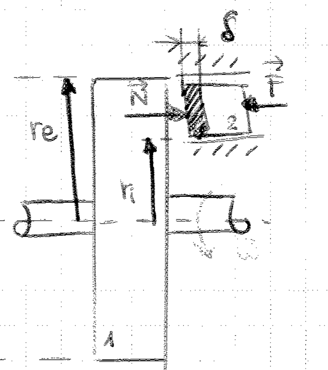
1 = tamburo
2 = ceppo (2 GdL)
3 = leva

20

17.06.15

- Freno a disco ad accoppiamento rigido





1 = disco
2 = pastiglia
$dA = r\,d\theta\,dr$
$\delta = cost$

→ Ipotesi di usura $\Rightarrow dV = \delta\, \cancel{dA} = k f p\, \cancel{dA}\, v_{rel} \Rightarrow \boxed{p = \frac{k'}{r}}$

(δ cost, $k f$ cost, $v_{rel} = \omega r \rightarrow r_i < r < r_e$; ω = cost istante per istante)

$$\Rightarrow \vec{F} = N = \int_A p\,dA = \int_{r_i}^{r_e} \frac{k'}{\cancel{r}} \cancel{r}\,dr \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \boxed{k'(\theta_2 - \theta_1)(r_e - r_i) = \vec{F}}$$

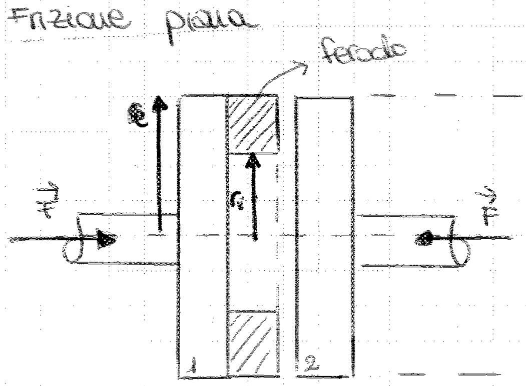
$$\Rightarrow M_{frenante} = \int_A r(dT) = \int_A r(f\underbrace{p\,dA}_{dN}) = \int_A r\left[f \frac{k'}{r} r\,dr\,d\theta\right] = \int_{r_i}^{r_e} f\frac{k'}{\cancel{r}} r^2 dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta =$$

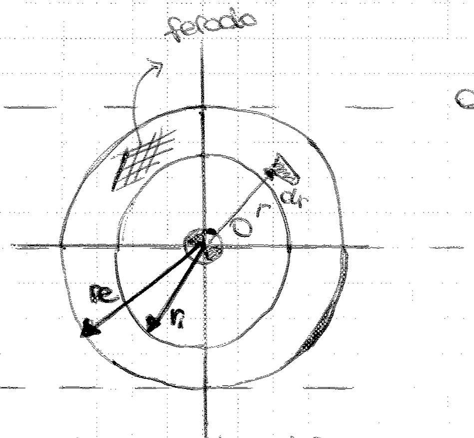
$$= f k' \frac{(r_e^2 - r_i^2)}{2}(\theta_2 - \theta_1) = \underbrace{f k'(\theta_2 - \theta_1)(r_e - r_i)}_{\vec{F}} \frac{(r_e + r_i)}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_{frenante} = f\vec{F}\,\frac{(r_e + r_i)}{2}}$$

FRIZIONI

- Frizione piana





$dA = 2\pi r\,dr$

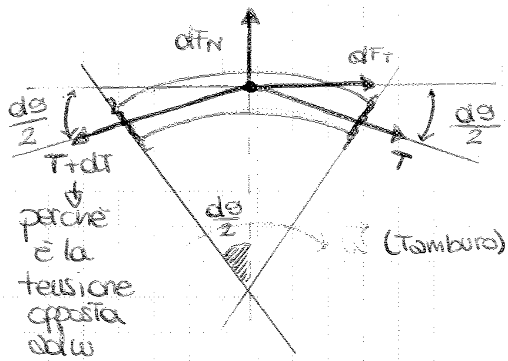
→ Per det. la $\vec{F}$ stesso procedimento del freno a disco con la differenza che $\theta_2 - \theta_1 = 2\pi$

$\Rightarrow \vec{F} = k' 2\pi (r_e - r_i)$ $\boxed{M_{frizione} = f F \frac{(r_e + r_i)}{2}}$ $\Rightarrow$ momento trasmesso dalla frizione piana

21

→ **EQUAZIONE dei FLESSIBILI**

Isolo 1 tratto di nastro



perché è la tensione opposta alla → deve essere > di T

→ faccio l'equilibrio:

$$\begin{cases} dF_T + T\cos\frac{d\theta}{2} - (T+dT)\cos\frac{d\theta}{2} = 0 & (1) \\ dF_N - T\sin\frac{d\theta}{2} - (T+dT)\sin\frac{d\theta}{2} = 0 & (2) \\ dF_T = f\,dF_N & (3) \end{cases}$$

(3) → eq. di attrito di strisciamento

→ $d\theta$ è 1 angolo infinitesimo ⇒ $\cos\frac{d\theta}{2} \approx 1$ e $\sin\frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$

⇒ 1, 2, 3 diventano

$$\begin{cases} dF_T + \cancel{T} - (\cancel{T}+dT) = 0 \rightarrow dF_T = +dT \\ dF_N - T\frac{d\theta}{2} - (T+dT)\frac{d\theta}{2} = 0 \rightarrow dF_N \underbrace{-T\frac{d\theta}{2} - T\frac{d\theta}{2}}_{-\cancel{2}T\frac{d\theta}{\cancel{2}}} - \underbrace{dT\frac{d\theta}{2}}_{\text{trascurabile}} = 0 \\ dF_T = f\,dF_N \rightarrow \boxed{dT = f\,T\,d\theta} \end{cases}$$

⇓

$$\frac{dT}{T} = f\,d\theta \rightarrow \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^{\theta^*} f\,d\theta$$

→ $\ln\frac{T_2}{T_1} = f\theta^*$ ⇒ $\boxed{\frac{T_2}{T_1} = e^{f\theta^*}}$

→ dove θ^* = angolo di STRISCIAMENTO = angolo di contatto tra le parti

→ $\theta^* = \theta_{AW}$ = angolo di avvolgimento (solo per freno a nastro)

$\Rightarrow \begin{cases} IO_2 = R_2 - R_1 = O_2 z - I z \\ O_1 O_2 = a \end{cases}$ $\Rightarrow IO_2 = a \sin\beta$

$\Rightarrow R_2 - R_1 = a \sin\beta$

$$\Rightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{R_2 - R_1}{a}\right)$$

→ Equazione dei flessibili nelle cinghie

$$\boxed{\frac{T_1 - qv^2}{T_2 - qv^2} = e^{f\vartheta^*}}$$

v = velocità della cinghia
q = massa per unità di lunghezza della cinghia
→ a num. di eserci $T >$

→ $f = f'$ per cinghia trapezia
→ ϑ^* = angolo di strisciamento della puleggia motrice

[Negli esercizi ci daranno fornire proporzione tra ϑ_{Ad} e ϑ^*]

→ RENDIMENTO (di 1 trasmissione A CINGHIE)

$$\eta = \frac{P_u}{P_e} = \frac{C_R\,\omega_2}{C_M\,\omega_1} = \frac{\overbrace{(T_1 - T_2) R_2}^{C_R}\,\omega_2}{\underbrace{(T_1 - T_2) R_1}_{C_M}\,\omega_1} = \frac{R_2\omega_2}{R_1\omega_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\cancel{V_0}\left(1 + \frac{T_2}{ES}\right)}{\cancel{V_0}\left(1 + \frac{T_1}{ES}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta = \frac{1 + \frac{T_2}{ES}}{1 + \frac{T_1}{ES}}}$$

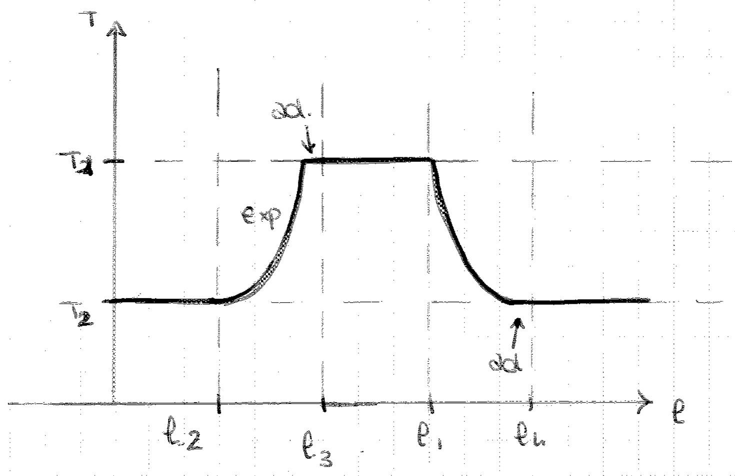
→ Rapporto di trasmissione (di 1 trasmissione a cinghie)

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{V_1}{R_1}\frac{R_2}{V_2} = \frac{R_2}{R_1}\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_2}{R_1}\frac{\cancel{V_0}\left(1 + \frac{T_1}{ES}\right)}{\cancel{V_0}\left(1 + \frac{T_2}{ES}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{i = \frac{R_2}{R_1}\left[\frac{1 + \frac{T_1}{ES}}{1 + \frac{T_2}{ES}}\right]}$$

→ se non conosco ES devo trascurare il termine $\frac{T}{ES}$

$\Rightarrow$ i = viene approssimato a $\frac{R_2}{R_1}$



$$\boxed{T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}}$$

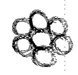
con T_0 = forzamento iniziale

↳ vale se approssimo passaggio da T_2 a T_1 in modo lineare e non esponenziale

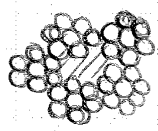
→ Il tratto in cui ho esponenziale è il tratto di strisciamento in cui ho eq. dei flessibili

FUNI

1) Trefoli: più fili avvolti a elica

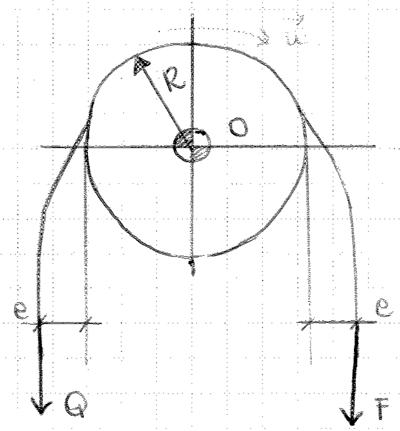


2) Funi a trefoli: + trefoli avvolti a elica

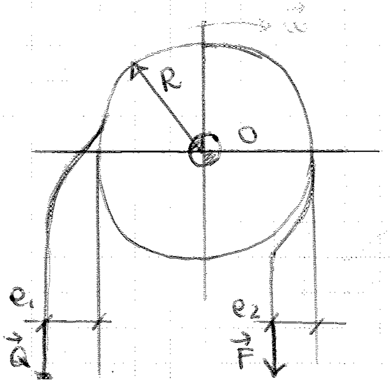


RIGIDEZZA della FUNE

a) Rigidezza elastica (e): legata all'incompleta flessibilità della fune



b) Rigidezza anelastica (e_1, e_2): legata all'attrito tra i fili e agli scorrimenti interni

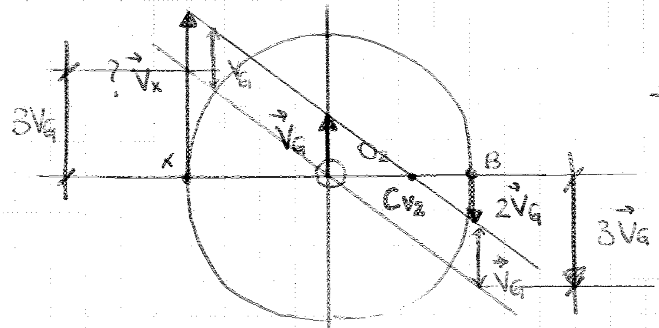


→ in uscita la fune tende a mantenere forma presa su puleggia

- Analisi cinematica

→ La puleggia 4 rotola senza strisciare su ~~puleggia~~ tratto $\overline{IZ}$

→ Puleggia 2



→ distribuz. delle velocità su puleggia 2

→ Traccio 1 retta // a distribuz. reale passante per O_2

→ la distanza tra le 2 vale V_G

→ quindi è come se togliessi velocità V_G del bozzello

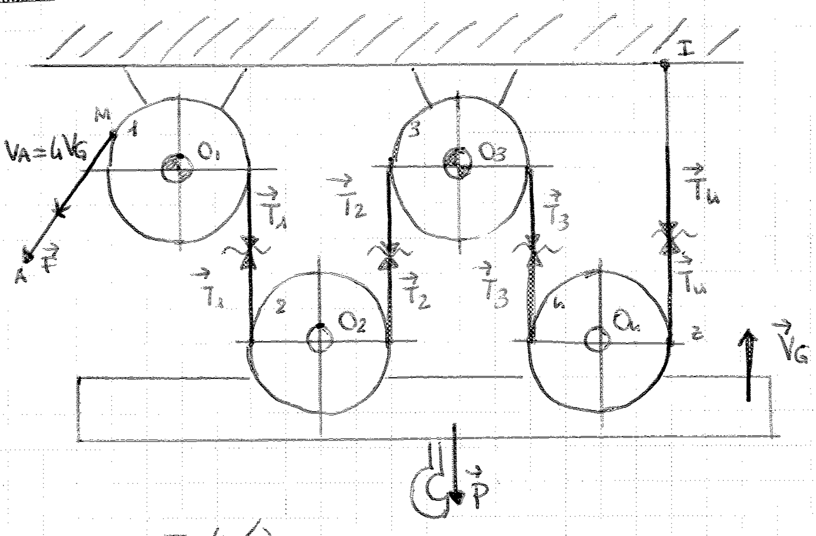
→ I due tratti sono = perché simmetrici

$$\Rightarrow \boxed{V_x = 4V_G}$$

→ qst poi si trasmette alla puleggia 1

$$\Rightarrow \boxed{V_A = nV_G}$$; n = n° di rami di funi agganciati al bozzello

- Equilibri:



→ $\eta_c = \eta_{c_1} = \dfrac{T_1\,(4V_G)}{F\,(4V_G)} = \dfrac{T_1}{F}$ $\Rightarrow T_1 = \eta_c \cdot F$

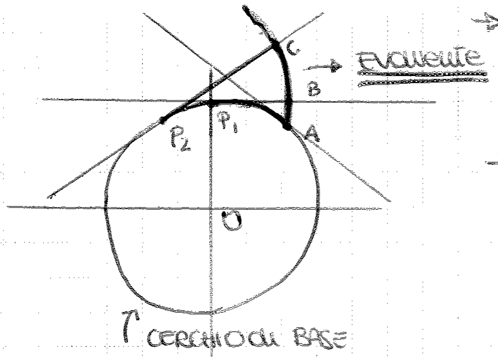
→ allo stesso modo $T_2 = \eta_c T_1 = \eta_c^2 F$

→ $T_3 = \eta_c\, T_2 = \eta_c^3\, F$

→ $T_4 = \eta_c\, T_3 = \eta_c^4\, F$

$$\Rightarrow \boxed{T_n = \eta_c^n\, F}$$

⇒ con i profili dei denti a evolvente di cerchio, le normali ai profili sono le tangenti ai cerchi di base



→ prendo dei p.ti in modo che:
$\widehat{P_1A} = \overline{P_1B}$
$\widehat{P_2A} = \overline{P_2C}$

→ A è origine dell'evolvente

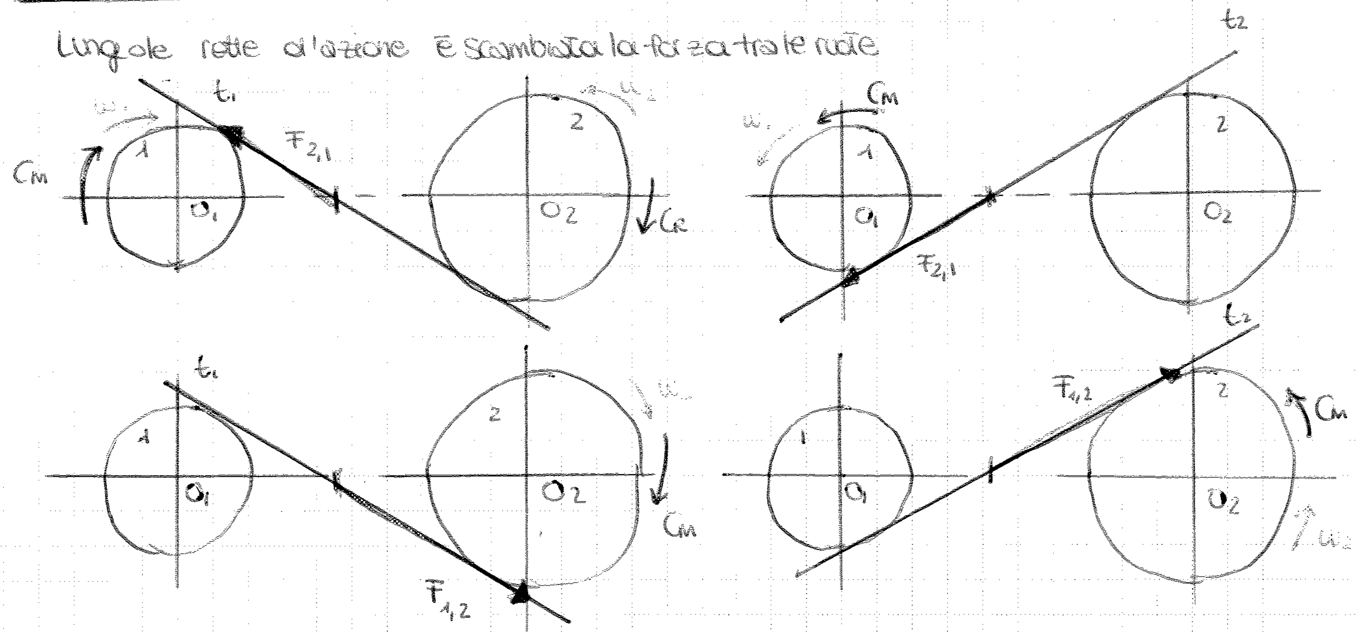
⇒ I denti a contatto sono profili coniugati trascinati in rotazione dalle circonferenze PRIMITIVE

⇓

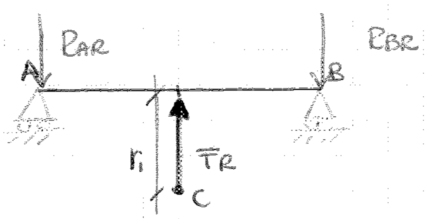
→ Hanno la stessa componente normale di velocità
→ ∃ 1 velocità di strisciamento

TANGENTI AI CERCHI DI BASE = rette d'azione

Lungo le rette d'azione è scambiata la forza tra le ruote

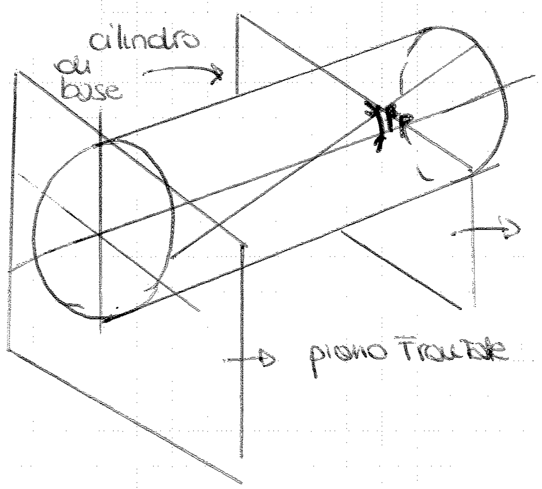


→ nel piano (x,y):



- ↑ $F_R = R_{AR} + R_{BR}$
- A↺ $F_R a = R_{BR}(a+b)$

RUOTE DENTATE CILINDRICHE A DENTI ELICOIDALI



β_P = angolo di inclinaz. dell'elica sul cilindro di base

- IL proporzionamento modulare si fa nel piano normale al dente

→ $tg\, \beta_P = tg\, \beta \cos\alpha$

→ $p_n = p \cos\beta$

→ $m_n = m \cos\beta$

→ $tg\, \alpha_n = tg\, \alpha \cos\beta$

β = angolo di inclinaz. dell'elica sul cilindro ~~a~~ primitivo

p_n = passo della ruota ~~sul~~ nel piano normale

p = passo della ruota nel piano frontale

α_n = angolo di pressione ~~del~~ nel piano normale

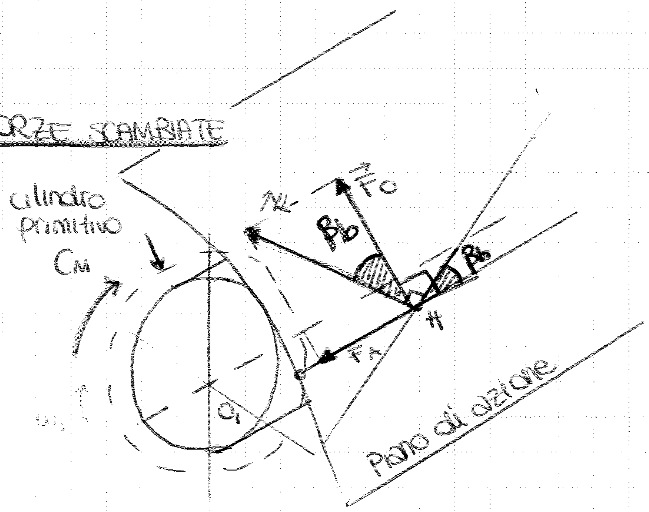
α = angolo " " " " frontale

m_n = modulo del piano normale

m = " nel " frontale

7.05.15

FORZE SCAMBIATE



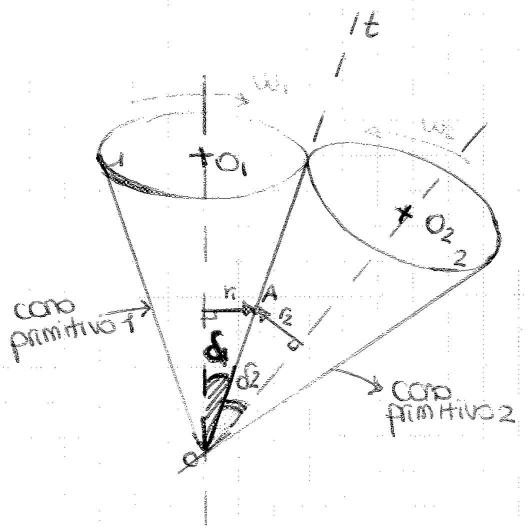
Hp: - Trascuro attrito
- F è nel piano d'azione, ⊥ a dente
- 1 sola coppia di denti in presa
- F applicata lungo retta tg a cilindro primitivo e a metà ruota

→ $F_o = F \cos\beta_b$, ⊥ a asse ruota

→ $F_A = F \sin\beta_b$, lungo asse della ruota

RUOTE CONICHE A DENTI DIRITTI

(27)



→ t = asse di istantanea rotazione nel moto relativo

→ δ_1 = semiangolo di apertura cono primitivo 1

→ δ_2 = semiangolo di apertura cono primitivo 2

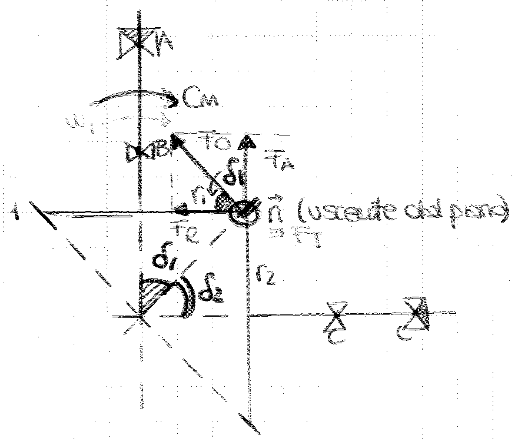
→ $r_1 = OA \operatorname{sen} \delta_1$

→ $r_2 = OA \operatorname{sen} \delta_1$

⇒ $\boxed{i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\operatorname{sen}\delta_2}{\operatorname{sen}\delta_1}}$

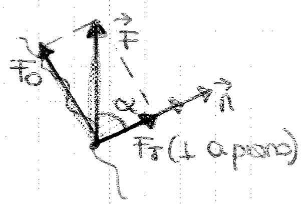
perchè $V = r_1\omega_1 = r_2\omega_2$

- Forze scambiate



→ in B ec C supporti RADIALI

→ in A e D supporti RADIALI - ASSIALI



α = angolo di pressione

F = forza tot scambiata tra le ruote, nel piano d'azione

F_O = componente ∈ a piano degli assi

→ $F_T = F\cos\alpha$

→ $F_O = F\operatorname{sen}\alpha$

→ $F_A = F_O \operatorname{sen}\delta_1 = (F\operatorname{sen}\alpha)\operatorname{sen}\delta_1$ = componente ASSIALE

→ $F_R = F_O \cos\delta_1 = (F\operatorname{sen}\alpha)\cos\delta_1$ = componente RADIALE

14.05.15

ROTISMI

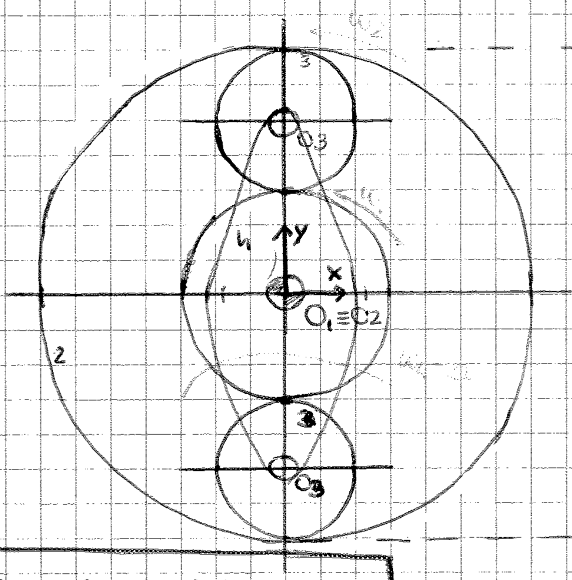
Quando ho + di 2 ruote in presa → $i = 10 \div 1000$

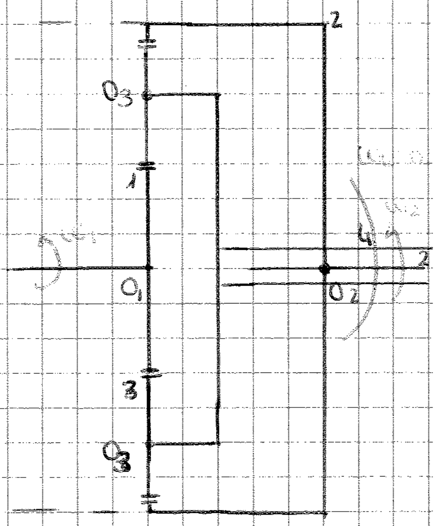
- Ruotismi ORDINARI: quando le ruote hanno tutte asse fisso
- Rotismi epicicloidali: almeno 1 albero delle ruote ha asse mobile

• Rotismo epicicloidale

1 = solare
2 = corona
3 = satelliti o planetari

4 = porta treno o porta satelliti





$$\boxed{i_{1,2} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = \left(\frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_3 - \Omega}\right)\left(\frac{\omega_3 - \Omega}{\omega_2 - \Omega}\right)}$$

⇒ FORMULA di WILLIS

→ così rendo "ordinario" il rotismo epicicloidale con 1 sistema di riferimento solidale al portatreno

→ $i_{1,2} = (i_{1,3})(i_{3,2}) = \left(-\frac{z_3}{z_1}\right)\left(\frac{z_2}{z_3}\right)$

↓ ruote 3 e 2 interne

⇒ Da $i_{1,2}$ mi ricavo Ω

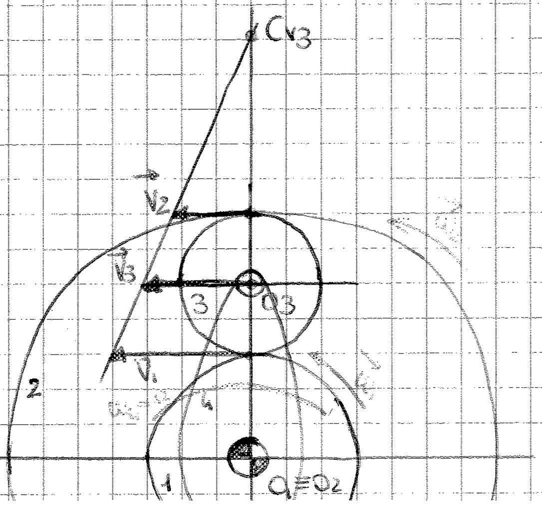
→ $\Omega = \frac{z_1\omega_1 + z_2\omega_2}{z_1 + z_2}$

⇒ Ω me la ricavo a seconda dai casi con formula di Willis, e non hai sempre ~~stess~~ questa forma (→ anche formula di Willis ≠ a seconda della geometria)

⇒ $i_{1,4}$ = i tra albero 1 e albero del portatreno = $\frac{\omega_1}{\Omega}$

15.05.14

Considerazioni cinematiche



→ uso il centro di istantanea rotazione del planetario 3

→ $v_1 = \omega_1 r_1$

→ $v_2 = \omega_2 r_2$

→ $v_3 = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2} = \Omega(r_1 + r_3)$

$r_2 = r_1 + 2r_3$

$r_3 = \frac{r_2 - r_1}{2}$

$r_1 + r_3 = r_1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right) = \frac{r_1 + r_2}{2}$

⇒ $v_3 = \Omega\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2}$

→ rotazione intorno a O_1:

$O_1)\quad C_M = 2T\cos\alpha\, r_1 = R r_1 \Rightarrow R = \frac{C_M}{r_1}$ *

→ per definizione $\Rightarrow C_R = 2R(r_1 + r_3)$

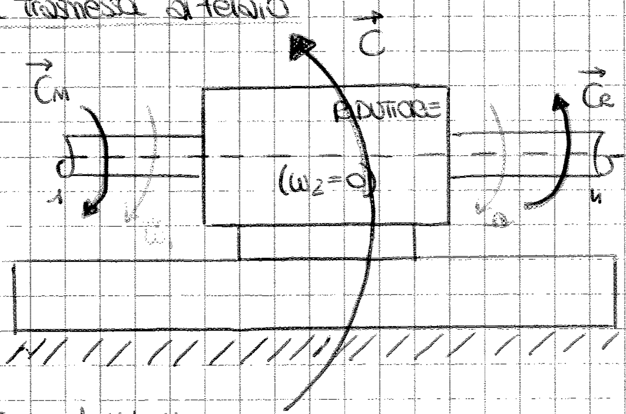
$\Rightarrow r_2 = r_1 + 2r_3 \Rightarrow r_3 = \frac{r_2 - r_1}{2}$

$\Rightarrow r_1 + \frac{r_2 - r_1}{2} = \frac{r_1 + r_2}{2} \Rightarrow C_R = 2R\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)$

→ sostituisco * $\Rightarrow C_R = \cancel{2}\frac{C_M}{r_1}\left(\frac{r_1 + r_2}{\cancel{2}}\right) \Rightarrow \boxed{C_R = C_M\left(\frac{r_1 + r_2}{r_1}\right)} = C_M\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1}\right)$

→ vale relazione $\boxed{C_R = C_M\, i_{1,u}}$

- Coppia trasmessa al telaio

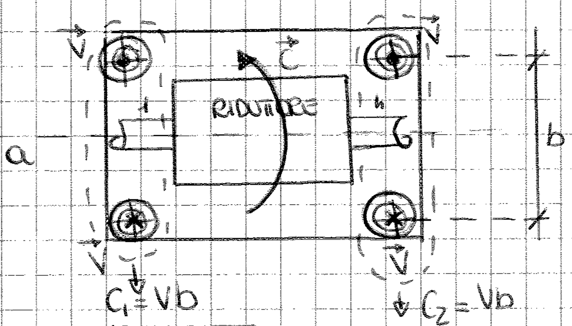


→ $i_{1,u} = \frac{\omega_1}{\Omega}$

$a)\quad C_M - C_R - C = 0$

$\Rightarrow \boxed{C = C_R - C_M}$

→ vista dall'alto



→ La coppia $\vec{C}$ comprime i bulloni superiori e mette in trazione i bulloni inferiori

→ ~~ne~~ i bulloni superiori reagiscono a $\vec{C}$ con 2 forze uscenti $\vec{V}$

→ quelli inferiori reagiscono con 2 forze entranti $\vec{V}$

→ si formano quindi 2 coppie che si oppongono a C

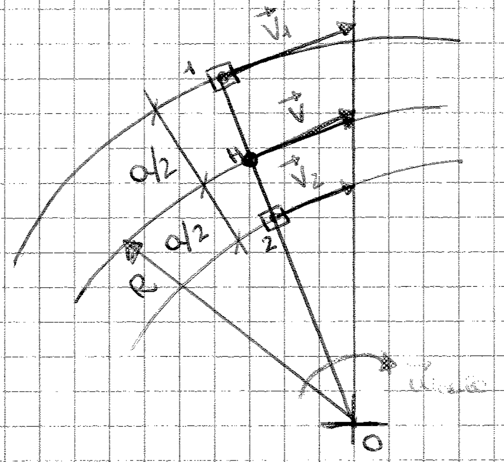
$C_1 = C_2 = Vb$

$\Rightarrow C = 2Vb \Rightarrow \boxed{V = \frac{C}{2b}}$

a) In rettilineo:

$$\omega_1 = \omega_2 = \Omega = \frac{v}{r} \quad , \; r = \text{raggio ruota}$$

b) In curva:



→ a = carreggiata dell'auto
→ R = raggio di curva

→ $\vec{v}_1 = \underbrace{\cancel{\vec{v}_O}}_{=0} + \vec{v}_{1/O} = \vec{\omega}_{auto} \vec{k} \times (1-O)$

→ $\vec{v}_2 = \underbrace{\cancel{\vec{v}_O}}_{=0} + \vec{v}_{2/O} = \omega_{auto} \vec{k} \times (2-O)$

→ $\vec{v} = \underbrace{\cancel{\vec{v}_O}}_{=0} + \vec{v}_{H/O} = \omega_{auto} \vec{k} \times (H-O)$

→ $\vec{v}_1 = \omega_{auto}(R + a/2) = \frac{v}{R}(R + a/2) = \omega_1 r$
→ $\vec{v} = \omega_{auto} R$
→ $\vec{v}_2 = \omega_{auto}(R - a/2) = \frac{v}{R}(R - a/2) = \omega_2 r$

→ $\omega_1 \neq \omega_2$

→ $\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{v_1/r + v_2/r}{2} = \frac{v}{r}$ → Ω sempre = (che sia curva o rettilineo)

$$\boxed{\Omega = \frac{v}{r}}$$

→ Il differenziale è il PARTITORE di COPPIA:

$$\begin{cases} \Omega = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} & (1) \\ C_1 + C_2 + C = 0 & (2) \\ C_1\omega_1 + C_2\omega_2 + C\Omega = 0 & (3) \end{cases}$$

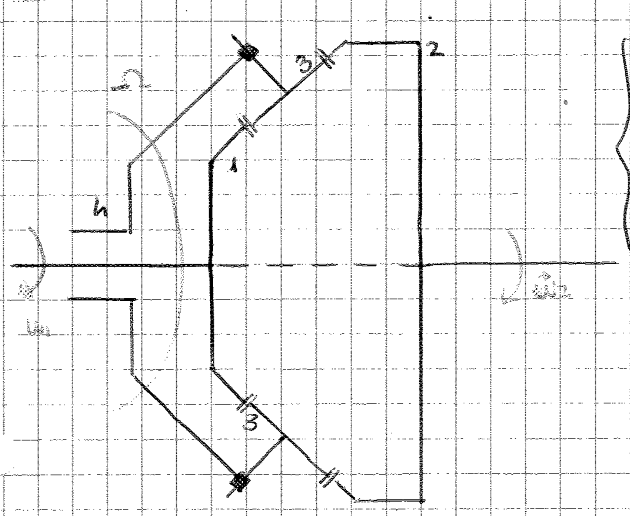
(2): sul portatreno

Da (2) → trovo C e la sostituisco in (3) insieme a (1)

→ $C_1(\omega_1 - \omega_2) = C_2(\omega_1 - \omega_2)$

→ $\boxed{C_1 = C_2 = \frac{C}{2}}$ → perché struttura è simmetrica

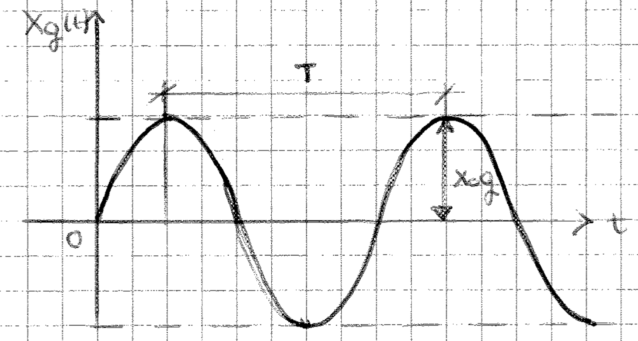
• Differenziale asimmetrico



$$\begin{cases} \Omega = \dfrac{\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2}{z_1 + z_2} \\ C_1 + C_2 + C = 0 \\ C_1\omega_1 + C_2\omega_2 + C\Omega = 0 \end{cases}$$

→ $C_1 z_2 (\omega_1 - \cancel{\omega_2}) = C_2 z_1 (\omega_1 - \cancel{\omega_2})$

$$\boxed{\frac{C_1}{C_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}}$$

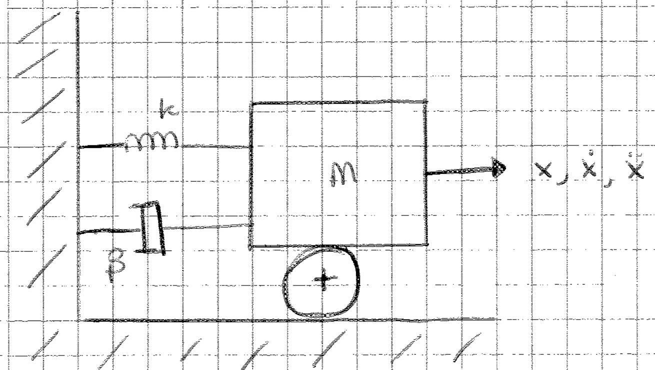


$T = \frac{2\pi}{\omega_n}$

$f_n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi}$ [Hz]

22.05.15

VIBRAZIONI LIBERE SMORZATE



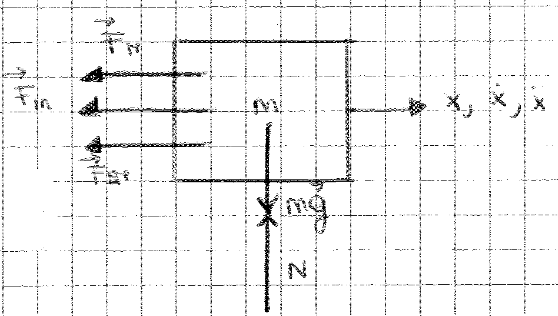
— k — = MOLLA $\vec{F}_M = -k\vec{x}$

—[ ]— = SMORZATORE VISCOSO $\vec{F}_{SM} = -\beta\,\dot{\vec{x}}$

β = COSTANTE di SMORZAM.

[m] = MASSA $\vec{F}_{in} = -m\ddot{\vec{x}}$

→ D.C.L



$\vec{F}_{in} + \vec{F}_{SM} + \vec{F}_M = 0$

$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$

$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$\ddot{x} + (2\xi\omega_n)\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$

con ω_n = pulsazione naturale del sistema non smorzato

$\boxed{\xi = \frac{\beta}{\beta_{critico}}}$ = fattore di smorzam.

· $\beta_{critico}$ è quel valore di β che fa tendere a zero la risposta del sistema nel < tempo possibile senza oscillare

⇒ $\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ $\boxed{\xi = \frac{\beta}{2m\omega_n}}$

→ soluzione dell'eq differenziale del II ordine ⇒ $e^{\lambda t}$

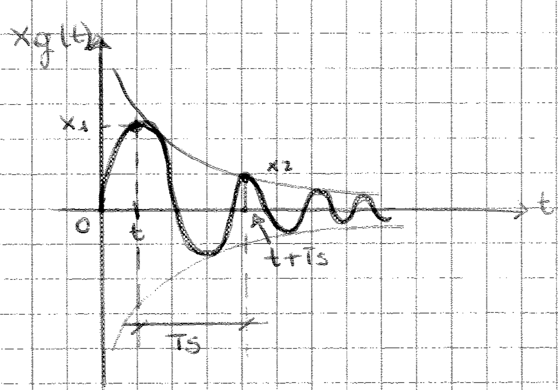
$\lambda^2 + (2\xi\omega_n)\lambda + (\omega_n^2) = 0$

$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

→ se $\xi > 1$ ⇒ SISTEMA SOVRASMORZATO ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e distinte)

→ se $\xi < 1$ ⇒ SISTEMA SOTTOSMORZATO ($\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ coniugato)

- $\xi < 1 \Rightarrow$ DECREMENTO LOGARITMICO



$x_1(t) = x_{0g}\, e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_s t + \varphi_0)$

$x_2(t) = x_{0g}\, e^{-\xi \omega_n (t+T_s)} \cos(\omega_s t + \varphi_0)$

$\dfrac{x_1(t)}{x_2(t)} = e^{\xi \omega_n T_s}$

$\Rightarrow \delta =$ DECREMENTO LOGARITMICO = logaritmo naturale del rapporto tra le ampiezze di due massimi successivi (x_1, x_2)

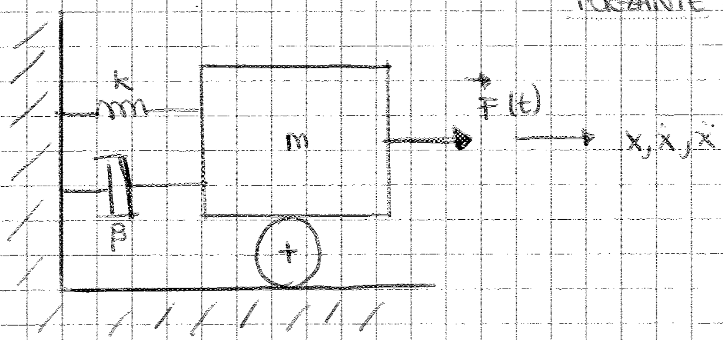
$$\Rightarrow \delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln\left(e^{\xi \omega_n T_s}\right) = \xi \omega_n T_s = \xi \omega_n \left(\frac{2\pi}{\omega_s}\right) = \xi \omega_n \left(\frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \xi \frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

VIBRAZIONI FORZATE SMORZATE

FORZANTE = $\boxed{F(t) = F_0 \cos(\Omega t)}$

$\Rightarrow \Omega =$ pulsazione della forzante



$\Rightarrow \vec{F}_{el} = -k\vec{x}$
$\Rightarrow \vec{F}_{sm} = -\beta \dot{\vec{x}}$
$\Rightarrow \vec{F}_{in} = -m\ddot{\vec{x}}$

$\Rightarrow x_{TOT}(t) = x_g(t) + x_p(t)$, con $\lim_{t \to \infty} x_g(t) = 0$

$\Rightarrow$ integrale particolare

$\Rightarrow$ a lungo andare la $x_g(t)$ si estingue

$\Rightarrow$ considero esaurita la $x_g(t)$

$$\Rightarrow \boxed{x_{TOT} = x_p(t) = x_0 \cos(\Omega t - \varphi)}$$

- $x_0 =$ ampiezza di oscillazione a regime
- $\varphi =$ sfasamento dovuto allo smorzamento

$\Rightarrow$ per il calcolo di x_0 e φ usiamo METODO DEI VETTORI ROTANTI

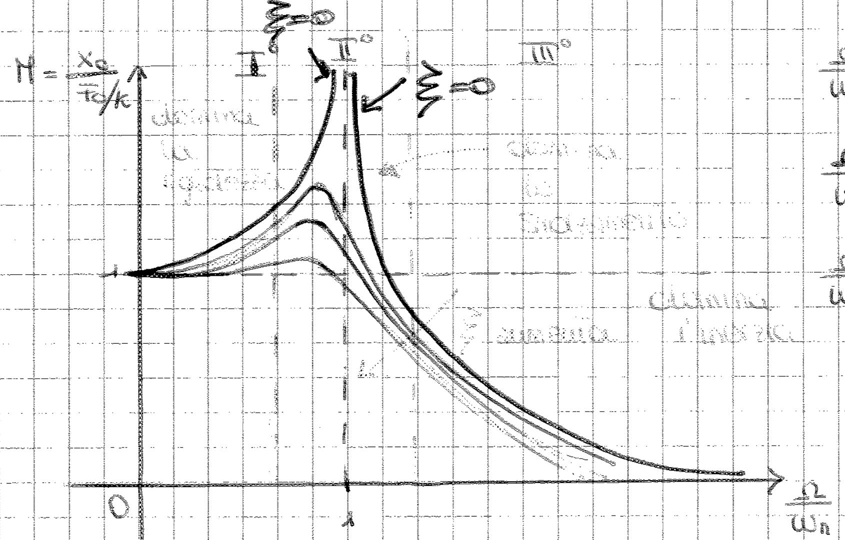
$\Rightarrow$ qst vale se:
1) il sistema è lineare
2) la forzante è armonica
3) la soluzione è a regime ($x_g(t) = 0$)

$$\Rightarrow x_0 = \frac{\frac{F_0}{\cancel{m}}\left(\frac{\cancel{m}}{k}\right)}{\sqrt{\left(2\xi\,\omega_n\frac{\Omega}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{\cancel{\omega_n^2}}{\cancel{\omega_n^2}}-\frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{x_0}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{\left(2\xi\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2+\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}}}$$

$\Downarrow$

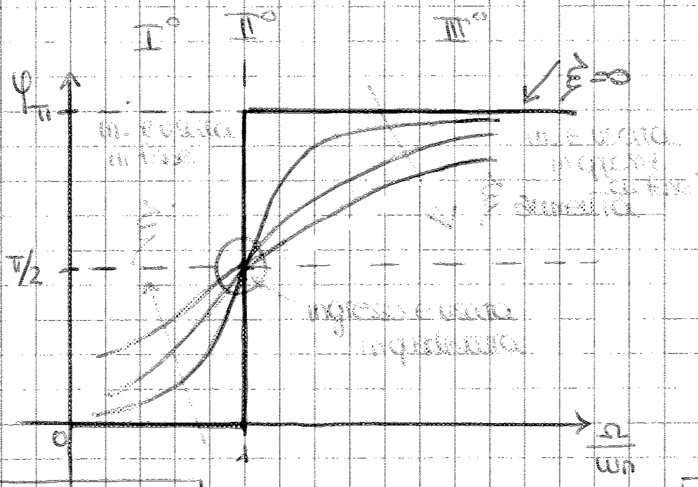
FATTORE DI AMPLIFICAZIONE



$\frac{\Omega}{\omega_n} \to 0 \Rightarrow \frac{x_0}{F_0/k} \to 1$ I°

$\frac{\Omega}{\omega_n} \to 1 \Rightarrow \frac{x_0}{F_0/k} \to \frac{1}{2\xi}$ II°

$\frac{\Omega}{\omega_n} \to \infty \Rightarrow \frac{x_0}{F_0/k} \to \frac{1}{(\Omega/\omega_n)^2}$ III°



$\frac{\Omega}{\omega_n} \to 0 \Rightarrow tg\varphi \to 0 \Rightarrow \varphi \to 0$ I°

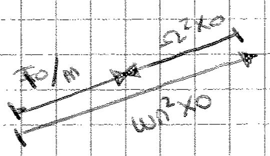
$\frac{\Omega}{\omega_n} \to 1 \Rightarrow tg\varphi \to \infty \Rightarrow \varphi \to \pi/2$ II°

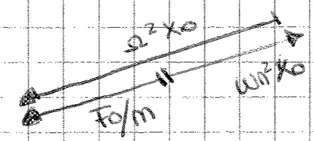
$\frac{\Omega}{\omega_n} \to \infty \Rightarrow tg\varphi \to 0 \Rightarrow \varphi \to 180°$ III°

$\Rightarrow$ poligo $\left| \xi = 0 ,\ \varphi = 0 \right| \equiv$ I° zona

$\Rightarrow$ poligo $\left| \xi = 0 ,\ \varphi = 180° \right| \equiv$ III° zona

il poligono diventa:





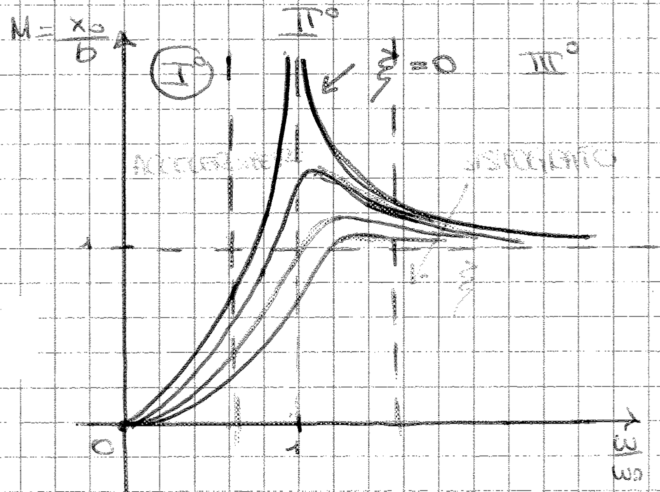
$\Rightarrow$ domina vettore della molla
$\Rightarrow$ domina rigidezza

$\Rightarrow$ domina vettore della massa
$\Rightarrow$ domina l'inerzia

II MODO

$$\boxed{M = \frac{x_0}{b} = \frac{\left(\omega/\omega_n\right)^2}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}}$$

$$\boxed{tg\,\varphi = \frac{2\xi\,\omega/\omega_n}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$



I° $\frac{\omega}{\omega_n} \to 0$, $M \to 0$

II° $\frac{\omega}{\omega_n} \to 1$, $M \to \frac{1}{2\xi}$

III° $\frac{\omega}{\omega_n} \to +\infty$, $M \to 1$

1) $\xi = 0$, $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x_0}{b} \cong 1}$ SISMOGRAFO

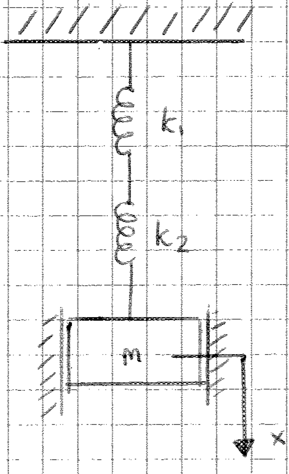
2) $\xi = 0$, $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \Rightarrow \frac{x_0}{b} \cong \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \Rightarrow \boxed{x_0 \propto b\omega^2}$ ACCELEROMETRO

$\ddot{x}b = -b\omega^2 \operatorname{sen}\omega t$

$\ddot{x}b_{max} = -b\omega^2$

RIGIDEZZE EQUIVALENTI

a)



MOLLE IN SERIE

$F = k_1 \Delta x_1$

$F = k_2 \Delta x_2$

$\Delta x_{TOT} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots \frac{1}{k_n}}$$