NUMERO: 2029A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Ferrero Roberta

MATERIA: Metodi numerici e statistici per l'ingegneria - Prof. Adami, Falletta, gasperini

STATISTICA

PROF.: MARIO GASPARINI
E-MAIL: gasparini@polito.it
http://calvino.polito.it/~gasparini
RICEVIMENTO:

LIBRO: "Probabilità e statistica per l'ingegneria e le scienze", S. Ross, Apogeo
(CAPITOLI 1, 2, 3, 4, 5, 6)

* SIST. IN SERIE:

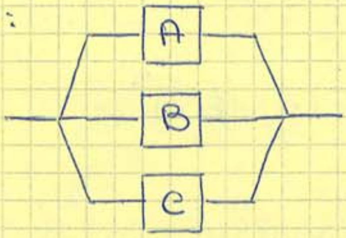
$S =$ " sist. funge " → SSE TUTTI componen fungono

$A =$ " 1° componente funge "

$S = A \cap B \dots$

$P(S) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

* SIST. IN PARALLELO:



$S =$ "sist. funge"

↓

SSE almeno un compon. funge

$S = A \cup B \cup C \dots$

$S^c = A^c \cap B^c \cap C^c \dots$

$P(S) = 1 - P(S^c) = 1 - [P(A^c \cap B^c)] = 1 - [P(A^c) \cdot P(B^c)] =$

$= 1 - [(1 - P(A)) \cdot (1 - P(B))] =$

$= 1 - [1 - P(B) - P(A) + P(A) \cdot P(B)] =$

$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

VARIABILI ALEATORIE

DISCRETE	CONTINUE
finito	∞
$p(x) = P(X = x)$ ← fmp	$P(x \in B) = \int_B f(x)\,dx$ ← fmp
$\sum p(x_i) = 1$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$
$p(x_i) = 0$	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$
$p(x) > 0$	$\int_a^b f(x)\,dx > 0$

vettori e coppie di V.A.

DISTR. CONGIUNTA

$p(x_i, y_j) = P(X = x, Y = y)$ $\qquad P((X,Y) \in A) = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$

DISTR. MARGINALE

$p_X(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j)$

V.A. INDIPENDENTI

$p(x_i, y_i) = p_X(x_i) \cdot p_Y(y_i)$ $\qquad f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

modelli di V.A.

Bernoulli

↳ un'unica estraz.

$p(k) = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

n = num. esperim. (binari e indip.)

k = num. esperim. con successo

p = probabilità di un evento con successo

$E(x) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \cancel{0 \cdot P(X=0)} + 1 \cdot P(X=1) =$
$= \cancel{0 \cdot (1-p)} + 1 \cdot (p) = p$

$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 =$
$= p - p^2 = p(1-p)$

Binomiale (somma di Bernoulliane): $x = \sum x$

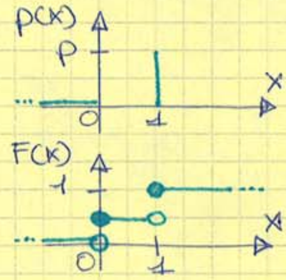
↳ + estraz.

$E(x) = E(\sum x_i) = \sum E(x_i) = \sum^{n} p = np$

$Var(x) = Var(\sum x_i) = \sum Var(x_i) = np(1-p)$

$$p(x) = \begin{cases} 1-p & x=0 \\ p & x=1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-p & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$



Esponenziale $\sim (\lambda > 0)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ & x > 0 \end{cases}$$

$\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = 1$

$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$

$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \int x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx - \frac{1}{\lambda^2}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 330

ELEMENTI DI PROBABILITA'

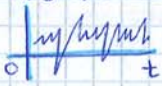
INTERPRETAZIONI del concetto di probabilità di un evento, quando si effettua un esperim.:

- INT. FREQUENTISTA = $\dfrac{\text{num. casi in cui si è registrato l'esito}}{\text{num. totale}}$
  → determinabile operativam. ripetendo in continuaz. l'esp. e ponendosi sempre nelle stesse condiz.
- INT. SOGGETTIVISTA : precisione del livello di fiducia che lo studioso ripone nel verificarsi dell'evento. (PROB. come PROP. OGG.)

SPAZIO DEGLI ESITI, S : insieme di tutti gli esiti plausibili
ESITO = risultato di un evento.

ESPERIMENTO ALEATORIO: piano per cui non è possibile prevedere l'esito con certezza → stocastico, non-deterministico

ESEMPI:

ESPERIMENTO	SPAZIO DEGLI ESITI, S
lancio dado	$S=\{1,2,3,4,5,6\}$
lancio 2 dadi, un 1° e un 2°	$S=\{(i,j),\ i,j=1,2,3,4\}=\begin{Bmatrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\end{Bmatrix}$ permutazione
corsa di 7 cavalli	$S=$ insieme delle $7!$ possibili classifiche (1 CLASSIFICA = 1 ESITO)
misura di una resistenza R	$S=\mathbb{R}^+$
ECG (elettro cardio gramma)	$S=$ insieme di funzioni (tracciati)  studiando intervalli, se troppo grande → evento interess.

EVENTO, E : sottoinsieme di S. → DESCRIZ. VERBALE : " " / DESCRIZ. MATEMATICA : $\subseteq$
Insieme degli esiti possibili di un esperimento.
→ se l'esito dell'esperim. è contenuto in E, si dice che l'evento E si è verificato.
Denotato con $A, B, E, A_1, A_2 \dots$
Suscettibile di descrizione verbale.

ESEMPIO: DADO

$A=$ "esce numero pari" $=\{2,4,6\}\subset S$, mai $A\in S$
$E_1=$ "esce l'1" → è sia un evento che un esito
$B=\{1,2,3\}=$ "esce al max 3"

ESEMPIO: TETRAEDRI

$A=$ "la somma dei tetraedri è pari" $=\{(1,1),\dots(4,4)\}$

ESEMPIO: CAVALLI

$A=$ "il 6 si piazza (tra i primi 3)"
$B=$ "il 6 vince"
$\Big\}$ $B\subset A$ = $B \Rightarrow A$ (in logica)
$B\subset A\subset S$

DIAGRAMMI DI VENN

RAPPRESENTAZ. GRAFICA DEGLI EVENTI PER ILLUSTRARNE LEGAMI LOGICI

$E \cup F$ $\quad$ $E \cap F$ $\quad$ A^c $\quad$ $E \subset F$

ALGEBRA DEGLI EVENTI

- PROP. COMMUTATIVA: $E \cup F = F \cup E$ $\quad$ $E \cap F = F \cap E$
- PROP. ASSOCIATIVA: $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$ $\quad$ $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$
- PROP. DISTRIBUTIVA: $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$ $\quad$ $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$
- LEGGI DI DE MORGAN: $(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$
  $(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$

PROBABILITÀ

P(E) è una funz. di EVENTO

= è un numero reale positivo, compreso tra zero e 1, che si associa ad ∀ evento E dello spazio degli esiti S e deve rispettare i seguenti assiomi:

def. ASSIOMATICA (PROPRIETÀ)
- $0 \leq P(E) \leq 1$
- $P(S) = 1$ ⟶ assoluta certezza che si realizzi un $E_i \subset S$ o S contiene necessariam. tutti esiti possibili del nostro esperim.
- per ∀ successione di eventi a 2 a 2 disgiunti, cioè $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, la probabilità dell'unione è la somma delle prob.:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

preso un insieme finito e numerabile di eventi mutuam. esclusivi la ~~tota~~ probabilità che se ne verifichi almeno uno è $\sum P(E_i)$

Interpretazione CLASSICA $\quad P(E) = \dfrac{\text{casi possibili}}{\text{casi favorevoli}}$

Interpretaz. FREQUENTISTA $\quad P(E) = \dfrac{\text{casi presentatesi}}{\text{num. casi osservati}}$

Es: "4% piove a To" = 4 giorni su 100 piove

Interpretaz. SOGGETTIVA

definizioni insoddisfacenti

Mi restituisce un certo GRADO DI CERTEZZA.

OSSERVAZIONI

- E e E^c sono disgiunti $\xrightarrow{\text{per ASS. 3 e 2}}$ $1 = P(S) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$
  ⇓ $\forall E \subset S: \; P(E^c) = 1 - P(E)$
- $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$
  ↳ dimostraz.: osservando diagr. Venn

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 330

CALCOLO COMBINATORIO

SPAZIO DI ESITI EQUIPROBABILI

$\forall$ esito dello spazio S ha la stessa frequenza di realizzarsi SSE S è finito:

$S = \{1, 2, \dots, N\}$ $\quad P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{N\}) =: p$

$\downarrow$ assiomi 2 e 3

$1 = P(S) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + \dots + P(\{N\}) = N \cdot p$

$\downarrow$ $P(\{i\}) = p = \frac{1}{N}, \quad \forall i = 1, 2 \dots N$

$\downarrow$ assioma 3

$$P(E) = \frac{\# E}{N} = \frac{\text{n° esiti contenuti in } E}{\text{n° tot. di esiti di } S}$$

PRINCIPIO DI ENUMERAZIONE

Dati due $\neq$ esperimenti, aventi rispettivamente esiti m e n, allora complessivam. vi sono $m \cdot n$ diversi risultati, considerando contemporaneam. entrambi i risultati.

ESEMPIO: (dal libro) URNA = 6 BIANCHE + 5 NERE (= 11 palline)

Probabilità che estraendo 2 palline, esse siano una B e una N.

La 1ª pallina viene estratta tra le 11 nell'urna, mentre la 2ª verrà scelta tra le 10 restanti:

$S = 10 * 11 = 110$

$6 * 5 = 30 \rightarrow$ primo estratto B e poi N

$5 * 6 = 30 \rightarrow$ prima estratto N e poi B

Estraz. casuale $\rightarrow$ prob. uniforme $\rightarrow$ 110 esiti sono equiprobab.

$\frac{30 + 30}{110} = \frac{6}{11}$ PROB. CHE SI ESTRAGGANO 1B E 1N

ESEMPIO: quante coppie ♀, ♂ si possono formare da 50 uomini e 20 donne?

$\longrightarrow$ Le coppie possibili sono $50 * 20$.

ESEMPIO: Fila di 13 posti. Classe di 40 persone. Quanti modi di occuparli? (DISPOSIZ. SENZA RIPETIZ.)

$70 * 69 * 68 * 67 \dots$

DISPOSIZ. SENZA RIPETIZ.

In generale, il num. di disposiz. senza ripetiz. di n oggetti r alla volta:

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)\frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

DISPOSIZIONE CON RIPETIZIONE

Il num. di disposiz. con ripetiz. di n elem. r alla volta:

$$n * n * n * \dots * n = n^r$$

ESEMPIO: num. di 13 possibili interrogazioni di 40 studenti.

11|11|'13

ESEMPIO: in un certo paese le targhe sono di 5 caratteri e sono estratte da o 20 lettere o da 10 numeri. Possono esserci ripetiz. (nessun altro vincolo).

1) calcolare num. targhe distinte possibili
2) scelta a caso una targa tra quelle possibili, calcolare la probabilità che:
   A) non ci siano ripetiz. nella targa.
   B) le prime 2 posiz. siano numeri e le ultime 3 lettere.
   C) ci siano 2 numeri e 3 lettere in posiz. qualsiasi.

SOLUZ.: ci sono 5 posti _ _ _ _ _

per ∀ posto posso scegliere 1 tra i (20 lettere + 10 num.) = 30 elementi possibili

1) # targhe distinte: $30 * 30 * \underline{30} * 30 * 30 = 30^5$

$\nexists$ incertezza → fenomeno (meccanismo, esperim.) → $\nexists$ probabi.
aleatorio

La probabilità subentra quando SCELTA "A CASO"
$\downarrow$ PROB. UNIF. → $\boxed{P = \frac{\# CF}{\# CP}}$

Ciascuna targa che identifico è un esito s, avente probabilità:

$$P(s) = \frac{1}{\# s} = \frac{1}{30^5}$$

2A) A è un evento

DISPOSIZ. SENZA RIPETIZ.

$$P(A) = P(\text{"non ci siano ripetiz."}) = \frac{\# CF}{\# CP} = \frac{30 * 29 * 28 * 27 * 26}{30^5}$$

$$= 0{,}7037 = 70{,}37\ \%$$

2B) B è un altro evento (ORDINE)

$$P(B) = \frac{\# CF}{\# CP} = \frac{10 * 10 * 20 * 20 * 20}{30^5} = 0{,}0329$$

2C) $P(C) = \frac{\# CF}{\# CP} = \frac{\text{combinaz. di 5 elem., 3 alla volta}}{30^5} = \frac{\binom{5}{3}}{30^5} = \binom{5}{2} =$

NO ORDINE

$$10 = \frac{5 * 4 * 3}{1 * 2 * 3}$$

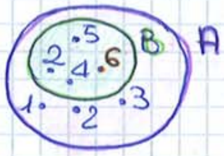
$$= \frac{\frac{5 * 4 * 3}{1 * 2 * 3} \cdot (10 * 10 * 20 * 20 * 20)}{30^5} = 0{,}329$$

NO ORDINE

ogni combinaz. di 2 numeri e 3 lettere vede il ripetersi di uno stesso elem. per ogni posiz. possibile dei 5 posti

4

ES.: <u>LANCIO DI UN DADO EQUO.</u>



A = "Esce num. pari" $\quad P(A) = \frac{1}{2}$

B = "Esce il 6" $\quad P(B) = 1/6$

$$\longrightarrow P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \underset{\substack{\uparrow \\ B \subseteq A}}{=} \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

ES.: <u>DADO NON EQUO</u>

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{2/7}{4/7} = 1/2$$

C = "Esce un numero ≥ 5" = "5 o 6" $\longrightarrow P(C) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{2/7}{4/7} = \frac{1}{2}$$

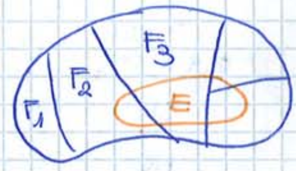
ES.: J = "Juve vince campionato"

In Agosto: $P(J) = 3/20$ (soggettiva)

Ora: $P(J \mid \text{storia del campionato}) \geq 3/20$

PARTIZIONE DI S

In generale consideriamo una PARTIZIONE DI S, cioè un insieme di eventi $F_1, F_2 \dots$ tali che



$$F_i \cap F_j \neq 0 \quad \text{per } i \neq j$$

cioè gli F sono A DUE A DUE DISGIUNTI, e

$$\cup F_i = S$$

cioè S e F sono ESAUSTIVI.

$\Rightarrow$ Una partizione è un insieme di eventi DISGIUNTI ed ESAUSTIVI

Allora per un generico evento E:

per ASS. 3 $\quad E = (E \cap F_1) \cup (E \cup F_2) \dots \quad$ con $(E \cap F_1), (E \cap F_2)$ a 2 a 2 disgiunti

$$P(E) = P(E \cap F_1) + P(E \cap F_2) + \dots =$$

$$\boxed{P(E) = \sum_i P(E \cap F_i)}$$ FORMULA DELLA PARTIZIONE o DELLA PROB. TOT. (1)

e supponendo $P(F_i) > 0$:

$$P(E|F_i) = P(E \cap F_i) / P(F_i)$$

$$P(E) = \sum_i P(E \cap F_i) =$$

$$\boxed{P(E) = \sum_i P(F_i) P(E|F_i)}$$ FORM. PROB. TOT. (2)

E = evento condiz. rispetto a un gruppo di eventi F_i mutuam. esclusi.

ESEMPIO: TARGHE

F_1 = "5 lettere"
F_2 = "1 num _ 4 lett."
F_3 = "2 num _ 3 lett"
F_4 = "3 num _ 2 lett"
F_5 = "4 num _ 1 lett."
F_6 = "5 num."

Al crescere del num. di info. che F sia verificato, $P(E|F)$ cambia.
Se $P(E)$ non cambia, può essere che:

$$P(E) = P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$\rightarrow \boxed{P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)}$$ — E ed F si dicono INDIPENDENTI

In generale invece, essendo $P(E \cap F) = P(F \cap E)$:

$$P(E \cap F) = P(E)\, P(F|E) = P(E)\, P(E|F)$$

ES.: TEST DIAGNOSTICO (LIBRO, 3.7.4)

Analisi del sangue efficace al 99% nell'individuare una certa malattia quando essa è presente.
Si può anche verificare dei "falsi positivi" con prob. 1% (ovvero una persona sana sottoposta al test risulta erroneam. infetta con prob. 0.01).
Se l'incidenza di qst male è dello 0,5%, qual'è la prob. che un soggetto sia malato, condizionata al fatto che le analisi abbiano dato esito positivo?

M: "è malato" $\longrightarrow$ $P(M) =$ PREVALENZA $= 0.005$

+: "il test è positivo"

−: "il test è negativo"

$P(+|M) = 0.99$ SENSITIVITÀ

$P(-|M^c) = 1 - P(+|M^c) = 1 - 0.01 = 0.99$ SPECIFICITÀ (falso positivo)

SCREENING = test svolto su un soggetto a caso.

$$P(M|+) = \frac{P(M\cap +)}{P(+)} = \frac{P(+\cap M)}{P(+)} = \frac{P(+|M)\cdot P(M)}{P(M)\cdot P(+|M) + P(M^c)P(+|M^c)} =$$

$$= \frac{0.99\cdot 0.05}{0.05\cdot 0.99 + (1-0.05)\cdot 0.01} \simeq 0.33 = 33\%$$

Sembra molto basso, in realtà una bassissima prob. a priori di malattia (0.05) viene aggiornata bayesianam. a 33% di molto sup.

PROB. A PRIORI — PROB. A POSTERIORI

$$P(+) = \overbrace{P(+|M)\,P(M)}^{P(+\cap M)} + \overbrace{\underbrace{P(+|M^c)}_{1-P(-|M^c)}\,\underbrace{P(M^c)}_{1-P(M)}}^{P(+\cap M^c)} = 0{,}99\cdot 0{,}005 + 0.01\cdot(1-0{,}005)$$

$$= \text{SENSITIVITÀ}\cdot\text{PREVALENZA} + (1-\text{SPECIFICITÀ})(1-\text{PREVALENZA}).$$

Supponiamo di essere interessati ad uno specifico evento F_J della partiz., allora:

$$P(F_J|E) = \frac{P(F_J\cap E)}{P(E)} \overset{\text{PROB. COND.}}{=} \frac{P(F_J)\cdot P(E|F_J)}{P(E)} \overset{\text{PROB. TOT.}}{=} \frac{P(F_J)\,P(E|F_J)}{\sum P(F_i)\,P(E|F_J)}$$

$$\boxed{P(F_J|E) = \frac{P(F_J)\,P(E|F_J)}{\sum P(F_i)\,P(E|F_J)}}$$ TEOR. (O FORMULA) DI BAYES

ESERCIZIO 3.7.1.

Società di assicurazioni

$\downarrow$ afferma che

Popolazione
- incline a provocare incidenti, P("incline") = 0,3 → P("incidente / anno") = 0,4
- non incline → P("incid. / anno) = 0,2

P(" nuovo assicurato avrà 1 incidente entro 1 anno dalla stipula del contratto")

= P("incidente entro 1 anno" ∩ "incline") + P("incid entro 1 an" ∩ "incl.^{c}") =

= P(" inc" | " incline") · P("incline") + P("incid" | " incline"^{c}) · P("incline"^{c}) =

$= 0,4 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot (1-0,3) = 26\ \%$

ESERCIZIO 3.7.2 (continua.)

Nuovo assicurato ha avuto un incidente entro 1 anno dalla stipula del contratto.

P (" nuovo assicurato è incline agli incidenti ")

H = "incline"

A_1 = " 1 incidente entro 1 anno "

$P(H) = 0,3 \quad P(H^c) = 1-0,3 = 0,7$

$P(A_1|H) = 0,4 \quad P(A_1|H^c) = 0,2$

$$P(H|A_1) = \frac{P(H \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1|H) \cdot P(H)}{P(A_1)} = \frac{0,4 \cdot 0,3}{0,26} \simeq 0,4615$$

$P(A_1) = P(H \cap A_1) + P(H^c \cap A_1) =$

$= P(A_1|H) \cdot P(H) + P(A_1|H^c) \cdot P(H^c) = 0,26$ (esercizio 3.7.1)

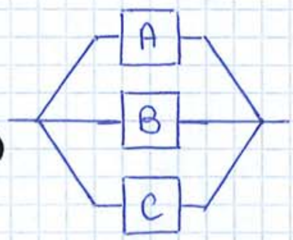
SIST. IN SERIE

S = " sist. funziona "
A = " il primo comp. funge "
B = " // secondo " " "

Sist funziona sse tutti componenti funzionano.

se componenti sono
- INDIPENDENTI: $P(S) = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$
- DIPENDENTI:

SIST. IN PARALLELO



Sistema S funge sse funge almeno A o B o C:

$$S^c = A^c \cap B^c \cap C^c$$

INDIPENDENTI: $P(S) = 1 - P(S^c) = 1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A^c) \cdot P(B^c) =$
$= 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)] = \cancel{1} - (\cancel{1} - P(B) - P(A) + P(A)P(B)) =$
$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

ESERCIZIO 1

A) # TARGHE POSSIBILI $= 30^5$ → # targa ha prob. $\frac{1}{30^5}$

B) $P(B) = \frac{\#CF}{\#CP} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{30^5}$

C) $P(C) = \frac{10 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20}{30^5} = \frac{10^2 \cdot 20^3}{30^5}$

D) $P(D) = \binom{3}{5} \frac{10^2 \cdot 20^3}{30^5} = \binom{2}{5} \frac{10^2 \cdot 20^3}{30^5}$

E) $P(E) = P(D|B) = \frac{P(D \cap B)}{P(B)} = \frac{\binom{3}{5} 10 \cdot 9 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 / \cancel{30^5}}{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 / \cancel{30^5}}$

ESERCIZIO 2

A) $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$

B) $P(B) = \frac{1}{2730}$

C) $P(C) = P(\text{"7, 11, 15"}) \cdot P(\text{"7, 15, 11"}) \cdot P(\text{"..."}) \dots$
$= \frac{3!}{2730}$

D) $P(D) = \cancel{3} \binom{3}{2} \cdot \frac{\cancel{14 \cdot 13}}{\cancel{2730}} = \frac{1}{5}$ (10, 3)

E) $P(E) = P(V|D) = \frac{P(V \cap D)}{P(D)} = \frac{14 \cdot 13 / 2730}{1/5}$

V = "pulce 5 vince"

Esercizio 4

$P(\text{" 5 download senza ripetiz."}) = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96}{100^5} = \frac{\#CF}{\#CP}$

V.A. DISCRETE

↳ X può assumere un insieme finito (numerabile) di valori

fmp: $p(x) = P(X = x)$

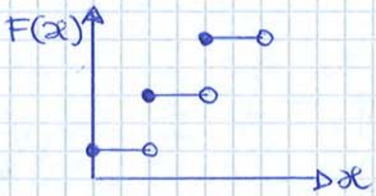
* $p(x_i) = 0$
* $p(x) > 0$
* $\sum p(x) = 1$

descriz. tabulare

x_i	$p(x_i)$

d. grafica

FUNZ. DI RIPARTIZ.: $F(x_1) = \sum_{x \leq x_1} p(x) = P(X \leq x_i)$



funz. a gradini

$F =$ cost. $\forall [x_{i-1}, x_i]$

salto $= p(x_i)$

VETTORI e COPPIE di V.A.

* DISTRIBUZ. CONGIUNTA: $p(x_1, y_1) = P(X = x, Y = y)$
* DISTRIBUZ. MARGINALE: $P_X(x_i) = \sum_J p(x_i, y_J)$

  $P_Y(y_J) = \sum_i p(x_i, y_J)$
* V.A. INDIPENDENTI: $p(x_i, y_i) = p_X(x_i) \cdot p_Y(y_i)$

Esempi di V.A. CONTINUA

. . . . $f(x) = \begin{cases} c\,(4x - 2x^2), & 0<x<2 \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases}$

$c = ?$: $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{0}} + \int_0^2 + \cancel{\int_2^{+\infty}} = c\int_0^2 (4x - 2x^2)\,dx$

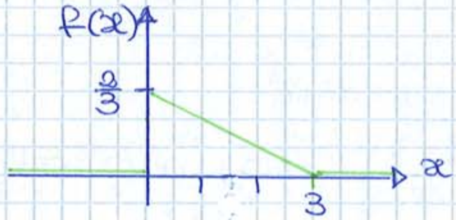
$= c\left[\cancel{4}^{\,2}\,\frac{x^2}{\cancel{2}} - 2\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = c\left[2\cdot 4 - 2\cdot\frac{8}{3}\right] = c\cdot\frac{8}{3}$

$\Rightarrow c = 3/8$

$P(X>1) = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^2 + \cancel{\int_2^{+\infty}} = \frac{3}{8}\int_1^2 (4x - 2x^2)\,dx =$

$= \frac{3}{8}\left[\cancel{4}^{\,2}\,\frac{x^2}{\cancel{2}} - 2\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{3}{8}\left[2\cdot 2 - 2\cdot\frac{8}{3} - \left(2 - \frac{2}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}$

2) X = tempo di attesa di una certa reaz. chim.
(che sicuram. finirà entro 3 h)



$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{altrim.} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{9}x & 0<x<3 \end{cases}$

$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

$= \int_0^3 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9}x\right)dx = \left[\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_0^3 = 2 - 1 = 1$

* Reaz. dura più di un'ora:

$P(X>1) = \int_1^3 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9}x\right)dx = \left[\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_1^3 = 2 - \frac{4}{9} - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) = \frac{4}{9}$

* Reaz. dura tra 1 e 2 ore:

$P(1<X<2) = \int_1^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9}x\right)dx = \left[\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_1^2 = \frac{4}{3} - \frac{4}{9} - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}$

$P(1\le X<2) = \underbrace{\cancel{P(X=1)}}_{=0} + P(1<X<2) = P(1<X\le 2) = P(1\le X\le 2)$

ES.: CONTROLLO DI QUALITÀ DI UN PROCESSO PRODUTTIVO.

Se possiamo classificare ciascun pezzo come difettoso (successo) o no, supponiamo di campionare a caso $\underbrace{100 \text{ pezzi}}_{=n}$ da un processo di difettosità $p = 0.01 = 1\%$
Calcoliamo la probabilità di osservare $\underbrace{\text{al più}}_{=\text{al max}}$ 3 difettosi:

$$P(x \leq 3)$$

Gli eventi $x=1$, $x=2$ e $x=3$ sono DISGIUNTI. → se accade $x=1$ non può verificarsi $x=2$
e non indipendenti tra loro.

In virtù dell' ASSIOMA 3, posso calcolare $P(x \leq 3)$ come somma:

$$P(x \leq 3) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3)$$

$$= \binom{100}{0}\cancel{0.01^0}\, 0.99^{100} + \binom{100}{1} 0.01^1 \cdot 0.99^{99} + \binom{100}{2} 0.01^2 \cdot 0.99^{98} + \binom{100}{3} 0.01^3\, 0.99^{97} =$$

→ FUNZ. INDICATRICE $I = [1,0]$ implica se evento $A = \{$"comp. difettoso"$\}$ è verificato (pag. 93)

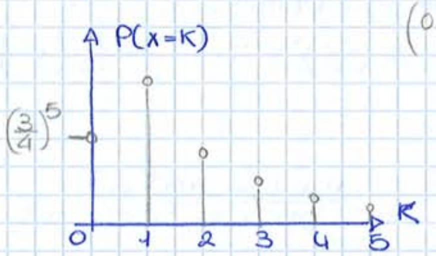
ES.

Selezioniamo n 5 figli di coppie di genitori eterozigoti per un carattere mendeliano con alleli A (dominante) e B (recessivo).
Tracciare il grafico della f.m.p. (funzione di massa di probabilità) di x = num. di figli omozigoti recessivi

mamma AB
papà AB
figlio BB, $p = \frac{1}{4}$

Ponendo $n=5$, si ottiene uno schema di Bernoulli

$$P(x=k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(1-\frac{1}{4}\right)^{5-k} \qquad k = 0,1,2,3,4,5$$



VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

In generale, una v.a. è un aspetto numerico di interesse di un esperim. aleatorio.
Indicata con **X** (ovvero **Y** etc.) la v.a.,

se i valori che x può assumere (a seconda del caso) sono un insieme finito e numerabile, allora x si dice **V.A. DISCRETA** con f.m.p $P(x=k)$
$x_A \longrightarrow p(x_A)$

V.A. CONTINUE
↓
insieme continuo di valori poss. (intervallo di num. reali)

La x trattata fino ad ora è detta X binomiale con parametri n e p.

Nel caso $n=1$, x è binaria (2 valori) e si chiama V.A. BERNOULLIANA con f.m.p. semplice

K	P(x=k)
0	$1-p$
1	p

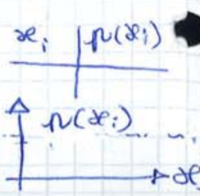
Sia X una v.a. discreta, che può assumere tutti i valori $x_1, x_2 \dots$ allora si definisce funz. di massa di probabilità (f.m.p.):

$$p(a) := P(X=a)$$

ed è $\neq 0$ su insiemi al più numerabili, infatti:

$$p(x_i) > 0 \quad i = 1,2\dots$$
$$p(x) = 0 \quad \forall \text{ altro } x \quad \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

Tale funz. $x_1 \mapsto p(x_1)$ può essere descritta in forma tabulare o in forma grafica



Torniamo alla v.a. x generica e alla sua f.m.p. un modo per descrivere la legge (o distribuzione) di probabilità x.

Si definisce **VALORE ATTESO** di X =

$X = x \rightsquigarrow \boxed{E(X) = \sum_i x_i \, p(x_i)}$

$\frac{\sum x_i N_i}{N} = \sum x_i p_i =: E(X)$ MEDIA

Per analogia, $E(x)$ è come il BARICENTRO della distribuzione, cioè è la MEDIA PESATA dei valori possibili di X, usando come pesi la prob. che tali valori vengono assunti da X

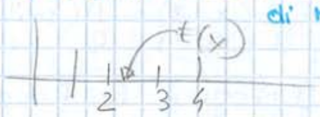
(media)

ES.: TETRAEDRI

$E(X) = \sum x \, p(x)$
$= 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 2,5$

$E(Y) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{5} = 2,2$

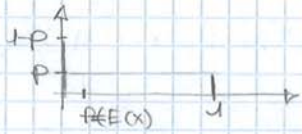
$E(X)$ non è il valore che ci aspettiamo ma è il lim. a cui tende il valore medio su un num. cresc. di ripetiz.



ES: BERNOULLIANO

x	$p(x)$
0	$1-p$
1	p

$E(x) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$

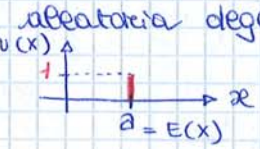


Essendo X un valore di verità di un certo evento (successo), $p (= E(x))$ è una specie di grado di ...

PROPRIETÀ del valore atteso

Il valore atteso di X gode delle seguenti proprietà: (117)

(119) - se X è una costante a, cioè una variabile aleatoria degenere, $P(X=a)=1$
allora
$E(X) = E(a) = a$



- se $Y = a + bX$, allora
$E(Y) = E(a+bX) = a + b\,E(X)$ (linearità)

In generale, $Y = g(x)$ è una funzione,
$E(Y) = E(g(x)) = \sum g(x)\,p(x)$ dimostrazione
allora, se g è lineare $g(x) = a + bx$,

(118) $E(g(x)) = E(a+bX) = \sum g(x)p(x) = \sum (a+bx)p(x) = \sum a p(x) + \sum bx\,p(x) =$
$= a \underbrace{\sum p(x)}_{=1} + b \sum x\,p(x) = a + b\,E(x)$

- $E(\underbrace{X+Y}_{g(x,y)}) = E(X) + E(Y)$

(120)
$= \sum (x_i + y_j) \cdot p(x_i, y_j) =$
$= \sum x_i\, p(x_i, y_j) + \sum y_j \cdot p(x_i, y_j) =$
$= \sum_i x_i \sum_j p(x_i, y_j) + \sum_j y_j \sum_i p(x_i, y_j) =$
$= \sum x_i\, p_X(x_i) + \sum y_j\, p_Y(y_j) =$
$= E(x) + E(y)$

Esempio TETRAEDRI
$E(z) = E(x+y) = E(x) + E(y) = 2,5 + 2,2 = 4,7$

Esempio BINOMIALE
Sia X binomiale, cioè
$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots n$
allora $E(x) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
oppure, se pensiamo
X = num. successi su n prove sing.
cioè $Y_i \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ num. successi i-esima prova
$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$
$E(x) = E\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right) = \sum E(Y_i) = \sum p = np$

capitolo 4

8

ESEMPIO Il numero # di difetti su una carrozzeria nuova è una v.a. di Poisson con "media" (cioè valore atteso) $\lambda = 0{,}2$. Calcolare
1) proporzione di auto che escono senza difetti.
2) proporzione di auto che esce con più di 2 difetti.

In qst caso, "proporzione" (su grande quantità di prodotto) coincide con concetto di probabilità.

1) $P(X=0) = \frac{e^{-\lambda}}{0!}\lambda^0 = e^{-0{,}2} = 0{,}81$

2) $P(X>2) = P(X\geq 3) = 1 - P(X\leq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) =$
$= 1 - e^{-0.2} - \frac{e^{-0.2}}{1!}0{,}2 - \frac{e^{-0{,}2}}{2!}(0{,}2)^2 = 0{,}008 = 3‰$

ALGEBRA DEI VALORI ATTESI

Def.: il valore atteso di una funz. v.a. $g(X)$ è
$$E(g(X)) = \sum g(x)\,p(x)$$
per esempio, se $g(x) = X$ è l'identità,
$$E(x) = \sum x\,p(x)$$

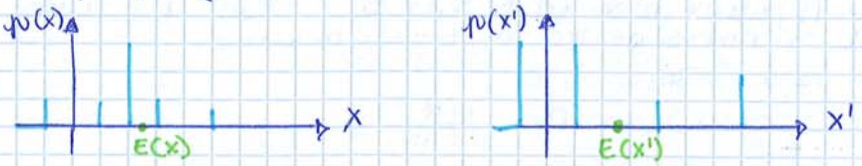
Consideriamo per esempio la funz. SCARTO
$$g(X) = X - E(X) = X - \mu_X$$
Il valore atteso dello scarto è, (sfruttando la linearità di $E(x)$):
$$E(X - E(X)) = E(X - \mu_X) = E(X) - E(\overset{\text{costante}}{\mu_X}) = \mu_X - \mu_X = 0$$

Il valore atteso di una funzione di vettore aleatorio $g(X,Y)$:
$$E(g(X,Y)) = \sum g(x,y)\,p(x,y)$$
f.m.p. congiunta

ESEMPIO: $g(X,Y) = X$
densità marginale di $X = p_X(x)$
$$E(g(X,Y)) = \sum_x\sum_y x\,p(x,y) = \sum_x x\left(\sum_y p(x,y)\right) = \sum x\,p_X(x) = E(X)$$

ESEMPIO: $g(X,Y) = X+Y$
$$E(X+Y) = \sum_x\sum_y (x+y)\,p(x,y) = \sum_x x\sum_y p(x,y) + \sum_y y\sum_x p(x,y) =$$
$$= \sum_x x\,p_X(x) + \sum_y y\,p_Y(y) = E(X) + E(Y)$$

Considerate due variabili aleatorie (X e X') con stesso valore atteso $E(X) = E(X')$ ma f.m.p. p (cioè, distribuz.) diverse.



X' è più incerto perché le sue probabilità sono più disperse.

VARIANZA → MISURA DELL'INCERTEZZA

La variabilità di v.a. con valore atteso μ_X è

$$E((x-\mu_X)^2) = Var(X),$$

cioè è il valore atteso del quadrato dello scarto, ovvero VARIANZA di x.
Indica la variabilità, la dispersione dei possibili valori di X.

La varianza è, quindi, un caso particolare di $E(g(x))$ quando

$$g(x) = (x-\mu_X)^2 = \text{scarto al quadrato}$$

Sviluppando il quadrato,

$$Var(x) = E((x-\mu_X)^2) = E(x^2 - 2\mu_X x + \mu_X^2) =$$
$$= E(x^2) - 2\mu_X E(x) + E(\mu_X^2) =$$
$$= E(x^2) - 2\mu_X \mu_X + \mu^2 = E(x^2) - \mu_X^2 = E(x^2) - (E(x))^2$$

PROPRIETÀ della varianza

- $Var(X) = E(x^2) - (E(x))^2$
- $Var(a+bX) = b^2 Var(X) = E[(a+bx)^2] - [E(a+bx)]^2 = a^2E(x^2) - [aE(x)]^2 = a^2[E(x^2) - E(x)^2]$
- $Var(X+Y) = E((x+y-(\mu_X+\mu_Y))^2) =$

140
$$= E(((x-\mu_X)+(y-\mu_Y))^2) = E((x-\mu_X)^2 + (y-\mu_Y)^2 + 2(x-\mu_X)(y-\mu_Y)) =$$
$$= E((x-\mu_X)^2) + E((y-\mu_Y)^2) + 2E((x-\mu_X)(y-\mu_Y)) =$$
$$= Var(X) + Var(Y) + 2\,cov(X,Y)$$

valore atteso del prodotto dei 2 scarti

ESERCIZIO $Var(X-Y) =$
$= Var(X+(-Y)) = Var(X) + Var(-Y) + 2\,Cov(X,-Y)$
$= Var(X) + (-1)^2 Var(Y) - 2\,cov(X,Y)$
$= Var(X) + Var(Y) - 2\,cov(X,Y)$

ESERCIZI – 26/11/'13

$$Var(X+X) = Var(2X) = 2^2 Var(X) = 4\,Var(X)$$
$$\neq Var(X) + Var(X) \quad \text{(se sono var. dipend.)}$$

COVARIANZA 138

$$Cov(X,Y) := E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$
$$= E[XY - \mu_X E[Y] - \mu_Y E[X] + \mu_X\mu_Y] = \quad = E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$$
$$= E[XY] - \mu_X\mu_Y - \cancel{\mu_X\mu_Y} + \cancel{\mu_X\mu_Y} =$$
$$= E[XY] - E[X]E[Y]$$

PROPRIETÀ: $cov(X,Y) = cov(Y,X)$ (= 0, se X e Y indip.)
$cov(X,X) = var(X)$
$cov(aX,Y) = a\,cov(X,Y) = cov(X,aY)$
126 $cov(X+Y,Z) = cov(X,Z) + cov(Y,Z)$

Esser... atto... la va... allo...
Diffic... di qu... allo...
Var (...

10

MODELLI DI V.A. DISCRETA — V.A. DI BERNOULLI e BINOMIALE

Sottoclasse delle v.a. discrete, per le quali esiste un insieme finito o num. di valori $x_1, x_2 \dots$, ai quali sono associati a fmp positive $p(x_i) = P(X = x_i)$.

$X =$ num. di successi su n prove bernoulliane ciascuna delle quali con prob. p

$P(X=0) = 1-p$ (INSUCC.)

$P(X=1) = p$ (SUCCESSO)

$$X \sim \text{bernoulliana}(n, p)$$

Ognuna delle n prove (o esperim.) può solo avere come esito "successo" $x=1$ / "insuccesso" $x=0$

$E(X) := \sum x \cdot p(x) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$

$Var(X) = E(X^2) + [E(X)]^2 = [0^2 \cancel{(1-p)^2}] + 1^2 \cdot p^2 + [p]^2 = 0$

x	$p(x)$
1	p
0	$(1-p)$

BINOMIALE

insucc. succ.

$n =$ num prove indip. e binarie

$p =$ prob. succ. della n-esima prova

$X =$ v.a. binomiale di parametri n e p.

→ num. tot. di successi seguiti ad un esperimento eseguito con n ripetiz. indipendenti, ciascuna delle quali con la stessa prob. di successo / insuccesso, tra loro indipendenti (p / $(1-p)$),

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad i = 0, 1, \dots n$$

COEFF. BINOMIALE → num. di combinaz. diverse che possiamo ottenere scegliendo i elementi da un insieme di n possibili.

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad X_i := \begin{cases} 1 & \text{i-esima prova ha successo} \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases}$$

$E(X_i) = p$

$E(X_i^2) = p$

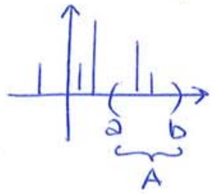
$Var(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = p - p^2 = p(1-p)$

$E(X) = \sum E(X_i) = np$

$Var(X) = \sum Var(X_i) = np(1-p)$

RIPASSO

V.A. DISCRETE X con f.m.p. $p(x)$



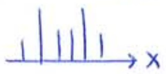
se $A \subset \mathbb{R}$, per esempio un intervallo (a,b)

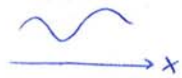
$$P(X \in A) = P(a < X \leq b) = \sum_{x \in A} p(x)$$

Quando $\exists$ elem. di indeterminatezza, considero V.A. CONTINUE

V.A.

- discrete
  $p(x)$ = f.m.p.
- continue
  $f(x)$ = funz. di densità
- (altre)





4 STRATEGIA 1 : P(vinco) = P("Ferrari lì fin da subito") =

STRATEGIA 2 : P(vinco) = 1 − P(non vinco) = 1 − P("Ferrari non è lì fin da subito")

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 330

In statistica i dati sperimentali (come nel cap. 2) vengono descritti come realizzaz. di V.A. $X_1 \dots X_m$.

Scopo della statistica

Ricostruire la strutt. probabilistica che li ha generati cioè la legge di probabilità di $X_1 \dots X_m$.

Spesso $X_1 \dots X_n$ ha una legge parzialm. incognita che va stimata in base ai dati $x_1 \dots x_m$.

Ragionam. induttivo, a ritroso, se p incognita.

ES.: Le osservaz. binarie 0,1,1,0…0 sono il risultato di un sondaggio (1= supporto ad un governo, 0= no consenso). Sono realizzaz. di $X_1 \dots X_m$ iid Bernoulli (p) (almeno nell'approssimaz. che uso il modello con reintroduz. nell'urna invece di quello + preciso senza reintroduz.).

p è un

5.1.1. DISCHETTI PER PC IN CONFEZ. DI 10 PEZZI.
P("dischetto difettoso") = 0.01
GARANZIA DI RIMBORSO SE NUM. DIFETTOSI È ≥ 1.
- % CONFEZIONI RITORNATE?
- SE COMPRO 3 CONFEZ, P("ne ritorno 1")?

X = num. difettosi in una confezione da 10 CD — $n=10$, $p=0.01 \rightarrow (1-p)=0.99$

$X \sim$ binomiale ($n=10$, $p=0.01$)

P("1 scatola ritorno") = P("almeno 1 CD difettoso su 10 della scatola") =

$= P(X \geq 1) = 1 - [P(X=0 \text{ oppure } X=1)] = 1 - P(X=0 \cup X=1) =$

$= 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 1 - \binom{10}{0} 0{,}01^0 \cdot 0{,}99^{10} - \binom{10}{1} 0{,}01^1 \cdot 0{,}99^9$

$\approx 0.0043 = 0.43\%$

Y = num. confez. rese $\leadsto$ $Y \sim$ binomiale ($n=3$, $p=0{,}0043$)

$P(Y=1) = p(1) = \binom{3}{1} 0{,}0043^1 (0{,}9957)^2 \cong 0.013$ — $\hookrightarrow (1-p) = 0{,}9957$

5.1.2. COLORE OCCHI
$\hookrightarrow$ 1 SOLA COPPIA DI GENI, CON FENOTIPO { "OCCHI SCURI", DOMINANTE D ; "OCCHI CHIARI", RECESSIVO d }

INDIVIDUO CON
- 2 GENI PER OCCHI CHIARI $\longrightarrow$ HA OCCHI CHIARI
- 1 GENE X OCCHI SCURI $\longrightarrow$ HA OCCHI SCURI

- SE 1 FIGLIO MAGGIORE HA OCCHI CHIARI CON 2 GENITORI CON OCCHI SCURI, P("2 DI ALTRI 4 FIGLI, -NO GEMELLI-, HANNO OCCHI CHIARI")?

Se almeno 1 figlio ha occhi chiari (dd), allora entrambi i genitori dovranno avere almeno 1 gene occhi chiari (d):

MADRE \ PADRE	D	d
D	DD	Dd
d	dD	dd

$p(D) = p(d) = \frac{1}{2}$

$P(D \cap d) = P(D) \cdot P(d) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

X = num. figli con occhi chiari (= entrambi i geni d) $\sim$ binomiale ($n=4$, $p=\frac{1}{4}$)

$P(X=2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-2} \cong 0.2109$

VARIABILE ALEATORIA di POISSON con parametro $\lambda > 0$

Modello di v.a. discreta per conteggi non naturalm. limitati.
Assume valori solo INTERI NON_NEGATIVI $(0,1,2\dots)$.

$$\text{f.m.p.},\ p(i) := P(X=i) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} \qquad i = 0,1,2\dots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(X=i) = e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}}_{e^{\lambda}\ \text{(serie espon.)}} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = e^0 = 1$$

$X=1$, $X=2$, $X=3\dots$ sono eventi disgiunti (a 2 a 2) e la loro unione da S.

ESEMPI:
- num. veicoli che circolano in 1h
- " terremoti in 1 anno
- " difetti sulla carrozzeria di un'auto.

Può essere usata come approssimaz. di una BINOMIALE di param. (n,p) quando $n \gg$ e $p \ll$. (ma $\lambda = np$).

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i\,p(i) = \sum_{i=1}^{\infty} i\,\frac{e^{-\lambda}}{(i-1)!}\lambda^i \overset{J=i-1}{=} \sum_{J=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}}{J!}\lambda^{J+1} = \lambda\underbrace{\sum_{J=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}}{J!}\lambda^J}_{=1} = \lambda$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$$

La somma di poissoniane restituisce una poissoniana.

1) $P(E) = 0{,}5$ $\quad P(N) = 0.3$ $\quad P(W) = 0.2$

$P(T|E) = 0.9$ $\quad P(T|N) = 0.8$ $\quad P(T|W) = 0.6$

$P(R|E) = 0.8$ $\quad P(R|N) = 0.7$ $\quad P(R|W) = 0.6$

$$P(E|T\cap R) = \frac{P(E\cap T\cap R)}{P(T\cap R)} = \frac{P(T\cap R\cap E)}{\sum P(\cdot)P(T\cap R|\cdot)} = \cancel{\frac{P(E)\cdot P(T\cap R)}{P(E)\,P(T\cap R)}}$$

$$= \frac{P(E)\cdot P(T\cap R|E)}{P(E)P(T\cap R|E)+P(N)P(T\cap R|N)+P(W)P(T\cap R|W)} = \quad (T,R \text{ indip})$$

$$= \frac{P(E)\cdot P(T|E)\,P(R|E)}{P(E)\cdot P(T|E)\,P(R|E)+P(N)\,(T|N)P(R|N)+P(W)P(T|W)P(R|W)} =$$

$$= \frac{0.5\cdot 0.9\cdot 0.8}{0.5\cdot 0.9\cdot 0.8+0.3\cdot 0.8\cdot 0.7+0.2\cdot 0.6\cdot 0.6} = 0.6$$

2)

$P(1)=P(2)=P(3)=0.6$ $\qquad$ 1,2,3 INDIP.

$P(4)=0.9$ $\qquad$ S_1 INDIP. (*)

$P(5|4)=0.7$

$P(6|5\cap 4)=0.8$

PARALLELO

$$P(S) \stackrel{\downarrow}{=} P(1\cap 2\cap 3\cap 4\cap 5\cap 6) = P(S_1\cap S_2)$$

$$= 1-P(S^c) = 1-P(S_1^c\cap S_2^c) \stackrel{(*)}{=} 1-P(S_1^c)\cdot P(S_2^c) =$$

$$= 1-P(S_3^c\cap 3^c)\cdot[1-P(S_2)] = 1-\underbrace{[1-P(S_3)]}_{\text{INDIP.}}\underbrace{[1-P(3)]}_{\text{PARALL}}\cdot[1-P(4\cap 5\cap 6)] =$$

$$= 1-[1-P(1)\cdot P(2)]\cdot[1-P(3)]\cdot[1-P(6|5\cap 4)\cdot P(5\cap 4)\cancel{P(4)}] =$$

$$= 1-[1-P(1)\cdot P(2)]\,[1-P(3)]\cdot[1-P(6|5\cap 4)\cdot P(5|4)\cdot P(4)] =$$

$$= 1-[1-0.6\cdot 0.6]\cdot[1-0.6]\cdot[1-0.8\cdot 0.7\cdot 0.9] = 0.873$$

3) 30 R, 20 N $\quad n=8$ (n° estrazioni) $\sim$ Bernoulliana $\left(n=8,\ p=\frac{30}{20+30}\right)$

$X=$ n° rosse estratte

$$P(X=5) = \binom{8}{5}p^5(1-p)^{8-5} = \frac{8!}{5!(8-5)!}\left(\frac{3}{5}\right)^5\left(1-\frac{3}{5}\right)^3$$

- con ordine: $P(X=5) = \binom{8}{5}\dfrac{(30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26)(20\cdot 19)}{50\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26}$

- senza ordine: $\dfrac{\binom{30}{8}\binom{20}{8}}{\binom{50}{8}}$

4)

V.A. CONTINUE

Una v.a. X si dice continua se $\exists$ una funz. di densità $f(x) \geq 0$ t.c. per ogni $A \subset \mathbb{R}$:

$$P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx \qquad \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$$

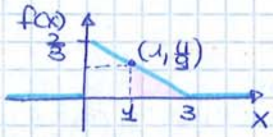
per esempio, se $A = (a,b)$: $P(X \in A) = \int_a^b f(x)\,dx$

Se X = V.A. cost $\rightarrow P(X=c) = 0$, $P(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} = 1$

ESEMPIO

X = tempo di attesa di una certa reazione (che sicuram. finisce entro 3h)

Reaz. chim. non è deterministica, ma soggetta a certe variabili che la rendono un fenomeno aleatorio, cioè soggetto a incertezza



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{9}x & \\ 0 & x > 3 \end{cases}$$

Essendo che, per definizione:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$$

$$= \cancel{\int_{-\infty}^{0}} + \int_0^3 + \cancel{\int_3^{+\infty}} f(x)\,dx = \int_0^3 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9}x\right) dx = \frac{3 \cdot \frac{2}{3}}{2} = 1$$

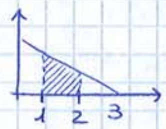
Qual è la probabilità che la reazione duri più di un'ora

$$P(X > 1) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_1^3 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9}x\right) dx = \frac{2}{3}x - \frac{x^2}{9}\Big|_1^3 = 2 - 1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) = \frac{4}{9}$$

Qual è la probabilità che la reazione duri tra 1 e 2 ore.

$$P(1 < x < 2) = \text{Area trapezio} = \frac{(B+b)h}{2} =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9}x\right) dx = \left(\frac{4}{9} + \frac{2}{3}\right) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$



OSS.: $P(1 \leq x < 2) = \underbrace{P(\cancel{X=1})}_{=0} + P(1 < x < 2) = P(1 < x \leq 2) - P(1 \leq x \leq 2)$

$= 0$, probabilità che reaz. chim. termini esattam dp 1h

ATTENZIONE: le probabilità non sono densità di probabilità.
$f(x)$ può essere NULLA, >1, ma mai negativa.

VALORE ATTESO

Se X è una v.a. con densità $f(x)$, e $g(x)$ una sua funzione, il valore atteso di $g(x)$ è

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$$

ESEMPIO: $g(x) = x$

$E(g(x)) = \int x f(x)\,dx$ VALORE ATTESO DI X

VARIANZA

X = V.A.
x = uno dei valori possibili di X

$g(x) = (X - E(x))^2$ SCARTO AL QUADRATO

$E((X - E(x))^2) = \int (x - E(x))^2 f(x)\,dx$ VARIANZA DI X

$\qquad \qquad \qquad \quad \parallel$

$\int (x-\mu)^2 f(x)\,dx = Var(x)$

ESEMPIO: $g(x) = x^2$

$E(x^2) = \int x^2 f(x)\,dx =$ (momento secondo di x)

12

P(

ip. $= 1 - P(X_1 \le 1)\, P(X_2 \le 1)\, P(X_3 \le 1) = 1-(1-e^{-1})(1-e^{-1})(1-e^{-1}) = (1-e^{-1})^3$

$P(X \le 1) = \int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1-e^{-1}$

3 fusibili non sono uguali ma probabilisticam. hanno stessa f(x)

ESEMPIO SIST. IN SERIE

X_i = tempo di funzionam. dell' i-esimo componente, come X nell'esempio prima ($i = 1,2$)

S = tempo di funzionam. del sistema

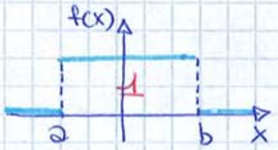
Probabilità che sistema duri più di un certo tempo T_0:

$$P(S>T_0) = P(X_1>T_0)\,P(X_2>T_0) = P(X>T_0)^2 = (e^{-T_0})^2 = e^{-2T_0}$$

↳ $\int_{T_0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = -e^{-\lambda t}\Big|_{T_0}^{+\infty} = -0 + e^{-\lambda T_0}$

L' INDIPENDENZA costituisce un' ipotesi debole.

V.A. UNIFORMI



DENSITÀ DI PROBABILITÀ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x<a \\ \frac{1}{a-b} & a<x<b \\ 0 & x>b \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{a-b}\int_b^a dx = 1$$

X si dice uniforme tra a e b

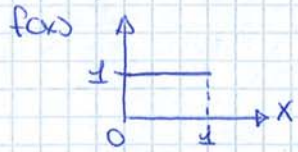
VALORE ATTESO: $E(X) = \frac{a+b}{2} = \int x f(x)\,dx = \int_b^a \frac{x}{a-b}\,dx = \frac{a^2-b^2}{2(a-b)} = \frac{\cancel{(a-b)}(a+b)}{2\cancel{(a-b)}}$

$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

↳ $E(X^2) - [E(X)]^2$ $\quad \int_b^a \frac{x^2}{a-b}\,dx = \frac{b^3-a^3}{3(a-b)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$

$$= \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{a^2+ab+b^2}{3} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Caso particolare: $a=0$ e $b=1$



I concetti di v.a. e le loro leggi descrivono una situaz. presperimentale. Una volta fatto l' esperim. la v.a. X si concretizza in un particolare valore di sé, un numero chiamato REALIZZAZ., ISTANZA, VAL. ASSUNTO.

Nella realtà si ottiene una v.a. facendo l' esperim. oppure simulando.

RND fornisce approssimaz. di v.a. uniforme discrete

$$X \sim \text{Uniforme}\,(0,1)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 330

PROPRIETÀ DELLA NORMALE

- $E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dx$
- $Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - \mu^2 = \dots = \sigma^2$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dx - \mu^2 = \text{PER PARTI}$$

La variabile gaussiana è chiusa rispetto a trasformazioni lineari, cioè

se $x \sim N(\mu, \sigma^2)$

allora $Y = a + bx \sim N(a + b\mu,\ b^2\sigma^2)$

$\to Var(Y) = Var(a + bx)$

$\to E(Y) = E(a + bx) = a + b\mu$

trasformando linearm. gaussiana trovo ancora gauss.

Calcolo della standardizzata

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

allora $F(x) = P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma},\ \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

media varianza

$\uparrow \sigma \to$ curva si allunga e si abbassa

$\uparrow \mu \to$ (misura di posiz.) $\to$ curva trasla

è una trasformaz. lineare di X con

$$E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{E(\mu) - \mu}{\sigma} = 0$$

$$Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = Var$$

STANDARDIZZAZIONE : $P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

La tavola va usata ricordando la simmetria della Φ essendo che nella stessa vengono riportati solo i valori positivi:

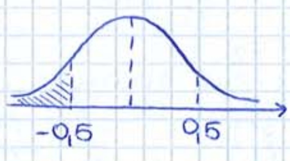
ESEMPIO $\Phi(0,5) = 0,695$

$\Phi(-0,5) = ?$

$\Phi(-0,5) = 1 - \Phi(0,5)$

$P(Z \le -0,5) =$

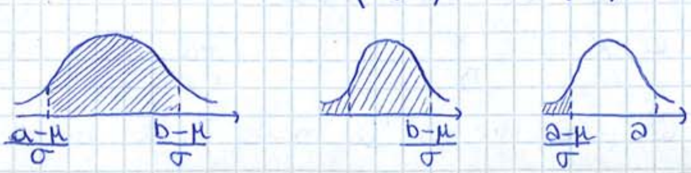
$P(Z > 0,5) = 1 -$



In generale,

$$P(a < X < b) \overset{\text{standardizz.}}{=} P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \int_a^b \phi(z)\, dz$$



$1 < x < 2$

$< 2 - < -1$

$< 2 - (1 - < 1)$

44

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 330

1) $P(X<170) \overset{\text{standardizzo}}{=} P\left(\frac{X-175}{8} < \frac{170-175}{8}\right) \overset{\text{disegno!}}{=} P(Z<-0,625) \overset{\text{simm.}}{=} 1-P(Z<0,625)$

$= 1 - 0,73 \simeq 0.27 = 27\%$

(con software: 0,2659)

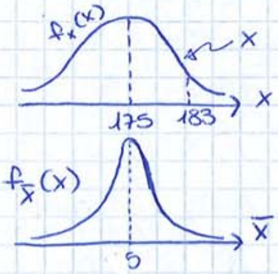
2) Mi aspetto un risultato $< 27\%$, essendo che su 5 individui pescherò qualcuno + alto di 170 che compenserà individui + bassi di 170.

$\bar{X}$ è combinaz. lineare di normali, quindi $\bar{X}$ è normale essa stessa (teorema).

$$\bar{X} \sim N(?,?)$$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum X_i}{5}\right) \overset{\text{linearità di E}}{=} \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} E(X_i) \overset{\text{per iid}}{=} \frac{1}{\cancel{5}}\cancel{5}\cdot 175 = E(X) = 175$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{\sum X_i}{5}\right) \overset{\text{propr. di Var}}{=} \frac{1}{5^2} Var\left(\sum X_i\right) \overset{\text{per indip.}}{=} \frac{1}{25}\sum Var(X_i) = \frac{1}{\cancel{25}_{5}}\cancel{5}\cdot 8^2 = \frac{8^2}{5} = 12.8$$



$\bar{X} \sim N(175, 12.8)$

$\hookrightarrow \sigma = \sqrt{12,8} = 3,57$

$$P(\bar{X}<170) \overset{\text{standardizzo}}{=} P\left(\frac{\bar{X}-175}{8/\sqrt{5}} < \frac{170-175}{8/\sqrt{5}}\right) = P(Z<-1,397) = 0.081$$

Fare la media campionaria diminuisce perché i valori + alti compensano quelli + bassi.

Generalizzando:

una struttura comune è il campione casuale $X_1 \dots X_n$ ind. f. su cui vengono elaborati delle STATISTICHE $\to$ è una funz. dei dati $X_1 \dots X_n$.

Statistiche trattate oggi sono:

1) Y_s = conteggio superiore = $\#\{i : X_i > s\}$ → soglia fissata

1a) similm., spesso si è interessati al conteggio inf.: $C_s = \#\{i : X_i \le s\}$

Allora $C_s \sim$ Binomiale $(n, F(s) = P(X \le s))$

2) $\bar{X}$ = media campionaria $= \frac{\sum X_i}{n}$

In generale, $E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = E(X) = \mu$

$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\cancel{n}\, Var(X) = \frac{\sigma^2}{n}$

per qualsiasi legge comune delle X_i.

Se, inoltre, la legge delle singole X_i è normale, cioè

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\forall i$

allora

$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

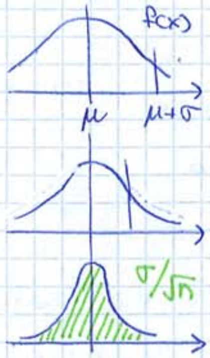
VARIABILE CAMPIONARIA

$x_{1-n} \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{1}{n})$

ESEMPIO: NORMALE

LA CAMPANA SI STRINGE



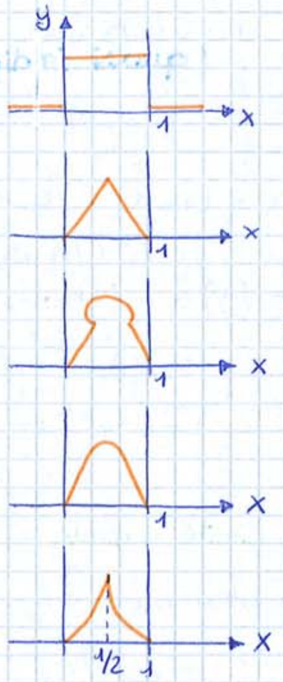
$n = 1$
$\bar{x} = x_1$

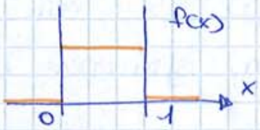
$n = 2$

$n = \infty$

DISTRIBUZIONE DEGENERE

ESEMPIO: NON NORMALE UNIFORME (0,1)





TRIANGOLARE

Spline: POLINOMIALE A TRATTI

Quasi indistinguibile da una normale $N(1/2, \sigma^2/n)$

$N(1/2, 1/12n)$

TEOREMA LIMITE CENTRALE (della statistica)

Per qualsiasi distribuzione con valore atteso μ, la distribuz. della media campionaria media $\bar{x}$ è approssimabile da una normale

$$\Sigma x_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

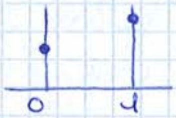
$P(X > 150) = \sum_{151}^{\infty} P(X = i)$

$\sim P(|X| < i \pm 0{,}5)$

CORREZ. DI CONTINUITÀ

ESEMPIO: De Moivre _ LAPLACE

x_{i-n} i.i.d. Bernoulli (p)



$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{\#\ \text{successi}}{n} =$ PROPORZIONE DI SUCCESSI

$\begin{cases} \mu = p \\ \sigma^2 = p(1-p) \end{cases}$

Per n grande $\bar{x} \sim N\left(p, \frac{(1-p)p}{n}\right)$

Bernoulli $n, p \rightarrow \Sigma \bar{x}_i \sim N(np, np(1-p))$

Esatto

approssimato

Per n grande, la normale approssima la binomiale

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 330

Prof. Mauro Gasparini - Politecnico di Torino

METODI NUMERICI E STATISTICI

Nelle 20 ore dedicate a Probabilità e Statistica abbiamo coperto il capitolo 1, il capitolo 2 (esclusi 2.4, 2.5 e 2.6), il capitolo 3, il capitolo 4 (esclusi 4.3.5 e 4.8) il capitolo 5 (escluso 5.3 e da 5.6.1 in poi) e il capitolo 6 (escluso da 6.5.2 in poi) di *Probabilità e Statistica per l'ingegneria e le scienze*, di Sheldon Ross, Apogeo, seconda edizione 2008.

Esercizi del 21 Ottobre 2014

1. In una popolazione molto grande la frequenza delle persone con il lobo attaccato sia 0.15=15%.

   (a) Si campionino 10 persone a caso e si calcoli la probabilità che almeno 2 di esse abbiano il lobo attaccato (nota: usare l'approssimazione binomiale invece dell'ipergeometrica perché la popolazione è molto più grande di 10).

   (b) Si campionino 1000 persone a caso e si calcoli la probabilità che almeno 160 di esse abbiano il lobo attaccato (nota: usare l'approssimazione normale perché 1000 è grande).

   (c) Si campionino 1000 persone a caso e si calcoli la probabilità che almeno 200 di esse abbiano il lobo attaccato.

2. (esempio 6.3.2 dal Ross) Gli ingegneri responsabili valutano che il peso W (in tonnellate) che una singola campata di un ponte può sostenere senza subire danni strutturali sia approssimativamente una variabile aleatoria normale con valore atteso $\mu_W = 200$ e deviazione standard $\sigma_W = 20$. Supponiamo che il peso degli autoveicoli che passano sul ponte sia una variabile aleatoria con valore atteso $\mu_X = 1.5$ e deviazione standard $\sigma_X = 0.15$. Quante automobili dovrebbero trovarsi contemporaneamente sulla campata, affinché la probabilità di danno strutturale superi il 10%?

3. Nel Balubistan e nel Kalocistan gli esami di maturità si valutano su una scala da 0 a 1000. Nel Balubistan, la distribuzione dei voti è approssimativamente normale con valore atteso 600 e deviazione standard 40; Nel Kalocistan, la distribuzione dei voti è approssimativamente normale con valore atteso 620 e deviazione standard 22; Il punteggio di 650 vale più in Balubistan o in Kalocistan?

4. Un componente con tempo di vita esponenziale di parametro λ è collegato in serie a un sistema di tre componenti in parallelo, ciascuno con tempo di vita esponenziale di parametro 2λ. Supponiamo che tutti i componenti siano mutuamente indipendenti. Calcolare la probabilità che l'intero sistema duri più di un tempo x.

5. Un certo segnale di allarme viene lanciato se e solo se una variabile aleatoria X è superiore a 10. In condizioni normali, X è distribuito normalmente con media 8 e deviazione standard 2. In condizioni critiche, X è distribuito normalmente con media 12 e deviazione standard 3. Calcolare il tasso di falsi positivi (cioè la probabilitá che sia lanciato un allarme in condizioni normali) e il tasso di falsi negativi (cioè la probabilitá che non sia lanciato un allarme in condizioni critiche).

6. Consideriamo una variabile aleatoria X con la seguente distribuzione:

x	-2	0	2
$p(x)$	0.5	0.3	0.2

   (a) Calcolare il valore atteso di X $\sum p_i(x_i) \cdot x_i$

   (b) Calcolare la distribuzione di probabilitá di X^2

$x^2=p$	-2	0	2
-2	4	0	-4
0	0	0	0
2	-4	0	4

Prof. Mauro Gasparini - Politecnico di Torino

METODI NUMERICI E STATISTICI

Esercizi di fine Statistica - 16 Dicembre 2013

Abbiamo coperto il capitolo 1, il capitolo 2 (esclusi 2.4, 2.5 e 2.6), il capitolo 3, il capitolo 4 (esclusi 4.3.5, 4.8 e 4.9) il capitolo 5 (escluso 5.3 e da 5.6.1 in poi) e il capitolo 6 (escluso da 6.5.2 in poi) di *Probabilità e Statistica per l'ingegneria e le scienze*, di Sheldon Ross, Apogeo, seconda edizione 2008.

1. Un componente con tempo di vita esponenziale E_1 di parametro λ è collegato in serie a un sistema di tre componenti in parallelo, ciascuno con tempo di vita esponenziale E di parametro 2λ. Supponiamo che tutti i componenti siano mutuamente indipendenti. Calcolare la probabilità che l'intero sistema duri più di un tempo x.

2. In una popolazione molto grande la frequenza delle persone con il lobo attaccato sia 0.15=15%.
   (a) Si campionino 10 persone a caso e si calcoli la probabilità che almeno 2 di esse abbiano il lobo attaccato (nota: usare l'approssimazione binomiale perché la popolazione è molto più grande di 10).
   (b) Si campionino 1000 persone a caso e si calcoli la probabilità che almeno 160 di esse abbiano il lobo attaccato.
   (c) Si campionino 1000 persone a caso e si calcoli la probabilità che almeno 200 di esse abbiano il lobo attaccato.

3. (esempio 6.3.5 dal Ross) Un astronomo vuole stimare la distanza d di una stella lontana con la media campionaria $\bar{X}$ di n misurazioni indipendenti, ciascuna affetta da un errore di misura con deviazione standard 2 (anni-luce). Quante misurazioni deve effettuare per avere il 95% di probabilità che la sua stima sia accurata entro ± 0.5 anni luce?

4. (esempio 6.3.2 dal Ross) Gli ingegneri responsabili valutano che il peso W (in tonnellate) che una singola campata di un ponte può sostenere senza subire danni strutturali sia approssimativamente una variabile aleatoria normale con valore atteso $\mu_W = 200$ e deviazione standard $\sigma_W = 20$. Supponiamo che il peso degli autoveicoli che passano sul ponte sia una variabile aleatoria con valore atteso $\mu_X = 1.5$ e deviazione standard $\sigma_X = 0.15$. Quante automobili dovrebbero trovarsi contemporaneamente sulla campata, affinché la probabilità di danno strutturale superi il 10%?

2 $\frac{1}{6^3}$

17

17/12/2013

Stima Montecarlo dell'affidabilità di un sistema

Calcolo dell' AFFIDABILITÀ di un sistema (es: tempo di vita del sistema come probabilità sulla base di uno generaz. casuale di numero, e fissato λ

(Esempio: affidabilità del sistema $P(T>x)$ per $\forall$ tempo x sulla base dei tempi di vita E_1 E_2 E_3 E_4 dei sing. componenti sotto le ipotesi:
- $E_1 \sim Esp(\lambda)$
- $E_2, E_3, E_4 \sim Esp(2\lambda)$
- indipendenti)

- fisso x e λ
- genero $E_1 \sim Esp(x)$
  e E_2, E_3, E_4 i.i.d. $\sim Esp(\Sigma i)$
  - se $\min(E_2, E_3, E_4) > x$
    e $E_1 > x$
    allora: $CONT \leftarrow CONT_1$

↳ ripeto questo loop $\underbrace{N}_{\text{volte}}$ (esempio: x = 1 milione di volte)

Risultato: $\frac{CONT}{N} = P(T>x)$

17/12 ① 18

```
############################################################################
#
# simulazione.R - by Mauro Gasparini
#                 script del software R per semplici simulazioni
#                 si veda http://www.r-project.org/
#                 21 Ottobre 2014, Torino
#
#                 Metodi numerici e statistici
#
############################################################################
```

CALCOLATORE PROBABILISTICO

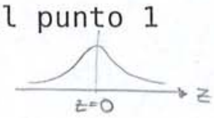
```
# questo e' un commento.
# R e' in primis un grosso sistema per calcoli statistici
# esempi:
# funzione di densita' della normale standard nel punto 1
dnorm(1)
```

$\phi(z=1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$ $(z\in\mathbb{R})$

```
# funzione di ripartizione della normale standard nel punto 1
pnorm(1)
```

integrale di $\phi(z)$ → $\Phi(z=0)=\frac{1}{2}$ FI MAIUSCOLO

Φ ha max in $z=0$ (ORIGINE)




```
# tabella della normale standard
x <- seq(-3,3,by=0.1)     # una griglia di valori
fx <-round(dnorm(x),3)    # f(x) sulla griglia
Fx <- round(pnorm(x),3)   # F(x) sulla griglia
print(cbind(x, fx, Fx))
```

assegnazione — incolla insieme — stampa TAB.: x | fx | Fx

```
# funzione di ripartizione di normale qualunque
pnorm(1, mean=2, sd=3)
```

VALORE ATTESO — DEVIAZ. STANDARD

```
# campione casuale normale standard lungo 1
x <- rnorm(1)   ### normrnd in MATLAB
```

→ ripetendo operazione ottengo sempre valori ≠

```
# campione casuale normale standard lungo 50
x <- rnorm(50)
# serie temporale dei valori di x (vedi anche retro)
plot(x)
# istogramma dei valori di x
hist (x, prob=T )
points( x, rep(0,length(x)))
```

ISTANZA

↳ SULL'ORDINE DI DISTRIBUZ. $x_1 \dots x_{50}$ iid $N(0,1)$

NUBE SENZA PART. DISTR. ($p=\frac{1}{2}$ che pto sia pos o neg)

```
# Cosa si nota in questa progressione?
mean(rnorm(10,-3,2))
mean(rnorm(100,-3,2))
mean(rnorm(1000,-3,2))
mean(rnorm(10000,-3,2))
```

MEDIA aritmetica $\frac{\sum^m x}{m}$ ((lungh., media teorica, deviaz. standard)) — valore atteso

LEGGE DEI GRANDI NUMERI

↳ media ~~teorica~~ aritmetica converge a media teorica, al crescere di m

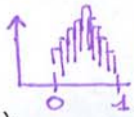
```
# e in questa?
sd(rnorm(10,-3,2))
sd(rnorm(100,-3,2))
sd(rnorm(1000,-3,2))
sd(rnorm(10000,-3,2))
```

VARIANZA CAMPIONARIA $\frac{\sum_i (x_m-\bar{x})^2}{m-1}$

```
# Graficamente: (istogramma delle frequenze assolute)
par(mfrow=c(2,2)) # 2x2 grafici nella stessa pagina
hist(rnorm(10,-3,2),xlim=c(-9,3),main="Istogramma da 10 osservazioni")
hist(rnorm(100,-3,2),xlim=c(-9,3),main="Istogramma da 100 osservazioni")
hist(rnorm(1000,-3,2),xlim=c(-9,3),main="Istogramma da 1000 osservazioni")
hist(rnorm(10000,-3,2),xlim=c(-9.3),main="Istogramma da 10000 osservazioni")

# campione casuale normale lungo 10000
hist( rnorm(10000,-0.5, 0.2), prob=T, xlim=c(-2,2), ylim=c(0,2))
# campione casuale normale lungo 10000
hist( rnorm(10000, 0.5. 0.2), prob=T, xlim=c(-2,2), ylim=c(0,2))
# campione casuale uniforme lungo 10000
hist( runif(10000), prob=T, xlim=c(-2,2), ylim=c(0,2))
# campione casuale esponenziale lungo  10000, "rate" il lambda
hist( rexp(10000, rate=2), breaks=40, prob=T, xlim=c(-2,2), ylim=c(0,2))
```

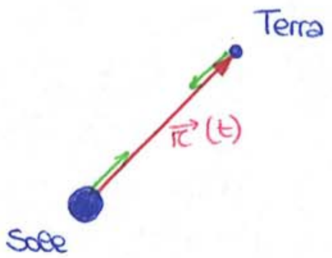
DISTRIB. TRA 0 E 1



$\boxed{\text{Equazioni differenziali}}$ → per descrivere "sistemi dinamici" → modello matematico che l'EVOLUZ. NEL TEMPO di uno stato (fisico o non) secondo opportune LEGGI, che legano pres, futuro/passato.

Perchè ingegneria civile studia i sistemi dinamici?
→ dinamica nell' ing. civile come movimenti conseguenti a sollecitazioni esterne
⇓
cercare i P.TI DI EQUILIBRIO

Introdotte per la prima volta da Newton per descrivere DINAMICA DEI PIANETI attraverso una legge universale ($\vec{F} = m\vec{a}$), da cui poter dedurre tutti gli altri moti, oltre alle 3 leggi di Keplero, prima descrizione del moto dei pianeti.



$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \ddot{\vec{r}}$$

↑ "massa ridotta" ($\cong$ massa Terra)

$\ddot{\vec{r}}$ (accelerazione) derivata seconda del vettore

$\vec{r}(t) :=$ "moto della terra"
$\dot{\vec{r}}(t) =$ velocità
$\ddot{\vec{r}}(t) =$ accelerazione

$$\vec{F} = -G \frac{M_S m_S}{|r(t)|} \hat{r}(t)$$

↓

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}(t)) = m\ddot{\vec{r}}(t)}$$

Equazione differenziale := identità che coinvolge una funz. vettoriale e una sua derivata, con incognita $x(t)$:

$$\boxed{F\left(\underset{\text{INCOGNITA}}{x(t)},\ \dot{x}(t),\ \ddot{x}(t) \dots x^{(n)}(t),\ \underset{\text{TEMPO}}{t}\right) = 0}$$

INTEGRALE GENERALE := insieme delle ∞ soluzioni

INTEGRALE PARTICOLARE := 1 specifica soluzione
↑ per "TH. ∃ ed !"
imponendo condizioni iniziali specifiche

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 330

$$\boxed{N(t) = e^{\alpha t} \cdot N_0,} \quad \alpha > 0$$

"CRESCITA ESPONENZIALE"
o
CRESCITA MALTHUSIANA

Equaz. lineare in dimensione $n=1$
Descriz. della popolaz. in crescita
→ natalità prevale,
ritmo di crescita è proporzionale al numero di individui esistenti
aumento esponenz. del genere umano e quello lineare delle risorse diment.
→ carestia

Ma i meccanismi non sono lineari.
Questo modello di crescita della pop. fu' corretto da Verhulst.

$$\dot{N}(t) = \alpha \cdot N(t) \qquad \alpha \gtrless 0$$

$$\alpha \longmapsto r\left(N^* - N(t)\right)$$

$$\boxed{\dot{N}(t) = r\left(N^* - N(t)\right) \cdot N(t)}$$

EQ. LOGISTICA

Tiene in conto la competiz. per le risorse in una pop. (modello non + lineare): ora il tasso di crescita α può anche diminuire fino ad annullarsi

$$\alpha \to 0 \quad \Rightarrow \quad N = N^*$$

VALORE DI SATURAZIONE

RISOLUZIONE ANALITICA

Riconduco $\dot{N} = f(N)$ ad una eq. diff. a variabili separabili

$$\int_0^t \frac{\dot{N}}{(N^* - N) \cdot N}\, dt = \underbrace{\int_0^t r\, dt}_{= rt}$$

$dN = \dot{N} \cdot dt$

$$\int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN}{(N^* - N) \cdot N} = \int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN}{N^* N} + \int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N^*(N^* - N)} = \frac{1}{N^*} \log|N| \Big|_{N_0}^{N(t)} + \frac{1}{N^*}\left(-\log|N^* - N|\right)\Big|_{N_0}^{N(t)} =$$

funz. raz. fratta

$$= \frac{1}{(N^* - N) \cdot N} = \frac{A}{N} + \frac{B}{N^* - N} = \frac{AN^* + N(B - A)}{N(N^* - N)} \quad \begin{cases} AN^* = 1 \\ B - A = 0 \end{cases} \to A = B = 1/N^*$$

$$= \frac{1}{N^*}\left(\log \frac{N(t)}{N_0} - \log \left| \frac{N^* - N(t)}{N^* - N_0} \right| \right) = \frac{1}{N^*} \log\left(\frac{N(t)}{N_0} \cdot \frac{N^* - N_0}{N^* - N(t)} \right)$$

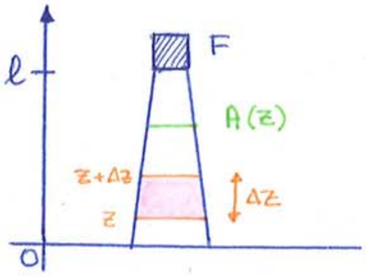
Ricapitolando

$$\int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN}{N(N^* - N)} = \int_0^t r\, dt$$

$$\cancel{\frac{1}{N^*}} \cdot \log \frac{N(N^* - N_0)}{N_0(N^* - N)} = rt \cdot N^*$$

SEZIONI DI UN PILASTRO

(tratto da "Le equazioni differenziali e le loro applicazioni" di M. Ronaldo)



Pilastro a sezione circolare con sovrapposto un carico F. = condiz. iniziale

Allontanandosi dal carico, la pressione sulle varie sezioni cresce
$\Rightarrow$ sezioni non possono essere costanti.

Δz infinitesimo $\Rightarrow$

$A(z)$ = area della sezione ad altezza z

$p(z)$ = peso che grava sulla sezione del pilastro che sta ad altezza z.

$$p(z) = F + \rho \underbrace{V(z)}$$

volume della pressione del pilastro che sta ad altezza $> z$.

$$\left(\underset{\sigma(z)}{\text{PRESSIONE}} = \frac{\text{FORZA}}{\text{AREA}} \; \frac{p(z)}{A} \right)$$

$$\sigma(z) = \frac{F + \rho V(z)}{A(z)}$$

$\exists\ \sigma_c$ (SFORZO CRITICO) t.c.: $\sigma(z) > \sigma_c \Rightarrow$ pilastro cede

Vogliamo progettare un pilastro con $\sigma(z)$=costante (= indipendente da z):

$$\sigma << \sigma_c$$

ossia vogliamo progettare secondo un $A(z)$ t.c.

$$\left.\begin{aligned} A(z) &= \frac{F+\rho V(z)}{\sigma} \\ A(z+\Delta z) &= \frac{F+\rho V(z+\Delta z)}{\sigma} \end{aligned}\right\} \quad A(z+\Delta z) - A(z) = \frac{\rho}{\sigma}\underbrace{\left(V(z+\Delta z) - V(z)\right)}_{A(z)\cdot \Delta z}$$

essendo piccoli i contributi del II ordine

$$\frac{A(z+\Delta z) - A(z)}{\Delta z} = \ominus \frac{\rho}{\sigma} A(z) \xrightarrow{\Delta z \to 0} A'(z) = -\frac{\rho}{\sigma} A(z) \Rightarrow A(z) = C e^{-\frac{\rho}{\sigma} z}$$

$V(z+\Delta z) < V(z)$

$$\longrightarrow \left.\begin{aligned} A(\ell) &= \frac{F}{\sigma}, \ \sigma_c >> \sigma \\ A(\ell) &= C e^{-\frac{\rho}{\sigma}\ell} \end{aligned}\right\} \quad C = \frac{F}{\sigma} e^{-\frac{\rho}{\sigma}\ell} \Rightarrow \boxed{A(\ell) = \frac{F}{\sigma} e^{\frac{\rho}{\sigma}(\ell - z)}}, \quad \sigma_c >> \sigma$$

OSS. 1: $\uparrow F$, $\uparrow$ sezione $A(z)$

OSS. 2: ad uno sforzo σ < corrisponde una sez. $A(z)$ >

OSS. 3: sezioni inferiori sono + ampie ($A(z=0)$)

La "forma del pilastro" è descritta da un esponenziale.
Quando σ molto grande, pur restando $\sigma < \sigma_c$, pilastro diventa quasi verticale.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 330

ESEMPIO: caduta libera di un grave dall'altezza $z=0$ e con velocità iniziale $\dot{x}(t=0)=0$

$$0 \downarrow z \qquad g\downarrow \qquad \begin{cases} \dot{z}(t) = gt \\ z(t) = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$\dot{z}(z(t)) = ?$. Esplicito t da e lo sostituisco in $\dot{z}(t)$:

$$\begin{cases} t = \sqrt{\frac{2z}{g}} \\ \dot{z} = g\sqrt{\frac{2z}{g}} = \sqrt{2g}\cdot\sqrt{z} \end{cases}$$

eq. differenziale (in forma normale)

Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{z} = \sqrt{2g}\sqrt{z} \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

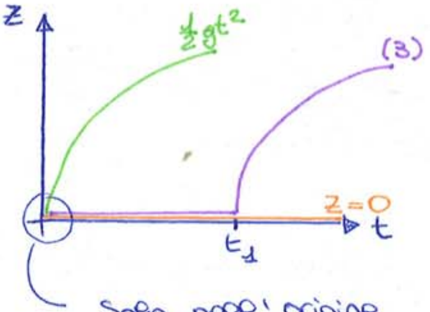
Soluzioni:

1 – $z(t) = 0$ (ovvia) — infatti: $\dot{z} = \sqrt{2g}\cdot\sqrt{0} = 0$ ✓

2 – $\dot{z} = gt$ (Newton) — infatti: $gt = \sqrt{\cancel{2}g}\sqrt{\frac{1}{\cancel{2}}gt^2}$ ✓

3 – $z = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le t_1 \\ \frac{1}{2}g(t-t_1)^2 & t > t_1 \end{cases}$ — infatti: $\dot{z} = \sqrt{\cancel{2}g}\sqrt{\frac{1}{\cancel{2}}g(t-t_1)^2} = g(t-t_1)$

$\downarrow$ INFINITE SOLUZ.



" PENNELLO (O BAFFO) DI PEANO "

$\underbrace{\dot{z} = \sqrt{2g}\cdot\sqrt{z}}_{f(z)} \longrightarrow f'(z) = \sqrt{\cancel{2}g}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cancel{2}z}}$

$\overset{\parallel}{\ddot{z}}$

Solo nell'origine ho PENNELLO DI PEANO

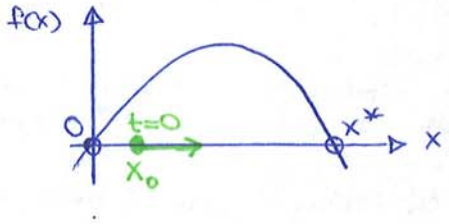
Asse $y \longrightarrow$ tan ($=+\infty$) alla curva nell'intorno dell'origine $\sim$ asintoto

$$\boxed{\text{Ipotesi aggiuntiva per } \exists \text{ ed } ! : \quad |f'(x)| \le C}$$

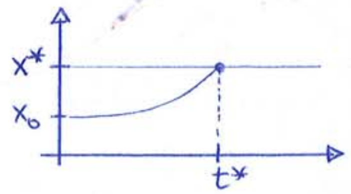
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 330

Riepilogando:

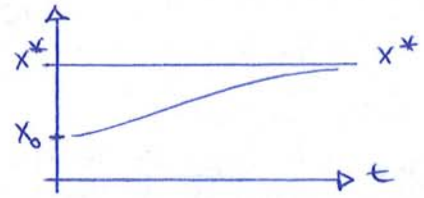
1. La pallina che parte a sx all'istante $t=0$ ($\Rightarrow$ posiz. $x(t=0)=x_0$) si sposta verso dx ($\rightarrow f(x)>0$, velocità positiva) fino a quando arriva a x^* $\Rightarrow$ $x(t)$ è crescente.



2. Se $x(t)$ impiegasse un tempo FINITO t^* per arrivare a x^* allora il Problema di Cauchy con $x(t^*)=x^*$ avrebbe almeno 2 soluz, quella ovvia $\mathbf{x(t)=x^*}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e quella relativa alla condiz. iniz. $\mathbf{x(t^*)=x^*}$



3. Siccome vale TEOR. $\exists$ ED !, non possono intersecarsi 2 soluz. $\Rightarrow$ $x(t)$ deve arrivare a x^* in tempo ∞.



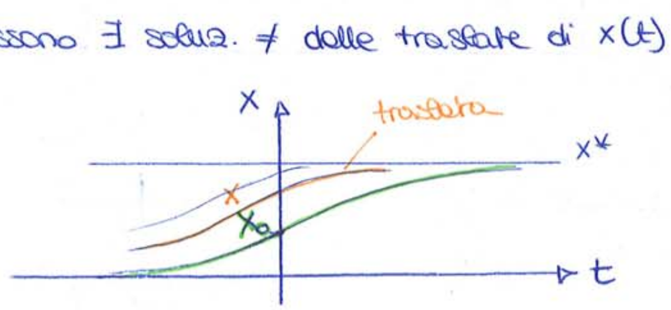
Se ora osservassi una pallina che si muove da x_0 verso sx, $f(x)$ (= velocità, $\dot{x}$) avrebbe verso opposto $\rightarrow$ grafico $x(t)=x_0$ simm.

4. $\exists$ ed ! $\Leftrightarrow$ 2 palline in 2 p.ti $\neq$ non si urteranno mai

Data una soluz. $x(t)$ per $0<x<x^*$, ogni sua traslata è anch'essa soluz. della medesima eq. differ.

$\Downarrow$

Non possono $\exists$ soluz. $\neq$ dalle traslate di $x(t)$



5

Le ∞ soluz. permesse al variare della cost. arbitraria hanno tutte lo stesso andam. della soluz $x(t=0)=x_0$, differenziandosi tra loro solo per la posiz. sull'asse verticale delle x

$\Rightarrow$ tracciata la soluz. x_0, ottenuta dal probl. di Cauchy, si trasla questa lungo l'asse t. ($\rightarrow$ variazioni della soluz. iniz. x_0 al variare delle cond. iniz. di Cauchy)

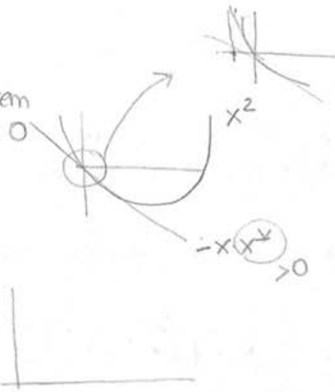
Dunque il tempo di percorrenza tra O e $x_0 \in (0, x^*)$ è $+\infty$:

$$T_{x0 \to x^*} = \int_0^{x_0} \frac{dx}{\kappa x (x - x^*)}$$

$$\frac{1}{\kappa x (x - x^*)} = \frac{1}{\kappa (x^2 - x x^*)} \underset{\uparrow}{\sim} \frac{1}{\kappa x x^*}$$

nell'intorno dell'ORIGINE

+ velocem tende a 0 $-x x^*$



$$\frac{1}{\kappa x \cdot x^*} \simeq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\alpha = 1} \Rightarrow \int \frac{1}{x^\alpha} \xrightarrow{\alpha = 1} \text{DIVERGE}$$

$* \; \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$

Intervallo di percorrenza da 0 a $+\infty$:

$$T_{\to} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\kappa x (x^* - x)}$$

$\frac{1}{x^\alpha} \xrightarrow{\alpha = 1}$ divergente per $x \sim 0$

$\frac{1}{x^* - x} \to$ divergente per $x \sim x^*$

} determinano entrambi l'esplosione dell'integrando, ma in istanti $\neq$

$\downarrow$

le 2 divergenze non co-operano,

$\Rightarrow$ i 2 α non si sommano

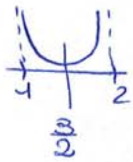
Formalmente: $x_0 \in (0, x^*)$

$$T_{0 \to +\infty} = \underset{(+\infty)}{T_{0 \to x_0}} + \underset{(+\infty)}{T_{0 \to x^*}}$$

Due fattori che divergono in due punti $\neq$ non sommano le rispettive divergenze.

ES.: $$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{2-x}} = \int_1^2 \frac{dx}{\underbrace{(x-1)^{1/2}}_{\alpha = 1/2} \cdot \underbrace{(2-x)^{1/2}}_{1/2}}$$

CE: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x < 2 \end{cases}$



$$= \int_1^{3/2} + \int_{3/2}^2$$

$\int_{3/2}^2$ ← unico infinito determinato da $x=2$

$\int_1^{3/2}$ ← unico ∞ determinato da $x=1$

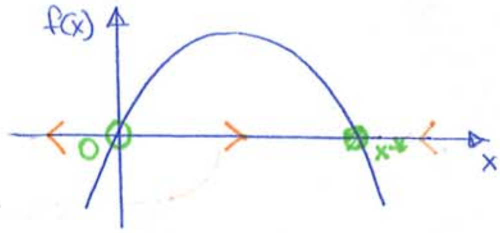
Divergenze sommano le rispettive potenze solo quando sono esattam. nello stesso p.to.

CONTRO-ESEMPIO: esplosioni che si sommano.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}\,\sqrt{x}} = +\infty \qquad \operatorname{sen} x \sim x \Rightarrow \quad \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\operatorname{sen} x}}_{\alpha = \frac{1}{2}}\,\underbrace{\sqrt{x}}_{\alpha = \frac{1}{2}}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\alpha = 1}$$

Analisi qualitativa

$\dot{x} = rx(x^* - x)$ VERHULST (o LOGICA)



1) LINEA DELLE FASI (degli stati)
- asse x -

2) CAMPO DI VELOCITÀ sulla linea delle fasi

$$\dot{x} = f(x) \begin{cases} f(x) > 0 & \xrightarrow{f(x)} x \\ f(x) < 0 & \xleftarrow{f(x)} x \end{cases}$$

3) P.TI DI EQUILIBRIO _ DI STABILITÀ

$\dot{x} = 0 \rightarrow f(x) = 0$:= il campo di velocità in x è nullo
(x := "p.to fisso" o "p.to di equilibrio")

$rx(x^* - x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = x^* \end{cases}$ "REPULSORE" / "ATTRATTORE"

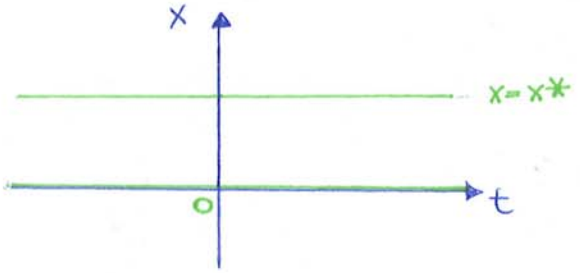
TH. ∃! → 2 soluz. ($x = x_0$, $x = 0$ oppure $x = x_0$, $x = x^*$) non si incontrano mai in uno stesso istante t.] *

↓

$x = x^*$ tende asintoticam. ai p.ti di stabilità $x = 0$, $x = x^*$

↓

divido piano (t,x) in 3 spazi t.c. ∀x (soluz.) appartenente ad 1 di questi intervalli non posso uscirne, intersecandosi cioè con altre soluz.



↓

I pti stazionari non possono essere attraversati dal flusso, né essere raggiunti in tempo finito.

4) CRESCENZA / DECRESCENZA di f(x)

$0 < x < x^*$: $f(x) > 0$ → velocità positive per $t \to +\infty$
x^* attrattore → $x = x_0$ tende a x^* per $t \to +\infty$
0 repulsore → $x = x_0$ tende a 0 per $t \to -\infty$

Th ∃! $\xrightarrow{(*)}$ tempi di avvicinam. / allontanam. tra 2 soluz. x sulla linea delle fasi è cost.

↓

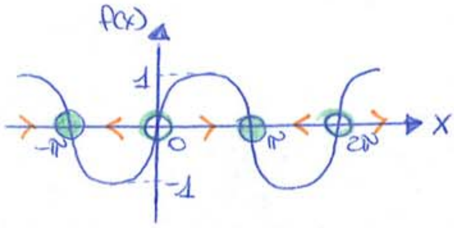
$\forall x \in [0, x^*]$ è una traslata sull'asse t della soluz. $x = x_0$

$x > x^*$: $f(x) < 0$ → inverto velocità e ripercorro linea fasi da dx verso sx popolaz. parte per $x \gg x^*$ e tende a $x = x^*$ per $t \to +\infty$

(1)

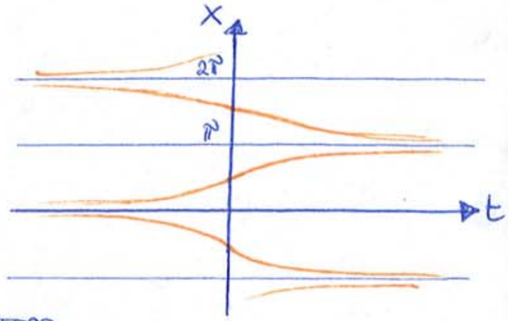
Esercizi

① $\dot{x} = \underbrace{\text{sen}(x)}_{f(x)}$



$f(x)=0 \rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} k \text{ PARI} \rightarrow \text{INSTAB. } (x=0) \\ k \text{ DISP.} \rightarrow \text{STAB. } (x=\pi) \end{cases}$



$x \rightarrow 0$ A tempo $t \rightarrow -\infty$ le soluz. x tendono ad addensarsi } INSTAB.

$x \rightarrow \pi$ soluz. rarefatte a tempo $-\infty$, si addensano in tempo $t = +\infty$ } STAB.

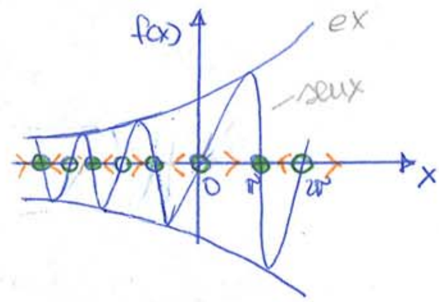
∀x è monotona ⇒ non posso fare invertire il moto

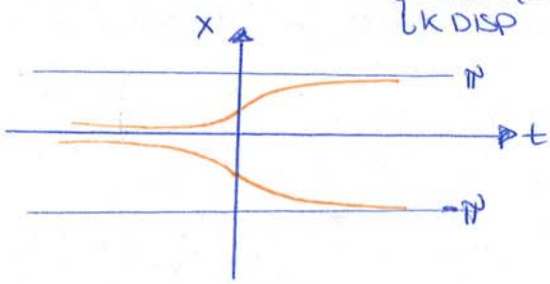
∄ BLOW-UP → non ci sono soluz. x che fuggano all'∞ perché:
- f(x) periodica (x di equilibrio)
- ∀x (soluz.) è limitata tra 2 soluz. costanti

② $\dot{x} = e^x \cdot \text{sen}\, x = f(x)$

$f(x)=0 \rightarrow \text{sen}\,x = 0 \rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} k \text{ PARI } (x=0) & \text{INST.} \\ k \text{ DISP} & \text{STAB} \end{cases}$

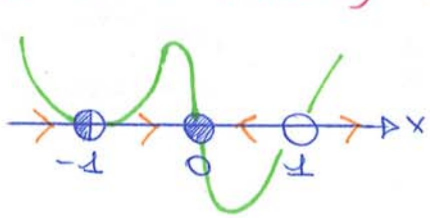




∀x è LIMITATA ← ∀x è confinato tra x cost (pti equil.)

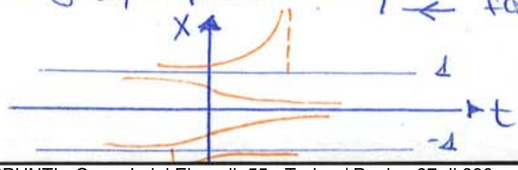
f(x) > rispetto all'es. (1) → soluzioni + verticali
↓
solut. convergono + velocem. vs ∞

③ (PROBLEMA INVERSO) → Dato il campo di velocità, ricavare equaz.



Dati i pti di equilibrio $x = -1, 0, 1$ e la loro natura (STAB./INSTAB.):
- traccio frecce del campo
- ipotetica f(x), sapendo che $\begin{cases} \rightarrow f(x)>0 \\ \leftarrow f(x)<0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (x-0)(x+1)(x-1) = x(x^2-1)$



Esercizi

① $\dot{x} = \dfrac{\sqrt[3]{x^5} + \operatorname{sen} x + \operatorname{tgh} x}{|\cos x| + |\operatorname{arctg} x| + |x^{1/4}|}$

∃ soluz. che fuggano all'∞ in tempo finito?

Studio l'andam. di $\dot{x} = f(x)$ per $x \to +\infty$:

$$\begin{cases} \text{Numeratore} \sim x^{5/3} \\ \text{Denominatore} \sim x^{1/4} \end{cases} \longrightarrow f(x) \approx \frac{x^{5/3}}{x^{1/4}} = x^{5/3-1/4} = x^{17/12}$$

$\alpha = \frac{17}{12} > 1 \Rightarrow$ ∃ soluz. che vanno all'∞ in tempo FINITO.

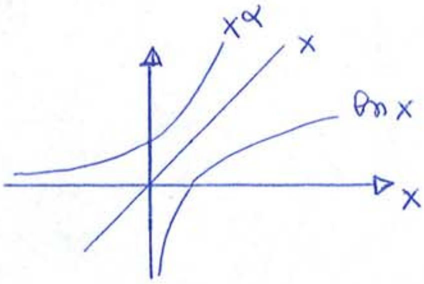
② $\dot{x} = ax \ln(bx)$, $a, b > 0$

Per $x \to +\infty$:
$(\forall \alpha > 1)$

$< x^\alpha$

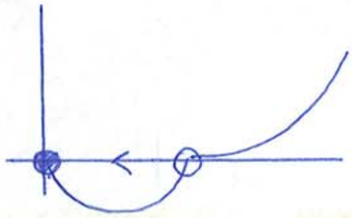
$$x < x \ln x < x^\alpha$$

$\uparrow$ $\alpha = 1$ $\qquad$ $\uparrow$ $\alpha > 1$



$$T_{(1 \to +\infty)} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dy}{y} = +\infty$$

($\ln x = y$, $\frac{dx}{x} = dy$)

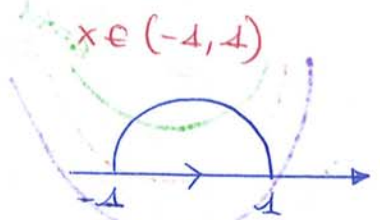


LEGGE DI CRESCITA TUMORALE
↳ meccanismo di riproduz. potenziato rispetto alla l. Malthus
↳ 2 meccanismi:
- riproduz. cell. tumorali
- trasporto cell. tumorali

③ $\dot{x} = \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{y}$ $\quad x \in (-1, 1)$

$\downarrow$

$y^2 = 1 - x^2$



→ questa funz. non è derivabile
↳ ∄ derivata per $x \to \pm 1$

⇒ DIFETTO DI UNICITÀ → PENNELLO DI PEANO
cioè potrebbe verificarsi NON UNIC.

$x(0) = 1 \longrightarrow x(t) = 1$

Separazione delle variabili

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int dt = t + c$$

$x = \cos y$
$dx = -\operatorname{sen} y \, dy$

$$\int -\frac{\operatorname{sen} y \, dy}{\operatorname{sen} y} = -\int dy = -y$$

$\Rightarrow y = -(t+c)$

$x(t) = \cos y = \cos(-(t+c)) = \cos(t+c)$

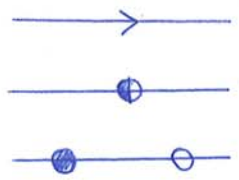
$x(0) = \cos c$

$x(t) = \cos t$

$a > 0$

$a = 0$

$a < 0$

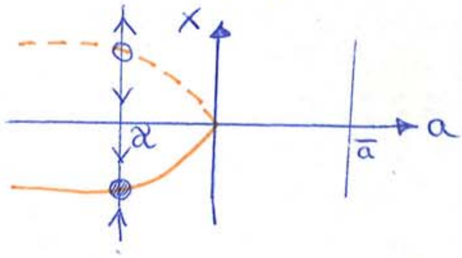


$a^* :=$ " VALORE CRITICO "

valore del parametro a in corrispondenza del quale si ha la biforc.

Diagramma di biforcazione (a, x)

$x :=$ coord. dei p.ti fissi



riassunto di tutte le linee delle fasi

traccio verticale per generico a

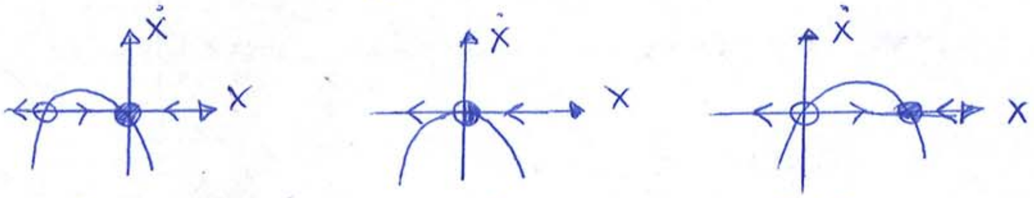
→ interseco $a = f(x)$ → pti di equilibrio { STAB se su ——— ; INST. " " - - -

indico frecce → ← a seconda della natura del p.to

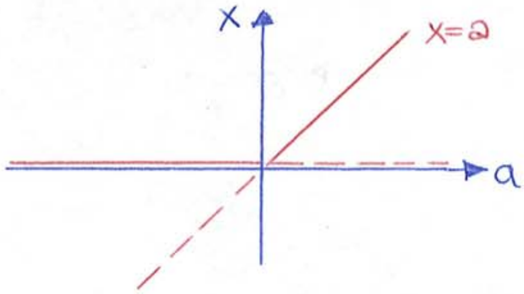
→ non interseco $a = f(x)$ → $\nexists$ pti di equilibrio

BIFORCAZIONE DI SCAMBIO

$\dot{x} = ax - x^2$, $a \in \mathbb{R}$



$a<0$ $a=0$ $a>0$



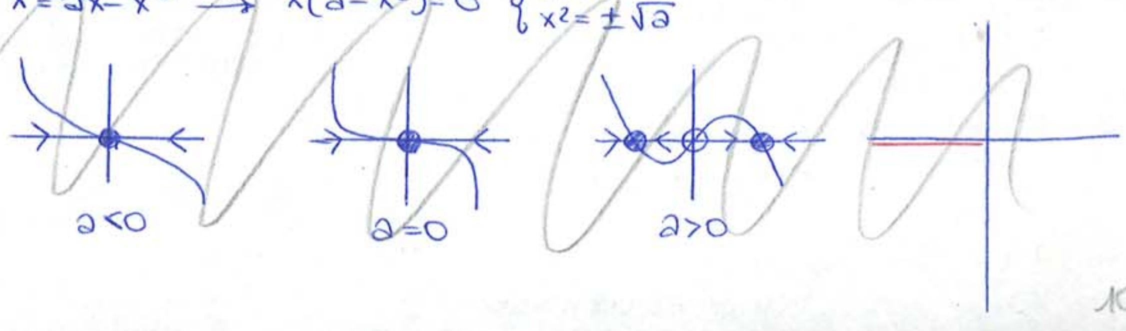
DIAGR. DI BIFORC.

Fuga nel futuro in tempo $-\infty$ partendo da $x<0$ (vedi diagr. $(x, \dot{x})$)

$x<0 \to$ ← ⊖ INSTAB mi allontano dal pto d'eq.

Fuga si completa in tempo finito x^K termine dominante è x^2 ($\to \alpha = 2 > 1$).

Esempio: $\dot{x} = ax - x^3 \to x(a - x^2) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \pm\sqrt{a} \end{cases}$



$a<0$ $a=0$ $a>0$

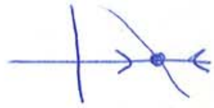
10

$f'(\bar{x})>0 \longrightarrow z(t)=x(t)-\bar{x}$ cresce esponenzialm.

$f'(\bar{x})<0 \longrightarrow z'(t)=C\cdot e^{f(\bar{x})t}$

$z(t)=|x(t)-\bar{x}| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ con legge espon.

$f'(\bar{x})=0 \longrightarrow \dot{z} \sim \frac{1}{2}f''(x)(x-\bar{x})^2=\frac{f''(\bar{x})}{2}z^2$



$z(t)=\dfrac{1}{\frac{f'(x)\cdot t}{2}-c} \longrightarrow$ andam. non esp. più + lento

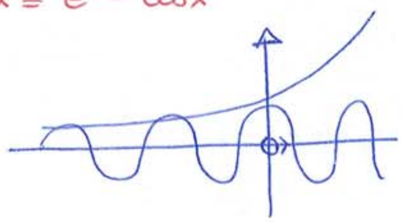
Quando tg è orizz, l'avvicinam. delle soluz. in prossimità dei pti di equilibrio è ≠.

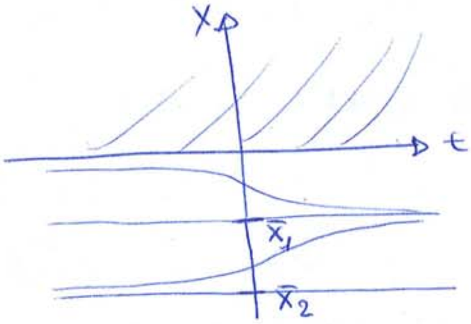
Esempio : $\dot{x}=e^x-\cos x$

$\dot{x}=0$

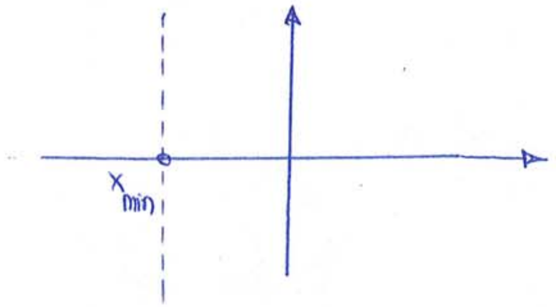
I pti fissi si trovano all'intersez. tra le 2 funz.

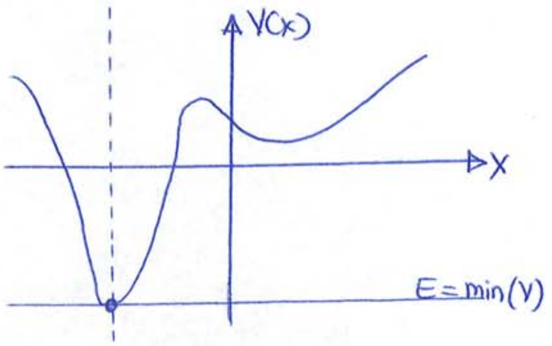
$e^x=\cos(x)$





© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 330





Assegnato V, quali sono i possibili valori di E?

$$E = T + V \geq T + \min V(x) \geq \min V(x)$$

$E = \min V \rightarrow \ddot{x} = 0$ nello stesso e solo p.to x

$x(t) = x_{min}(t) \rightarrow$ soluz. dell'eq. diff.

$E < \min(V)$ livello di energia non ammissibile

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Esempio: oscillatore armonico

$$m\ddot{x} = -Kx, \quad K > 0 \longrightarrow \ddot{x} = -\frac{K}{m}x = -\omega^2 x$$

forza di richiamo

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

O P x

$$\begin{cases} \dot{x}\ddot{x} + \omega^2 x \dot{x} = 0 \\ \dot{x} \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2 = E}$$

EN. CINETICA, T — EN. POTENZIALE

E := "ENERGIA" "INTEGRALE PRIMO" "QUANTITÀ CONSERVATA"

→ eq. diff. I grado

Per $t \to \infty$: possono variare i valori dei singoli addendi ma si mantiene cost. la loro combinaz. lin. E

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

condiz. garantita da x(t) come soluz. dell'eq. diff. E

$$\frac{d}{dt} E\big(x(t), \dot{x}(t)\big) = 0$$

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$$

V(x) := una primitiva di $-f$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 330

$$T = \int_0^{\frac{\sqrt{2E}}{\omega}} \frac{dx}{\sqrt{2E-\omega^2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2E}} \int_0^{\frac{\sqrt{2E}}{\omega}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2E}x^2}}$$

$$= \frac{1}{\omega} \arcsen(y)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2\omega} < +\infty$$

TEMPO FINITO

$y = \frac{\omega}{\sqrt{2E}}x$

$dx = \frac{\sqrt{2E}}{\omega}dy$

$0 < dx = \cancel{\frac{\sqrt{2E}}{\omega}} dy < \cancel{\frac{\sqrt{2E}}{\omega}}\ 1$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2E}}{\omega} \\ t = +\frac{\pi}{2\omega} \end{cases} \rightarrow \dot{x} = \sqrt{2E-\omega^2x^2} = 0$$

$\dot{x} = 0$ significa velocità nulla, ma per TH. $\exists$ ED ! è imposs.

Infatti l'eq. a cui devo far riferim. è:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x = -\omega^{\cancel{2}}\frac{\sqrt{2E}}{\cancel{\omega}} < 0 \rightarrow \text{moto si inverte}$$

poichè $\rightarrow$ nell'eq. $\dot{x}=0$ ho perdita di info
$\hookrightarrow$ NB: quando ho moltiplicato per $\dot{x}$, ho ipotizzato $\underline{\dot{x}\neq 0}$!!

II FASE: da $\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$ a 0 in $T = \frac{\pi}{2\omega}$ $\rightarrow$

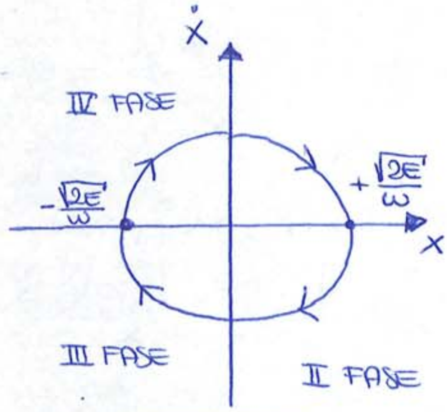
$$\dot{x} = +\sqrt{2E-\omega^2x^2}$$

III FASE: da 0 a $-\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$

$$\dot{x} = -\sqrt{2E-\omega^2x^2}$$

NB.: $\dot{x}(+z) = \dot{x}(-z) = -\sqrt{2E-\omega^2(z^2)}$

IV FASE: da $-\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$ a 0 (ritorno all'origine)



$$T := \text{"periodo"} = \overset{2}{\cancel{4}}\frac{\pi}{\underset{1}{\cancel{2}}\omega} = \frac{2\pi}{\omega} \neq f(E)$$

$$\boxed{1 = \frac{\dot{x}^2}{2E} + \frac{x^2}{\frac{2E}{\omega}}}$$

$\uparrow$ ELLISSE

<u>OSSERVAZIONI</u>

TH. $\exists$ ED !

① $\forall(x,\dot{x})$ DEL PIANO DELLE FASI PASSA $\boxed{\text{UNA E UNA SOLA}}$ CURVA DI FASE.
Infatti la coppia $(x,\dot{x})$ determina univ. com.:

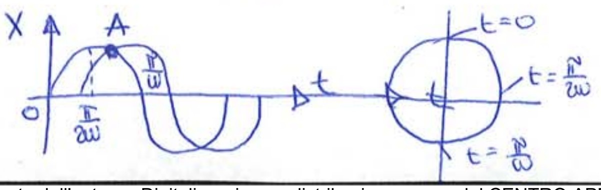
$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2x^2}{2}$$

La proprietà vale per tutte le equaz. $\ddot{x} = f(x)$ perchè equivalenti al <u>th. $\exists$ ed !</u> $\rightarrow$ $(x,\dot{x})$ cond. iniz. $\rightarrow$! curva

② Data un'ellisse

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \omega x^2$$

soluz. sono $x(t)$, come proiez. della <u>curva di moto</u> sull'asse x
$\hookrightarrow$ = p.to del piano delle fasi lungo l'ellisse relativo a E



13