



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2033A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Gentile Denise

MATERIA: Fondamenti di meccanica strutturale - Prof. Somà

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

FONDAMENTI DI MECCANICA

①

STRUTTURALE

4.03.15

EQUILIBRIO e RELAZIONI VINCOLARI

Il sistema è detto in equilibrio se si suppone in QUIETE o a VELOCITÀ COSTANTE

- EQUILIBRIO DINAMICO = quel sistema modifica istante per istante il suo stato
→ acceleraz. non nulla
- EQUILIBRIO STATICO = sistema in quiete
- EQUILIBRIO "QUASI" STATICO = velocità costante → acceleraz. nulla

PUNTO MATERIALE

L'idealizzo mio sistema tende da concentrare tutta la massa in 1 punto
→ si trascura FORMA ed ESTENSIONE dell'oggetto

Solo proprio le
parti che a noi
interessano

→ il punto si può muovere → ammette dei GRADI di LIBERTÀ nelle tre direzioni
nello spazio

CORPO RIGIDO

Il nostro sistema avrà FORMA ed ESTENSIONE

→ è l'oggetto costituito da insieme di parti materiali che si muovono insieme
mantenendo forma ed estensione di partezza

sotto applicaz.
di carichi rimangono
= nel corpo rigido

→ Il sistema meccanico può essere costituito da 1 o + corpi rigidi, o anche da 1 sola partezza di corpo rigido

CORPO DEFORMABILE

Il corpo di partezza segue i evoluimenti

- la distanza tra due punti del corpo cambia nel tempo
- se gli spostamenti sono piccoli posso studiare l'equilibrio come se fosse 1 corpo rigido

⇒ IPOTESI LINEARE di piccoli spostamenti e rotazioni

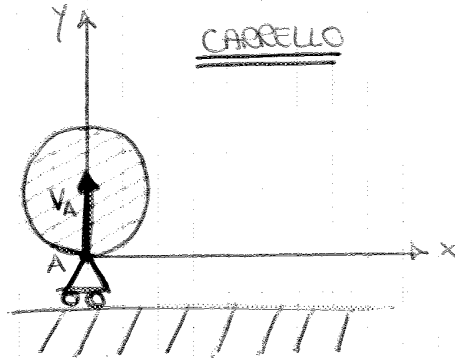
②

→ a seconda dei gradi di libertà che tolgono può essere SEMPLICE o COMPOSTO

↓
tolgono 1 grado di libertà per volta

↓
tolgono + gradi di libertà per volta

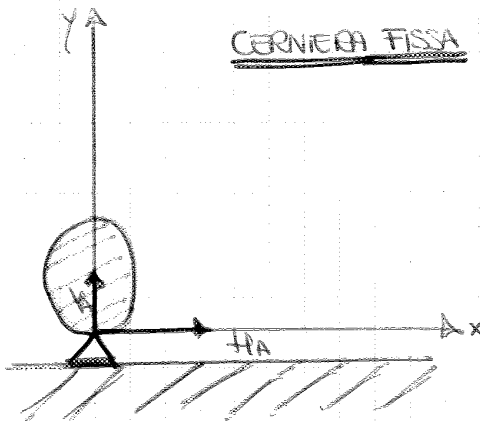
Esempi



→ Il vincolo nel pnt toglie solo 1 grado di libertà (movimento lungo y)

→ V_A è la forza vincolare generata dal vincolo

→ la forza di V_A ha verso ideale → in seguito ai calcoli vedremo se il verso è giusto o no, e ne det. anche l'intensità



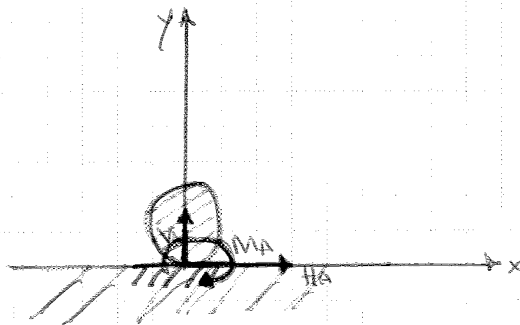
→ toglie le ruote, non può muoversi neanche lungo x

→ toglie 2 gradi di libertà

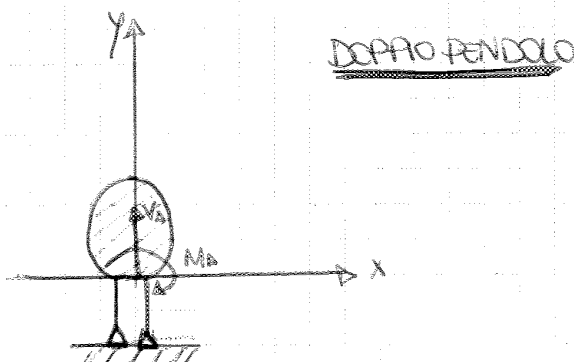
⇒ 2 forze vincolari

⇒ VINCOLO COMPOSTO

[se cerniera è interna n° di GdL tot = $2(n-1)$]
↓
n° di bracci legati a cerniera



→ INCASTRO = impedisce H e 3i movimenti



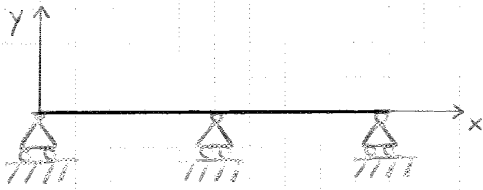
→ Il vincolo toglie 2 GdL ⇒ può muoversi solo in orizzontale

- La trave nel piano ha 3 GdL ⇒ affinché possa essere isostatica è necessario limitare $\#$ e 3 GdL (3)
- si possono usare 3 appoggi semplici, 1 cerniera fissa e 1 appoggio semplice, o un incastrato
- ⇒ però bisogna assicurarsi che siano EFFICACI

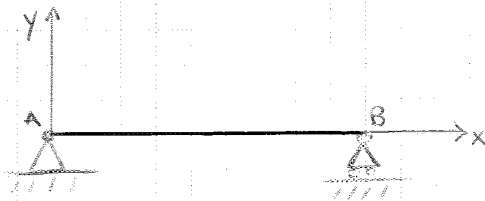
↓
devo limitare
effettivamente tutti e
tre ~~tra~~ i movimenti

Esempi

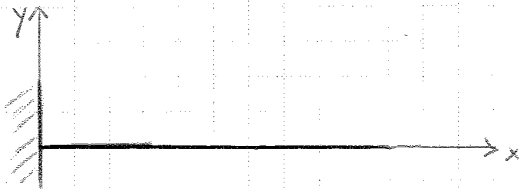
[La trave può essere rappresentata con 1 sola linea nel piano, se però i carichi vengono applicati su piani è necessario rappresentare la trave in 3D]



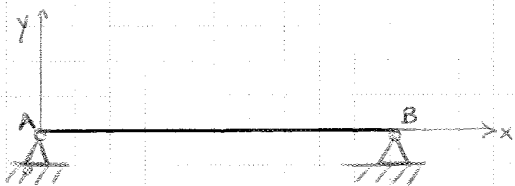
- Ho vincolato la trave con 3 CARRELLI, non può muoversi in verticale, e neanche ~~tra~~ rotare ⇒ può ancora muoversi in orizzontale ⇒ SISTEMA LABILE (vincoli NON efficaci)



- vincolo la trave con 1 CERNIERA FISSA nel punto A, e con CARRELLI nel punto B ⇒ limito $\#$ i movimenti e tolgo 3 gradi di libertà ⇒ 2 (cerniera) + 1 (carre) ⇒ SISTEMA STATICO (vincoli efficaci)



- con l'INCASTRATO tolgo 3 GdL e limito tutti i movimenti ⇒ SISTEMA STATICO (vincoli efficaci)



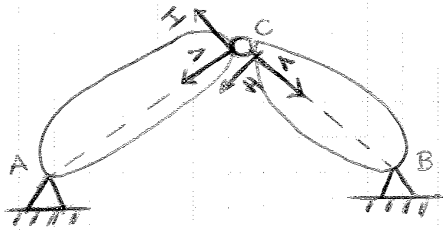
- vincolo la trave con due CERNIERE FISSE che impediscono $\#$ e tre i movimenti, ma il num. di vincoli è eccessivo perché tolgo 4 GdL ⇒ 2 (1° cerniera) + 2 (2° cerniera)

⇒ SISTEMA IPERSTATICO

(1)

VINCOLI INTERNI

→ Il più semplice è la CERNIERA INTERNA, toglie $2(r-1)$ GdL 11.03.15
 [r = bracci legati a cerniera]

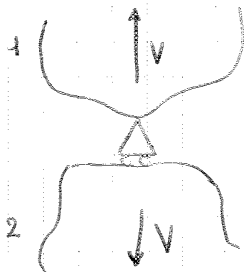


⇒ ARCO A TRE CERNIERE

→ Il vincolo nel punto A toglie due gradi di libertà, la stessa cosa per il vincolo nel punto B

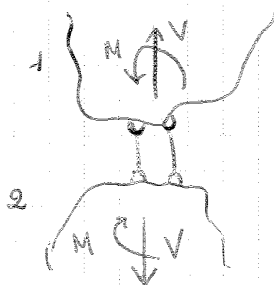
→ Nel punto C c'è il snodo che ammette ROTAZIONE RELATIVA
 → elimina 2 GdL → permette ai corpi di muoversi in simbiosi, ma di notare in modo indipendente rispetto a C
 → consente ROTAZIONE RELATIVA, ma NON TRASLAZIONE RELATIVA

→ Il CARCELLO INTERNO toglie 1 GdL



→ I due corpi possono comunque spostarsi in orizzontale e rotare

→ Il PENDOLO INTERNO toglie 2 GdL



→ i due corpi possono spostarsi in orizzontale

CALCOLO GdL

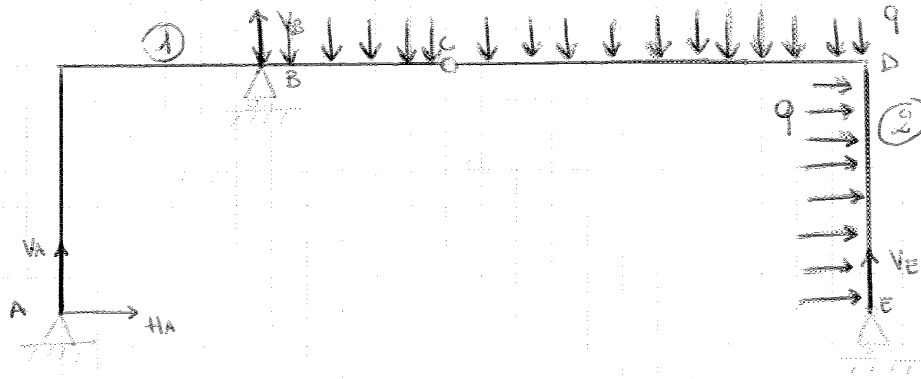
→ $G =$ grado di iperstaticità
 → $G > 0$ IPERSTATICO
 → $G = 0$ STATICO
 → $G < 0$ LABILE

$$G = 3 \cdot i + 2c_e + 2(r-1)c_i + a - m \cdot n$$

- $i = n^{\circ}$ incastri
 - $c_e = n^{\circ}$ cerniere esterne
 - $c_i = n^{\circ}$ " interne
 - $a = n^{\circ}$ carrelli
 - $m = n^{\circ}$ cu GdL del corpo (3 nel piano)
 - $n = n^{\circ}$ cu corpi
- } ⇒ il num. di eq. incognite è pari a $m \cdot n$

→ II METODO :

5



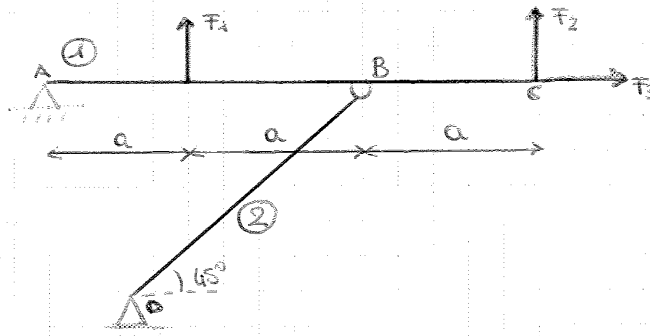
→ scrivo le 3 eq. di equilibrio:

- → $\textcircled{H_A} + qL = 0$
- ↑ $\textcircled{V_A} + \textcircled{V_B} - \textcircled{V_E} - 3qL = 0$ ⇒ si raccolte ⇒ 3 eq.
- $\textcircled{V_A}$ \curvearrowright $uV_{EL} + v_{BL} - 3qL \frac{SL}{2} - qL \frac{L}{2} = 0$

⇒ di più aggiungere l'eq. AUSILIARIA → momento nullo nel pto C

• \curvearrowright $qL \frac{L}{2} - 2qL^2 + 2V_{EL} = 0$

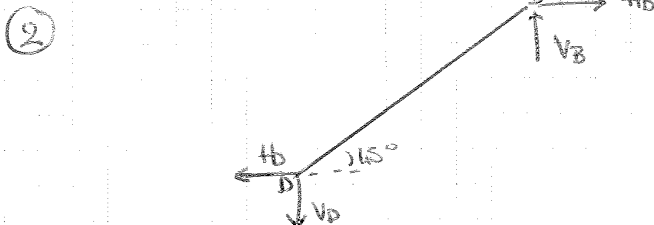
Esempio



→ Scompongo la struttura :



- → $H_A - H_B + T_3 = 0$
- ↑ $V_A - V_B + F_1 + F_2 = 0$
- \curvearrowright $-V_A 2a - F_1 a + F_2 a = 0$



- → $H_D + H_B = 0$
- ↑ $V_B - V_D = 0$
- \curvearrowright $-2aH_D + 2aV_D = 0$

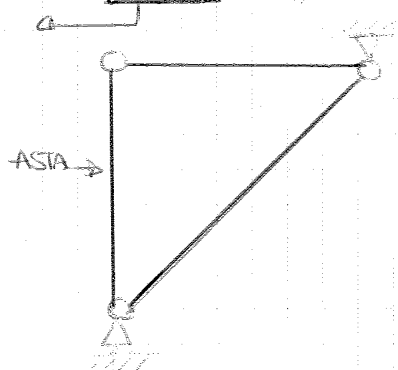
TRAVATURE RETICOLARI

Strutture reticolari iperstatiche da cerniere e caricate solo sulle cerniere

→ ASTA = modello di 1 trave collegata a struttura mediante cerniere (= nodi) e ammette solo carichi esterni solo sui nodi

Solo quelli INTERNI

possono essere solo // all'asse dell'asta



→ We applica l'eq. per G

→ $G = 2 + 1 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 0 \text{ ok}$

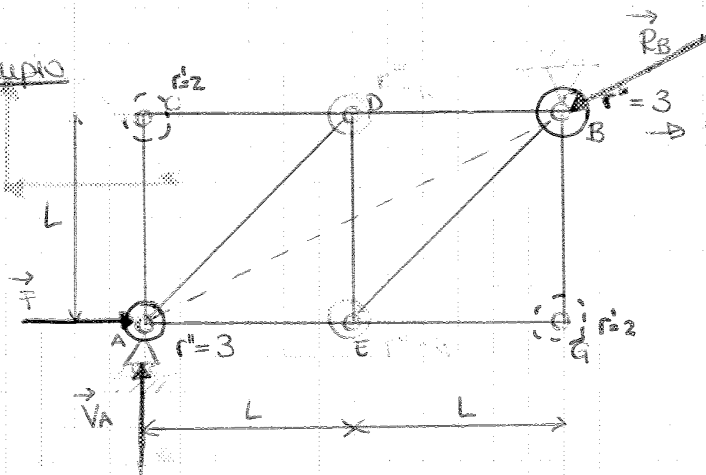
→ Le aste (se non fosse chiusa la struttura) potrebbero ruotare

ISOSTATICITÀ delle STRUTTURE RETICOLARI

$$a + 3 = 2 \cdot c_i$$

- a = n° aste
- c_i = n° cerniere interne

Esempio

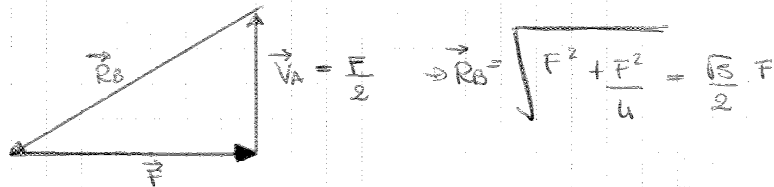


→ VERIFICHIAMO ISOSTATICITÀ:

1) $a + 3 = 2 \cdot 6 \Rightarrow 12 = 12 \text{ ok}$

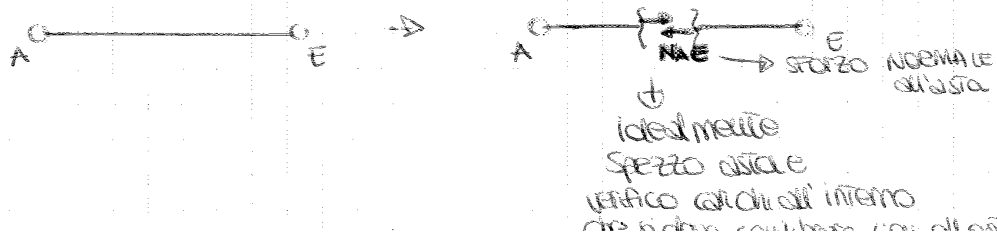
2) $G = 0 + 1 + 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 6$
 → $G = 0 \text{ ok}$

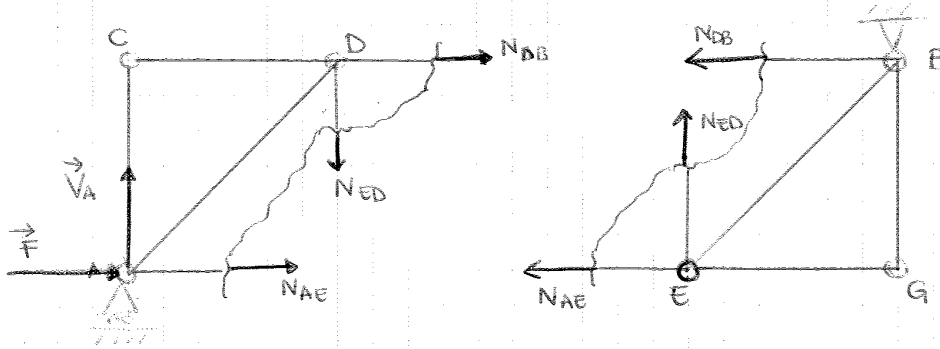
→ uso metodo grafico per trovare le reaz. vincolari



CARICHI INTERNI

Preso 1 asta viene caricata solo nella sua direzione assiale





- mi concentro su prima metà
- la struttura viene tagliata in modo che due incognite convergano in punto o solo //

⇒ $N_{DE} = \frac{F}{2}$ per equilibrio verticale con \vec{V}_A [Annullando N_{DE} rimangono N_{DB} e N_{AE} // fra di loro ⇒ se faccio eq. per traslazione ortogonale a loro direz., non così poiché in eq. ⇒ ottego 1 eq. a unica incognita, per

① ⇒ N_{AE} facendo δ) [perché le altre 2 rimangono convergono in 1 p.to, D]

② ⇒ N_{DB} facendo ϵ) [perché le altre rimangono convergono in 1 p.to, E]

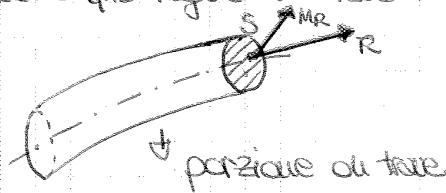
→ ① $(F + N_{AE})L = \frac{F}{2}L \Rightarrow N_{AE} = -\frac{F}{2}$ } facendo eq. di rotazione intorno al p.to in cui convergono gli altri due sforzi normali ottego 1 eq. a unica incognita

→ ② $N_{DB} \cdot L + \frac{F}{2}L = 0 \Rightarrow N_{DB} = -\frac{F}{2}$

18.03.15

SOLLECITAZIONI

Abbiamo 1 sistema meccanico in EQUILIBRIO, note solo i carichi e le reaz. vincolari
 → localmente, poi, dividiamo la trave in due
 → ci poniamo in 1 sezione S (qualunque) e sul baricentro di S dovremmo avere delle forze e dei momenti, ideali, S in modo che venga garantito l'equilibrio anche quel taglio la trave



M_R = momento risultante, che nello spazio avrà 3 componenti

R = Forza risultante, nello spazio ha 3 componenti

→ M_R, R sono STORZI INTERNI che vengono detti CARATTERISTICHE di SOLLECITAZ.

↳ nello spazio solo 6 (3x $M_R, 3x F$)

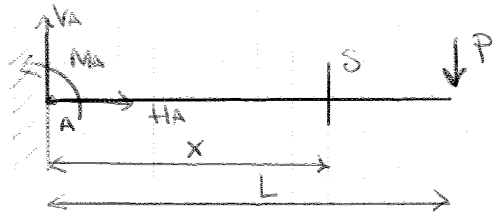
comp. di R } → 1 componente è $N =$ SFORZO NORMALE (sua direz. è \perp a S)
 → è di TENSIONE se uscente da S , di COMPRESSIONE se entrante

→ $T_y =$ SFORZO di TAGLIO , $T_z =$ SFORZO di TAGLIO
 sono \perp fra di loro

comp. di M_R } → $M_t =$ MOMENTO TORCENTE (rotaz. intorno a asse x [\perp a S])
 → $M_y, M_z =$ MOMENTI FLETTENTI (rotaz. intorno a y, z , dell'asse a S)

Esempio

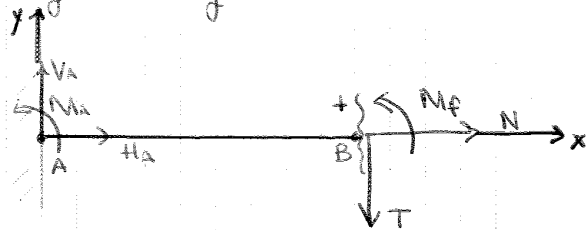
8



$\rightarrow VA = -P$
 $\rightarrow HA = 0$
 $\rightarrow MA = PL$

$\rightarrow 0 \leq x \leq L$ perché S può trovarsi a qualunque ~~distanza~~ altezza nella trave

\rightarrow mi pongo nella generica sezione S



$\bullet N \Rightarrow N + HA = 0 \rightarrow N = -HA = 0 \Rightarrow \boxed{N=0}$

$\bullet -T + VA = 0 \rightarrow T = VA = P \Rightarrow \boxed{T=P}$

$\bullet \curvearrowright B) MA + Mp - VAx = 0 \Rightarrow \boxed{Mp = Px - PL}$

$x=0 \rightarrow -PL \text{ Nm}$
 $x=L \rightarrow 0 \text{ Nm}$

\Rightarrow I 3 sforzi li posso considerare come 3 funz. di x
 \rightarrow ora vedo a disegnare i DIAGRAMMI delle 3 funz.

$\bullet \textcircled{N}$

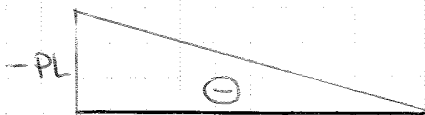


$\Rightarrow N=0$, qua coincide con trave

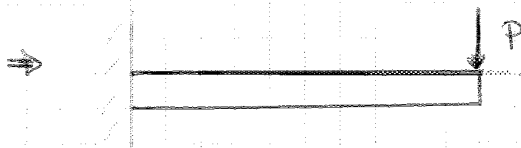
$\bullet \textcircled{T}$



$\bullet \textcircled{Mp}$



$\Rightarrow Mp = -P(L-x) \Rightarrow \geq 0$ qua le fibre tese sono sopra



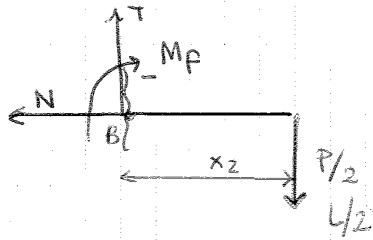
\rightarrow applico il carico si estirano in questo modo e tutte flette



\rightarrow le fibre tese sono SOPRA!

→ mi pongo su S₂ :

⑨

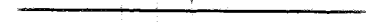


$$\begin{cases} \rightarrow & -N=0 \\ \uparrow & T - \frac{P}{2} = 0 \\ \curvearrowright & -M_P - \frac{P}{2} x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N=0 \\ T = \frac{P}{2} \\ M_P = -\frac{P}{2} x_2 \end{cases}$$

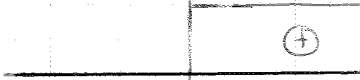
• $N(x_2)$



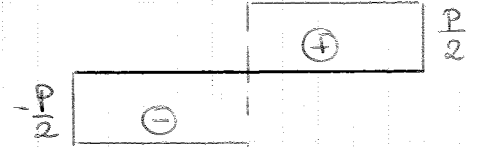
⇒ $N(x)$



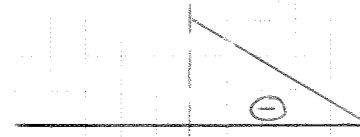
• $T(x_2)$



⇒ $T(x)$



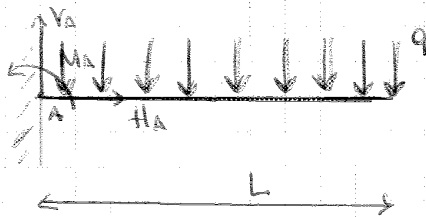
• $M_P(x_2)$



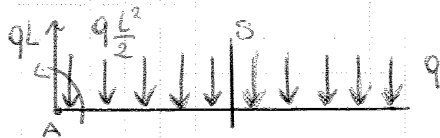
⇒ $M_P(x)$



Esempio

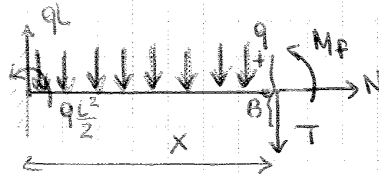


→ CARICHI EFFETTIVI



→ essendo il carico distribuito uniforme posso prendere 1 sola sezione S

→ mi pongo su S:

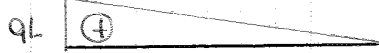


$$\begin{cases} \rightarrow & N=0 \\ \uparrow & T = qL - qx = q(L-x) \\ \curvearrowright & M_P = -q \frac{(L-x)^2}{2} \end{cases} \begin{matrix} x=0 \rightarrow qLN \\ x=L \rightarrow 0N \end{matrix}$$

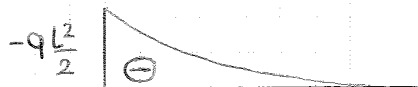
• $N(x)$



• $T(x)$



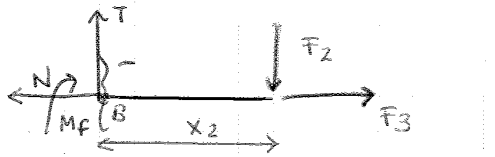
• $M_P(x)$



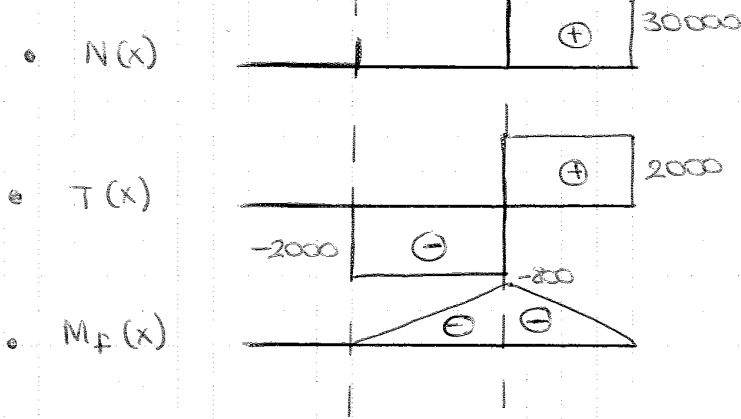
⇒ PARABOLA

10

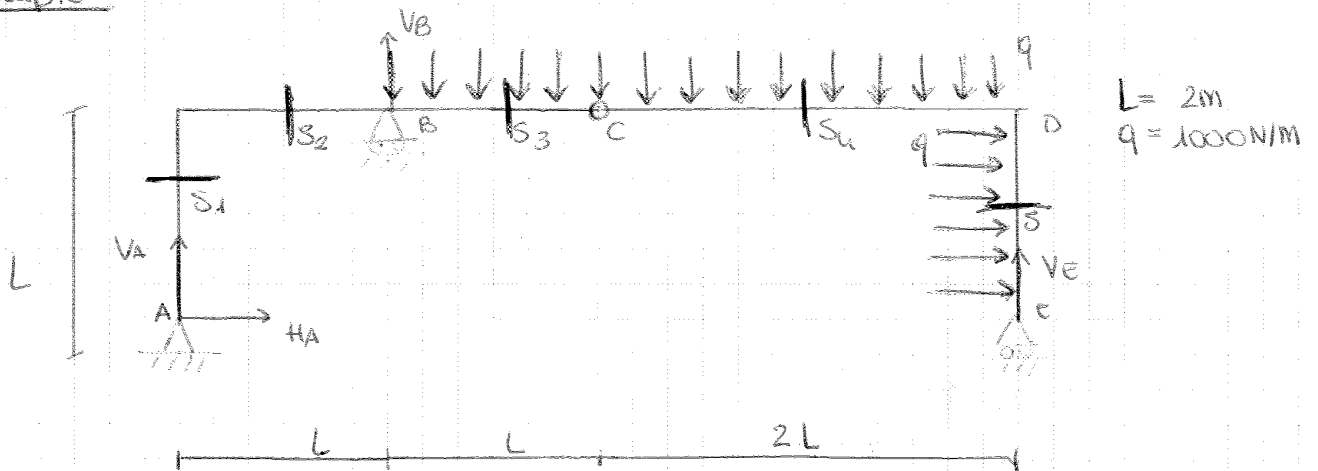
→ mi pargo su S_2 :



- → $N = 30000 \text{ N}$
- ↑ $T = 2000 \text{ N}$
- \curvearrowright_B $M_f = -F_2 x_2$
 - $x_2 = 0 \rightarrow 0 \text{ Nm}$
 - $x_2 = a \rightarrow -800 \text{ N}$



Esempio



$L = 2 \text{ m}$
 $q = 1000 \text{ N/m}$

→ REAZI VERTICALI:

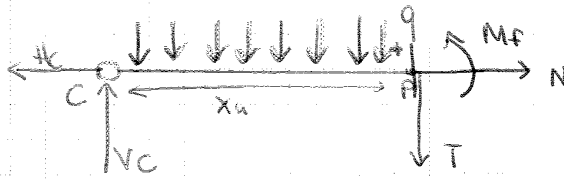
$$\begin{cases} V_A = 5500 \text{ N} \\ V_C = 2500 \text{ N} \\ V_E = 1500 \text{ N} \\ V_B = 10000 \text{ N} \\ H_A = -2000 \text{ N} \end{cases} \quad \begin{cases} H_C = 2000 \text{ N} \\ V_C = 2500 \text{ N} \end{cases}$$

→ sezioni generiche:

→ S_2 l'ho messa perché c'è cambio di altezza!

→ mi pongo su S₄:

(11)

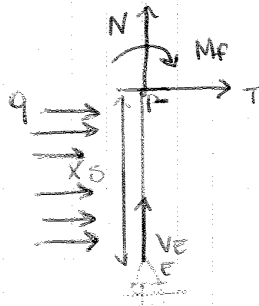


→ $0 < x_u < 2L$

$$\begin{cases} \rightarrow & N - H_C = 0 \\ \uparrow & V_C - T - qx_u = 0 \\ \curvearrowright & M_F - V_C x_u + \frac{q x_u^2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = H_C = 2000 \text{ N} \\ T = -qx_u + V_C = \begin{cases} x_u = 0, T = 2500 \text{ N} \\ x_u = 2L, T = -1500 \text{ N} \end{cases} \\ M_F = V_C x_u - \frac{q}{2} x_u^2 \rightarrow \begin{cases} x_u = 0, M_F = 0 \\ x_u = 2L, M_F = 2000 \text{ N m} \end{cases} \end{cases}$$

→ mi pongo su S₅:

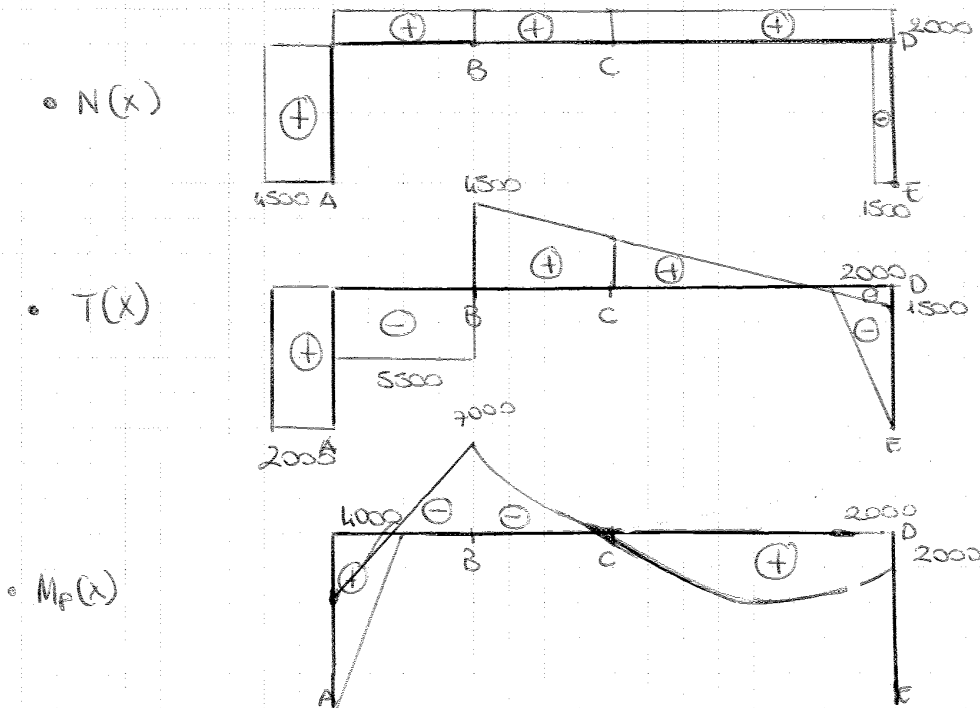


→ $0 < x_s < L$

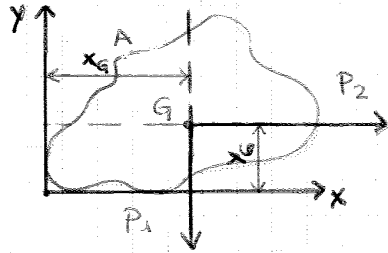
$$\begin{cases} \rightarrow & qx_s + T = 0 \\ \uparrow & N + V_E = 0 \\ \curvearrowright & -M_F + \frac{q}{2} x_s^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} T = -qx_s \\ N = -V_E = -1500 \text{ N} \\ M_F = \frac{q x_s^2}{2} \end{cases}$$

$$\downarrow \begin{cases} x_s = 0, M_F = 0 \\ x_s = L, M_F = 2000 \text{ N m} \end{cases}$$

→ DIAGRAMMI:



BARICENTRO



→ L'intersezione tra le rette d'azione di P_1 e P_2 = BARICENTRO (G)

→ la risultante delle forze peso \vec{P} passa per G

⇒ G può anche essere detto CENTRO di GRAVITÀ del corpo piano

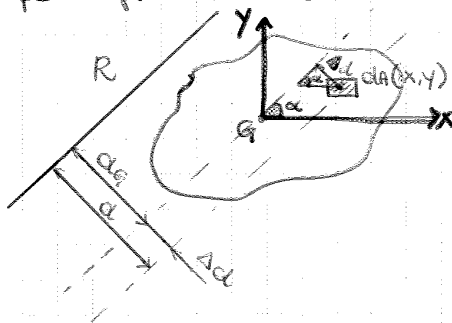
$$x_G = \frac{\int_A x dA}{A} = \frac{S_y}{A}$$

$$y_G = \frac{\int_A y dA}{A} = \frac{S_x}{A}$$

→ con S_y = MOMENTO STATICO rispetto a asse y // a P_1

→ S_x = MOMENTO STATICO rispetto a asse x // a P_2

→ potrei prendere il sistema di riferimento nel baricentro ⇒ $x_G = y_G = 0$



→ prendo la retta R di direz costante e poi faccio le //

→ scrivo S_R rispetto a R

$$S_R = \int_A d \cdot dA \quad (1)$$

$$\Rightarrow \Delta d = x \sin \alpha - y \cos \alpha$$

$$(1) \rightarrow S_R = \int_A (d_G + \Delta d) dA = \int_A d_G dA + \int_A \Delta d dA = d_G A + \int_A (x \sin \alpha - y \cos \alpha) dA =$$

$$= d_G A + \sin \alpha \int_A x dA - \cos \alpha \int_A y dA$$

perché ho riferito il baricentro

$$\Rightarrow S_R = d_G A$$

↓
distanza dal baricentro per l'area

→ momento statico rispetto a una retta qualunque (non necessario // a retta d'azione di \vec{P})

BARICENTRO per SIMMETRIA

→ Devo individuare gli assi di simmetria del corpo → l'incrocio dei due assi di simmetria mi dà il BARICENTRO

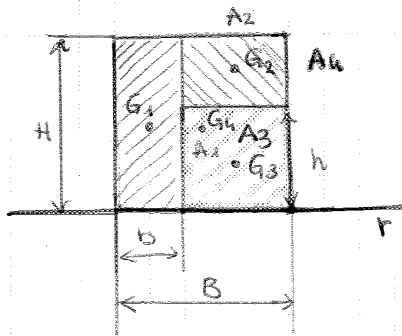
→ Se c'è un solo asse di simmetria devo del. il momento statico → ma il solo

↓
calcolato rispetto a l'asse ⊥ all'asse di simmetria

FIGURE COMPOSTE

(13)

Molto spesso le sezioni possono essere scomposte in figure geometriche semplici



→ questa sezione può essere scomposta in due rettangoli A_1 e A_2 e le proprietà dell'intera sezione sono date dalla somma delle proprietà di A_1 e A_2

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \int_A y dA = \int_{A_1} y dA_1 + \int_{A_2} y dA_2 = \\ &= A_1 dG_1 + A_2 dG_2 = bH \cdot \frac{H}{2} + (H-h)(B-b) \frac{H-h}{2} = \\ &= \frac{bH^2}{2} + (B-b) \frac{(H-h)^2}{2} \end{aligned}$$

→ oppure posso considerare la sezione come sottrazioni di due rettangoli → $A_4 - A_3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \int_A y dA = \int_{A_4} y dA_4 - \int_{A_3} y dA_3 = A_4 dG_4 - A_3 dG_3 = BH \cdot \frac{H}{2} - (B-b)h \cdot \frac{h}{2} = \\ &= \frac{BH^2}{2} - \frac{h^2(B-b)}{2} \end{aligned}$$

⇒ In generale

$$S_x = \sum_{i=1}^n A_i y_{G_i}$$

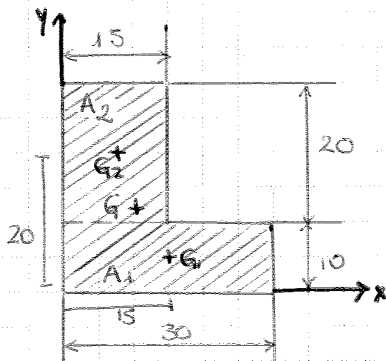
$$S_y = \sum_{i=1}^n A_i x_{G_i}$$

→ allo stesso modo le coordinate baricentriche di una generica sezione A complessa possono essere calcolate in qsti modo

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_{G_i}}{A}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{G_i}}{A}$$

Esempio



→ dividiamo la sezione in A_1 e A_2

- $A_1 = 30 \cdot 10 = 300 \text{ mm}^2$
- $A_2 = 15 \cdot 20 = 300 \text{ mm}^2$
- ⇒ $A = 300 + 300 = 600 \text{ mm}^2$

→ abbiamo determinato per simmetria i due baricentri G_1 e G_2

- $S_{x_1} = y_{G_1} \cdot A_1 = 5 \cdot 300 = 1500 \text{ mm}^3$
- $S_{y_1} = x_{G_1} \cdot A_1 = 15 \cdot 300 = 4500 \text{ mm}^3$
- $S_{x_2} = y_{G_2} \cdot A_2 = 20 \cdot 300 = 6000 \text{ mm}^3$
- $S_{y_2} = x_{G_2} \cdot A_2 = 7,5 \cdot 300 = 2250 \text{ mm}^3$

$$\Rightarrow S_x = S_{x_1} + S_{x_2} = 7500 \text{ mm}^3$$

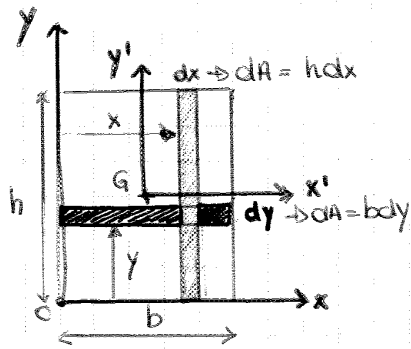
$$\Rightarrow S_y = S_{y_1} + S_{y_2} = 6750 \text{ mm}^3$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{S_y}{A} = 11,25 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow y_G = \frac{S_x}{A} = 12,5 \text{ mm}$$

(14)

Esempio



→ sezione rettangolare con riferimento non baricentrico.

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_x &= \int_A y^2 dA = \int_0^h by^2 dy = \\ &= b \int_0^h y^2 dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = b \left(\frac{h^3}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_x = \frac{bh^3}{3}} \rightarrow \text{relaz. sempre cost. nei rettangoli (ASSINON in G)}$$

$$\Rightarrow I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b hx^2 dx = b \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{hb^3}{3} \Rightarrow \boxed{I_y = \frac{hb^3}{3}} \rightarrow \text{vale per tutti i rettangoli (ASSINON in G)}$$

→ Calcolo I_{xG}, I_{yG} → momenti d'inerzia rispetto agli assi x', y' baricentrici

$$\rightarrow x_G = \frac{b}{2} \quad , \quad y_G = \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow I_{xG} = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = b \left(\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24} \right) =$$

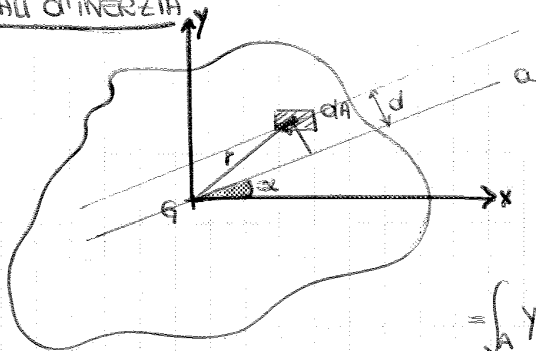
$$= \frac{bh^3}{12} \Rightarrow \boxed{I_{xG} = \frac{bh^3}{12}}$$

$$\Rightarrow I_{yG} = \int_A x^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h dx = h \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} = h \left(\frac{b^3}{24} + \frac{b^3}{24} \right) = \frac{hb^3}{12}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{yG} = \frac{hb^3}{12}}$$

$\rightarrow I_y = I_{y_1} + I_{y_2} \rightarrow$ con I_{y_1} e I_{y_2} dati dalla trasposizione del momento d'inerzia (15)
 $\Rightarrow I_{y_1} = I_{y_{G_1}} + d^2 A = \frac{hb^3}{12} + (x_{G_1} - x_G)^2 A = 26718,75 \text{ mm}^4$
 $\Rightarrow I_{y_2} = I_{y_{G_2}} + d^2 A = \frac{hb^3}{12} + (x_G - x_{G_2})^2 A = 9843,75 \text{ mm}^4$
 $\Rightarrow I_y = I_{y_1} + I_{y_2} = 36562,5 \text{ mm}^4$

MOMENTI PRINCIPALI D'INERZIA



\rightarrow considero generica retta di rotazione di + angolo α rispetto a x
 $\Rightarrow \int_A d^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA =$
 $d = y \cos \alpha - x \sin \alpha$
 $= \int_A (y^2 \cos^2 \alpha - 2yx \cos \alpha \sin \alpha + x^2 \sin^2 \alpha) dA$
 $= \int_A y^2 \cos^2 \alpha dA - \int_A 2yx \cos \alpha \sin \alpha dA + \int_A x^2 \sin^2 \alpha dA$

$= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_A xy dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA =$
 $\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $I_x \quad \quad \quad I_{xy} \quad \quad \quad I_y$

$\Rightarrow I_a = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2 I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (1)$

\rightarrow da questa relazione possiamo det. i valori di α per cui I_a è massimo e minimo

$\Rightarrow \frac{dI_a}{d\alpha} = 0 \rightarrow -(I_x - I_y) \sin 2\alpha - 2 I_{xy} \cos 2\alpha = 0$

$\Rightarrow \tan 2\alpha = -2 \frac{I_{xy}}{I_x - I_y}$

\Rightarrow gli assi rispetto ai quali il momento d'inerzia è massimo o minimo sono I fra loro per la misura della funzione \tan e vengono indicati come ASSI PRINCIPALI D'INERZIA

\rightarrow gli angoli che li individuano rispetto a un sistema cartesiano qualunque sono

$\alpha_1 = \frac{1}{2} \arctg \left(-2 \frac{I_{xy}}{I_x - I_y} \right)$

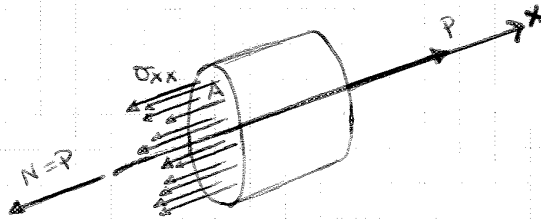
$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$

\Rightarrow i momenti d'inerzia rispetto agli assi principali si calcolano da (1) con $\alpha = \alpha_1$

SOLLECITAZIONI SEMPLICI

(16)
27.03.15

TRAZIONE



→ Se la trave è omogenea, nel caso di trazione o compressione le fibre subiscono l'identico allungamento
 ⇒ le tensioni interne sono uniformemente ripartite in tutta la sezione

→ con σ_{xx} indichiamo la TENSIONE UNITARIA → qst deve essere la stessa per tutti i pt. della sezione di area A

→ Il doppio pedice indica la direzione della tensione e la direzione del versore, normale alla sezione rispetto alla quale la tensione è calcolata

→ la tensione σ_{xx} viene calcolata

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A}$$

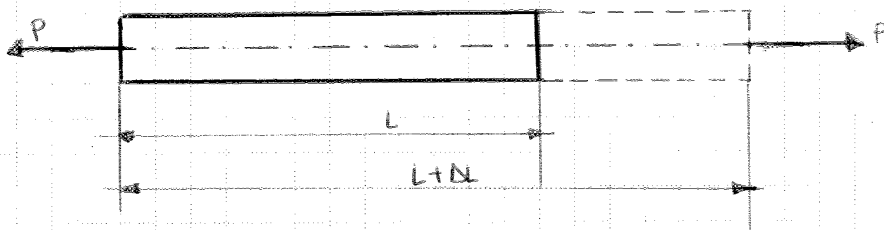
, N è il carico e A l'area della sezione rispetto alla quale σ_{xx} è misurata

→ $[\sigma] = \frac{N}{mm^2}$

→ La distribuzione delle tensioni non risulta + uniforme in presenza di VARIAZIONI DELLA GEOMETRIA e dei pt. in cui è applicato il CARICO

LEGGE di HOOKE

Le dimensioni di una trave sottoposta a trazione variano in funzione del carico P applicato



→ $\Delta L = \frac{\text{ALLUNGAMENTO ASSOLUTO della TRAVE}}$

$$\frac{\Delta L}{L} = \epsilon_{xx} = \frac{\text{ALLUNGAMENTO RELATIVO}}$$

↓
DEFORMAZIONE UNITARIA

→ quantità adimensionale

→ Per allungamenti piccoli si ha una diretta proporzionalità tra σ_{xx} e ϵ_{xx} .

$$\Rightarrow \sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} \rightarrow \text{LEGGE di HOOKE}$$

→ E = Modulo di ELASTICITÀ NORMALE (o modulo di YOUNG), è il costante fisica del materiale det. sperimentalmente

→ $[E] = N/mm^2$

→ sostituendo nella legge di Hooke otteniamo

$$\frac{N}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L = \frac{PL}{EA}$$

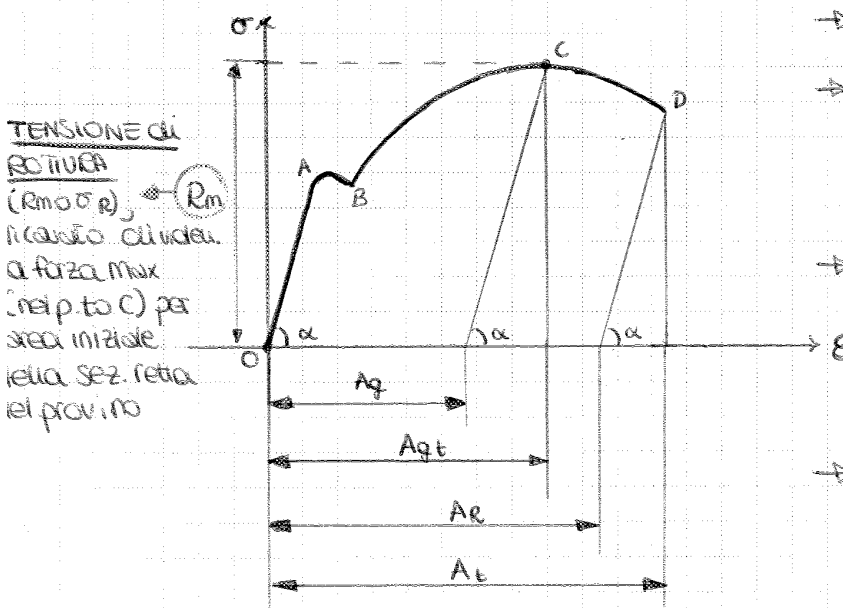
, dove $\frac{EA}{L} = \text{rigidezza ASSIALE di trave}$

PROVA DI TRAZIONE

(17)

IMMAGINE SLIDE 11 cap. 5

- Macchina di prova idraulica costituita da due strutture, 1 fissa (2) e 1 mobile (4) nelle quali sono presenti le guide alle quali vengono fissati i provini (5).
- La pompa (3) invia l'olio in pressione in 1 cilindro (4) provocando l'innalzamento del pistone (3) solidale alla struttura mobile (4) [= sale insieme a (3)]
- Per le prove di compressione viene utilizzato il provino (6) e viene sistemato tra 2 piattelli solidali, 1 alla struttura mobile e 1 alla struttura fissa.
- Per le prove di trazione si utilizzano in genere dei provini a sezione circolare t.c. il rapporto tra lunghezza utile ed diametro sia curvato
- per le prove di compressione invece si utilizzano dei provini cilindrici corti
- In seguito alla prova di trazione viene costruito il DIAGRAMMA TENSIONE-DEFORMAZIONE per poter stabilire la dipendenza tra le forze agenti sul provino e il suo allungamento



TENSIONE DI ROTTURAZIONE
 $(R_m \text{ o } \sigma_p)$ $\rightarrow R_m$
 il carico cilindrico di forza max (nel p.to C) per area iniziale nella sez. retta del provino

- Il diagramma viene diviso in 4 zone
- ZONA di ELASTICITÀ (Tratto OA): qui il materiale segue la legge di Hooke
 $\Rightarrow \sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$ (DEBITA PROPORZIONALITÀ tra tensione e deformazione)
- ZONA di SNERVAMENTO (Tratto AB): sensibile variazione della lunghezza del provino, senza però l'aumento apprezzabile del carico (nei metalli è visibile quest'area)
- ZONA di INCURVAMENTO (Tratto BC): l'allungamento del provino è ancora maggiore del aumento del carico fino al valore massimo C (questo aumento però è molto + lento che in OA)

→ L'inclinazione α del tratto OA definisce il modulo elastico E , $E = \tan \alpha$

• Allungamento relativo a rottura ($\delta\%$) (18)

L'allungamento relativo a rottura (A_r - primo diagramma) viene solitamente indicato in percentuale e rappresenta la DEFORMAZIONE PLASTICA RESIDUA a rottura.

→ qst parametro permette di indicare l'ampiezza della zona plastica del materiale e permette di distinguere tra materiali a comportamento FRAGILE e materiali a comportamento DUTILE

⇒ in genere al di sotto del 5%, il comportamento del materiale si definisce FRAGILE

[in genere il comportamento dei metalli è DUTILE, ma alcune leghe risultano "FRAGILI"]

Tensione e deformazione "ingegneristica" e "reale"

Il valore ingegneristico della tensione è definito come il carico per unità di area della sezione iniziale del provino:

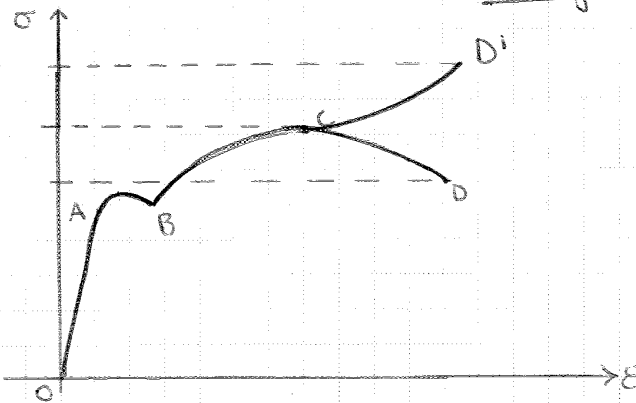
$$\rightarrow \sigma = \frac{F}{A_0}$$

Allo stesso modo il valore ingegneristico della deformazione è definito come l'allungamento per unità di lunghezza iniziale:

$$\rightarrow \epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

⇒ sono state utilizzate l'area originale della sezione retta e la lunghezza iniziale ipotizzando che qst non variassero durante la prova

→ in realtà a causa del fenomeno della strazione la sezione in corrispondenza della rottura subisce evidenti restringimenti:



→ la tensione reale (σ') è la tensione istantanea basata sull'area istantanea corrispondente in ogni istante al valore corrente del carico P ⇒ $\sigma' = \frac{P}{A}$

→ valutando la variazione di sezione il valore di σ' cresce anche dopo aver raggiunto la tensione di rottura in C e il cedimento del provino avviene al valore di tensione reale D' , anziché al valore di tensione ingegneristica D

COEFFICIENTE di SICUREZZA

La TENSIONE di SICUREZZA (σ_{AMM}) viene ottenuta dividendo il certo carico limite (σ_L) e il numero $S > 1$, $S =$ COEFFICIENTE di SICUREZZA

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{AMM} = \frac{\sigma_L}{S}}$$

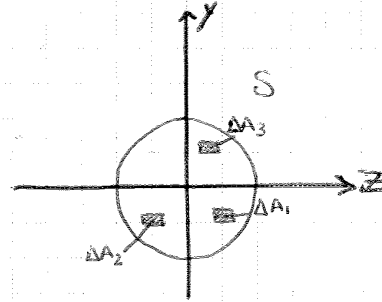
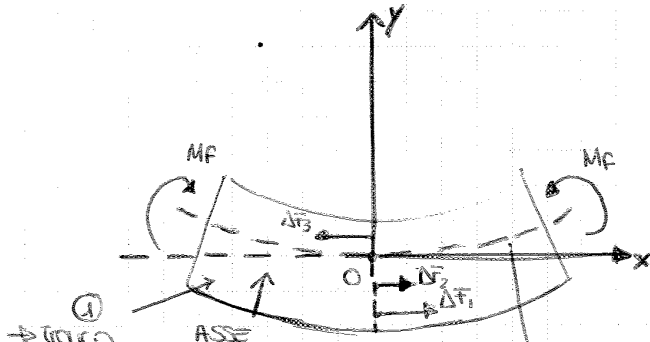
→ Per evitare che in una costruzione in servizio vi siano deformazioni residue si assume, per i materiali duttili, come σ_L la tensione di snervamento ⇒ $\sigma_{AMM} = \frac{\sigma_S}{S}$

→ Per i materiali fragili si assume come σ_L il limite di rottura ⇒ $\sigma_{AMM} = \frac{\sigma_R}{S}$

10.01.15

FLESSIONE

La FLESSIONE è un modo di caric. c. nelle sezioni rette della trave la sollecitazione si riduce al solo momento flettente, $M_f \Rightarrow$ in ogni caso si ha FLESSIONE PURA
 \rightarrow se la flessione viene però accompagnata da sollecitazioni di tipo torso si parla di FLESSIONE SEMPLICE



① \rightarrow tratto l'ore termina nel p.to max e posia sezione S

LINEA ELASTICA

- \rightarrow essendo trave a sezione costante, e $M_f = \text{cost}$
- \rightarrow coincide con l'arco di circonferenza
- \rightarrow giace su i PIANI di FLESSIONE che \equiv con piano di sollecitazione (dato M_f)

- \rightarrow Nella parte superiore della trave abbiamo i COMPRESSE (fibre si accorciano) e nella parte inferiore (zona CONVEXA) abbiamo i ALLUNGAMENTO delle fibre
- \rightarrow Vi sono però delle fibre che mantengono inalterata la loro lunghezza, qst si dispungono lungo i retta \Rightarrow ASSE NEUTRO che è l'asse di sollecitazione (asse y)
 \downarrow qui tensione è NULLA

- \rightarrow prendo la sezione S della trave e individuo delle aree infinitesime $\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3 \dots$
- \rightarrow a causa delle deformazioni si formano delle tensioni interne

$$\rightarrow \Delta F_1 = \sigma_1 \Delta A_1, \quad \Delta F_2 = \sigma_2 \Delta A_2, \quad \Delta F_3 = \sigma_3 \Delta A_3$$

\rightarrow scrivo eq. di equilibrio su ①

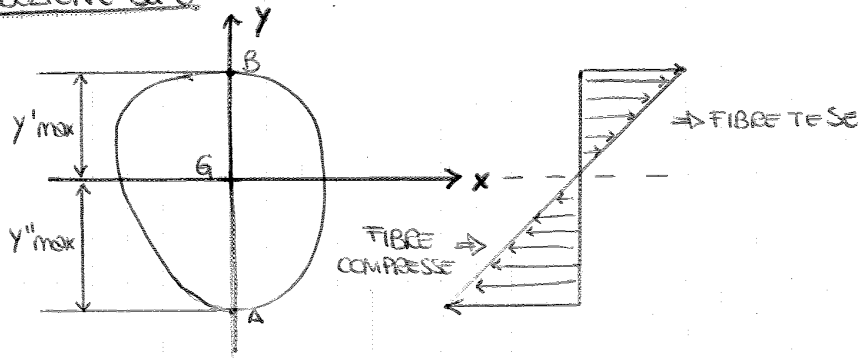
$$\bullet \rightarrow \Delta F_1 + \Delta F_2 + \dots = 0 \rightarrow \sigma_1 \Delta A_1 + \sigma_2 \Delta A_2 + \dots = 0 \quad \text{①}$$

$$\bullet \curvearrowright M = (+\Delta F_1 y_1 + \Delta F_2 y_2 + \dots) \rightarrow M = -(\sigma_1 \Delta A_1 y_1 + \sigma_2 \Delta A_2 y_2 + \dots) \quad \text{②}$$

$$\Rightarrow \text{Da ①} : \sum_{i=1}^n \sigma_i \Delta A_i = 0 \Rightarrow \boxed{\int_A \sigma dA = 0}$$

$$\Rightarrow \text{Da ②} : \sum_{i=1}^n \sigma_i \Delta A_i y_i = M \Rightarrow \boxed{-\int_A \sigma y dA = M}$$

DISTRIBUZIONE di σ



- y'_{max} (POSITIVA) \equiv distanza massima nella ZONA TESA $\Rightarrow \sigma'_{max} = \frac{M}{I} y'_{max}$
- y''_{max} (NEGATIVA) \equiv distanza massima nella ZONA COMPRESA $\Rightarrow \sigma''_{max} = \frac{M}{I} y''_{max}$

MODULI di RESISTENZA

Indichiamo con W' e W'' i MODULI di RESISTENZA a FLESSIONE come i rapporti tra il momento d'inerzia e la distanza d'asse neutro

$$\boxed{W' = \frac{I}{y'_{max}}}$$

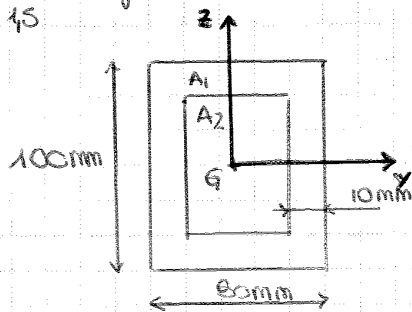
$$\boxed{W'' = \frac{I}{y''_{max}}}$$

→ + il p.to è vicino all'asse neutro e + il modulo di resistenza è grande
 → abbiamo infatti σ + piccola se la distanza y è piccola!

→ se la sezione risulta simmetrica abbiamo $y' = y''$ quindi le tensioni massime sono = e contrarie

Esempio

Sezione rettangolare con un foro rettangolare sottoposta a $M_f = 10.000 \text{ Nm}$, $\sigma_s = 240 \text{ N/mm}^2$,
 $S = 45$ $\hookrightarrow L = 1000 \text{ mm}$



$$\begin{aligned} \rightarrow I_{y_1} &= \frac{b h^3}{12} = 7.500.000 \text{ mm}^4 \\ \rightarrow I_{y_2} &= \frac{(b-20)(h-20)^3}{12} = 2.986.666,66 \text{ mm}^4 \\ \Rightarrow I_y &= I_{y_1} - I_{y_2} = 4.513.333,36 \text{ mm}^4 \\ \rightarrow \sigma_{f_{max}} &= \frac{M_f}{I_y} y_{max} = 11 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\sigma_{amm} = \frac{\sigma_s}{S} = 160 \text{ MPa}$$

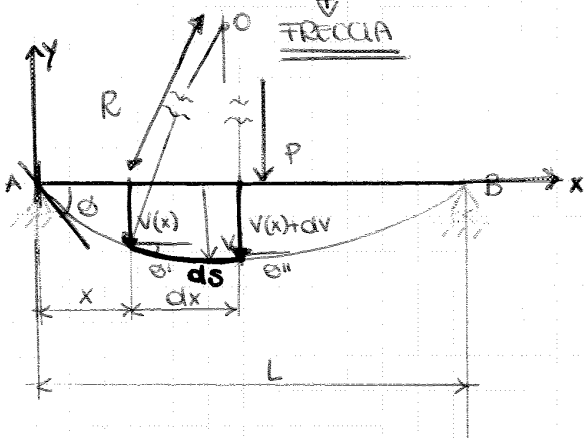
$$\sigma_{f_{max}} \leq \sigma_{amm} \Rightarrow \underline{\underline{OK}}$$

LINEA ELASTICA

21

15.06.15

IL calcolo della LINEA ELASTICA permette di valutare i p.ti della struttura dove gli spostamenti elastici raggiungono i valori massimi.



- la FRECCIA è definita come lo spostamento verticale $V(x)$ nella direzione y subito dal p.to nel quale passa dalla posizione indeformata a quella deformata.
- θ è invece l'angolo di rotazione della sezione
- si assume che l'angolo sia θ in senso ANTICLOCKWISE

→ consideriamo il primo p.to sulla deformata a distanza x dall'origine in cui la freccia è $v(x)$ e la rotazione θ' , prendiamo il secondo p.to a distanza dx dal precedente con la freccia $v(x)+dv$ e la rotazione $\theta'' = \theta' + d\theta'$

$$\rightarrow R = \text{raggio di curvatura} = \frac{ds}{d\theta'} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{d\theta'}{ds}$$

$$\rightarrow ds = \frac{dx}{\cos\theta} \approx dx$$

per piccoli spostamenti
 $\cos\theta = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{d\theta'}{dx}$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dx} = \tan\theta \approx \theta$$

→ la curvatura nel caso di piccoli spostamenti:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta'}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \uparrow \frac{M}{EI}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

⇒ equazione differenziale della linea elastica

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

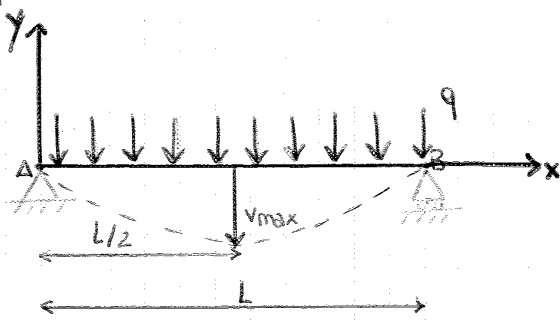
→ integrando 1 volta l'eq della linea elastica otteniamo l'equazione della rotazione θ e integrando 2 volte otteniamo l'eq della freccia $v(x)$

$$\rightarrow EI \frac{d\theta'}{dx} = EI \theta = \int_0^x M(x) dx + C_1$$

$$\rightarrow EI v(x) = \int_0^x \left[\int_0^x M(x) dx + C_1 \right] + C_2$$

⇒ C_1 e C_2 = costanti di integrazione si determinano imponendo le condiz. del vincolo

Esempio



→ L'equazione di M:

$$M(x) = \frac{1}{2} L q x - \frac{1}{2} q x^2$$

→ Linea elastica

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} L q x - \frac{1}{2} q x^2 \right)$$

→ Rotazione

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{4} L q x^2 - \frac{1}{6} q x^3 + C_1 \right)$$

→ Freccia

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{12} L q x^3 - \frac{1}{24} q x^4 + C_1 x + C_2 \right)$$

→ Det. C1 e C2

$$\begin{cases} v_A(0) = 0 \rightarrow \frac{C_2}{EI} = 0 \rightarrow C_2 = 0 \\ v_B(L) = 0 \rightarrow \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{12} L^4 q - \frac{1}{24} L^4 q + C_1 L \right) = 0 \quad \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{24} q L^4 + C_1 L \right) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{q L^4}{24 EI} + \frac{C_1 L}{EI} = 0 \rightarrow C_1 = - \frac{q L^3}{24 EI} = - \frac{q L^3}{24}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = - \frac{1}{24} q L^3 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{4} L q x^2 - \frac{1}{6} q x^3 - \frac{1}{24} q L^3 \right)$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{12} L q x^3 - \frac{1}{24} q x^4 - \frac{1}{24} q L^3 x \right)$$

→ Freccia massima

v_{max} si ha nel p.to in cui si annulla $\frac{dv(x)}{dx} = \theta(x)$

$$\rightarrow \theta(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{4} L q x^2 - \frac{1}{6} q x^3 - \frac{1}{24} q L^3 \right) = 0$$

$$\frac{6 L q x^2 - 4 q x^3 - q L^3}{24} = 0$$

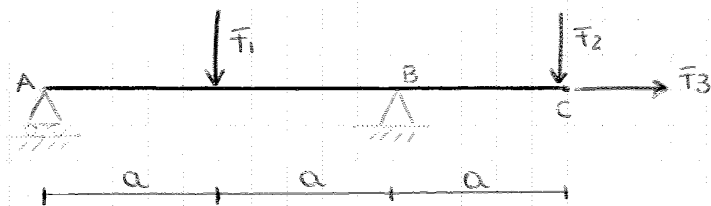
$$x = L/2 \rightarrow \text{sostituendo in } v(x) \text{ ottengo } v_{max} = - \frac{5 q L^4}{384 EI}$$

Sovrapposizione degli effetti

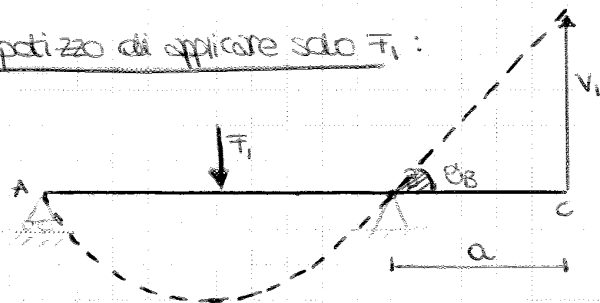
Per le strutture a singola campata è possibile applicare il metodo analitico della doppia integrazione e det. i serie di orsi Notevoli

→ ipotizzando che si tratti di piccoli spostamenti possiamo applicare i carichi separatamente su 1 struttura, e sommare i contributi

Esempio



→ Ipotizzo di applicare solo F1:



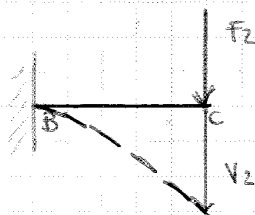
→ Il tratto AB si comporta come 1 trave inflessa a singola campata caricata in mezzana
 → Il tratto BC invece ruota rigidamente col angolo theta_B

⇒ $v_1 = \theta_B \cdot a$, $\theta_B = \frac{F_1 (2a)^2}{16EI}$ perché AB trave inflessa a singola campata caricata in mezzana

⇒ $v_1 = \frac{F_1 (2a)^2}{16EI} \cdot a = 2,07 \text{ mm}$

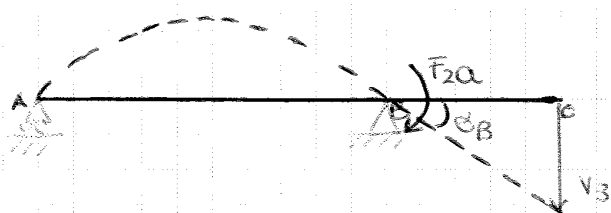
→ Ipotizzo di applicare solo F2:

Prima metto in incastro in B, poi per equilibrare la struttura applico 1 momento in B



→ Trave a sbalzo

⇒ $v_2 = \frac{F_2 a^3}{3EI} = -2,76 \text{ mm}$



→ Il tratto AB è 1 trave appoggiata con momento applicato all'estremità in cui $\theta_B = \frac{C(2a)}{3EI}$

→ Il tratto BC è 1 trave senza che ruota rigidamente di theta_B

⇒ $v_3 = \theta_B \cdot a = \frac{C(2a)}{3EI} \cdot a = -5,52 \text{ mm}$

LEGGE di HOOKE

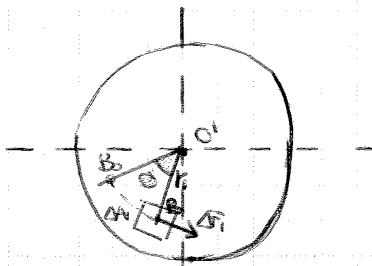
la tensione σ è legata allo scostamento γ

$\Rightarrow \sigma = G \gamma$, $G = \frac{\text{MODULO DI ELASTICITÀ TANGENZIALE}}$

\rightarrow nel caso di materiali omogenei e isotropi G è legato ad E e al coefficiente di Poisson

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

TENSIONE σ



\rightarrow in B c'è la sollecitazione unitaria τ
 \rightarrow per $\Delta A_1 \rightarrow \Delta F_1 = \tau \Delta A_1$

\rightarrow lo stesso vale anche per le altre aree infinitesime

\rightarrow se facciamo l'equilibrio alla rotazione:

$\tau_1 \Delta A_1 r_1 + \tau_2 \Delta A_2 r_2 + \dots = M_t$

$\Rightarrow \int_A \tau \cdot r \, dA = M_t$

\rightarrow sostituendo ① in ② otteniamo $\tau = G r \frac{\theta}{L}$ da cui sostituendo in ③:

$\frac{G \theta}{L} \int_A r^2 \, dA = M_t \rightarrow \frac{G \theta}{L} J_p = M_t$

\Downarrow
 J_p

$\Rightarrow \theta = \frac{M_t L}{G J_p}$ \Rightarrow ANGOLO di TORSIONE

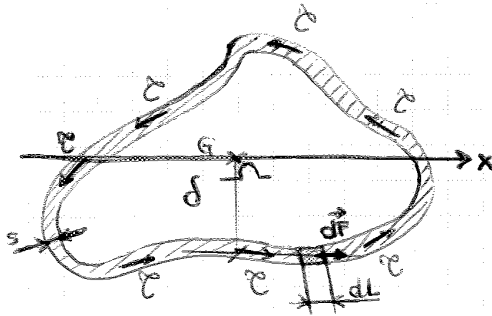
\rightarrow angolo di torsione per pezzo di trave unitario $\theta_u = \frac{M_t}{G J_p} \Rightarrow$ ANGOLO di TORSIONE UNITARIO

\rightarrow sostituiamo la ② in ① si ottiene

$\Rightarrow \tau = \frac{M_t r}{J_p}$

- \rightarrow essenzia la τ direttamente proporzionale a r
- \rightarrow + il pto è distante dal baricentro + la τ è grande!
- \rightarrow + la sez è grande, + J_p è grande \Rightarrow + la τ è piccola
- \rightarrow i pti + sollecitati si trovano su circonferenze esterna!

TORSIONE IN TRAVI CON SEZIONE ANULARE di PICCOLO SPESORE



→ è una struttura alleggerita con ρ che scende in t l'angolo nella linea mediana dello spessore s che può essere COSTANTE o VARIABILE

→ C viene ipotizzata circa COSTANTE

→ considero un tratto di lunghezza infinitesimo dL su cui agisce una forza dF

$$\Rightarrow dF = \frac{C s dL}{\rho dA}$$

→ il momento di dF rispetto all'asse $x \Rightarrow dM_T = dF \delta = \frac{C s dL \delta}{\rho dA} = 2 C s d\omega$

$$\Rightarrow M_T = \int dM_T = \int 2 C s d\omega = 2 C s \int d\omega = 2 C s \omega$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{M_T}{2 s \omega}}$$

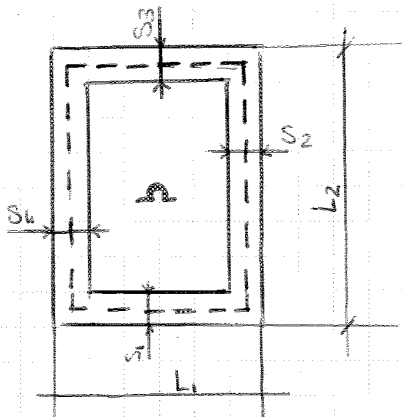
$$\boxed{\theta_u = \frac{M_T}{4 G \omega^2} \int_L \frac{1}{s} dL}$$

• Spessore costante a tratti

$$\theta_u = \frac{M_T}{4 G \omega^2} \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{s_i}$$

C è data dalla relazione precedente ma naturalmente variata al variare di s

Esempio



$$\rightarrow \omega = \left(L_1 - \frac{s_2}{2} - \frac{s_4}{2} \right) \left(L_2 - \frac{s_1}{2} - \frac{s_3}{2} \right)$$

$$\rightarrow C_1 = \frac{M_T}{2 \omega s_1}$$

$$C_2 = \frac{M_T}{2 \omega s_2}$$

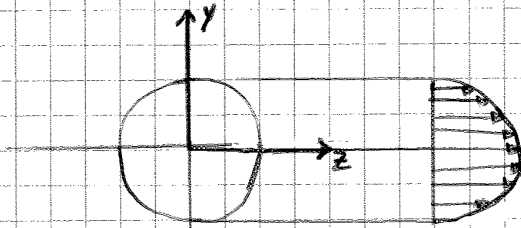
$$C_3 = \frac{M_T}{2 \omega s_3}$$

$$C_4 = \frac{M_T}{2 \omega s_4}$$

$$\rightarrow \theta_u = \frac{M_T}{4 G \omega^2} \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{s_i} =$$

$$= \frac{M_T}{4 G \omega^2} \left(\frac{L_1}{s_1} + \frac{L_2}{s_2} + \frac{L_3}{s_3} + \frac{L_4}{s_4} \right)$$

SEZIONE CIRCOLE



$\Rightarrow \tau = \frac{T S}{J_z}$

$\Rightarrow \ln y' = 0$

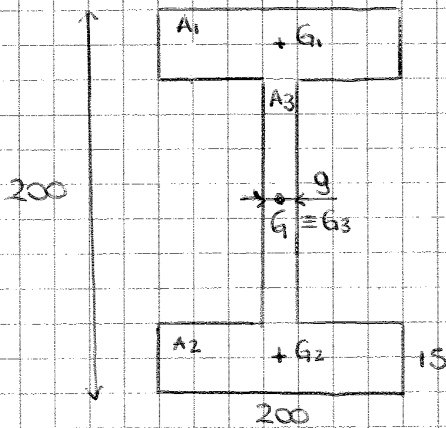
$\Rightarrow S = \frac{2}{3} r^3$

$\Rightarrow J_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$

$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \frac{T}{A} = \frac{4}{3} \tau_m$

→ Nel caso di sezione circolare le τ seguono l'andamento di una semicirconferenza

Esempio



• $T = 100 \text{ kN}$

→ Area totale:

$A_{tot} = A_1 + A_2 + A_3 = 2(15 \cdot 200) + 9 \cdot 170 = 7530 \text{ mm}^2$

$\Rightarrow \tau_m = \frac{T}{A} = \frac{100 \text{ k}}{7530} = 13,3 \text{ MPa}$

→ Momento d'inerzia

$- J_{1z} = J_{1zG_1} + (y_{G_1} - y_G)^2 A_1 = \frac{200 \cdot 15^3}{12} + (92,5 - 0)^2 \cdot A_1 = 25 \cdot 725 \cdot 000 \text{ mm}^4$

$- J_{2z} = J_{2zG_2} + (y_{G_2} - y_G)^2 A_2 = \frac{200 \cdot 15^3}{12} + 92,5^2 \cdot A_2 = 25 \cdot 725 \cdot 000 \text{ mm}^4$

$- J_{3z} = \frac{9 \cdot 170^3}{12} = 3686 \cdot 750 \text{ mm}^4$

$\Rightarrow J_z = 55 \cdot 136 \cdot 750 \text{ mm}^4$

→ Momento statico

$S_1 = A_1 \cdot y_1 = 92,5 \cdot A_1 = 277 \cdot 500 \text{ mm}^3$

$S(y_G) = A_1 S_1 + \frac{A_3}{2} \cdot \frac{170}{2} = 200 \cdot 15 \cdot 92,5 + 85 \cdot 9 \cdot \frac{85}{2} = 3100 \cdot 2,5 \text{ mm}^3$

→ momento calcolato ipotizzando di porci sul baricentro →

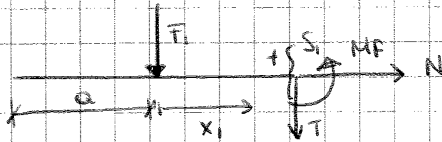


(2F)

● Reazioni vincolari

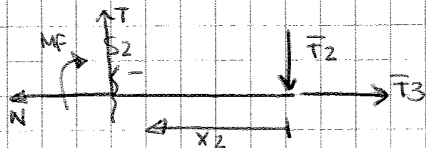
$$\begin{cases} \rightarrow & H_B = -\bar{F}_3 = -30'000 \text{ N} \\ \uparrow & V_A + V_B = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \\ \curvearrowleft & +V_B 2a - \bar{F}_1 a - \bar{F}_2 3a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_B = -30'000 \text{ N} \\ V_A = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 - V_B = 0 \text{ N} \\ V_B = +\frac{3\bar{F}_2}{2} + \frac{\bar{F}_1}{2} = 4000 \text{ N} \end{cases}$$

● Caratteristiche di sollecitazione



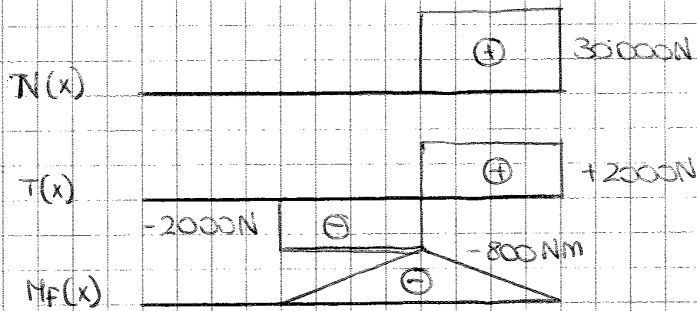
$0 < x_1 < a$

$$\begin{cases} \rightarrow & N = 0 \\ \uparrow & T = -\bar{F}_1 = -2000 \text{ N} \\ \curvearrowleft & M_F = -\bar{F}_1(x_1) = \begin{cases} x_1=0 & 0 \text{ Nm} \\ x_1=a & -\bar{F}_1 a = -800 \text{ Nm} \end{cases} \end{cases}$$



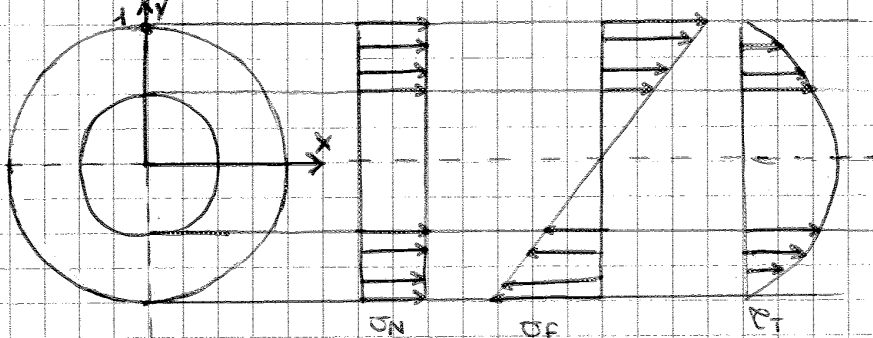
$0 < x_2 < a$

$$\begin{cases} \rightarrow & N = \bar{F}_3 = 30'000 \text{ N} \\ \uparrow & T = \bar{F}_2 = 2000 \text{ N} \\ \curvearrowleft & M_F = -\bar{F}_2 x_2 = \begin{cases} x_2=0 & 0 \text{ Nm} \\ x_2=a & -\bar{F}_2 a = -800 \text{ Nm} \end{cases} \end{cases}$$



⇒ la sezione > sollecitata è la sezione B con
 $T = 2000 \text{ N}$
 $N = 30'000 \text{ N}$
 $M_f = +800 \text{ Nm} = 800'000 \text{ Nmm}$

● Tensioni interne



$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = 1256 \\ J_z &= \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \\ &= \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = 26690 \end{aligned}$$

⇒ il p.to 1 è il p.to + sollecitato

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{30000}{1256} = 24 \text{ MPa}$$

$$\sigma_T = \frac{T \cdot S}{b J_z} = 2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{f, \text{max}} = \frac{M_f}{J_z} \cdot \frac{D}{2} = 7.5 \text{ MPa}$$

⇒ In 1 ⇒ $\sigma_{xx} = \sigma_N + \sigma_{f, \text{max}} = 99 \text{ MPa}$
 ⇒ $\sigma = 0 \text{ MPa}$

⇒ $\sigma_{\text{amm}} = \frac{\sigma_s}{3} = 350 \text{ MPa}$
 ⇒ $\sigma_{xx} < \sigma_{\text{amm}} \Rightarrow \text{OK!}$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

↑
TENSORE
= rappresenta qui
il p.to e scelerato

↑
orientaz della
superficie

TENSORE DELLE TENSIONI

In letteratura viene indicato con σ e non con t

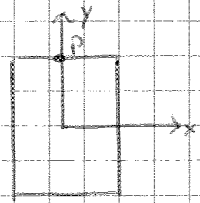
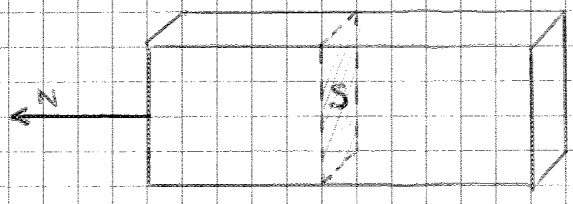
$$\Rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

→ in termini ingegneristici

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

⇒ sulla diagonale abbiamo ure e proprie tensioni
→ grad i pedici sono ≠ abbiamo dei tagli

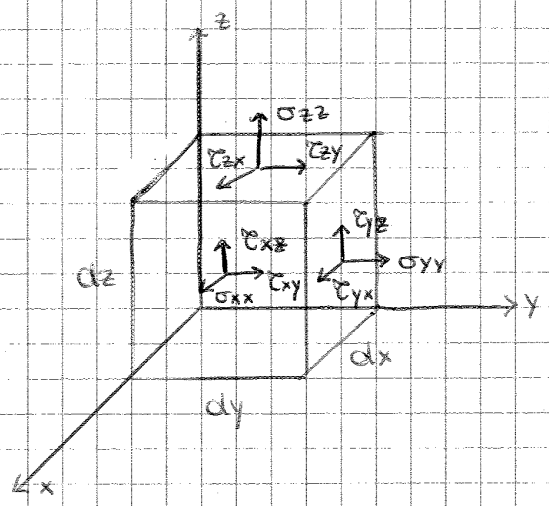
ESEMPIO



→ su P ⇒ $\sigma_{xx} = \frac{N}{S}$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• Tensore per i cuboelementi



$$t_x = \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z$$

$$t_y = \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{zy}n_z$$

$$t_z = \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z$$

→ Da ① $([\sigma] - \sigma_p) \{n\} = 0$

$\boxed{\det [[\sigma] - \sigma_p] = 0}$ → da qui ricavare i 3 autovalori $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

→ Dati i 3 autovalori determino i tre AUTOLETTRICI (= DIREZZ. PRINCIPALI) n_1, n_2, n_3

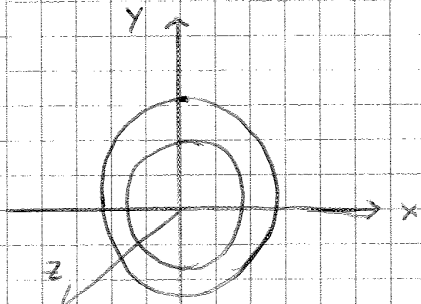
• $([\sigma] - \sigma_1) \{n_1\} = 0$

• $([\sigma] - \sigma_2) \{n_2\} = 0$

• $([\sigma] - \sigma_3) \{n_3\} = 0$

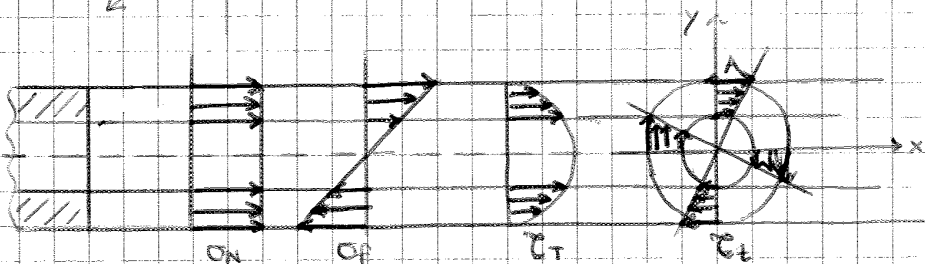
Esempio

Troie a sezione circolare cava



$D = 35 \text{ mm}$
 $d = 28 \text{ mm}$

- $M_f = 180 \text{ Nm}$
- $M_t = 120 \text{ Nm}$
- $N = 25000 \text{ N}$
- $T = 5000 \text{ N}$



→ $A = \pi (D^2 - d^2) = 346,36 \text{ mm}^2$

→ $J_z = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64} = 43489,9 \text{ mm}^4$

→ $J_p = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32} = 86979,8 \text{ mm}^4$

→ $\sigma_N = \frac{N}{A} = 72 \text{ MPa}$

→ $\sigma_f = \frac{M_f D}{J_z} = 73 \text{ MPa}$

→ $\tau_t = \frac{M_t D}{J_p} = 24 \text{ MPa}$

→ $\tau_t = \frac{M_t}{J_p} \frac{D}{2}$

⇒ A è il pto. sollecitato

→ $\sigma_{zz} = \sigma_N + \sigma_f = 145 \text{ MPa}$

→ $\tau_{xz} = \tau_t = 24 \text{ MPa}$

30

→ per det. n_1, n_2, n_3 dico ridotte per 3 volte

$$([\sigma] - [\sigma_p]) \{n\} = 0$$

$$\Rightarrow ([\sigma] - \sigma) \{n_i\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -30 & 0 & 30 \\ 0 & -30 & 0 \\ 30 & 0 & -30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -30n_x + 30n_z = 0 \\ -30n_y = 0 \\ 30n_x - 30n_z = 0 \end{cases} \begin{cases} n_x = n_z \\ n_y = 0 \\ n_x = n_z \end{cases} \quad n_x + n_z = \cos 60^\circ$$

INVARIANTI

Il tensore delle tensioni ha 3 invarianti:

$$I = \text{tr}([\sigma])$$

$$II = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

$$III = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{xz}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2$$

TENSORE SFERICO O IDROSTATICO

Dato il tensore $[\sigma]$ si può determinare la tensione media

$$\sigma_m = \frac{I}{3} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$$

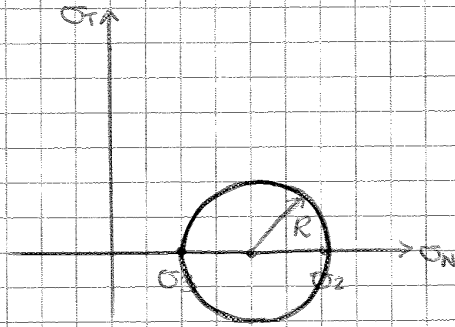
Da cui posso definire il tensore sferico

$$[\sigma_s] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$$

→ ipotizziamo $[\sigma] = [\sigma_s] + [\sigma_d] \Rightarrow [\sigma_d] = [\sigma] - [\sigma_s] =$ TENSORE DEVIATORICO O DI DISTORSIONE

$$[\sigma_d] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix}$$

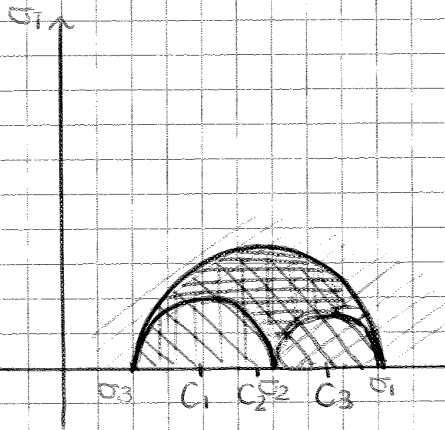
Dalla $\textcircled{1}$ $\sigma_T^2 + \sigma_N^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)\sigma_N + \sigma_2\sigma_3 \geq 0 \Rightarrow$ Eq. di CIRCONFERENZA $\textcircled{31}$



$$C = \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} ; 0 \right)$$

$$R = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

→ Se mettiamo insieme le 3 disuguaglianze $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$



→ Dalla prima ricav la circonferenza che comprende σ_3 e σ_1
 → zona interessata ESTERNA alla circonferenza

→ Dalla seconda ricav la circonferenza che comprende σ_1 e σ_2
 → zona interessata INTERNA

→ Dalla terza circonferenza che comprende σ_1 e σ_3
 → zona interessata ESTERNA

→ Tutte le possibili coppie σ_N e σ_T che potrebbe lo definire lo stato di tensione si trova nella zona in cui si intersecano le disuguaglianze

$$\rightarrow C_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \quad R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$\rightarrow C_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

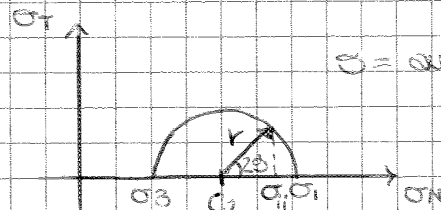
$$\rightarrow C_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

→ se in * impaigo $n_2 = 0 \Rightarrow$ immagino che n_2 coincida con l'asse del sistema di riferimento iniziale → faccio ruotare il sistema di riferimento rispetto ad un fisso nodo

$$\Rightarrow (\sigma_N - \sigma_3)(\sigma_N - \sigma_1) + \sigma_T^2 = 0$$

$$\sigma_N = \frac{(\sigma_N - \sigma_3)\sigma_N + \sigma_T^2}{(\sigma_N - \sigma_3)} \rightarrow \text{sostituendo in * ottengo}$$

$$n_2^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_3)^2}{(\sigma_N - \sigma_3)^2 + \sigma_T^2} = \cos^2 \theta$$



$\theta =$ angolo di rotaz. degli assi principali

$$\det \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_p & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & -\sigma_p & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & -\sigma_p \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\sigma_p (-\sigma_p (\sigma_{xx} - \sigma_p) - \tau_{xz}^2) = 0$$

$$\sigma_p = 0$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma_{xx}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_{xx}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = \frac{\sigma_{xx}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \end{cases}$$

• Travi sollecitate da forze M_f e M_t

$$|\sigma_1 - \sigma_3| \propto \sqrt{M_f^2 + M_t^2} \Rightarrow |\sigma_1 - \sigma_3| = k \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$$

→ se ho solo M_f e M_t solo:

$$\sigma_p = \frac{M_f D}{J_z 2} = \frac{32 M_f D}{2 \pi D^4} = \frac{16 M_f}{\pi D^3} = \sigma_{xx}$$

$$\Rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_t = \frac{M_t D}{J_p 2} = \frac{16 M_t D}{2 \pi D^4} = \frac{8 M_t}{\pi D^3} = \tau_{xz}$$

→ abbiamo mostrato prima che dato il tensore $[\sigma]$ di qst tipo

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \quad \text{e} \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_{xx}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

$$\Rightarrow |\sigma_1 - \sigma_3| = 2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 2 \sqrt{\left(\frac{16 M_f}{\pi D^3}\right)^2 + \left(\frac{8 M_t}{\pi D^3}\right)^2} = 2 \sqrt{\left(\frac{16}{\pi D^3}\right)^2 (M_f^2 + M_t^2)}$$

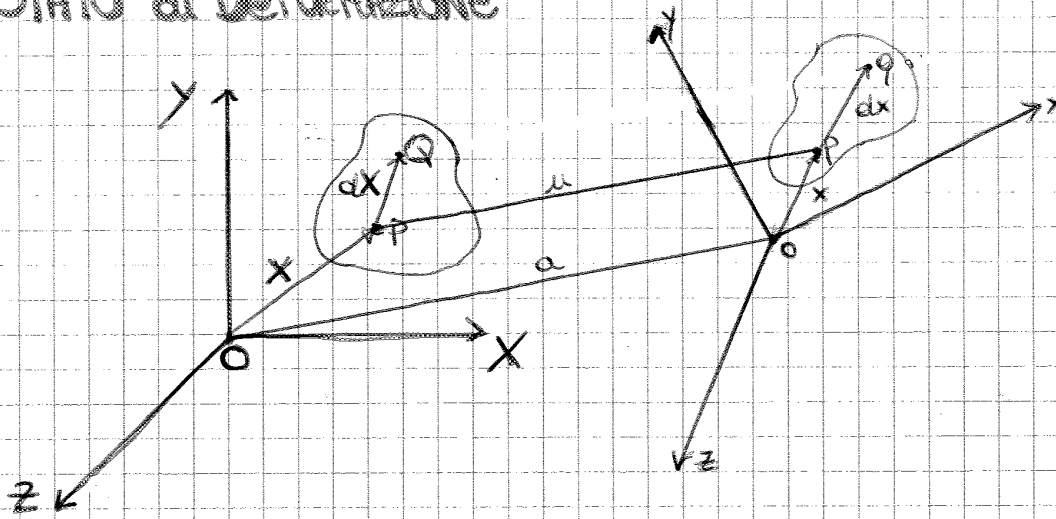
$$\Rightarrow |\sigma_1 - \sigma_3| = \frac{32}{\pi D^3} \sqrt{M_f^2 + M_t^2} \Rightarrow \underline{\underline{OC}}$$

⇒ lo stato di tensione piano ($\sigma_p = 0$) si può verificare nelle travi, o nelle ASTRE → strutture di dimensioni molto grandi, ma spessore molto piccolo

↳ abbiamo 2 tensioni normali (σ) e qualche tensione di taglio (τ), ma comunque rimane i facce libere in cui può essere individuata tensione principale

⇒ se tutte le tensioni principali sono \neq da zero → STATO DI TENSIONE TRASSALE

STATO di DEFORMAZIONE



→ nella configurazione indeformata P è definito da $\{X\}^T = \{X \ Y \ Z\}$,
 in quella deformata p è definito da $\{x\}^T = \{x \ y \ z\}$

→ Lo spostamento $\vec{u} = (\overline{p-o}) - (\overline{P-O}) + (\overline{O-O}) \Rightarrow \{u\} = \{x\} - \{X\} + \{a\}$

⇒ se i sistemi di riferimento hanno la stessa origine $\Rightarrow \{a\} = 0$

SPOSTAMENTO LANGRANGIANO

Il metodo Lagrangiano prevede di seguire uno stesso pto nel tempo partendo da 1 configurazione indeformata

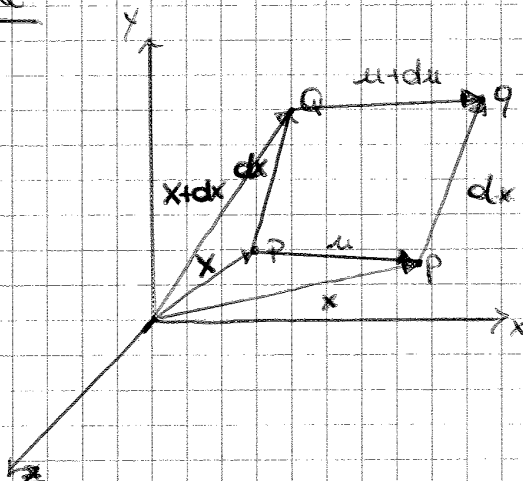
⇒ qnd descriv. la posiz. di P in funzione del tempo $\Rightarrow \boxed{\{x\} = f(\{X\}, t)}$
 e della posiz. iniziale

SPOSTAMENTO EULERIANO

Il metodo Euleriano consiste nel seguire \neq pti materiali che passano per 1 det. posiz. spaziale nel tempo

⇒ $\boxed{\{X\} = g(\{x\}, t)}$

DEFORMAZIONE



→ $P \in \Omega$, 2 pti a distanza infinitesima dx , a seguito della distorsione i pti si spostano in peg. distanti tra loro dx

⇒ La deformazione si può verificare in due modi:
 - CAMBIAMENTO DI VOLUME (o DILATAZIONE)
 - CAMBIAMENTO DI FORMA (o DISTORSIONE)

SCORRIMENTO ANGOLARE

La deformazione implica anche l'variazione degli angoli formati dai segmenti
 → vi è la deformazione della quantità γ

$$\gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} dx}{dx} + \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

TENSORE delle DEFORMAZIONI

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & E_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & E_{zz} \end{bmatrix}$$

→ È una matrice SIMMETRICA

→ ammette delle direzioni principali rispetto alle quali risulteranno non nulle solo le deformazioni sulla diagonale

→ per calcolare le deformazioni principali bisogna risolvere

$$\det \begin{bmatrix} E_{xx} - \lambda & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & E_{yy} - \lambda & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & E_{zz} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

→ I° INVARIANTE

$$I = E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}$$

→ DILATAZIONE CUBICA

⇒ da quest si deduce che per i materiali isotropi valgono le seguenti relazioni

$$\boxed{\epsilon_{ii} = \frac{1}{E} [\sigma_{ii} - \nu(\sigma_{jj} + \sigma_{kk})]} \quad (1)$$

$$\boxed{\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}}$$

DEFORMAZIONE PIANA

Se ho deformazione piana con asse z ⊥ al piano

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0}$$

da cui
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}$$

Se qst viene sostituita in (1) risulta $\epsilon_{zz} = 0$ come deve essere

STATO DI TENSIONE PIANA

Se prendo l'asse z ⊥ al piano ⇒ $\sigma_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}$$

Esempio

- Stato di tensione piano ⇒ $\sigma_{zz} = 0 = \tau_{yz} = \tau_{xz}$
- $I = 200 \text{ MPa}$ e $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$
- $\tau_{xy} = 100 \text{ MPa}$
- $E = 210.000 \text{ MPa}$
- $\nu = 0,3$
- $[E]$?

$$\rightarrow I = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \underbrace{\sigma_{zz}}_{=0} = 200 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 100 \text{ MPa} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 80769,23$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy})] = 3,33 \times 10^{-4} \text{ mm} \quad \gamma_{xz} = 0 \text{ mm}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx})] = 3,33 \times 10^{-4} \text{ mm} \quad \gamma_{yz} = 0 \text{ mm}$$

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -2,86 \times 10^{-4} \text{ mm}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 1,24 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} 3,33 \times 10^{-4} & 6,19 \times 10^{-4} & 0 \\ 6,19 \times 10^{-4} & 3,33 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & -2,86 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

→ per l'ipotesi (u) le eq. indefinite di equilibrio alle derivate parziali diventano:

(36)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \phi_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \phi_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \phi_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0$$

CRITERIO di TRESCA (MATERIALI DUTILI)

Il cedimento di un materiale duttile avviene quando la massima tensione tangenziale raggiunge e supera la tensione tangenziale limite di rottura.

$\Rightarrow \sigma_{eq} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) \geq \frac{\sigma_s}{S} \Rightarrow$ si ha cedimento

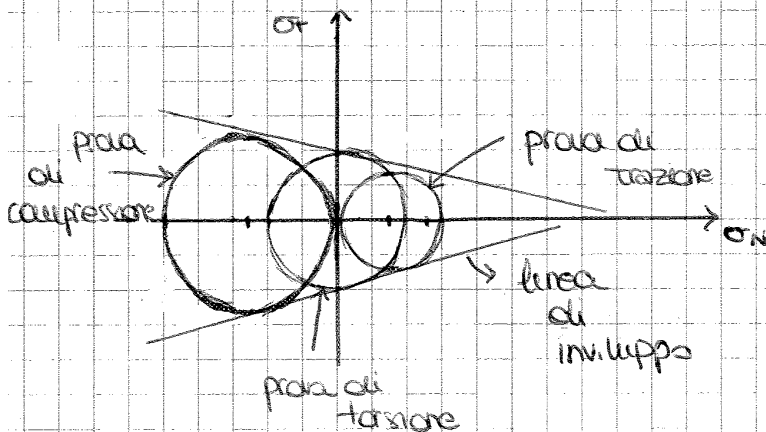
CRITERIO di VON MISES (MATERIALI DUTILI) (vedere dim SLIDE)

Il cedimento di un materiale duttile avviene quando l'energia di distorsione raggiunge e supera l'energia di distorsione che ha portato a cedimento il provino.

\Rightarrow si ha cedimento se $\sigma_{eq} \geq \sigma_r / S$

con $\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$

CRITERIO di MOHR (MATERIALI DUTILI)



Il cedimento di una struttura sollecitata da uno stato di tensione piana avviene se il più grande dei cerchi di Mohr associato allo stato di tensione nel pto. è tangente o esterno alla linea di inviluppo.

TRAVI

Nelle travi i delle tensioni principali risulta sempre = a zero e le altre due si possono det. in qst modo

$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \pm \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\tau_{xz}^2})$

\rightarrow quindi il criterio di Tresca e di Von Mises vengono semplificati:

• Criterio di Tresca

$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} > \frac{\sigma_s}{S}$

• Criterio di Von Mises

$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} > \frac{\sigma_s}{S}$

TEOREMI SULL'ENERGIA

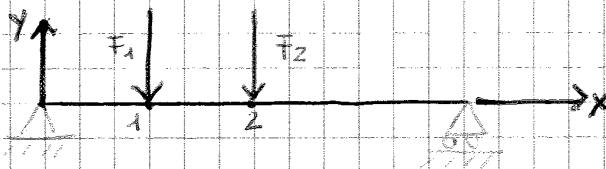
TEOREMA di CLAUPEYRON

Il lavoro di deformazione compiuto da n forze agenti staticamente su un corpo elastico è pari alla metà della somma dei prodotti dei valori finali delle forze per i valori finali degli spostamenti nella loro propria direzione valutati nelle direzioni delle forze stesse.

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i v_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \theta_i \quad \text{dove } v_i = \text{fleccia}$$

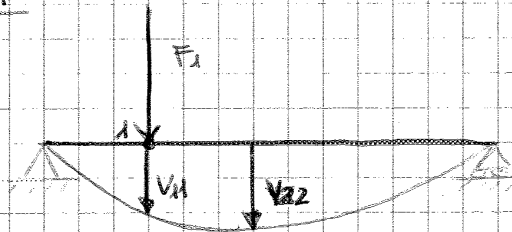
TEOREMA di BETTI

Il lavoro mutuo o indotto che compie il sistema di forze A già applicato ad un corpo elastico durante l'applicazione di un sistema di forze B è uguale al lavoro indotto che compirebbe il sistema B se fosse già applicato allo stesso corpo elastico durante l'applicazione del sistema A.



\$\rightarrow\$ consideriamo il caso di una trave appoggiata soggetta ai carichi statici \$\bar{F}_1\$ e \$\bar{F}_2\$
 \$\rightarrow\$ per sovrapposizione degli effetti immaginiamo di applicare prima \$F_1\$ poi il carico \$\bar{F}_2\$ (CASO A), oppure invertendo l'ordine (CASO B)

Caso A



\$\rightarrow\$ il lavoro è dato da

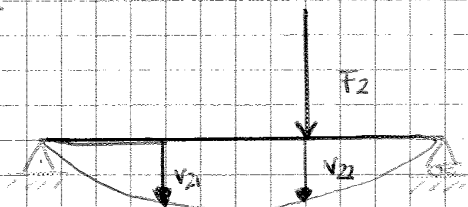
$$L = \frac{1}{2} \bar{F}_1 v_{11} + \frac{1}{2} \bar{F}_2 v_{22} + \bar{F}_1 v_{12}$$

con \$v_{11}\$ = spostamento in 1 dovuto a \$F_1\$

\$v_{22}\$ = spostamento in 2 dovuto a \$F_2\$

\$v_{12}\$ = spostamento in 1 dovuto a \$F_2\$

CASO B



$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \bar{F}_2 v_{22} + \frac{1}{2} \bar{F}_1 v_{11} + \bar{F}_2 v_{21}$$

con \$v_{11}\$ = spostamento in 1 dovuto a \$F_1\$

\$v_{22}\$ = spostamento in 2 dovuto a \$F_2\$

\$v_{21}\$ = spostamento in 2 dovuto a \$F_1\$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{F}_1 v_{12} = \bar{F}_2 v_{21}}$$

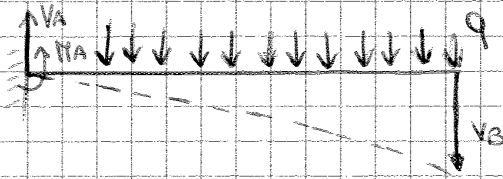
$$\Rightarrow \text{se } \bar{F}_1 = \bar{F}_2 \Rightarrow v_{12} = v_{21}$$

\$\rightarrow\$ PRINCIPIO di RECIPROCA degli SPACCIANTI

conferma enunciato di Betti

METODO CINEMATICO

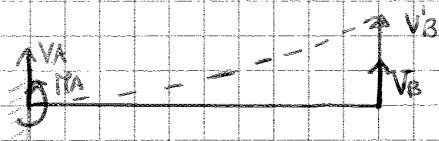
Usando il metodo cinematico viene resa la struttura iperstatica e si viene momentaneamente considerata la reazione vincolare V_B



→ viene calcolata la fleccia in B della trave a sbalzo con carico distribuito

$$\rightarrow V_B = \frac{qL^4}{8EI}$$

→ aggiungo poi il carico nel pto B per la reaz vincolare V_B e tolgo il carico distribuito q



→ calcolo la fleccia v'_B della nuova struttura

$$\rightarrow v'_B = \frac{V_B L^3}{3EI}$$

→ poiché è prescelta la vincolo nel pto B, la fleccia in quel pto deve essere nulla

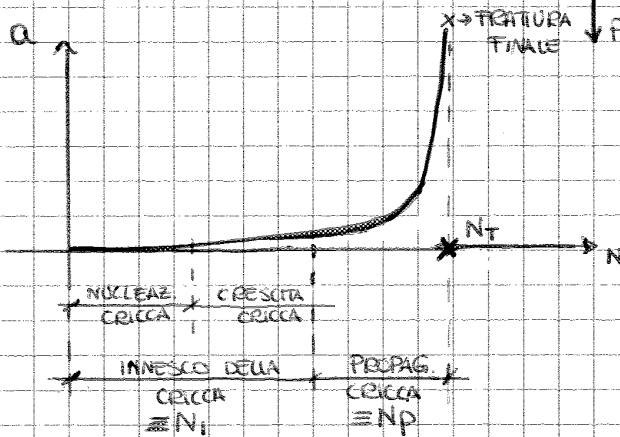
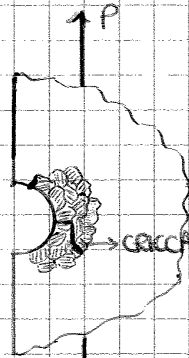
$$\Rightarrow V_B = v'_B \Rightarrow \frac{qL^4}{8EI} = \frac{V_B L^3}{3EI} \Rightarrow \boxed{V_B = \frac{3qL}{8}}$$

• Materiali fragili

Nel caso dei materiali fragili non si verifica la crescita del difetto (movimento dei grani, propagaz. slip bands) ma le cricche si formano in corrispondenza di difetti già esistenti

2) PROPAGAZIONE CRICCA

- a causa della σ_N , lungo il piano \perp alla σ_{Nmax} , le cricche si formano iniziano a crescere nel materiale
- queste crescono molto lentamente
- ⇒ percorrono $10^{-9} - 10^{-5}$ mm/ciclo



a = dimensione della cricca
N = num. cicli

CRESCITA DELLA CRICCA

La durata totale (N_T) della cricca (≡ num. di cicli fino a rottura) è data da:

$$N_T = N_i + N_p$$

- N_i = durata corrispondente a formaz. cricca
- N_p = " " " a propagaz. cricca

PREDIZIONE DELLA DURATA A FATICA

Per predire la durata di i componenti a fatica è necessario avere del informazioni

• Dati del materiale

Creare sapere quali sono le prove richieste dal materiale, se v. sono ≠ metalli

• Dati del carico

Bisogna caratterizzare l'andamento del carico nel tempo

- Ampiezza costante
- tensione media
- Ampiezza variabile

FATICA AD ALTO NUMERO di CICLI

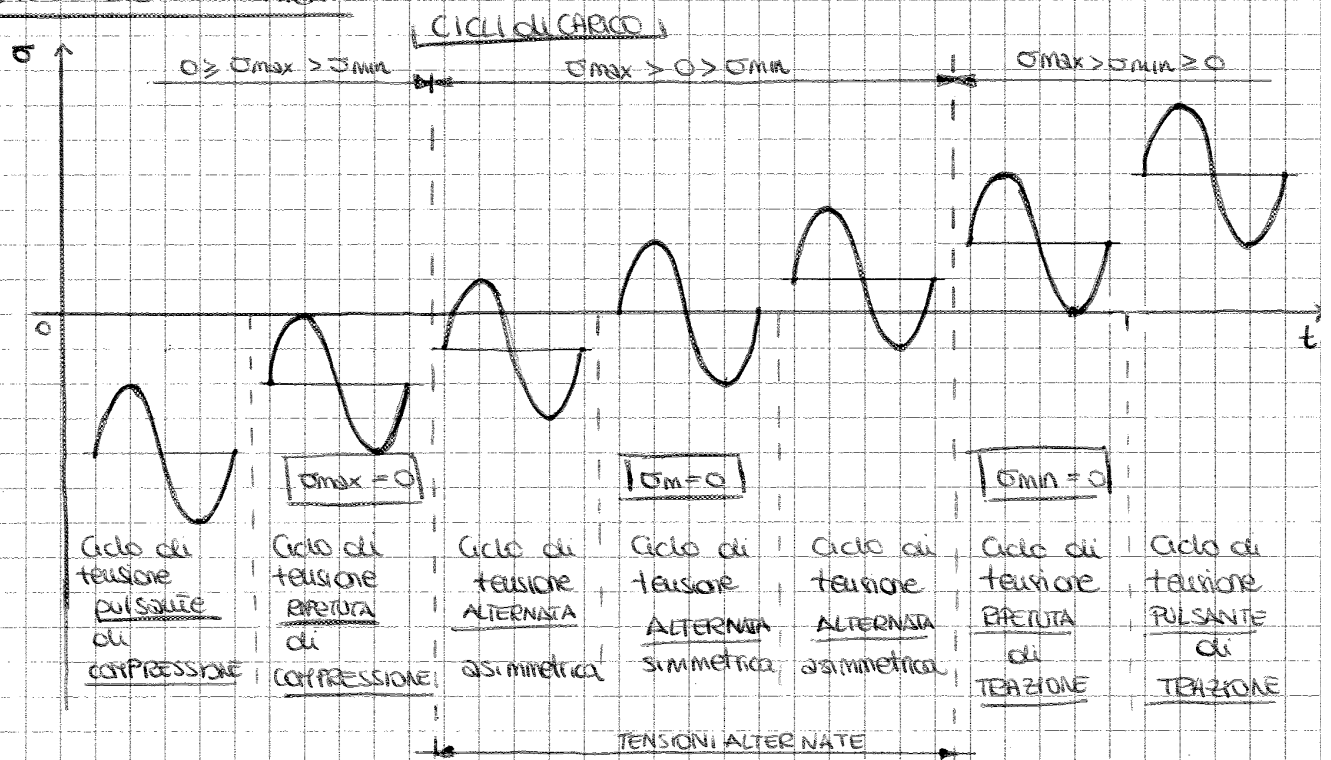
La resistenza a fatica non può essere vista come caratteristica del materiale
 → ma dipende dalle condiz. di carico, dal tipo di ciclo, dalla forma e dalle dimensioni del componente
 ⇒ non si parla di resistenza a fatica di un materiale, ma piuttosto di un componente

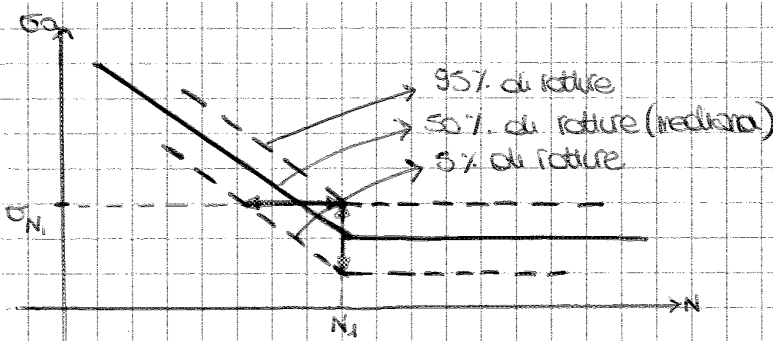
Parametri influenzanti la fatica

- Tipo di sollecitazione
- Num. di cicli
- Valori di σ_{min} e σ_{max}
- effetto di $\sigma_m \neq 0$
- effetto di intaglio
- Dimensioni
- Temperatura
- Trattamenti superficiali

⇒ bisogna valutare l'effetto di ognuno di questi parametri rispetto ad una SITUAZIONE data dal comportamento a fatica di un provino cilindrico soggetto ad STANDARD flessione rotante in ambiente neutro e temperatura ambiente

CARATTERIZZAZIONE A FATICA





⇒ La dispersione della RESISTENZA A FATICA σ_N , per i det. durata è INFERIORE alla dispersione della durata N_1 per i dato livello di tensione

METODO SNIIR - CASE

- 1) Stimare la resistenza a fatica corrispondente alla durata richiesta (σ_0 o σ_N)
- 2) Stimare la deviazione standard S per il materiale
- 3) Condurre la prima prova al livello di tensione $\sigma_0 + d$ (d = passo di prova = S)
- 4) Se il primo si rompe condurre la prova successiva con il livello di tensione inferiore (σ_0)
Se non si rompe incrementare il valore di tensione di i quantità per il passo ($+d$)
- 5) Continuare la prova per almeno 15-30 prove
- 6) Determinare l'evento meno frequente tra "ROMITA" e "NON ROMITA"
- 7) Tabulare i risultati indicando solo l'evento meno frequente

I	II	III	IV	V
LIVELLI DI TENSIONE	CLASSIFICAZ. DEI LIVELLI DI TENSIONE	NUMERO DI EVENTI	PRODOTTI II · III	PRODOTTI II ² · III
...	0
...	1
...
...	n

↑
0 corrisponde al livello di tensione basso

↑ $\Sigma(III) = N$

↑ $\Sigma(IV) = A$

↑ $\Sigma(V) = B$

8) Calcolare la stima statistica della resistenza a fatica σ_0 (50%)

$$\sigma_0 = \sigma_0 + d \left[\frac{A}{N} \pm \frac{1}{2} \right]$$

⇒ σ_0 = livello + basso di tensione

⊕ se evento meno frequente e "NON ROMITA"

⊖ se evento meno frequente e "ROMITA"

9) Calcolare la stima statistica della deviazione standard S

$$S = 1,62d \left[\frac{NB - A^2}{N^2} + 0,029 \right]$$

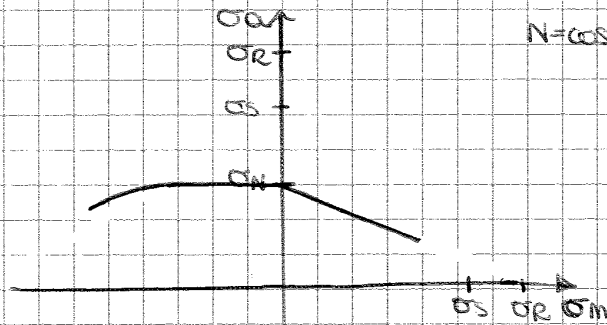
se $\frac{NB - A^2}{N^2} \geq 0,3$

$$S = 0,53d$$

se $\frac{NB - A^2}{N^2} < 0,3$

EFFETTO DELLA TENSIONE MEDIA

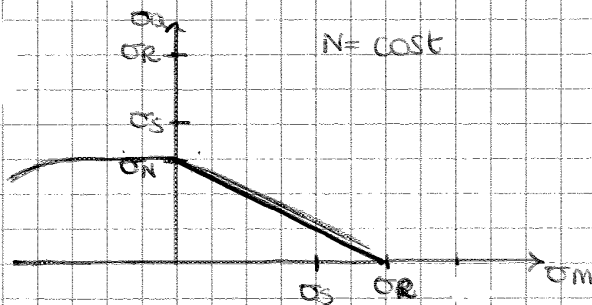
Nella realtà accade spesso che le sollecitazioni cicliche abbiano $\sigma_m \neq 0$
 → questa influenza la durata di le componenti sottoposto a fatica e sul limite di fatica σ_a



→ la σ_a decresce all'aumentare della tensione media di trazione
 → σ_m di trazione sono "DANNOSI" per il comportamento a fatica

→ σ_m di compressione è "FAVOREVOLE" al comportamento a fatica, perché la σ_a finale costante per l'ampio campo di σ_m prima di scartare l'effetto è diminuire

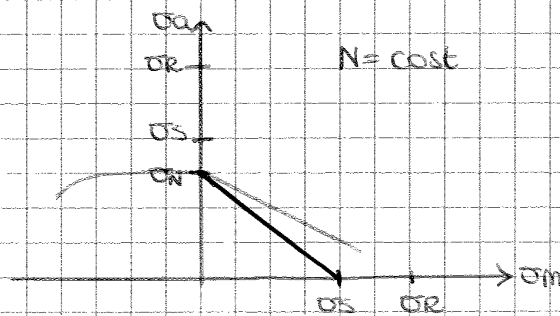
Relazione lineare di Goodman



→ Goodman ipotizza l'accostamento lineare del limite di fatica in funzione della σ_m , che raggiunge il suo max valore in σ_R
 → la σ_N qui indicata è la tensione che si ha in N cicli con $\sigma_m = 0$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_a}{\sigma_N} + \frac{\sigma_m}{\sigma_R} = 1$$

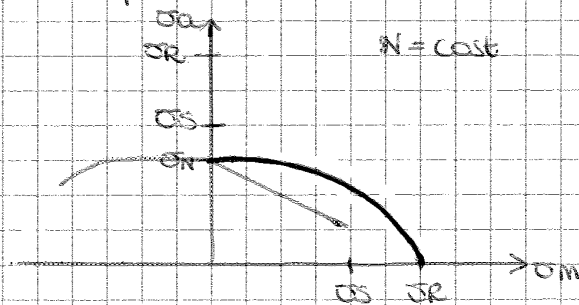
Relazione lineare di Soderberg



→ Soderberg impone valore max di $\sigma_m = \sigma_S$

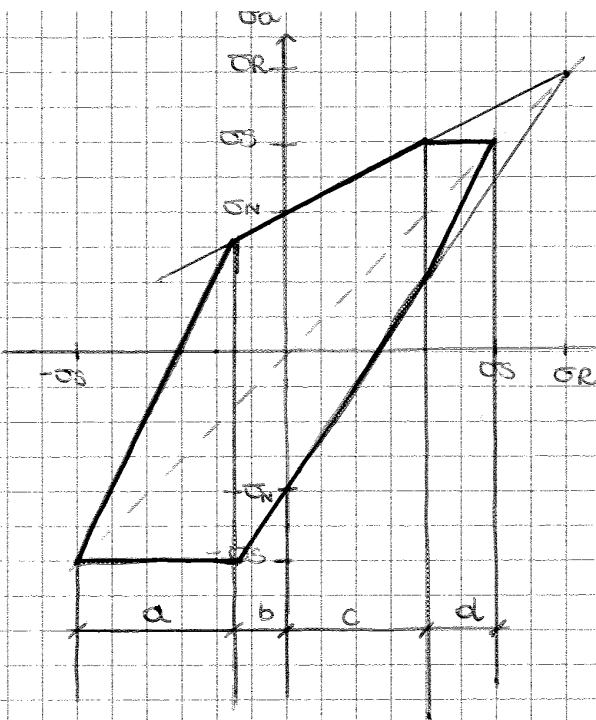
$$\Rightarrow \frac{\sigma_a}{\sigma_N} + \frac{\sigma_m}{\sigma_S} = 1$$

Relazione parabolica di Gerber



$$\Rightarrow \frac{\sigma_a}{\sigma_N} + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_R}\right)^2 = 1$$

(44)



→ Il diagramma di Goodman-Smith può essere suddiviso in 4 aree secondo il valore della tensione media

• Regione a:

→ se $|\sigma_S \leq \sigma_m \leq \sigma_N - \sigma_S|$

⇒ $\sigma_{min} = -\sigma_S$

essendo $\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$

⇒ $\sigma_{min} = 2\sigma_m - \sigma_{max}$

⇒ $\sigma_{min} = 2\sigma_m - \sigma_{max} = -\sigma_S$

⇒ Ho collasso se

$\sigma_{max} - 2\sigma_m \geq \sigma_S$

• Regione b

→ Sono in b se $\sigma_N - \sigma_S \leq \sigma_m \leq 0$

⇒ $\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_N \Rightarrow 2\sigma_m - \sigma_{max} = \sigma_m - \sigma_N \Rightarrow \sigma_m - \sigma_{max} = -\sigma_N$

⇒ in b ho collasso se $\sigma_{max} - \sigma_m \geq \sigma_N$

• Regione c

Sono nella zona c se $0 \leq \sigma_m \leq \sigma'_m$

→ $\sigma_{max} = \sigma_N + \sigma_m \left(\frac{\sigma_R - \sigma_N}{\sigma_R} \right) \Rightarrow \sigma_{max} - \sigma_m \left(\frac{\sigma_R - \sigma_N}{\sigma_R} \right) = \sigma_N$

⇒ Ho collasso se $\sigma_{max} - \sigma_m \left(\frac{\sigma_R - \sigma_N}{\sigma_R} \right) \geq \sigma_N$

• Regione d

Sono in d se $\sigma'_m \leq \sigma_m \leq \sigma_S$

⇒ $\sigma_{max} = \sigma_S \Rightarrow$ Ho collasso se $\sigma_{max} \geq \sigma_S$

→ L'ipotesi di Miner non tiene conto dell'ordine di applicaz. dei carichi, che, risultati sperimentali mostrano essere importante

(45)

⇒ Ad esempio con 2 tensioni σ_1 e σ_2 t.c. $\sigma_1 > \sigma_2$

→ se viene applicata prima σ_1 e poi σ_2 a rottura abbiamo

→ se vengono applicate al contrario si ha a rottura $\sum \frac{n_i}{N_i} > 1$

$$\sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i} < 1$$

⇒ in realtà la rottura può verificarsi per valori di D compresi tra **0,6 e 1,6**

EFFETTO D'INTAGLIO

Le variazioni di forma in un componente provocano l'aumento locale dello stato di tensione che diventa localmente triassiale

⇒ $\sigma_{\text{locale}} = k_t \sigma_N$ con $k_t =$ FATTORE DI CONCENTRAZIONE DELLE TENSIONI

→ a volte in presenza di brusche variaz di forma la tensione locale può raggiungere valori pari a oltre 3-4 volte la σ_N

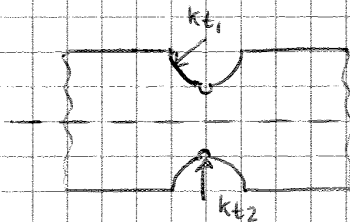
→ nel caso di FORO CIRCOLARE (di piccole dimensioni rispetto a quelle della piastra)

$k_t = 3$

$$\Rightarrow \boxed{k_t = \frac{\sigma_{\text{max}}}{\sigma_N} = 3}$$

→ nei casi + complessi si ricorre a diagrammi che forniscono k_t in base al tipo di carico e alle caratteristiche geometriche (SULLIBRO TABELLE)

Intagli multipli



→ k_t principio della sovrapposiz degli effetti

$$\Rightarrow \sigma_{\text{eff}} = k_t \sigma_N \quad \text{con } k_t = k_{t1} \cdot k_{t2}$$

SOLLECITAZIONI CICLICHE

In qst caso si parla di **K_F** che diversamente da k_t dipende anche dal materiale

→ infatti dipende da $q =$ FATTORE DI SENSIBILITÀ ALL'INTAGLIO perché i materiali metallici sono + o meno sensibili all'intaglio

→ q può essere compreso tra zero e 1 ⇒ $0 \leq q \leq 1$

⇒ $q = 0$ ⇒ SENSIBILITÀ NULLA e $\boxed{k_f = 1}$

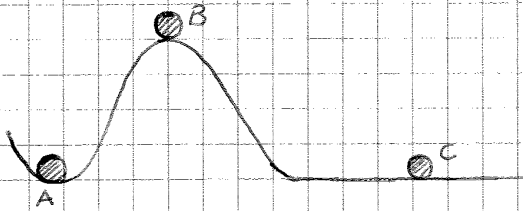
⇒ $q = 1$ ⇒ SENSIBILITÀ TOTALE e $\boxed{k_f = k_t}$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_t = \text{FATTORE TEORICO D'INTAGLIO} \\ k_f = \text{FATTORE EFFETTIVO D'INTAGLIO} \end{array} \right.$$

⇒ $q = \frac{k_f - 1}{k_t - 1} \Rightarrow \boxed{k_f = 1 + q(k_t - 1)}$ → valida solo per il calcolo a durata infinita (per DUTILI)
→ per materiali FRAGILI si consideri $\boxed{k_f = k_t}$

INSTABILITÀ ELASTICA

(45)



→ I 3 tipi di STABILITÀ possono essere descritti tramite l'equilibrio di una sfera posta prima su una superficie sferica convessa (A), poi su una superficie sferica concava (B) e infine su un piano orizzontale (C)

→ nel primo caso la sfera si allontanerà dalla sua posizione di equilibrio a causa di piccole perturbazioni intra nella posiz. iniziale

⇒ CASO A: STABILE

→ Nel secondo caso a causa di una piccola perturbazione la particella si allontanerà definitivamente dalla posiz. iniziale

⇒ CASO B: INSTABILE

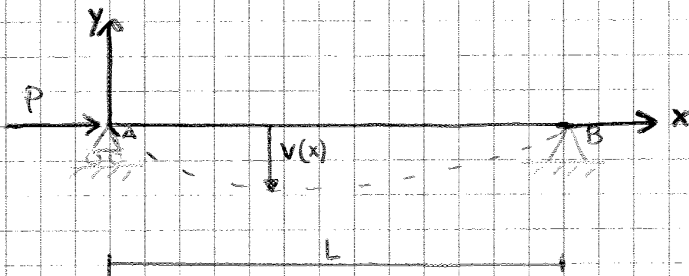
→ nell'ultimo caso accetto alla condizione di equilibrio di partenza abbiamo altre infinite posizioni di equilibrio

⇒ CASO C: EQUILIBRIO INDIFFERENTE

⇒ ad esempio nel caso di una ASTA COMPRESSA, questa può assumere una configurazione stabile in presenza di ~~una~~ disturbi laterali, ma nel caso in cui raggiunga un carico maggiore potrebbe diventare INSTABILE anche per piccole perturbazioni.

⇒ Il carico che determina l'instabilità viene detto CARICO CRITICO (questo può essere < di 0 o 0 o 0)

ASTA di EULERO



→ eq. di equilibrio:

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} EJ_z = -Pv(x)$$

→ con $\alpha^2 = \frac{P}{EJ_z}$

⇒ $\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \alpha^2 v(x) = 0$ eq. diff. del II ordine

che ha soluz. del tipo

$$v(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x$$

→ ponendo le condiz. al contorno:

$$\left. \begin{aligned} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} C_2 \cos \alpha \cdot 0 = 0 \rightarrow C_2 = 0 \\ C_1 \sin \alpha L = 0 \rightarrow \sin \alpha L = 0 \text{ per } \alpha L = n\pi \end{aligned}$$

⇒ $\frac{P}{EJ_z} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \rightarrow \frac{P}{EJ_z} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_z}{L^2}} = \text{CARICO CRITICO}$

→ L in realtà dipende da condiz. al vincolo ⇒ in generale $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_z}{l_0^2}$

- ⇒ CERNIERA-CARRELLLO ⇒ $l_0 = L$
- ⇒ INCASTRO-LIBERO ⇒ $l_0 = 2L$
- ⇒ INCASTRO-CARRELLLO ⇒ $l_0 = \frac{L}{\sqrt{2}}$

1

FORMULE FONDAMENTI

SOLLECITAZIONI SEMPLICI

1. σ di TRAZIONE

$$\sigma_{xx} = \sigma_N = \frac{N}{A} \quad [\sigma_N] = \text{MPa}$$

2. LEGGE DI HOOKE

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} \quad \begin{array}{l} E = \text{MODULO ELASTICO} \\ \epsilon_{xx} = \text{DEFORMAZIONE} \\ \rightarrow \epsilon_{xx} = \frac{\Delta L}{L} \quad \rightarrow \Delta L = \frac{NL}{EA} \quad \rightarrow \text{RIGIDEZZA ASSIALE} = \frac{AE}{L} \end{array}$$

3. CONTRAZIONE TRASVERSALE

$$\epsilon_{yy} = \frac{\Delta a}{a} = \nu \epsilon_{xx} \quad \rightarrow \nu = \text{COEFFICIENTE DI POISSON}$$

4. LAVORO di DEFORMAZIONE (σN)

$$L = \frac{1}{2} \frac{P^2 L}{EA} \quad L = \frac{1}{2} \epsilon_{xx}^2 E \quad (= \text{lavoro per unità di volume})$$

5. COEFFICIENTE di SICUREZZA

$$\sigma_{amm} = \frac{\sigma_s}{S} \quad (\text{per materiali DUTILI})$$

$$\sigma_{amm} = \frac{\sigma_R}{S} \quad (\text{per materiali FRAGILI})$$

6. σ di FLESSIONE

$$\sigma_f = - \frac{M_f}{J_z} y \quad R = \frac{EJ_z}{M_f} = \text{CURVATURA della TRAVE} \quad EJ = \text{RIGIDEZZA FLESSIONALE}$$

7. MODULO di RESISTENZA di FLESSIONE

$$W_f = \frac{J_z}{y_{max}}$$

8. LAVORO di DEFORMAZIONE (σf)

$$L = \frac{M_f^2 L}{2EJ_z}$$

9. FLESSIONE DEVIATA

$$\sigma_f = \frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z}$$

10. τ di TORSIONE

$$\tau = \frac{M_t}{J_p} y$$

SEZIONE CIRCOLARE

$$\tau_{max} = \frac{\alpha M_t}{cb^3} \quad \rightarrow \text{SEZIONE RETTANGOLARE}$$

FAITORE di TORCIA

• LEGGI DI HOOKE

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{jk}$$

• LEGGI COSTITUTIVE PER ISOTROPICI

$$\epsilon_{ii} = \frac{1}{E} [\sigma_{ii} - \nu (\sigma_{jj} + \sigma_{kk})]$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}$$

• DEFORMAZIONE PIANA (asse z ⊥ al piano)

$$\epsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

• STATO DI TENSIONE PIANA (asse z ⊥ al piano)

$$\sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \Rightarrow \epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

• LAVORO DI DEFORMAZIONE

$$L_i = \int \tau_{ij} \epsilon_{ij} dx dy dz$$

CEDIMENTO STATICO

• CRITERIO DI RANKINE (materiali fragili)

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 \geq \frac{\sigma_R}{S} \text{ per raggiungere cedimento}$$

• CRITERIO DI TRESCA (materiali duttili)

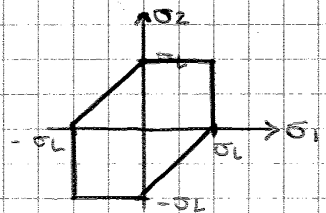
$$\sigma_{eq} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) \geq \frac{\sigma_s}{S} \text{ per cedimento}$$

$$\rightarrow \text{nelle travi } \sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} > \frac{\sigma_s}{S}$$

• CRITERIO DI VON MISES (materiali duttili)

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \geq \frac{\sigma_s}{S}$$

$$\rightarrow \text{nelle travi } \sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} > \frac{\sigma_s}{S} \quad \left[\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{kk}^2 + 3C_{ik}^2 + 3C_{jk}^2} \text{ per ipotesi di Saint Venant } \rightarrow \sigma_{ii} = \sigma_{jj} = \tau_{ij} = 0 \right]$$



TEOREMI SULL'ENERGIA

TEOREMA DI CLAY PERON

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \theta_i \quad \text{CAL V}_i = \text{TRECCIA}$$