NUMERO: 2032A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Gentile Denise

MATERIA: Elettrotecnica - Prof Canavero

ELETTROTECNICA

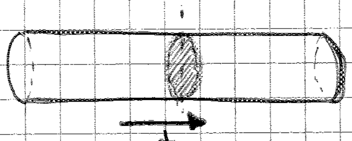
1.10.14

[TESTO: "Circuiti elettrici", Perfetti], ed. Zanichelli 2013

ELETTRICITA'

CARICA ELETTRICA

- sono di due specie ⊕ e ⊖
- costituenti di tt i materiali → in alcuni sono fisse, in altri si muovono
- muovendosi conducono elettricità
  - → sono in movimento nei METALLI
    - ⇓ supporto per tt le applicaz. elettriche
- simbolo q → $[q]$ = Coulomb (C)



→ filo di metallo sufficient. piccolo in cui tt le cariche corrono all'interno come l'acqua fluisce in 1 tubo

direzione delle cariche (poi decidere io)

→ misuriamo quante cariche, per in 1 Δt in 1 det. sezione

per convenzione consideriamo alle ⊕ ⇒ Δq = quantità di carica che scorre nel filo nella direz. indicata in 1 Δt

⇒ $\boxed{\frac{\Delta q}{\Delta t} = i}$ → INDICATORE DELLO SCORRIMENTO delle CARICHE (flusso delle cariche)

⇒ CORRENTE ELETTRICA

→ $[i] = \frac{C}{s}$ = ampere, A

→ le cariche dell'esperimento potrebbero anche andare al contrario, non nella direz che ho deciso io

⇒ uso il segno ⊖ per indicare che vanno nel segno opposto

⇒ $i > 0$ se cariche ⊕ sono equiverse con la nostra direzione

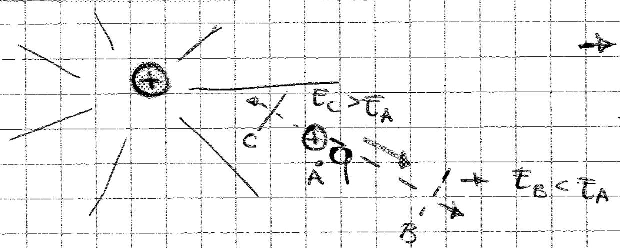
⇒ $i < 0$ se " " " contraverse con la nostra direzione e le " ⊖ sono equiverse con la nostra direzione.

(2)

→ per scrivere in forma ≠ la KCL

$\boxed{\Sigma i_e = 0}$ $\boxed{\Sigma i_u = 0}$

TENSIONE ELETTRICA



→ 1 carica genera l'influenza su 1 altra
→ se q è ⊕ si allontana, se q è ⊖ è attratta verso l'altra carica

→ prendo in esame il punto A e B e ipotizzo che q vada da A a B
→ calcolo energia potenziale in A e in B

$\rightarrow E_A - E_B = \Delta E$ → differenza di E potenziale

→ $\Delta E > 0$ se carica naturalmente si muove da A a B → $E_B < E_A$
→ $\Delta E < 0$ se la carica DEVE essere spostata da A a B
→ $E_B > E_A$

→ $\boxed{\frac{\Delta E}{q}}$ → differenza di energia potenz. normalizzata alla carica

⇓

TENSIONE ELETTRICA, simbolo v $[v] = \frac{J}{C} = \text{Volt} (V)$

→ la tensione va specificata in qst modo

A

v_{AB} B

⇓

A è il primo punto che ho scelto!

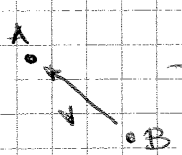
+ A

v

− B

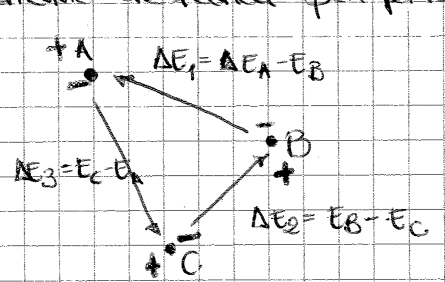
⇓

secondo modo di specificare tensione



→ terzo modo, la freccia punta verso il primo punto

→ Spostiamo che carica per più punti



$\rightarrow V_1 = \frac{\Delta E_1}{q}$

$\rightarrow V_2 = \frac{\Delta E_2}{q}$

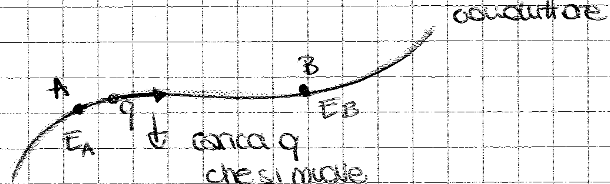
$\rightarrow V_3 = \frac{\Delta E_3}{q}$

$\boxed{V_1 + V_2 + V_3 = 0}$ (facendo i calcoli)

⇓ LEGGE DI KIRCHHOFF per le TENSIONI (KVL)

⇓ vale per 1 percorso chiuso

- Supponiamo di avere 1 pezzo di conduttore



carica q che si muove lungo conduttore, da A a B, senza dispendio di energia $\Rightarrow E_B = E_A \Rightarrow V_{AB} = 0$ (tensione = 0)

$\Rightarrow$ Tutte le volte che siamo lungo 1 conduttore non c'è ~~nel~~ tensione tra due punti del conduttore (può esserci tensione tra conduttore e 1 altro punto $\notin$ a conduttore)

$\Rightarrow$ CONDUTTORE È EQUIPOTENZIALE

$\Rightarrow V = 0 \Rightarrow$ CORTO CIRCUITO

POTENZA ELETTRICA

Supponiamo di avere 1 elem. elettrico con 2 conduttori

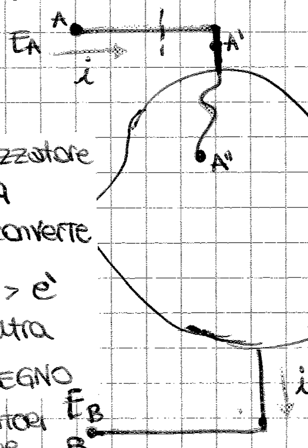
BIPOLO

$\Rightarrow$ il bipolo è 1 utilizzatore di energia elettrica

$\Rightarrow$ assorbe $\rightarrow$ converte

$\rightarrow$ il punto con $E >$ è il punto in cui entra corrente

$\Rightarrow$ CONVENZ. DI SEGNO degli UTILIZZATORI (= ho conversione di energia)



$\rightarrow$ se mi riferisco ad A o A' non cambia nulla, perché è EQUIPOTENZIALE
$\rightarrow$ stessa cosa per A''

$\rightarrow$ abbiamo delle cariche che si muovono da A a B lungo qst sistema

$\rightarrow$ calcolo $i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$

$\rightarrow V_{AB} = \frac{E_A - E_B}{\Delta q}$ con $E_B \neq E_A$

$\rightarrow V_{AB} \cdot \Delta q = E_A - E_B = \Delta W$

LAVORO fatto dalle cariche per andare da A a B

$$\boxed{\frac{V_{AB} \cdot \Delta q}{\Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta t}}$$

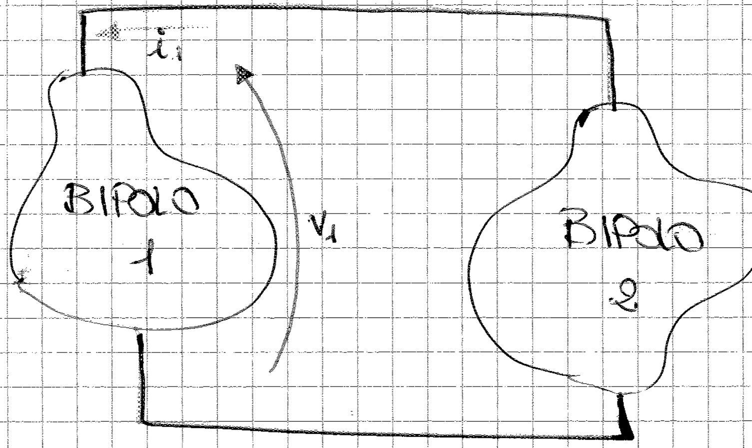
$\rightarrow$ faccio l'esperimento per tempi sempre + piccoli

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(V_{AB} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \right) \Rightarrow \boxed{V_{AB}\, i = P}$$

$\Downarrow$

POTENZA ELETTRICA

→ si verifica CONSERVAZIONE della POTENZA nei sistemi elettrici

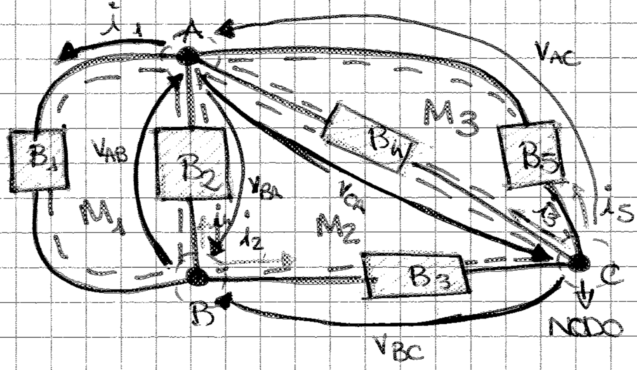


→ analizzo p sul primo bipolo ⇒ $p_1 = V_1 i_1 > 0$ → utilizzatore

⇒ $\underbrace{p_1 = -p_2}_{\text{perchè } p_1 + p_2 = 0}$ → p_2 è il generatore

CIRCUITI

è insieme di elementi elettrici INTERCONNESSI



→ circuito in cui sono collegati 5 bipoli in cui avvengono i fenomeni elettrici

→ i bipoli sono legati da conduttori (= sono dei corto circuiti)

→ i punti in cui i ~~bipoli~~ conduttori si collegano fra di loro si chiamano NODI
↓
colleg tra 2 o più bipoli

→ ~~poss~~ numerare i bipoli, classificare i nodi, indicare tensioni e correnti
↓
vanno definite sempre tra i nodi

→ applico KCL (immaginando che ci sia superficie chiusa intorno al nod

(1) → A : $i_1 = i_4 + i_3 + i_5$ → $\cancel{i_4} + i_2 = \cancel{i_4} + i_3 + i_5$ → (2) in (1)

(2) → B : $i_1 = i_4 + i_2$

(3) → C : $i_5 + i_3 = i_2$ → $i_3 = i_2 - i_5$

↓

$\cancel{i_5} + \cancel{i_3} = \cancel{i_3} + \cancel{i_5}$ ← (3)

⇓

$\boxed{0 = 0}$

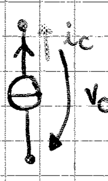
- Generatore ideale $\underbrace{\text{indipendente}}$ di corrente (es. CARICA BATTERIA) (5)

  ⊕ trasforma altri tipi di energia in elettricità in qualunque condiz. si trovi

→ simbolo  → direz. delle cariche ⊕

→ $a(t)$ = funzione della corrente impressa

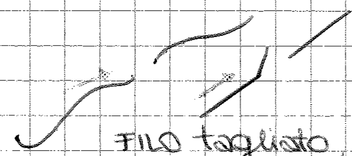
→ LEGGE di FUNZIONAMENTO del generatore di corrente



$\boxed{i_c = a(t)}$ → corrente nel generatore è = a quella impressa
→ è indipendente dalla tensione!

→ $a(t) = 0 \Rightarrow i_c = 0$ (⇒ nex carica che si muove)

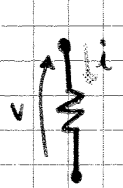
⇒ CIRCUITO APERTO



FILO tagliato, non pox le cariche

- Resistore ideale (indipendente)

→ le cariche che attraversano il bipolo sono soggette a l RESISTENZA



→ nel caso del resistore non viene indicato punto a potenziale> o verso corrente (pox deciderlo io)

→ LEGGE di FUNZIONAMENTO del resistore (=Legge di Ohm)

$\boxed{v = Ri}$ → R = coeff. di proporzionalità (x convenz. smp⊕)
→ tensione è proporz. a corrente k pox

→ R = RESISTENZA → grandezza dimensionata

⇒ $[R] = \frac{V}{A}$ = Ohm (Ω)

→ è la proprietà fisica di cui è dotato il resistore, e a cui sono sottoposte le cariche nel bipolo

→ dipende dal materiale del resistore ⇒ è un DATO indipendente che viene dato dal costruttore del resistore

→ potrei avere $R = 0 \Rightarrow v = 0, \ \forall i$

⇒ CORTO CIRCUITO

6

→ $V_2 = R_2 i = \ominus \dfrac{e R_2}{\underbrace{R_1+R_2+R_3}_{\to R_E}}$

↓ V_2 ed e non sono opposte.

→ REGOLA del PARTITORE di TENSIONE (Vale solo per circuiti in serie → con 1 generatore di tensione e tot R)

$$\boxed{V_x = e \frac{R_x}{R_E}}$$

V_x → tensione su resistore R_x

$\frac{R_x}{R_E}$ → RAPPORTO di PARTIZIONE

→ non c'è segno − perché ho preso V_x ed e opposte!

→ R_E è sempre + grande di ogni R_i di 1 circuito in serie perché le R_i sono # ⊕ x convenzione

→ se 1 resistore della serie è 1 CIRCUITO APERTO

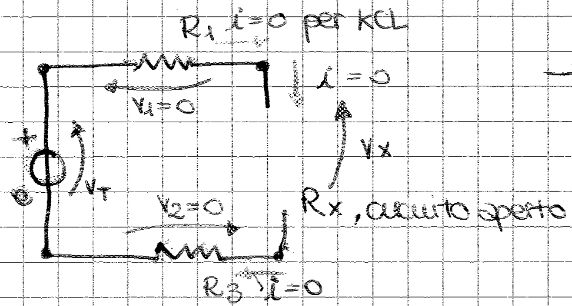
$G = 0 \quad G = \frac{1}{R} \Rightarrow R = \infty$

$\Rightarrow R_E = \infty$

→ se ho il CIRCUITO APERTO ($= R_x$)

$V_x = e \frac{R_x}{R_E} = e \frac{\infty}{\infty} = e$

$\frac{\infty}{\infty}$ → perché sono dello stesso ordine



→ KVL : $e = \underbrace{V_1}_{=0} + V_x + \underbrace{V_3}_{=0}$

$\Rightarrow \boxed{V_x = e}$ → tensione del resistore aperto = a quella del generatore

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 112

→ CASO PARTICOLARE : SOLO 2 RESISTORI $[R_1, R_2]$

$$\frac{1}{R_E} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_E = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

→ tornando al primo circuito e riprendiamo le formule

$i_1 = G_1 v_1$

$i_2 = G_2 v_1$

$$v_1 = \frac{a}{G_1 + G_2}$$

$$\Rightarrow i_1 = G_1 \frac{a}{G_1 + G_2} \qquad i_2 = G_2 \frac{a}{G_1 + G_2}$$

⇒ In 1 circuito in PARALLELO con 1 generatore di corrente

$$\boxed{i_x = a \frac{G_x}{G_E}} \Rightarrow$$ REGOLA del PARTITORE di CORRENTE

corrente di 1 resistore del circuito

→ CASO PARTICOLARE : SOLO 2 RESISTORI $[R_1, R_2]$

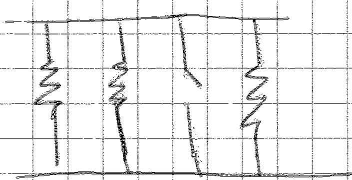
$$i_x = a \frac{\frac{1}{R_x}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = a \frac{\frac{1}{R_x}}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} = a \frac{1}{R_x} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$x = 1,2$

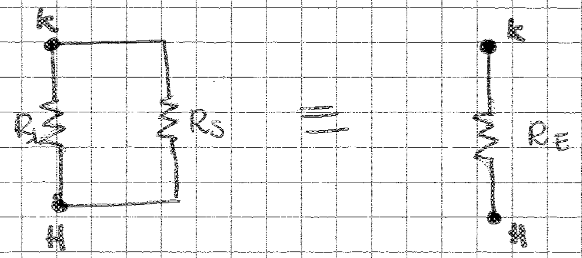
$$\boxed{i_1 = a \frac{R_2}{R_1 + R_2}} \quad \text{con } x = 1$$

$$\boxed{i_2 = a \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \quad \text{con } x = 2$$

→ se ho 1 circuito aperto ⇒ $G = 0$



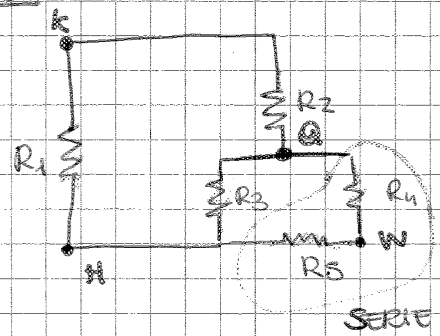
→ il terzo resistore non lo conto !

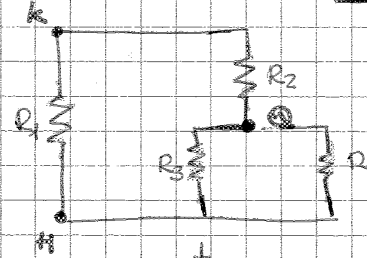


→ R_1 ed R_S sono in // ⇒ $\boxed{R_E = \frac{R_1 R_S}{R_1 + R_S}}$

Esempio

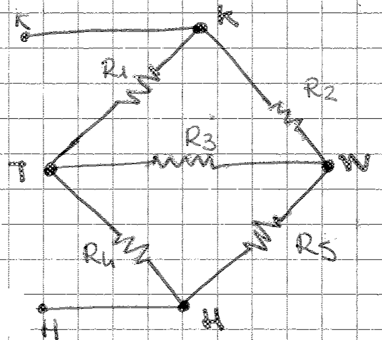
→ R_4 ed R_5 sono in SERIE



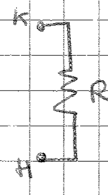


↓
stex circuito di prima

Esempio [TRASFORMAZIONI]



→ voglio ridurre tt a 1 solo resistore

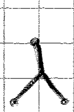


→ inizio ad analizzare da W, non sono in // nè in serie R_2, R_3, R_5
→ la stex cosa vale per T

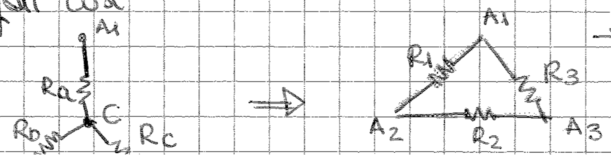
→ analizzo H, è attraversato da 3 CORRENTI (no SERIE), non è neanche in //
→ stesso discorso per K

⇒ il circuito però può essere TRASFORMATO

→ 3 resistori che si trovano in 1 certa configuraz. li posso mettere in 1 altra

→ COLLEGAMENTO A STELLA  , ho 1 punt centrale e 3 resistori che vanno a finire in 3 nodi ≠

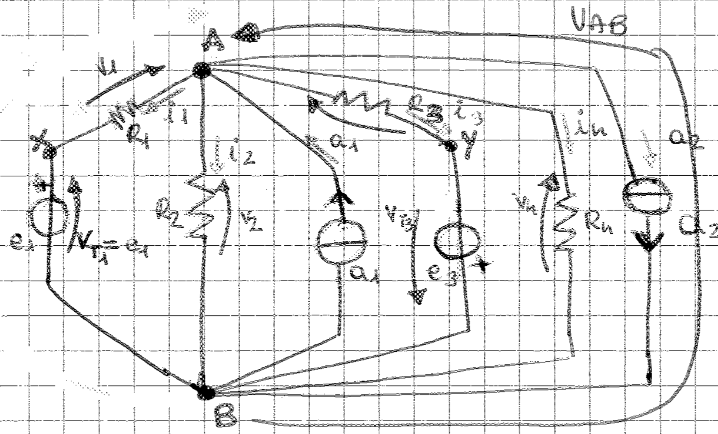
⇒ qst 3 resistori pox farli diventare equivalenti ad altri 3 resistori collegati così



→ COLLEGAMENTO a TRIANGOLO
→ il punto C scompare

TEOREMA di MILLMAN

9



→ non è il circuito in // perché R1 e R3 non sono collegati in //

→ tutti i collegamenti tra A e B vengono detti RAMI

⇒ i rami sono in //

→ prendo il percorso chiuso, $A \to x \to B \to A$, e applico KVL

$* \; V_1 + e_1 = V_{AB}$

→ prendo il percorso chiuso, $A \underset{(R_2)}{\to} B \underset{est.}{\to} A$

$* \; V_2 = V_{AB}$ $\quad * \; V_n = V_{AB}$

→ $A \to y \to B \underset{est.}{\to} A \Rightarrow V_3 = e_3 + V_{AB} \; *$

→ scrivo KCL su A

$i_1 + i_2 + i_3 + i_n + a_2 = a_1 \; *$

→ sostituisco in * legge di funzionam. dei resistori, cioè in * * * *

$* \; R_1 i_1 + e_1 = V_{AB} \to i_1 = \frac{V_{AB} - e_1}{R_1}$

$* \; R_2 i_2 = V_{AB} \to i_2 = \frac{V_{AB}}{R_2}$

$* \; R_n i_n = V_{AB} \to i_n = \frac{V_{AB}}{R_n}$

$* \; R_3 i_3 = e_3 + V_{AB} \to i_3 = \frac{V_{AB} + e_3}{R_3}$

⇒ sostituisco tutte le correnti in *

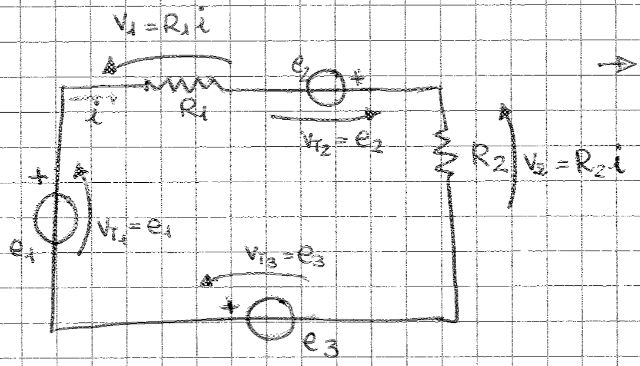
$$\frac{V_{AB} - e_1}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} + \frac{V_{AB} + e_3}{R_3} + \frac{V_{AB}}{R_n} + a_2 = a_1$$

$$\frac{V_{AB}}{R_1} - \frac{e_1}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} + \frac{V_{AB}}{R_3} + \frac{e_3}{R_3} + \frac{V_{AB}}{R_n} + a_2 = a_1$$

$$V_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_n}\right) = \frac{e_1}{R_1} - \frac{e_3}{R_3} + a_1 - a_2$$

15.10.14

LEGGE del CIRCUITO SERIE

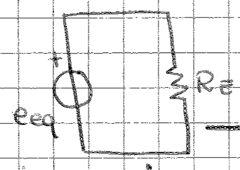


→ circuito SERIE → correnti sup =

→ applico KVL

$$\underbrace{e_1 + e_2 + e_3}_{\Downarrow \; e_{eq}} = R_1 i + R_2 i$$

$$e_{eq} = \underbrace{(R_1 + R_2)}_{\Downarrow \; R_E} i \quad \Rightarrow$$

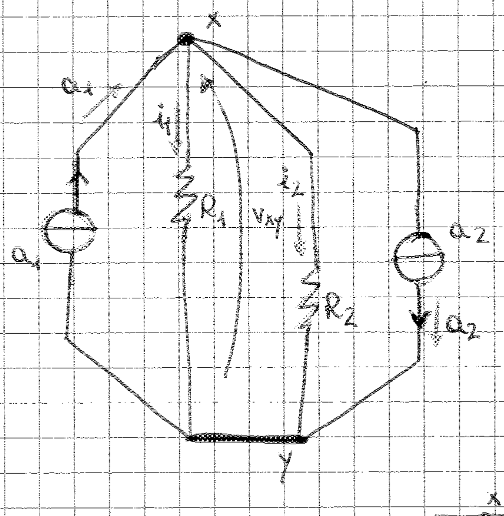


⇒ in un circuito SERIE

generatori → $\boxed{e_{eq} = \sum_{i=1}^{k} e_i}$

resistori → $R_E = \sum_{j=1}^{N} R_j$

LEGGE del PARALLELO



→ circuito in //

→ KCL su nodo x

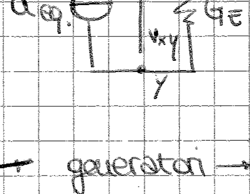
$$a_1 = i_1 + i_2 + a_2$$

$$a_1 - a_2 = i_1 + i_2$$

$$a_1 - a_2 = G_1 V_{xy} + G_2 V_{xy}$$

$$\underbrace{a_1 - a_2}_{a_{eq.}} = (G_1 + G_2) V_{xy}$$

$$a_{eq.} = G_E V_{xy}$$

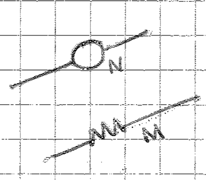


⇒ in 1 circuito //

generatori → $\boxed{a_{eq} = \sum_{i=1}^{k} a_i}$

resistori → $G_E = \sum_{j=1}^{N} G_j$

Ho N generatori e M resistori



1) g_1 esiste e pongo $g_n = 0$ (tutti gli altri li spengo), $n \neq 1$

$$y_1 = k_1 g_1$$

2) g_2 esiste e $g_n = 0$, $n \neq 2$

$$y_2 = k_2 g_2$$

⋮

N) g_N esiste e $g_n = 0$, $n \neq N$

$$y_N = k_N g_N$$

→ dai risultati parziali al risultato generale

$$\boxed{y_1 + y_2 + \dots + y_N = y}$$

⇒ **SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI**

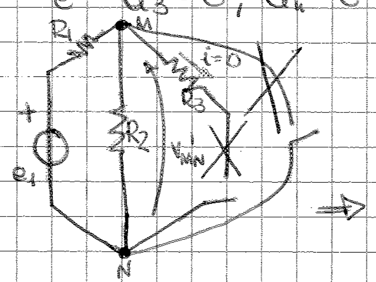
$g_n = 0$
- se g_n è generatore di tensione ⇒ CORTO CIRCUITO
- se g_n è generatore di corrente ⇒ CIRCUITO APERTO

Esempio

Risolviamo il circuito di prima con SOVRAPPOSIZ. degli EFFETTI

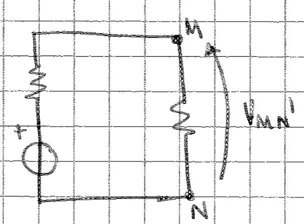
→ Ho 3 generatori ⇒ $N=3$

1) $g_1 = e_1$ e $a_3 = 0$, $a_4 = 0$



→ devo trovare V_{MN}'

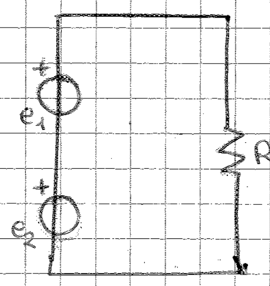
⇒



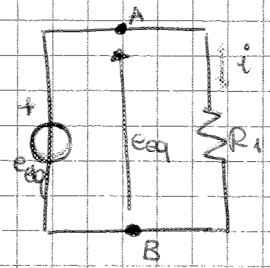
→ applico partitore di tensione

$$\boxed{V_{MN}' = e_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

NON LINEARITÀ della POTENZA



$\Longrightarrow$



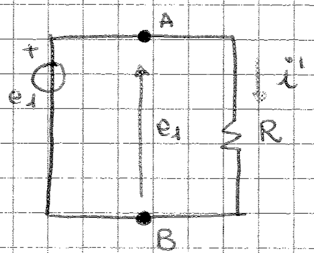
$\rightarrow e_{eq} = e_1 + e_2$

$\rightarrow i = \frac{e_{eq}}{R_1}$

$\rightarrow P_A = e_{eq} \cdot i = \frac{e_{eq}^2}{R_1} = \frac{(e_1+e_2)^2}{R_1}$

→ proviamo a risolvere con SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI

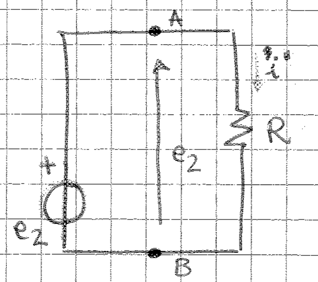
1) e_1 acceso , $e_2 = 0$



$\Rightarrow i' = \frac{e_1}{R}$

$\Rightarrow p' = e_1 \cdot \frac{e_1}{R} = \frac{e_1^2}{R}$

2) e_2 acceso , $e_1 = 0$



$\Rightarrow i'' = \frac{e_2}{R}$

$\Rightarrow p'' = \frac{e_2 \cdot e_2}{R} = \frac{e_2^2}{R}$

$\Rightarrow i = i' + i'' = \frac{e_1}{R} + \frac{e_2}{R} = \frac{e_1+e_2}{R}$ ok

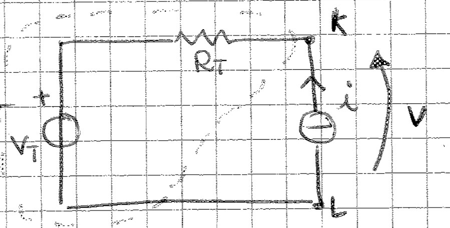
$\Rightarrow p = p' + p'' = \frac{e_1^2}{R} + \frac{e_2^2}{R} \neq \frac{e_{eq}^2}{R}$

$\Rightarrow p = v \cdot i$ è variabile NON lineare

$\Rightarrow$ NON si applica SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI

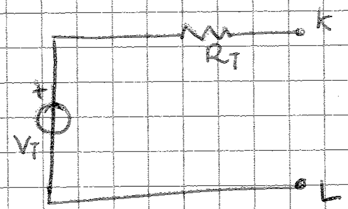
⇒ Dal confronto con il risultato dell'esempio [ ]

equivalente ad A

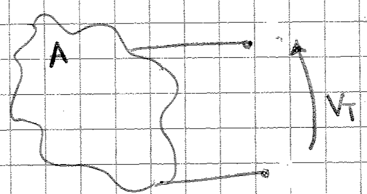


⇒ il sottocircuito A può essere ~~calcolo~~ considerato EQUIVALENTE a 1 porte del circuito sopra

1) ⇒ per il Teorema, i sottocircuito che abbia solo due collegamenti esterni è equivalente a



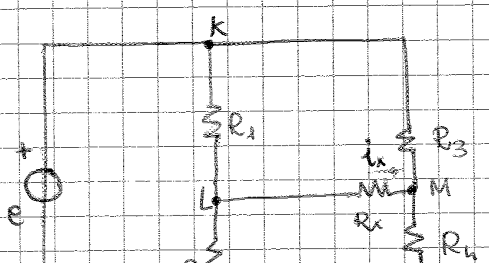
2) ⇒ per il teorema V_T è la tensione "A VUOTO" del circuito A



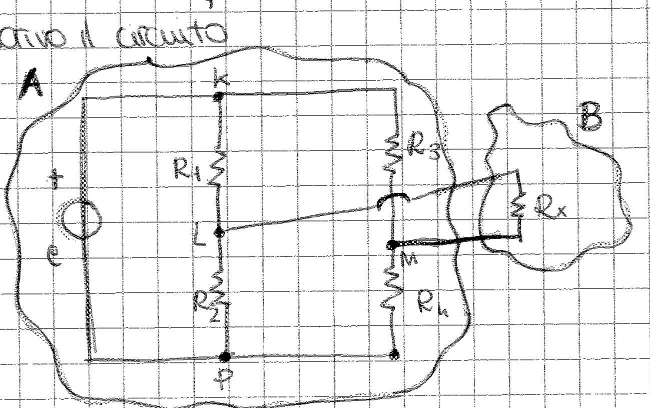
3) ⇒ per il teorema R_T è la resistenza del circuito A con i generatori spenti

17.10.14

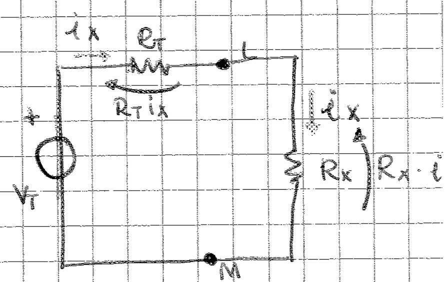
Esempio



→ risolvo il circuito



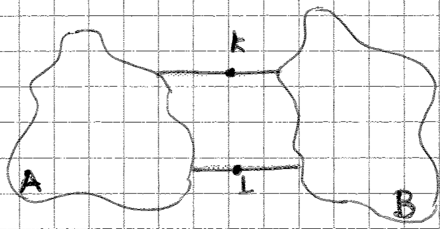
⇒

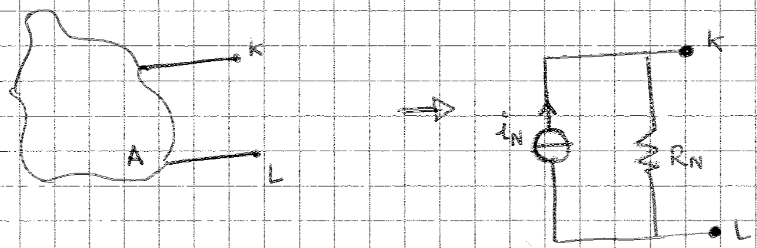


⇒ $V_T = R_T i_x + R_x i_x$

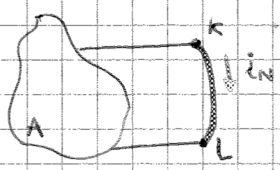
$$\boxed{i_x = \frac{V_T}{R_T+R_x}}$$

TEOREMA di NORTON





1) ⇒ i_N è la CORRENTE di CORTO CIRCUITO tra i terminali di A

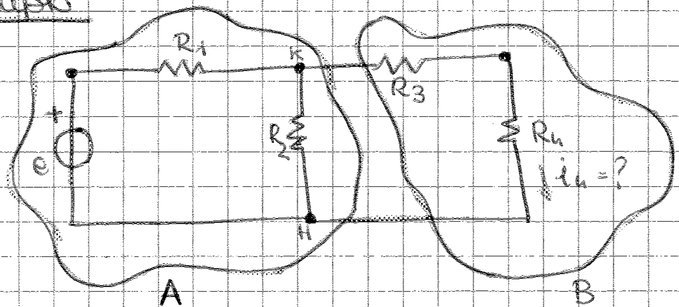


→ la i_N e il verso del generatore di corrente si "rincorrono" attraverso il nodo di riferimento (k o L)

2) ⇒ R_N è la RESISTENZA EQUIVALENTE con i generatori spenti e terminali in circuito APERTO

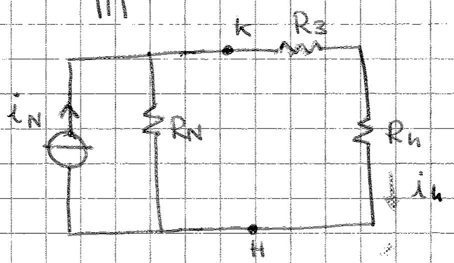
→ $R_N \equiv R_T$

Esempio



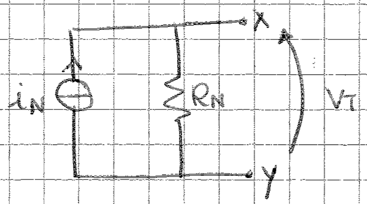
[posso mettere anche R_3 in A]
[Si può risolvere anche con Millman]

|||

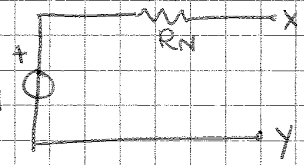


→ $$\boxed{i_4 = i_N \frac{R_N}{R_N + (R_4 + R_3)}}$$

→ applico THEVENIN



$\boxed{V_T = R_N i_N}$ → da NORTON a TH

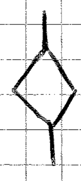


$V_T = R_N i_N$

⇒ pox passare da THEVENIN a NORTON e viceversa, cambiando solo i generatori

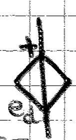
→ da ✱ ottengo $\boxed{R_T = \frac{V_T}{i_N}}$ ⇒ la R_{EQ} di TH/NORTON può essere definita come $\boxed{\frac{\text{tensione A VUOTO}}{\text{corrente di corto circuito}}}$

GENERATORI PILOTATI / COMANDATI (dipendenti)



Vengono influenzati da ciò che accade nel circuito

- generatore dipendente di TENSIONE



→ e_d è la funzione dipendente

→ può essere dipendente da 1 TENSIONE, oppure da 1 CORRENTE

$\boxed{e_d = \alpha V_x}$

α: è ADIMENSIONATO

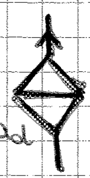
V_x: tensione fra due pnt del circuito = TENSIONE PILOTANTE

$\boxed{e_d = r_m i_x}$

i_x: CORRENTE PILOTANTE

$[r_m] = \Omega$

- generatore dipendente di CORRENTE



a_d è la funz. dipendente

→ può essere dipendente da 1 CORRENTE o da 1 TENSIONE

$\boxed{a_d = \beta i_y}$

β: ADIMENSIONATO

$\boxed{a_d = g_m V_y}$

$[g_m]$ = siemens (S)

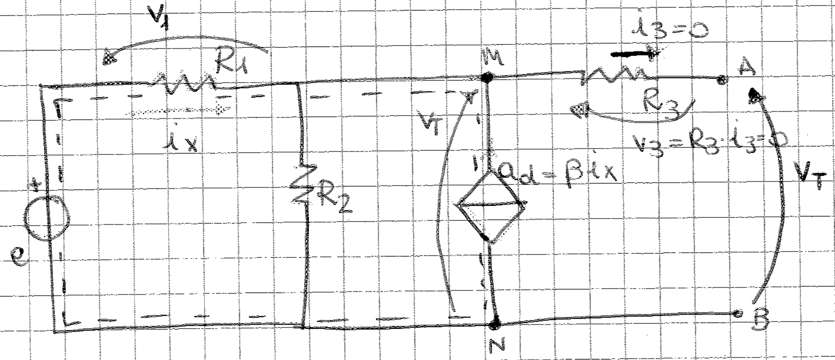
→ applico KVL a PERCORSO CHIUSO $x \to y \xrightarrow{3R} Q \xrightarrow{e} x$

$$V_{xy} = e - 3R i_x$$

$$\boxed{V_{xy} = e - 3R \frac{e}{6R + r_m}}$$

22.10.14

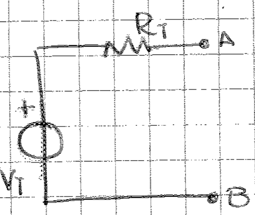
Esempio



→ voglio trovare l'equivalente di Thevenin

→ vedo qui come è sotto circuito A

⇓



1) Trovare V_T = tensione a vuoto in AB

→ $V_{MN} = V_T$ perché V_3 = a zero

→ applico Millman perché ho rami // collegati tra MN

$$V_T = \frac{\frac{e_1}{R_1} + a_d}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{e}{R_1} + \beta i_x}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

→ applico KVL su PERCORSO CHIUSO

$$e - V_1 = V_{MN} = V_T$$

$$e - R_1 i_x = V_T$$

$$\Rightarrow e - R_1 i_x = V_T = \frac{\frac{e}{R_1} + \beta i_x}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{e + \beta R_1 i_x}{\cancel{R_1}}}{\frac{R_2 + R_1}{\cancel{R_1} R_2}}$$

$$e - R_1 i_x = \frac{R_2}{R_2 + R_1}\left(e + R_1 i_x\right)$$

$$e - e\frac{R_2}{R_2 + R_1} = R_1 i_x + \frac{R_2 R_1 i_x \beta}{R_2 + R_1}$$

$$i_x = \frac{e\left(1 - \frac{R_2}{R_2 + R_1}\right)}{R_1\left(1 + \frac{R_2 \beta}{R_2 + R_1}\right)} = \frac{e\left(\frac{\cancel{R_2} + R_1 - \cancel{R_2}}{\cancel{R_2 + R_1}}\right)}{\cancel{R_1}\left(\frac{R_2 + R_1 + R_2\beta}{\cancel{R_2 + R_1}}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{i_x = \frac{e}{R_1 + R_2(1 + \beta)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{i_x = \frac{-i}{\frac{R_2+R_1}{R_2}+\beta}}$$

→ applico KVL su percorso chiuso

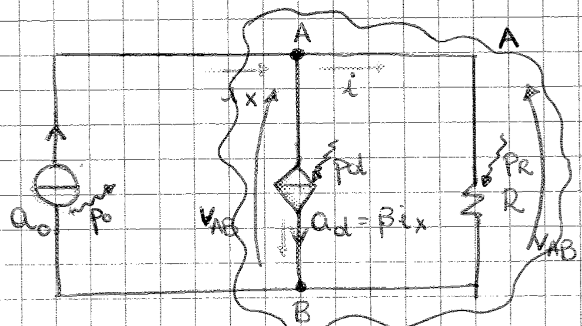
$$V_{MN} + R_3 i = V_{AB}$$

$$-R_1 i_x + R_3 i = V_{AB}$$

$$\frac{R_1\, i}{\frac{R_2+R_1}{R_2}+\beta} + R_3 i = V_{AB}$$

$$i\underbrace{\left(\frac{R_1R_2}{R_2+R_1+R_2\beta}+R_3\right)}_{R_T \text{ perché } V_{AB}=R_T\cdot i} = V_{AB}$$

POTENZA dei GENERATORI PILOTATI



→ $i_x = a_o$

⇒ $a_d = \beta a_o$

→ KCL al nodo A

$$i = a_o - \beta a_o$$

→ $V_{AB} = R\, a_o(1-\beta)$

→ calcolo le POTENZE sui bipoli

- Su a_o ho convenz. dei GENERATORI ⇒ potenza è potenza GENERATA

$$p_o = V_{AB}\cdot a_o = R a_o^2(1-\beta)$$

- Su a_d ho convenz. degli UTILIZZATORI ⇒ potenza è potenza ASSORBITA

$$p_d = V_{AB}\cdot \beta a_o = R a_o^2 \beta(1-\beta)$$

- Su R ho convenz. degli UTILIZZATORI

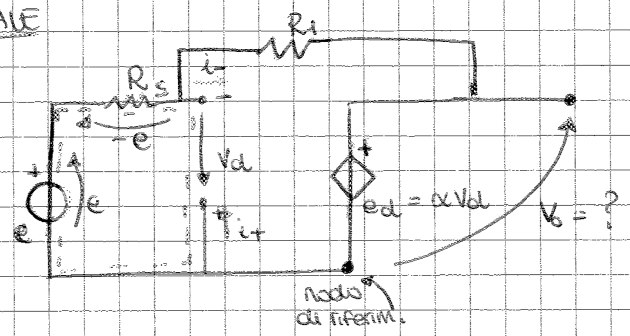
$$p_R = V_{AB}\cdot a_o(1-\beta) = R a_o^2(1-\beta)^2$$

→ Per la CONSERVAZIONE della potenza $p_o = p_d + p_R$

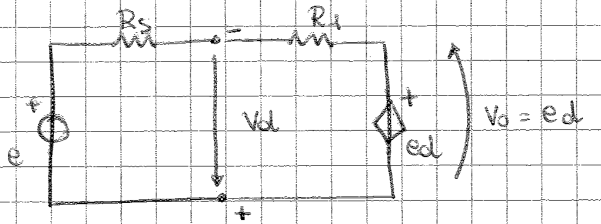
$$\cancel{R a_o^2}\cancel{(1-\beta)} = \cancel{R a_o^2}\beta\cancel{(1-\beta)} + \cancel{R a_o^2}(1-\beta)^{\cancel{2}}$$

$$1 = \cancel{\beta} + (1-\cancel{\beta}) \Rightarrow 1=1 \quad \text{ok!}$$

AMPLIFICATORE OPERAZIONALE



→ riscrivo il circuito in altro modo



→ è circuito con i RAMI in // → uso MILLMAN per trovare Vd

$$V_d = \frac{-\frac{e}{R_s} - \frac{e_d}{R_1}}{\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_1}} = \frac{\frac{-eR_1 + \alpha V_d R_s}{\cancel{R_s R_1}}}{\frac{R_1+R_s}{\cancel{R_s R_1}}}$$

$$V_d(R_1+R_s) = -eR_1 - \alpha V_d R_s$$

$$V_d(R_1+R_s+\alpha R_s) = -eR_1$$

$$\Rightarrow \boxed{V_d = \frac{-eR_1}{R_1+R_s+\alpha R_s}}$$

→ ora che ho trovato V_d posso sostituire in $V_0 = e_d = \alpha V_d$

$$\Rightarrow \boxed{V_0 = \alpha \frac{-eR_1}{R_1+R_s+\alpha R_s}}$$

→ studio la soluzione per $\alpha \to +\infty$

$$V_0 = -\frac{eR_1\alpha}{R_1+R_s+\alpha R_s}$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{-eR_1\alpha}{R_1+R_s+\alpha R_s} = -\frac{\cancel{\alpha}(eR_1)}{\cancel{\alpha}(R_s)} \Rightarrow V_0 = -\frac{eR_1}{R_s} \text{ per } \alpha \to +\infty$$

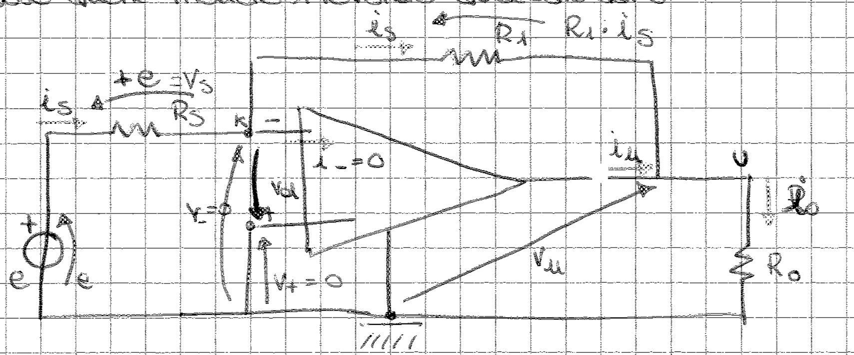
→ V_0 non può essere INFINITO, ma ho posto $\alpha \to +\infty$ e ho

$V_0 = \alpha V_d$ → l'unico modo per cui V_0 non sia ∞ devo avere $V_d \to 0$

→ i_+ e i_- sono = a zero perché c'è CIRCUITO APERTO, ho anche $V_d \to 0$ però!

⇒ qst viene chiamato CORTOCIRCUITO VIRTUALE

→ posso anche mettere 1 resistore attaccato al U



→ essendo $V_- = 0$ e $V_+ = 0$ le uniche due tensioni sulla maglia di sinistra devono compensarsi per il KVL → $e = V_s$

→ i_s → $i_s = \frac{+e}{R_s}$

→ essendo $i_- = 0$, la corrente i_s va verso R_1

→ applico KVL attorno all'AMPLIFICATORE

$\boxed{V_u = -R_1 i_s}$ → le altre tensioni (d - e $+$) sono nulle

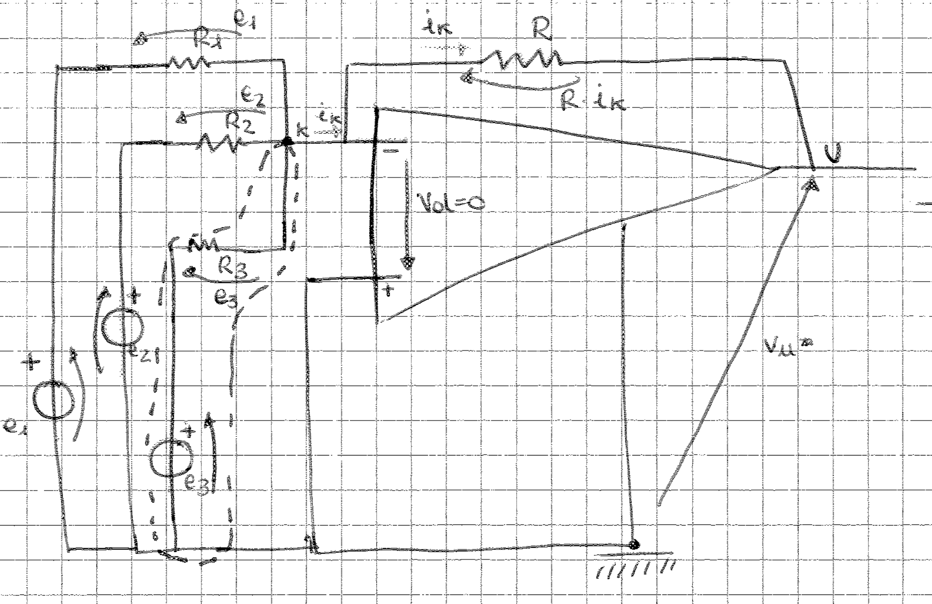
$V_u = -R_1 \frac{e}{R_s} = \boxed{-\frac{R_1}{R_s} e}$ ⇒ ottengo sempre lo stesso risultato nonostante abbia aggiunto R_0

→ $i_0 = \frac{V_u}{R_0} = -\frac{R_1 e}{R_s R_0}$

→ faccio KCL attorno al U

$i_u = +i_0 - i_s$ ⇒ R_0 influenza la CORRENTE ma non la tensione!

CIRCUITO SOMMATORE



→ prendo 3 percorsi chiusi ≠ che passano dal generatore, il resistore inerente k
→ mi rendo conto che sono due sole tensioni
→ per KVL tensione sul generatore è = a quella sul resistore

→ se $b_1 = 1$ ho corrente e tensione su 2R

$2R = E \Rightarrow i_1 = \frac{E}{2R} \Rightarrow \boxed{i_1 = b_1 \frac{E}{2R}}$

→ faccio lo stesso ragionamento per 4R e b_2 $(4R = E)$

→ se $b_2 = 0 \Rightarrow i_2 = 0$

→ se $b_2 = 1 \Rightarrow i_2 = \frac{E}{4R}$

$\Rightarrow \boxed{i_2 = b_2 \frac{E}{4R}}$

→ $i_K = i_0 + i_1 + i_2$ per KCL su K

→ di nuovo tutta la corrente i_K deve arrivare tutta R_1

→ su R_1 ho tensione $V_{R_1} = R_1 \cdot i_K$

→ faccio KVL su amplificatore

Ho sempre solo due tensioni (V_{R_1} e V_u) $\Rightarrow \boxed{R_1 i_K = V_u}$

$$\boxed{V_u = R_1 b_0 \frac{E}{R} + R_1 b_1 \frac{E}{2R} + R_1 b_2 \frac{E}{4R}}$$

$$\Rightarrow V_u = \frac{R_1 E}{R}\left(b_0 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{4}\right)$$

→ vedo b_0, b_1, b_2 come dei bit e uso i bit per chiudere e aprire ~~gli~~ gli interruttori

→ suppongo di avere 1 sequenza del tipo 100 ⇒ 1° interruttore CHIUSO e gli altri due APERTI

(= c'è 1 parte digitale che interpreta i bit per APRIRE e CHIUDERE gli interruttori)

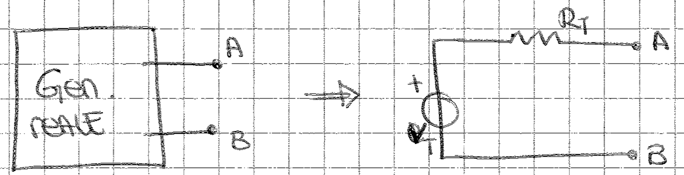
→ i bit sono divisi per dei numeri ⇒ I BIT vengono PESATI

→ il bit + significativo viene diviso per 1, il 2° bit per 2, il 3° bit per 4, il 4° per 8 ecc.

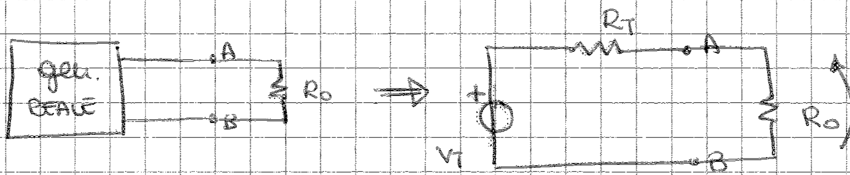
→ 1 circuito di qst tipo viene detto CONVERTITORE DIGITALE/ANALOGICO

→ converte i bit in tensione!

Qualsiasi generatore accessibile da due MORSETTI e non so com'è dentro → lo rappresento con EQUIVALENTE di THEVENIN



→ collego il generatore a 1 CARICO (per es. 1 resistore)

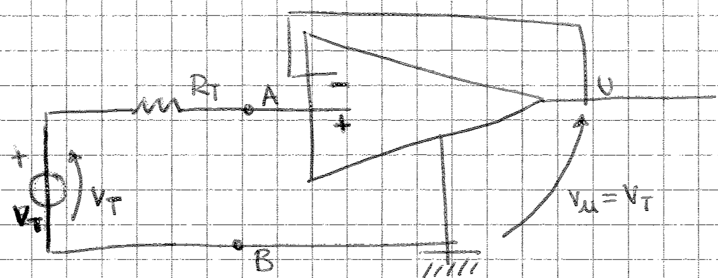


$$V_0 = V_T \frac{R_0}{R_0+R_T}$$

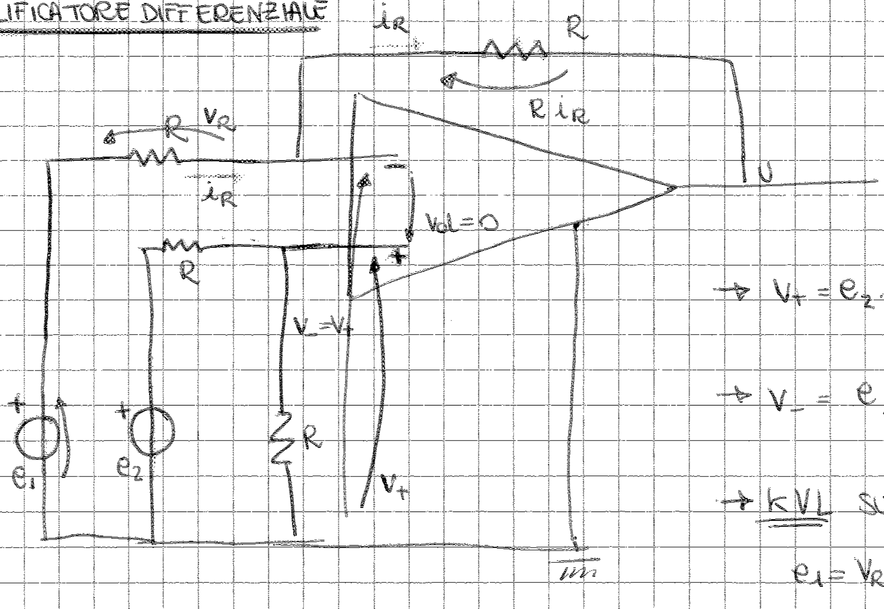
↓

qst è la tensione reale che abbiamo, sempre < di V_T → TENSIONE UTILE

→ se io invece collegassi il generatore reale a 1 INSEGUITORE di tensione ricaverei la tensione VERA che c'è all'interno del dispositivo



AMPLIFICATORE DIFFERENZIALE



→ $V_+ = e_2 \cdot \frac{R}{R+R} = e_2 \frac{1}{2}$

→ $V_- = e_2 \frac{1}{2}$

→ KVL su 1 percorso chiuso

$e_1 = V_R + V_-$

$V_R = e_1 - V_- = e_1 - e_2 \frac{1}{2}$

→ $i_R = \frac{V_R}{R} = \frac{e_1 - e_2 \ldots}{\ldots}$

$$V_{AB}' = e \frac{\cancel{R_V}}{\cancel{R_V}\left(1+\frac{R_S}{R_V}\right)} = e\left(\frac{1}{1+x}\right) = e\left(1-\frac{1}{2}x\right)$$

$\rightarrow \frac{R_S}{R} = x \ll 1$

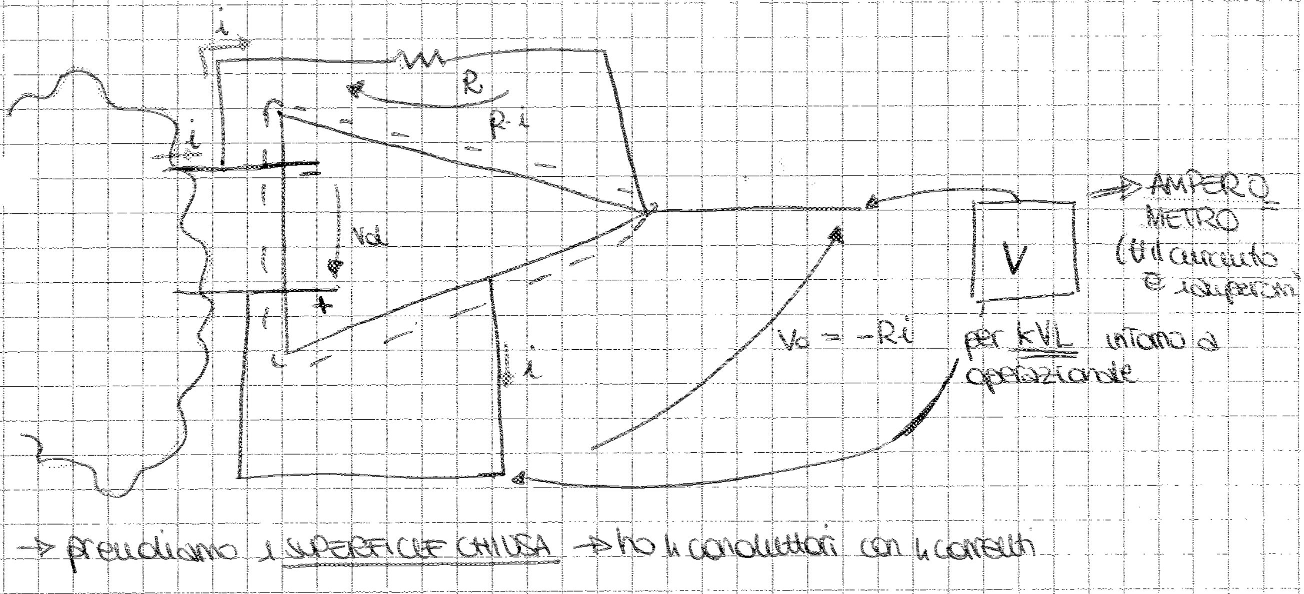
⇒ ERRORE di MISURA RELATIVO

$\rightarrow \varepsilon = \frac{V_{AB}' - e}{e} = \frac{\cancel{e} - \frac{e}{2}x - \cancel{e}}{e} = \boxed{-\frac{x}{2}}$

il misurato è 1 po' + piccolo della verità

⇒ SOTTOSTIMIAMO

MISURATORE di CORRENTE IDEALE



→ prendiamo 1 SUPERFICIE CHIUSA → ho i conduttori con le correnti

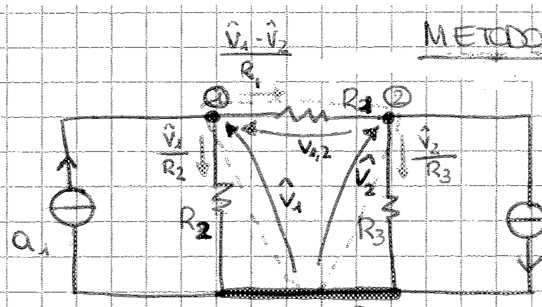
→ $i_- = 0$

→ $i_+ = 0$

→ poi ho i che entra e i che esce

→ la corrente i viene convertita in una tensione per essere misurata

METODO dei POTENZIALI AI NODI



nodo 0 → su qst nodo non applico KCL

→ voglio scrivere le eq. del KCL su nodo 1 e 2 [su N-1 nodi]

→ definisco $\hat{V}_1$, $\hat{V}_2$ come TENSIONI NODALI [$\hat{V}_k$, k = nodo su cui prendo tensione

→ faccio KVL su 0 → 1 → 2 → 0

$$\hat{V}_1 = V_{1,2} + \hat{V}_2 \Rightarrow V_{1,2} = \hat{V}_1 - \hat{V}_2$$

→ KCL su nodo 1

$$a_1 = \frac{\hat{V}_1 - \hat{V}_2}{R_1} + \frac{\hat{V}_1}{R_2}$$

→ KCL su nodo 2

$$\frac{\hat{V}_1 - \hat{V}_2}{R_1} = \frac{\hat{V}_2}{R_3} + a_2$$

$$\begin{array}{l} \text{Da 1} \\ \\ \text{Da 2} \end{array} \begin{cases} \hat{V}_1\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) + \hat{V}_2\left(-\frac{1}{R_1}\right) = a_1 \\ -\hat{V}_1\left(\frac{1}{R_1}\right) + \hat{V}_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) = -a_2 \end{cases}$$

→ sistema eq. indipendenti con incognite $\hat{V}_1$ e $\hat{V}_2$

⇒ riscrivo il sistema come matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$$

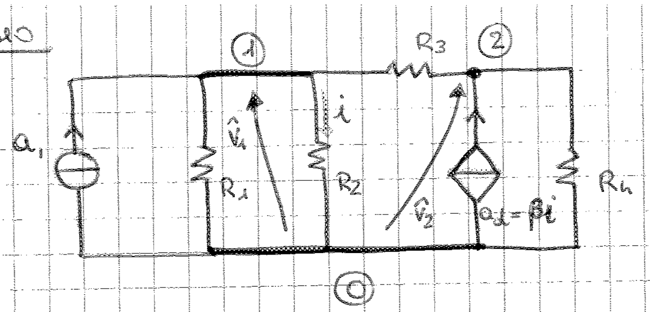
⇒ è 1 sistema $(N-1)\times(N-1)$

$$\begin{pmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$$

→ termine (1,1) ⇒ R_1 e R_2 sono i resistori connessi a 1
→ termine (2,2) ⇒ R_1 e R_3 sono i resistori connessi a 2
→ termine (1,2) ⇒ R_1 è connesso tra nodo 1 e nodo 2
→ termine (2,1) ⇒ R_1 connesso tra 1 e 2

→ qst è 1 matrice smp SIMMETRICA
→ può essere costruita in modo AUTONOMO

Esempio



→ matrice dei coeff

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_d \end{pmatrix}$$

→ trovo quantità pilotante

$\boxed{i = \frac{\hat{V}_1}{R_2}}$ ⇒ riscrivo la seconda riga in funzione di i

$$\rightarrow \left(-\frac{1}{R_3}\right)\hat{V}_1 + \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)\hat{V}_2 = \beta \cancel{i} \rightarrow = \frac{\hat{V}_1}{R_2}$$

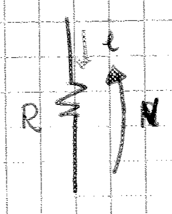
$$\left(-\frac{1}{R_3}-\frac{\beta}{R_2}\right)\hat{V}_1 + \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)\hat{V}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3}-\frac{\beta}{R_2} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

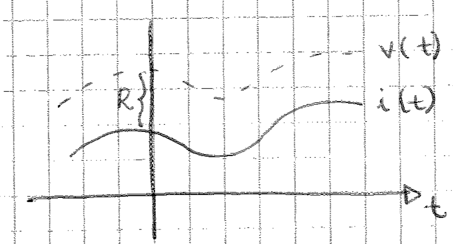
⇒ **non** è + SIMMETRICA (a causa del generatore pilotato)

ELEMENTI con MEMORIA

31.10.14

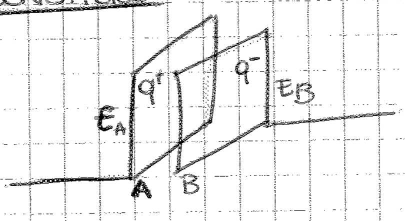


$\boxed{v = Ri}$ → RELAZIONE ALGEBRICA



RELAZIONE ISTANTANEA

CONDENSATORE



→ 2 placche tra le quali si verifica passaggio di CARICA

→ la CARICA $q \propto (E_A - E_B)$ → V

⇒ $\boxed{q = C V}$ → CAPACITA' che ha condensatore di accogliere le cariche

DERIVATA RISPETTO AL TEMPO

→ $\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{d}{dt} CV$

$[C] = \dfrac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \text{Farad } (F)$

$\boxed{i = C \dfrac{dv}{dt}}$ ⇒ RELAZIONE DIFFERENZIALE → EQ. di FUNZIONAMENTO del condensatore (I FORMA)

→ C sempre ⊕ !

→ C è costante che dipende dalla geometria e dal mezzo

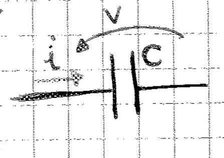
$i\,dt = C\,dv$

$\int_{t_0}^{t} i\,dt = \int_{V_0}^{V(t)} C\,dv$

$\int_{t_0}^{t} i\,dt = C \int_{V_0}^{V(t)} dv = C\left(v(t) - V_0\right)$

⇒ $\boxed{V(t) = V_0 + \dfrac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt}$ ⇒ EQ. di FUNZIONAMENTO del condensatore (II FORMA)

→ la tensione all'istante "t" dipende dalla "storia precedente" della corrente ⇒ il condensatore mantiene MEMORIA



→ USO CONVENZ. degli UTILIZZATORI

→ vedo $p = \frac{dE}{dt}$ → $E = E_0 + \int_{t_0}^{t} p\,dt$

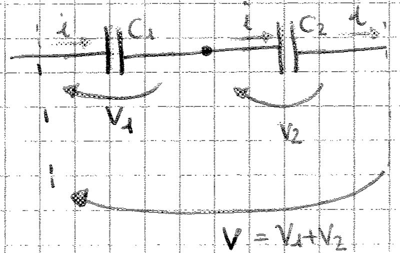
→ sostituisco $p = C\,v\frac{dv}{dt}$ → $E = E_0 + \int_{t_0}^{t} C\,v\frac{dv}{\cancel{dt}}\cancel{dt} =$

$= E_0 + C\int_{v(t_0)}^{v(t)} v\,dv = E_0 + \frac{C}{2}v^2 \geq 0 \Rightarrow E$ sempre ⊕

→ se il condensatore ha dell'energia, posso prelevarla ⇒ in qst senso il condensatore può funzionare come GENERATORE (finché energia va a zero)

2) condensatori in SERIE

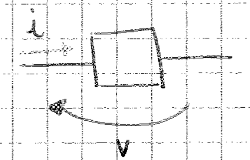
[prendo t_0 in cui $V_0 = 0$]



→ $V_1 = \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i\,dt$

→ $V_2 = \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i\,dt$

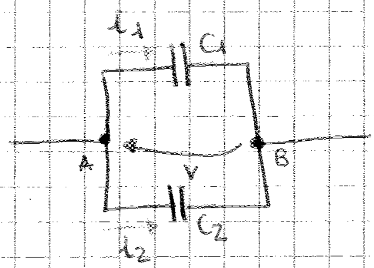
→ $V = \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i\,dt + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i\,dt = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\int_{t_0}^{t} i\,dt$



→ ho sostituito i due condensatori con 1 unico bipolo che è smp 1 CONDENSATORE → in particolare lo indico come CONDENSATORE EQUIVALENTE che ha

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots}$$

3) condensatori in PARALLELO



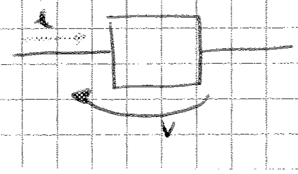
→ v è la stessa per tt e 2 i condensatori

→ $i_1 = C_1\frac{dv}{dt}$

→ $i_2 = C_2\frac{dv}{dt}$

→ faccio KCL in A

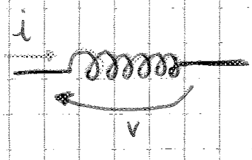
$i = i_1 + i_2 = C_1\frac{dv}{dt} + C_2\frac{dv}{dt} = (C_1 + C_2)\frac{dv}{dt}$

→ 

→ come prima sostituisco i due condensatori in //, con 1 CONDENSATORE EQUIVALENTE che ha

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots}$$

INDUTTORE



→ prendo convenz. degli utilizzatori

→ $\boxed{V = L \frac{di}{dt}}$ ⇒ EQUAZIONE di FUNZIONAMENTO (in forma differenziale)

↳ L è 1 costante sempre ⊕

→ L = INDUTTANZA

→ $[L] = \frac{\text{Volt}}{\frac{\text{Ampere}}{\text{secondi}}}$ = henry (H)

→ $\int_{t_0}^{t} V dt = \int_{i(t_0)}^{i(t)} L\, di = L \int_{i_0}^{i(t)} di = L(i(t) - i_0)$

⇒ $\boxed{i(t) - i_0 = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} V dt}$ ⇒ EQ di FUNZIONAMENTO dell' induttore (in forma integrale)

→ scrivo la seconda eq. per l'istante $t+\Delta t$ e faccio diff.

$$i(t+\Delta t) = i_0 + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t+\Delta t} V dt$$

$$i(t+\Delta t) - i(t) = \cancel{i_0} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t+\Delta t} V dt - \cancel{i_0} - \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} V dt =$$

$$= \frac{1}{L}\left[\int_{t_0}^{t+\Delta t} V dt - \int_{t_0}^{t} V dt\right] = \boxed{\frac{1}{L}\int_{t}^{t+\Delta t} V dt = i(t+\Delta t) - i(t)}$$

→ come per il condensatore prendo $\Delta t \to 0$

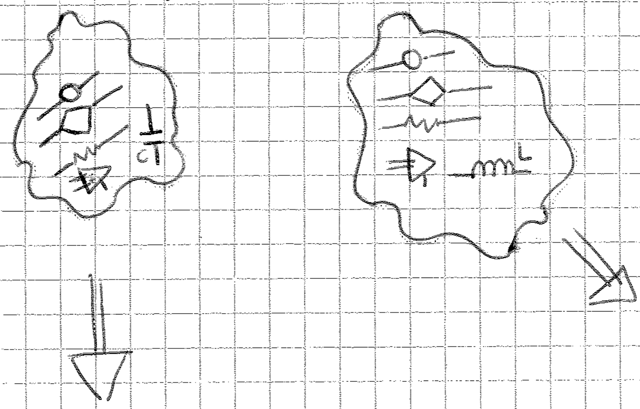
$\lim_{\Delta t \to 0} i(t+\Delta t) - i(t) = 0$ ⇒ per l'INDUTTORE, la CORRENTE è 1 funzione CONTINUA

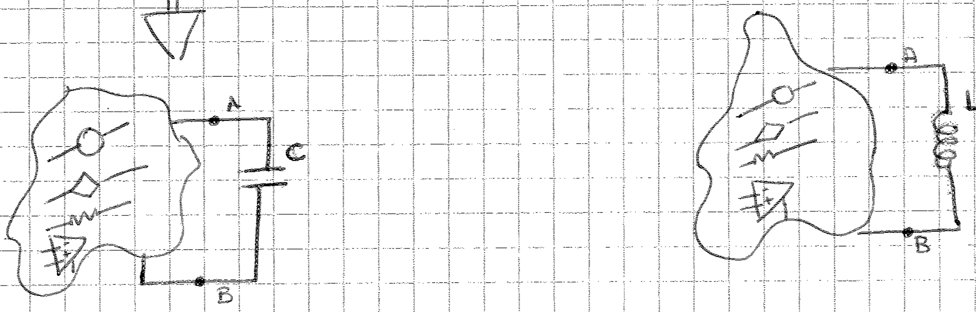
(la tensione può essere discontinua)

CIRCUITO con 1 ELEMENTO di MEMORIA [$\dashv\vdash^C$ o $\_mm^L$]

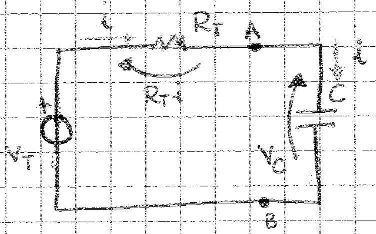
5. 11. 14

Ho due circuiti generici, in uno ho 1 condensatore, nell'altro un induttore





→ sostituisco il sottocircuito con 1 eq. di Thevenin



→ applico KVL su tt il circuito serie:

$$V_T = R_T i + V_C$$

→ uso eq. del condensatore ~~integrale~~ differenz.

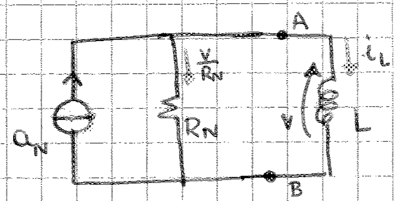
$$V_T = R_T C \frac{dV_C}{dt} + V_C$$

$$\boxed{\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{R_T C} V_C = \frac{1}{R_T C} V_T}$$

→ eq. diff. del I ordine a coeff. costanti, non omogenea

→ V_T è variabile nel tempo

→ stex cosa anche per il circuito con l'induttore (uso però Norton)



→ circuito // ⇒ tensione sempre la stex

→ faccio KCL a nodo A:

$$a_N = \frac{V}{R_N} + i_L$$

$$a_N = \frac{L}{R_N}\frac{di_L}{dt} + i_L$$

$$\boxed{\frac{di_L}{dt} + \frac{R_N}{L} i_L = \frac{R_N}{L} a_N}$$

→ eq. diff. del I ordine a coeff. costanti, non omogenea

⇒ 1 qualunque circuito che contenga N elementi con memoria, mi darà N eq. diff. del I ordine a coeff. costanti non omogenee

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dX_p}{dt}}_{=0} + \frac{X_p}{\tau} = \frac{S}{\tau}$$

$$\frac{X_p}{\cancel{\tau}} = \frac{S}{\cancel{\tau}} \Rightarrow \boxed{X_p = S}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = k_0 e^{-t/\tau} + S}$$ → conosco τ in qst eq. ma non k_0 = costante

→ Ho bisogno di 1 condiz iniziale $x(0)$, e suppongo di saperla

→ per $t=0 \Rightarrow x(0) = k_0 + S$ → io però conosco $x(0)$ ed S quindi pox trovare k_0

$$\Rightarrow \boxed{k_0 = x(0) - S}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = (x(0) - S)e^{-t/\tau} + S}$$ ⇒ qst una soluz valida (conosco τ)

CorolLARIO [per $t \to \infty$]

$$x(\infty) = \underbrace{(x(0) - S)}_{\to 0} \cdot 0 + S \Rightarrow \boxed{x(\infty) = S}$$

→ pox scrivere la soluz sopra in 1 altra forma

$$\boxed{x(t) = (x(0) - x(\infty))e^{-t/\tau} + x(\infty)}$$ ⇒ VARIABILE di STATO

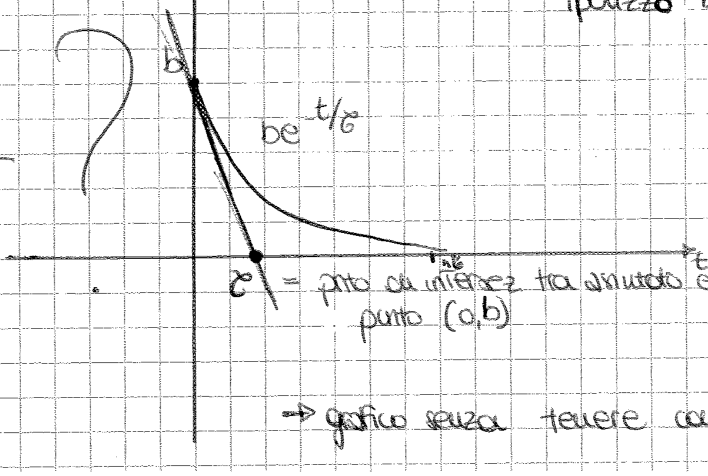
⇒ qst formula può essere applicata se ho 1 circuito con 1 solo elemento di memoria, gen. costanti e $R_T/R_N \geq 0$ (se ho gen. pilotati)

$$\to x(t) = \underbrace{b}_{x(0)-x(\infty)} e^{-t/\tau} + x(\infty)$$

GRAFICO [di $x(t) = be^{-t/\tau} + x(\infty)$]

ipotizzo $b > 0$

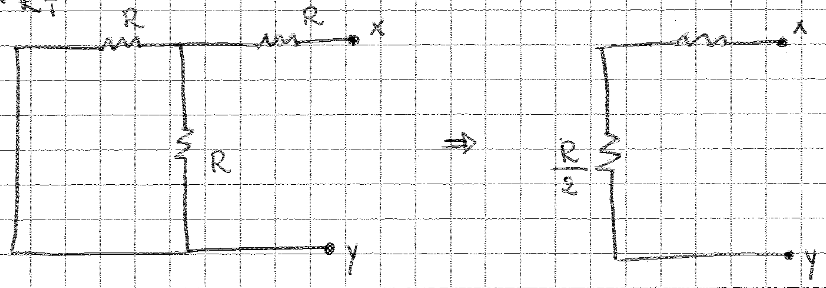
non so come sia il grafico prima perché io inizio con $t=0$ e prendo solo valori $t \geq 0$

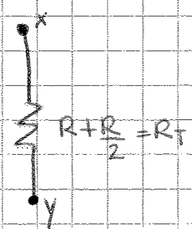


τ = punto di intersez tra asintoto e tg a curva nel punto $(0, b)$

→ grafico senza tenere conto di $x(\infty)$

$\rightarrow \tau = C \cdot R_T$



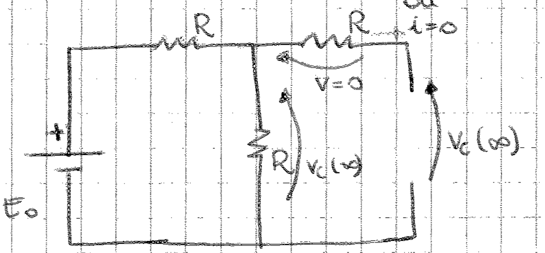


$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{3}{2} CR}$

→ devo trovare solo + $V_c(\infty)$

→ dopo 1 certo valore di t il grafico diventa costante
⇒ per $t \to +\infty$ la tensione diventa <u>COSTANTE</u>

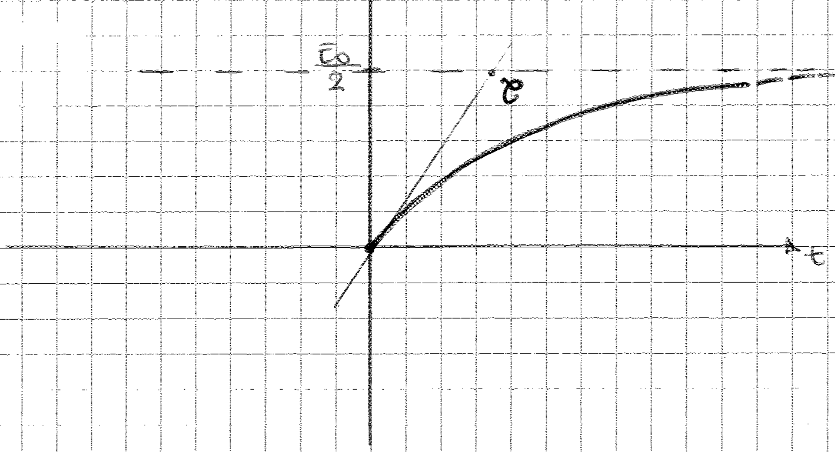
→ eq del condensatore ⇒ $i = C \frac{dV_c}{dt}$ ⇒ se ho $V_c = cost.$ ⇒ $i = 0$ ⇒ <u>CIRCUITO APERTO</u>



→ uso partitore di tensione

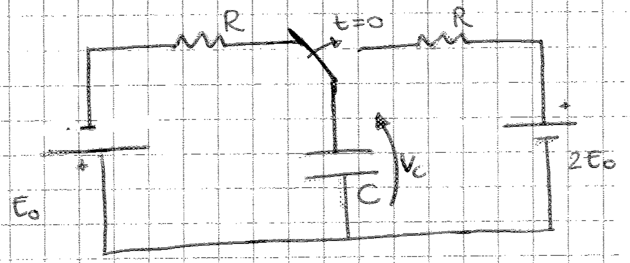
$$V_c(\infty) = E_0 \frac{R}{2R} = \frac{E_0}{2}$$

$$\Rightarrow V_c(t) = \left(0 - \frac{E_0}{2}\right) e^{-\frac{2t}{3RC}} + \frac{E_0}{2} = \boxed{\frac{E_0}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{3RC}}\right) = V_c(t)}$$



Esempio

7.11.14



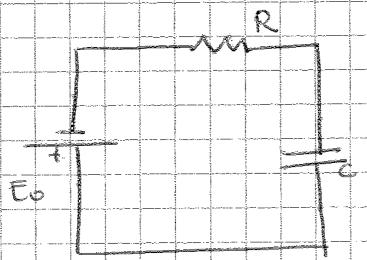
⇒ per t=0 l'interruttore si muove

⇒ $V_C = (V_c(0) - V_c(\infty))e^{-t/\tau} + V_c(\infty)$ per $t \geq 0$

⇒ trovo $V_c(0)$:

la v_c è funz. costante ⇒ $v_c(0^-) = v_c(0^+)$ ⇒ $V_c(0^-) = V_c(0)$

⇒ studio il circuito per $t<0$!



IL circuito è in qui condiz. da tempo "∞"

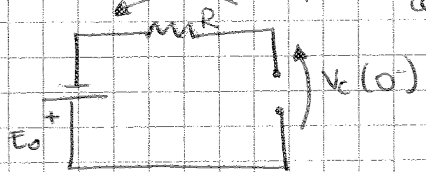
⇒ a causa del gen. costante, tutte le variabili elettriche del circuito sono costanti

⇒ $e^{-t/\tau} \rightarrow 0$ per t grande

⇒ anche la tensione su C è costante

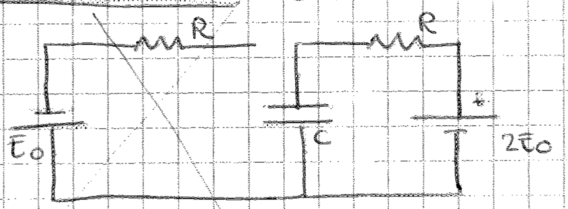
⇒ $i = C\frac{dv}{dt}$ ⇒ $i=0$ sul condensatore ⇒ CIRCUITO APERTO è C

$V_R=0$ perchè non c'è corrente

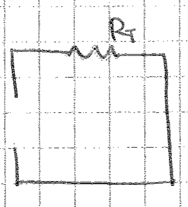
⇒ 

⇒ $V_c(0^-) = \boxed{-E_0 = V_c(0)}$

⇒ Calcolo τ : $\tau = CR_T$ [per $t \geq 0$]



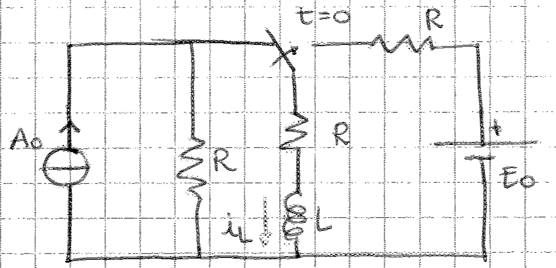
⇒ devo calcolare R_T: prendo in esame solo ciò che è attaccato a C e spengo il generatore



⇒ $R_T = R$

⇒ $\boxed{\tau = CR}$

Esempio



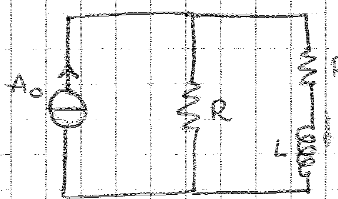
→ per $t=0$ interruttore si sposta

→ $i_L(t) = \left(i_L(0) - i_L(\infty)\right)e^{-t/\tau} + i_L(\infty)$

→ trovo $i_L(0)$:

i_L è 1 funz continua ⇒ $i_L(0^-) = i_L(0^+)$ ⇒ $i_L(0^-) = i_L(0)$

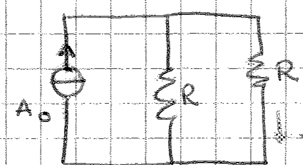
→ studio circuito per $t<0$!



→ ipotizzo che il c.to sia noto così molto prima di $t=0$

→ i_L è costante nel circuito perché c'è 1 gen. cost.

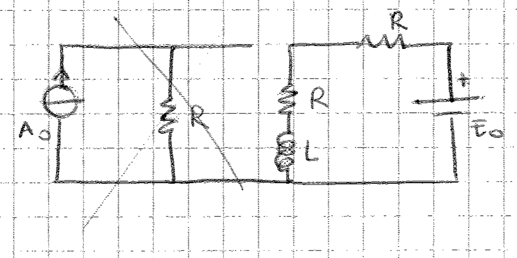
→ $V = L\frac{di_L}{dt} = 0$ ⇒ L è 1 CORTO CIRCUITO

→ 

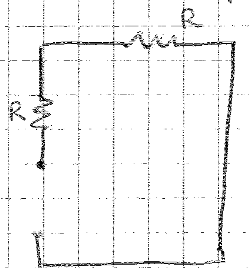
→ per partitore di corrente

$i_L(0^-) = A_0 \frac{R}{2R} = \boxed{\frac{A_0}{2} = i_L(0)}$

→ Calcolo $\tau = \frac{L}{R_N}$; [per $t \geq 0$]



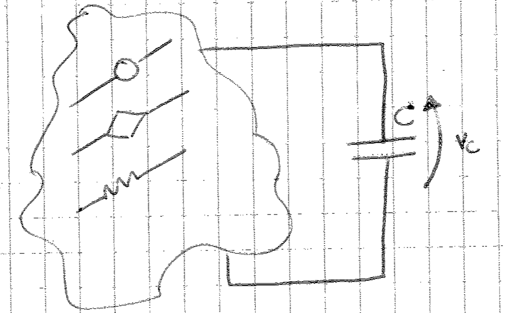
→ devo calcolare $R_N = R_T$ ⇒ spengo gen di tensione



⇒ $R_T = 2R$ ⇒ $\boxed{\tau = \frac{L}{2R}}$

TRANSITORI del PRIMO ORDINE e VARIABILE GENERICA INCOGNITA

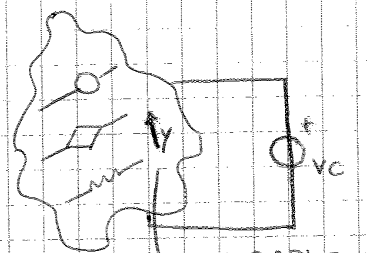
Ho 1 circuito con 1 unico elemento con memoria



→ Suppongo di conoscere v_C

→ allora la sostituisco con 1 gen. di tensione

⇒



→ VARIABILE ELETTRICA INCOGNITA ⇒ la esprimo con sovrapposiz. degli effetti

$$\Rightarrow y = \underbrace{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_k g_k}_{\text{effetti dei gen. interni}} + \beta v_C$$

, $g_{1 \dots k}$ sono i gen. interni

⇒ li indico con u

$\Rightarrow \boxed{y = u + \beta v_C}$ ipotizzo che i gen. siano **COSTANTI**

⇒ u è costante ⇒ U_0

$$\Rightarrow y = U_0 + \beta (v_C(0) - v_C(\infty)) e^{-t/\tau} + \beta v_C(\infty)$$

→ la soluz. per $t \to \infty$ ⇒ $\boxed{y(\infty) = U_0 + \beta v_C(\infty)}$ ⇒ $-\beta v_C(\infty) = -y(\infty) + U_0$

$$\Rightarrow y = \beta (v_C(0) - v_C(\infty)) e^{-t/\tau} + y(\infty) = \left[\beta v_C(0) - \beta v_C(\infty) + \cancel{U_0} - \cancel{U_0}\right] e^{-t/\tau} + y(\infty) =$$

$$= \left[\beta v_C(0) - y(\infty) + U_0 + \cancel{U_0} - \cancel{U_0}\right] e^{-t/\tau} + y(\infty)$$

$$\Rightarrow y = \left[\beta v_C(0) + U_0 - y(\infty)\right] e^{-t/\tau} + y(\infty)$$

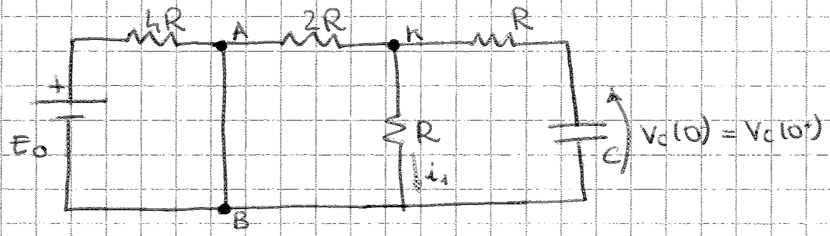
⇓

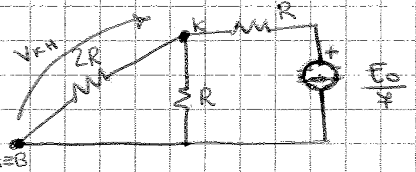
$y(0^+)$ [$y(t)$ può fare salti ⇒ $y(0^-)$ può essere ≠ da $y(0^+)$]

$\Rightarrow V_C(0^-) = E_0 \frac{\cancel{R}}{7\cancel{R}} = \frac{E_0}{7}$ per partitore di tensione

$\Rightarrow V_C(0^-) = V_C(0^+)$ perché v_C è continua

$\Rightarrow$ studio c.to per $t = 0^+$

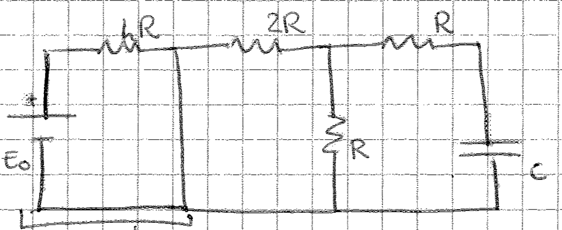




$$\Rightarrow V_{KA} = \frac{\frac{E_0}{7R}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{\frac{E_0}{7R}}{\frac{5}{2\cancel{R}}} = \frac{E_0}{7} \cdot \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow i_1 = \frac{V_{KA}}{R} = \frac{E_0}{35} \cdot 2 \cdot \frac{1}{R} = \boxed{\frac{2E_0}{35R} = i_1(0^+)}$$

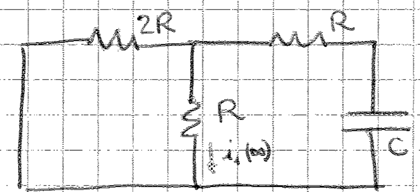
$\rightarrow$ calcolo $\tau = C R_T$: [per $t > 0$]



$$\Rightarrow R_T = \frac{2R \cdot R}{2R + R} + R = \frac{2R^2}{3\cancel{R}} + R = \frac{5R}{3}$$

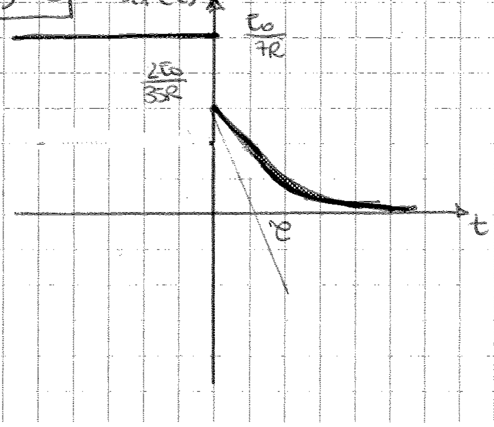
$\hookrightarrow$ qst parte del circuito è trascurabile perché c'è il cortocircuito!

$\rightarrow$ calcolo $i_1(\infty)$:



$\rightarrow$ per $t \rightarrow \infty$ il c.to è inerte

$\Rightarrow \boxed{i_1(\infty) = 0}$



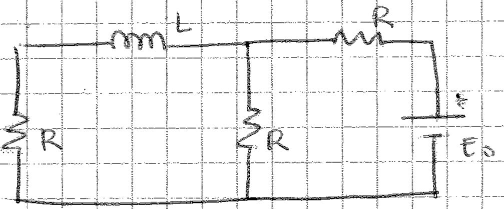
$$\Rightarrow \boxed{i_1(t) = \frac{2E_0}{35R} e^{-\frac{t\,3}{5CR}}}$$ per ~~t≥~~ $t > 0$

35

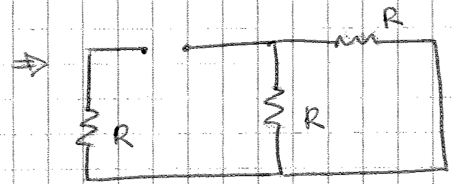
→ applico Millman

$$V_R(0^+) = \frac{\frac{E_0}{R} - i_L(0^+)}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}} = \frac{\frac{E_0}{R} - \frac{A_0}{3}}{\frac{2}{R}} \cdot \frac{R}{R} = \frac{1}{2}\left(E_0 - \frac{A_0 R}{3}\right)$$

→ calcolo $\tau = \frac{L}{R_N} = \frac{L}{R_T}$: [per $t>0$]



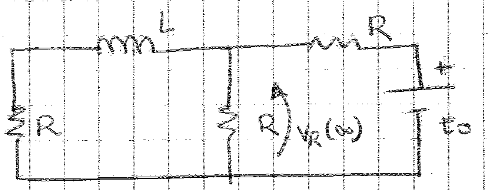
→ per R_T spegn. generatore di tensione e trovo Req.



$$R_{eq} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + R = \frac{R \cdot R}{2R} + R = \frac{R}{2} + R = \frac{3}{2}R$$

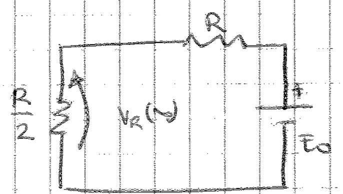
$$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{2}{3}\frac{L}{R}}$$

→ calcolo $V_R(\infty)$:



→ per $t \to \infty$, $e^{-t/\tau} = 0$

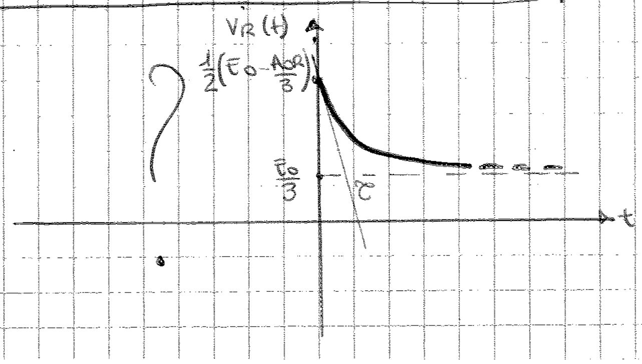
⇒ i_L è costante ⇒ $V_L = 0$ ⇒ corto circuito



→ partitore di tensione

$$V_R(\infty) = E_0 \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R}{2}+R} = \frac{E_0}{3}$$

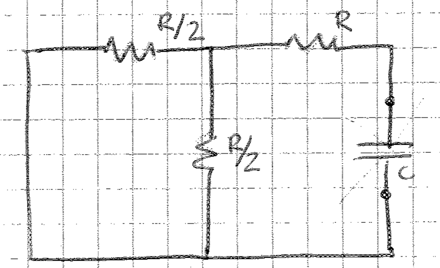
$$\Rightarrow \boxed{V_R(t) = \left[\frac{1}{2}\left(E_0 - \frac{A_0 R}{3}\right) - \frac{E_0}{3}\right] e^{-\frac{3Rt}{2L}} + \frac{E_0}{3}} \text{, per } t>0$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 112

36

→ **Calcolo $\tau = R_T C$:**



→ $R/2$ e $R/2$ sono in // ⇒ $R_{eq} = \frac{R}{4}$

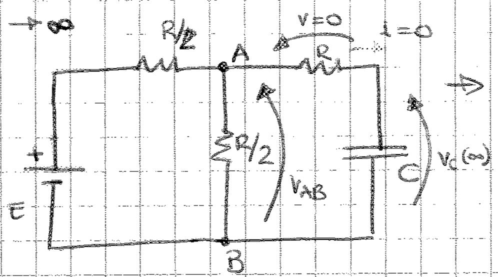
→ $\frac{R}{4}$ in serie con R ⇒ $R_{eq} = R_T = \frac{R}{4} + R$

$$R_T = \frac{5}{4} R$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{5}{4} RC}$$

→ **Calcolo $V_C(\infty)$:** [Studio il circuito come se tensione facesse 1 salto solo]

⇒ per $t \to \infty$



→ e è costante ⇒ anche $V_C = \text{cost}$

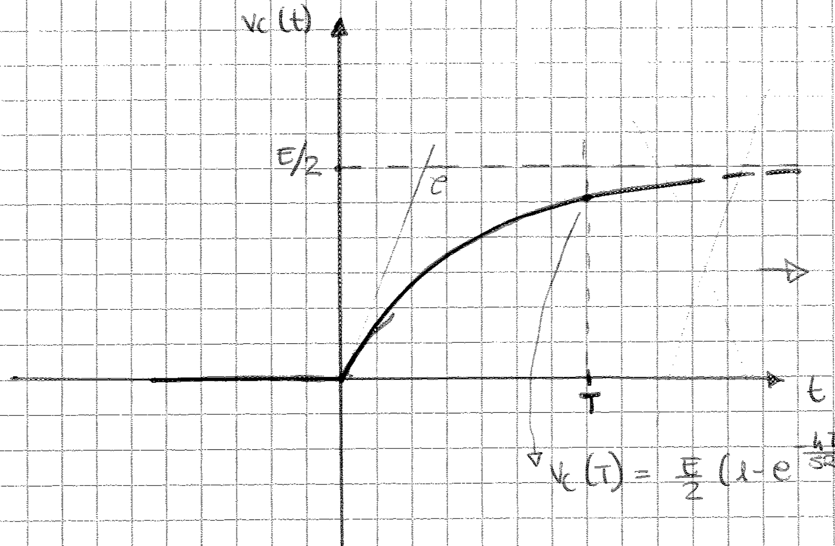
⇒ $i = C \frac{dV_C}{dt} = 0$ ⇒ CIRCUITO APERTO

⇒ $V_C(\infty) = V_{AB}$

⇒ uso partitore → $V_{AB} = \boxed{\frac{E}{2} = V_C(\infty)}$

$$\Rightarrow V_C(t) = \left(0 - \frac{E}{2}\right) e^{-\frac{4t}{5RC}} + \frac{E}{2} \quad \text{per } t > 0$$

$$\boxed{V_C(t) = \frac{E}{2}\left(1 - e^{-\frac{4t}{5CR}}\right)}$$



→ non è valido per $t > T$

$$V_C(T) = \frac{E}{2}\left(1 - e^{-\frac{4T}{5RC}}\right)$$

⇒ metto insieme le due soluzioni!

$$\Rightarrow V_c(t') = V_c(t) = \frac{E}{2}\left(1 - e^{-\frac{4T}{5RC}}\right) e^{-\frac{4(t-T)}{5RC}} \quad , \text{ per } t > T$$

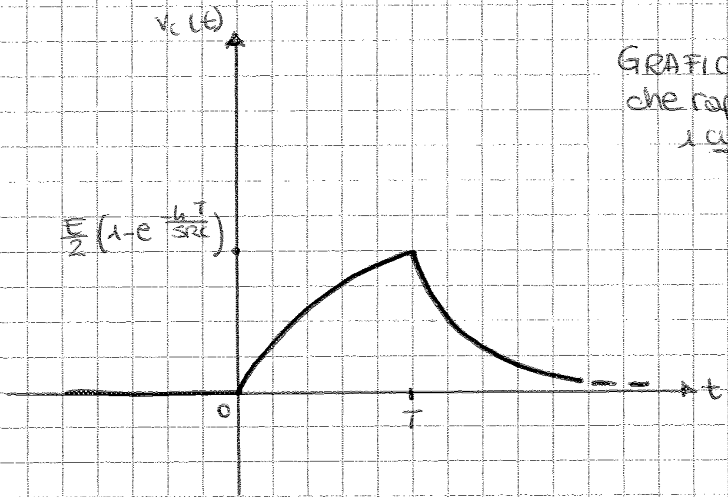
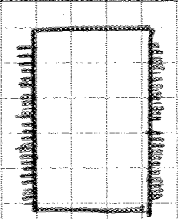
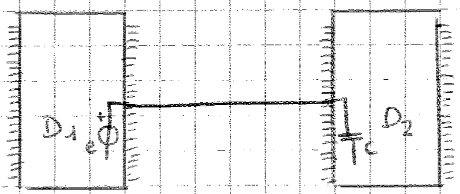


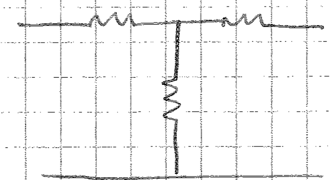
GRAFICO FINALE, che rappresenta i CIRCUITO DIGITALE

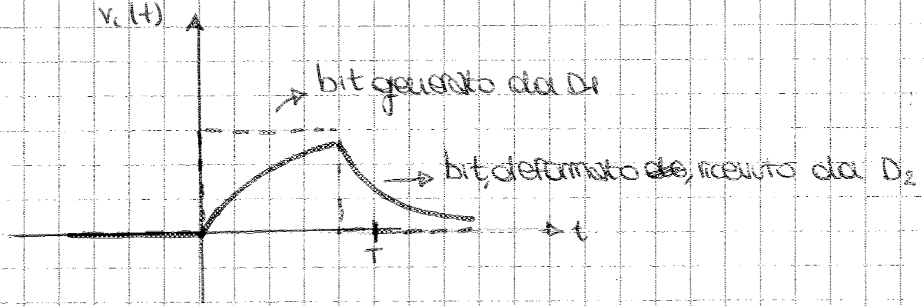


→



- nel primo D_1 viene generato il bit tramite e
- D_2 che riceve il bit può essere rappresentato come 1 C
- il filo in mezzo trasmette il bit, ma in modo deformato, e può essere rappresentato





$\Rightarrow$ In generale

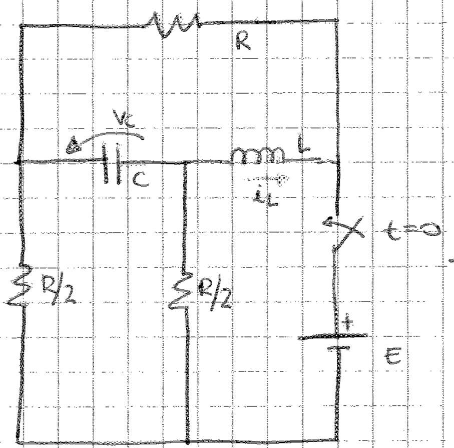
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

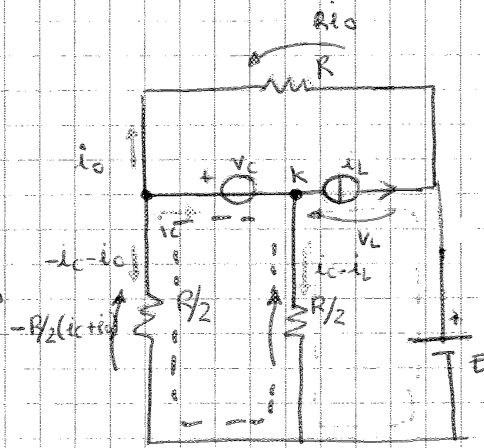
VARIABILI DI STATO, che dipendono dal tipo di elementi di memoria

A, matrice dei **coefficienti**

S, matrice dei termini **NOTI** (dipende dai gen. indipendenti)

Esempio





$\rightarrow$ circuito per $t \geq 0$

$\rightarrow$ ipotizzo di conoscere v_C e i_L

$\rightarrow$ faccio **KVL** su perimetro ESTERNO del c.to

$$\Rightarrow -R/2\,(i_C + i_0) = R i_0 + E$$

$$\frac{3}{2} R i_0 = -\frac{R}{2} i_C - E \rightarrow i_0 = \frac{-\frac{R}{2} i_C - E2}{\frac{3}{2} R}$$

$\rightarrow$ **KVL** su PERCORSO CHIUSO:

$$E + V_L = \frac{R}{2}(i_C - i_L) \quad (1)$$

$\rightarrow$ **KVL** su PERCORSO CHIUSO:

$$v_C + \frac{R}{2}(i_C - i_L) = -\frac{R}{2}(i_C + i_0)$$

$$v_C + \frac{R}{2}(i_C - i_L) = -\frac{R}{2} i_C + \frac{R}{2}\,\frac{2E + R i_C}{3R}$$

$$i_C\left(\frac{R}{2} + \frac{R}{2} - \frac{R}{6}\right) = \frac{R}{2} i_L - v_C + \frac{E}{3}$$

$$i_C \frac{5}{6} R = \frac{R}{2} i_L - v_C + \frac{E}{3} \Rightarrow \boxed{i_C = -\frac{6}{5R} v_C + \frac{3}{5} i_L + \frac{2}{5R} E} \quad (2)$$

→ facendo lo stesso procedimento per l'eq. ② ottengo

$$\boxed{\frac{d^2x_2}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx_2}{dt} + \omega_0^2 x_2 = W}$$, con $W = \frac{dS_2}{dt} + a_{2,1}S_1 - a_{1,1}S_2$

SOLUZIONE dell'EQUAZIONE DIFF. del II ORDINE

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = y \Rightarrow x = \underbrace{x_0}_{\text{soluz. omogenea}} + \underbrace{x_p}_{\text{soluz. particolare}}$$

soluz. particolare → dipende da y

* SOLUZIONE OMOGENEA:

$$x_0 = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$
$$\frac{dx_0}{dt} = A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = A\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2^2 e^{\lambda_2 t}$$

sostituisco nell'eq. diff. di partenza

$$\Rightarrow \frac{d^2x_0}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx_0}{dt} + \omega_0^2 x_0 = 0$$

$$\rightarrow A\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} + 2\alpha A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + 2\alpha B\lambda_2 e^{\lambda_2 t} + \omega_0^2 Ae^{\lambda_1 t} + \omega_0 Be^{\lambda_2 t} = 0$$

$$e^{\lambda_1 t}(A\lambda_1^2 + 2\alpha A\lambda_1 + \omega_0^2 A) = -e^{\lambda_2 t}(B\lambda_2^2 + 2\alpha B\lambda_2 + \omega_0 B)$$

→ affinché l'eq. sia VALIDA devo avere:

$$\begin{cases} \cancel{A}\lambda_1^2 + 2\alpha\cancel{A}\lambda_1 + \omega_0^2\cancel{A} = 0 \\ \cancel{B}\lambda_2^2 + 2\alpha\cancel{B}\lambda_2 + \omega_0^2\cancel{B} = 0 \end{cases} \quad \text{con } A, B \neq 0$$

→ λ_1, λ_2 devono soddisfare l'eq. caratteristica:

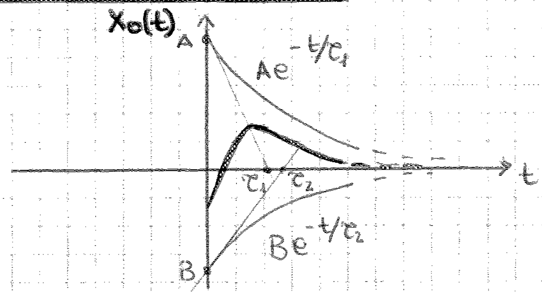
$$\boxed{\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0}$$ che mi darà λ_1 e λ_2 da sostituire in x_0

→ la soluz. omogenea assumerà espressioni diverse a seconda dei valori di α e ω_0, poiché dall'eq. sopra ottengo $\boxed{\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}$

• CASO 1 : $\alpha > 0$ e $\alpha > \omega_0$ [= CIRCUITO SOVRASMORZATO]

→ In qst caso ottengo λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ e DISTINTI, con $\lambda_1 = -\frac{1}{\tau_1}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{\tau_2}$

$$\Rightarrow \boxed{x_0 = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}}$$, per $t \geq 0$



→ per t grande ⇒ $x_0(t) \to 0$

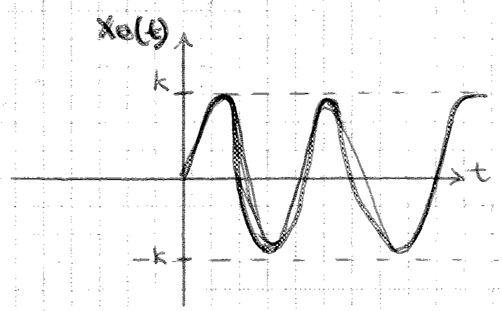
→ è probabile che Ae^{-t/τ_1} e Be^{-t/τ_2} non vadano a zero nello stesso momento

→ per trovare **A** e **B** uso le condizioni iniziali: $x(0^+)$ e $\frac{dx(0^+)}{dt}$

→ CASO PARTICOLARE: $\alpha = 0$ e $\alpha < \omega_0$ [= CIRCUITO NON SMORZATO] (40)

In qst caso ottengo $\lambda_1, \lambda \in \mathbb{C}$ con $\lambda = \pm j\beta = \pm j\omega_0$

$$\Rightarrow \boxed{x_0 = k\cos(\varphi + \beta t)} \quad , \text{per } t \geq 0$$



✱ SOLUZIONE PARTICOLARE

Ipotizzo che i gen. siano solo costanti $\Rightarrow x_p = \text{cost} = X_p$

→ X_p viene det. ponendo il circuito a regime $(t \to +\infty)$ poiché se pongo $t \to +\infty \Rightarrow x(\infty) = \underbrace{x_0}_{\to = 0} + x_p \Rightarrow x(\infty) = x_p$

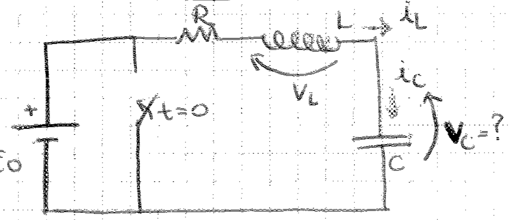
⇒ quindi le due soluzioni complete (REALE e COMPLESSE) risultano essere:

→ $x(t) = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2} + x(\infty)$, con $\alpha > \omega_0$

→ $x(t) = ke^{-\alpha t}\cos(\varphi + \beta t) + x(\infty)$, con $\alpha < \omega_0$

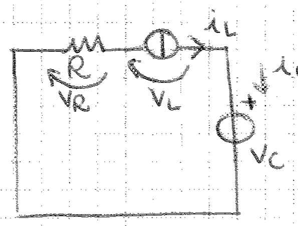
⇒ Solo dopo che ho qst soluzioni complete vado a imporre le condizioni iniziali: $x(0^+)$ e $\frac{dx(0^+)}{dt}$

TRANSITORIO RLC SERIE



→ Ipotizzo di conoscere i_L e V_C e li sostituisco con due generatori.

→ Analizzo il circuito per $t \geq 0$ e cerco i_C e V_L



→ $i_C = i_L$ perché in serie

$$\frac{C\,dV_C}{dt} = i_L \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = \frac{i_L}{C} \quad (1)$$

→ KVL: $V_L = -i_L R - V_C = L\frac{di_L}{dt}$

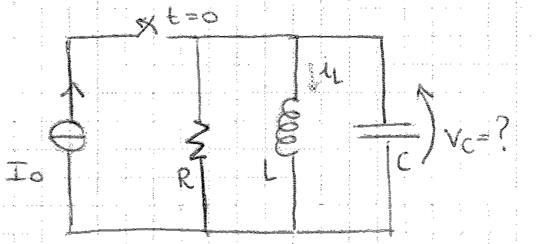
$$\to \frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L} i_L - \frac{1}{L} V_C \quad (2)$$

⇒ metto (1) e (2) a sistema e da questo ricavo la soluz. matriciale

$$\begin{cases} \frac{dV_C}{dt} = \frac{i_L}{C} \\ \frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L} i_L - \frac{1}{L} V_C \end{cases}$$

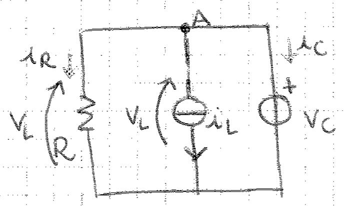
TRANSITORI RLC PARALLELO

(41)



→ ipotizzo di conoscere i_L e V_C e li sostituisco con due generatori

→ Analizzo il circuito per $t \geq 0$ e det. le grandezze coniugate



→ $V_L = V_C$ perchè circuito in //

$L\frac{di_L}{dt} = V_C$ → $\boxed{\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} V_C}$

→ <u>KCL</u> a nodo A : $i_C = -i_L - \frac{V_C}{R} = C\frac{dV_C}{dt}$

→ $\boxed{\frac{dV_C}{dt} = -\frac{1}{CR} V_C - \frac{1}{C} i_L}$

→ metto a sistema le due eq. e ricavo il sistema matriciale con le eq. di stato

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} V_C \\ \frac{dV_C}{dt} = -\frac{1}{CR} V_C - \frac{1}{C} i_L \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} V_C \\ i_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{CR} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ $\frac{d^2 V_C}{dt} + 2\alpha \frac{dV_C}{dt} + \omega_0^2 V_C = 0$

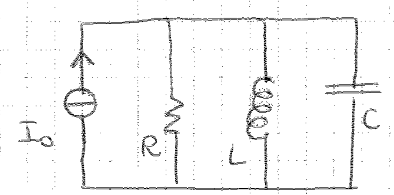
$-tr(A)$ ⇓ $2\alpha = \frac{1}{CR}$

$det(A)$ ⇓ $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

⇒ $\boxed{\alpha = \frac{1}{2RC}}$ $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ Qnd ho 1 cto RLC //, i valori di α e ω_0 saranno smp qsti

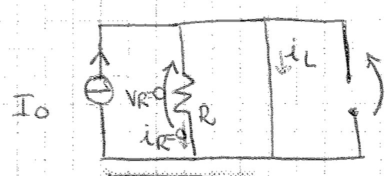
→ ipotizzo $\alpha > 0$ e $\alpha > \omega_0$ ⇒ $V_C(t) = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}$

→ analizzo circuito <u>per t<0</u> per det. $V_C(0^-) = V_C(0^+)$ per trovare A e B



→ Ho 1 gen. COSTANTE ⇒ tt è cost.

→ sostituisco ~~cab~~ L con <u>CORTO CIRCUITO</u> e C con <u>CIRCUITO APERTO</u>



$V_C(0^-) = 0$ perchè in // con corto circuito

→ $i_L(0^-) = I_0$

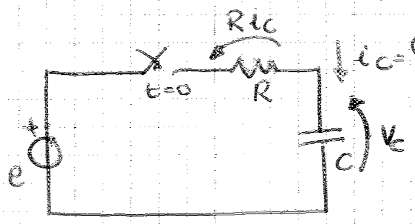
→ $V_C(0) = \boxed{A + B = 0}$

→ $\frac{dV_C(0^+)}{dt} = -\frac{1}{\tau_1} A \underbrace{e^{-t/\tau_1}}_{=0} + B\left(-\frac{1}{\tau_2}\right)\underbrace{e^{-t/\tau_2}}_{=0} = \frac{i_C(0^+)}{C}$

CIRCUITI CON GENERATORI SINUSOIDALI

(4)

28.11.14



$i_c = C\frac{dv_c}{dt}$ → voglio ricavare eq diff per $t \geq 0$

→ KVL : $e = R\,i_c + V_c$

$e = RC\frac{dv_c}{dt} + V_c$

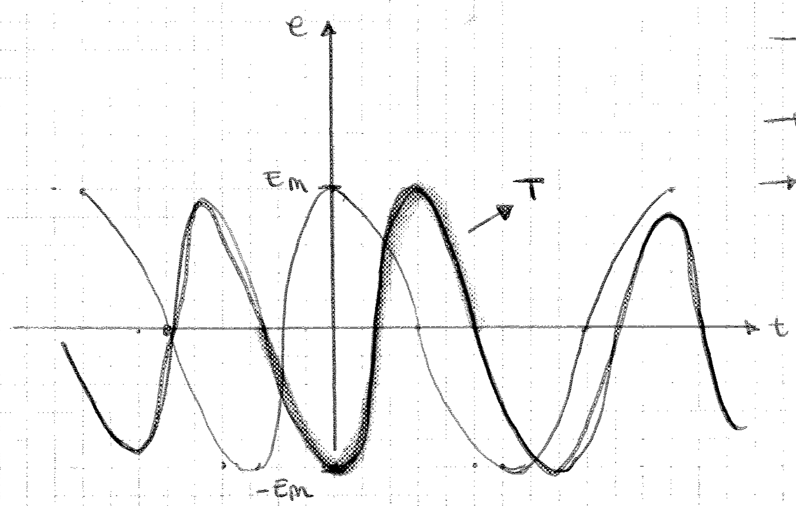
$$\boxed{\frac{dV_c}{dt} + \frac{1}{RC}V_c = \frac{e}{RC}} \quad (1)$$

⇒ $V_c(t) = \underbrace{V_{c_0}(t)}_{\text{soluz. eq omogenea}} + \underbrace{V_{cp}}_{\text{soluz particolare (dipende dal generatore)}}$

→ $V_{c_0}(t) = k e^{-t/\tau}$ ⇒ tende a zero per t grande ($t > 5\tau$)

⇒ ipotizzo che il gen. sia 1 GENERATORE SINUSOIDALE

$e = E_M \cos(\omega t + \beta)$ → FASE



→ E_m = AMPIEZZA dell'oscillazione

→ β = FASE

→ ω = PULSAZIONE

$\left[\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\right]$ (f → frequenza, T → periodo)

⇒ studio V_{cp} per gen. sinusoidale

$V_{cp}(t) = A\cos(\omega t + \vartheta)$ (ω = a quella del gen.) → per trovare A e ϑ, sostituisco $V_{cp}(t)$ in (1) ed esprimo sen e cos con formule di Eulero

* ⇒ $e = E_m \dfrac{e^{j(\omega t+\beta)} + e^{-j(\omega t+\beta)}}{2}$

** ⇒ $V_{cp} = A\dfrac{e^{j(\omega t+\vartheta)} + e^{-j(\omega t+\vartheta)}}{2}$

[In generale $z \in \mathbb{C}$ può essere scritto in due modi:

→ $z = a + jb$ [= CARTESIANO]

→ $z = \rho e^{j\alpha}$ [= POLARE]]

* → $e = \frac{E_m}{2}\left[e^{j\omega t}e^{j\beta} + e^{-j\omega t}e^{-j\beta}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega t}E_m e^{j\beta} + e^{-j\omega t}E_m e^{-j\beta}\right]$

** → $V_{cp} = \frac{A}{2}\left[e^{j\omega t}e^{j\vartheta} + e^{-j\omega t}e^{-j\vartheta}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega t}Ae^{j\vartheta} + e^{-j\omega t}Ae^{-j\vartheta}\right]$

sono $\mathbb{C}$ coniugati rispetto a qu prima
→ $E_m e^{-j\beta} = \hat{E}^*$
→ $A e^{-j\vartheta} = \hat{A}^*$

[sono due num $\in \mathbb{C}$ in forma polare
⇒ $E_m e^{j\beta} = \hat{E}$
⇒ $A e^{j\vartheta} = \hat{A}$ ⇒ FASORE

$$\underset{funz}{e^{j\omega t}}\underbrace{\left(\hat{I}_1 - \hat{I}_2 - \hat{I}_3\right)}_{\in \mathbb{C}} = \underset{funz.}{e^{-j\omega t}}\underbrace{\left(-I_1^* + I_2^* + I_3^*\right)}_{\in \mathbb{C}}$$

⇒ unico modo per cui uguaglianza sia verificata:

$$\begin{cases} \hat{I}_1 - \hat{I}_2 - \hat{I}_3 = 0 & * \\ -\hat{I}_1^* + \hat{I}_2^* + \hat{I}_3^* = 0 & \ast \end{cases}$$

⇒ eq del KCL applicato ai fasori corrispondenti alle correnti
⇒ VALE ancora KCL

→ scrivo i fasori in modo cartesiano

$$\hat{I}_1 = I_{1R} + jI_{1i}$$

$$\hat{I}_2 = I_{2R} + jI_{2i}$$

$$\hat{I}_3 = I_{3R} + jI_{3i}$$

⇒ sostituisco in * i tre fasori riscritti come sopra

$$I_{1R} + jI_{1i} - I_{2R} - jI_{2i} - I_{3R} - jI_{3i} = 0$$

$$(I_{1R} - I_{2R} - I_{3R}) + j(I_{1i} - I_{2i} - I_{3i}) = 0$$

⇒ sostituisco in ✱ i tre fasori sopra

$$-I_{1R} + jI_{1i} + I_{2R} - jI_{2i} + I_{3R} - jI_{3i} = 0$$

$$(-I_{1R} + I_{2R} + I_{3R}) + j(I_{1i} - I_{2i} - I_{3i}) = 0$$

$$-(I_{1R} - I_{2R} - I_{3R}) + j(I_{1i} - I_{2i} - I_{3i}) = 0$$

Ho ottenuto effettivamente il coniugato dell'eq. ottenuta da *

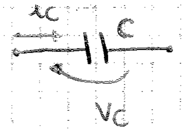
⇒ Si può dimostrare che anche <u>KVL VALE per i FASORI</u>

⇒ Quindi + in generale possiamo dire che **TUTTE le regole valgono con i FASORI**
[per es. PARTITORI, MILLMAN, THEVENIN ...]

⇒ <u>NON</u> si possono MESCOLARE FASORI e grandezze FISICHE!

FASORI → mantiene le stesse dimensioni delle grandezze fisiche di partenza

- Condensatore



$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

(44.)

→ suppongo i_C e v_C OSCILLANTI:

→ $v_C = \frac{1}{2}\left[\hat{V}_C e^{j\omega t} + \hat{V}_C^* e^{-j\omega t}\right]$

→ $i_C = \frac{1}{2}\left[\hat{I}_C e^{j\omega t} + \hat{I}_C^* e^{-j\omega t}\right]$

⇒ $\frac{1}{\cancel{2}}\left[\hat{I}_C e^{j\omega t} + \hat{I}_C^* e^{-j\omega t}\right] = \frac{C}{\cancel{2}}\left[j\omega\hat{V}_C - j\omega\hat{V}_C^*\right]$

$$e^{j\omega t}\underbrace{\left(\hat{I}_C - j\omega C\hat{V}_C\right)}_{\text{deve essere zero}} = e^{-j\omega t}\underbrace{\left(-\hat{I}_C^* + j\omega C\hat{V}_C^*\right)}_{\text{deve essere zero}}$$

$$\boxed{\hat{I}_C = j\omega C\hat{V}_C} \Rightarrow \boxed{\hat{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\hat{I}_C}$$

→ ha dimensione di siemens $[j\omega C] = S$ e prende il nome di AMMETTENZA del conden.,

$$Y_C = j\omega C$$

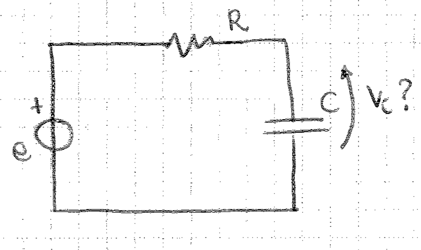
IMPEDENZA del condens.

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

⇓

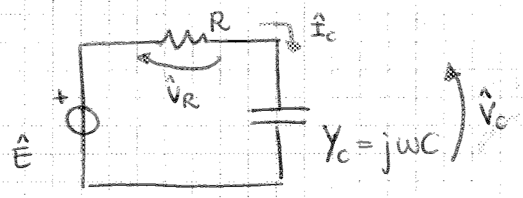
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}\cdot\frac{j}{j} = -\frac{j}{\omega C}$$

Esempio



$e(t) = E_m\cos(\omega t + \beta)$ → fasore $= \hat{E} = E_m e^{j\beta}$

⇒



→ uso partitore:

$$\hat{V}_C = \hat{E}\,\frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \hat{E}\,\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

⇒ $\hat{V}_C = \frac{\hat{E}}{1 + j\omega CR}$

→ ora devo tornare indietro, dal fasore alla grandezza fisica

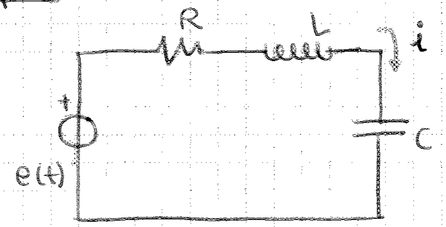
LEGGI dell' INDUTTORE

$\bullet\!-\!\!\text{ℓℓℓℓ}^{L}\!\!-\!\bullet$ $\qquad \hat{V}_L = j\omega L \hat{I}_L \rightarrow \boxed{\hat{I}_L = \frac{1}{j\omega L}\hat{V}_L}$

$\frac{1}{j\omega L} \rightarrow Y_L$ AMMETTENZA dell' induttore

$$\Rightarrow Y_L = \frac{1}{j\omega L}\cdot\frac{j}{j} = \frac{j}{-\omega L}$$

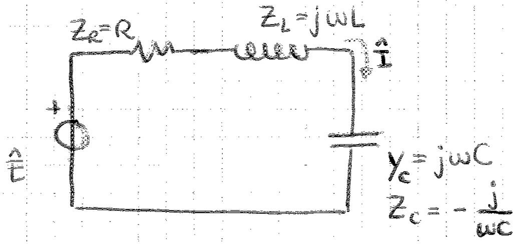
Esempio



$\rightarrow e(t) = E_M\cos(\omega t + \alpha)$

$\rightarrow i = ?$

$\Downarrow$



$\rightarrow \hat{E} = E_M e^{j\alpha}$

$\rightarrow$ devo trovare l' impedenza EQUIVALENTE della serie

$$\Downarrow$$

$$Z_S = \sum_k Z_k$$

$\rightarrow Z_S = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ [= impedenza in forma CARTESIANA]

- In generale $Z = R + jX$ — R RESISTENZA, X REATTANZA (= parte immaginaria dell'impedenza)

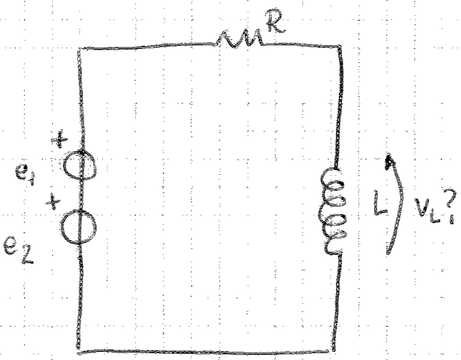
  $\rightarrow Z = |Z|e^{j\angle Z}$, in rappr. POLARE

- In generale $Y = G + jB$, in rappr. CARTESIANA — G Conduttanza, B SUSCETTANZA

  $\rightarrow Y = |Y|e^{j\angle Y}$, in rappr. POLARE

$$\Rightarrow \boxed{V_x(t) = \frac{E_m |Z_p|}{F} \cos(\omega t + \beta + \angle Z_p - \alpha)}$$

Esempio [CIRCUITO CON PULSAZIONI DIVERSE]



$\rightarrow e_1 = A\cos(\omega_1 t + \alpha)$

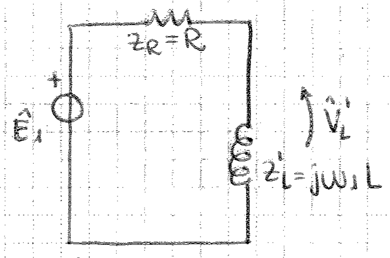
$\rightarrow e_2 = B(\cos\omega_2 t + \beta)$

$\Rightarrow$ Ho 1 circuito con 2 pulsazioni diverse

$\Rightarrow$ uso sovrapposizione degli effetti!

$\Rightarrow$ scompongo in due circuiti:

contributo del gen. e_1



$\rightarrow \hat{E}_1 = Ae^{j\alpha}, (\omega_1)$

$\Rightarrow$ uso partitore:

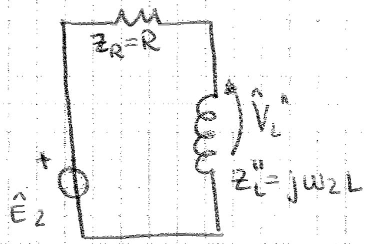
$$\hat{V}_L' = \hat{E}_1 \frac{j\omega_1 L}{R + j\omega_1 L}$$

$$\hat{V}_L' = \hat{E}_1 \frac{\omega_1 L e^{j\pi/2}}{\sqrt{R^2+\omega_1^2 L^2}\, e^{j \operatorname{arctg}\frac{\omega_1 L}{R}}}$$

$$\hat{V}_L' = \frac{A\omega_1 L}{\sqrt{R^2+\omega_1^2 L^2}} e^{j\left(\alpha + \pi/2 - \operatorname{arctg}\frac{\omega_1 L}{R}\right)}$$

$$\Rightarrow v_L'(t) = \frac{A\omega_1 L}{\sqrt{R^2+\omega_1^2 L^2}} \cos\left(\omega_1 t + \alpha + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\omega_1 L}{R}\right)$$

Contributo del gen. e_2



$\rightarrow \hat{E}_2 = Be^{j\beta}, (\omega_2)$

$\rightarrow$ uso partitore:

$$\hat{V}_L'' = \hat{E}_2 \frac{j\omega_2 L}{R + j\omega_2 L}$$

$$\hat{V}_L'' = \hat{E}_2 \frac{\omega_2 L e^{j\pi/2}}{\sqrt{R^2+\omega_2^2 L^2}\, e^{j \operatorname{arctg}\frac{\omega_2 L}{R}}}$$

$$\hat{V}_L'' = \frac{B\omega_2 L}{\sqrt{R^2+\omega_2^2 L^2}} e^{j\left(\beta + \pi/2 - \operatorname{arctg}\frac{\omega_2 L}{R}\right)}$$

$$\Rightarrow v_L''(t) = \frac{B\omega_2 L}{\sqrt{R^2+\omega_2^2 L^2}} \cos\left(\omega_2 t + \beta + \pi/2 - \operatorname{arctg}\frac{\omega_2 L}{R}\right)$$

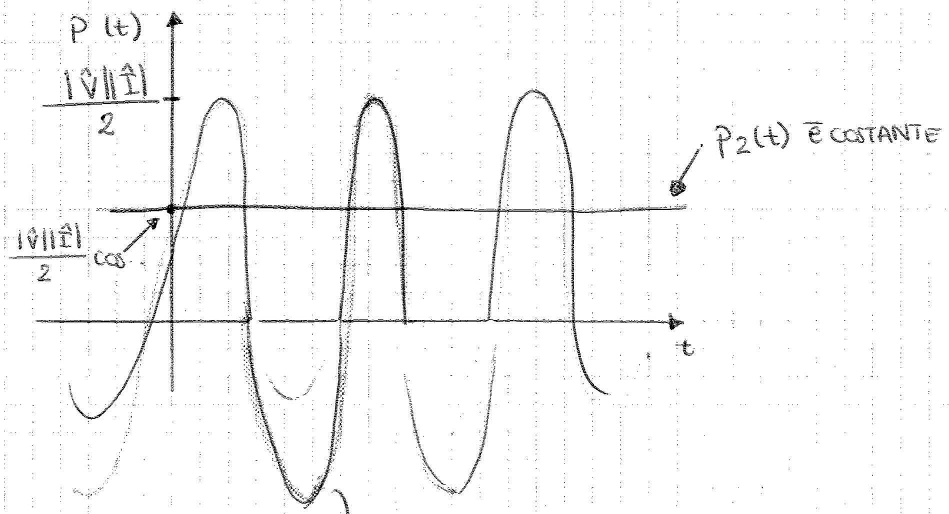
$\Rightarrow$ ora metto insieme i contributi!

$$\Rightarrow \boxed{V_L = V_L'(t) + V_L''(t)}$$

$$= \frac{1}{4}|\hat{V}||\hat{I}|\left[e^{j(\angle\hat{V}+\angle\hat{I}+\underbrace{2\omega t}_{2\omega t})} + e^{-j(\angle\hat{V}+\angle\hat{I}+2\omega t)} + e^{j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})} + e^{-j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})}\right] =$$

$$= \frac{|\hat{V}||\hat{I}|}{2}\left[\frac{e^{j(\angle\hat{V}+\angle\hat{I})} + e^{-j(\angle\hat{V}+\angle\hat{I}+2\omega t)}}{2} + \frac{e^{j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})} + e^{-j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})}}{2}\right] =$$

$$* \quad = \boxed{\frac{|\hat{V}||\hat{I}|}{2}\left[\underbrace{\cos(2\omega t+\angle\hat{V}+\angle\hat{I})}_{p_1(t)} + \underbrace{\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})}_{p_2(t)}\right] = p(t)} \Rightarrow \text{POTENZA ISTANTANEA}$$



$\to T_{p_1} \to \omega_p = \frac{2\pi}{T_p} = 2\omega$

$\Downarrow$ ha pulsazione doppia rispetto a $v(t)$ e $i(t)$

$T_p = \frac{T}{2} \Rightarrow T$ di $v(t)$ e $i(t)$

10.12.14

$$\to p_1(t) = \cos(2\omega t + \angle\hat{V} + \angle\hat{I} + \angle\hat{I} - \angle\hat{I}) = \cos(\underbrace{2\omega t + 2\angle\hat{I}}_{A} + \underbrace{\angle\hat{V} - \angle\hat{I}}_{B}) =$$

$$= \cos(2\omega t + 2\angle\hat{I})\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I}) - \sin(2\omega t+2\angle\hat{I})\sin(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})$$

$\Downarrow \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$\Rightarrow$ Sostituisco $p_1(t)$ in $*$:

$$\frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(2\omega t+2\angle\hat{I})\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I}) - \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\sin(2\omega t+2\angle\hat{I})\sin(\angle\hat{V}-\angle\hat{I}) +$$

$$+ \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I}) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})\left[\cos(2\omega t+2\angle\hat{I})+1\right]}_{P_A} - \underbrace{\frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\sin(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})\sin(2\omega t+2\angle\hat{I})}_{P_R}$$

ampiezza di P_A = P (potenza attiva)

$\Rightarrow$ ora ho 2 termini OSCILLANTI

ampiezza di P_R = Q (potenza reattiva)

$[P] = W$

$\Downarrow [Q] = W$ oppure VAr

CASI PARTICOLARI

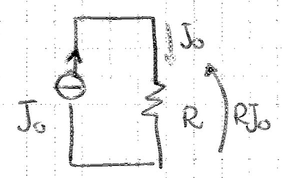
- $Z = R$: $\rightarrow \varphi = \angle \hat{Z} = 0$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}| = P + j\underbrace{Q}_{=0}$ $\Rightarrow P = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|$ $\Rightarrow$ A è solo 1 num. reale

non ho + POTENZA REATTIVA

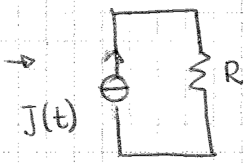
$\rightarrow$ potenza attiva assume max valore che può assumere $\Rightarrow \cos(\angle\hat{V} - \angle\hat{I}) = \cos\angle\hat{Z} = 1$

Esempio



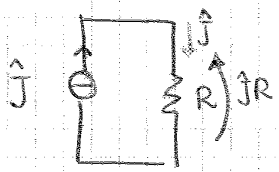
$\rightarrow$ gen di corrente COSTANTE

$\rightarrow p = J_0 R J_0 = R J_0^2 = \text{cost.}$ [= potenz. assorbita da R]



$\rightarrow$ gen. è SINUSOIDALE

$j(t) = J_m \cos(\omega t + \alpha) \Rightarrow \hat{J} = J_m e^{j\alpha}$



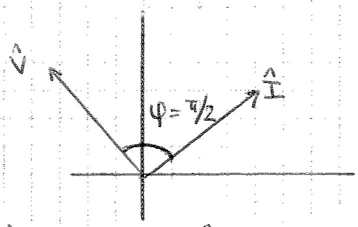
$P = \frac{1}{2}\hat{V}_R\hat{J}^* = \frac{1}{2}R\hat{J}\hat{J}^* = \frac{1}{2}RJ_m^2$ = POTENZA ATTIVA ASSORBITA

$\Rightarrow$ per avere lo stesso effetto $p = P$ $\rightarrow \cancel{R}J_0^2 = \frac{1}{2}\cancel{R}J_m^2$ $\Rightarrow \boxed{J_0 = \frac{J_m}{\sqrt{2}}}$ $\rightarrow$ VALORE EFFICACE

$\rightarrow$ IL VALORE EFFICACE di 1 corrente sinusoidale è il valore di quella corrente COSTANTE che, scorrendo nello stesso resistore, provoca la dissipazione della stessa potenza attiva

- Ho solo INDUTTORE:

$Z = j\omega L$



$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}^* = \frac{1}{2}j\omega L\hat{I}\hat{I}^* = \underbrace{j\frac{\omega L}{2}|\hat{I}|^2}_{\text{c'è solo parte immagin.}} = \underbrace{P}_{=0} + jQ$ $\Rightarrow Q = \frac{\omega L}{2}|\hat{I}|^2 \geq 0$

$\rightarrow$ HO solo POTENZA REATTIVA $\rightarrow p = p_R \rightarrow$ In alcuni intervalli di tempo ho potenza assorbita ⊕, e in altri potenza è ⊖ $\Rightarrow$ è generata

$\Rightarrow$ per $\frac{T}{2}$ L assorbe energia, e per l'altro $\frac{T}{2}$ la genera