



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2022A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Casari Silvia

MATERIA: Fondamenti di Meccanica strutturale (esercitazioni + temi d'esame) - Prof Somà

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

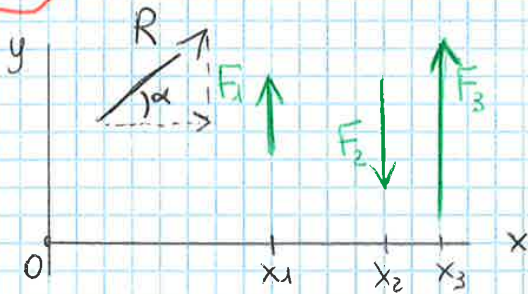
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

7 marzo 2016

ESERCITAZIONE ① "GRADI DI LIBERTÀ E REAZIONI VINCOLARI"

-CHRISTIAN FERRONE-

ES. (N°1)



- $F_1 = 500 \text{ N}$
- $F_2 = 800 \text{ N}$
- $F_3 = 1000 \text{ N}$
- $x_1 = 5 \text{ m}$
- $x_2 = 7 \text{ m}$
- $x_3 = 8 \text{ m}$

La risultante R (che traccio arbitrariamente) deve sostituire le tre F

→) $+R \cos \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \pm \pi \rightarrow$ sappiamo quindi che R è verticale

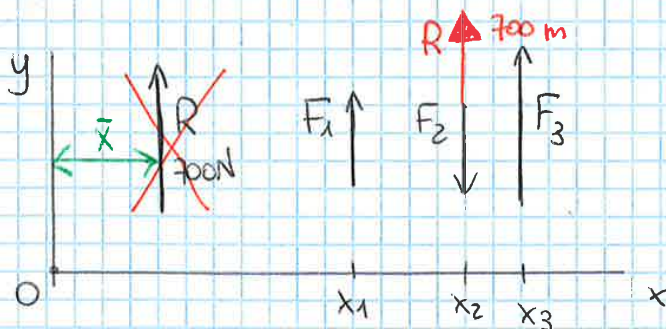
↑) $F_1 - F_2 + F_3 = R$

risultante EQUIVALENTE

perché dobbiamo trovare quella che equivale alle 3 F sommate

Risultante EQUILIBRANTE → $+F_1 - F_2 + F_3 + R = 0$

Sostituisco le F ⇒ $500 - 800 + 1000 = R = +700 \text{ N}$



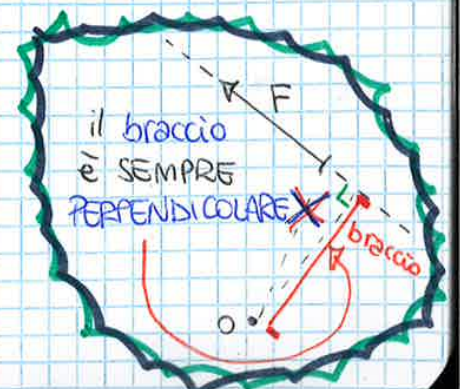
il + indica che punta verso l'alto

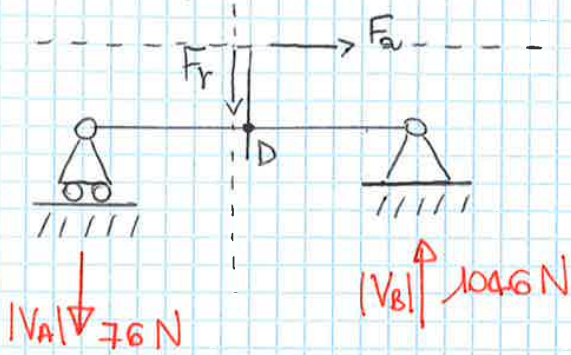
EQ DI MOMENTO rispetto all'origine O (dato che le dist. sono date rispetto all'origine)

$O \curvearrowright +F_1 x_1 - F_2 x_2 + F_3 x_3 = +R \bar{x}$

$\bar{x} = \frac{F_1 x_1 - F_2 x_2 + F_3 x_3}{R} = +7 \text{ m}$

↳ quindi R si trova alla distanza x_2 rispetto all'origine





Rivolgo le frecce nel verso giusto
 \hookrightarrow valore della forza in modulo
 (perché il verso della freccia sostituisce l'eventuale segno -)

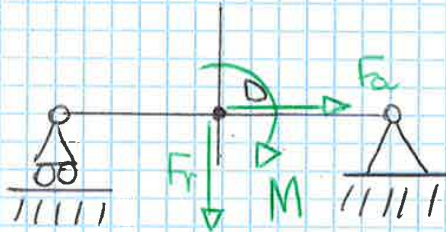
In termini di equilibrio NON varia nulla se si sposta una forza lungo la sua direzione \Rightarrow sposto F_r in D

Per spostare F_a :

MOMENTO DI TRASPORTO
 M

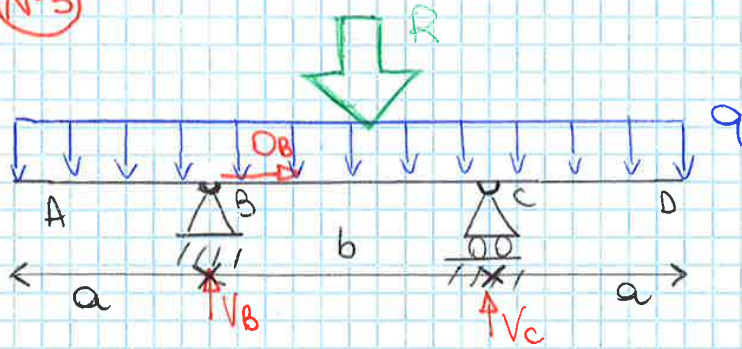


nasce quando sposto una forza dalla sua direzione originaria: nascerà un momento che sostituirà quello precedentemente imposto dalla forza in considerazione.
 I carichi saranno gli stessi



Un'ulteriore equazione, per esempio $\sum \mathcal{M} = 0$ aiuterebbe a dimostrare che i calcoli fatti sono corretti (solo se $\mathcal{M} = 0$)

Es. (N°5)



$$a = 2\text{ m}$$

$$b = 6\text{ m}$$

$$q = 20 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

La struttura è poggata su cerniera e carrello



$$h = v - g =$$

$$= (2 + 2(n-1) + 1 + 2(n-1)) - 3 \cdot 3$$

Vincoli ESTERNI
vincoli INTERNI
vinc. ESTERNO
Vinc. INTERNO

$n = n^\circ$ elem. concorrenti
ovvero le 2 aste in
questo caso $\Rightarrow n=2$

$$h = 7 - 9 = -2$$

ogni vincolo
toglie
3 GdL

$$\rightarrow) O_B = 0$$

$$\uparrow) V_B + V_C - q(2a + b) = 0$$

$$R = 20 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 10\text{ m} = 200\text{ N}$$

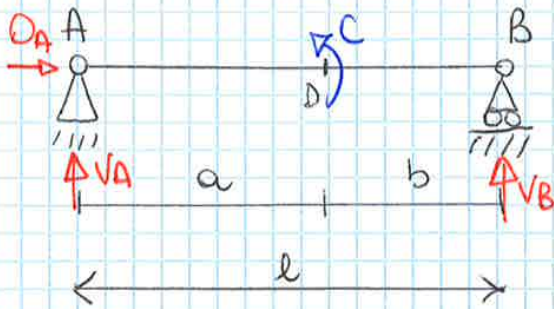
Il punto di applicazione
di R è a metà
della struttura (a metà
di b)

Scelgo B perché ho meno incognite!

$$\rightarrow) V_C \cdot b - R \cdot \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow V_C = \frac{R}{2} = 100\text{ N}$$

$$V_B = q \cdot (2a + b) - V_C = 200\text{ N} - 100\text{ N} = 100\text{ N}$$

ES (N°7)



$$l = 80 \text{ mm}$$

$$a = 50 \text{ mm}$$

$$C = 4000 \text{ Nmm}$$

$$\rightarrow) D_A = 0$$

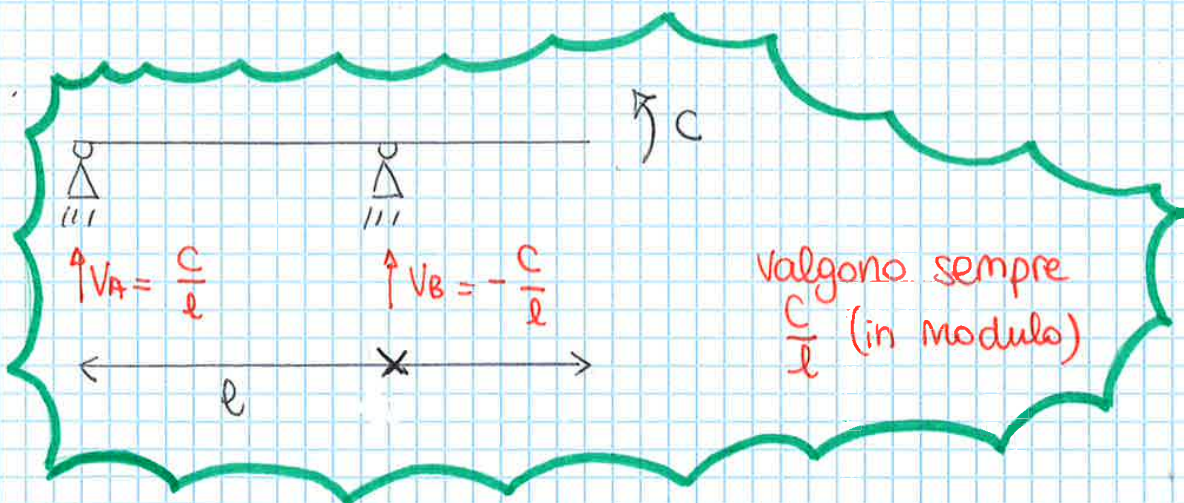
$$\uparrow) V_A + V_B = 0 \Rightarrow V_A = -V_B$$

$$A) V_B \cdot l + C = 0 \quad V_B = -\frac{C}{l} = \frac{4000 \cdot \frac{\text{Nmm}}{\text{mm}}}{80} = -50 \text{ N}$$

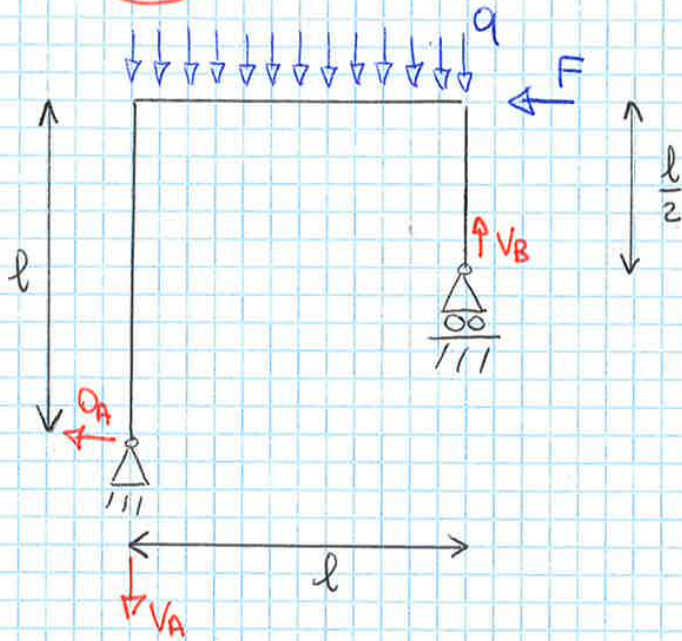
$$V_A = -(-50 \text{ N}) = +50 \text{ N}$$

Quando c'è una coppia pura, nascono delle reazioni di CONTROCOPPIA per bilanciare quella esterna concentrata.

Non interessano le misure dei segmenti a e b, ma solo la distanza tra le forze che devono controbilanciare il momento.



ES. (N09)



$$l = 1\text{m}$$

$$F = 25\text{N}$$

$$q = 70 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$R = q \cdot l = 70 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 1\text{m} = 70\text{N}$$

$$\uparrow) -V_A + V_B - R = 0 \quad V_A = V_B - R = 10 - 70 = -60\text{N}$$

$$\rightarrow) -O_A - F = 0 \quad O_A = -F = -25\text{N}$$

$$\curvearrowright) V_B \cdot \cancel{l} + F \cdot \cancel{l} - R \cdot \frac{\cancel{l}}{2} = 0$$

$$V_B = \frac{R}{2} - F = 35 - 25 = 10\text{N}$$

Le 2 O_c e le 2 V_c sono UGUALI e CONTRARIE in modo che ri assemblando le strutture si annullino!

Considero il segmento \overline{AC}

$$\rightarrow) O_c = DN$$

$$\uparrow) V_A - F + V_c = 0$$

$$\uparrow) -F \cdot 2a + V_c \cdot 4a = 0 \Rightarrow V_c = \frac{F \cdot \cancel{2a}}{\cancel{4a}} = \frac{F}{2} = 25 \text{ N}$$

Considero \overline{CD} :

$$\rightarrow) |-O_c| + O_B = 0 \Rightarrow O_B = DN$$

$$\uparrow) |-V_c| + V_B - F + V_D = 0$$

$$\uparrow) -F \cdot b + V_D \cdot 2b + \underbrace{V_c \cdot a}_{\substack{\text{nota} \\ \frac{F}{2}}} = 0 \Rightarrow V_D = 17,5 \text{ N}$$

$$V_B = V_c + F - V_D = 57,5 \text{ N}$$

Questo metodo è molto lungo anche per strutture semplici.

METODO 2): EQUAZIONE AUSILIARIA

Scrivo le solite 3 equazioni e ne aggiungo un'altra:

prendo un nodo della struttura e scrivo un'equazione di momento fingendo di non avere metà della struttura

In questo caso scelgo il nodo C e considero solo la parte di struttura alla sua sinistra

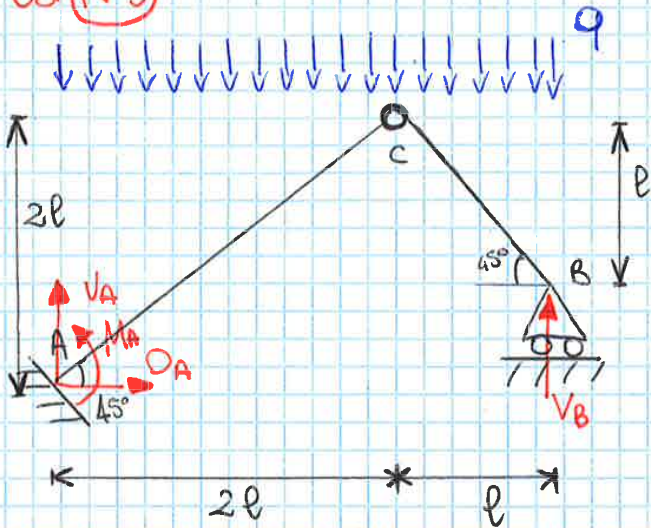
$$\uparrow) -V_A \cdot 4a + F \cdot 2a = 0 \Rightarrow V_A = \frac{F}{2} = 25 \text{ N}$$

Vado a sostituire nelle 3 eq. delle reazioni vincolari e trovo:

$$V_D = 17,5 \text{ N}$$

$$V_B = 57,5 \text{ N}$$

ES. (N°3)

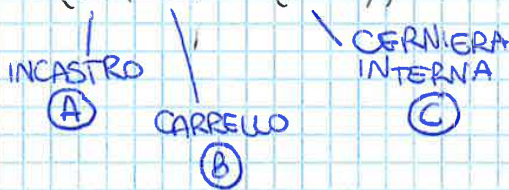


$l = 1 \text{ m}$

$q = 30 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

- isostaticità
- reazioni vincolari

$$h = V - q = (3 + 1 + 2(N - 1)) - 3 \cdot 2 = 0 \quad \checkmark \text{ isostatica}$$



Reazioni vincolari

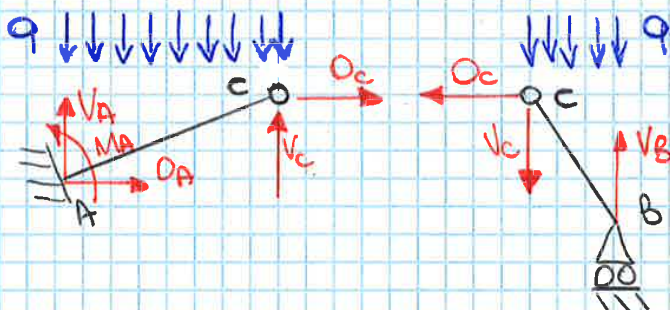
$\rightarrow^+) O_A = 0 \text{ N}$

$\uparrow^+) V_A - q \cdot 3l + V_B = 0 \quad V_A = 75 \text{ N}$

$\curvearrowright^+) M_A + V_B \cdot 3l - (q \cdot 3l) \cdot \frac{3}{2}l = 0 \quad M_A = 90 \text{ Nm}$

eq. ausiliaria a destra di C $\curvearrowright^+) V_B l - (q \cdot l) \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{q \cdot l}{2} = 15 \text{ N}$

METODO strutture semplici



considero CB

$\rightarrow^+) -O_c = 0 \text{ N}$

$\uparrow^+) -V_c + V_B - q \cdot l = 0$

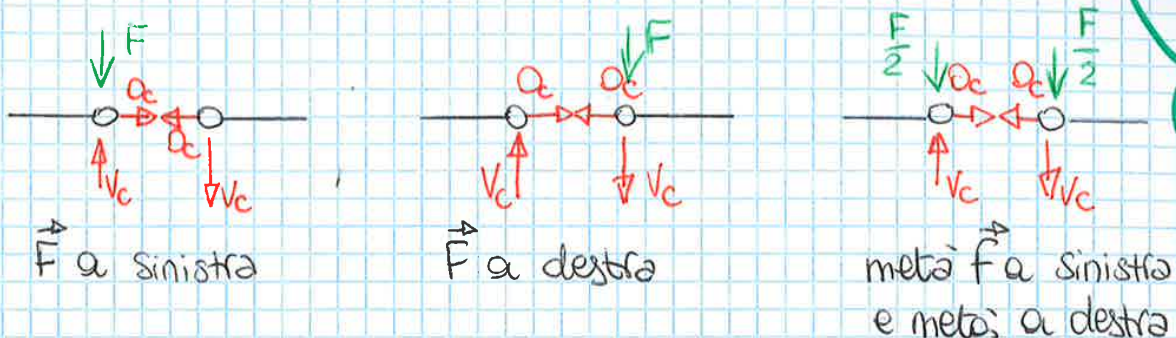
$\curvearrowright^+) V_B l - (q \cdot l) \cdot \frac{l}{2} = 0$

considero AC

$\rightarrow^+) O_A + O_c = 0$

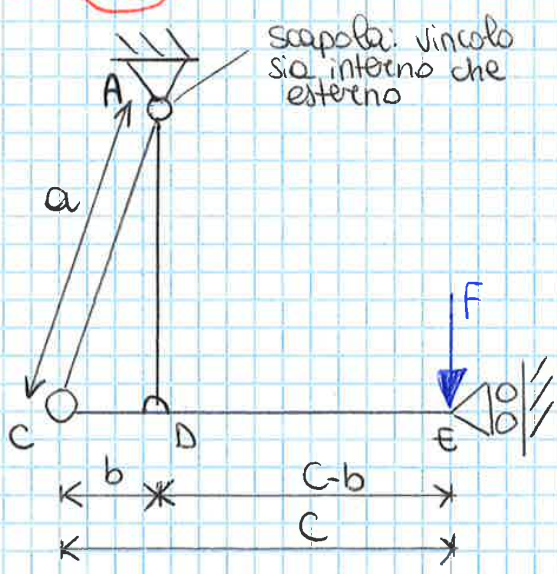
$\uparrow^+) V_c + V_A - q \cdot 2l = 0$

$\curvearrowright^+) M_A + V_c \cdot 2l - O_c \cdot 2l - (q \cdot 2l) \cdot l = 0$



è sbagliato mettere $F \rightarrow$ sia a destra che a sinistra

ES (N°5)



$$b = a \sin \alpha$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\alpha = 9,594^\circ$$

$$\bar{AD} = 29,6 \text{ cm}$$

- $a = 30 \text{ cm}$
- $b = 5 \text{ cm}$
- $C = 32 \text{ cm}$
- $F = 100 \text{ N}$

AC omero
 AD bicipite
 CE radio + ulna + carpo + metacarpo

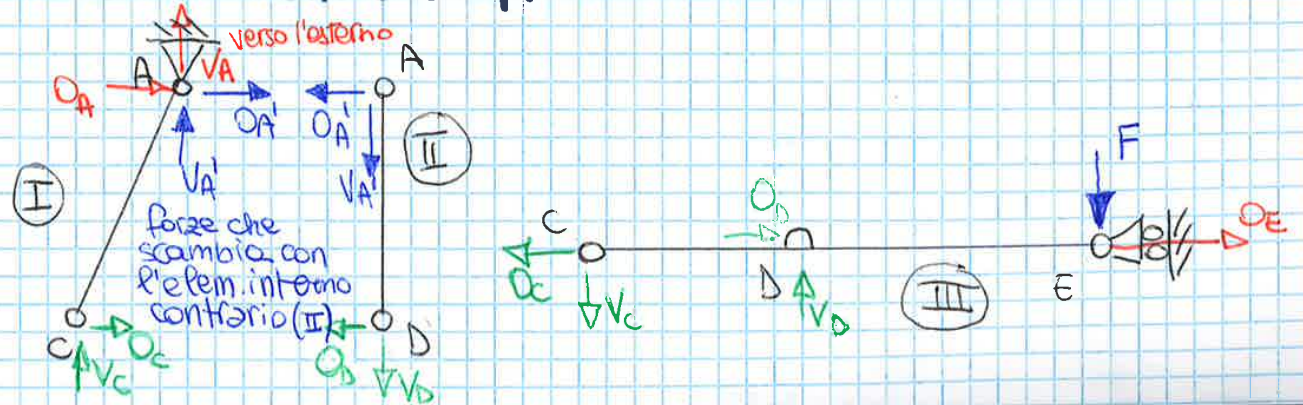
$$h = r - q = \left(\overset{\text{est.}}{2} + \overset{\text{est.}}{1} + 2 \overset{\text{int.}}{(N-1)} + 2 \overset{\text{int.}}{(N-1)} + 2 \overset{\text{int.}}{(N-1)} \right) - 3 \cdot 3 = 0 \text{ I.S.O.S.T.}$$

n° elementi
 Gdl per elemento

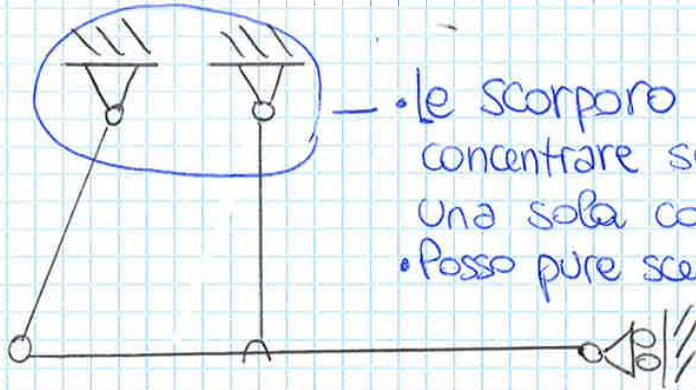
A: cerniera in alto: toglie 2 Gdl
 E: carrello: toglie 1 Gdl
 A: interno (lo vedo come cerniera se copro la parte esterna)
 C: interno
 D: interno

$N=2$ bracci attaccati alla cerniera in questione

METODO strutture semplici

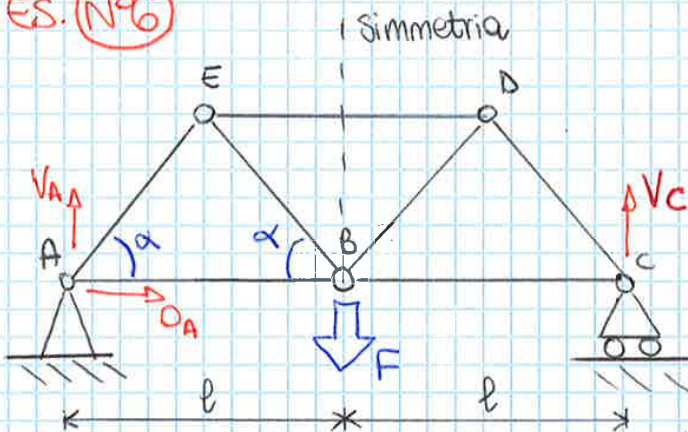


METODO eq. ausiliarie



• le scorporo in modo da potermi concentrare su C e avere a destra una sola cosa, a sinistra il resto.
 • Posso pure scegliere la cerniera D.

ES. (N°6)



$l = 5 \text{ m}$
 $\alpha = 45^\circ$
 $F = 2000 \text{ N}$

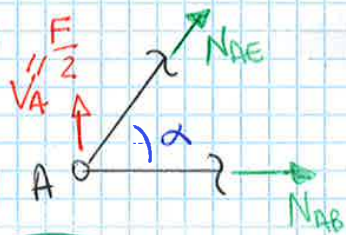
metodi possibili

RITER
 eq. di equil.

NODI
 grafico

metodo di RITER

Si parte da un NODO con qualcosa NOTA.



ISOSTATICITA': $N_c + N_{\text{vest}} = 2 N_n$

$7 + (3) = 2 \cdot 5$

Carrello, appoggio

$N_c \rightarrow n^\circ$ corpi

$N_{\text{vest}} \rightarrow$ GdI soppressi da vincoli che collegano la struttura con l'esterno

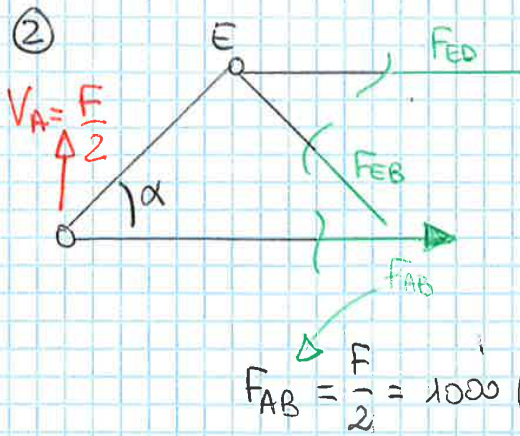
$N_n \rightarrow n^\circ$ nodi

Reazioni vincolari:

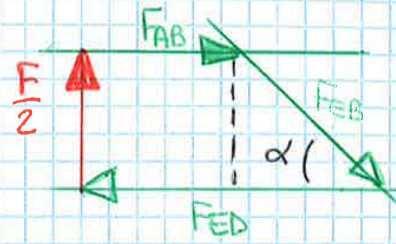
$\uparrow V_A + V_C - F = 0 \quad V_A = F - V_C = F - \frac{F}{2} = \frac{F}{2} = 1000 \text{ N}$

$\rightarrow D_A = 0$

$\curvearrowright V_C 2l - Fl = 0 \quad V_C = \frac{Fl}{2l} = 1000 \text{ N}$



$$F_{AB} = \frac{F}{2} = 1000 \text{ N}$$



$$F_{EB} = \frac{F/2}{\sin \alpha} = \frac{F/2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{F}{\sqrt{2}} = 1414,2 \text{ N}$$

$$F_{ED} = 2000 \text{ N}$$

Orario per costruzione

Poiché la struttura è simmetrica geometricamente e caricata simmetricamente conosco già il valore delle altre reazioni interne:

$$F_{BD} = F_{EB} = 1414,2 \text{ N}$$

$$F_{BC} = F_{AB} = 1000 \text{ N}$$

$$F_{CD} = F_{AE} = 1414,2 \text{ N}$$

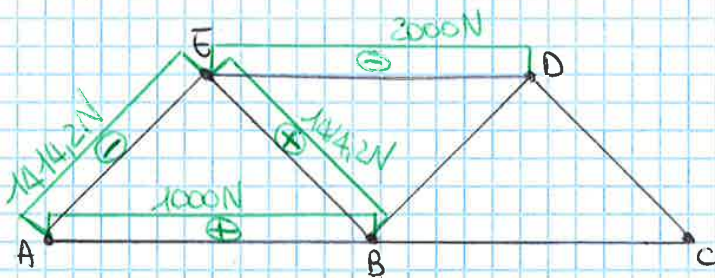
METODO DEI NODI
 ai calcoli metto sempre segno positivo, tanto il verso è dato dal poligono

Alle aste si assegna segno (+) se si tratta di TRAZIONE, segno (-) se si tratta di COMPRESSIONE (sistema di riferimento interno: non ha nulla a che fare con quello usato per calcolare le reazioni)

COMPRESSIONE → reazione entrante

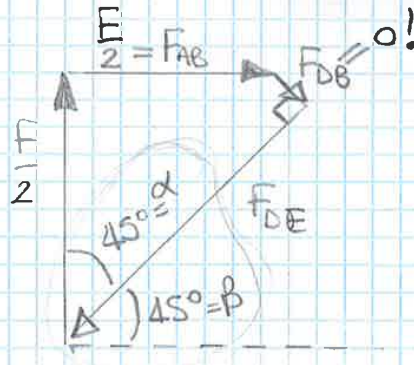
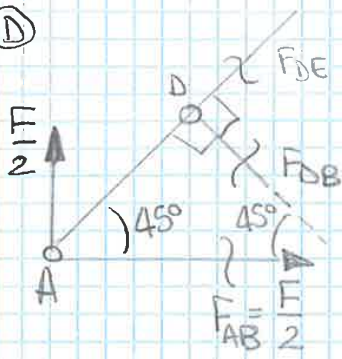
TRAZIONE → reazione uscente

Poiché lavoriamo con aste è possibile disegnare un diagramma di sforzo normale relativo alla struttura:



- AE } COMPRESSIONE
- ED } COMPRESSIONE
- DC } COMPRESSIONE
- AB } TRAZIONE
- EB } TRAZIONE
- BD } TRAZIONE
- BC } TRAZIONE

①



Perché α e β sono entrambi da 45°

$$F_{DB} = 0$$

$$F_{DE} = \frac{F}{\sqrt{2}} = 7071 \text{ N}$$

Per simmetria

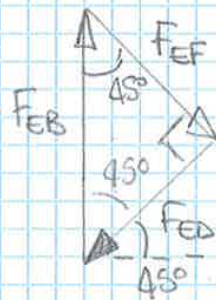
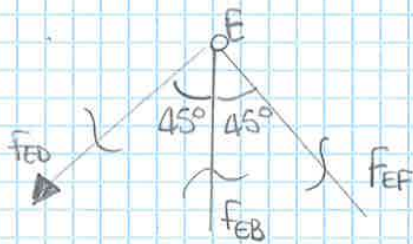
$$F_{AD} = F_{CE} = 7071 \text{ N} \quad \text{COMPRESSIONE}$$

$$F_{AB} = F_{CB} = 5000 \text{ N} \quad \text{TRAZIONE}$$

$$F_{DB} = F_{FB} = 0 \text{ N} \quad (\text{aste scariche})$$

$$F_{DE} = F_{FE} = 7071 \text{ N} \quad \text{COMPRESSIONE}$$

②



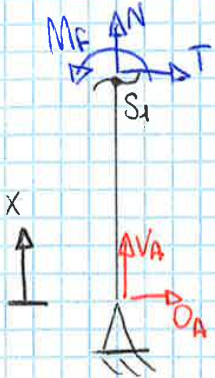
$$F_{EF} = F_{ED} = \frac{F}{\sqrt{2}} = 7071 \text{ N}$$

$$F_{EB} = \frac{F_{ED}}{\cos 45^\circ} = \frac{F}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} =$$

$$F_{EB} = F = 10000 \text{ N} \quad \text{TRAZIONE}$$

Uso dei sistemi di riferimento locali x, \bar{x} e \bar{x} per analizzare la struttura.

- Sezione ① $0 \leq x \leq l$



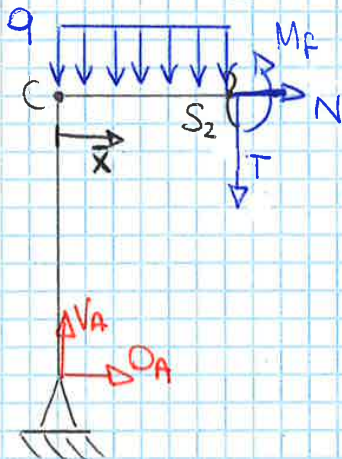
$$\uparrow) N(x) + V_A = 0 \Rightarrow N(x) = -V_A = -60 \text{ N}$$

$$\rightarrow) T(x) + O_A = 0 \Rightarrow T(x) = -O_A = -25 \text{ N}$$

$$S_1 \curvearrowright) M_F(x) + O_A x = 0 \quad \begin{cases} x=0 \rightarrow M_F(x) = 0 \text{ Nm} \\ x=l \rightarrow M_F(x) = -O_A l = -25 \text{ Nm} \end{cases}$$

Conviene scegliere sempre questo come polo di riduzione

- Sezione ② $0 \leq \bar{x} \leq l$



Non si studia solo il pezzo orizzontale dato che prima di S_1 c'è il vuoto ma c'è il pezzo appena studiato!

Anche se \bar{x} parte da C non bisogna dimenticare il pezzo precedente: \bar{x} è solo un sist. di rif LOCALI!

$$\uparrow) -T(\bar{x}) + V_A - q \cdot \bar{x} = 0 \quad \begin{cases} \bar{x}=0 \Rightarrow T(x) = V_A = 60 \text{ N} \\ \bar{x}=l \Rightarrow T(x) = V_A - ql = -10 \text{ N} \end{cases}$$

$$\rightarrow) N(\bar{x}) + O_A = 0 \Rightarrow N(x) = -O_A = -25 \text{ N}$$

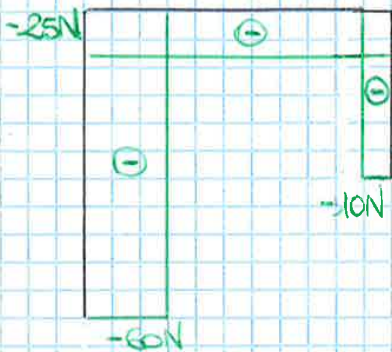
$$S_2 \curvearrowright) M_F(\bar{x}) - V_A \cdot \bar{x} + O_A l + (q \cdot \bar{x}) \cdot \frac{\bar{x}}{2} = 0$$

$$M_F(\bar{x}) = V_A \bar{x} - O_A l - (q \cdot \bar{x}) \frac{\bar{x}}{2} \quad \begin{cases} \bar{x}=0 \Rightarrow M_F(\bar{x}) = -25 \text{ Nm} \\ \bar{x}=l \Rightarrow M_F(\bar{x}) = 0 \text{ Nm} \end{cases}$$

M dipende da \bar{x} in maniera quadratica \Rightarrow PARABOLA (funzione del momento)

Diagrammi di sollecitazione

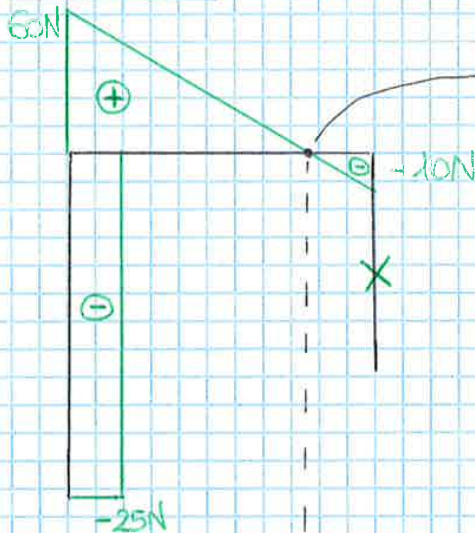
SFORZO NORMALE N



Per $N(x)$ e $T(x)$ non ci sono particolari convenzioni, ma consideriamoli come segue:

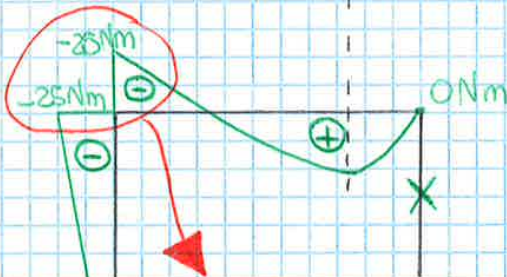
- POSITIVI al di SOPRA dell'asse
- NEGATIVI al di SOTTO dell'asse

TAGLIO T



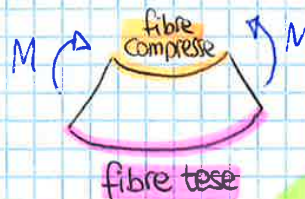
Qui vale 0N

MOMENTO M_f



CONVENZIONE:

MOMENTO POSITIVO dal LATO DELLE FIBRE TESE!

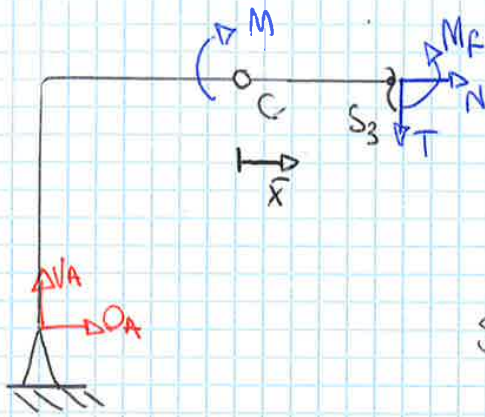


• Se non ho carico/momento esterno nell'angolo, il momento che mi lascio dietro deve essere = a quello che trovo davanti

• Dove T si annulla M_f ha un min o un max

• Dove ho una cerniera o un carrello devo avere momento nullo.

- Sezione ③ $l \leq x \leq 2l$

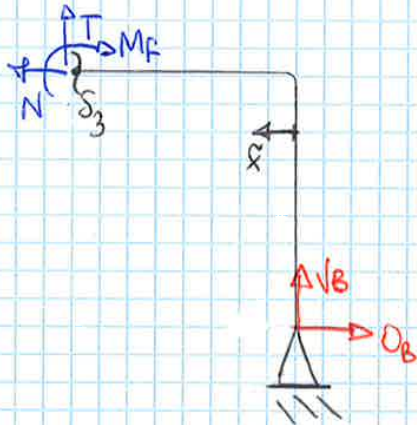


Avremmo potuto mettere un nuovo sistema di rif. in $C([0, l])$ ma avrei dovuto mettere le reazioni interne in C , cioè Q_C e V_C .

$\rightarrow N(x) = -Q_A = -250 \text{ N}$
 $\uparrow T(x) = V_A = -167 \text{ N}$

$S_3 \uparrow M_F(x) = M + V_A x - Q_A l = \begin{cases} x=l & M_F(x) \cong 0 \text{ Nm} \\ x=2l & M_F(x) \cong -500 \text{ Nm} \end{cases}$

- Sezione ③ $0 \leq \tilde{x} \leq l$ (PIÙ SEMPLICE, MENO CALCOLI)



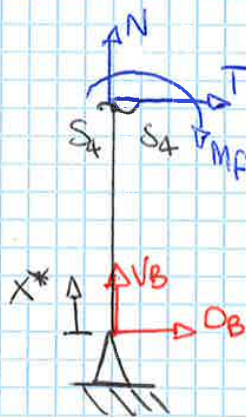
$\rightarrow -N(x) + Q_B = 0 \Rightarrow N(x) = Q_B = -250 \text{ N}$

$\uparrow T(x) = -V_B = -167 \text{ N}$

$S_3 \uparrow -M_F(x) + Q_B l + V_B \tilde{x} = 0$

$M_F(x) = Q_B l + V_B \tilde{x} = \begin{cases} \tilde{x}=0 \Rightarrow M_F(x) = -500 \text{ Nm} \\ \tilde{x}=l \Rightarrow M_F(x) \cong 0 \text{ Nm} \end{cases}$

- Sezione ④ $0 \leq x^* \leq l$



$\uparrow N(x) = -V_B = -167 \text{ N}$

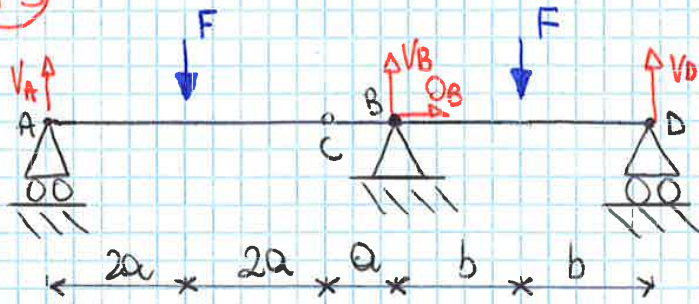
$\rightarrow T(x^*) = -Q_B = 250 \text{ N}$

$S_4 \uparrow -M_F(x^*) + Q_B x^* = 0$

$M_F(x^*) = Q_B x^* = \begin{cases} x^*=0 & M_F(x^*) = 0 \text{ Nm} \\ x^*=l & M_F(x^*) = -500 \text{ Nm} \end{cases}$

a casa:

N°3



$a = 1,2\text{ m}$

$b = 2\text{ m}$

$F = 50\text{ N}$

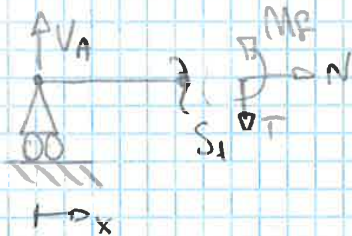
$V_A = \frac{F}{2} = 25\text{ N}$

$V_B = 57,5\text{ N}$

$V_C = 25\text{ N} = \frac{F}{2}$

$V_D = 17,5\text{ N}$

- Sezione ① $0 \leq x_1 \leq 2a$

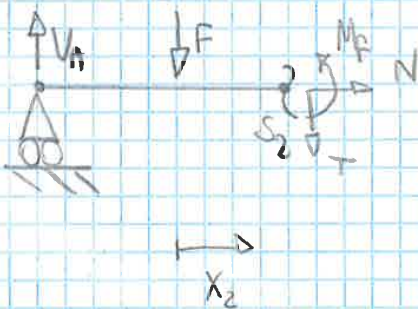


$\rightarrow N(x_1) = 0$
 $\uparrow T(x_1) = V_A = \frac{F}{2} = 25\text{ N}$

$S_1 \curvearrowright M_F(x_1) - V_A x_1 = 0$

$M_F(x_1) = V_A x_1 = \begin{cases} x_1=0 & = 0\text{ Nm} \\ x_1=2a & = 60\text{ Nm} \end{cases}$

- Sezione ② $0 \leq x_2 \leq 2a$



$\rightarrow N(x_2) = 0$
 $\uparrow -T(x_2) - F + V_A = 0$
 $T(x_2) = -F + V_A = F - \frac{F}{2} = \frac{F}{2} = 25\text{ N}$

$S_2 \curvearrowright M_F(x_2) + F \cdot x_2 - V_A (2a + x_2)$

Nuova sezione,
 nuovo sistema
 di riferimento
 locale!

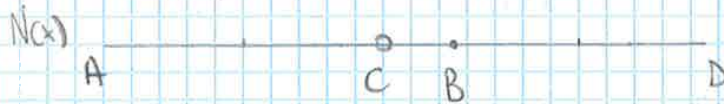
$M_F(x_2) = V_A (2a + x_2) - F x_2$

$(x_2=0) M_F(x_2) = 60\text{ Nm}$

$(x_2=2a) M_F(x_2) = 0\text{ Nm}$

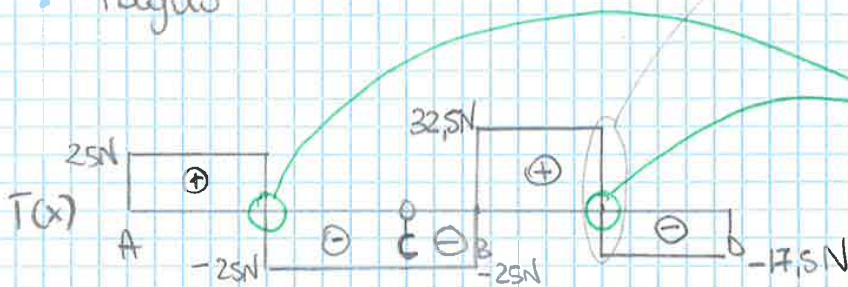
Diagrammi di sollecitazione

- Sforzo normale



salto
 $32,5 + 17,5 = 50$
da $F = 50N$

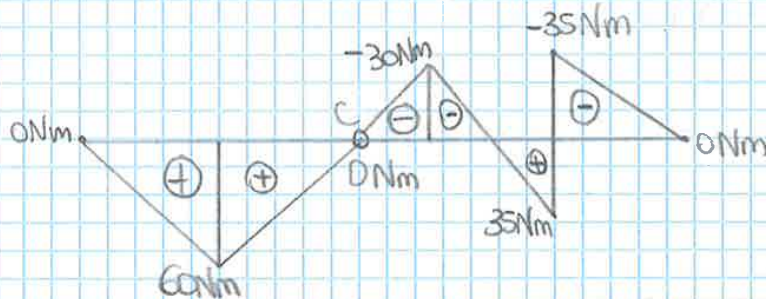
- Taglio

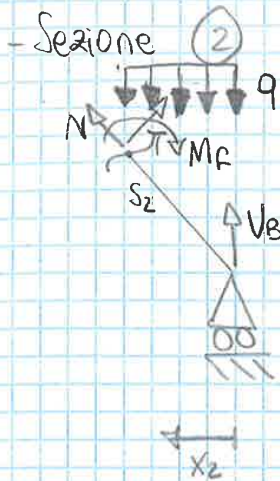


Nei punti in cui è applicata la forza ho un salto del valore della forza

CERNIERA
↓
punto a MOMENTO NULLO

- Momento flettente





$0 \leq x_2 \leq l$

$$\uparrow N(x_2) + V_B \frac{\sqrt{2}}{2} - q x_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\uparrow T(x_2) + V_B \frac{\sqrt{2}}{2} - q x_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$S_2^{\curvearrowright} - M_f + V_B x_2 - q x_2 \frac{x_2}{2} = 0$$

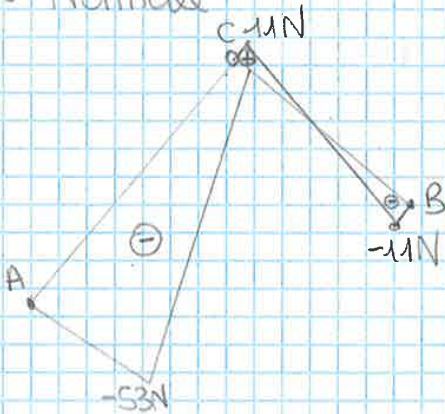
$$\uparrow N(x_2) = q x_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - V_B \frac{\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} -11 \text{ N} & \text{per } x_2 = 0 \\ 11 \text{ N} & \text{per } x_2 = l \end{cases}$$

$$\uparrow T(x_2) = q x_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - V_B \frac{\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} -11 \text{ N} & \text{per } x_2 = 0 \\ 11 \text{ N} & \text{per } x_2 = l \end{cases}$$

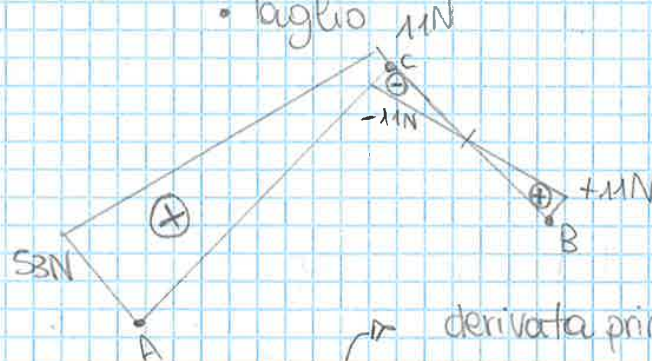
$$S_2^{\curvearrowright} M_f(x_2) = V_B x_2 - q \frac{x_2^2}{2} = \begin{cases} 0 \text{ Nm} \\ 0 \text{ Nm} \end{cases}$$

Caratteristiche di sollecitazione

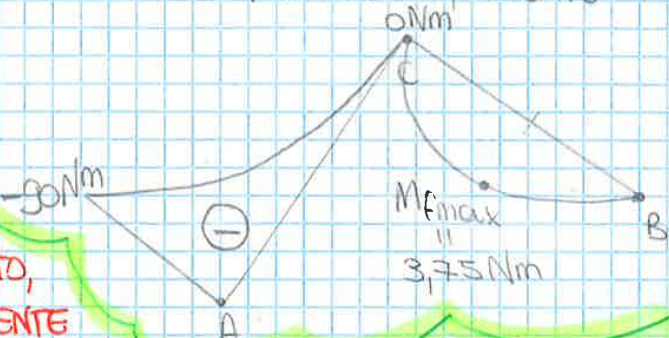
• Normale



• Taglio



• Momento flettente



derivata prima = 0

$$T(x_2) = 0$$

$$q x_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - V_B \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

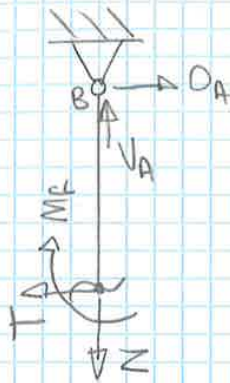
$$x_2 = \frac{V_B}{q} = \frac{1}{2}$$

$$M_f(x_2 = \frac{1}{2}) = 3,75 \text{ Nm}$$

Carico distribuito, MOMENTO FLETTENTE MASSIMO

- impongo la derivata prima di $M_f(x)$ (il taglio $T(x)$ ne è la derivata) = 0
- sostituisco il valore ottenuto nell'equazione di $M_f(x)$

- Sezione ②



$$0 \leq x_2 \leq \bar{AD} = 29,6 \text{ cm}$$

$$\uparrow -N(x_2) + V_B = 0 \quad N(x_2) = 640 \text{ N}$$

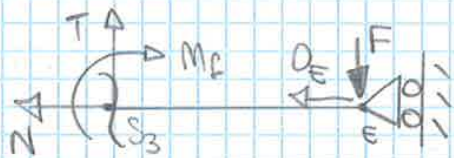
$$\rightarrow -T(x_2) + Q_B = 0 \quad T(x_2) = 0 \text{ N}$$

$$S_2 \curvearrowright -M_f(x_2) - D_B x_2 = 0$$

$$M_f(x_2) = -D_B x_2 = \begin{cases} 0 \text{ Nm} & \text{per } x_2 = 0 \\ 0 \text{ Nm} & \text{per } x_2 = \bar{AD} \end{cases}$$

- Sezione ③

$$0 \leq x_3 \leq (c-b)$$



$$\rightarrow -N(x_3) - Q_E = 0 \quad N(x_3) = 91,28 \text{ N}$$

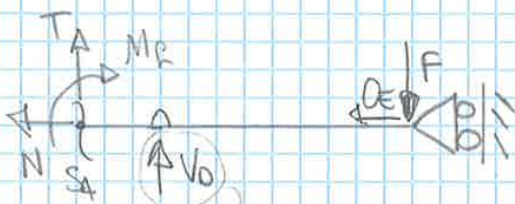
$$\uparrow T(x_3) - F = 0 \quad T(x_3) = 100 \text{ N}$$

$$S_3 \curvearrowright -M_f(x_3) - F x_3 = 0$$

$$M_f(x_3) = -F x_3 = \begin{cases} 0 \text{ Nm} & \text{per } x_3 = 0 \\ -27 \text{ Nm} & \text{per } x_3 = c-b \end{cases}$$

- Sezione ④

$$0 \leq x_4 \leq b$$



$$\rightarrow -N(x_4) - Q_E = 0 \quad N(x_4) = 91,2 \text{ N}$$

$$\uparrow T(x_4) + V_0 - F = 0 \quad T(x_4) = -540 \text{ N}$$

$$S_4 \curvearrowright -M_f(x_4) + V_0 \cdot x_4 - F(c-b+x_4) = 0$$

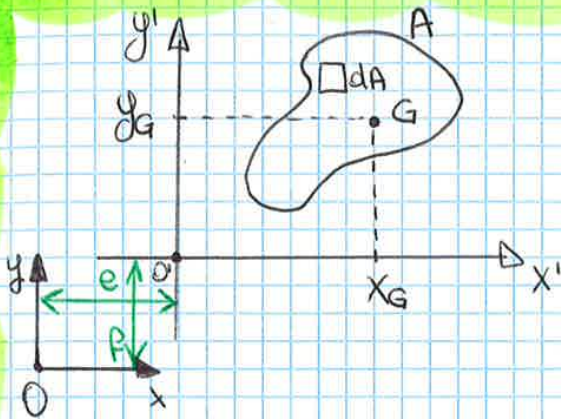
$$M_f(x_4) = +V_0 x_4 - F(c-b+x_4) = \begin{cases} -27 \text{ Nm} & \text{per } x_4 = 0 \\ 0 \text{ Nm} & \text{per } x_4 = b \end{cases}$$

su questo corpo è verso l'alto

4 aprile 2016

ESERCITAZIONE ④ "Geometria delle aree"

-CHRISTIAN FERRONE-



COORDINATE DEL BARICENTRO

$$x_G = \frac{S_y}{A} \quad y_G = \frac{S_x}{A}$$

A → Area totale del corpo

MOMENTO STATICO

intorno a x $S_x = \int_A y \, dA$

intorno a y $S_y = \int_A x \, dA$

MOMENTO DI INERZIA

$$J_x = \int_A y^2 \, dA$$

$$J_y = \int_A x^2 \, dA$$

Trasloco il sistema di riferimento in orizzontale di e e in verticale di f :

$$J_{x'} ?$$

$$J_{y'} ?$$

$$x = e + x'$$

$$y = f + y'$$

$$J_y = \int_A (x'+e)^2 \, dA = \int_A x'^2 \, dA + e^2 \int_A dA + 2e \int_A x' \, dA$$

$$J_y = J_{y'} + e^2 \cdot A + 2e S_{y'}$$

$$J_x = J_{x'} + f^2 \cdot A + 2f S_{x'}$$

	PIENA ①	VUOTA ②
BASE b_i	100 mm	90 mm
ALTEZZA h_i	50 mm	45 mm
AREA A_i	5000 mm ²	4050 mm ²
COORD. BARICENTRO X_{Bi}	0 mm	0 mm
y_{Bi}	25 mm	22,5 mm
$S_{x_{Bi}}$	125.000 mm ³	94.25 mm ³
$S_{y_{Bi}}$	0 mm ³	0 mm ³
$J_{x_{Bi}}$	$1,042 \cdot 10^6$ mm ⁴	$6,83 \cdot 10^5$ mm ⁴
$J_{y_{Bi}}$	$4,167 \cdot 10^6$ mm ⁴	$2,734 \cdot 10^6$ mm ⁴
$X_G - X_{Bi}$	0 - 0 mm	0 - 0 mm
$y_G - y_{Bi}$	$35,7 - 25 = 10,7$ mm	$35,7 - 22,5 = 13,2$ mm
J_{x_G}	$1,60 \cdot 10^6$ mm ⁴	$1,385 \cdot 10^6$ mm ⁴
J_{y_G}	$4,167 \cdot 10^6$ mm ⁴	$2,734 \cdot 10^6$ mm ⁴

Stanno sull'asse y del sistema di riferimento scelto
 metà altezza

Momento statico

$$S_{x_{B1}} = y_{B1} \cdot A_1 = 25 \text{ mm} \cdot 5000 \text{ mm}^2 = 125000 \text{ mm}^3$$

$$S_{y_{B1}} = x_{B1} \cdot A_1 = 0 \cdot 5000 = 0 \text{ mm}^3$$

$$S_{x_{B2}} = y_{B2} \cdot A_2 = 22,5 \cdot 4050 = 91125 \text{ mm}^3$$

$$S_{y_{B2}} = x_{B2} \cdot A_2 = 0 \cdot 4050 = 0 \text{ mm}^3$$

Per il MOMENTO STATICO TOTALE sommo con il segno:

$$S_{x_{TOT}} = S_{x_{B1}} - S_{x_{B2}} = 33875 \text{ mm}^3$$

$$S_{y_{TOT}} = S_{y_{B1}} - S_{y_{B2}} = 0 \text{ mm}^3$$

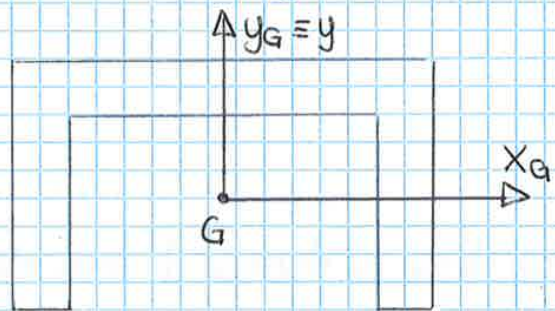
Coordinate baricentro di tutta la figura

$$x_G = \frac{S_{y_{TOT}}}{A_{TOT}} = 0 \text{ mm}$$

$$y_G = \frac{S_{x_{TOT}}}{A_{TOT}} = 35,7 \text{ mm}$$

$$A_{TOT} = A_1 - A_2 = 950 \text{ mm}^2$$

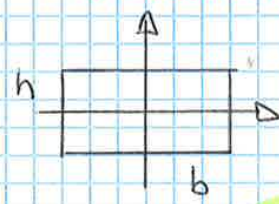
INERZIA CON x_G e y_G

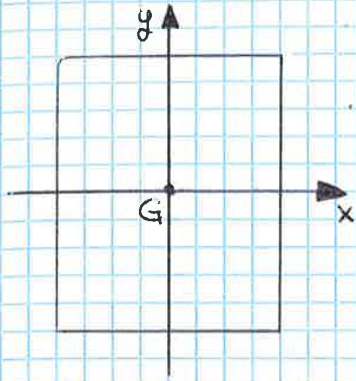


RETANGOLO: momento d'inerzia baricentrico

$$J_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_y = \frac{hb^3}{12}$$





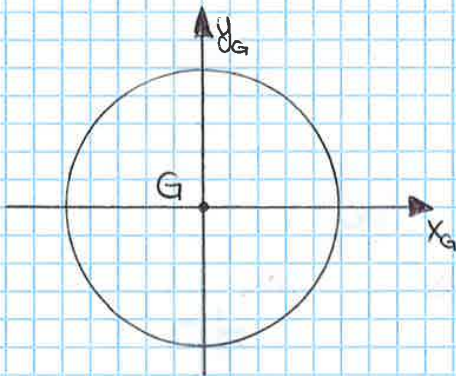
x e y sono assi principali d'inerzia (dato che sono assi di simmetria e hanno l'origine in G).

$$J_{x_G} = \frac{bh^3}{12} \quad \text{MAX} \quad \begin{matrix} > \\ \uparrow \uparrow \\ b < h \end{matrix} \quad J_{y_G} = \frac{hb^3}{12} \quad \text{MIN}$$

- J_{x_G} in questo caso è il **MASSIMO** dei massimi
 - J_{y_G} in questo caso è il **MINIMO** dei minimi
- } perché sono calcolati intorno a 2 assi princip. d'inerzia

Ne consegue che se uso qualsiasi altro sistema di riferimento baricentrico, ma non principale d'inerzia, i valori di J_{x_G} e J_{y_G} staranno in mezzo ai valori limite sopra indicati.

SEZIONE CIRCOLARE



$$J_{x_G} = J_{y_G} = \frac{\pi D^4}{64} \quad \text{mom. d'inerzia}$$

x_G e y_G sono assi di simmetria e dunque anche assi principali d'inerzia

Il momento di inerzia massimo e quello minimo coincidono.

Dato che max e min si sono ridotti ad un unico valore, ogni altro asse, essendo di simmetria è principale d'inerzia

TUTTI I SIST. DI RIFERIMENTO BARICENTRICI \Rightarrow PRINCIPALI D'INERZIA

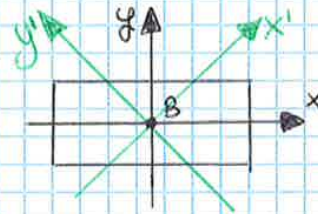
$J_{xy} = 0$ perché assi di inerzia // a quelli di simmetria

Successerebbe lo stesso nel caso



	$J_{x_B y_B}$	$J_{x_G y_G}$
PIENA ①	0 mm ⁴	0 mm ⁴
VUOTA ②	0 mm ⁴	0 mm ⁴

→ Sono pari a zero perché il sist. di riferimento baricentrico in questione sfrutta gli assi di simmetria.



x e y assi di simmetria

$$J_{x_B y_B} = 0$$

$$J_{x_G y_G} \neq 0$$

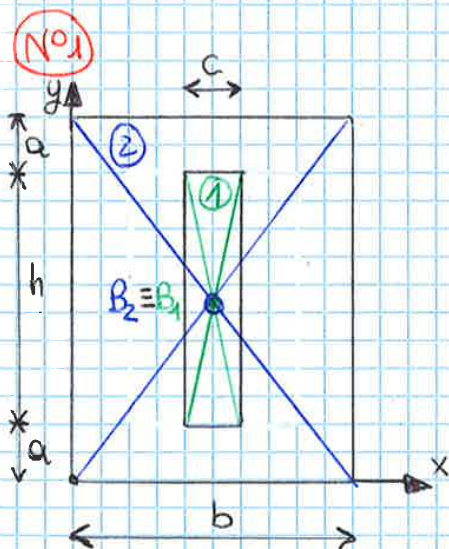
$$J_{x_G y_G} = J_{x_B y_B} + \underbrace{(x_B - x_G)}_0 \underbrace{(y_B - y_G)}_0 A = 0 \quad (\text{già lo sapevamo per quanto detto sopra})$$

Calcoliamo ora quello totale:

$$J_{x_G y_G}^{\text{TOT}} = J_{x_G y_G}^1 - J_{x_G y_G}^2 = 0 - 0 = 0 \text{ mm}^4$$

Il momento centrifugo può essere sia > 0 che < 0 a differenza di J_{x_G} , J_{y_G} che sono sempre > 0 .

a casa:



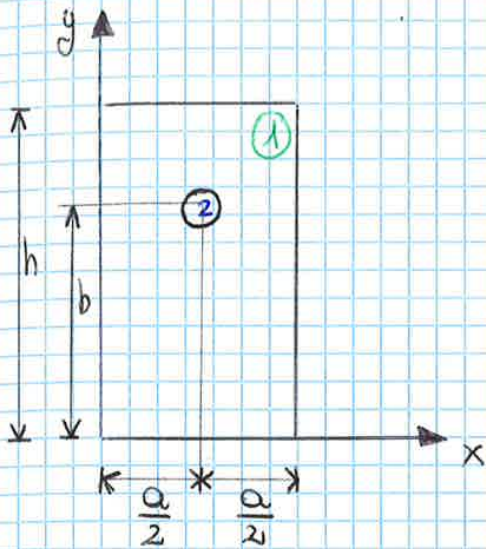
$$a = 100 \text{ mm} \quad c = 100 \text{ mm}$$

$$b = 400 \text{ mm} \quad h = 400 \text{ mm}$$

- momenti statici rispetto x,y e posizione di G
- momenti d'inerzia rispetto agli assi baricentrici x_G, y_G

- ① sezione vuota
- ② sezione piena

N°2



$a = 200 \text{ mm}$ $b = 250 \text{ mm}$
 $h = 400 \text{ mm}$ $d = 40 \text{ mm}$

- momenti statici rispetto a x e y e posizione del baricentro G
- momenti d'inerzia rispetto agli assi baricentrici x_G e y_G

① piena ② vuota

	base b_i	altezza h_i	Area A_i	x_{B_i}	y_{B_i}	$S_{x_{B_i}}$	$S_{y_{B_i}}$	$J_{x_{B_i}}$	$J_{y_{B_i}}$
PIENA ①	200 mm	400 mm	80000 mm ²	100 mm	200 mm	$1,6 \cdot 10^7$ mm ³	$8 \cdot 10^6$ mm ³		
VUOTA ②	DIAMETRO 40 mm		125664 mm ²	100 mm	250 mm	314160 mm ³	125664 mm ³		

$A_2 = \pi r^2 = 1256,64 \text{ mm}^2$

$S_{x_{B_1}} = y_{B_1} \cdot A_1 = 16 \cdot 10^7 \text{ mm}^3$

$S_{y_{B_1}} = x_{B_1} \cdot A_1 = 8 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$

$S_{x_{B_2}} = y_{B_2} \cdot A_2 = 314160 \text{ mm}^3$

$S_{y_{B_2}} = x_{B_2} \cdot A_2 = 125664 \text{ mm}^3$

$S_x^{TOT} = S_{x_{B_1}} - S_{x_{B_2}} = 15685840 \text{ mm}^3$

$x_G = \frac{S_y^{TOT}}{A_{TOT}} = 100 \text{ mm}$

$S_y^{TOT} = S_{y_{B_1}} - S_{y_{B_2}} = 7874336 \text{ mm}^3$

$y_G = \frac{S_x^{TOT}}{A_{TOT}} = 199,2 \text{ mm}$

$A_{TOT} = A_1 - A_2 = 78743,36 \text{ mm}^2$

$J_{x_{B_1}} = \frac{bh^3}{12} = 1,067 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$

$J_{y_{B_1}} = \frac{hb^3}{12} = 2,67 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$

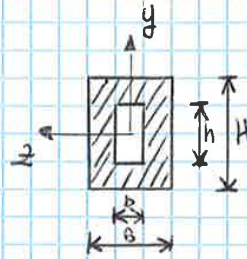
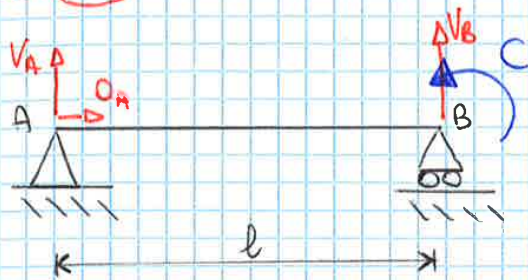
$J_{x_{B_2}} = J_{y_{B_2}} = \frac{\pi D^4}{64} = 125663,70 \text{ mm}^4$

11 aprile 2016

ESERCITAZIONE (5) "Linea elastica"

-CHRISTIAN FIRZONE-

ES. (N°1)



- B = 10 mm
- H = 20 mm
- b = 6 mm
- h = 16 mm
- l = 0,5 m
- E = 1 GPa
- C = 1 Nm

- eq. linea elastica
- rotaz delle sezioni nei punti A e B
- freccia massima della configurazione deformata

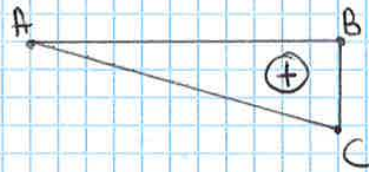
Reazioni vincolari

$$V_B = -C \cdot l = -\frac{C}{2}$$

$$V_A = -V_B = \frac{C}{2}$$

$$O_A = 0$$

Andamento del momento



$$M(x) = C \frac{x}{l}$$

$$y'' = \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_{zG}}$$

EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA

M(x) → momento flettente

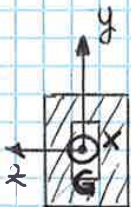
J → mom. d'inerzia della sezione

E → MODULO DI YOUNG

Epolietilene
1 GPa

Eacciaio
210 GPa

Ealluminio
70 GPa



Sistema di riferimento visto guardando di fronte la sezione (terna x, y, z seguente regola della mano dx)

$$J_y = \int_A z^2 dA$$

$$J_z = \int_A y^2 dA$$

Consideriamo J_z perché z è l'asse attorno al quale ruota la coppia C (inerzia a farsi deformare) e dunque il mom. d'inerzia che gli si opporrà dovrà essere attorno allo stesso asse.

$$\frac{C x^2}{2lEJ_2} - \frac{Cl}{6EJ_2} = 0$$

← derivata prima $y'(x) = 0$
per ricavare $x_{y_{max}}$

$$\frac{C}{EJ_2} \left(\frac{x^2}{2l} - \frac{l}{6} \right) = 0$$

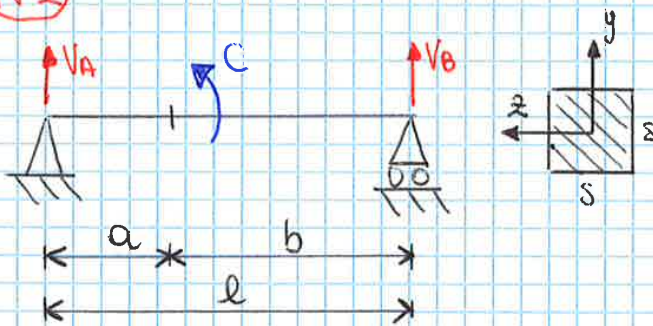
$$x^2 = \frac{l}{3} \cdot 2l = \frac{l^2}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{l}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_{y_{max}} = \frac{l}{\sqrt{3}} = 288,7 \text{ mm}$$

Ora sostituisco $x_{y_{max}}$ nell'eq della linea elastica:

$$y_{\max} \left(x_{y_{\max}} = \frac{l}{\sqrt{3}} \right) = \frac{C}{6lEJ_2} \cdot \frac{l^3}{3\sqrt{3}} - \frac{Cl}{6EJ_2} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{Cl^2}{6EJ_2} \left(\frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) =$$

$$= \frac{Cl^2}{6EJ_2} \left(\frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{9} \right) = -\frac{Cl^2}{6EJ_2} \frac{2\sqrt{3}}{9} = -3,47 \text{ mm}$$

(No2)



$s = 12 \text{ mm}$ $l = 2 \text{ m} = 2000 \text{ mm}$
 $E = 110 \text{ GPa} = 11 \cdot 10^4 \text{ MPa}$
 $C = 10 \text{ Nm} = 10^4 \text{ Nmm}$

- eq. linea elastica
- rotazione in A, B, D per $a = b$
- freccia max per $a = b$

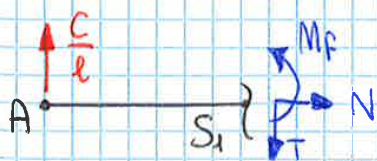
Reazioni vincolari

$$\uparrow V_A = -V_B \Rightarrow V_A = \frac{C}{l}$$

$$\rightarrow D_A = 0$$

$$\overset{A}{\curvearrowright} C + V_B l = 0 \Rightarrow V_B = -\frac{C}{l}$$

- Sezione ① $0 \leq x_1 \leq a$



$$N(x_1) = 0 \quad T(x_1) = \frac{C}{l}$$

$$M_f(x_1) = \frac{C}{l} \cdot x = \begin{cases} 0 & \text{per } x=0 \\ C \cdot \frac{a}{l} & \text{per } x=a \end{cases}$$

Tratto AD

$$y_I'' = \frac{Cx}{2lEJ_2}$$

$$y_I' = \frac{Cx^2}{2lEJ_2} + A_I$$

$$y_I = \frac{Cx^3}{6lEJ_2} + A_I x + B_I$$

Tratto DB

$$y_{II}'' = \frac{C(\frac{x}{l} - 1)}{EJ_2}$$

$$y_{II}' = \frac{Cx^2}{2lEJ_2} - \frac{Cx}{EJ_2} + A_{II}$$

$$y_{II} = \frac{Cx^3}{6lEJ_2} - \frac{Cx^2}{2EJ_2} + A_{II}x + B_{II}$$

Condizioni al contorno (che i vincoli impongono alla trave nei loro punti di applicazione):

$$y_I = 0 \text{ con } x=0$$

$$\Leftrightarrow B_I = 0$$

$$y_{II} = 0 \text{ con } x=l$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \frac{Cl^3}{6lEJ_2} - \frac{Cl^2}{2EJ_2} + A_{II}l + B_{II} = 0$$

freccia $\rightarrow y_I(x=a) = y_{II}(x=a)$
 rotazione $\rightarrow y_I'(x=a) = y_{II}'(x=a)$

$$\textcircled{2} \frac{Ca^3}{6lEJ_2} + A_I a + B_I = \frac{Ca^3}{6lEJ_2} - \frac{Ca^2}{2EJ_2} + A_{II} a + B_{II}$$

$$\textcircled{3} \frac{Ca^2}{2lEJ_2} + A_I = \frac{Ca^2}{2lEJ_2} - \frac{Ca}{EJ_2} + A_{II}$$

le metto a sistema:

$$\textcircled{1} \left\{ \frac{Cl^3}{6lEJ_2} - \frac{Cl^2}{2EJ_2} + A_{II}l + B_{II} = 0 \right.$$

$$\textcircled{2} \left\{ A_I a = -\frac{Ca^2}{2EJ_2} + A_{II} a + B_{II} \right.$$

$$\textcircled{3} \left\{ A_I = -\frac{Ca}{EJ_2} + A_{II} \Rightarrow A_{II} = A_I + \frac{Ca}{EJ_2} \right.$$

Rotazione in A, B, D:

$$y_I' = \frac{Cx^2}{2lEJ_2} + A_I = \frac{Cx^2}{2lEJ_2} - \frac{Cl}{24EJ_2}$$

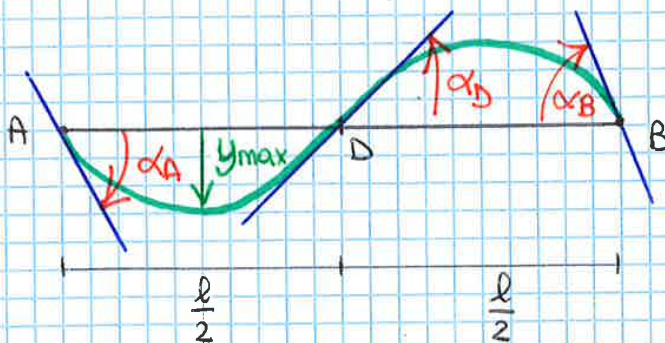
$$\alpha_A = y_I'(x=0) = -\frac{Cl}{24EJ_2} = -4,384 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = -0,25^\circ \text{ ORARIA}$$

$$\begin{aligned} \alpha_D = y_I'(x=\frac{l}{2}) &= \frac{Cl^2}{8EJ_2} - \frac{Cl}{24EJ_2} = \frac{Cl}{EJ_2} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24} \right) = \\ &= \frac{Cl}{EJ_2} \left(\frac{3-1}{24} \right) = \frac{1}{12} \frac{Cl}{EJ_2} = 8,768 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,5^\circ \text{ ANTIORARIA} \end{aligned}$$

$$y_{II}' = \frac{Cx^2}{2lEJ_2} - \frac{Cx}{EJ_2} + A_{II} = \frac{Cx^2}{2lEJ_2} - \frac{Cx}{EJ_2} + \frac{11}{24} \frac{Cl}{EJ_2}$$

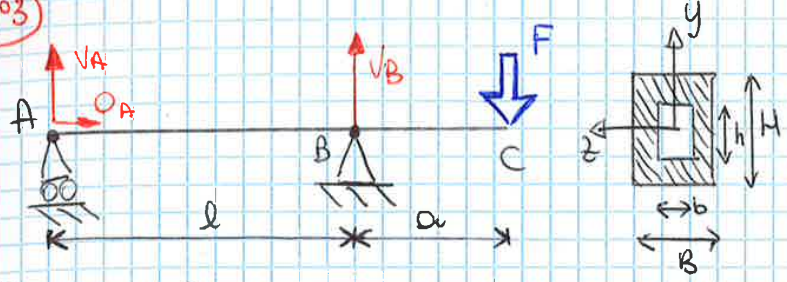
$$\begin{aligned} \alpha_B = y_{II}'(x=l) &= \frac{Cl^2}{2lEJ_2} - \frac{Cl}{EJ_2} + \frac{11}{24} \frac{Cl}{EJ_2} = \\ &= \frac{Cl}{EJ_2} \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{11}{24} \right) = \frac{Cl}{EJ_2} \left(\frac{12-24+11}{24} \right) = -\frac{Cl}{24EJ_2} = \\ &= -4,384 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = -0,25^\circ \text{ ORARIA} \end{aligned}$$

La ROTAZIONE IN A è = alla ROTAZIONE IN B perché essendo la coppia C posizionata a metà struttura, ho una struttura simmetrica con carichi asimmetrici.



MEMENTO!
Lavorare
con mm
e MPa!!

N°3



$E = 550 \text{ MPa}$
 $F = 80 \text{ N}$
 $B = 40 \text{ mm}$ $b = 34 \text{ mm}$
 $H = 50 \text{ mm}$ $h = 44 \text{ mm}$
 $l = 0.5 \text{ m}$ $a = 0.2 \text{ m}$
 $= 500 \text{ mm}$ $= 200 \text{ mm}$

Reaz. vincolari

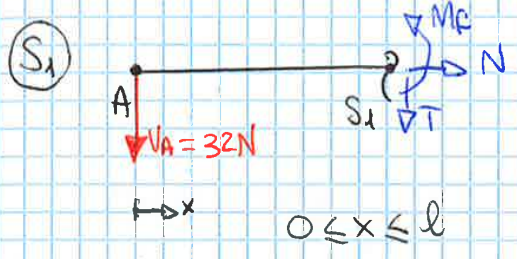
$$\uparrow V_A + V_B - F = 0 \Rightarrow V_A = F - V_B = -32 \text{ N}$$

$$\rightarrow O_A = 0$$

$$A) V_B l - F(l+a) = 0$$

$$V_B = \frac{F(l+a)}{l} = 112 \text{ N}$$

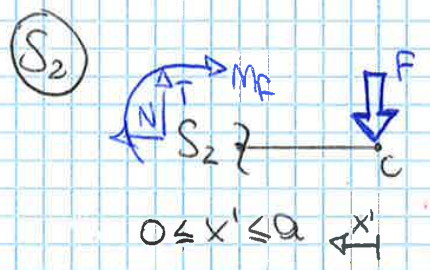
- $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C$
- freccia in C
- sovrapposizione degli effetti



$$\rightarrow N = 0$$

$$\uparrow T = -V_A \Rightarrow T = -32 \text{ N}$$

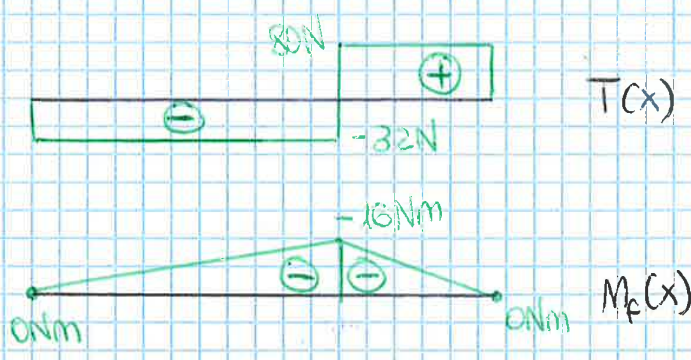
$$S1) M_f + V_A x = 0 \quad M_f = -V_A x = \begin{cases} 0 & x=0 \\ -V_A l & x=l \\ \text{"} & \text{"} \\ -16 \text{ Nm} & \end{cases}$$



$$\rightarrow N = 0$$

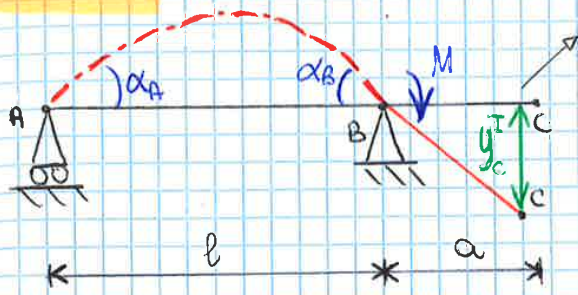
$$\uparrow T = F = 80 \text{ N}$$

$$S2) -M_f - Fx' = 0 \quad M_f = -Fx' = \begin{cases} 0 & x'=0 \\ -Fa & x'=a \\ \text{"} & \text{"} \\ -16 \text{ Nm} & \end{cases}$$



$$J_z = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = 175312 \text{ mm}^4$$

1° effetto



CONSIDERO RIGIDO IL 2° TRATTO

tratto scarico, mensola scarico che ruota rigidamente seguendo la deformata del 1° tratto

SOLO IL PRIMO SI DEFORMA

$$y_c^I = \alpha_B \cdot a = y'(x=l) \cdot a$$

è come se stessi usando $\text{tg } \alpha$ dato che per piccole dimensioni $\text{tg } \alpha \approx \alpha$

Da formulario:

$$y'(x) = \frac{C}{l EJ_2} \frac{x^2}{2} - \frac{Cl}{6 EJ_2} \quad \text{con } C = -M = -Fa$$

$$y'(x) = -\frac{Fa}{l EJ_2} \frac{x^2}{2} + \frac{Fal}{6 EJ_2}$$

Usare i mm!

Angolo in C

$$y'(x=l) = -\frac{M}{l EJ_2} \frac{l^2}{2} + \frac{Ml}{6 EJ_2} = -0,0277 \text{ rad} \approx -1,58^\circ = \alpha_c = \alpha_B$$

$$y_c^I = \alpha_B \cdot a = -0,0277 \cdot 200 \text{ mm} = -5,53 \text{ mm} \quad \text{freccia 1° effetto}$$

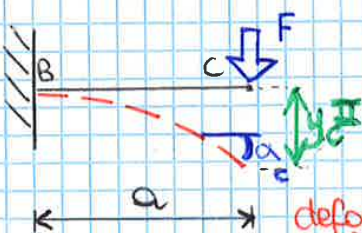
$$\alpha_A = y'(x=0) = +\frac{Fal}{6 EJ_2} = 0,0138 \text{ rad}$$

Contributo di trascinam. della mensola a causa della pressione del 1° tratto

2° effetto

Ora CONSIDERO RIGIDO IL 1° TRATTO; SOLO IL 2° SI DEFORMA

Contributo di elasticità della mensola (tratto BC)



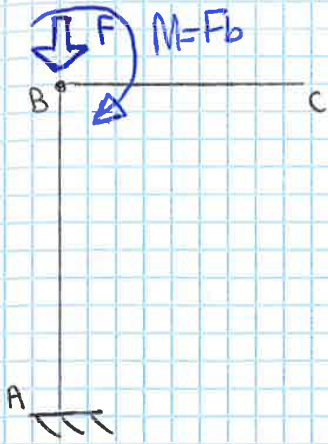
Da formulario

credo perché verso il basso

$$y(x=a) = -\frac{1}{3} \frac{Fa^3}{EJ_2} = y_c^II = -2,21 \text{ mm}$$

freccia 2° effetto

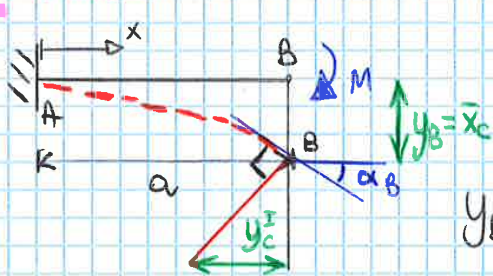
deformazione elastica



Spostiamo F in B e aggiungiamo il momento di trasporto. \Rightarrow Scarico la mensola BC

AB non si accorge del cambiamento di carico quindi posso partire da qui

Formulario



$$y(x) = -\frac{Mx^2}{2EJ_2}$$

$$y'(x) = -\frac{Mx}{EJ_2}$$

$$y_B = -\frac{Ma^2}{2EJ_2} = -\frac{Fba^2}{2EJ_2} = -15\text{mm} = -x_c \text{ del sistema di riferim. capovolto}$$

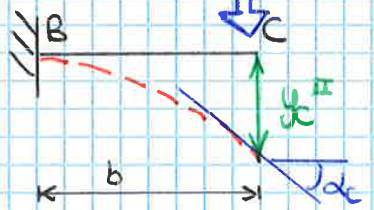
$$J_{2AB} = \frac{\pi D_1^4}{64} - \frac{\pi d_1^4}{64} = 42687,17558 \text{ mm}^4$$

15mm sui 3 m della trave \Rightarrow OK piccoli spostamenti!

$$y_c^I = y_B' \cdot b = \left(-\frac{Fba}{EJ_2} \right) \cdot b < 0 = -10 \text{ mm}$$

$\alpha_B = -0,01 \text{ rad}$

Formulario



$$y(x) = \frac{Fx^3}{3EJ_2} \Rightarrow y_c^{II} = -\frac{Fb^3}{3EJ_2} = -7,5 \text{ mm}$$

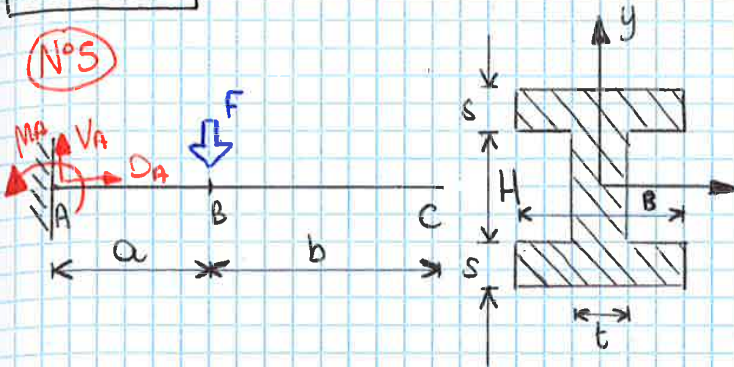
$$J_{2BC} = \frac{\pi D_2^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = 8346,01716 \text{ mm}^4$$

$$y_c^{TOT} = y_c^I + y_c^{II} = -10 + (-7,5) = -17,5 \text{ mm}$$

$$\alpha_c = -\frac{Fb^2}{2EJ_2} = -0,0112$$

a casa:

N°5



$d = 1500 \text{ mm}$ $b = 2500 \text{ mm}$
 $E = 21 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ $F = 500 \text{ N}$
 $B = 40 \text{ mm}$ $H = 70 \text{ mm}$
 $S = 6 \text{ mm}$ $t = 10 \text{ mm}$

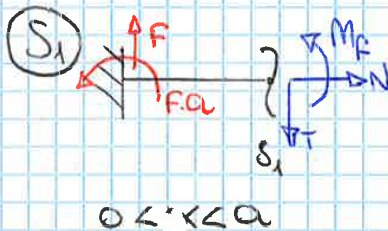
- eq. linea elastica
- rotazione sezione e freccia in C con sovrapposizione degli effetti

Reazioni vincolari:

$\uparrow V_A - F = 0 \Rightarrow V_A = F = 500 \text{ N}$

$\rightarrow Q_A = 0 \text{ N}$

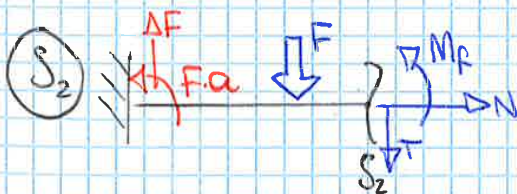
$\curvearrowright M_A - F \cdot a = 0 \Rightarrow M_A = F \cdot a = 750 \text{ Nm}$



$\rightarrow N = 0$
 $\uparrow T = F = 500 \text{ N}$

$\curvearrowright M_F + M_A - Fx = 0 \Rightarrow M_F = Fx - Fa = F(x - a)$

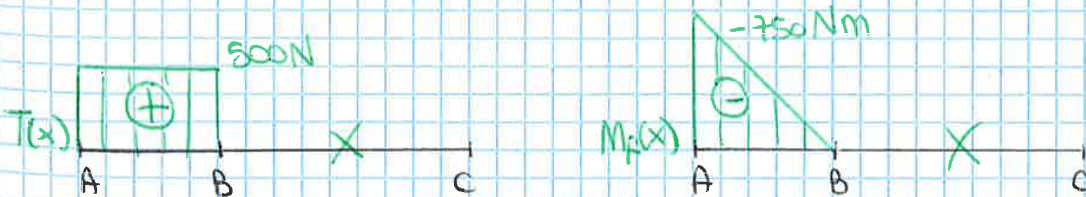
$M_F = \begin{cases} x=0 & -Fa = -750 \text{ Nm} \\ x=a & 0 \text{ Nm} \end{cases}$



$\rightarrow N = 0 \text{ N}$
 $\uparrow T + F - F = 0 \Rightarrow T = 0 \text{ N}$

$\curvearrowright M_F + M_A + Fx - F(a+x) = 0$

$M_F = -\cancel{Fa} - \cancel{Fx} + \cancel{Fa} + \cancel{Fx} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & 0 \text{ Nm} \\ x=b & 0 \text{ Nm} \end{cases}$



$$J_z = \left(\frac{B \cdot (H+2S)^3}{12} \right) - 2 \cdot \left(\frac{\left(\frac{B-t}{2} \right) \cdot H^3}{12} \right) = 980393,3333 \text{ mm}^4$$

$$y_{AB} = -\frac{Fa}{EJ_2} \frac{x^2}{2} + \frac{F}{2EJ_2} \frac{x^3}{3}$$

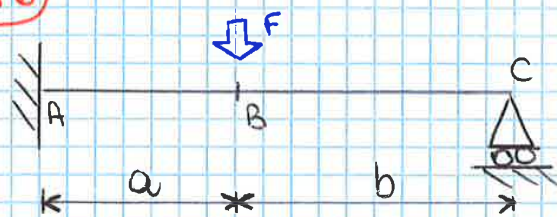
$$y_{BC} = -\frac{Fa^2}{2EJ_2} x + \frac{Fa^3}{6EJ_2}$$

freccia in C



$$y_{II} (x=a+b) = -\frac{Fa^2}{2EJ_2} (a+b) + \frac{Fa^3}{6EJ_2} = -9,562 \text{ mm} = y_c$$

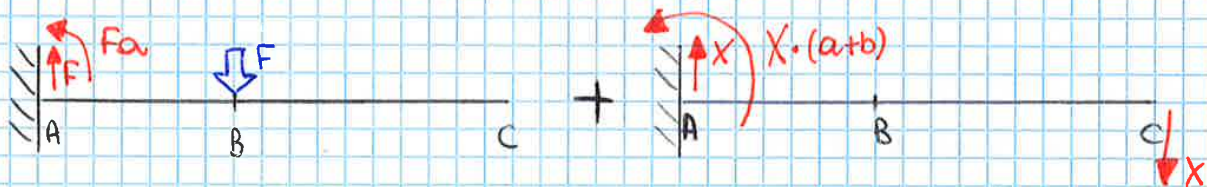
(N°6)



$a = 1500 \text{ mm}$ $b = 2500 \text{ mm}$
 $E = 21 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ $F = 500 \text{ N}$
 (stessa trave es. N°5)
 $J_2 = 980393,3333 \text{ mm}^4$

- verifica del grado di iperstaticità
- V_c ? con sovrappos. degli effetti

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI



$$y_{Ic} = -9,562 \text{ mm} \text{ (es. precedente)}$$

da formulario: $f = \frac{pe^3}{3eJ}$

$$y_{IIc} = \frac{X(a+b)^3}{3EJ_2}$$

$$y_{cTOT} = y_{Ic} + y_{IIc} = 0$$

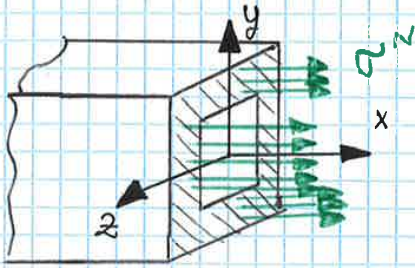
la freccia in C deve essere = 0 data la presenza del vincolo.

$$y_{Ic} + y_{IIc} = 0 \Rightarrow -9,562 + \frac{X(a+b)^3}{3EJ_2} = 0$$

$$\Rightarrow X = \frac{9,562 \cdot 3EJ_2}{(a+b)^3} = 92,28 \text{ N}$$

Ho una distribuzione di tensione σ^n .

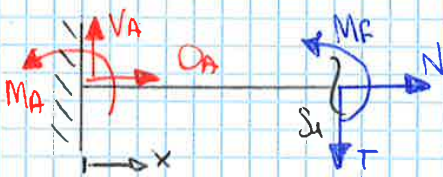
Il carico sulla generica sezione si "spalma" uniformemente e si trasforma in una **PRESSIONE**



$$p = \frac{N}{A} = \sigma^n \quad \left[\frac{N}{\text{mm}^2} \right]$$

lavoriamo con i mm

$$A = b \cdot h - b' \cdot h' = 60 \cdot 100 - 30 \cdot 50 = 4500 \text{ mm}^2$$



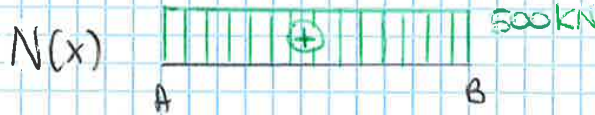
Reaz. vincel. \Rightarrow
$$\begin{cases} V_A = 0 \\ M_A = 0 \\ O_A = -F = -500 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\rightarrow N + O_A = 0 \Rightarrow N = -O_A = 500 \text{ kN}$$

$$\uparrow T - V_A = 0 \Rightarrow T = V_A = 0 \text{ N}$$

$$\curvearrowright M_f - V_A x + M_A = 0 \Rightarrow M_f = V_A x - M_A = 0 \text{ N}$$

$$0 < x < l$$



$$\sigma^n = \frac{N(x)}{A} = \frac{500000 \text{ N}}{4500 \text{ mm}^2} = 111,11 \text{ MPa}$$

TRAZIONE

tensione normale spalmata sulla sezione

per ogni mm^2 si scaricano 111 N

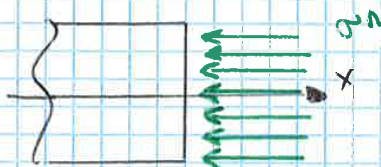
b) Cambia solo il verso delle tensioni (verso la sezione)

$$O_A = F = 600 \text{ kN} \Rightarrow N = -O_A = -600 \text{ kN}$$

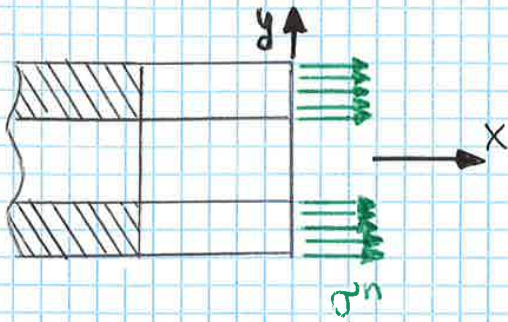
$$\sigma^n = \frac{N}{A} = \frac{-600000 \text{ N}}{4500 \text{ mm}^2} = -133,33 \text{ MPa}$$



COMPRESSIONE

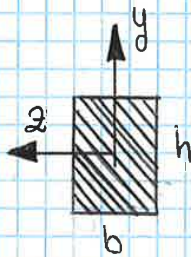


In genere si cerca la sezione più sollecitata, ma in questo caso sono sollecitate tutte allo stesso modo ($N = cost$)



$$S = \frac{\sigma_s}{\sigma_{max}} = \frac{200}{111,1} = 1,8 \quad (\text{coeff. di sicurezza})$$

N°2



$b = 60 \text{ mm}$ $h = 100 \text{ mm}$
 $F = 36 \text{ kN}$ $l = 500 \text{ mm}$

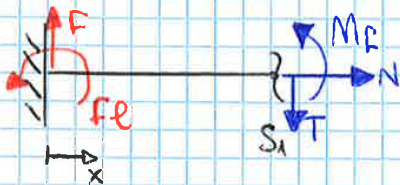
- tens. normali (σ) e tangenz. (τ) nella sez. più sollecitata
- σ_{max} ? $\sigma(y=25\text{mm})$?

Reaz. vincolari

$$\uparrow V_A - F = 0 \Rightarrow V_A = F$$

$$\rightarrow D_A = 0$$

$$\curvearrowright M_A - Fl = 0 \Rightarrow M_A = Fl$$



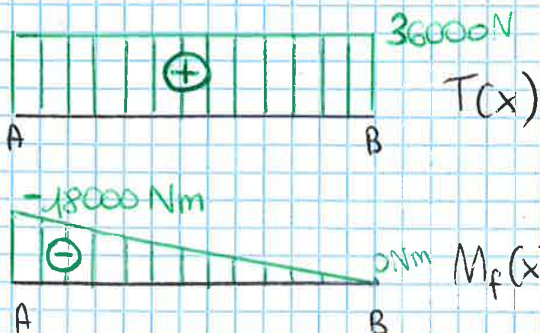
$$0 < x < l$$

$$\rightarrow N(x) = 0$$

$$\uparrow T(x) - F = 0 \Rightarrow T(x) = F = 36 \text{ kN}$$

$$\curvearrowright M_R + Fl - Fx = 0 \Rightarrow M_f = Fx - Fl = F(x-l)$$

$$M_f = \begin{cases} x=0 & -Fl = -18000 \text{ Nm} \\ x=l & 0 \text{ Nm} \end{cases}$$



Ci interessano dunque

σ_f e τ taglio
 sigma di FLESSIONE

$$\sigma^f = \sigma_x = - \frac{M_2}{J_2} \cdot y$$

FORMULA DI NAVIER

M_2 → momento flett. attorno a 2
 y → distanza rispetto all'asse neutro

$$\tau^{\text{taglio}} = \tau_{xy} = \frac{T \cdot S_2(y)}{J_2 \cdot c(y)}$$

FORMULA DI JOURAWSKI

T → taglio della sezione

CORDA: grandezza trasversale al taglio
 $c(y)$ → (larghezza sezione in corrispondenza del punto di calcolo)

σ^f pedice x perché le σ sono PARALLELE a x

τ^{taglio} pedice xy perché le τ hanno 2 pedici

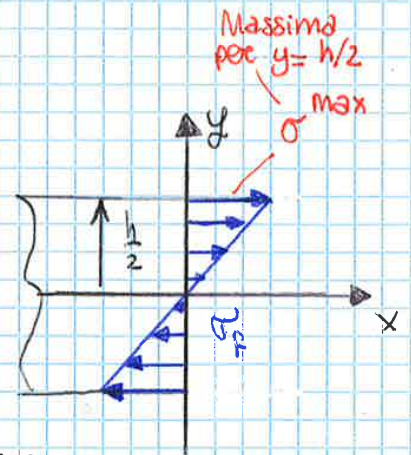
τ_{xy}
 giace su una sezione che ha x come normale
 è orientata lungo y

giace su una sezione con NORMALE il primo pedice

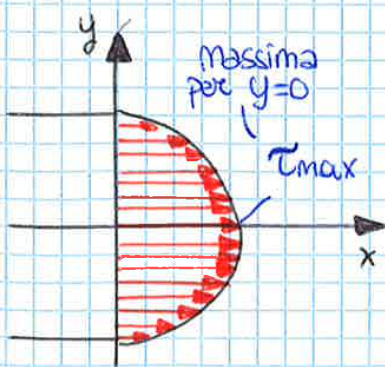
orientate lungo l'asse indicato dal secondo pedice

momento della SEZIONE PIU' SOLLECITATA ($x=0$)

$$\sigma_{f, \max} = \sigma_x \left(y = \frac{h}{2} \right) = - \frac{FL}{\left(\frac{bh^3}{12} \right)} \cdot \frac{h}{2} = 180 \text{ MPa}$$



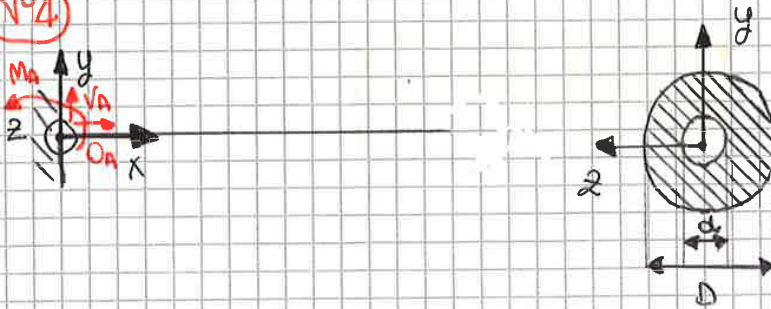
$y = \frac{h}{2}$ perché sto cercando la tensione massima



$$\tau_{\max}^{\text{taglio}} = \tau_{xy}(y=0) = \frac{F \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{F \cdot \frac{bh^2}{8}}{\frac{b^2 h^3}{12}} = \frac{3}{2} \frac{F}{bh} = 9 \text{ MPa}$$

trascurabile rispetto alla pressione generata dal momento flettente

N°4



$D = 60 \text{ mm}$ $d = 10 \text{ mm}$
 $l = 400 \text{ mm}$ $E = 2110^4 \text{ MPa}$
 $\nu = 0,3$

a) MOMENTO FLETTENTE $M_2 = 12 \text{ kNm}$ σ^f ? W_2 ? σ_{max} ?

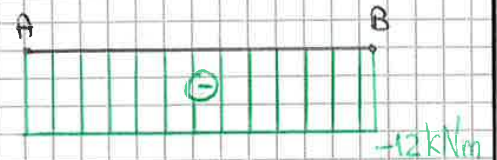


$\uparrow V_A = 0$
 $\rightarrow O_A = 0$
 $\curvearrowright M_A - M_2 = 0 \Rightarrow M_A = M_2 = 12 \text{ kNm}$

$\uparrow T = 0$

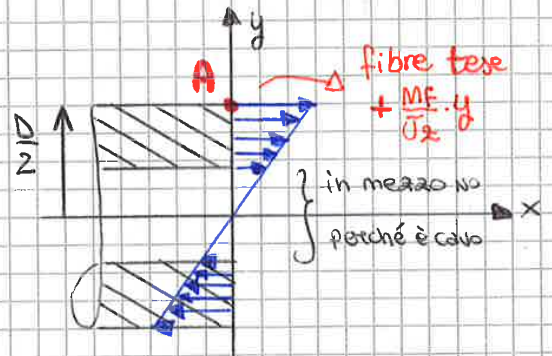
$\rightarrow N = 0$

$\curvearrowright M_f + M_A = 0 \Rightarrow M_f = -M_A = -12 \text{ kNm}$



$\sigma^f(y) = \sigma_x(y) = \frac{M_2}{J_2} \cdot y$

$\sigma_{\text{MAX}}^f \left(y = \frac{D}{2} \right) = \frac{12000000 \text{ Nmm}}{\pi \frac{D^4}{64} - \pi \frac{d^4}{64}} \cdot \frac{D}{2} = W_2$



$\sigma_{\text{MAX}}^f = \frac{M_2}{W_2} = 566,3 \text{ MPa}$

MODULO DI RESISTENZA A FLESSIONE

$W_2 = \frac{J_2}{y} = 2189,4 \text{ mm}^3$

se la sezione è piena $d=0$
 $\hookrightarrow W = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1 D^3$

b) MOMENTO TORCENTE $M_x = 7 \text{ kNm}$

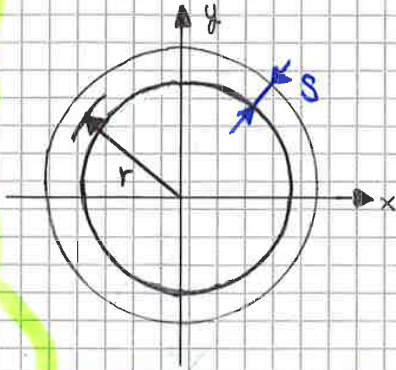


il momento TORCENTE è anche indicato con le doppie frecce. Il loro verso indica come è diretto il pollice nella regola della mano destra.

τ_{MAX} ? W_x ?
 $\tau_{\text{MAX}}^{\text{tors}}$? $D_x(x=l)$? in punta?

$d \neq 0$

SEZIONI SOTTILI ($s < \frac{1}{10} r$)



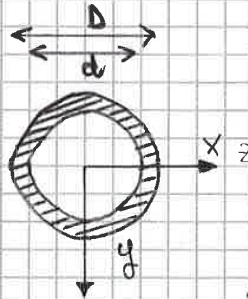
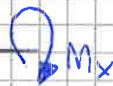
tipo rotolo di carta igienica

$$\vartheta_{\max} = \frac{M_t \cdot l}{4G \cdot s \cdot (\pi r^2)^2}$$

in questo caso uso quella delle sez. piene

$$\vartheta_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} \cdot \frac{l}{\frac{D}{2}} = \frac{165,2}{\frac{21 \cdot 10^4}{2(1+0,3)}} \cdot \frac{100}{\frac{60}{2}} = 0,02727 \text{ rad}$$

N°9



$D = 70 \text{ mm}$

$d = 50 \text{ mm}$

$M_x = 5000 \text{ Nm}$

$\tau_{\max}^{\text{tor}} = ?$

$\alpha^{\text{tor}} (d = 55 \text{ mm}) ?$

$\tau_{\max} \text{ (sezione aperta) ?}$

Reaz. vincolari:

$V_A = 0$

$H_A = 0$

$M_A = M_x = 5000 \text{ Nm}$

$N(x) = 0 \quad T(x) = 0$

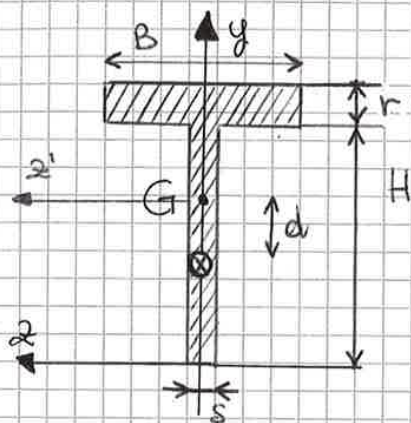
$M_p = -M_A = -5000 \text{ Nm}$

$$\tau_{\max}^{\text{tor}} \left(r = \frac{D}{2} \right) = \frac{M_x}{\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)} \cdot \frac{D}{2} = 100,37 \text{ MPa} \approx 101 \text{ MPa}$$

$$\tau^{\text{tor}} \left(r = \frac{55 \text{ mm}}{2} \right) = \frac{M_x}{\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)} \cdot \frac{55}{2} = 78,86 \text{ MPa} \approx 79 \text{ MPa}$$

N°7

Trave incastrata di sezione



$B = 50 \text{ mm}$ $H = 70 \text{ mm}$

$s = r = 10 \text{ mm}$

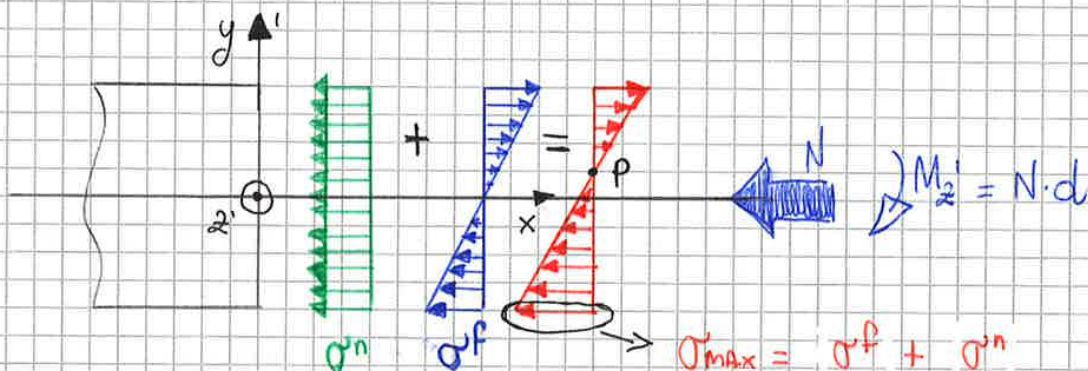
$N = 15 \text{ kN}$ (COMPRESSIONE)

$d = 30 \text{ mm}$

- distribuzione delle tensioni
- posizione asse neutro in caso di pressoflessione

ASSE NEUTRO → luogo dei punti in cui $\sigma_x = 0$

N non è applicato nel baricentro, perciò lo sposto lì, aggiungendo però il momento di trasporto.



(hanno il verso di N -compressione-)

$\sigma_{max} = \sigma_f + \sigma_n$
 la σ_{max} è questa perché in modulo è più grande di quella che sta su.

$$\sigma_x(y') = \underbrace{\frac{N}{A}}_{\sigma_n} - \underbrace{\frac{M_z}{J_z}}_{\sigma_f} \cdot y'$$

$$\sigma_x(y' = -y_G)$$

Per trovare l'asse neutro P : $\sigma_x(y_p) = 0 = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{J_z} \cdot y_p$

$$\sigma^f = - \frac{M_2}{J_2} \cdot y =$$

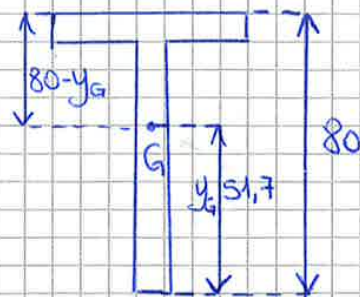
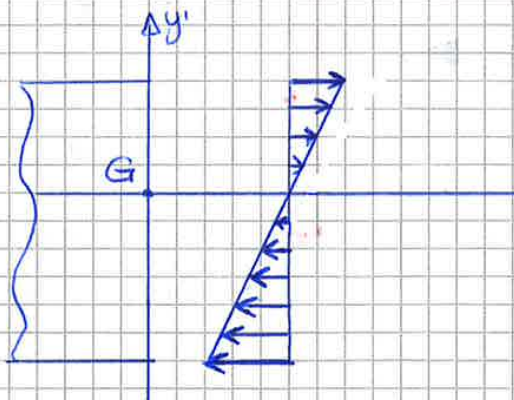
asse neutro:

$$\frac{N}{A} - \frac{M_2}{J_2} \cdot y_p = 0 \Rightarrow y_p = - \frac{N}{A} \cdot \left(- \frac{J_2}{M_2} \right) = 21,02 \text{ mm}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x (y' = -y_G) &= \sigma^f + \sigma^n = - \frac{M_2}{J_2} \cdot y' + \frac{N}{A} = \\ &= - \frac{-450 \cdot 000}{756668} \cdot (-51,7) + (-12,5) = -43,2 \text{ MPa} = \sigma_{\min} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x (y' = 80 - y_G) &= \sigma^f + \sigma^n = - \frac{-450 \cdot 000}{756668} \cdot (28,3) + (-12,5) = \\ &= 4,33 \text{ MPa} = \sigma_{\max} \end{aligned} \right\}$$

utilizzo come valori di y' (della formula per ricavare σ^f) quelli relativi alla σ^f



$$\textcircled{1} S_2^{(1)} = (B \cdot \sum_1) \left(y_A - \frac{\sum_1}{2} \right)$$

$$\textcircled{2} S_2^{(2)} = S_2^{(1)} (\sum_1 = r) + (s \cdot \sum_2) \left(y_B - \frac{\sum_2}{2} \right)$$

Vedi libro pg. 151

a casa:

distanza del baricentro dell'ala rispetto a G

$$S_2^{\text{soletta}} = A_{\text{soletta}} \cdot y_{B_{\text{soletta}}} = (50 \cdot 10) \cdot \left(80 - 51,7 - \frac{r}{2} \right) = 50 \cdot 10 \cdot 23,3 = 11650 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{\text{max } zy}^{\text{soletta}} = \frac{T \cdot S_2^{\text{soletta}}}{c(y) \cdot J_2} = \frac{5000 \cdot 11650}{50 \cdot 756668} = 1,54 \text{ MPa}$$

TENSIONE TANGENZIALE MASSIMA NELL'ALA

$$\tau_{zy}^{\text{punto d'inizio dell'anima}} = \frac{5000 \cdot 11650}{10 \cdot 756668} = 7,698 \text{ MPa}$$

TENSIONE NEL PUNTO D'INIZIO DELL'ANIMA VERTICALE

$$S(y_G) = S_2^{\text{soletta}} + A_{\text{anima (fino a G)}} \cdot \frac{(H - y_G)}{2} = 11650 + (10 \cdot 18,3) \cdot \frac{18,3}{2} = 13324,45 \text{ mm}^3$$

h fino al baricentro

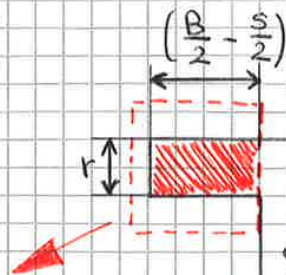
$$\tau_{\text{max } zy}^{\text{baricentro}} = \frac{5000 \cdot 13324,45}{10 \cdot 756668} = 8,8 \text{ MPa}$$

Tratto verticale VALORE MAX DELLA TENSIONE TANGENZIALE NEL BARICENTRO

$$\tau_{zy}^{\text{max}} = 8,8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{2x}^{\text{max}} = \frac{T \cdot S_2(y')}{J_2 \cdot c(y)} = \frac{5000 \cdot \left[(25-10) \cdot 10 \cdot \left(70+10 - 51,7 - \frac{10}{2} \right) \right]}{756668 \cdot 10} = 3,08 \text{ MPa}$$

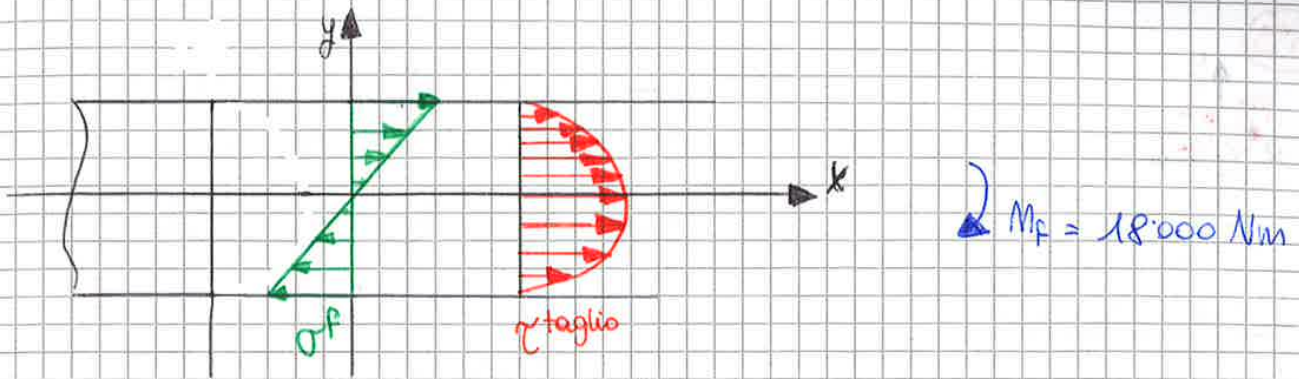
$$S_2^{\text{ala}} = \left(\frac{B}{2} - \frac{s}{2} \right) \cdot r \cdot \left[(H+r) - y_G - \frac{r}{2} \right]$$



distanza del baricentro dell'ala rispetto al baricentro totale G

Si può studiare SOLO l'andamento delle τ_{2x} nelle ali della soletta

$$(H+r) - y_G - \frac{r}{2}$$



da Nm o Nmm

$$\sigma^f = \sigma_x = \frac{M_z}{J_z} \cdot y = \frac{18000 \cdot 10^3}{1800000} \cdot \frac{60}{2} = 300 \text{ MPa}$$

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{100 \cdot 60^3}{12} = 1800000 \text{ mm}^4$$

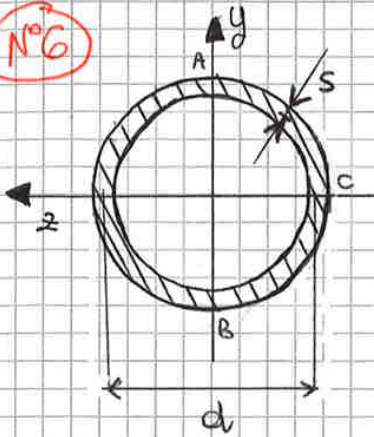
$$\tau^{\text{taglio}} = \tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z(y)}{J_z \cdot c(y)}$$

$$S_z = \int_A y dA = \int_{-h/2}^{h/2} y \cdot b dy = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\tau_{\text{MAX}}^{\text{taglio}} (y=0) = \frac{F \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - 0 \right)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{3}{2} \frac{F}{bh} = 9 \text{ MPa}$$

$$\sigma^f (y=25 \text{ mm}) = \frac{18000 \cdot 10^3}{1800000} \cdot 25 = 250 \text{ MPa}$$

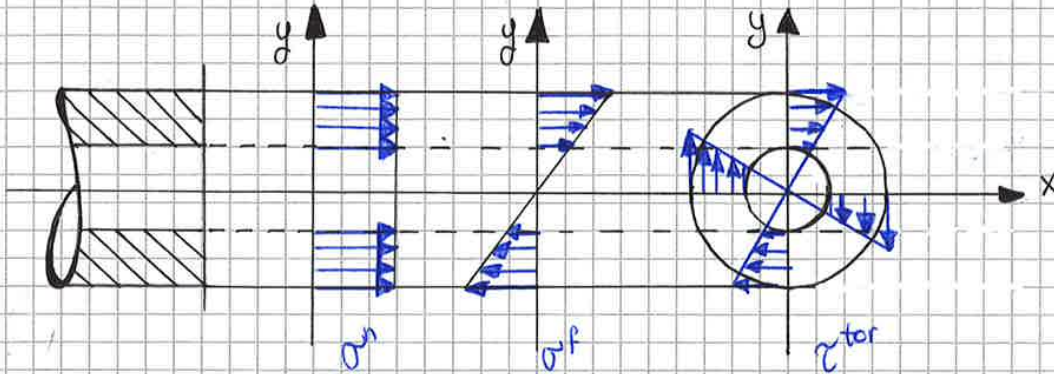
N°6



diametro medio $d = 40 \text{ mm}$ spessore = $s \cdot 2$
 $s = 2 \text{ mm}$
 $E = 210000 \text{ MPa}$ $\nu = 0,3$

$N = 10000 \text{ N}$
 $M_z = 200 \text{ Nm}$
 $M_x = 130 \text{ Nm}$

Parete sottile



$V_A = 0$ $D_A = -N = -10'000 \text{ N}$
 $M_A = M_x + M_z = 330 \text{ Nm}$

$$J_z = \frac{\pi (d+s)^4}{64} - \frac{\pi (d-s)^4}{64} = 50391,15 \text{ mm}^4$$

$$A = \pi \left(\frac{d+s}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{d-s}{2}\right)^2 = 251,33 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_n = \frac{N}{A} = \frac{10000}{251,33} = 39,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{f_{MAX}} = -\frac{-M_z}{J_z} \cdot y = -\frac{-200}{50391,15} \cdot 21 = 83,3 \text{ MPa}$$

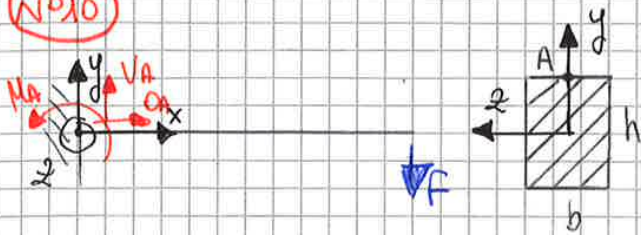
$$\tau_{\text{max}}^{\text{tor}} = \frac{M_t}{2 \cdot \Omega \cdot s}$$

Tensione Media
 PARETE SOTTILE

$\Omega = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$ area racchiusa dalla linea media

$$\tau_{\text{MAX}}^{\text{tor}} = \frac{130000}{2 \cdot \pi \left(\frac{40}{2}\right)^2 \cdot 2} = 25,9 \text{ MPa}$$

Nº10



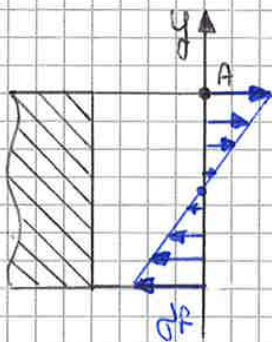
$b = 60 \text{ mm}$ $h = 100 \text{ mm}$
 $\sigma_s = 200 \text{ MPa}$ $l = 500 \text{ mm}$

- $y_{\text{max}} ?$
- $F_{\text{max}} ?$

Reaz. vincolari

$\uparrow V_A = F$
 $\rightarrow O_A = 0$
 $\curvearrowright M_A - Fl = 0 \quad M_A = Fl$

$N(x) = 0$ $T(x) = V_A = F$
 $M(x) = F(x-l) \quad \begin{matrix} x=0 & = -Fl \\ x=l & = 0 \end{matrix}$



$$\sigma_{\text{max}}^f = - \frac{M_z}{J_z} \cdot y = - \frac{-Fl}{\frac{bh^3}{12}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{6Fl}{bh^2}$$

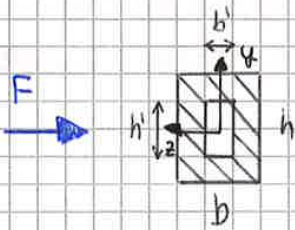
Sez. maggiormente sollecitata (per $x=0$)
 e nel punto A.

$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{amm}} = \frac{\sigma_s}{s} \quad \sigma_{\text{max}} \equiv \sigma_s$

$\sigma_s = \frac{6Fl}{bh^2} \Rightarrow F = \frac{\sigma_s bh^2}{6l} = 60.000 \text{ N}$

$y_{\text{max}} = \frac{Fl^3}{3EJ_z} = \frac{60000 \cdot 500^3}{3(210 \cdot 10^3 \text{ MPa}) \cdot \frac{60 \cdot 100^3}{12}} = 2,38 \text{ mm}$

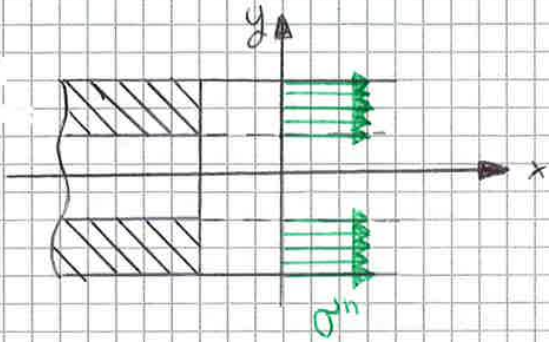
NO 12



$b = 60 \text{ mm}$ $h = 100 \text{ mm}$
 $b' = 30 \text{ mm}$ $h' = 50 \text{ mm}$
 $l = 2 \text{ m} = 2000 \text{ mm}$
 $E = 210 \text{ GPa} = 210000 \text{ MPa}$
 $\sigma_s = 200 \text{ MPa}$

Reaz. vincolari

$\uparrow V_A = 0$ $T(x) = 0 \text{ N}$
 $\rightarrow O_A = -F$ $N(x) = F$
 $\curvearrowright M_A = 0$ $M_f(x) = 0 \text{ Nm}$



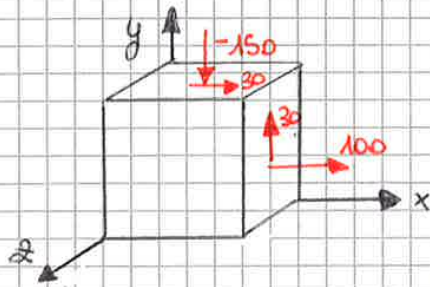
$$\sigma^n = \frac{F}{A} = \frac{F}{(bh) - (b'h')}$$

$\sigma^n \equiv \sigma_s$ -> da imporre per trovare il carico massimo di inizio SNERVAMENTO

$$\sigma_s = \frac{F}{(bh) - (b'h')} \Rightarrow F = \sigma_s [(bh) - (b'h')] = 900000 \text{ N}$$

$$\epsilon = \frac{\sigma^n}{E} = 9,52 \cdot 10^{-4}$$

$\Delta l = \epsilon \cdot l = 1,9 \text{ mm}$ allungamento complessivo all'estremo libero.



La faccetta che per normale ha z è SCARICA.

TENSIONI PRINCIPALI → sono un sistema di riferimento particolare (non x, y, z) che chiamiamo 1, 2, 3. Semplifica lo stato di tensioni che si genera.

Il **tensore** delle tensioni che corrisponde alle **tensioni principali** sarà fatto così:

$$[\sigma]_{pr} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \text{TENSIONI PRINCIPALI}$$

È uno stato di tensione più semplice: ha solo tensioni normali σ e non ha τ .

Non è cambiato nulla; il solido è lo stesso, il carico pure e il punto materiale idem.

Ho solo **ruotato nello spazio la terna x, y, z** attorno al punto materiale finché le tensioni non si compongono tra di loro proiettandosi su 1, 2, 3 e mi fanno vedere il tensore diagonale $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Ciò che **cambia** è **solo il punto di vista!**

Il **CRITERI DI CEDIMENTO** vengono fuori dalle tensioni principali. Con $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ si arriva alla definizione di una tensione ideale o tensione equivalente (σ_{id}) con cui poi si può calcolare il coefficiente di sicurezza.

$$\text{coefficiente sicurezza} = \frac{R}{\sigma_{id}} \quad \leftarrow \text{tensione di resistenza del materiale}$$

$CS > 1$ materiale resistente, non si rompe

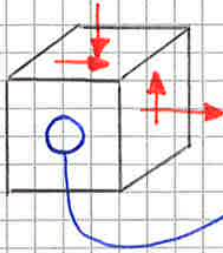
$CS < 1$ il materiale si rompe

METODO GRAFICO

Si può utilizzare solo se è già nota una direzione principale

DIREZIONE PRINCIPALE → quella per cui la giacitura ^{che} ha come normale la direzione principale **NON VEDE** delle τ !

Nel nostro caso:



questa giacitura non ha τ !

⇓
PRINCIPALE

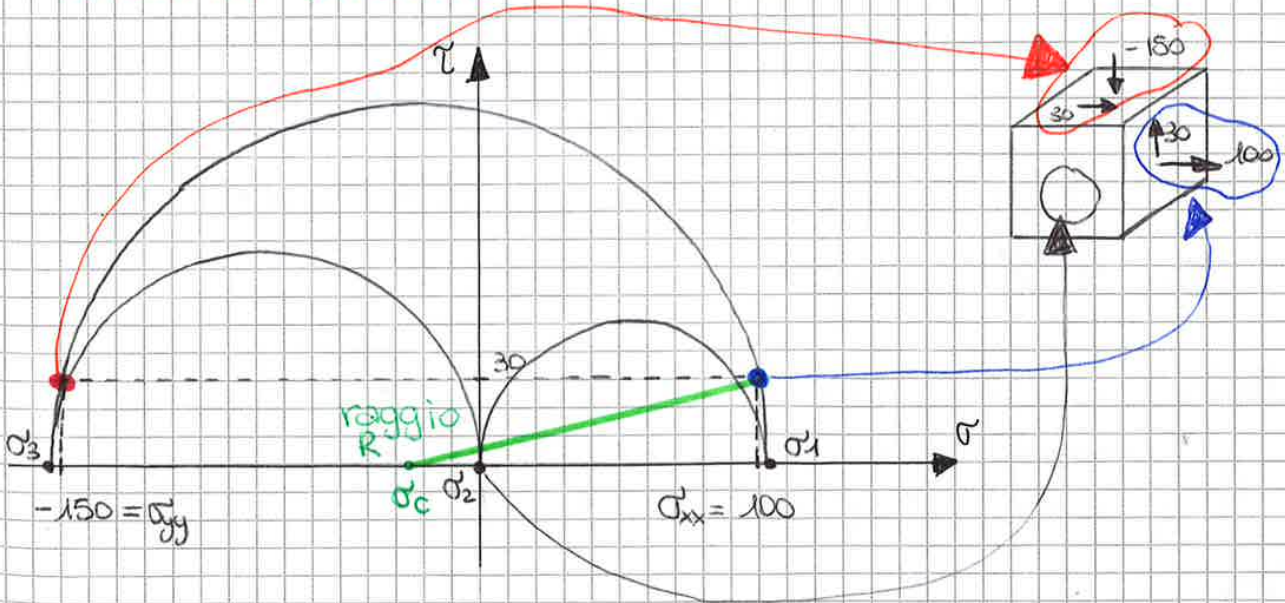
Dalla matrice si può vedere se ci sono degli zeri che concorrono a un elemento della diagonale:

$$\begin{bmatrix} 100 & 30 & 0 \\ 30 & -150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- o fianco deve esserci
- una riga di zeri
 - una colonna di zeri

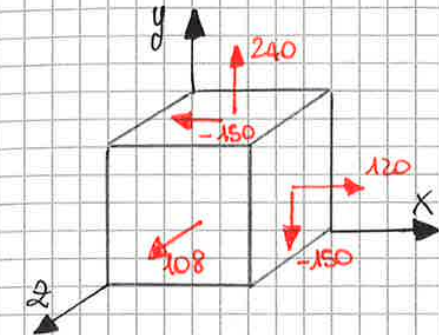
\hat{x} → direzione principale

Cerchi di MOHR



N°2

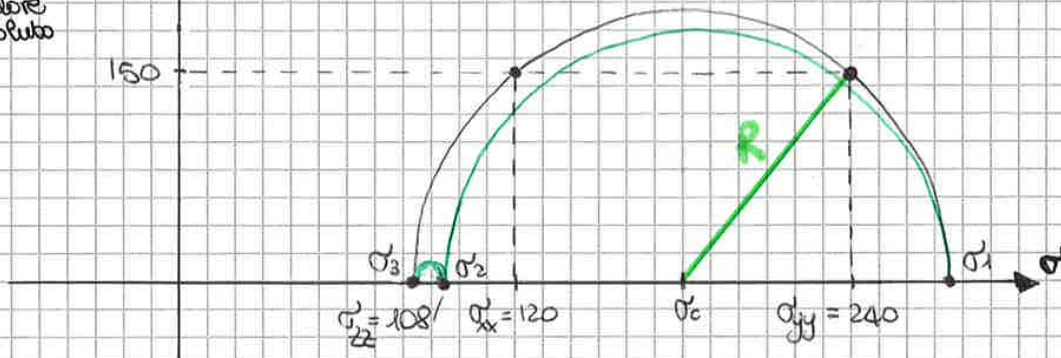
$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 120 \text{ MPa} & \tau_{xy} &= 150 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} &= 240 \text{ MPa} & \tau_{xz} &= 0 \text{ MPa} \\ \sigma_{zz} &= 108 \text{ MPa} & \tau_{yz} &= 0 \text{ MPa} \end{aligned}$$



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 120 & -150 & 0 \\ -150 & 240 & 0 \\ 0 & 0 & 108 \end{bmatrix}$$

$z \rightarrow$ direz. principale

li metto in valore assoluto



$$\sigma_2 = 108$$

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \frac{120 + 240}{2} = 180 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(\tau_{xy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_c)^2} = 161,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \sigma_c + R = 341,6 \text{ MPa}$$

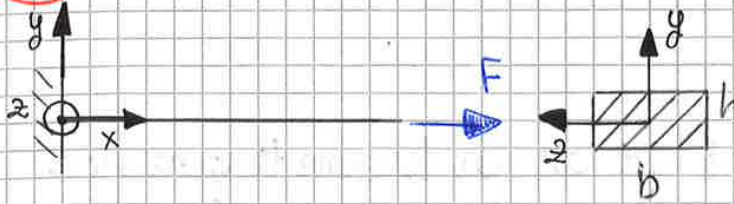
$$\sigma_3 = \sigma_c - R = 18,4 \text{ MPa}$$

$$[\sigma]_{pr} = \begin{bmatrix} 341,6 & 0 & 0 \\ 0 & 108 & 0 \\ 0 & 0 & 18,4 \end{bmatrix}$$

STATI DI TENSIONE

Triassiale	Biassiale o PIANO	Monoassiale
$\begin{cases} \sigma_{xx} \neq 0 \\ \sigma_{yy} \neq 0 \\ \sigma_{zz} \neq 0 \end{cases}$	solo una σ σ è $= 0$	due σ sono $= 0$
	Invariante $I_3 = 0$	Invarianti $I_2 = 0$ $I_3 = 0$
	$[\sigma]_{pr} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$	

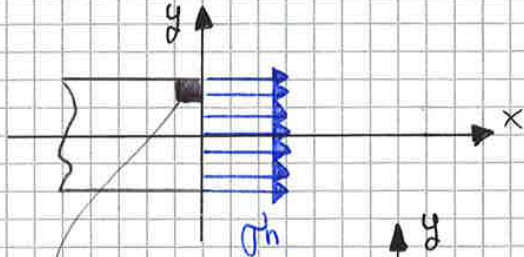
N°3



$b = 20 \text{ mm}$ $h = 5 \text{ mm}$
 $F = 40000 \text{ N}$

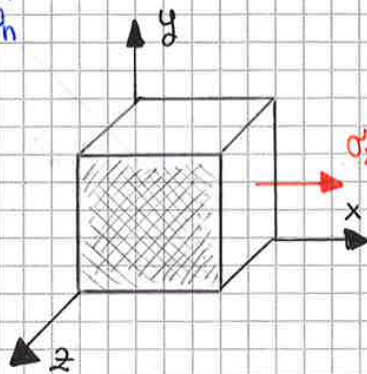
- Cerchi di Mohr
- direz. e tens. principali
- δ per cui $\tau = \tau_{\max}$
- β per cui $\tau = \frac{1}{2} \tau_{\max}$
- Scrivere i 2 tensori delle tensioni

$N(x) = 40000 \text{ N}$



$\sigma_n = \frac{F}{A} = \frac{40000}{100} = 400 \text{ MPa}$

prendo questo cubetto la cui faccia ammerita è quella con normale \hat{z}



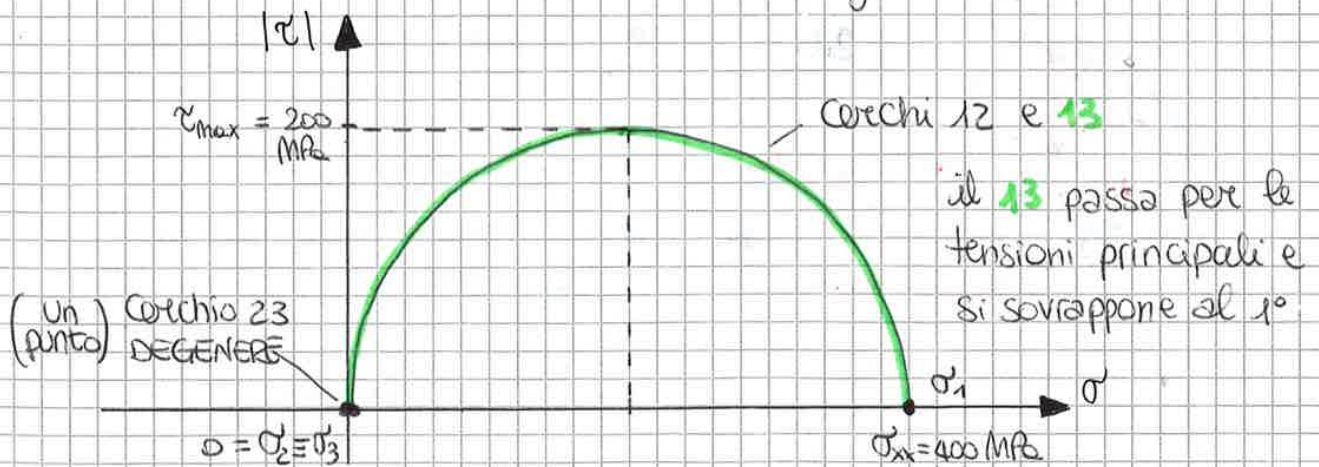
$\sigma_x = \sigma_n = 400 \text{ MPa}$

- Ogni giacitura Non Vede $\tau \Rightarrow$ principale

Ora posso scrivermi il tensore:

$$[\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\sigma]_{1,2,3}$$

è un sistema di riferimento principale! Infatti tutte e 3 le σ hanno accanto degli zeri!



$\sigma_1 = 400 \text{ MPa}$
 $\sigma_2 = 0 \text{ MPa}$
 $\sigma_3 = 0 \text{ MPa}$