NUMERO: 2028A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Ferrero Roberta

MATERIA: Idraulica (teoria + esercitazioni) - Prof Ridolfi

FLUIDO

forma della materia priva di forma propria
corpo materiale che può subire grandi deformazioni sotto l'azione di forze di minima intensità.

↓

scarsa resistenza alla deformaz. → NO variaz. di volume ma variaz. di forma = = DISTORSIONE ANGOLARE

sono permanenti, contrariam. ai solidi

- resist. opposta diventa trascurabile quando velocità di deformaz. tende ad annullarsi.
- forze applicate dipendono dalla deform. e non dalla vel. (→ distinzione mecc. fl. e mecc. sol.)

in tal caso forza dipenderebbe anche dal tempo, essendo $v = s/t$

A seconda dell' intensità ....

FLUIDI →
- LIQUIDI : POCO COMPRIMIBILI, grandi resist. opposte alla variaz. di volume ΔV, sup. libera a contatto con l'atm. ("pelo libero")
- GAS : FACILM. COMPRIMIBILI, forze di modeste intensità per ΔV → occupano intero recipiente

FLUIDO come SIST. DISCRETO

composto da molecole di dimens. molto > rispetto alle distanze che le separano → DENSITA' BASSISSIME

→ ANALISI DIFFERENZIALE è inadeguata

grandezze caratteristiche in un p.to variabili con discontinuità

ES.: $\frac{dv}{dt}$ = variaz. velocità di una sing. molecola

studio fluidi su scale > (fino al mm^3)
→ considero dV contenente n.° mol. suff. da supporre una variaz. spaziale continua delle caratteristiche medie

FLUIDO come SIST. CONTINUO

↓

sfrutto calcolo differenziale

PARTICELLA FLUIDA = porzione di fluido di dimensioni opportunatam. scelte alla quale corrispondono certi valori delle grandezze caratteristiche (ρ, v, p) in un certo p.to, assegnati al centro di inerzia.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 234

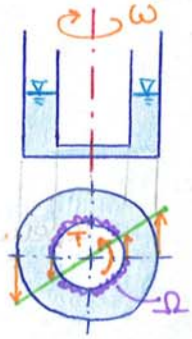
Viscosita' → dinamica, μ $[Ns/m^2]$
→ cinematica, ν $[m^2/s]$

Fluido in moto → stato di sforzo interno { componenti NORMALI
" TANGENZIALI → si oppongono al moto → deform. IRREVERS.

Viscosita' dinamica, μ $[Ns/m^2]$

$\mu = \mu(\text{fluido}, \Theta, \tau)$ ma → LIQUIDI: $\uparrow\Theta$, $\downarrow\mu$ (olio diventa simile all' H_2O)
→ GAS: $\uparrow\Theta$, $\uparrow\mu$ ($\uparrow$ cinetica e contatto tra molecole)

Due esperimenti:

① 

VISCOSIMETRO
2 cilindri coassiali, liberi di muoversi indipend. senza attrito.

Cilindro esterno in moto (ω cost) → tg a direz. moto (trasmesse DAL FLUIDO) → trascina strati successivi di fluido
→ trascinam. cilindro interno, trasmettendo coppia x mantenere cil. est. in rotaz.

Se voglio mantenere fermo cil. int.:
→ coppia T resist. al moto (= ed opposta a coppia cil. int.) → cilindro interno in quiete:
{ $\omega \cdot r_e$: vel. fl. a parete cil. est.
{ 0: " " " " int

⇓

fluido alla parete (Ω) si muove con stessa velocita' di qst ultim.

↓

azione di trascinam. su parete del cilindro interno e' = contraria a T

$T \propto (\text{fluido}, \Omega, \frac{1}{\Delta r}, \Delta u)$

COPPIA DI FORZE

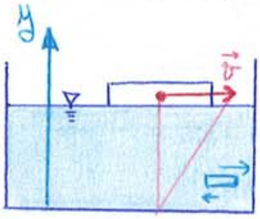
$\frac{1}{\Delta r} \to (r_e - r_i)$, $\Delta u \to (\omega_e r_e - \omega_i r_i)$

$$\boxed{T = \mu \cdot \Omega \frac{du}{dr}} \longrightarrow \frac{T}{\Omega} = \boxed{\tau = \mu \frac{du}{dr}}$$

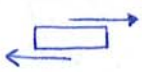
LEGGE DI NEWTON

gradiente velocita' lungo la norm. alla v. fluido
→ crea tensioni tg

$\tau \propto \dot{\gamma}$ (vel. deform. ang.) FLUIDI
$\tau \propto \gamma$ (distors. ang.) SOLIDI

② 

Vasca riempita con fluido, galleggiante con velocita $\vec{v}$.
Stratterelli di fluido sono trascinati da stratterelli sovrastanti e intanto trascinano stratterelli sottostanti.



Velocita' decrescono verso fondo, fino ad annullarsi.

$\uparrow \mu$, $\uparrow$ velocita' di trascinam. tra gli stratterelli → nasce un gradiente delle velocita'

$\uparrow \tau$, $\uparrow \frac{dv}{dr}$ l'insorgenza del gradiente delle velocita' rispetto alla normale alla direzione del moto origina delle tensioni tg τ.

I fluidi newtoniani obbediscono alla legge: $\tau = \mu \frac{du}{dr}$
e dunque sono caratterizzati da un unico parametro μ.
Sul piano reologico si rappresentano con una retta passante x l'origine degli assi con coeff. angolare μ.

2

DILATANTI (sospensioni di solidi ad alta concentraz.)

concavità verso alto.

$\uparrow \dot{\gamma}$, $\uparrow \mu$, $\uparrow$ resist. $\rightarrow$ $\uparrow$ distanza tra particelle, dilataz.

Fluido in quiete $\rightarrow$ porosità del fluido è minima $\rightarrow$ liquido riempie appena i vuoti

TIXOTROPICO $\uparrow t \Rightarrow \downarrow \mu$

$\tau \downarrow$ nel tempo fino a valore limite, in corrispondenza del quale il fluido si comporta come newtoniano. Tempo necessario a rottura dei legami strutturali

Contrario: REOPECTICI $\rightarrow$ $\uparrow$ tempo, $\uparrow \tau$, $\uparrow \mu$ $\rightarrow$ $\sim$ solidi (si induriscono) formaz. legami che si oppongono al movimento

ELASTOVISCOSO (emulsioni e sospensioni di fluidi newtoniani)

$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\mu}$ quiete ($\dot{\gamma}=0$) $\rightarrow$ τ si estinguono gradualm. con legge esponenziale

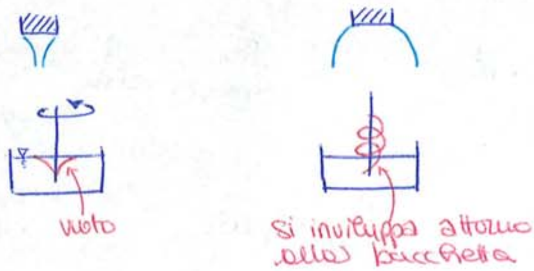
Proprietà viscose (fluidi) + prop. elastiche (solidi)

$\begin{cases} \tau \propto \dot{\gamma} & \text{FLUIDI} \\ \tau \propto \gamma & \text{SOLIDI} \end{cases}$ $\tau \propto f(\dot{x}, x)$ ELASTOVISCOSI $\tau \propto f(x)$ solo VISCOSI

Acqua Fluido elastoviscoso

getto

Comportam. fluido quando giro una bacchetta dentro



Viscosità cinematica, ν

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad [m^2/s]$$

$\nu_{H_2O} = O(10^{-6})\ m^2/s$

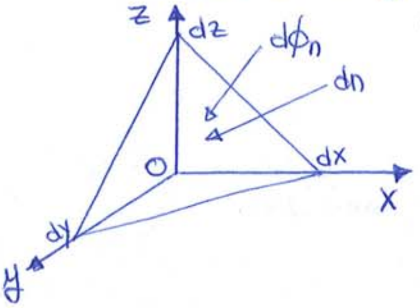
$\nu_{aria} = O(10^{-5})\ m^2/s$ $\Rightarrow \rho_{ARIA} \ll \rho_{H_2O}$

Fluidi sono condizionati da ν e non da μ.

Tensione superficiale, S

(vedi capitolo "MOTI DI FILTRAZIONE")

? Distribuz. degli sforzi intorno al p.to O, al variare della giacitura.



Tetraedro elementare ("Tetraedro di Cauchy")

Cauchy descrive $\vec{\phi}$ bilanciando tutti gli sforzi sullo stesso volume.

$dn \perp$ superficie

ϕ_n non ha necessariam. stessa direz. di $\vec{n}$, ma agisce sulla stessa sup.

I equaz. cardinale di equilibrio

FORZE DI SUP. + FORZE DI MASSA = 0

$\rightarrow \mathcal{L}\, dm = \rho dV = \rho \alpha\, dx\, dy\, dz$ (infinitesimo 3° ordine $\rightarrow$ f. di massa trascurabili)

$d\vec{\Pi}$ = spinte agenti sulle 4 facce (infinitesimo 2° ordine):

$$\vec{\phi}_n d\Omega_n - \vec{\phi}_x d\Omega_x - \vec{\phi}_y d\Omega_y - \vec{\phi}_z d\Omega_z = 0$$

$$d\Omega_x = -d\Omega_n \cos\hat{nx}$$
$$d\Omega_y = -d\Omega_n \cos\hat{ny}$$
$$d\Omega_z = -d\Omega_n \cos\hat{nz}$$

"$-$" essendo $\hat{nx}$ ang. ottusi $\rightarrow \cos < 0$

TEOR. DEL TETRAEDRO DI CAUCHY (relaz. vettoriale)

$$\boxed{\vec{\phi}_n = \vec{\phi}_x \cos\hat{nx} + \vec{\phi}_y \cos\hat{ny} + \vec{\phi}_z \cos\hat{nz}}$$

(relaz. vettoriale)

sforzo agente su giacitura $\vec{n}$

sforzi agenti su 3 generiche giaciture, ma $\perp$ tra loro

Lo sforzo agente su un p.to su un elem. di generica giacitura è funz. lineare degli sforzi $\vec{\phi}$ agenti, nello stesso p.to, su 3 qualsiasi giaciture $\perp$ tra loro.

Proiettando secondo 3 assi coordinati $\rightarrow$ 3 relaz. scalari:

$$\begin{cases} \phi_{nx} = \phi_{xx}\cos\hat{nx} + \phi_{yx}\cos\hat{ny} + \phi_{zx}\cos\hat{nz} \\ \phi_{ny} = \phi_{xy}\cos\hat{nx} + \phi_{yy}\cos\hat{ny} + \phi_{zy}\cos\hat{nz} \\ \phi_{nz} = \phi_{xz}\cos\hat{nx} + \phi_{yz}\cos\hat{nz} + \phi_{zz}\cos\hat{nz} \end{cases}$$

1° indice: direz. della normale al piano su cui agisce lo sforzo $\vec{\phi}$.

2° indice: direz. secondo cui si proietta $\vec{\phi}$.

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{yx} & \phi_{zx} \\ \phi_{xy} & \phi_{yy} & \phi_{zy} \\ \phi_{xz} & \phi_{yz} & \phi_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = [\sigma_{ij}]$$

TENSORE DEGLI SFORZI

4

STATICA → ESERCITAZIONE 2

Fluido in quiete $\frac{d\cdot}{dt}=0$ → velocità di deformaz., $\dot{\gamma}=0\left(=\frac{dU}{dr}\right)$ → $\tau=\mu\cancel{\dot{\gamma}}=0$ { eq. assoluto / eq. relativo

assenza degli spostam. relat. nel tempo delle sing. particelle → assenza deformaz. della massa fluida

$$\begin{cases} \tau_x=\tau_y=\tau_z=0 & \left(\tau=\mu\frac{d\cancel{U}}{\cancel{dr}}\right) \text{ con } \frac{dU}{dr}=0 \\ \vec{\phi}_n=\vec{\phi}_{nx}\cos\hat{nx}+\vec{\phi}_{ny}\cos\hat{ny}+\vec{\phi}_{nz}\cos\hat{nz} & \end{cases}$$

→ fluido newtoniano in statica si comporta come fluido PERFETTO

(TESI DEL TETRAEDRO DI CAUCHY)

$$\begin{cases} \phi_{nx}=\sigma_n\cancel{\cos\hat{nx}}=\sigma_x\cancel{\cos\hat{nx}} \\ \phi_{ny}=\sigma_n\cancel{\cos\hat{ny}}=\sigma_y\cancel{\cos\hat{ny}} \\ \phi_{nz}=\sigma_n\cancel{\cos\hat{nz}}=\sigma_z\cancel{\cos\hat{nz}} \end{cases} \longrightarrow \sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=p \quad \forall(xyz,t)$$

$$\vec{\phi}_n=p\vec{n}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} & \phi_{xz} \\ \phi_{yx} & \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{zx} & \phi_{zy} & \phi_{zz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

$p=p(x,y,z)$

STATO TENSIONALE ISOTROPO ↳ 1! param. (p)

(matr. degli sforzi) DIAGONALE ← per qualsiasi orientam.

Lo sforzo in un generico p.to di un fluido in quiete è sempre diretto secondo la normale $\vec{n}$ all'elem. di sup. e ha modulo INDIPENDENTE dall'orientam. passante x lo stesso p.to (def. di ISOTROPIA).

→ tensore degli sforzi ha matr. sempre diag.

→ $\vec{\phi}_n$ diretto come $\vec{n}$

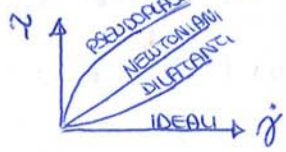
Fluidi newtoniani: $\tau=\mu\frac{du}{dn}=0$ sse ↗ $\mu=0$: no attrito ↘ $\frac{du}{dn}=0$: no grad. velocità

Profilo velocità assente sse ↗ $\frac{du}{dy}=0$ ↘ $\vec{u}=0$ → $\boxed{\text{STATICA}}$

OSS. 1: stato tensionale fornito da un unico scalare, p (anziché da 6).

OSS. 2: sist. riferim. principale, essendo tens. sforzi diag. $\begin{pmatrix} p & & \text{simm.} \\ 0 & p & \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$

OSS. 3: statica vale per ∀ fluido con curva reologica passante per origine, cioè con τ iniziale nullo. (in quiete).



→ non vale per fluidi PLASTICI ALLA BINGHAM, aventi $\tau\neq0$ per $\dot{\gamma}=0$!!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 234

Equaz. globale dell' equilibrio statico

$$\int_V \rho \vec{F} dV = \underbrace{\int_V \text{grad}(p)\, dV}$$

TEOR. DEL GRAD. O DI STOKES

$$\int_V \text{grad}(p)\, dV = \ominus \int_\Omega (p \cdot \cos\hat{nx}\, \vec{i} + p\cos\hat{ny}\, \vec{j} + p \cdot \cos\hat{nz}\, \vec{k})\, d\Omega$$

NORMALE $\vec{n}$ USCENTE

$$= \int_\Omega p\vec{n}\, d\Omega = \vec{F_c}$$

$$\boxed{\vec{P} + \vec{F_c} = 0}$$

EQ. GLOBALE DELL' EQUILIBRIO STATICO → RELAZ. AL CONTORNO

RISULTANTE DELLE F. DI MASSA AGENTI SULLE SING. PARTICELLE DI FLUIDO (PESO DEL V)

RISULTANTE DEGLI SFORZI ELEM. $p\vec{n}d\Omega$ AGENTI SUI SING. ELEM. DI Ω
= SPINTA CHE Ω ESERCITA SU V (REAZ. VINCOLARE)

STATICA FLUIDI INCOMPRIMIBILI

Ipotesi :

- campo gravitaz. : $\vec{F} = \text{grad}(U) = - \text{grad}(gz)$ $\uparrow z \downarrow \vec{g}$
  $\longrightarrow \rho \cdot \text{grad}(-gz) = \text{grad}(p)$
- fluido incomprimibile : ($\rho = \text{cost.}$) $\text{grad}(-\rho g z) = \text{grad}(-\gamma z) = \text{grad}(p)$
  $\longrightarrow \text{grad}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = 0$

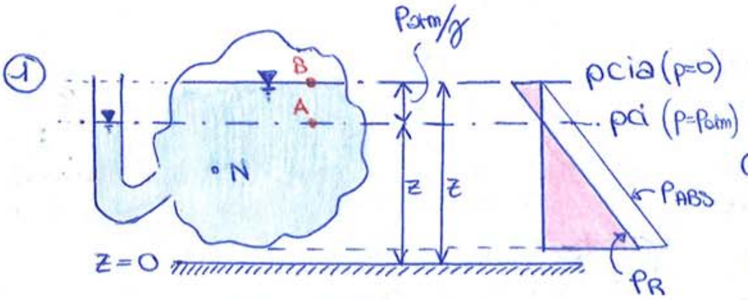
QUOTA PIEZOM. → $\boxed{h = z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost.}}$

QUOTA GEODETICA — ALTEZZA PIEZOM.

LEGGE DI STEVINO o eq. fondam. della statica
- statico
- fl. incompr.

OSS. 1: sup. isobare ($p = \text{cost} \rightarrow z = \text{cost}$) sono piani orizz., essendo infatti tali le sup. equipot. ($U = \text{cost}$, $\frac{p}{\gamma} = \text{cost.}$)

OSS. 2: h = quota del piano orizz. in cui $p=0$

① 

andam. LINEARE → PEND. γ

$h_A = h_B \rightarrow P_B = P_A + \gamma(z_A - z_B)$

$\uparrow \gamma$, $\uparrow$ inclinaz. profilo p (+ pesante)

$P_A = P_{atm} \rightarrow$ PIANO CARICHI IDROSTATICI (RELATIVI)

$P_B = 0 \longrightarrow$ P.C.I. ASSOLUTI

$z > z_B$ vuoto
fluidi non resistono a traz. → ∄ p negative

$$\underbrace{(z_A - z_B)}_{\text{distanza tra i 2 p.c.i.}} = \boxed{\frac{P_{atm}}{\gamma}}$$

→ H_2O : 10.33 m
→ Hg: 76 cm

$p = P_{assoluta} - \underbrace{\cancel{P_{atm}}}_{=0}$

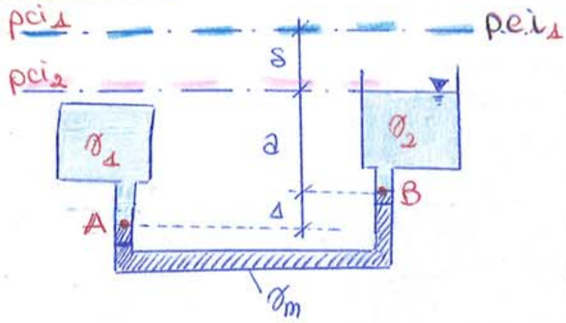
$p = \underbrace{\text{affondam}}_{\text{distanza dal p.c.i.}} \cdot \gamma$

6

④ MANOMETRO DIFFERENZIALE

→ misura dislivello δ tra i p.c.i. (differenza tra quote piezom. h)

4.a) $\boxed{\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma}$



$p_B = \gamma \cdot a$

$p_A = p_A + \gamma_m \Delta$ (DA DX)

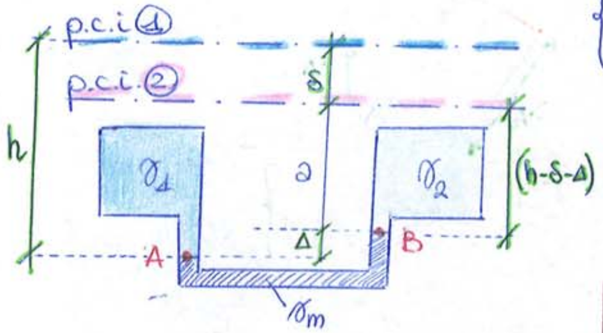
$p_A = (\delta + a + \Delta)\gamma$ (DA SX)

$p_B + \gamma_m \Delta = (\delta + a + \Delta)\gamma$

$\cancel{\gamma a} + \gamma_m \Delta = \delta\gamma + \cancel{a\gamma} + \Delta\gamma$

$$\boxed{\delta = \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}\Delta}$$

4.b) $\boxed{\gamma_1 \neq \gamma_2}$



$$\begin{cases} p_A = (\Delta + a + \delta)\gamma_1 & \text{(DA SX)} \\ p_A = p_B + \Delta\gamma_m & \text{(DA DX)} \\ p_B = a \cdot \gamma_2 \end{cases}$$

$(\Delta + a + \delta)\gamma_1 = a\gamma_2 + \Delta\gamma_m$

$\delta = \dfrac{a\gamma_2 + \Delta\gamma_m}{\gamma_1} - \Delta - a =$

$= \dfrac{a\gamma_2 + \Delta\gamma_m - \Delta\gamma_1 - a\gamma_1}{\gamma_1} =$

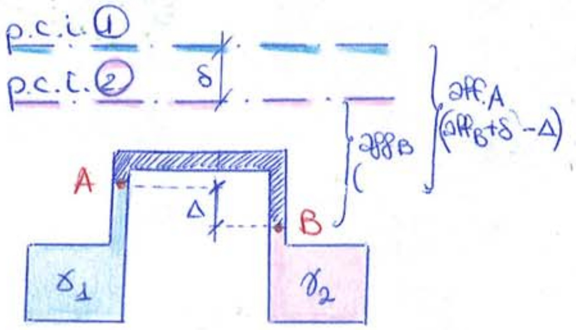
$$\boxed{\delta = \frac{\gamma_m - \gamma_1}{\gamma_1}\Delta + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1} a}$$

$$\begin{cases} p_B = (h - \delta - \Delta)\gamma_2 \\ p_A = h\gamma_1 \\ p_A = p_B + \Delta\gamma_m = (h - \delta - \Delta)\gamma_2 + \Delta\gamma_m \end{cases}$$

$h\gamma_2 - \delta\gamma_2 - \Delta\gamma_2 + \Delta\gamma_m = h\gamma_1$

$\delta = \dfrac{h\gamma_2 - \Delta\gamma_2 + \Delta\gamma_m - h\gamma_1}{\gamma_2}$ → $\boxed{\delta = \dfrac{\gamma_m - \gamma_2}{\gamma_2}\Delta + \dfrac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2} h}$

4.c) $\boxed{\gamma_m < (\gamma_1, \gamma_2)}$ → capovolgo tubo a U



$\boxed{\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma}$

$$\begin{cases} p_A = \gamma \cdot aff_A = \gamma(aff_B - \Delta + \delta) \\ p_B = p_A + \Delta\gamma_m = \gamma \cdot aff_A + \Delta \cdot \gamma_m \\ p_B = \gamma \cdot aff_B \end{cases}$$

$(\cancel{\gamma\, aff_B} - \gamma\Delta + \gamma\delta) + \Delta\gamma_m = \cancel{\gamma\, aff_B}$

$$\boxed{\delta = \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma}\Delta}$$

CENTRO DI SPINTA $\quad C = (\xi_1, \eta) \leftarrow$ C sempre sotto G!

$$\xi_{1C} = \left(x_G + \frac{I_G}{M}\right) > x_G$$

→ posiz. di C indipendente da α, resta inalterata anche se piano ruota

→ $\eta = 0 \rightarrow I_{xy} = 0$ → asse x di simm. per $d\Omega$

↓

$C \in$ asse simm. $\equiv$ asse x (di max pendenza)

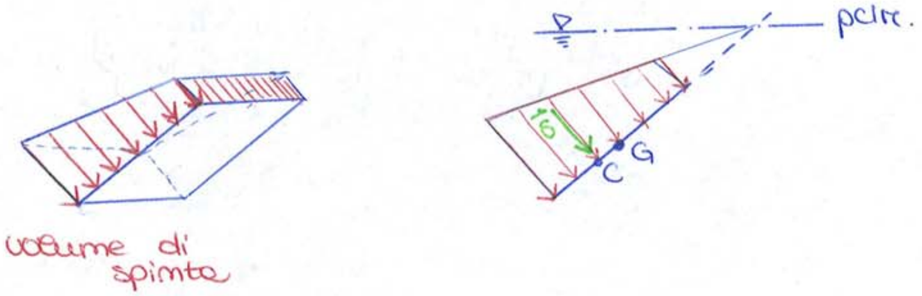
OSS.: pcir passa per G ($G \in$ pcir) $\Rightarrow \begin{cases} \vec{S} = 0 \\ C(\infty) \end{cases}$

↓

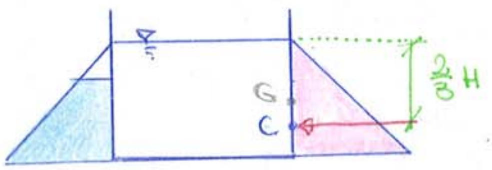
sup. soggetta a momento

OSS.: se sup. orizz. → l.s. (∞) → $C \equiv G$

→ p cost. in $\forall P$ della sup



CENTRO DI SPINTA $\equiv$ BARICENTRO DEL VOLUME DI SPINTA



volume di spinta
- base a sez. TRIANGOLARE → C a $\frac{2}{3}H$
- TRAPEZOIDALE → difficoltà a trovare ξ, η

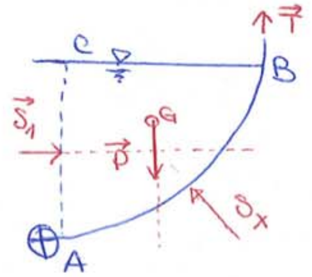
$S = p_G \Omega$ calcolo rispetto al baricentro G di Ω

x_C p.to di applicaz. della spinta S come $\left(x_G + \frac{I_y}{M_y}\right) > x_G$

⇓ almeno

x_C sempre sotto x_G

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 234



PARATOIA sorretta da tirante ↳ spinta $\vec{T}$
Regolando inclinaz. della paratoia controllo

Cerniera sul fondo ⊕

? Spinta del fluido sulla paratoia

Scelgo volume FINITO, la cui UNICA SUP. CURVA sia quella di cui voglio calcolare S_x.
Isolato volume finito con sez. ABC; di lungh. unitaria → calcolo spinta x unità di lungh.

$$\vec{P} + \vec{F_c} = 0$$

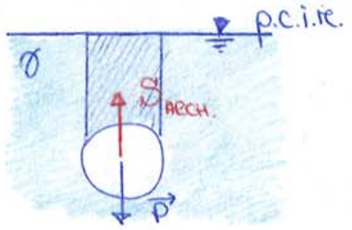
↑ peso proprio applicato in G

contorni → 2 sup. piane di chiusura di H unitaria, ma in posiz. uguali e contrarie, essendo alla stex distanza dal pcir → si semplificano

→ 2 sup. piane, 1 sup. curva
$\overline{AC}$ – $\overline{CB}$ – $\widehat{AB}$ → S_x (paratoia su fluido)
$\overline{AC}$ ↓ applicato a $\frac{2}{3}H$
$\overline{CB}$ → pci. cost, spinta = 0

$$\vec{P} + \vec{F_c} = 0 \longrightarrow \vec{P} + \vec{S_x} + \vec{S_1} = 0$$
$$\vec{S_x} = -(P+S_1) \longrightarrow -S_x = P + S_1$$

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE



corpo solido immerso in un fluido
Fluido esercita spinta S sul contorno del corpo.

equaz. equilib. globale : $\vec{P} + \vec{F_c} = 0 \longrightarrow \boxed{\vec{S}_{ARCH.} = -\vec{P}}$ ← PESO DEL FLUIDO SPOSTATO

↳ scelto come volume finito quello proprio del corpo immerso (immaginandolo riempito di liquido) ⇒

- PESO CORPO > $\vec{P}$: $\vec{S}$ verso il basso
  corpo affonda
- P. CORPO = $\vec{P}$: $\vec{S} = 0$ → equilibrio indifferente
- P. CORPO < $\vec{P}$: $\vec{S}$ verso l'alto
  corpo raggiunge equilibrio quando tocca parete sup. recip.
  ↳ GALLEGGIANTI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 234

CINEMATICA

Velocità e accelerazione sono concetti implicitamente come caratteristiche proprie di un solido.
Per quanto riguarda un fluido in movimento questi stessi concetti andranno riferiti alla PARTICELLA del fluido $\longrightarrow$ "fluidi GRANULARI" (non del BARICENTRO)
Stesso ragionamento va' eseguito per un gas, partendo dall'ipotesi di gas rarefatto.

Dunque, quando parliamo di velocità e accelerazione di un fluido è lecito domandarsi di chi o di cosa siano queste caratteristiche.
↓
2 approcci
- LANGRAGIANO
- EULERIANO

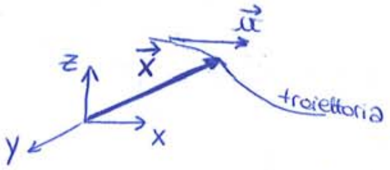
Approccio Langragiano

IPOTIZZO ESISTENZA DELLA PARTICELLA, SENZA PREOCCUPARMI DELLA SUA NATURA

Ipotizzato fluido composto da moltitudine di particelle in movimento, ciascuna delle quali è dotata di una velocità propria, l'approccio langr. si concentra sulla descrizione della TRAIETTORIA.
↓
Coordinate spaziali (x, y, z) sono le incognite principali nell'analisi delle vicende delle singole particelle istante per istante.

$$\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$ → vettore posizione della sing. particella rispetto al sist. riferim. (xyz)

$$\vec{A} = \frac{d\vec{U}}{dt} \qquad \vec{U} = (U, V, W)$$



$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}(x_0, y_0, z_0, t)} \qquad \begin{cases} x = x(x_0\, y_0\, z_0\, t) \\ y = y(x_0\, y_0\, z_0\, t) \\ z = z(x_0\, y_0\, z_0\, t) \end{cases}$$

TRAIETTORIA

FUNZIONI oggetto studio della cinematica dei fluidi per Lagrange (3 FUNZ. SCALARI EQUIVALENTI)

Se $\vec{U}, \vec{A} = f(x y z, t) \Rightarrow \vec{U} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}, \; \vec{A} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$ DESCRIZIONE SPAZIALE A TEMPO FISSATO.

Utile nello studio dei processi di diffusione di particelle eterogenee in un fluido in moto (es.: trasporto di fluidi, come traiettorie del profumo).
La traiettoria quindi è descritta come frutto del campo di moto.

Resta il problema di definire cosa sia una particella del fluido.

$$\vec{U} = \vec{U}(x, y, z, t) \longrightarrow \begin{cases} U = U(x, y, z, t) \\ V = V(x, y, z, t) \\ W = W(x, y, z, t) \end{cases}$$

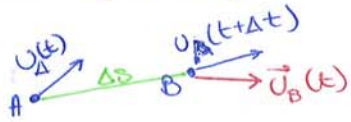
CAMPO DI MOTO
↑
per derivaz. della EQ. TRAIETTORIA

10

Dati due pti A e B nella mossa fluida (del campo di moto) (A, B non sono 2 particelle)
All'istante t una particella occuperà il p.to A con velocità $v_A(t)$ e, (che era in A con $v_A(t)$), un'altra occuperà B con $v_B(t)$;
trascorso Δt la stessa part. sarà nel pto B con $v_B(t+\Delta t)$.

$$\vec{A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_B(t+\Delta t) - v_A(t)}{\Delta t}$$

$$\left(= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \text{, LAGRANGE}\right)$$



All'istante $(t+\Delta t)$ il pto B sarà occupato contemp. da un'altra part. con $v_B(t)$

$$\vec{A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_B(t+\Delta t) - v_B(t)}{\Delta t} + \frac{v_B(t) - v_A(t)}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} =$$

rapporto incrementale di 2 velocità e a 2 particelle ≠.
↓
velocità in un pto varia.
(varia t, mentre spazio resta cost.)

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \cdot |\vec{v}|$$

ACC. LOCALE
variaz. temporale di $\vec{v}$ in un p.to
variaz. infinitesima della $\vec{v}$ nel singolo p.to al passare del t, indipendentem. dalla particella che sta occupando quel pto in quel t
(VARIAZ. LOCALE)

ACC. CONVETTIVA
(termine complicato)
variaz. spaziale della $\vec{v}$ della particella che nell'interv. dt è passata da (xyz) a $(x+u\,dt,\ y+v\,dt,\ z+w\,dt)$
↓
descriz. spaz. del campo di moto

ACC. EULERIANA

$$\boxed{\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} |\vec{v}|}$$

DERIVATA SOSTANZIALE, $\frac{D\vec{v}}{Dt}$

In generale: $\boxed{\frac{D\circ}{Dt} = \frac{\partial \circ}{\partial t} + \frac{\partial \circ}{\partial s} |\vec{v}|}$ regola di derivazione euleriana
(ogni particella come cambia 1 proprietà)

Es.: come varia densità se seguo particella?

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial s} |\vec{v}|$$

$$\begin{cases} A_x = \dfrac{Du}{Dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} \\ A_y = \dfrac{Dv}{Dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ A_z = \dfrac{Dw}{Dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

PORTATA $\quad Q \rightarrow \left[\frac{m^3}{s}\right]$

Dato un fluido in movimento, considero una generica curva chiusa che delimiti un'areola infinitesima $d\Omega$ all'istante t^*.
Il complesso di linee di corrente, che allo stesso istante passano per ∀p.to della linea chiusa, descrivono una sup. tubolare.
Tale sup. racchiude uno spazio definito
TUBO DI FLUSSO.

TUBO ← data la forma
FLUSSO ← perche' fluido in movim.

Per definizione di linea di corrente, il vettore velocità $\vec{v}$ avrà solo componente tangenziale a tali linee, quindi:

$$v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$$ compon. velocità lungo $\bar{n}$, cioè normale a $d\Omega$ → unica comp. che contribuisce al passaggio di fl.

PORTATA ELEM. $\quad dQ = v_n \cdot d\Omega = \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot d\Omega = \frac{dV}{dt}$ volume di fluido che attraversa $d\Omega$ all'istante t^*

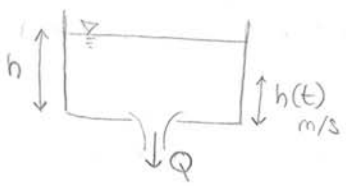
$$Q = \int_\Omega \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\Omega = \int_\Omega v_n\, d\Omega$$ volume di fluido che all'istante t^* attraversa SEZ. TRASVERSALE

VEL. MEDIA della sez. trasv. $\quad V = \frac{Q}{\Omega}$

← vel. fittizia!

SEZ. TRASVERSALE: sez. normale in ∀ p.to alla linea di flusso, cioè a $\vec{v}$

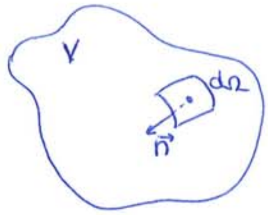
Quindi il tubo di flusso non viene attraversato dal fluido all'istante t^*.



volume uscente $\quad$ vol. entrante

$$\underset{\frac{m^3}{s}}{Q} \cdot \underset{s}{dt} = \underset{m/s}{h(t)} \cdot \underset{m^2}{d\Omega}$$

Equazione globale di continuità



Volume finito V di fluido, isolato nel campo di moto e contornato da infinite $d\Omega$.

BILANCIO (VOLUME) DELLA MASSA ↗ entrante ($v_n > 0$) ↘ uscente ($v_n < 0$)

per effetto del campo di moto.

(Non considero eventuali pozzi / sorgenti, valutati invece qualora il fluido sia soggetto a TRASFORMAZ. DI STATO. ES.: neve).

PASSAGGIO DI MASSA ATTRAVERSO $d\Omega$ IN dt

$$\left(\int_\Omega \rho \cdot v_n \, d\Omega\right) dt = \frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV$$

VARIAZ. DI MASSA NELLO STESSO dt PER EFFETTO DEL CAMBIAM. DI ρ

$\operatorname{div} \rho\vec{v}$ — gauss

$$\int_\Omega (\rho\, \vec{v} \cdot \vec{n})\, d\Omega = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV$$

$$\boxed{\int_\Omega \rho \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\Omega = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV}$$

SE DOMINIO DI INTEGRAZ. (V) NON DIPENDE DALLA VARIAB. (m), CHE STO INTEGRANDO (t).

SE FL. INCOMPRIMIBILE ($\rho = \text{cost}$) $\longrightarrow \int_\Omega \underbrace{v_n\, d\Omega}_{dQ} = 0$

FLUSSO DEL $\vec{v}$ ATTRAVERSO Ω CHIUSA È NULLA

Equazione di continuità applicata alle correnti

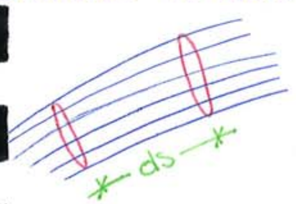
CORRENTE: moto del fluido caratterizzato da traiettorie di ∀ particella SOSTANZIALM. rettilinee e parallele tra loro.

↳ termine ingegneristico: linee divergono di poco

Nelle situaz. pratiche ⟶ TRATTAZIONE UNIDIMENSIONALE: (DESCRIZ. PUNTUALE)
corrente trattata nell'insieme, senza soffermarsi su ∀ singolo p.to, osservando sez. trasversali successive, individuate dall'unica variabile s.
↳ distanza da sez. origine

Se PORTATA, Q; VEL. MEDIA, V; AREA SEZ. TRASV., Ω $\Big\} = f(s,t) \xrightarrow{\text{allora}}$ corrente è determinata

Considero un tronco di corrente tra 2 sezioni distanti ds.



BILANCIO DELLA MASSA nell'intervallo dt:

$$\cancel{\rho Q\, dt} - \left(\cancel{\rho Q} + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds\right) \cancel{dt} = -\frac{\partial(\rho\Omega)}{\partial t} \cancel{dt}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial s}(\rho Q)\, ds + \frac{\partial}{\partial t}(\rho\Omega) = 0}$$

→ FLUIDO INCOMPRIMIBILE: $\rho = \text{cost}$ $\qquad \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$

→ MOTO PERMANENTE: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ $\qquad \frac{\partial(\rho\Omega)}{\partial t} = 0 \longrightarrow \rho \overbrace{\Omega V}^{Q} = \text{cost}$

→ PERMAN. + INCOMPR.: $\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \longrightarrow Q \neq Q(s) \longrightarrow Q \neq Q(t) \longrightarrow Q = (\Omega \cdot V) = \text{cost}$

$s = s(t)$

Q è INVARIANTE del moto

13

VINCOLI FISICI

Sulla base di quanto studiato finora abbiamo a disposizione 5 equaz. scalari

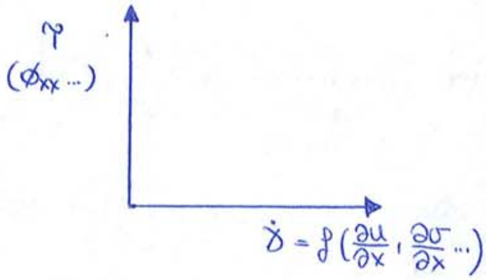
- equazione indefinita del moto: condizioni di equilibrio dinamico in ∀ p.to del campo
  → 3 equaz. scalari (conservaz. quantità moto)
- equazione di continuità: principio conservaz. della massa.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

- equazione di stato: legame fra densità, stato di sforzo, ~~temperatura~~ fluido.
  $\rho = \rho(\sigma_{xx} \cdots \sigma_{yz})$
  in generale, considero proc. isoterm.

Nel complesso ho 5 EQUAZIONI SCALARI IN 10 INCOGNITE → $f(xyz, t)$

Per risolvere il problema scrivo le mancanti 5 equaz.
sulla base delle proprietà REOLOGICHE del fluido (ricavate sperimentalmente), dalle quali dipendono le RELAZIONI FRA GLI SFORZI E LE DEFORMAZ.



Sostituisco sforzi con valori in ascissa del piano reologico, dati dalla curva reologica, caratteristica di ∀ fluido.
↓
∀ fluido ha propria equaz. indefinita

Ricapitolando,

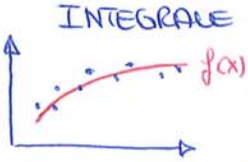
il SISTEMA DI EQUAZ. DINAMICHE DIFFERENZIALI che regolano il moto del fluido in ∀ p.to del campo,

- eq. indefinita del moto
- eq. continuità
- eq. di stato
- relaz. sforzi-deform.
- condiz. al contorno e iniziali

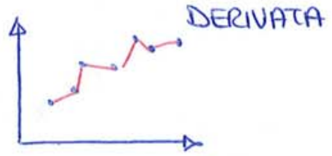
risolte per INTEGRAZIONE ALLE DERIVATE PARZIALI
→ (trattaz. LOCALE)

determina gli ELEMENTI CARATTERISTICI DEL MOTO (10 incognite)

Questo risultato è di difficile stima, essendo le derivate molto + sensibili degli integrali. Infatti, già solo riflettendo sul significato geom.:



= Area sottesa da f(x)
Anche una prima interpolaz. di f(x) approssima bene l'area =



= tan alla funz.
Variazioni sensibili.

Tuttavia spesso è richiesta solo una descriz. d'insieme del moto (azioni globali esercitate dal fluido sulle sup. di contorno), in cui quindi è irrilevante una conoscenza approfondita della $\vec{v}$ e delle componenti di $\vec{\sigma}$.

$\vec{P} + \vec{F_c} + \vec{M} - \vec{I} = 0$ → COINVOLGO SOLO IL CONTORNO!

$\vec{P} = \int_V \rho \vec{F} dV$ RISULT. DELLE FORZE DI MASSA agenti su ∀ particella del volume V di fluido.
Se fluido è sottoposto solo al campo gravitaz.
→ PESO DEL FLUIDO $(|\vec{P}| = \gamma V)$

$\vec{F_c} = \int_\Omega \vec{\phi}_n d\Omega$ RISULT. DELLE FORZE AL CONTORNO, cioè degli sforzi esercitati sul fluido attraverso la frontiera.
→ SPINTA trasmessa al fluido dalla sup. di contorno

$\vec{M} = \int_A \rho v_n \vec{u} d\Omega = \oint \rho Q \vec{v}$ FLUSSO DELLA QUANTITA' DI MOTO $= \vec{n} \int_\Omega \rho v^2 d\Omega$

$v_n d\Omega = dQ \longrightarrow \rho dQ$ massa che transita attraverso $d\Omega$ nella unità di tempo → $\rho \vec{v} dQ$ quantità di moto

$\vec{I} = -\int_V \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dV$ RISULT. DELLE INERZIE LOCALI
dipende solo da come $\vec{u}$ e ρ variano nel tempo.
Nullo se moto permanente $(\rightarrow \partial \cdot / \partial t = 0)$

$\vec{I} = \frac{d}{dt} \int_V$ → diminuz. nel tempo della quantità di moto

OSSERVAZIONI

- $\vec{P}$ indipendente dal campo di moto
  $\vec{M}$ dipendente solo dalle condiz. al contorno del campo di moto (conseguenza del teor. Green → int. di sup.)
  $\vec{I}$ è l'unica che contempla tutto, compreso il tempo t

- CORRENTE → linee parallele e ⊥ tra loro, velocità tutte // tra loro $\Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = u \cdot \vec{n} \\ \exists! \, \vec{n} \end{cases}$

$$\int_\Omega \rho u v_n d\Omega = \rho \vec{n} \int_\Omega u^2 d\Omega$$

Essendo complesso ricavare profilo velocità e ρ in ∀pto del fluido, sfrutto caratteristiche medie riferite ad una sezione trasversale e adotto un coeff. di RAGGUAGLIO:

$$\beta = \frac{\int_\Omega \rho u^2 d\Omega}{\rho_m V^2 \Omega} \cong 1$$

← modulo quant. moto

← quant. moto della corrente con = portata e u, ρ cost ∀pto

$$\int_\Omega \rho v_n \vec{u} d\Omega \underset{v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}}{=} \vec{n} \int_\Omega \rho v^2 d\Omega \underset{\beta}{=} \vec{n} (\rho V^2 \Omega) \beta \underset{Q = V\Omega}{=} \vec{n} \rho V Q \beta$$

TEOR. di BERNOULLI → ESERCITAZ. 3

L'equaz. globale della dinamica (→ condiz. di equilibrio delle forze agenti sul fl.) e il teor. di Bernoulli (→ relazione tra le ≠ energie in gioco) costituiscono la base dell'idronimica (teorica ed applicata).

TEOR. DI BERNOULLI – fluido perfetto ↪ si deduce dalla EQUAZIONE DI EULERO

Ipotesi:

1) Fluido perfetto ($\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$) → sfrutto eq. fluidi perfetti (EQ. EULERO) → assenza di sforzi tg in grado di assorbire lavoro assicura la CONSERVAZ. ENERGIA MECCANICA.

2) Fluido incomprimibile ($\rho = \text{cost.}$)

3) Campo gravitazionale, l'unico a cui il fluido sia soggetto, da cui deriva l'unica forza a cui sia soggetto, FORZA DI MASSA, $\vec{F} = -g\,\text{grad}(z)$ (conservativa)

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad}(p)$$

EQ. INDEFINITA dei FLUIDI PERFETTI o EQ. DI EULERO (1775)

$$\rho(-g\,\text{grad}(z)) - \rho\vec{A} - \text{grad}(p) = 0$$

IP. 3

IP. 2 (ρ cost.)

$\gamma = \rho \cdot g$ (cost.)

$$+\gamma\,\text{grad}(z) + \rho\vec{A} + \text{grad}(p) = 0$$

$$\text{grad}(\gamma z) + \text{grad}(p) = -\rho\vec{A}$$

$$\text{grad}(\gamma z + p) = -\rho\vec{A}$$

divido tutto per γ (cost.)

$$\boxed{\text{grad}\underbrace{\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)}_{h} = -\frac{1}{g}\frac{d\vec{u}}{dt}}$$

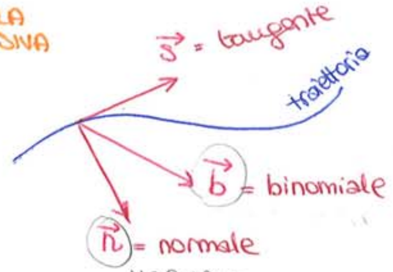
h QUOTA PIEZOMETRICA

Riscrivendo questa relaz. vettoriale rispetto ad una terna di riferimento intrinseca su una traiettoria

MODULO DELLA VEL. INTENSIVA

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}\left(z + \dfrac{p}{\gamma}\right) = -\dfrac{1}{g}\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right) = -\dfrac{1}{g}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial s}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial n}\left(z + \dfrac{p}{\gamma}\right) = -\dfrac{1}{g}\left(\dfrac{u^2}{r}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial b}\left(z + \dfrac{p}{\gamma}\right) = 0 \end{cases}$$

ACCELERAZ. CENTRIPETA



NORMALE

CERCHIO OSCULATORE contiene continuam. $\vec{s}$ ed $\vec{n}$.

Ipotesi del teor. di Bernoulli:

1) FLUIDO PERFETTO: lungo gran parte della traiettoria (salvo tratto terminale) la velocità è modesta e, quindi, anche τ sono piccoli
($\mu=0$)
($\tau \propto \text{grad}\,\vec{u}$)
↓
effetti dissipativi trascurabili quando $\vec{u}$ basse (relativam.)

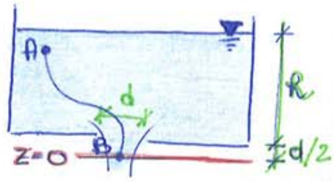
2) STAZIONARIETÀ: – fluido in entrata e in uscita costante
– dimensioni serbatoio > a dimens. luce $\left(\frac{\partial \cdot}{\partial t} \simeq 0\right)$
→ variaz. ∇ trascurabile

3) GRAVITÀ $\vec{g}$: responsabile della fuoriuscita del liquido verso basso.
→ $\vec{F}$ ammette potenziale

4) FL. INCOMPRIMIBILE ($\rho = \text{cost.}$)

Studiando il getto:

traiettorie convergono verso luce,
quelle lungo fondo piano convergono alla luce prima di disporsi verticalm. per effetto di $\vec{g}$, cioè prima di abbandonare bordo
↓
SEZIONE CONTRATTA: prima sez. trasversale della corrente è gradualm. variata e in cui traiettorie fuoriuscenti dal foro sono SENSIBILM. rettilinee e parallele tra loro,
$A_{sez.} << A_{LUCE}$ e dista dal foro $d = 0,5$ m
→ CURVATURA $\not\equiv$ ALTA
(*) → PRESSIONE IDROSTATICA
$p=0$ in $\forall$pto, essendo nullo al contorno, in cui è a contatto con atm.



Traiettoria AB.
Pressione con andam. idrostatico.

$$h_A \overset{\text{BERNOULLI}}{=} h_B$$

$$\underbrace{z_A + \frac{\cancel{p_A}}{\gamma}}_{h+(0,5\div 1)d} + \underbrace{\cancel{\frac{u_A^2}{2g}}}_{\substack{\text{per ipotesi}\\ u_A << u_B}} = \underbrace{\cancel{z_B}}_{B \in z=0} + \underbrace{\cancel{\frac{p_B}{\gamma}}}_{\substack{B \in \text{sez. contratta,}\\ \text{press. idrostatica}\\ p_B = p_{al\,contorno} = p_{atm} = 0}} + \frac{u_B^2}{2g}$$

$$\Rightarrow u_B = \sqrt{2g\,(h + (0.5 \div 1)d)} \xrightarrow{d<<h} \boxed{u_B \simeq \sqrt{2gh}}$$ $\forall$ pt $\in$ sez. contratta
TORRICELLI

$\vec{U}$ di TORRICELLI: velocità di efflusso di un liquido da una luce è pari a quella che assumerebbe un grave inizialm. in quiete, cadendo nel vuoto da un'altezza h.

La ∇ spiega xk getto si smorzi, anziché essere squadrato

Sperimentalm.: $u_B = c_v \sqrt{2gh}$
COEFF. DI CORREZ. $= 0.99$

velocità di efflusso effettiva è < di quella torricelliana, avendo trascurato effetti dissipativi.

PORTATA della VENA D'EFFLUSSO, $Q = u_B \cdot \Omega = c_v \sqrt{2gh} \cdot \frac{\pi d^2}{4} c_c = c_c \cdot c_v \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gh}$
Ω: AREA SEZ. CONTRATTA; c_c: 0,61

c_c: COEFF. CONTRAZ.
c_v: C. VEL. (0.99)
$c_c c_v$: C. EFFL. (0.61)

TEOR. BERNOULLI

Ipotesi:

1) FLUIDO PERFETTO ($\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$)
2) CAMPO GRAVITAZ. $\vec{g}$ ($\vec{F} = -g\,\mathrm{grad}(z)$)
3) FLUIDO INCOMPRIMIBILE ($\rho = $ cost.)
4) MOTO STAZIONARIO ($\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0$)

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\frac{D\vec{u}}{Dt}$$

Proiezione dell' EQUAZ. DI EULERO lungo la tg, cioè sull'arco della traiettoria

DERIVATA (SOSTANZIALE) DELLA VELOCITA' INTENSIVA
↓
componente secondo l'arco dell' acceleraz. dell'elem. fluido

$$\vec{v} = \vec{v}\,(t; s(t))$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) = -\frac{1}{g}\cdot\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}$$

IPOTESI 4: $\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{cost.}} = H$$

CARICO TOTALE o TRINOMIO DI BERNOULLI

cost, resta invariante lungo una traiettoria

QUOTA GEODETICA: $\frac{\cancel{mg}z}{\cancel{mg}}$ en. cinet. x unità di peso

ALTEZZA CINETICA: $\frac{\frac{1}{2}\cancel{m}u^2}{\cancel{m}g}$ energia cinetica per unità di peso

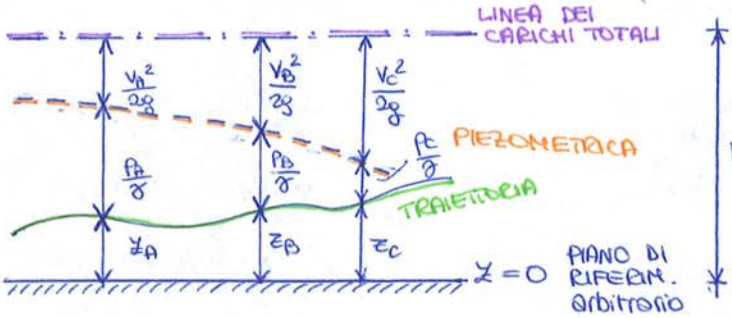
ALTEZZA PIEZOM.: permette passaggio da micro discr. a macro. continuo

$$z + \frac{p}{\gamma} = h \quad \text{CARICO PIEZOMETRICO}$$

TEOR. BERNOULLI

Nel moto permanente di un fluido perfetto pesante incomprimibile,
- il carico totale H si mantiene cost. lungo ∀ traiettoria.
- l'en. mecc. si mantiene cost (H) lungo ∀ traiettoria.

Interpretazione geometrica



Interpretaz. energetica

H = ENERGIA MECCANICA complessiva posseduta nella unità di peso del fluido in moto → ENERGIA SPECIFICA

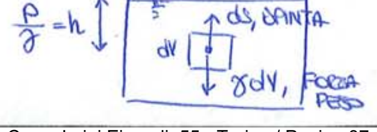
z = EN. POSIZIONALE en. pot. dell'unità di peso

$\frac{v^2}{2g}$ = EN. CINETICA

$\frac{p}{\gamma}\,(=h)$ = EN. DI PRESSIONE

$\frac{p}{\gamma}$ è l'en. spec. legata alla pressione, la quale diminuisce x unità di peso di $\frac{p\gamma}{\gamma} = h$, come conseguenza di un aumento dell'en. posizionale di una quantità $\gamma h\, dV$, seguito di uno spostam. verso l'alto di un dV immerso in un liquido.

PRESSIONI _ LA LORO RISULTANTE E' LA SPINTA DI ARCHIM.

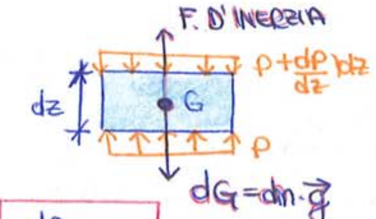


18

Nel caso del getto, presa una colonnina di liquido isolata da vena liq, una sua porzione alta dz non sarà + sorretta da liquido sottostante, non essendoci + un appoggio solido.

↓

fluido non + in quiete, ma sta cadendo descrivendo traiettoria parabolica, poiché intervengono F. PESO e F. D'INERZIA, che si equilibrano:



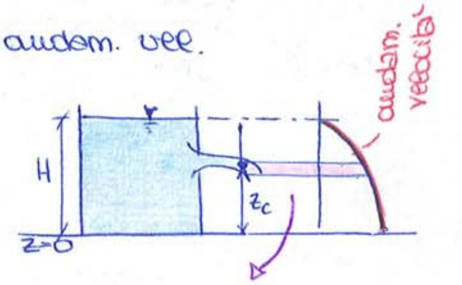
$$dm\cdot\vec{g} = \underbrace{\rho}_{\rho dV} \underbrace{g}_{\gamma} \underbrace{A\,dz}_{dV} = \gamma \underbrace{A\,dz}_{dV}$$

$$\cancel{pA} = \left(\cancel{p}+\frac{dp}{dz}dz\right)A \longrightarrow \boxed{\frac{dp}{dz}=0}$$

$p=0$ su $\forall$ pto al contorno

$$H = z_A + \frac{p_A}{\gamma} = \underbrace{z_B + \frac{u_B^2}{2g}}_{h_{fondo}} \longrightarrow u_B = \sqrt{2g(h_f - z_B)}$$

Ora profilo velocità è parabolico.
Se $h \gg a$, in prima battuta posso approssimare andam. vel. trascurando curvatura



$$z_{CENTRO} \longrightarrow v = v_B\big|_{z_c} = \sqrt{2g(h_f - z_c)}$$

vel. media = ∫ velocità baricentro C della sez. trasversale

$$Q = c_c \frac{\pi d^2}{4}\cdot\sqrt{2g(h_f - z_c)}$$

Sulla sez. trasv. cui appartiene B la velocità ha andam. parabolico.
Vel. del getto sarà velocità media.
In realtà il taglio non è piano, dunque, ma parabolico.
Tuttavia sono sufficientem. in basso rispetto a parabola, cioè abbastanza lontano dalla curvatura, oltre che tratto considerato è piccol.

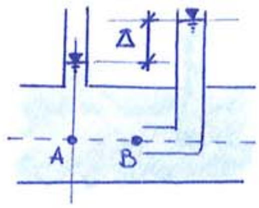
⇓

Se variaz. spaziale ≪ dominio studiato (= forma della luce), posso approssimare questo tratto come rettilineo

Se luci grandi, qst curvatura diventa apprezzabile.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 234

Tubo di Pitot



? Δ = differenza di quota tra i 2 menischi

B: pto di ARRESTO (o di RISTAGNO) $\longrightarrow v_B = 0$ (menisco non oscilla, fl. nel pieto. è fermo)
" a suff. distanza da poter considerare corrente indisturbata (traiettorie sostanzialm. rettilinee e parallele).
A, B a distanza suff. piccola da considerare flusso cost. $\left(\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0\right)$

Posso allora sfruttare teor. Bernoulli:

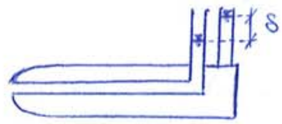
$$H_A = H_B \longrightarrow \underbrace{z_A + \frac{p_A}{\gamma}}_{h_A} + \frac{u_A^2}{2g} = \underbrace{\cancel{z}_B + \frac{p_B}{\gamma}}_{h_B} + \cancel{\frac{u_B^2}{2g}}$$

essendo $U_B = 0$ per ipotesi

$$\Longrightarrow \quad u_A = \sqrt{2g\,(h_B - h_A)} \qquad \Delta = (h_B - h_A)$$

h_A: misurata con piezom. nella sezione contenente A (corrente rettilinee e parallele $\longrightarrow$ sez. trasversale ad h cost.)

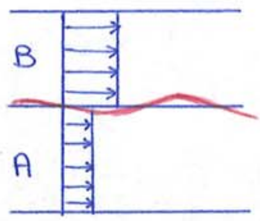
h_B: misurata con piezom.



In realtà c'è problema turbolenza.
Dimensioni diametro molto piccole

CONTRO:

Kelvin - Helmholtz



? INSTABILITA'

2 fluidi in parallelo con proprie velocità ≠.
Se fluido perfetto, allora ∄ τ tra i 2 fluidi e la sup. di separaz. tra i 2 fluidi è piana.

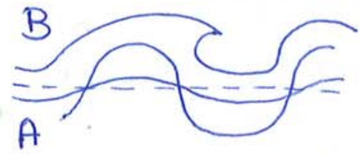
Ip.: debolissima perturbaz. (es.: sinusoidale).

Osservando ∀ sez. trasv. sopra rispettive creste della sup. di separaz. perturbata, queste si saranno ridotte $\longrightarrow$ hanno dovuto accelerare $\longrightarrow$ increm. infinit. di velocità
Sfruttando Bernoulli, dovendo essere H = cost. ∀p.to e sez. trasversale;

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \xrightarrow{du > 0} \downarrow p$$

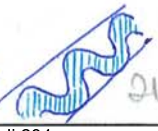
Intanto, sotto la stessa cresta, la sezione si sarà allargata $\longrightarrow dv < 0 \longrightarrow \uparrow p$
$\Longrightarrow$ dislivello di p, cioè FEEDBACK POSITIVO (meccanismo instabile)

Col trascorrere del tempo le oscillaz. diventano finite (+ grandi)
$\longrightarrow$ onde, interfaccia degenera (non + piana)



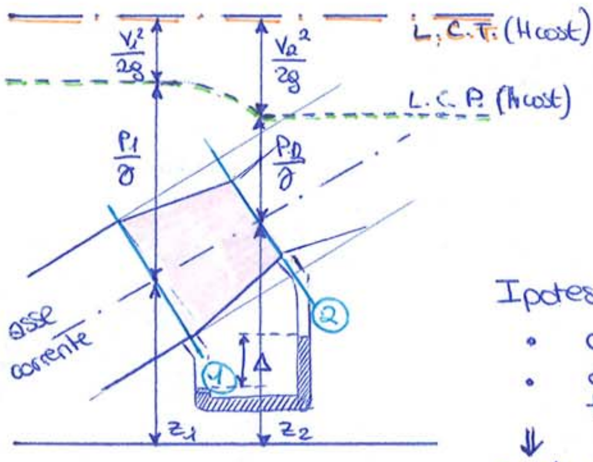
In atm: quando 2 correnti ≠ si incontrano, sup. separaz. definita da nubi originate da pto di rugiada. (NUBI ALLA KELVIN-HELMOTZ)

In mare: corrente del Golfo. Anziché lineare resta + serpeggiante $\longrightarrow$ percorre + spazio e impiega + tempo.



21

VENTURIMETRO



Corrente graduolm. variata da tubo leggerm. convergente (sez. 1-2)
↓
riduce termine cinetico

Ipotesi:

- corrente in prima approssimazione lineare.
- dissipaz. energ. nel tratto compreso tra le sez. 1-2 trascurabile, essendo tale tratto corto e converg. debolm.

⇓

quota piezom. h cost. in ∀sez. (Bernoulli)
→ considero un'unica LINEA PIEZOM. (quella ASSIALE) e un'unica LINEA CARICHI TOTALI sovrastante l.c.p. di $\frac{V^2}{2g}$

Bernoulli fra le sez. estreme del convergente:

$$\delta = h_1 - h_2 = \frac{\alpha V_2^2}{2g} - \frac{\alpha V_1^2}{2g}$$

$$V_1 = \frac{Q}{\Omega_1} \qquad Q = \text{cost}$$

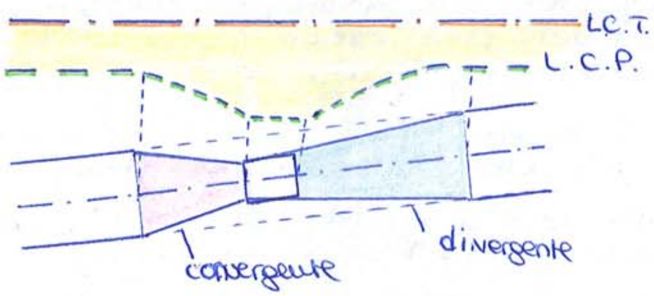
$$V_2 = \frac{Q}{\Omega_2} \qquad \delta = \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}\Delta$$

$$Q = \frac{A_1 \cdot A_2}{\sqrt{A_2^2 - A_1^2}}\sqrt{2g\Delta\frac{\gamma_m-\gamma}{\gamma}}$$

h_1, h_2 letti su piezometri relativi a sez. 1 e 2 (h cost. su sez. trasv.) oppure attraverso MANOMETRO DIFFERENZIALE
↳ $\delta = \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}\Delta$

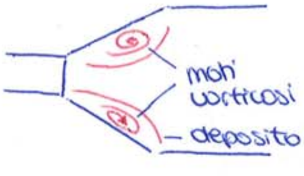
Nel convergente, dove la corrente accelera, la l.c.p. si abbassa, allontanandosi progressivam. dalla l.c.t. → termine cinetico ↑ mentre H = cost ⇒ h ↓

Per riportare il diametro della tubaz. al suo valore origine, dopo convergente appare un divergente di lungh. >, sempre al fine di ridurre le dissipazioni.



Difetti

- lungh. del divergente
- nella realtà, corrente non ha traiettorie rettilinee → problema del DISTACCO DI VENA



fluido non a stretto contatto con pareti
→ moti vorticosi → deposito

FLUIDI REALI = FLUIDI VISCOSI

Costituiscono particolare categoria di processi di moto, fluidi viscosi.

Gli sforzi tg non sono + trascurabili, a causa dell'attrito prodotto x effetto della viscosità propria del fluido. Nascono perciò delle τ che si oppongono al moto, dissipando parte dell'energia meccanica (H non più costante), trasformando cioè parte dell'en. potenziale in en. cinetica, e quindi in calore ⟶ spendo energia x spostare fluido.

$$\mu \neq 0 \longrightarrow \tau \text{ attritive} \longrightarrow H \neq \text{cost} \longrightarrow \text{dissipaz. en.}$$

Ricordando la LEGGE DI NEWTON

$$\vec{\phi}_n = \vec{n}p$$

STATO DI SFORZO

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi & \phi \\ \phi & \phi_{yy} & \phi \\ \phi & \phi & \phi_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & & \text{simm.} \\ \tau_z & \sigma_y & \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & & \text{simm.} \\ 0 & p & \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - p & & \text{simm.} \\ \tau_z & \sigma_y - p & \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z - p \end{bmatrix}$$

PRESSIONE $\quad p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

IDROSTATICA (st. tens. isotropo)

DEVIATORE DEGLI SFORZI ↳ dovuti alla viscosità

e ricordando l'EQUAZ. DI EULERO:

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\phi}_z}{\partial z} \qquad (= \text{grad } p \text{, per fl. perfetti})$$

ricavo l'eq. che relaziona le componenti dello sforzo con le prop. fisiche del fluido:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad}(p) - \mu \nabla^2 \vec{u} - \frac{1}{3}\mu \text{ grad div } \vec{u}}$$

EQ. NAVIER – STOKES
o EQUAZ. INDEF. DI EQUILIBRIO DI FLUIDI REALI (VISCOSI)

Se INCOMPRIMIBILE: (ρ = cost.)

$$\begin{cases} \rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u} \\ -\frac{1}{3}\mu \text{ grad } \cancel{\text{div } \vec{v}} = 0 \end{cases}$$

dall'eq. di continuità, $\text{div } \vec{v} = 0$

La viscosità è espressa dal termine "$-\mu \nabla^2 u$" = RISULTANTE DELLE FORZE ORIGINATE DALLA VISCOSITÀ X UNITÀ DI VOLUME, IN ∀ P.TO (smussa variaz. spaz, grad velocità)

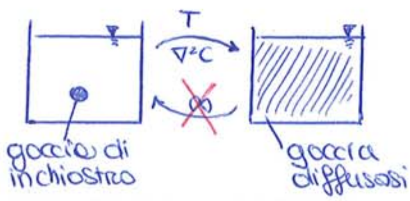
Permane non linearità dell'eq., già propria dell'eq. di Eulero, per $\vec{A}$.

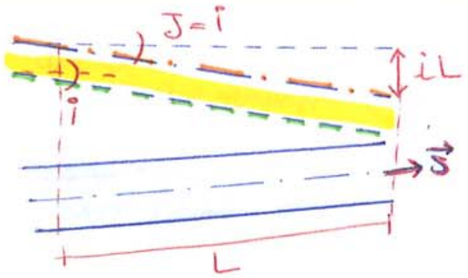
$$\nabla^2 \circ = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

TERMINE DIFFUSIVO

$$\boxed{\nabla^2 C : \frac{\partial C}{\partial t} \quad \text{LEGGE DI FICK}}$$

Lento processo di diffusione
Gradienti di concentraz. spaz, cioè grad. di grad
→ smussa i grad





$$\boxed{J = -\frac{\partial H}{\partial s}}$$ PENDENZA MOTRICE

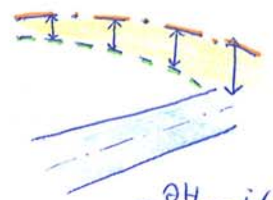
variaz. della l.c.t. per unità di percorso

→ perdita di energia subita dall'unità di peso di fluido, nell'unità di percorso

segno "−" : $\frac{\partial H}{\partial s} < 0$, essendo $\vec{s}$ nel senso del moto

OSS. 1: caso trattato di sez. cilindrica cost. è caso particolare, In generale, cioè per sez. che vanno rastremandosi (non cost.) l.c.t. è parabolica ed $i = i(s)$.

OSS. 2: L.l.p. non sarà + parallela al l.c.t. (caso particolare di sez. circ. cost.), ma si allontana da l.c.t., essendo $V \neq$ cost.



$$-\frac{\partial H}{\partial s} = i(s) \neq -\frac{\partial h}{\partial s}$$

$i = i$ (geom, fluido ...

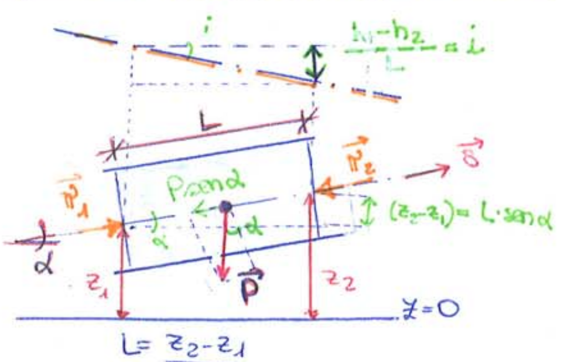
CARICO TOT. A MONTE moto ($s=0$)

$i = -\frac{\partial H}{\partial s}$

caso particolare: $H(s) = H_0 - \int_0^s i(s)\,ds$

caso generale: $H(s) = H_0 - s \cdot i$
$i \neq i(s)$

LCT e LCP no orizz. xk τ dissipano en.
Q cost → termine cin cost. → LCT // LCP.



$L = \frac{z_2 - z_1}{\operatorname{sen}\alpha}$

corr. in pressione, confinata (NO sup. libera)

$\mu \neq 0$ → grad. velocità → τ attritive

τ attritive in senso opposto al moto agenti su part. corrente a contatto con condotta

→ • Fluido trattenuto da parete (grad. velocità)
• Parete trascinata da fluido

Tronco di corrente compreso tra le sezioni 1 e 2 e applico EQ. GLOBALE DELL'EQUILIBRIO DINAM.

$$\vec{P} + \vec{\Pi} - \vec{T} + \cancel{\vec{I}} + \cancel{\vec{M}_e} - \cancel{\vec{M}_u} = 0$$

$\vec{M}_e = \vec{M}_u$ (sez. cil. cost.) v, ρ, Ω cost

Proietto lungo direz. moto ($\cdot \vec{s}$):

$P_s = -(\gamma \underbrace{\Omega L}_{W}) \operatorname{sen}\alpha = -\gamma \Omega (z_2 - z_1)$

$\vec{\Pi} = p_1 \Omega - p_2 \Omega$

forze normali risp. $\vec{s}$ esistono, ma non danno contributo

$$\Rightarrow \vec{T} = \gamma\Omega\left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)\right] = \gamma\Omega(h_1 - h_2) = \underbrace{\gamma \underbrace{\Omega L}_{V_0}}_{\text{peso}} i$$

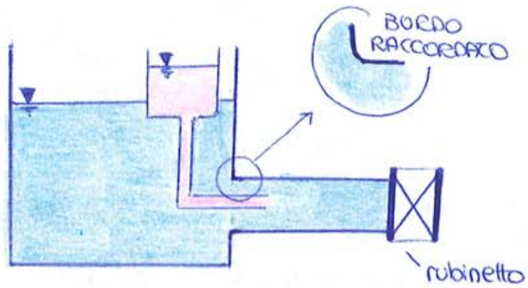
SFORZO TG ALLA PARETE
AZIONE DI TRASCINAM. DELLA CORRENTE
RISULTANTE DELLE τ LUNGO

→ $i =$ AZ. DI TRASCINAM. MEDIAN. ESERCITATA DALL'UNITÀ DI PESO DEL FLUIDO

– uniform. distrib. in un cond. cil., data sua simm. assiale

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 234

ESPERIENZA DI REYNOLDS (1883)



Serbatoio contenente liquido in quiete con superficie libera a quota costante, da cui deriva un tubo con bordo raccordato (= ben arrotondato, senza spigoli → corrente meno disturbata possibile), alla cui estremità di valle è posto un rubinetto x la regolaz. di liquido che defluisce nel tubo stesso.

All'imbocco del tubo è posto lo sbocco di un ago, che parte da un altro serbatoio + piccolo contenente liquido con stesso γ, ma colorato.

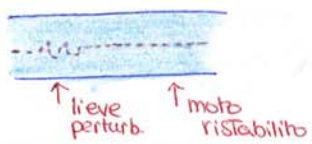
MOTO LAMINARE

Aprendo leggerm. il rubinetto, liquido si mette in moto con velocità estremam. basse. Liquido colorato iniettato si tende a tutta la tubazione, percorrendo una traiettoria sostanzialm. rettilinea e parallela, mantenendosi nettam. distinto e stabilm. dalla rimanente massa fluida.

→ una qualsiasi perturbaz. artificiosa si attenua e scompare

↓

∀ particelle passano per uno stesso p.to e percorrono una traiettoria comune senza rimescolamenti con fluido circostante



↓

Moto avviene x LAMINE CONCENTRICHE =
- no scambi di massa tra un filetto e l'altro
- ∄ componenti normali della velocità
- lamine + veloci sono centrali, velocità decresce verso pareti

TRANSIZ.

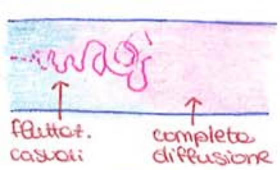
Aprendo progressivam. il rubinetto, aumenta la portata Q (⇒ ↑ velocità →). Filetto colorato inizia a fluttuare (regime di moto di transiz.)

M. TURBOLENTO

Un'ulteriore apertura del rubinetto (↑$\vec{u}$) con cautela (= evitando ogni causa di perturbaz.):

↓

CAMBIAMENTO STRUTTURALE
- completa diffusione del filetto colorato nella massa fluida circostante
- nascono fluttuaz. irregolari della $\vec{u}$ delle singole particelle ↕ a cui corrisponde
- continuo scambio di massa nel campo di moto



= apparente casualità dei movim. di agitaz. sovrapposti al moto di trasporto

traiettorie = curve tanto complesse da non poter essere descritte dalla geom. euclidea

tanto dense da ricordare delle sup.

in cui si sovrappongono 2 moti:
- DI TRASPORTO: spostam. d'insieme della massa fluida
- DI AGITAZIONE: irregolare oscillaz. dei caratteri di moto attorno ai loro valori medi.

MODELLO (equazione differenziale)

$$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad}(p) - \mu\nabla^2\vec{u} \quad \text{(Navier-Stokes)}$$

Complessità del moto $\xrightarrow{\text{dettata da}}$ complessità delle traiettorie $\longrightarrow \vec{A}$

$\downarrow$

impossibile risolvere equaz.

ADIMENSIONALIZZO VARIABILI

→ generalizzo problemi fisici, così da poter confrontarli, anche se molto ≠ tra loro

1) Individuo il problema fisico

2) Individuo scale tipiche, relativamente al probl. fisico in esame:

- scala della lunghezza, ℓ
- " cinematica, u_0
- " del tempo, $\frac{\ell}{u_0}$ (← ovvio, dopo aver già definito le scale della lungh. e cinemat.)
- " delle pressioni, ρu_0^2 ← dal tubo di Pitot: $\frac{u_0^2}{2g}\cdot\gamma = \frac{u_0^2}{2\cancel{g}}\cdot\rho\cancel{g} = u_0^2\rho)$

3) Normalizzo

(invento $\sim$ rispetto alla lungh. tipica)

$$\tilde{x} = \frac{x}{\ell} \qquad \tilde{y} = \frac{y}{\ell} \qquad \tilde{z} = \frac{z}{\ell}$$

$$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} = \frac{u, v, w}{V_0}$$

$$\tilde{t} = \frac{t}{\ell/u_0}$$

variano tutte tra 0 e 1.

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho u_0^2}$$

Rendo confrontabili problemi con scale ≠.

4) Inserisco grandezze adimensionalizzate nell'eq. Navier-Stokes, proiettata secondo x:

$$[\cancel{\rho}\cdot(\vec{F}-\vec{A})]\cdot\frac{1}{\cancel{\rho}} = [\text{grad}(p) - \mu\cdot\nabla^2\vec{u}]\cdot\frac{1}{\rho}$$

$\vec{F}$ ↳ grad (gh)

$$-\text{grad}(gh) - \vec{A} = \frac{1}{\rho}\text{grad}(p) - \underbrace{\frac{\mu}{\rho}}_{=\nu}\nabla^2\vec{u}$$

$$x)\ -g\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{Du}{Dt} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 u$$

MODELLO MATEMATICO: NAVIER-STOKES (fluido newton.)

$$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad}(p) - \mu\nabla^2\vec{U}$$

Scale tipiche del problema → adimensionalizzate

Riscalo l'equazione lungo x:

$$-\frac{1}{Fr^2}\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{x}} - \frac{D\tilde{U}}{D\tilde{t}} = \frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}} - \frac{1}{Re}\nabla^2\tilde{U}$$

- compaiono solo GRANDEZZE ADIMENSIONALIZZATE, variabili [0, 1] ← riscalato, stessi ordini di grandezza → problemi con scale ≠ diventano confrontabili
- osservo i coeff. Fr ed Re per comprendere il significato fisico

$Re = \frac{l U_0 \rho}{\mu}$ ← FORZE D'INERZIA / ← F. VISCOSE

termini sottrattivi a I e a II membro

- $Re \to \infty$ m. turbolento (trasporto + agitaz.) → f. d'inerzia, ($\mu \approx 0$), $\nabla^2\tilde{U}$ irrilevante → $D\tilde{U}/D\tilde{t}$ trascurabile → EQ. EULERO adimens.
- $Re \to 0$ m. laminare (trasporto) → f. viscose, $\nabla^2\tilde{U}$ e $\frac{D\tilde{U}}{D\tilde{t}}$ rilevanti

$Fr^2 = \frac{U_0^2}{g l}$ ← EN. CINETICA / ← // POTENZIALE

- Fr ↑ en. potenziale piccolo ruolo → $\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{x}}$ trascurato
- Fr ↓ en. cinetica più importante →

- Se $Re = Fr$ → variabili scalate =
  - → l'equaz. nello spazio delle variabili scalate è =
    → posso studiare il fenomeno in laboratorio (mosca – aereo)
    ↓
    Riproduco in scala meccanica (= Fr, = Re) no in scala geom

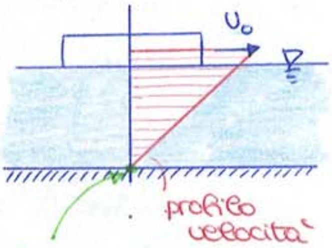
Costruisco modelli in scala meccanica, ma no in scala geom
→ ma

con lo stesso fluido non è possibile scalare con Re e Fr =
Devo cambiare fluido → Difficoltà pratiche

CORRENTI IN PRESSIONE: MOTO LAMINARE e M. TURBOLENTO

MOTO LAMINARE (o VISCOSO o REGOLARE)

- studio moto laminare per capire il moto turbolento
- ragioni pratiche (campi applicativi):
  - mezzi porosi (acquiferi, petrolio) → regolare, traiettorie rettilinee e //, velocità basse
  - sangue (no nel cuore)
  - micro-fluidica (t. lubrificazione)



LAMINE ORDINATE

Componenti di agitaz. della velocità $\vec{U}$ tutte
↳ traiettorie effettive delle singole particelle ≡ con traiettorie del moto medio (se m. unif.: traiett. rettilinee e //)

FLUIDO VISCOSO ATTACCA ALLA PARETE (= velocità fluido vicino alla parete è = velocità parete, cioè = ∅)

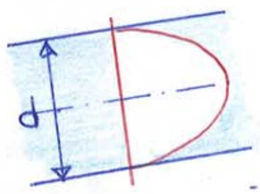
La lamina che si muove a velocità U_0 trascina gradualm. quelle sottostanti.

Profilo di velocità LINEARE ← ciò è possibile perché fluido è VISCOSO e sfrutta FORZE TANGENZIALI

Invece in fluido perfetto → ∄ τ

(ma) per avere = profilo di velocità (costante) deve agire solo con FORZE NORMALI

FLUIDO VISCOSO IN CONDOTTO



lamine = cilindri cavi
strati esterni sono + lenti

$$Re = \frac{U \ell \rho}{\mu} \leftarrow \frac{\text{FORZE D'INERZIA}}{\text{F. VISCOSE}}$$

ℓ = scala tipica (in condotto è DIAMETRO)

Re basso → fluido in moto laminare, vincono F. VISCOSE
↑ (U, ℓ bassi, μ alto)

$Re < 2000$ ← soglia tipica di ∀ problema pratico

Viscosità μ moltiplicato per laplaciano ∇^2, che diffonde → smussa i gradienti della velocità

Al crescere di Re → TURBOLENZA CATASTROFE → prevalgono F. D'INERZIA, ∇^2 trascurabile

26

cost. — $\vec{U}$ cambia solo lungo r

$$T = \mu \int_\Omega \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{n}} \, d\Omega$$

$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{n}}$ $\nearrow = 0$
- componenti tg delle spinte sono $= 0$ sulle 2 basi (uscita, ingresso) per UNIFORMITA' moto. Infatti fluido si muove uniform. all'asse del condotto
- componente normale a sup. laterale è $\perp$ asse $\vec{s}$

$\searrow = (-)\frac{\partial U}{\partial r}$ PER SIMM. CILINDRICA

$\vec{n}$ è opposto al raggio r

$\Rightarrow \Omega = \Omega_{\text{LATERALE, CILINDRICA}} = 2\pi R \cdot L$

$$T = \mu \frac{d\vec{u}}{d\vec{n}} \overbrace{\int_\Omega d\Omega}^{\Omega_0} = \mu \left(-\frac{du}{dr}\right) \cdot (2\pi r \cdot L)$$

$$T = \gamma \pi r^2 L i$$

$$\boxed{\frac{du}{dr} = -\frac{\gamma}{2\mu} r i}$$

PROFILO VELOCITA' $\vec{U}$ nella sez. trasversale, lungo r

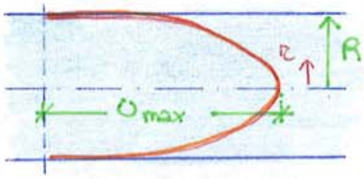
$$\frac{du}{dr} = -\frac{\gamma}{2\mu} r i \longrightarrow \begin{cases} u(r) = -\frac{\gamma}{2\mu}\frac{r^2}{2} i + C_1 \\ u\left(r = R = \frac{D}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{U = \frac{\gamma i}{4\mu}\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right)}$$

CONDIZ. AL CONTORNO

velocità nulla delle particelle a contatto con pareti

PARABOLOIDE

$$\begin{cases} U_{min} = 0 & u\left(r = R = \frac{D}{2}\right) \\ U_{max} = \frac{\gamma i}{16\mu} D^2 & = u(r = 0) \end{cases}$$



Una generica sezione è una PARABOLA.

N.B.: ipotesi di fluido perfetto avrebbe implicato $\mu = 0$ e $i = 0$

$\Downarrow$

$$u(r) = -\frac{\gamma}{2\mu} i \frac{r^2}{2} + c$$

diventerebbe un'identità del tipo $0 = 0$.

$$\boxed{Q = \int_0^{D/2} U(r) \cdot \underbrace{2\pi \overbrace{r \cdot dr}}_{d\Omega_0}}$$

(POISEUILLE)

In caso di sezione circolare ottengo tutte le formule in via analitica, partendo da N-S

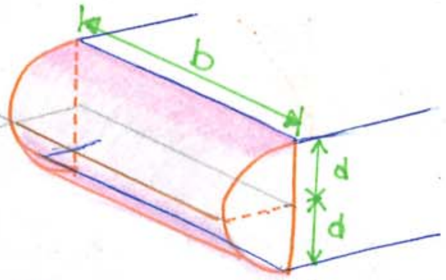
$$\begin{cases} Q = \frac{\pi}{128} \frac{\gamma i}{\mu} D^4 \\ U_{MEDIA} = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{\pi D^2/4} = \frac{1}{32} \frac{\gamma i}{\mu} D^2 \\ i = \frac{128}{\pi} \frac{Q\mu}{\gamma} \frac{1}{D^4} \end{cases}$$

$i \propto \frac{1}{D^4}$

$\downarrow D \Rightarrow \uparrow\uparrow\uparrow$ RESIST.

PENDENZA MOTRICE = EN. PERSA

$$u = +\frac{\gamma i}{2\mu}\,(d^2 - y^2) \longrightarrow$$ PARABOLOIDE DI TRASLAZ. LUNGO z



$$u_{max} = u(y=0) = -\frac{\gamma i}{2\mu} d^2$$

piano meridiano

metà INF + metà SUP

$$Q = 2\int_0^d u \cdot \underbrace{b\,dy}_{d\Omega} = \cancel{2}\int_0^d \frac{\gamma i}{\cancel{2}\mu}(d^2-y^2)\,b\,dy = \frac{\gamma i}{\mu} b \int_0^d (d^2-y^2)\,dy =$$

$$= \frac{\gamma i}{\mu} b \left[d^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^d = \frac{\gamma i}{\mu} b \left(d^3 - \frac{d^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\frac{\gamma i}{\mu} b d^3$$

$$\downarrow$$

$$V = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{bd} = \frac{2}{3}\frac{\gamma i}{\mu} d^2$$

$$R = \frac{\Omega}{P} = \frac{bd(2)}{2b + \cancel{2d}} = d$$ TRASCURABILE

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\frac{\gamma i}{\mu} R^2$$

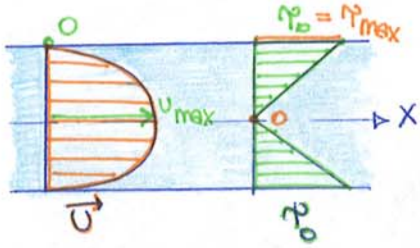
OSSERVAZIONI

possibili grazie a μ

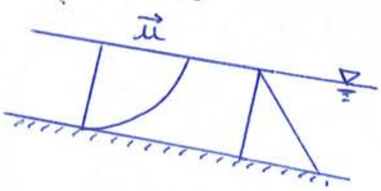
- $\tau = \mu \frac{du}{dy}$
  - IN CENTRO, $\frac{du}{dy} = 0 \rightarrow u_{max} \Rightarrow \tau = 0$ FLUIDO SI COMPORTA COME IDEALE
  - AI BORDI, $\frac{du}{dy} = \underline{max} \rightarrow u_{min} = 0 \Rightarrow$ SOLO SUP. + VICINA INFLUENZA META'

$\downarrow$

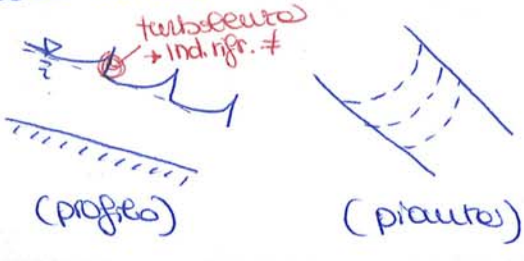
piano meridiano = piano simm. del moto



Togliendo metà sup. del campo di moto
$\Rightarrow$ scarico piano meridiano (= esente dalle τ)
$\rightarrow$ nulla cambia x campo di moto unif.
e ottengo MOTO LAMINARE DI CORRENTE A PELO LIBERO CON PENDENZA i.



Ma se Re $\uparrow$ $\rightarrow$ moto laminare diventa turb.
ROLL WAVES



MOTO TURBOLENTO

Fenomeno APPARETEM. CAOTICO E CASUALE,
descritto dal superam. di una velocità critica del fluido.
per un aumento infinitesimo della portata

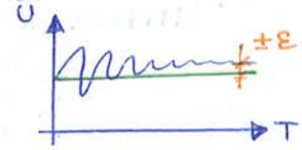
Problema tanto complesso da costituire un modello di sist. complesso per molti altri temi (APPLICATIVI, TEORICI, AMBIENTALI...)

Caratteristiche generali:

- CAOTICITA' (IMPREVEDIBILITA'): traiettorie delle particelle (= contorno del fluido turbolento) appaiono estremam. COMPLESSE contrariam. a quelle del m. laminare
  → molto semplici e regolari
- NON LINEARE: cambiam. strutturale delle traiettorie nel passaggio NON-LINEARE da m.lam. a m.turb., segnato da incremento infinitesimo della portata Q, e quindi della velocità
  → IPER sensibilità del sistema
- DISSIPATIVO: dell'energia propria delle traiettorie, contrariam. a m. lam.
  → traiett. seguono unica direz. → NO DISSIP.
- DIFFUSIVO: incrementa processi di trasporto (scambio chim.-term.), rompendo così le simm. → altrim. sfrutterebbe solo GRAD. DI CONCENTRAZ.
  → visualizzaz. del fenom. in una bandiera col vento o in una pentola che bolle
- ROTAZIONE (VORTICITA'): Navier-Stokes, direz. fondam. $\vec{v}$
  $rot\ \vec{v} \neq 0$
  sist. almeno 3D, altrim. moto si spegne.

Questo problema legato alle grandezze medie per fortuna è risolto dal p.to di vista pratico (non concettuale), perché le misurazioni vengono svolte in tempi molto lunghi.

Esempio:

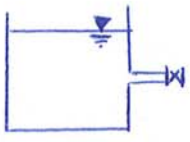


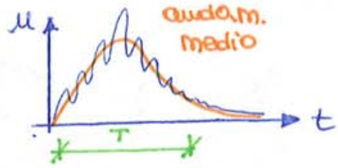
Dopo un certo t, onde si smorzano

Scala di osservaz. dipende da precisione strum.

Ing. → filtrare
sbagliare di ε

Esempio:



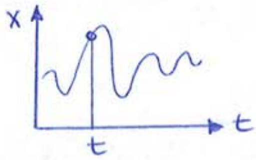


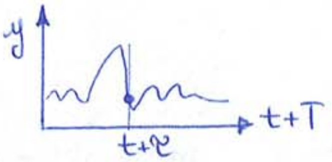
Kolmogorov risolse problema di trattare le medie con MEDIA D'INSIEME PER MOTI VARI.
Noi semplifichiamo il problema non cambiando strum. d'azione, ma campo di osservaz., semplicem. non considerando le variaz. temp.

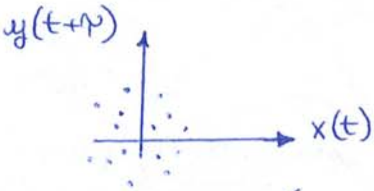
↓ sfruttiamo OPERAT. MEDIA TEMP.

2° PASSO: CORRELAZIONE

Suppongo 2 processi generici che varino nel tempo e ne cerco l'eventuale legame:
ES.: velocità in un p.to, prezzo d'azione, variaz. p e variaz. T...





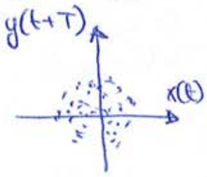


Dato $x(t)$, leggo corrispondente $y(t+\tau)$ e riporto pto nel piano $(x(t), y(t+\tau))$.
Trascorso un certo tempo, ripeto l'operazione → $x(t_2)$, $y(t_1+\tau)$ ...

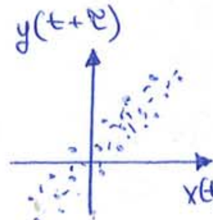
↓

nuvola di p.ti

CASO 1: x, y INDIPENDENTI
nuvola circolare
Per $\forall x$ può capitare un qualsiasi y.
↓
∄ legame tra x e y



CASO 2: x, y DIPENDENTI
Esempi:
- piene, ↑Q del fiume, trascorso un certo tempo
- virus, contagio, febbre



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 234

Esempio: sistemi biologici

Caratterizzati da memoria che non si spegne mai.

SCALA INTEGRALE $= \int_0^{\infty} \rho(\tau)\, d\tau$ area sottesa da $\rho_x(\tau)$

quantifico MEMORIA DEL SEGNALE $\longrightarrow$ INERZIA del SISTEMA

↑ MEMORIA, ↑ CORRELAZ., ↑ SCALA INTEGRAZ.

EQ. CONSERVAZ. QUANTITÀ MOTO, N-S, GLOBALE DELL'EQ. DINAM.

$$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = (\text{grad } p - \mu \nabla^2\vec{u})\frac{1}{\rho}$$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ VISCOSITÀ CINEMATICA

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\text{grad } p + \nu \nabla^2\vec{u} - \vec{F}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial u_i}{\partial x_3} = \frac{\partial u}{\partial t} + u_J\frac{\partial u_i}{\partial u_J}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{(1)}{\frac{\partial u}{\partial t}} + \underset{(2)}{U_J\frac{\partial u_i}{\partial x_J}} = \underset{(3)}{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}} + \underset{(4)}{\nu\frac{\partial}{\partial x_J}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_J}\right)} - \underset{(5)}{g\delta_{i3}}}$$

DELTA DI KRONECKER
$\delta_{i3} = \begin{cases} 1 & i=3 \\ 0 & i\neq 3 \end{cases}$
porché $\vec{g}$ opera solo lungo z

① $\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} = \frac{\partial(U_i+u_i)}{\partial t} \Rightarrow \overline{\frac{\partial(U_i+u_i)}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t}$

③ $\tilde{p} = P + p \longrightarrow \overline{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(P+p)}{\partial x_i}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}$

fluido incompr.

④ $\overline{\frac{\partial}{\partial x_J}\frac{\partial}{\partial x_J}(U_i+u_i)} = \frac{\partial^2}{\partial x_J}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_J} = \frac{\partial^2(\overline{U_i+u_i})}{\partial x_J\partial x_i} = \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_J \partial x_i}$

termini già mediati posso portarli fuori da deriv.

② $\overline{(U_J+u_J)\frac{\partial(U_i+u_i)}{\partial x_J}} = \overline{U_J\frac{\partial U_i}{\partial x_J}} + \overline{U_J\frac{\partial u_i}{\partial x_J}} + \overline{u_J\frac{\partial U_i}{\partial x_J}} + \overline{u_J\frac{\partial u_i}{\partial x_J}} =$

$= \overline{U}_J\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_J} + \overline{U}_J\cancel{\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_J}} + \cancel{\overline{u}_J}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_J} + \underbrace{\overline{u_J\frac{\partial u_i}{\partial x_J}}} \neq \overline{u}_J\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_J}$

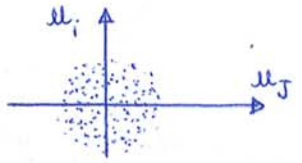
media degli scarti è = 0

$$\overline{u_J\frac{\partial u_i}{\partial x_J}} = \overline{\frac{\partial(u_i u_J)}{\partial x_J} - u_i\cancel{\frac{\partial u_J}{\partial x_J}}} = \frac{\partial \overline{u_i u_J}}{\partial x_J}$$

indice J ripetuto
⇒ sommatoria
↓
media della div. del campo di moto è 0!

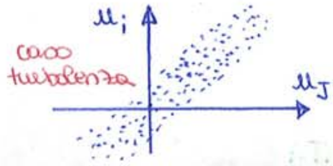
Attenzione!

La media degli scarti è nulla ($\overline{u}_i = \overline{u}_J = 0$),
lo stesso però non è detto per il prodotto degli scarti ($\overline{u_i u_J} \neq 0$).



Dette u_i e u_J le componenti del moto turb., collezionando ad ogni istante coppie (u_i, u_j) sul diagr., noterò una nuvola addensata di punti.
↓
u_i e u_j sono correlati,
$\overline{u_i \cdot u_j}$ dipende dalla CROSS-OPERAZIONE.

Tanto + $\overline{U_i U_J}$ lontano da $\emptyset$, tanto + $U_i U_J$ sono legate.
In realtà la cross-operaz. non restituisce zero.



Proiettando la nuvola di pti sui rispettivi assi:
$\overline{u}_i = 0$ e $\overline{u}_J = 0$
ma
$\overline{u_i \cdot u_J} \neq 0$
avendo u_i, u_J legate da VINCOLI → EQ. DETERMINISTICHE

31

Fisicamente, cosa sono le cross- operazioni?

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[-\overline{u_i u_j} + \nu \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}\right] - g\delta_{i3}$$

$$\frac{D\overline{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}) - g\delta_{i3}$$ EN. POTENZIALE

DERIVATA EULERIANA

gradiente spaz. degli sforzi

matr. DIAG.

$\tau_{visc} << \tau_{REYN.}$

$$\tau_{ij} = \overline{p}\,\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) + \rho\,\overline{u_i u_j}$$

TENSORE

GRADIENTE SPAZ. PRESS. - ISOTROPO -

TENS. X VISCOSITÀ (moto regolare, dei fluidi reali, Newton)

TENSIONI DI REYNOLDS legato a CROSS-OPER. In + risp. a m. lam. (parte non-lineare)

TENS. DI REYNOLDS

$$\boxed{-\rho\,\overline{u_i u_j}} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{u_1^2} & \overline{u_1 u_2} & \overline{u_1 u_3} \\ \overline{u_1 u_2} & \overline{u_2^2} & \overline{u_2 u_3} \\ \overline{u_1 u_3} & \overline{u_2 u_3} & \overline{u_3^2} \end{pmatrix}$$

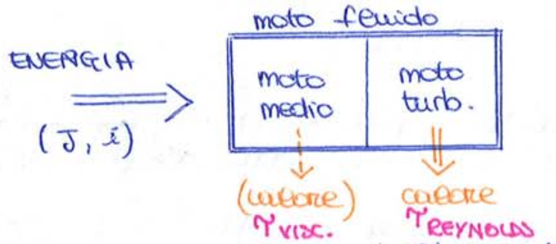
- tensioni dovute a cross - correlaz. nel moto turb.
- connesse a scambi quantità moto
- dominanti nel moto turb.

NON POSSO SEPARARE DEL TUTTO LA TURBOLENZA DAL MOTO MEDIO PERCHE' NASCONO TERMINI DI CROSS-OPERAZIONE.

dalla non-linearità di $\vec{A}$

DISCORSO ENERGETICO

Dissipaz. energ. conseguente al moto turb da dove origina?



Immagino di immettere dell' energia in un sistema sottoforma di cadenza piezom. (o pendenza motrice i)

Minima parte di questa energia vince viscosità, dissipandosi in calore per $\tau_{visc.}$

Nel mentre, > parte dell'en. del m. medio è sottratta da tens. di Reynolds per poi essere quasi totalm. rigettata sottoforma di CALORE.

"Calore" non esiste nelle scale macroscopiche, ma è stato inventato nel piccolo

Moto turb. sopravvive, prendendo energia al moto medio.

32

→ ANALISI DIMENSIONALE

Il Teorema π o teorema di Buckingham

Ogni grandezza fisica ha opportune dimensioni (rispetto alle unità di misura) delle <u>grandezze fondamentali</u>, che per la meccanica sono tre. [massa M, lunghezza L, tempo T]
Adottata la terna M, L, T e le corrispondenti unità *kg, m, s* una grandezza fisica Q_1 della meccanica avrà il seguente legame dimensionale:

$$[Q_1] = Kg^{\alpha_1} \cdot m^{\beta_1} \cdot s^{\gamma_1}$$

$[A] = [L^2] = [L^2 T^0 M^0]$
$[V] = [L^1 T^{-1} M^0]$
ESPONENTI = DIMENSIONI
↓
di quanto cambia Q

- Esempio:
  Consideriamo la pressione p : $[p] = \frac{N}{m^2}$ poiché $[F] = Kg \cdot m \cdot s^{-2}$,
  sarà
  $[p] = Kg^{1} \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$

Un discorso analogo si può fare anche per altre grandezze Q_2, Q_3, ecc.

<u>Quesito preliminare:</u>

→ $Q_1\ Q_2\ Q_3$ FONDAMENTALE
L T M DERIVATA

<u>*è possibile assumere un'altra terna di grandezze come terna di grandezze fondamentali ?*</u>
Ad esempio, scegliere F, L, T, anziché M, L, T ? (e qui se ne è cambiata una sola, M->F, ma potrei cambiarle tutte e tre)

TERNA DI RIFERIMENTO

Si può dimostrare che se fisso l'attenzione su tre grandezze Q_1, Q_2 e Q_3 che hanno rispetto a M, L, T le dimensioni

→ TERNA DERIVATA

$$\begin{cases} [Q_1] = [L^{\alpha_1}\ T^{\beta_1}\ M^{\gamma_1}] \\ [Q_2] = [L^{\alpha_2}\ T^{\beta_2}\ M^{\gamma_2}] \\ [Q_3] = [L^{\alpha_3}\ T^{\beta_3}\ M^{\gamma_3}] \end{cases}$$

SISTEMA DIRETTO 1

si può rispondere affermativamente al precedente quesito se vale la seguente relazione

DETERM. DEI COEFF. DEL SIST. DIRETTO 1

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

→ SIST. 1 E' INVERTIBILE
=> $Q_1 Q_2 Q_3$ PUO' ESSERE ASSUNTA COME NUOVA TERNA DI RIFERIM.

Questo perché, non solo occorre che Q_1, Q_2 e Q_3 siano esprimibili in termini di L, M e T, ma attraverso la nuova terna di grandezze fondamentali si deve anche poter esprimere M, L e T.
Per capire questa condizione necessaria e sufficiente, scriviamo

$$[Q_1] = [M]^{\alpha_1} [L]^{\beta_1} [T]^{\gamma_1} \ ;$$
$$[Q_2] = [M]^{\alpha_2} [L]^{\beta_2} [T]^{\gamma_2} \ ;$$
$$[Q_3] = [M]^{\alpha_3} [L]^{\beta_3} [T]^{\gamma_3} \ .$$

e ne prendiamo i logaritmi

$$\begin{cases} \log[Q_1] = \alpha_1 \log[M] + \beta_1 \log[L] + \gamma_1 \log[T] \\ \log[Q_2] = \alpha_2 \log[M] + \beta_2 \log[L] + \gamma_2 \log[T] \\ \log[Q_3] = \alpha_3 \log[M] + \beta_3 \log[L] + \gamma_3 \log[T] \end{cases}$$

HO SCRITTO TUTTE LE COMPONENTI DI 1 COME e log

Per esprimere $\log[M]$, $\log[L]$, $\log[T]$ in funzione di $\log[Q_1]$, $\log[Q_2]$, $\log[Q_3]$, occorre che sia

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

(1) $$[\mu] = [\rho]^a \cdot [L]^b \cdot [U]^c$$

di dimensioni a, b, c.

Poiché la terna ρ, L, ed U è dimensionalmente indipendente, una relazione del tipo (1), vale per qualunque grandezza, nessuna esclusa. Gli esponenti a, b, c cioè le dimensioni di μ (in questo caso) rispetto alle unità di misura di ρ, L, ed U si determinano scrivendo

$$Kg^1 \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} = (Kg \cdot m^{-3})^a \cdot m^b \cdot (m \cdot s^{-1})^c$$

e quindi

$$\begin{cases} 1 = a \\ -1 = -3a + b + c \\ -1 = -c \end{cases}$$

da cui $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$.

Allora il rapporto tra μ e $\rho^1 \cdot L^1 \cdot U^1$ è un numero puro.

UNA SERIE DI

Sia y una grandezza fisica che compare in un fenomeno fisico, funzione di altre 5 grandezze:

$$y = f(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$$

1 2 3 ... N — SPAZIO N+1

GRAND. FOND.

nell'ipotesi che Q_1, Q_2, e Q_3 siano della stessa specie di quelle assunte per costruire la nuova terna di grandezze fondamentali e quindi siano dimensionalmente indipendenti, possiamo scrivere SCELGO α, β, γ IN MODO T.C. y SIA ADIMENS., QUINDI:

$$\underbrace{\frac{y}{Q_1^{\alpha} Q_2^{\beta} Q_3^{\gamma}}}_{= Y \text{ adimens!}} \cancel{y} = g\left(Q_1, Q_2, Q_3, \underbrace{\frac{Q_4}{Q_1^{\alpha_4} \cdot Q_2^{\beta_4} \cdot Q_3^{\gamma_4}} Q_1^{\alpha_4} Q_2^{\beta_4} \cdot Q_3^{\gamma_4}}_{N_4}, \underbrace{\frac{Q_5}{Q_1^{\alpha_5} Q_2^{\beta_5} Q_3^{\gamma_5}} Q_1^{\alpha_5} Q_2^{\beta_5} Q_3^{\gamma_5}}_{N_5}\right)$$

← ADIMENSIONATO

in cui $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$ sono scelti in modo che

$$\frac{Q_4}{Q_1^{\alpha_4} Q_2^{\beta_4} Q_3^{\gamma_4}} \text{ sia un numero puro} \rightarrow N_4$$

e $\alpha_5, \beta_5, \gamma_5$ sono scelti in modo che

$$\frac{Q_5}{Q_1^{\alpha_5} Q_2^{\beta_5} Q_3^{\gamma_5}} \text{ sia un numero puro} \rightarrow N_5$$

Potremo allora scrivere

cambiando unità mis. di Q ⟶ $$Y \; \cancel{y} = g'(\cancel{Q_1}, \cancel{Q_2}, \cancel{Q_3}, \overbrace{N_4, N_5}^{\text{non cambiano}})$$

NORMALIZZAZIONE ADIMENSIONALIZZATA

= 0 perché I membro resta immutato

$\boxed{N-3 \text{ DIMENSIONI}}$

La precedente si può trasformare nella forma

$$\frac{y}{Q_1^{\alpha_y} Q_2^{\beta_y} Q_3^{\gamma_y}} \cdot Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y} = f'(Q_1, Q_2, Q_3, N_4, N_5)$$

con cui $\alpha_y, \beta_y, \gamma_y$ sono scelti in modo che ADIMENS.

$$\frac{y}{Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y}} \text{ sia un numero puro} \rightarrow N_y$$

Il primo membro dipende dimensionalmente da Q_1, Q_2, Q_3 secondo il prodotto $Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y}$; per omogeneità dimensionale la dipendenza del secondo membro da Q_1, Q_2, Q_3 deve ridursi al prodotto $Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y}$ possiamo allora scrivere

$$N_y \cdot Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y} = Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y} \cdot \varphi(N_4, N_5)$$

NO

ESEMPIO

Sia $F = \varphi(\rho, U, D, \mu)$ una forza misurata in Newton (N).

Scegliamo ρ, U, D come grandezze indipendenti. Sono effettivamente indipendenti perché con esse non è possibile scrivere un numero puro.

Scriviamo

$$\frac{F}{\rho^{\alpha}\cdot U^{\beta}\cdot D^{\gamma}}\cdot \rho^{\alpha}\cdot U^{\beta}\cdot D^{\gamma} = \varphi\left(\rho, U, D, \frac{\mu}{\rho^{\alpha_1}\cdot U^{\beta_1}\cdot D^{\gamma_1}}\cdot \rho^{\alpha_1}\cdot U^{\beta_1}\cdot D^{\gamma_1}\right)$$

Calcoliamo α, β, γ e $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ in modo che

$$\frac{F}{\rho^{\alpha}\cdot U^{\beta}\cdot D^{\gamma}} \quad e \quad \frac{F}{\rho^{\alpha_1}\cdot U^{\beta_1}\cdot D^{\gamma_1}}$$

siano due numeri puri.

Dato che:

$$[F] = Kg^{1}\cdot m^{1}\cdot s^{-2}$$
$$[\rho] = Kg^{1}\cdot m^{-3}$$
$$[U] = m^{1}\cdot s^{-1}$$
$$[D] = m$$
$$[\mu] = Kg^{1}\cdot m^{-1}\cdot s^{-1} \qquad \left(\tau = \mu\frac{dU}{dy}\right)$$

possiamo scrivere:

1) $Kg^{1}\cdot m^{1}\cdot s^{-2} = Kg^{\alpha}\cdot m^{-3\alpha}\cdot m^{\beta}\cdot s^{-\beta}\cdot m^{\gamma}$

$$\begin{cases} 1=\alpha \\ 1=-3\alpha+\beta+\gamma \\ -2=-\beta \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix}\alpha=1\\ \beta=2\\ \gamma=2\end{matrix}$$

2) $Kg^{1}\cdot m^{-1}\cdot s^{-1} = Kg^{\alpha_1}\cdot m^{-3\alpha_1}\cdot m^{\beta_1}\cdot s^{-\beta_1}\cdot m^{\gamma_1}$

$$\begin{cases} 1=\alpha_1 \\ -1=-3\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \\ -1=-\beta_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix}\alpha_1=1\\ \beta_1=1\\ \gamma_1=1\end{matrix}$$

Risulta quindi:

$$\frac{F}{\rho^{1}\cdot U^{2}\cdot D^{2}}\cdot \rho^{1}\cdot D^{2}\cdot U^{2} = \varphi\left(\rho, U, D, \frac{\mu}{\rho^{1}\cdot U^{1}\cdot D^{1}}\cdot \rho^{1}\cdot U^{1}\cdot D^{1}\right)$$

Il primo membro ha le dimensioni di una forza, infatti il prodotto $\rho\cdot U^2 D^2$ ha le dimensioni di una forza. Per omogeneità dimensionale anche il secondo membro deve avere le dimensioni di una forza. Risulterà quindi:

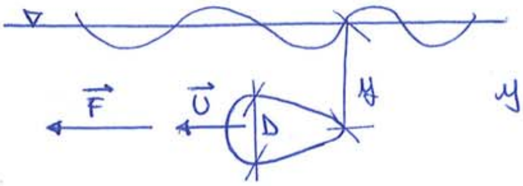
$$\frac{F}{\rho^{1}\cdot U^{2}\cdot D^{2}}\cdot \rho^{1}\cdot U^{2}\cdot D^{2} = \rho^{1}\cdot U^{2}\cdot D^{2}\cdot \varphi(N_1)$$

con $N_1 = \frac{\mu}{\rho\cdot U\cdot D}$ per cui $\frac{F}{\rho\cdot U^2\cdot D^2} = \varphi(N_1)$

$n = 5$

$m = 3$,

quindi numeri puri = 2.



$y \approx D$

F è anche funzione della dimensione della perturbazione superficiale indotte dal movimento del corpo.

In questo caso si deve considerare anche la GRAVITA':

$$F = \varphi(\rho, U, D, g) \qquad \text{RESISTENZA D'ONDA}$$

Prendendo come terna fondamentale

$$\frac{F}{\rho \cdot U^2 \cdot D^2} = \psi\left(\frac{\rho^0 \cdot U^2 \cdot D^{-1}}{g}\right) = \psi'\left(\frac{U}{\sqrt{g \cdot D}}\right)$$

L'argomento della funzione al secondo membro è il numero di Froude *Fr*. Possiamo quindi scrivere:

$$C_r = \psi'(F_r)$$

Se il corpo è a profondità intermedia, intervengono sia μ che g. Quindi

$$F = \varphi(\rho, U, D, g, \mu)$$

e si avranno n-3=3 gruppi adimensionali:

$$C_r = \psi'(F_r, Re)$$

In questo caso si avrà resistenza d'attrito, resistenza di scia e resistenza d'onda.
I risultati sperimentali si riportano in coordinate spaziali e non piane.

Immaginiamo di dover valutare il coefficiente di resistenza di un corpo che avanza nelle condizioni viste.
Questo coefficiente di resistenza *Cr* può essere funzione di *Re*, del solo *Fr* e contemporaneamente anche di *Re*.
L'ideale sarebbe fare delle prove con il corpo reale, ma questo spesso è impossibile perché il corpo verrà realizzato solo quando le sue caratteristiche al trascinamento saranno certe e saremo sicuri di non doverlo modificare. Si eseguiranno allora delle prove su un modello il cui costo non è eccessivo.
Immaginiamo che il modello si debba costruire rispettando una certa scala geometrica λ, ad esempio 1/30.

- Se *Cr* dipende solo da *Re*, in modello e in originale dovremo rispettare tale numero

$$\frac{\rho_o \cdot U_o \cdot D_o}{\mu_o} = \frac{\rho_m \cdot D_m \cdot U_m}{\mu_m}$$

Ma, in genere, il liquido non si può cambiare, $\rho_o = \rho_m$, $\mu_o = \mu_m$. Per cui

$$\frac{U_m}{U_o} = \frac{D_o}{D_m},$$

cioè

$$U_m = U_o \frac{D_o}{D_m} = U_o \cdot \frac{1}{\lambda}$$

Riducendo in modello le dimensioni del corpo, nelle prove su modello questo deve avanzare più velocemente per rispettare Re.

- Se Cr dipende solo da Fr, si avrà analogamente

$$\frac{U_o}{\sqrt{g \cdot D_o}} = \frac{U_m}{\sqrt{g \cdot D_m}}$$

cioè

$$\frac{U_m}{U_o} = \frac{\sqrt{D_m}}{\sqrt{D_o}}$$

, da cui

$$U_m = U_o \sqrt{\frac{D_m}{D_o}}$$

.

- Se Cr dipende da Re e da Fr e lavoriamo con lo stesso liquido in modello e con l'originale, per rispettare le due condizioni

(*) $$\frac{U_m}{U_o} = \frac{D_o}{D_m} \quad e \quad \frac{U_m}{U_o} = \frac{\sqrt{D_m}}{\sqrt{D_o}}$$

deve essere $D_o = D_m$. Questo significa che devo lavorare su un modello uguale al prototipo, quindi lavorare in scala 1:1.

Per soddisfare le due relazioni, senza avere $D_o = D_m$, occorre lavorare con liquidi diversi in modello e nell'originale.

Devo avere

$$\frac{\rho_o U_o D_o}{\mu_o} = \frac{\rho_m D_m U_m}{\mu_m} \qquad \frac{U_o}{\sqrt{g D_o}} = \frac{U_m}{\sqrt{g D_m}}$$

$$\frac{U_o D_o}{\nu_o} = \frac{U_m D_m}{\nu_m}$$

$$\frac{U_m}{U_o} \cdot \frac{D_m}{D_o} = \frac{\nu_m}{\nu_o}$$

Ricordando che

$$\frac{\sqrt{D_m}}{\sqrt{D_o}} \cdot \frac{D_m}{D_o} = \frac{\nu_m}{\nu_o} \longrightarrow \left(\frac{D_m}{D_o}\right)^{3/2} = \frac{\nu_m}{\nu_o} \longrightarrow \frac{D_m}{D_o} = \left(\frac{\nu_m}{\nu_o}\right)^{2/3} \quad e \quad \frac{U_m}{U_o} = \left(\frac{\nu_m}{\nu_o}\right)^{1/3}$$

Lavorare in modelli con liquido diverso da quello dell'originale ci permette teoricamente di soddisfare le due relazioni (*).

In pratica è impossibile soddisfare le due relazioni perché è molto difficile trovare un liquido da utilizzare in modello che ci permette di soddisfare la

$$\left(\frac{D_m}{D_o}\right) = \left(\frac{\nu_m}{\nu_o}\right)^{2/3}$$

con scale delle lunghezze plausibili.

Se, per esempio, $\lambda = 1/30$, deve essere

$$\left(\frac{1}{30}\right)^{3/2} = \frac{\nu_m}{\nu_o}$$

$$\nu_m = \nu_o \left(\frac{1}{30}\right)^{3/2} = 0{,}0061 \cdot \nu_o$$

Se $\nu_o = 1 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$ (acqua a 20°C), $\nu_m = 6{,}1 \cdot 10^{-9}\ m^2/s$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 234

PROFILI DI VELOCITÀ - MILLIKAN

FLUIDO "SI ATTACCA" ALLA PARETE

A causa delle forze di adesione, le particelle a contatto con la parete hanno la stessa velocità della parete stessa (ferma!): $v=0$.

Millikan → Ipotesi: parete liscia e piana (= senza curvature)
Definisce uno strato molto prossimo alla parete da non risentire di ciò che accade alla scala globale del fluido

1. (INNER LAYER o WALL LAYER). In essa il profilo della vel.:

$$U = U(y, \rho, \nu, \tau_0)$$

(param. cinem.)
tensioni che fluido esercita su parete che lo subisce

asse rivolto verso interno della parete

essendo vicini a parete, la quale impone $U=0$ (vincolo determ.) e dove $\exists$ forti gradienti.

U non dipende dalla SCALA GLOBALE δ, nella quale il fenomeno è AUTOSIMILE.
Per conoscere profilo velocità in questo strato, sfrutto teor. π:

τ_0, ρ → GRANDEZZE DINAMICHE coinvolgono la massa, la quale non appare a I membro
↓
vanno combinate in un rapporto x annullare la massa:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \qquad \left[\sqrt{\left[\frac{L^2}{T^2}\right]}\right]$$

VELOCITÀ DI ATTRITO — scala tipica della VELOCITÀ U

$$U=U(\underbrace{y, \nu, u_*}_{\text{grand. nuove}}) \xrightarrow{\text{TEOR. } \pi} \boxed{\frac{U}{u_*}} = f\left(\boxed{\frac{y u_*}{\nu}}\right) - $$

num. puro

scala tipica della lungh. y

$\frac{y u_*}{\nu} = y_+$ DISTANZA ADIMENSIONAL.

Allontanandomi dalla parete ($y\uparrow$), $R_e\uparrow$ fin quando forze d'inerzia vincono sulle forze viscose e subentra m. turbolento (al m. lam.).
↓
Nell' OUT-LAYER $\nexists\, \nu$

2. OUTER-LAYER: Lontano dalla parete, conta solo scala globale ($\to \delta$) e perde d'importanza la viscosità ν.

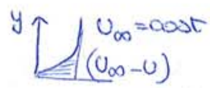
$$U = U(y, \underbrace{\rho, \tau_0}_{u_*}, \cancel{\nu}, \delta) = U(y, u_*, \delta)$$

$\uparrow y$, $\uparrow Re$ prevalgono f. d'inerzia

δ: dimensione complessiva

"TEOR. π"
↓

$$\frac{(U_\infty - U)}{u_*} = F\left(\frac{y}{\delta}\right) = F(\xi)$$



Parete piana e liscia, ma sup. parete ha ASPERITÀ → VISCOSITÀ nasconde SCABREZZA → m. turb. non si accorge delle asperità → parete IDRAULIC. LISCIA

→ se le scabrezze raggiungono la turb. distruggendo sottostr. viscoso → parete IDRAULICAM. SCABRA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 234

OSS. 3: allontanandosi dalla scala log, mi addentro nella outer
→ risento della scala globale
Tuttavia, essendo lo scostam. non eccessivo, si considera valido anche qui l'andam. log, anche se p.ti iniziano a disperdersi.

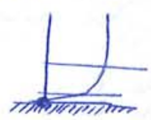
Non esiste una legge per OUTER → sfrutto legge log per tutto outer
(OUTER → dati non seguono né CURVA né RETTA)

OSS. 4.: Stessa approssimaz. non può essere valida x scale molto piccole, in cui il gradiente di velocità è troppo grande da generare turbolenza.

SOTTOSTRATO VISCOSO: strato infinitesimo vicino alla parete in cui si spegne la componente turbolente poiché non possono ∃ componenti normale alla parete. Questo strato è laminare.

BUFFER LAYER
- ∄ moto laminare, né leggi x s
- profilo velocità è incognito

Moto turb. si origina laddove prof. vel. ha max gradiente, cioè quando prof. è + appiattito → $\frac{dU}{dy}$ basso
⇓
Origine è dove grad. max (→ nel buffer layer) e da qui si diffonde in tutta la corrente



Analisi delle ipotesi iniziali del modello

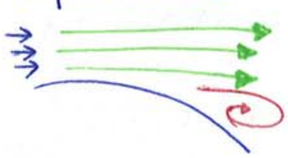
- PARETE IDRAULICAM. LISCIA

parete scabra → asperità superano sottostrato viscoso $\left(\frac{y\,U_*}{\nu}\right)$
↓
controllo buffer layer e turbolenza

→ Al crescere della U del fluido diminuisce y.
→ ↑ scabro, ↑ velocità → scie

- ASSENZA DI CURVATURA (= PARETE PIANA)

parete curva → fenomeno della separazione: a valle della curva le traiett. si staccano dalla parete → correnti di ricircolazione (scie)



$$\vec{M} = \int_\Omega \rho \vec{v} v_n \, d\Omega \overset{\text{INCOMPR.}}{\stackrel{\downarrow}{=}} \rho \int_\Omega \vec{v} v_n \, d\Omega = \rho \int_\Omega (\vec{\bar{v}} + \vec{v}')(\bar{v}_n + v_n') \, d\Omega =$$

$$= \rho \left[\int_\Omega (\vec{\bar{v}} \bar{v}_n + \vec{\bar{v}} v_n' + \vec{v}' \bar{v}_n + \vec{v}' v_n') \, d\Omega \right.$$

- $\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left[\rho \int \vec{\bar{u}} \bar{v}_n \, d\Omega \right] dt = \rho \int_\Omega \vec{\bar{u}} \bar{v}_n \, d\Omega$
- $\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left[\rho \int_\Omega \vec{\bar{v}} v_n' \, d\Omega \right] dt = \rho \int_\Omega \left[\frac{1}{T} \vec{\bar{v}} \cancel{\int_t^{t+T} v_n' \, d\Omega} \right] = 0 \quad = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left[\rho \int_\Omega \vec{v}' \bar{v}_n \, d\Omega \right] dt$
- $\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left[\rho \int_\Omega \vec{v}' v_n' \, d\Omega \right] dt = \rho \int_\Omega \left[\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \vec{v}' v_n' \, dt \right] d\Omega = \rho \int_\Omega \overline{\vec{v}' v_n'} \, d\Omega = \vec{M}'$

↳ grand. correlate tra loro (sono legate da leg. lineare) → sopravvive $\int$ media

Ricapitolando

$$\vec{P} + \vec{F_c} + \vec{I} + \vec{M} + \vec{M}' = 0$$

↳ non posso separare termini medi da moto turb.

↳ Eq. valida sse fluido incomprimibile ($\rho = \text{cost.}$), altrimenti $\rho = \bar{\rho} + \rho' \longrightarrow \vec{I} \ldots \rho' \vec{u}'$ e diventerebbe funz. campo di moto

↳ $\vec{M_e} = \vec{M_u} \Rightarrow \vec{M_e} - \vec{M_u} = 0$

↳ $\overline{\vec{v}' v_n'}$ identicam. distribuito nelle successive sez. trasv. per simm.

$\Rightarrow \vec{M}'$ limitato alla sup. lat. del cilindro

$$\vec{M}' = \int \rho \vec{v} v_n \, \underset{2\pi r \cdot L}{d\Omega}$$

TANGEN

40

Ricapitolando

$$-\gamma \pi r^2 \cancel{L} \frac{z_2 - z_1}{\cancel{L}} + \pi r^2 (p_1 - p_2) + \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} 2\pi r L - \rho \overline{u'v'} 2\pi r L = 0$$

$$\gamma \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \underbrace{\left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \right]}_{iL} = 2 \cancel{\pi} \cancel{r} L \underbrace{\left[-\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \rho \overline{u'v'} \right]}_{\tau}$$

$i =$ variaz. carico tot. per unita' di lungh. $\xrightarrow{\text{essendo sez. cost (corrente unif.)}}$ $i =$ variaz. carico piezom. per unita' di lungh.

$i = J = -\frac{\partial H}{\partial s}$ $\qquad$ $-\frac{\partial h}{\partial s}$

$T = \gamma (\pi r^2) L i$ $\qquad$ Resistenza opposta dal fluido, data come somma di 2 termini:

τ {
- SF. TG. VISCOSO (m. laminare)
- SF. TG. TURBOLENTO, dovuti agli scambi di quantita' di moto nel m. turb.

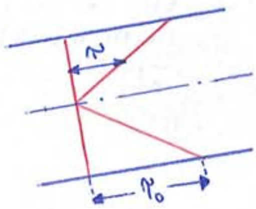
$$\tau = -\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \rho \overline{u'v'}$$

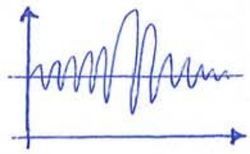
"TENS. DI REYNOLDS", τ_{TURB}. dovute agli scambi di quantita' di moto nel m. turb. nulle sia alla parete sia lungo l'asse

tens. tg. viscose, τ_{VISC}. che si originano nel m. laminare e consumano energia

$$\tau = \frac{\overbrace{\gamma \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} i \cancel{L}}^{T}}{\underbrace{2 \cancel{\pi} \cancel{r} \cancel{L}}_{\Omega_{LAT}}} = \gamma i \frac{r}{2}$$

anche nel m. turb. le tens. tg variano linearm.





τ istantanee oscillano, mentre τ medie costanti

Moto laminare: $\tau = \tau_{VISC}$

Moto turbolento: $\tau = \tau_{VISC} + \tau_{TURB}$.

Quanto contano $\tau_{VISC.}$ e τ_{TURB}?

In quasi tutto il dominio prevalgono τ_{TURB}:

Solo vicino alla parete $\tau_{TURB} = 0$ e contano solo più τ_{VISC}, anche per num. di Reynolds R_e molto elevati (m. puram. turb.). } determ.

Appena mi allontano dalla parete iniziano a dominare e continuano a prevalere anche le tens. di Reynolds, τ_{TURB}. } caso

Parete $\rightarrow$ determinismo. $\qquad$ Lontano dalla parete $\rightarrow$ caso

41

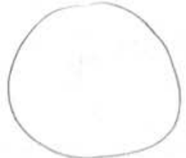
Re permette di suddividere → moto laminare ($Re < 2000$) / m. turbolento ($Re > 2000$)

Inizio preoccupandomi del moto laminare e distinguo sez. ○ da sez. ▭.

velocità, sez ○, m. lam.

- SEZ. CIRCOLARE

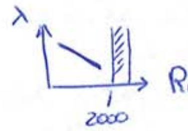
$$U = \frac{1}{32}\frac{\gamma i}{\mu}D^2 \longrightarrow i = \frac{32 U \mu}{\gamma D^2}$$



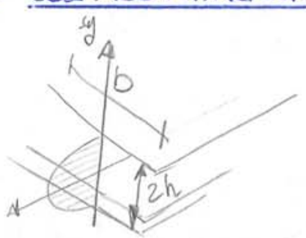
$$\lambda = \frac{iD}{U^2/2g} = \frac{2g}{U^2}\cdot D \cdot \frac{32 U\mu}{\gamma D^2} = \frac{64}{Re}$$

↳ retta sul piano log

↑Re, ↓i / ↓Re, ↑i → pendenza neg.



- SEZ. RETTANGOLARE



$$U = \frac{1}{3}\frac{\gamma i}{\mu}R^2 \longrightarrow i = \frac{3\mu U}{\gamma R^2}$$

$$R = \frac{\Omega}{P} = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2} = \frac{D}{4}$$ RAGGIO IDRAULICO → $D = 4R$

$$\lambda = \frac{i\,4R}{U^2/2g} = \frac{2g\,4iR}{U^2} = \frac{8g\,R}{U^2}\cdot\frac{3\mu U}{\gamma R^2} = \frac{96}{Re}$$

▭ b, a; $a \gg b$

$$Re_{,▭} = \frac{4RU}{\nu}$$

$$R_{,▭} = \frac{\Omega}{P} = \frac{a\cdot b}{2a+2b} \overset{a\gg b}{\cong} \frac{b}{2}$$

OSS. 1: λ (INDICE DI RESISTENZA) dipende dalla forma della sezione. Per tutte le altre sezioni possibili (di difficile trattaz. dati gli spigoli) sono comprese tra le 2 rette estreme di equaz:

$$\lambda_{○} = \frac{64}{Re} \quad e \quad \lambda_{▭} = \frac{96}{Re}$$

poiché ↓ CERCHIO: P minimo a parità di A

↓ RETTANGOLO: A minimo a parità di P

RICORDA:

P = PERIMETRO BAGNATO

↳ dove dissipo energia e ho tensioni tg. Su pareti verticali non dissipo xk particelle vanno a = velocità.

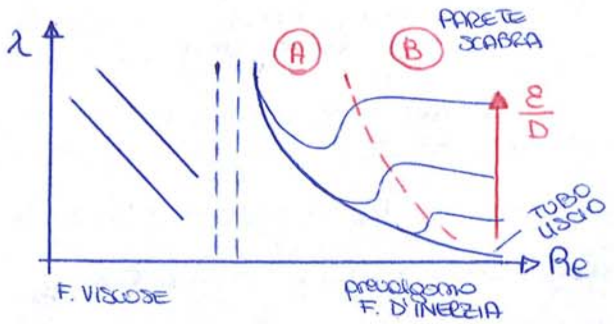
42

$\frac{\varepsilon}{D}$: parametro per contraddistinguere le singole curve (= sing. esperienze)

- $\frac{\varepsilon}{D}$ maggiori → distacco della curva del tubo liscio + brusco ⇒ intervallo Re in cui si comporta come tubo liscio resta trascurabile
- $\frac{\varepsilon}{D}$ minori → distacco per Re via via crescenti

Spessore del substr. viscoso ↓ al ↑ Re
⇓
- Re piccoli → substr. visc. sommerge completam. asperità costituenti la scabrezza → scabrezza non influenza moto turb.
- ↑ Re, protuberanze emergono → scabrezza unif → brusco distacco

Dopo un breve tratto ascendente, tutte le curve $\lambda(Re)$, per $\frac{\varepsilon}{D} = cost$, da concave verso il basso tendono a disporsi orizz ⇒ $\lambda \to$ costante



Ⓐ $\lambda = \lambda(Re, \varepsilon/D)$

Ⓑ $\lambda = \lambda(\varepsilon/D)$ PURAM. TURB.

$\lambda = cost$ → caratteristico del moto turb. non + influenzato dalla viscosità

In realtà si lavora con una scabrezza equivalente (ε_{eq}) che permette di studiare il problema globalmente, paragonandolo poi alla parete studiata da Nikuradse, a parità di diametro.

In genere:
- curve presentano raram. tratto ascendente, con concavità verso basso
- si staccano dalla curva dei tubi lisci gradualm. risultando tg ad essa e quindi discendenti all'inizio
  ↳ qst tratto discendente è tanto + pronunciato al crescere di Re
- scabrezza non unif → emergono prima asperità + elevate e poi via via quelle di altezza K (↑ Re, ↓ spessore substrato visc.)
  ↓
  graduale distacco $\lambda(Re)$ da curva per tubi lisci
  ↓
  raccordo alla zona (B)

↓

Si fa ricorso al DIAGRAMMA DI MOODY per progettare

1) Assegnata una condotta → dimens. geom (D, L); caratt. idr. (ε) → $\frac{\varepsilon}{D}$ → curva $\lambda(Re)$ sull'abaco
2) sia data una portata Q:
$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{4Q}{\pi \nu D} \longrightarrow \lambda = \frac{D\,i}{U^2/2g}$$
3) determino la cadente, $i = \frac{\lambda U^2}{2gD}$
4) e quindi il dislivello piezom. tra sez. iniz. e sez. terminale

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 234

Teorema π sintetizza e semplifica

$$i = i(D, \rho, \mu, Q, \varepsilon) \quad \text{spazio a 5 dimensioni}$$

$\Re$

$$i \propto U^{\alpha}, Q^{\beta}, D^{\gamma}$$

LAMINARE

$$\lambda = \frac{c}{R_e} \Rightarrow \lambda \propto \frac{1}{DU}$$

$$\lambda = \frac{Di}{U^2/2g} \Rightarrow i \propto \lambda \cdot \frac{U^2}{D} \qquad \Rightarrow i \propto \frac{U}{D^2}$$

$$Q \propto UD^2 \Rightarrow U \propto \frac{Q}{D^2} \qquad \Rightarrow i \propto \frac{Q}{D^4}$$

TURBOLENTO

$$\lambda = 0{,}0032 + \frac{0{,}221}{R_e^{0{,}237}} \quad \text{(NIKURADSE)} \quad R_e > 10^5$$

→ TUBO LISCIO: $\lambda = \frac{0{,}316}{R_e^{0{,}25}}$ 1/4 (BLASIUS) $R_e < 10^5$

→ PARETE LISCIA: $i \propto \frac{U^2}{D} \xrightarrow{\text{Blasius}} i \propto \frac{U^{1,75}}{D^{1,25}}$, $U \propto \frac{Q}{D^2}$ $\Rightarrow i \propto \frac{Q^{1,75}}{D^{4,75}}$

→ PARETE COMPLETAM. SCABRA: $\lambda = \lambda(\varepsilon/D)$

$$\lambda = \text{cost}(R_e) \Rightarrow i \propto \frac{U^2}{D}, \quad U \propto \frac{Q}{D^2} \qquad \Rightarrow i \propto \frac{Q^2}{D^5}$$

modificare geom → potenza altissima

ES: dimezzo D → $i \downarrow$ 32 volte

linearm. dipend. — inversam. dipend.

Nel m. turb. le dissipaz. ($\to i$) sono L.D. da Q e I.D. da D^4!

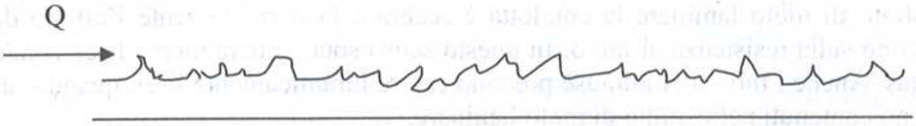
↓ m. turb. moto meno dissipativo delle pareti scabre

I diametri hanno potenze alte → influenzano molto le dissipaz.

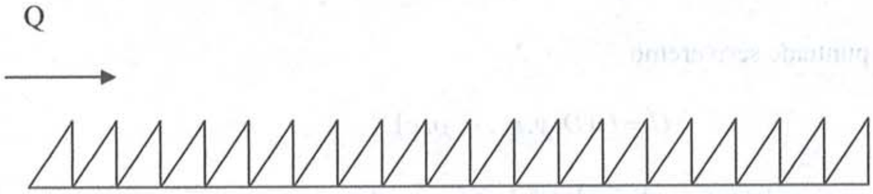
Piccolo cambiam → grande effetto

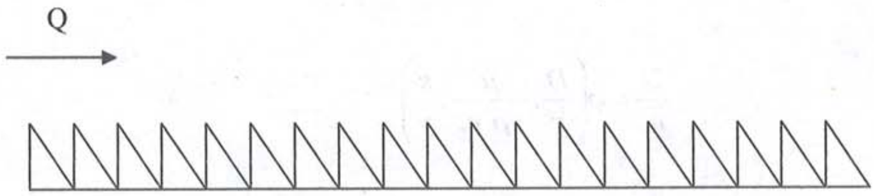
DISTRIBUZIONE DI VELOCITÀ PER IL MOTO TURBOLENTO UNIFORME IN CONDOTTO CIRCOLARE

Consideriamo una tubazione del commercio: se esaminiamo la sua superficie interna vediamo una situazione come quella in figura.



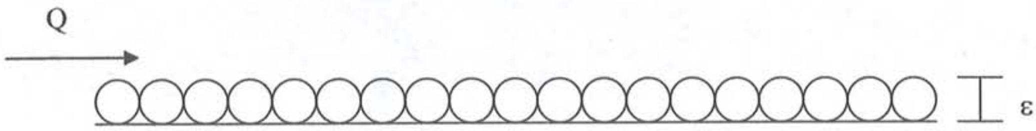
La superficie interna presenta delle asperità che sono più o meno pronunciate, inclinate in modo casuale, un po' nel verso della corrente, un po' nel verso contrario alla direzione della corrente.
Per ogni condotta noi possiamo definire un parametro che viene detto **scabrezza della condotta** e in genere viene indicato con ε. Cos'è ε ? ε ha le dimensioni di una lunghezza, è un parametro che deve essere valutato per via idraulica.; ε non è né l'altezza media delle punte, né il valore massimo, né il valore minimo di tale altezza. ε tiene conto dell'altezza delle punte, ma anche del loro orientamento secondo la corrente o contro corrente.





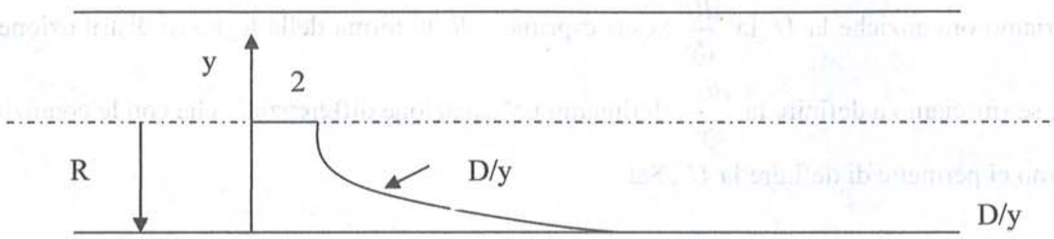
Le scabrezze delle due tubazioni riportare in figura sono diverse.

Nikuradse ha sperimentato su tubazioni rese scabre in modo artificiale incollando sulla parete interna della tubazione dei granelli di sabbia a diametro costante.



45

Consideriamo il rapporto $\frac{D}{y}$; tale rapporto vale 2 sull'asse e tende all'infinito alla parete; il rapporto $\frac{\nu}{y\, u_*}$ tende all'infinito alla parete e a valori molto piccoli verso il centro, analogamente accade per $\frac{\varepsilon}{y}$.



Supponiamo che esista una zona lungo il raggio, già esterna allo strato di moto di transizione, in cui $\frac{D}{y}$ sia ancora molto grande in modo da non provocare alcuna variazione di $\frac{U}{u_*}$ e invece $\frac{\nu}{y\, u_*}$ e $\frac{\varepsilon}{y}$ siano già talmente piccoli da non influire sul valore di $\frac{U}{u_*}$: abbiamo supposto quindi che ci sia autosimilitudine completa nei tre parametri. Scriviamo quindi, secondo la simbologia dell'autosimilitudine:

$$\frac{U}{u_*} = \Phi(\infty,0,0) = c$$

La precedente dice che se fosse vera l'autosimilitudine completa, nella zona considerata $\frac{U}{u_*}$ sarebbe costante; questo in totale disaccordo con i valori sperimentali che denotano una crescita della velocità dalla parete al centro. Ne risulta che lavorando sulle U non è possibile considerare l'autosimilitudine completa nei tre rapporti adimensionali. In particolare non si può considerare l'autosimilitudine completa nei rapporti adimensionali $\frac{\nu}{y\, u_*}$ e $\frac{\varepsilon}{y}$. Infatti noi sappiamo che il fluido è viscoso e per questo aderisce alla parete dove le particelle hanno quindi velocità nulla; la velocità è massima in centro. Esiste quindi un gradiente di velocità che è massimo alla parete e nullo in centro dove l'effetto della viscosità è sempre molto debole. Dire che c'è autosimilitudine nel parametro $\frac{\nu}{y\, u_*}$ vuol dire trascurare l'effetto della viscosità e in particolare l'effetto della parete dovuto alla viscosità sulla distribuzione della velocità. Per un tubo di scabrezza assoluta ε, considerare autosimilitudine nel rapporto $\frac{\varepsilon}{y}$ vuol dire non considerare l'effetto dovuto alla

46

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 234