



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2020A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Cane Daniele

MATERIA: Idraulica II + dimostrazioni - Prof. Bianco

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

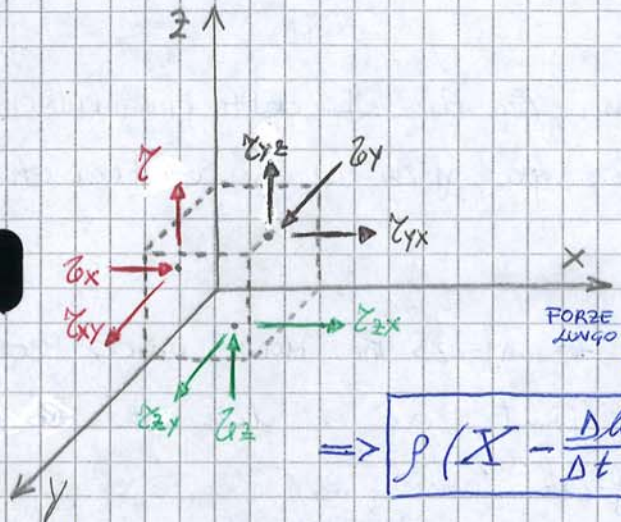
DEMONSTRAZIONI IDRAULICA II

Partendo dall'equazione INDEFINITA DEL MOTO DEI FLUIDI REALI

$$\rho(\vec{R} - \vec{A}) = \text{grad}(P) - \mu \nabla^2 \vec{V}$$

Posso decidere di integrare su un volume e ottenere così l'equazione GLOBALE in cui si tiene conto di tutti i parametri per i fluidi in movimento:

$$\vec{G} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_i = 0$$



Effettuo un equilibrio intorno all'asse x.

$$\begin{aligned} & \rho dx dy dz + \tau_{xx} dz dy - (\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx) dy dz \\ & + \tau_{zx} dx dy - (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dx dy + \\ & + \tau_{yx} dx dz - (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dz dx \\ & = \rho dx dy dz \cdot \frac{Dw}{Dt} \end{aligned}$$

FORZE DI MASSA LUNGO LA DIREZ. x

$$\Rightarrow \rho \left(X - \frac{Dw}{Dt} \right) = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$$

Nel medesimo modo

$$\rho \left(Y - \frac{Dv}{Dt} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\rho \left(Z - \frac{Dw}{Dt} \right) = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

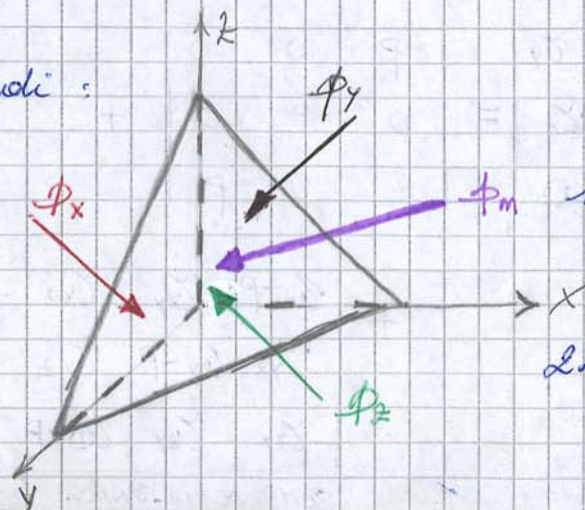
TETRAEDRO DI CAUCHY - TEOREMA

Se considerassimo il fluido come perfetto l'equazione diventerebbe:

$$\rho(\vec{R} - \vec{A}) = \text{grad } p \quad \text{dove } p_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$$

$$p_y = \dots \quad p = p_x + p_y + p_z$$

Quindi:



$$1. \phi_m A = \phi_x A \cos \hat{m}\hat{x} + \phi_y A \cos \hat{m}\hat{y} + \phi_z A \cos \hat{m}\hat{z}$$

$$2. \phi_{mx} = \phi_{xx} \cos \hat{m}\hat{x} + \phi_{yx} \cos \hat{m}\hat{y} + \phi_{zx} \cos \hat{m}\hat{z}$$

$$\phi_{my} = \phi_{xy} \cos \hat{m}\hat{x} + \phi_{yy} \cos \hat{m}\hat{y} + \phi_{zy} \cos \hat{m}\hat{z}$$

$$\phi_{mz} = \phi_{xz} \cos \hat{m}\hat{x} + \phi_{yz} \cos \hat{m}\hat{y} + \phi_{zz} \cos \hat{m}\hat{z}$$

• EQUAZIONE GLOBALE DELL'EQUILIBRIO DINAMICO

- 1 BIS -

Ricordando $\rho(F-A) = \text{grad } p$ e integrando:

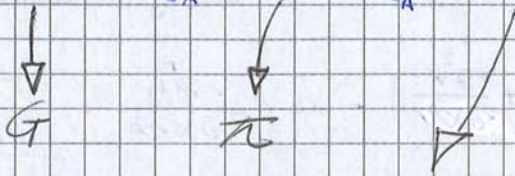
$$\int_W \rho F \, dW - \int_A \rho A \, dA = \int_W \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \right) dW$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$\int_W \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \, dW - \int_A \rho \sqrt{m} \, v \, dA \qquad \qquad \qquad - \int_A \phi_m \, dA$$

Per cui

$$\int_W \rho F \, dW + \int_A \phi_m \, dA + \int_A \rho \sqrt{m} \, v \, dA - \int_W \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \, dW = 0$$



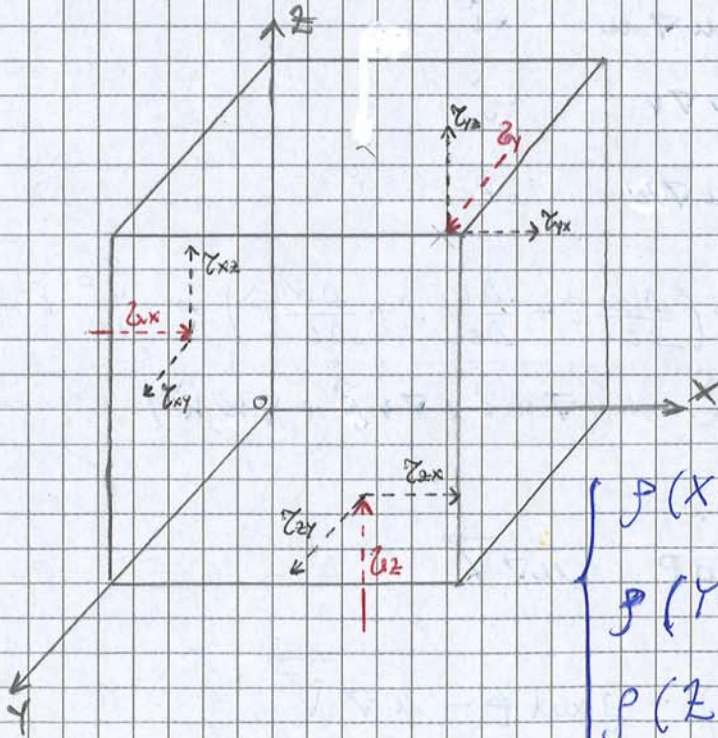
$$M = \int_A \rho \sqrt{m} \, v \, dA = M_1 - M_2$$

Resultante delle inerzie locali. Tale integrale, ha valore nullo in condizione di moto permanente (I)

In definitiva:

$$G + T + M_1 - M_2 + I = 0$$

• INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI DI NAVIER STOKES

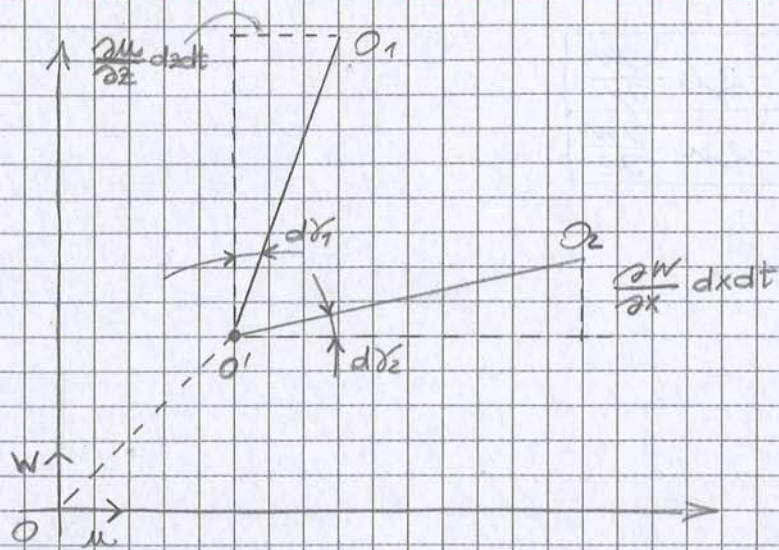


Eseguendo l'equilibrio lungo tutte le direzioni, e considerando un solido infinitesimo come "aumento" da una faccia all'altra del cubo considerato.

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \left(X + \frac{Dx}{Dt} \right) &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \rho \left(Y + \frac{Dy}{Dt} \right) &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \rho \left(Z + \frac{Dz}{Dt} \right) &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

DEFORMAZIONE → ROTAZIONE + TRASLAZIONE

-2-



$$-dy'_1 = \frac{\partial u}{\partial z} dz dt$$

$$-dy'_2 = \frac{\partial v}{\partial x} dx dt$$

$$\Downarrow$$

$$-dy' = -dy'_1 - dy'_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dt$$

per cui:

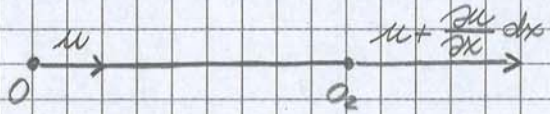
$$\boxed{-\frac{dy'}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)}$$

Sapendo che

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Rightarrow \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = -\mu \frac{dy'}{dt} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Analogamente per

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \text{e} \quad \gamma_{yz} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$



L'allungamento unitario è pari a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx dt = d\epsilon_x$$

$$\frac{d\epsilon_x}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{\mu} \right)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{\mu} \right)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\mu} \right)$$

pono sempre ϵ_x come

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x + \frac{\sigma_x}{\mu} - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{\mu} \right) = \frac{1}{E} \left[\left(\frac{\mu+1}{\mu} \right) \sigma_x - \frac{3\sigma}{3\mu} \right]$$

Poiché $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma$

moltiplico e divido per 3 $\Rightarrow \frac{\sigma}{3} = p$

(PRESSIONE ISOTROPA) e che se la DEFORMAZIONE avviene a volume costante $\mu=2$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left[\left(\frac{\mu+1}{\mu} \right) \sigma_x - \left(\frac{\mu+1}{\mu} \right) p \right] = \frac{1}{E} \left(\frac{\mu+1}{\mu} \right) [\sigma_x - p]$$

Ricordando $G = \frac{\mu E}{2(\mu+1)}$ e ponendo $\mu = G$ $\epsilon_x = -\frac{\partial u}{\partial x}$

$$p(x - \frac{Du}{Dt}) = \frac{\partial p}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$$

- 2 BIS -

com $\tau_{yx} = \tau_{xy} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$; $\tau_x = p - 2\mu \frac{du}{dx}$
 $\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$; $\tau_y = p - 2\mu \frac{dv}{dy}$
 $\tau_{zy} = \tau_{yz} = -\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$; $\tau_z = p - 2\mu \frac{dw}{dz}$

$$p(x - \frac{Du}{Dt}) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \nabla u$$

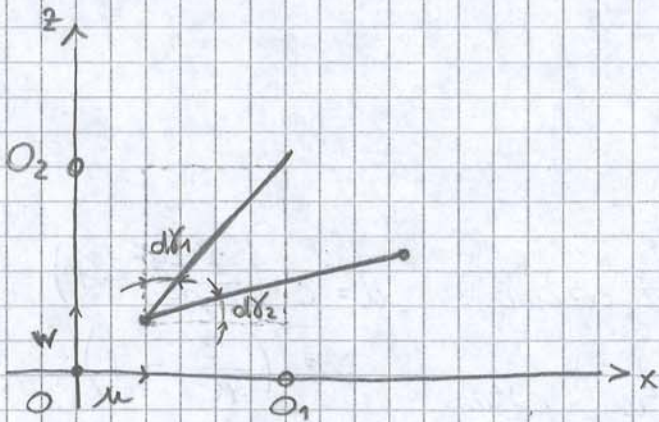
$$p(y - \frac{Dv}{Dt}) = \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \nabla v$$

$$p(z - \frac{Dw}{Dt}) = \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \nabla w$$

$$p(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) - p\left(\frac{Du}{Dt}\hat{i} + \frac{Dv}{Dt}\hat{j} + \frac{Dw}{Dt}\hat{k}\right) = \frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k} - \mu(\nabla u\hat{i} + \nabla v\hat{j} + \nabla w\hat{k})$$

EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES IN FORMA VETTORIALE

DEFORMAZIONE → ROTAZIONE + TRASLAZIONE

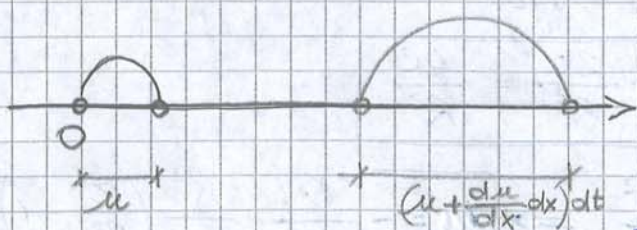


Ipotesi:

1. Considero un fluido avente velocità u e w in direz. x e $z \neq 0$

Tesi:

Nota oltre ad una traslazione anche una deformazione



$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left(\tau_{ex} - \frac{\tau_{ey} + \tau_{ez}}{m} \right)$$

$$= \frac{1}{E} \left(\frac{\tau_{ex}}{m} - (\tau_{ey} + \tau_{ez}) \right)$$

$$= \frac{1}{E} \left(\tau_{ex} + \frac{\tau_{ex}}{m} - \frac{\tau_{ey} + \tau_{ez}}{m} - \frac{\tau_{ex}}{m} \right)$$

SOTTRAENDO

$$= \frac{1}{E} \left(\tau_{ex} \cdot \frac{(m+1)}{m} - \frac{\tau_{ex} + \tau_{ey} + \tau_{ez}}{m} \right)$$

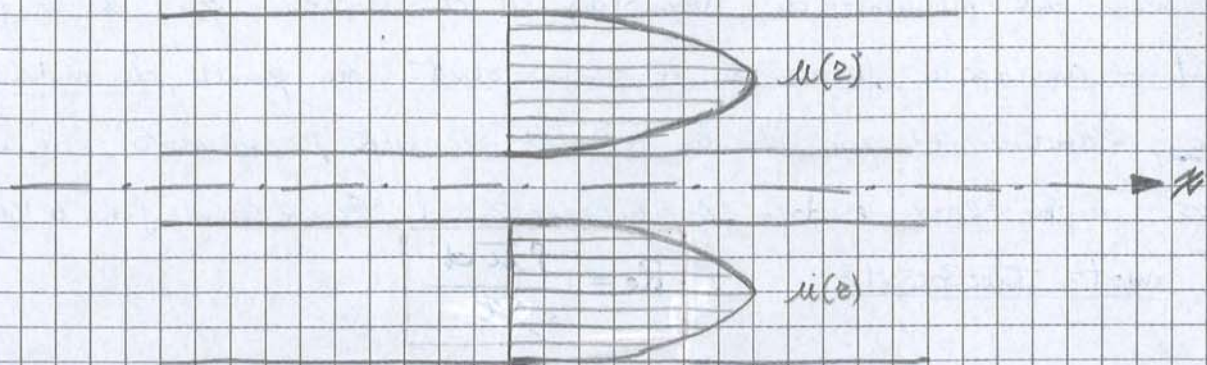
com $m=2$ DEF. A VOLUME COSTANTE
 $3 = m+1$

$$= \frac{1}{E} \left(\tau_{ex} \frac{m+1}{m} - \frac{(m+1)p}{m} \right)$$

$$= \frac{1}{E} \left[\frac{m+1}{m} - \frac{(m+1)p}{m} \right]$$

Considerando un tubo cavo

-2C-



$$u(z) = \frac{\gamma_i}{4\mu} (R_1^2 - z^2) + \frac{\gamma_i (R_0^2 - R_1^2)}{4\mu \ln(R_0/R_1)} \cdot \left[\ln\left(\frac{z}{R_0}\right) \right]$$

MOTO TURBOLENTO

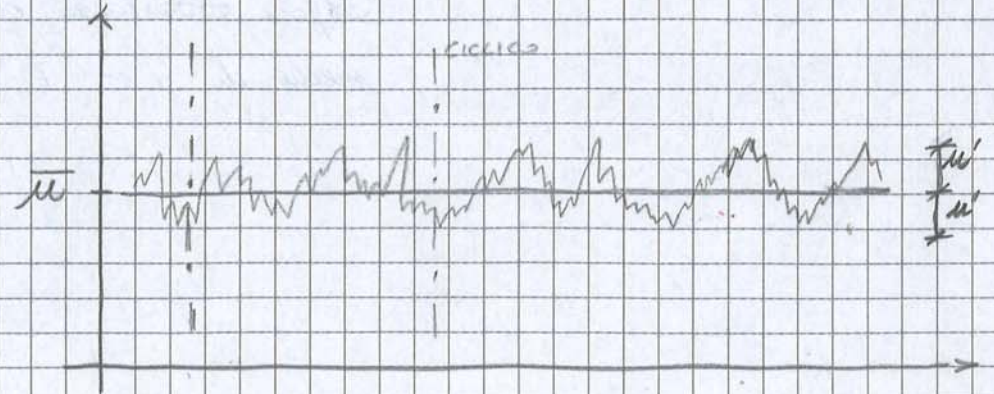
Se la velocità della corrente, supera certi valori, si verifica la transizione da MOTO LAMINARE a MOTO TURBOLENTO.

In tal caso possiamo notare come le particelle non si muovono più solamente lungo la direzione del moto ma anche nelle altre direzioni (ad esso perpendicolare), perdendosi in modo del tutto caotico. Quindi \vec{v} può essere definita in questo modo:

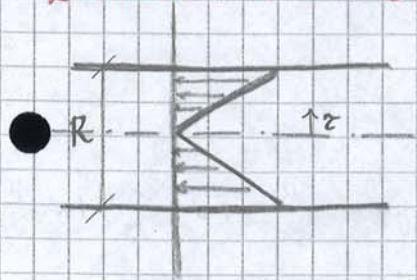
$$\vec{v} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} \quad \text{con: } \begin{cases} u = \bar{u} + u' \\ v = \bar{v} + v' \\ w = \bar{w} + w' \end{cases}$$

Considerando il moto lungo un'unica direzione, abbiamo che siccome il moto può avvenire lungo x , per approssimazione e con buona approssimazione che \bar{v} e \bar{w} sono nulli:

$$\begin{cases} u = \bar{u} + u' \\ v = v' \\ w = w' \end{cases}$$



DISSIPAZIONI - TUBO CIRCOLARE



Le dissipazioni sono definite grazie alla viscosità

dinamica μ e alla VARIAZIONE DELLA VELOCITÀ:

1. $\tau = -\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$ con $\tau = \gamma R i = \gamma \cdot \frac{d}{4} i$
2. Su mezza sezione vale: $-\mu \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma \cdot \frac{r}{2} i$

3. È sufficiente integrare per ottenere la distribuzione delle velocità al variare di z : $du = -\gamma \cdot \frac{r}{2} i \cdot \frac{dz}{\mu} \Rightarrow u = -\frac{\gamma i}{2\mu} \cdot \frac{z^2}{2} + \text{cost}$

4. Se $z = R$ allora τ_{MAX} e $u_{\text{MIN}} = 0$: Cerco la costante

$$0 = -\frac{\gamma i}{2\mu} \cdot \frac{R^2}{2} + \text{cost} \Rightarrow \text{cost} = \frac{\gamma i}{2\mu} \cdot \frac{R^2}{2}$$

5. Sostituisco: $u(z) = -\frac{\gamma i}{2\mu} \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{\gamma i}{2\mu} \cdot \frac{R^2}{2}$

$$\Rightarrow u(z) = -\frac{\gamma i R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)$$

MOTO UNIFORME

Moto costante sia nel tempo sia nello spazio:

MOTO PERMANENTE

Moto costante nel tempo $\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$

MOTO TURBOLENTO

Per valori di $Re > 2000 \rightarrow$ MOTO TURBOLENTO le velocità delle particelle

è definita come $\vec{V} = u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k}$ e per ogni direzione x e z la

velocità è definita dalle somme di due componenti $u = \bar{u} + u'$

$v = \bar{v} + v'$ e $w = \bar{w} + w'$

(Velocità di un fluido in un tubo)



\bar{v} e \bar{w} le definisco nulle

perché un fluido che scorre in un tubo, per buona approssimazione

va nella direzione che abbiamo chiamato x . Se fossimo di fronte ad un moto 3D dovremmo prendere in considerazione anche le altre componenti

CONTORNO FISSO

Supponiamo un fluido che scorre lungo una tubazione con $\rho = \text{costante}$ e tutte le semplificazioni possibili.



Per ogni tubo esiste sempre una zona, seppur piccola, in cui il moto può considerarsi LAMINARE

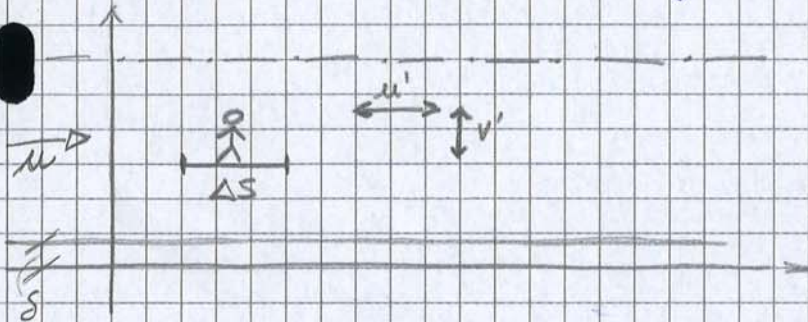
CONDIZIONE DI MOTO PIANO

Consideriamo una porzione ΔS di fluido e ci poniamo un osservatore in moto solidale con lo stesso fluido

tramite la legge di Newton

$$F = m \vec{a} = m \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$F dt = m d\vec{u}$$



Consideriamo la direzione \vec{x}

$$F dt = m du \rightarrow F dt = (\rho \underbrace{v' \Delta s dt}_{\text{Volume}}) u' \Rightarrow F = \rho \Delta S v' u'$$

Ricordando che $\rho = \rho u' v'$

$$\frac{F}{\Delta S} = \rho u' v' \rightarrow \boxed{\frac{F}{\Delta S} = \rho u' v' = \tau_1} \quad (1)$$

Si come possiamo dire $|u'| = |v'| \rightarrow \tau = \rho \cdot u'^2$

Chiamo: $u'_e = \sqrt{u'^2} = \tau / \rho$ VELOCITÀ EFFICACE

Possiamo scrivere una relazione che ipotizza la DIPENDENZA DELLE τ dalle distanze dal bordo e dal gradiente delle u lungo y .

$$\tau / \rho = u'_e = \sqrt{m} y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \rightarrow \boxed{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{m} \cdot y \cdot \frac{du}{dy} = U_*}$$

Con $\tau_0 = \tau$ tensioni tangenziali sul bordo

$U_* = \sqrt{m} \cdot y \cdot \frac{du}{dy} \rightarrow$ Mediante studi empirici si è notato che \sqrt{m} è una costante del valore di $\approx 0,4$
 $\Rightarrow \sqrt{m} = k = 0,4$

$\bar{u} = \frac{u_*}{K} \ln(y) + \text{cost}$ Se invece di y ci sostituisce $-4-$
 Il raggio delle pareti, allora $\bar{u}_{\text{MAX}} = \frac{u_*}{K} \ln(R) + \text{cost.}$ \rightarrow sost R
 y

Stesso procedimento di fine: Ricordando che le u_{MAX} si ha al centro delle tubazione con effetti di bordo nulli
 $\text{Cost} \Rightarrow \text{cost} = -\frac{u_*}{K} \ln(R)$

$\Rightarrow \bar{u} = \frac{u_*}{K} \ln(y) - \frac{u_*}{K} \ln(R) + u_{\text{MAX}}$
 $= \bar{u}_{\text{MAX}} + \frac{u_*}{K} \ln\left(\frac{y}{R}\right) \Rightarrow \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{\bar{u}_{\text{MAX}}}{u_*} + \frac{1}{K} \ln \frac{y}{R}$

Legge che regola l'incremento logaritmico nel moto turbolento

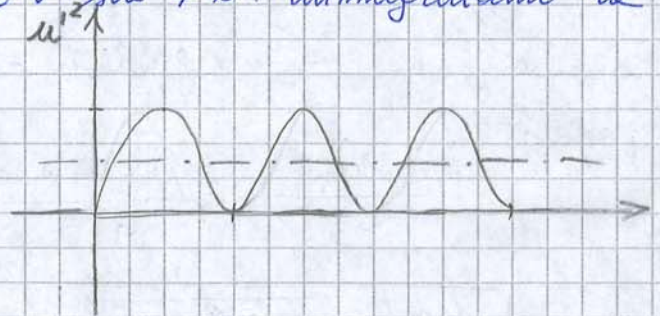
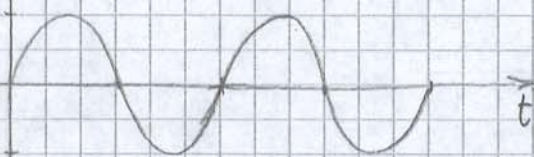
CORRELAZIONE TRA VARIABILI

Nel moto turbolento, avevamo detto che $u' v' w'$ sono v.a. con valor medio nullo (perché le caselle era con buona approssimazione periodica). La correlazione tra due variabili ad esempio u', v' può essere espressa come:

$$C = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}} \cdot \sqrt{\overline{v'^2}}}$$

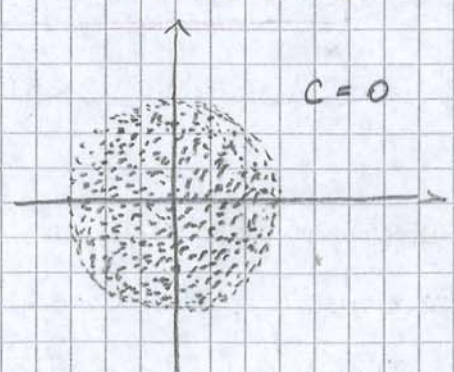
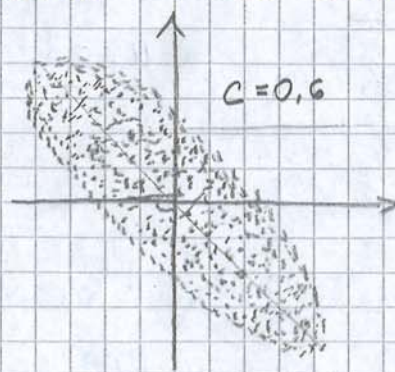
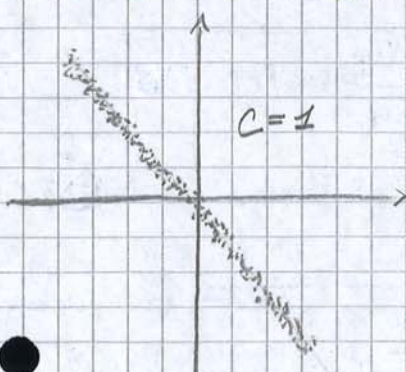
È opportuno ricordare che anche se u' a valor medio nullo, è possibile che il prodotto $u'v'$ sia $\neq 0$.

Immaginiamo la situazione: $u' \uparrow$ $v' = u'$ allora $v' \cdot u' = u'^2$



Se $C = 0 \rightarrow$ NO CORRELAZIONE

Se $C = 1 \rightarrow$ TOTALE CORRELAZIONE



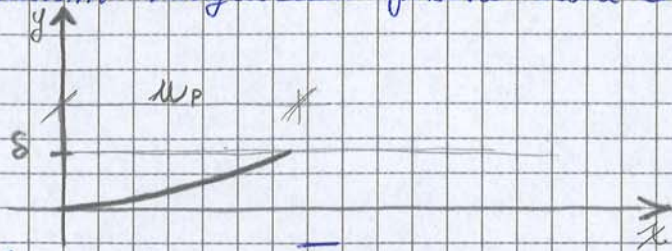


le formule cui siamo giunti, è valida per lo strato turbolento.

$$\frac{M_{\text{tot}}}{\rho_*} = \sqrt{\frac{\delta}{f(\text{Re}, \nu, \delta)}} \quad -40-$$

Se fossimo in condizioni laminari, possiamo scrivere che con buona approssimazione le tensioni tangenziali possono essere definite come:

$$\tau_0 = \mu \frac{\overline{u_p}}{\delta}$$



Divido tutto per ρ_*

$$\frac{\tau_0}{\rho_*} = \mu \cdot \frac{\overline{u_p}}{\rho_* \delta}$$

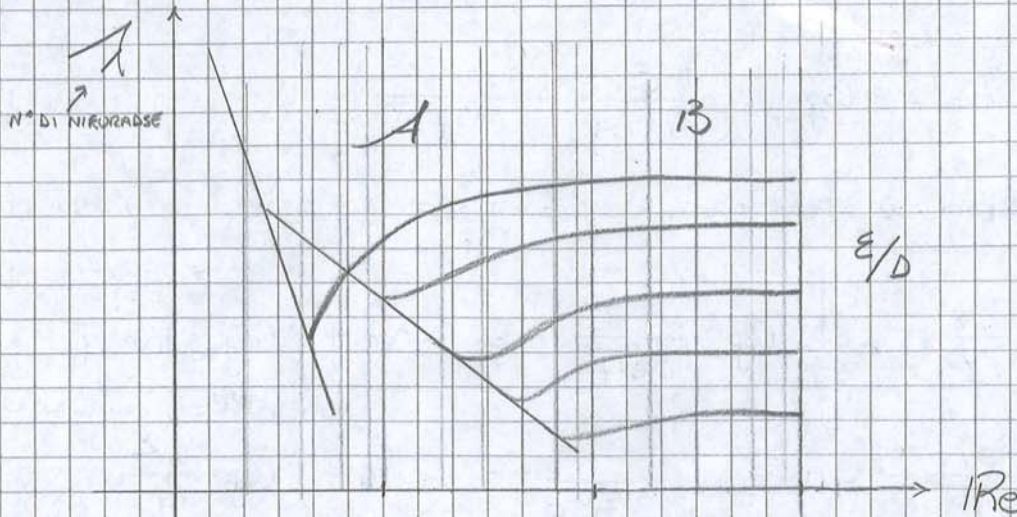
$$\frac{\tau_0}{\rho} = \mu_*^2 = \mu \cdot \frac{\overline{u_p}}{\delta \rho}$$

$$\frac{\tau_0 \cdot \delta}{\rho_* \mu} = \frac{\overline{u_p}}{\rho_*} = N = 11,6$$

$$\frac{\mu_* \rho \delta}{\mu} = \frac{\overline{u_p}}{\rho_*} = N = 11,6$$

Ricordando che $\tau_0/\rho = \mu_*^2$ ricaviamo che

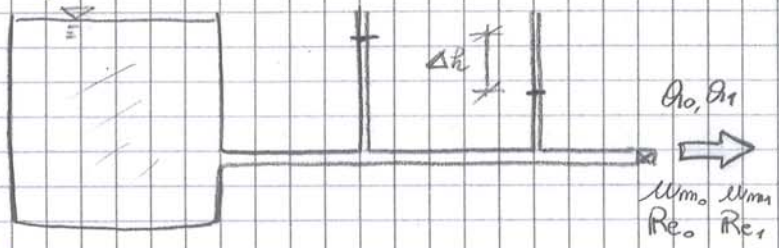
$\tau_0 = \mu_*^2 \rho$ ed è facile sostituendolo all'equazione ricavare quella evidenziata in rosso



Si tratta di una scala logaritmica, i valori all'aumentare del numero di Re possono essere funzioni di:

A $\rightarrow \lambda = f(Re, \epsilon/d)$

B $\rightarrow \lambda = f(\epsilon/d)$

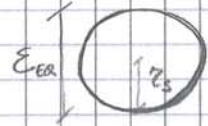


Si conclude che:

TUBO IDRAULICAMENTE LISCIO $\lambda = f(Re)$

TUBO IDRAULICAMENTE SCABRO $\lambda = f(Re, \epsilon_s)$

ZONA DI TRANSIZIONE $\lambda = f(\epsilon_s)$



SIFANO CHE PUO' ESSERE DEFINITO ENTRARE

TUBO IDRAULICAMENTE LISCIO

1. Parte delle formule: $N = \frac{\overline{u_{MAX}}}{u_*} + \frac{1}{K} \ln \frac{\delta}{d/2}$

2. Sostituisco δ : $N = \frac{\overline{u_{MAX}}}{u_*} + \frac{1}{K} \ln \left(\frac{N u}{u_* P} \cdot \frac{2}{d} \right)$

3. Moltiplico e divido per $\frac{\overline{u_m}}{u_*}$ abbiamo:

$$N = \frac{\overline{u_m}}{u_*} + \frac{3}{2K} + \frac{1}{K} \ln \left(\frac{N u}{u_* P} \cdot \frac{\overline{u_m}}{u_*} \cdot \frac{2}{d} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{8}{f}} + \frac{3}{2K} + \frac{1}{K} \sqrt{\frac{8}{f}} \frac{2N}{Re}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = A_1 + B_1 \log_{10} Re \sqrt{f}$$

FORMULA DI PRANDTL
A = -0,3 B = 2

TUBO IDRAULICAMENTE SCABRO

$$N = \frac{\overline{u_m}}{u_*} + \frac{3}{2K} + \frac{1}{K} \ln \frac{m \epsilon}{d/2}$$

$$\frac{1}{f} = A_1 + B_1 \log_{10} \frac{2\epsilon}{d}$$

FORMULA DI NIKURADSE
A = 1,74
B = -2

Con la formula di Colebrook-White si è passati dal caso -6-
confine tra moto-LAMINARE e moto-TURBOLENTO

$$Re < 2500 = \frac{\rho \cdot v \cdot d^3}{\mu} < 80000 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{128} \cdot \frac{\rho \cdot L \cdot d^4}{\mu}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} d^2 \sqrt{2gd \cdot i} \log_{10} \left(\frac{\epsilon}{3.715d} + \frac{2.51 \nu}{d^{3/2} \sqrt{2gd \cdot i}} \right)$$

Ricordando che:

$$Re \sqrt{f} = \frac{\rho v d}{\mu} \cdot \frac{\sqrt{2gd \cdot i}}{v} = \frac{d^{3/2} \sqrt{2gd \cdot i}}{\nu}$$

$$\text{Nel moto laminare} = f = \frac{64}{Re} \text{ da } \sqrt{f} = \frac{8}{Re}$$

Nella formula di Colebrook-White compaiono le grandezze d , i , α , ϵ è possibile conoscendo 3 di questi elementi trovare le 4°

Ricavo $\bar{u}_m = -2 \sqrt{2gd} \log_{10} \left(\frac{\epsilon}{3,715d} + \frac{2,51}{d^{3/2} \sqrt{2g}} \right)$

3. Per la continuità: $Q = \bar{u}_m \cdot \Omega = -2 \sqrt{2gd} \log_{10} (\dots) \cdot \frac{\pi d^2}{4}$

Nel caso non si trattasse di una sezione circolare è sufficiente sostituire il d (diametro) con il R (raggio idraulico)

Note Q, d, i determinare ϵ

Se il moto è laminare ϵ NON INTERVIENE $\Rightarrow Re = \frac{\bar{u}_m \cdot d}{\nu} < 2500$

1. Ricordandosi $Q = \Omega \cdot \bar{u}_m = -2 \sqrt{2gd} \cdot \frac{d^2 \pi}{2} \cdot \log_{10} \left(\frac{\epsilon}{3,715d} + \frac{2,51}{d^{3/2} \sqrt{2g}} \right)$

2. Dividendo Q per $-\frac{\pi}{2} d^2 \sqrt{2gd}$ ed elevando a 10 \rightarrow leva il logaritmo:

$$\epsilon = 3,715d \cdot \left(10^{-\frac{Q}{\frac{\pi}{2} d^2 \sqrt{2gd}}} - \frac{2,51 \nu}{d^{3/2} \sqrt{2g}} \right)$$

Note Q, d, ϵ trovare i :

Verifico: $Re < 2500$; $\left(\frac{\bar{u}_m d}{\nu} < 2500 ; \frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4} \nu} < 2500 ; \frac{4Q}{\pi d \nu} < 2500 \right)$

$\bar{u} = \frac{Q}{\Omega} \Rightarrow \frac{Q}{d^2 \nu} < 1964$ CONDIZ. CRITICA

\rightarrow MOTO TURBOL.
 \leftarrow MOTO LAMINARE

1. Se è verificata il moto è laminare e quindi:

$$i = \frac{\bar{u}_m^2}{2g} \cdot \frac{f}{d} = \frac{Q^2}{\Omega^2} \cdot \frac{1}{2g} \cdot \frac{f}{d} = \frac{Q^2}{\Omega^2} \cdot \frac{1}{2g} \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{64}{Re}$$

$$= \frac{Q^2}{\Omega^2} \cdot \frac{1}{2g} \cdot \frac{64 \nu}{Q/d} = \frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}} \cdot \frac{1}{2g} \cdot \frac{64 \nu}{d} = \frac{128 \nu Q}{\pi g d^4}$$

2. Dunque se il moto è TURBOLENTO

$$i = \frac{2 Q^2}{\pi^2 g d^5 \log_{10}^2 \left[\frac{\epsilon}{3,715d} + 3,615 \left(\frac{\nu d}{Q} \right)^{2/3} \right]}$$

3. Ricordando: $Q = \Omega \bar{u}_m$

$$Q = - \frac{\pi d^2}{2} \sqrt{2gd} \log_{10} \left(\frac{\epsilon}{3,715d} + \frac{2,51 \nu}{Re \sqrt{f}} \right)$$

4. Se il moto è turbolento (\Rightarrow non è rispettata la relazione) è necessario ricorrere alla legge che regola il moto turbolento (Colebrook-White).

$$Q = -\frac{\pi}{2} d^2 \sqrt{2gdi} \log_{10} \left(\frac{\epsilon}{3,715 d} + \frac{2,51 \nu}{d^{3/2} \sqrt{2gdi}} \right) *$$

5. Diciamo che l'argomento del logaritmo può valere $\approx 10 \Rightarrow \log_{10}(10) = 1 \Rightarrow$ Trascurabile

$$Q = -\frac{\pi}{2} d^2 \sqrt{2gdi} \cdot 1 \Rightarrow Q^2 = \frac{\pi^2}{4} d^4 (2gdi)$$

Ricavo $d^5 \approx \frac{4 Q^2}{2\pi \cdot g \cdot i}$; $d^5 \approx \frac{2 Q^2}{\pi \cdot g \cdot i}$?

6. La quantità Δ è definita come:

$$\Delta = \left(\frac{Q^2}{g \cdot i} \right)^{1/5} = \left(\frac{Q}{\sqrt{g \cdot i}} \right)^{2/5} \approx d$$

Il valore di Δ possiamo definirlo eccellente intorno al valore 2,1. Dalle *:

$$d^{5/2} \approx \left[\frac{Q}{-\frac{\pi}{2} \sqrt{2gdi} \log_{10} \left(\frac{\epsilon}{3,715 d} + \frac{2,51 \nu}{d^{3/2} \sqrt{2gdi}} \right)} \right]$$

$$d \approx \frac{\Delta}{\left[-\frac{\pi}{2} \log_{10} \left(\frac{\epsilon}{1,777 \Delta} + \frac{54 \nu}{\Delta^{3/2} \sqrt{2gdi}} \right) \right]^{2/5}}$$

- Velocità media della corrente: U
- Profondità: h
- Dimensione degli elementi ^{di} scabrezza: Δ
- Interasse tra gli elementi: l
- Proprietà del liquido: ρ, μ
- Accelerazione di velocità: g

U, ρ, h

Applico il teorema π :

$$f_2 = \left(\frac{\rho}{\rho U^2}; \frac{\mu}{\rho U h}; \frac{\Delta}{h}; \frac{l}{h}; 1; \frac{g h}{U^2} \right) = 0$$

Ho zero adimensionali le varie grandezze.

Ricordiamoci che

$$\frac{\rho}{\rho U^2} = \frac{g}{U^2} = \frac{f}{8}$$

FUNZIONE ASSE DELLE ORDINATE DIAGR. DI MOODY

E siccome utilizziamo un cono rettangolare:

$$\frac{g h}{U^2} = \frac{L_c}{L_f} \quad \text{con } L_c \approx \frac{g}{\kappa}$$

→ avremo che:

$$f_2 = \left(\frac{g}{U^2}; \frac{1}{Re}; \frac{\Delta}{h}; \frac{l}{h}; 1; \frac{1}{L_f} \right) = 0$$

Perciò

$$\frac{\kappa}{\sqrt{g}} = f_3 \left(Re; \frac{h}{\Delta}; \frac{\Delta}{l}; L_f \right) \rightarrow f_4 = \left(Re; \frac{h}{\Delta}; 1; L_f \right)$$

Quunque si giunge a

$$\frac{\kappa}{\sqrt{g}} = \sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{U_m}{U_*} = f \left(Re; \frac{h}{\Delta}; 1; L_f \right)$$

Quindi la resistenza dipende solo da questi tre termini:

Ipotesi:

Si ipotizza che Re non influisca su $\frac{\kappa}{\sqrt{g}}$ salvo verifica successiva

$$\frac{\kappa}{\sqrt{g}} = f \left(\frac{h}{\Delta}; L_f; h \right) \rightarrow \frac{\kappa}{\sqrt{g}} = f \left(\beta; L_f; h \right)$$

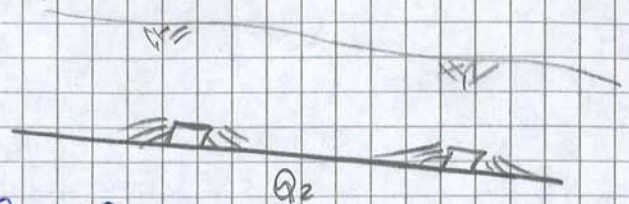
SOMMERGENZA

CONCENTR. SCABR.

Da dati empirici, si nota come al crescere di β , ossia al rapporto tra la profondità della corrente (h) e della dimensione dell'ostacolo (Δ) CRESCA IL RAPPORTO $\frac{\kappa}{\sqrt{g}}$

Appunti molto carichi senza, SEMI-MEDIA -

ciò è possibile farlo solo con un risolto idraulico.
Vediamo alcuni casi, al variare della portata Q .



$$Q_1 < Q_2 < Q_3$$



È possibile notare quanto il risolto idraulico diventa meno marcato aumentando la portata. Le correnti non è in grado di transitare così velocemente da uno

stato di "corrente veloce" ad uno di "corrente lenta" e quindi rimane in una condizione di "corrente veloce"

TEOREMA π -GRECO

Si consideri la relazione:

$$g_0 = f(g_1, g_2, g_3, \dots, g_m) \quad \text{con } g_i = \text{grandezze indipendenti}$$

Fin dagli inizi, le grandezze indipendenti prese in considerazione per spiegare un fenomeno sono state MASSA (m), LUNGHEZZA (l), TEMPO (t).

Con il teorema π -greco è possibile considerare altre grandezze (anch'esse indipendenti) di un fenomeno e raggruppare tutte le altre grandezze in funzione di quest'ultime rendendole a-dimensionali (numeri puri).

Facciamo un esempio:

$$\pi_i = \frac{g_i}{g_1^a g_2^b g_3^c} \Rightarrow \pi_0 = f_1(1, 1, 1, \pi_4, \pi_5, \dots, \pi_m)$$

$$\pi_0 = f_0(\pi_4, \pi_5, \dots, \pi_m)$$

Se considerassimo le tensioni tangenziali:

$$\tau = f(\bar{u}_m, d, \rho, \mu, \tau_s = \frac{\epsilon}{d}, \frac{\rho}{\rho})$$

IL MOSTRO TUBO È CIRCOLARE
 FATTORE DI FORMA

Scego come grandezze indipendenti:

$$\bar{u}_m, d, \rho$$

Cresce ora di rendere le altre grandezze adimensionali rispetto a queste..

RESISTENZE AL MOTTO IN ALVEI NATURALI

Date le poche conoscenze rispetto ai moti turbolenti in tubature e porati rigide e alla poca praticità è sempre molto difficile definire la dissipazione di un fiume in alveo. Il più delle resistenze sono definite dalle macroselezze (ciotoli) o resistenze vicino alla foce (arbusti e vegetazione)

RESISTENZE AL MOTTO PER ALVEI ERODIBILI DI MATERIALE SABBIOSO TIPICO DEI TRATTI DI PIANURA DEI CORSI D'ACQUA NATURALI

Il problema nasce quando il materiale sul fondo comincia a muoversi. Qui la valutazione delle resistenze al moto essendo dato che la sabbia complessiva non è costante, a seconda dei REGIMI DI MOTTO:

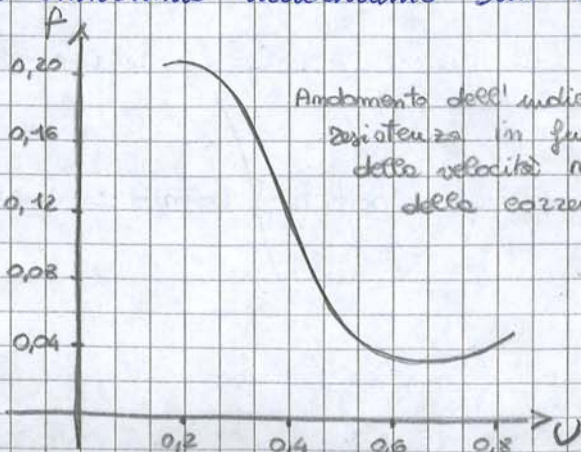
- 1) REGIME INFERIORE: In presenza di increspature o dune
- 2) REGIME SUPERIORE: Con fondo liscio, ovvero con una successione di risalti
- 3) REGIME DI TRANSIZIONE: Caratterizzato dalla formazione di onde di rabillo e che è intermedio ai due precedenti

Naturalmente per U limitate il fondo può definirsi immobile mentre se U cresce, sul fondo cominciano a formarsi increspature o dune. Per valutare le resistenze è necessario prevedere che tipo di forme assumerà il fondo. A tal scopo si utilizzano come parametri significativi, il NUMERO DI FROUDE (F_r) e il PARAMETRO DI SHIELDS (θ).

Per $\theta > 0,056$

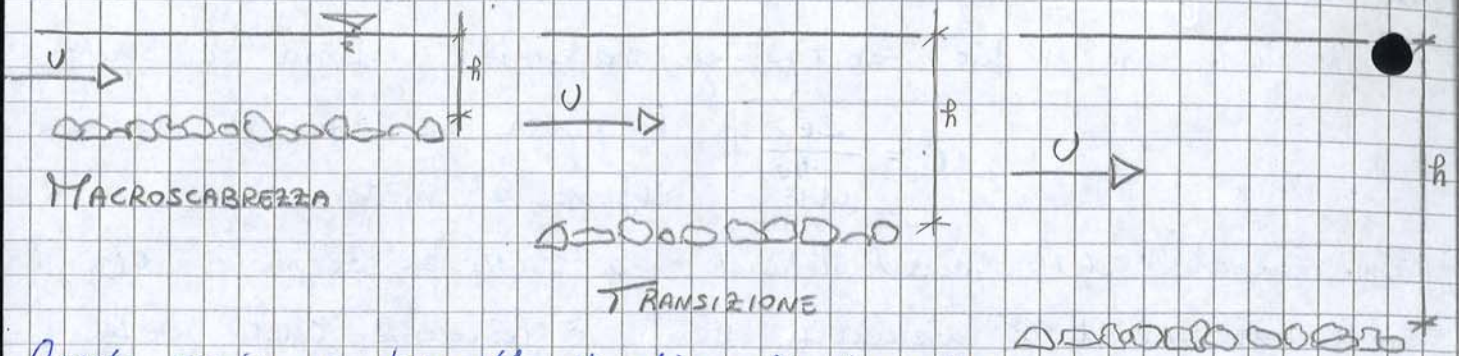
- $F_r \leq 0,4 \div 0,5$ Si verificano increspature
- $F_r \geq 1,0 \div 1,3$ Si presentano antidune
- Per valori interm. Si ricade nel regime di transizione

Per antidune indichiamo un accumulo contrario al moto della corrente



La SCABREZZA di un canale, non risulta più essere una costante, varia proprio in dipendenza della configurazione assunta dal fondo che possiamo vedere come $f = \frac{8gRi}{U^2}$ cambia all'aumentare di U

Si è deciso di distinguere le tipologie di scabrezza, in questo modo:



Queste teorie ci permette di dire che per un albero frangitubo rigido e rettilineo, in assenza di un sensibile trasporto solido e/o di vegetazione, l'indice di resistenza è definito come

$$\frac{1}{\sqrt{f_1}} = \frac{v}{\sqrt{gRi}} = \frac{\lambda}{\sqrt{g}}$$

ed è funzione di 6 parametri fondamentali:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \varphi \left(Re, F_z, \frac{R}{d_{xx}}, \frac{L_{fz}}{d_{xx}}, \frac{L_t}{d_{xx}}, \pi \right)$$

DIAMETRO CORRISPONDENTE AL FRANTILE xx
 DISTANZA LONGITUDINALE TRA GLI ELEMENTI PIÙ GROSSOLANI
 DISTANZA TRASVERSALE TRA GLI ELEMENTI PIÙ GROSSOLANI
 CONCENTRAZIONE DI ELEMENTI GROSSOLANI

La geometria della scabrezza generalmente viene rappresentata:

- 1) GENERICA ALTEZZA DEGLI ELEMENTI d
- 2) LA SPAZIATURA LONGITUDINALE L_f
- 3) LA SPAZIATURA TRASVERSALE L_t
- 4) LA CONCENTRAZIONE π

LEGGE DI RESISTENZA:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{g}} = A + B \log \left(\frac{R}{K_s} \right)$$

Di cui A e B sono due coefficienti numerici e K_s è una grandezza proporzionale alla scabrezza assoluta B se \uparrow la concentrazione π fino a 0,30÷0,35 per poi ricreare. Esistono comunque dei profici che relazionano $\frac{\lambda}{g}$ con R/d_{50}

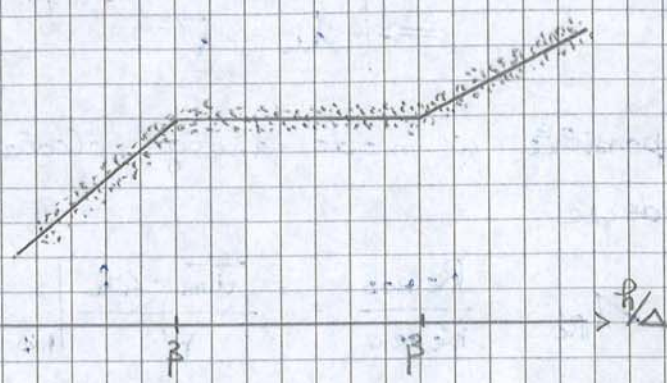
Se il rapporto aumenta significa che le dissipazioni diminuiscono

N.B. $\lambda = \text{CONCENTRAZIONE DI SCABREZZA} = \Delta/l$

● Rappresenta l'intervallo tra due ostacoli successivi in funzione della dimensione dell'ostacolo.

APPLICAZIONI AI CASI REALI

La dimensione della macrosebbrezza di riferimento viene definita mediante la curva granulometrica del terreno e



corrisponde al diametro all' 84% o al 90% (dipende dagli autori)

● Ricordando la relazione di FROUD ADIMENSIONALE:

$$\lambda \cdot \frac{1}{F_2^2} - \frac{D_{iu}}{D_t^2} = \frac{\partial P}{\partial \lambda} - \frac{1}{Re} \nabla u$$

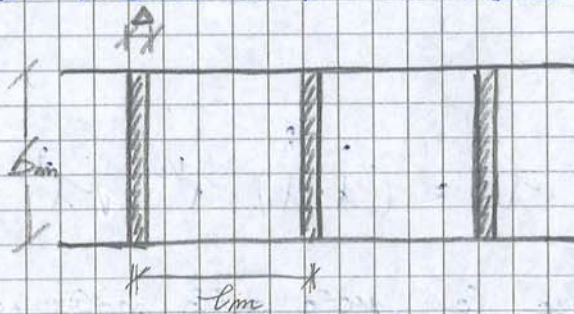
Se $Re \rightarrow \infty$ $\lambda \cdot \frac{1}{F_2^2} - \frac{D_{iu}}{D_t^2} = \frac{\partial P}{\partial \lambda}$ \rightarrow NON ESISTE PIU' LA PARTE VISCOSA

Se $F_2 = \text{cost}$ ovvero se: $\frac{\mu}{\sqrt{gh}} = \text{costante}$ allora:

Possiamo considerare un MODELLO ORIGINALE ossia un modello in scala originale

$\lambda =$ fattore di scala

$$\lambda = \frac{ch_{MOD}}{ch_{ORIG}}$$



N.B. Se vogliamo far sì che la SPERIMENTAZIONE ESEGUITA SUL MODELLO sia applicabile all'ORIGINALE occorre la CONSERVAZIONE DEL NUMERO di FREUD

Quindi:

$$F_2|_{MOD} = F_2|_{ORIG} \Rightarrow \frac{\mu}{\sqrt{gh}}|_{MOD} = \frac{\mu}{\sqrt{gh}}|_{ORIG}$$

Si pone tale condizione in modo tale che l'eventuale sia sul modello

● sia sull'originale, alle stesse Equazione di De-Saint Venant

Esempio

Supponiamo che $\lambda = 1/h_0$ $\rightarrow \lambda_a = \left(\frac{1}{h_0}\right)^{5/2} \approx \frac{1}{350}$
 $\lambda_c = \left(\frac{1}{h_0}\right)^{-1/6} \approx 1,47$

Canale in colabattuto $\rightarrow C_{orig} \approx 50 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1} \rightarrow C_{MOD} = 1,47 \cdot 50$
 $= 73,4 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$

Spiegazione del perché non realizziamo modelli con Fz e Re costanti

$$Re_{MOD} = Re_{orig} \rightarrow \frac{\rho \cdot \bar{u}_{MOD} \cdot d}{\mu} \Big|_{MOD} = \frac{\rho \cdot \bar{u}_{orig} \cdot d}{\mu} \Big|_{orig} = \frac{\rho \cdot \bar{u}_{orig} \cdot d}{\mu} \Big|_{orig}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{u}_{MOD} \cdot 4 h_{MOD}}{V_{MOD}} = \frac{\bar{u}_{orig} \cdot 4 h_{orig}}{V_{orig}}$$

$$\frac{\bar{u}_{MOD}}{\bar{u}_{orig}} \cdot \frac{h_{MOD}}{h_{orig}} \cdot \frac{V_{orig}^2}{V_{MOD}^2} = 1 \Rightarrow \lambda_u \cdot \lambda_l \cdot \lambda_V = 1$$

$$\Rightarrow \lambda^{1/2} \lambda \lambda_V = 1 \Rightarrow \lambda_V = \lambda^{-3/2}$$

Se imponiamo questi 2 vincoli non potremmo utilizzare lo stesso fluido che abbiamo nell'originale.

Ciò significa che nel modello dovremmo usare un fluido con viscosità diversa da quella originale

MODELLI A REYNOLDS COSTANTE

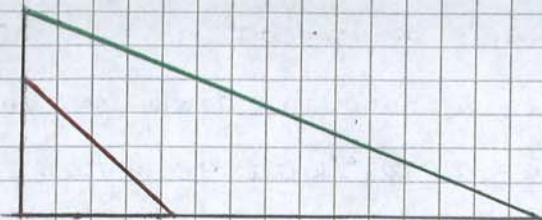
Sono raramente utilizzati

$$\frac{\rho \cdot \bar{u}_{MOD} \cdot d}{\mu} \Big|_{MOD} = \frac{\rho \cdot \bar{u}_{orig} \cdot d}{\mu} \Big|_{orig}$$

Utilizzando lo stesso fluido abbiamo che:

$$\frac{\bar{u}_{MOD}}{\bar{u}_{orig}} = \frac{d_{orig}}{d_{MOD}} \Rightarrow \lambda_u = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda_u = \lambda^{-1}$$

$$\lambda_t = \lambda_u / \lambda = \frac{1}{\lambda - 1} \Rightarrow \lambda_t = \lambda^{-2} \quad \lambda_f = 1$$



$$\lambda_i = \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{io}} = \frac{h_m}{b_m} \cdot \frac{b_o}{h_o}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_y \cdot h_o}{\lambda_x \cdot b_o} \cdot \frac{b_o}{h_o} = \frac{\lambda_y}{\lambda_x}$$

SALA RISPETTO A Y E RISPETTO A X DE h e b ORIGINALI

parvo a ricordarlo

$$\lambda_i = \frac{\lambda_y}{\lambda_x} = \frac{m \lambda_x}{\lambda_x}$$

La conclusione si ricava: $\lambda_i = m$

Come già fatto in precedenza riprendiamo le Equazioni di De-Saint Venant distinte per l'originale e per il modello.

$$l_{f,0} - \frac{\partial y_o}{\partial x_o} = \frac{\bar{u}_{m,0}^2}{\lambda_o^2 R_o} + \frac{\bar{u}_{m,0}}{g} \cdot \frac{\partial \bar{u}_{m,0}}{\partial x_o} + \frac{1}{g} \frac{\partial \bar{u}_{m,0}}{\partial t_o}$$

$$l_{f,m} - \frac{\partial y_m}{\partial x_m} = \frac{\bar{u}_{m,m}^2}{\lambda_m^2 R_m} + \frac{\bar{u}_{m,m}}{g} \cdot \frac{\partial \bar{u}_{m,m}}{\partial x_m} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial \bar{u}_{m,m}}{\partial t_m}$$

Siamo in condizioni di sezione rettangolare $\rightarrow R = h$ rispetto alla 2° equazione sostituendo i termini:

$$\lambda_i \cdot l_{f,0} - \frac{\partial (y_o \cdot \lambda_y)}{\partial (x_o \cdot \lambda_x)} = \frac{(\lambda_u^2 \bar{u}_{m,0}^2)}{(\lambda_x \lambda_o)^2 \lambda_R R_o} \cdot \frac{\lambda_u \bar{u}_{m,0}}{g} \cdot \frac{\partial (\lambda_{u,m} \bar{u}_{m,0})}{\partial (\lambda_x \cdot \lambda_o)}$$

$$+ \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial (\lambda_{u,m} \cdot \bar{u}_{m,0})}{\partial (\lambda_x \cdot t_o)}$$

Possiamo "tirar fuori" delle derivate

$$l_{f,0} \cdot m - \frac{\lambda_y}{\lambda_x} \cdot \frac{\lambda_y}{\lambda_x} = \frac{\lambda_u^2}{\lambda_x^2 \lambda_o} \cdot \frac{\bar{u}_{m,0}^2}{\lambda_o \cdot \lambda_o} + \frac{\lambda_u \cdot \bar{u}_{m,0}}{g} \cdot \frac{\lambda_u}{\lambda_x} \cdot \frac{\partial \bar{u}_{m,0}}{\partial x_o}$$

$$+ \frac{1}{g} \cdot \frac{\lambda_u}{\lambda_x} \cdot \frac{\partial \bar{u}_{m,0}}{\partial t_o}$$

Affinchè io sia in grado di ottenere l'equazione originale ho bisogno che i tre termini evidenziati siano a m. In questo modo semplificando tutte le m ricavo l'equazione di partenza.

$$\frac{\lambda_u^2}{\lambda_x^2 \lambda_y} = m \rightarrow \frac{\lambda_u^2}{\lambda_x^2 \cdot m \lambda_x} = m \rightarrow \frac{\lambda_u^2}{\lambda_x^3} = m^2$$

$\lambda_{Re} |_{\text{MOD. SIMILE}} < \lambda_{Re} |_{\text{MOD. DISTORTO}}$ Ricaviamo che il Numero di Re nel modello distorto è MOLTO PIÙ GRANDE dell'omonimo nel modello simile.

$$\lambda_a = \lambda_u \cdot \lambda_\Omega = \lambda_u \cdot \lambda_x \cdot \lambda_y = m^{1/2} \cdot \lambda_x^{1/2} \cdot \lambda_x \cdot m \lambda_x \Rightarrow \lambda_a = m^{3/2} \lambda_x^{5/2}$$

nei modelli simili eravamo giunti alla conclusione che: $\lambda_a = \lambda_x^{3/2}$
 ovvero supponendo $\lambda_x = \frac{1}{100} \rightarrow \lambda_{R \text{ SIMILE}} \approx 1 \cdot 10^{-5}$
 $\rightarrow \lambda_{R \text{ DISTORTO}} \approx m^{3/2} \cdot 10^{-3}$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{R \text{ MOD. SIMILE}} < \lambda_{R \text{ MOD. DIST.}}} \text{ Serve dunque una minore por-} \\ \text{tata nel modello simile.}$$

Per concludere

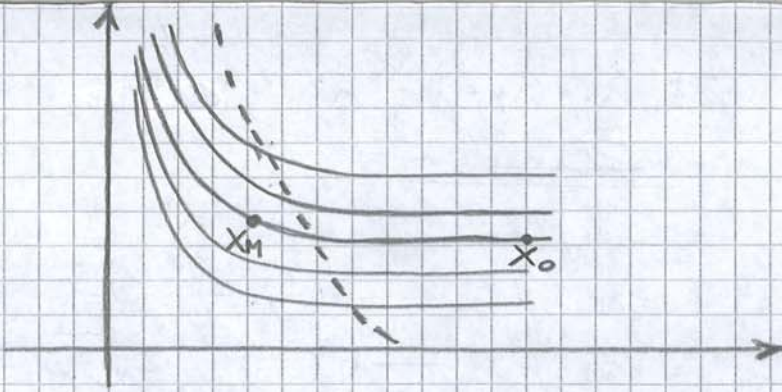
$$X = c R^{1/6} \rightarrow \lambda_x = \lambda_c \cdot \lambda_R^{1/6} = m^{-1/2}$$

$$\rightarrow \lambda_c \cdot \lambda_y^{1/6} = m^{-1/2} \rightarrow \lambda_c \cdot m^{1/6} \cdot \lambda_x^{1/6} = m^{-1/2}$$

$$\lambda_c = m^{-1/2} \cdot m^{-1/6} \cdot \lambda_x^{-1/6} \rightarrow \boxed{\lambda_c = m^{-2/3} \cdot \lambda_x^{-1/6}}$$

$$\boxed{\lambda_{c \text{ MOD. DISTORTO}} < \lambda_{c \text{ MOD. SIMILE}}}$$

Il coefficiente diminuisce rispetto al modello simile \Rightarrow IMPLICA un aumento di scarsità!



Se $Re_m = 1,1 \cdot 10^6$ $Re_m \sqrt{f_m} = 200 \cdot \frac{M}{\epsilon_M}$

$$\rightarrow \frac{1,1 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{0,09}}{800 \times 4} = 200 \cdot \frac{4 y_M}{\epsilon_M}$$

$$\frac{\epsilon_M}{y_M} = 0,053$$

Se eseguo i conto come:

$$Re_m \sqrt{f_0} = \frac{200 \cdot 4 y_M}{\epsilon_{sM}} = Re \lambda^{3/2} \sqrt{f_0}$$

$$\lambda^{3/2} = \frac{200 \cdot 4 y \cdot \lambda}{\epsilon_0 \cdot \lambda Re \sqrt{f_0}}$$

$$\lambda = \left(\frac{200 \cdot 4 y \cdot \lambda}{\epsilon_0 \cdot \lambda Re \sqrt{f_0}} \right)^{2/3}$$

Dunque $\lambda = 0,015077 \approx 1/67$

con tale scala:

$$\lambda_a = \left(\frac{1}{67} \right)^{5/2} = 0,000027 \quad \theta_m = \theta_0 = 39291 \cdot 10^3 \cdot 27 \cdot 10^{-6} = 88,85 \text{ t/s}$$

Perciò con modello non distorto non è possibile passare (coerentemente) da ORIGINALI a MODELLO.

Cosa accadrebbe se invece della portata massima noi considerassimo una portata relativa alla profondità di $y=1\text{mm}$? Se facessimo i relativi conti sia in scala $\frac{1}{100}$ che in scala $\frac{1}{67}$ otterremmo che passando da MODELLO a ORIGINALI il moto di riferimento non rimane costante, dunque si arriva a dire che è necessario procedere con i calcoli, considerando un MODELLO DISTORTO.

$$\lambda_{Re} = \lambda_y^{3/2} = m^{3/2} \cdot \lambda_x^{3/2} = 2^{3/2} \cdot \left(\frac{1}{120}\right)^{3/2} = 2,83 \times 0,00076$$

$$Re_m = Re_o \cdot \lambda_{Re} = 1,1 \times 10^6 \times 76 \times 2,83 \times 10^{-5} = 237\,000 = 2,37 \cdot 10^5$$

$$\lambda_x = m^{-2} \quad \frac{\lambda_M}{\lambda_o} = m^{-1/2} \quad \rightarrow \quad \lambda_M = \lambda_o m^{1/2} \quad \text{con} \quad \frac{\lambda_o^2}{8g} = \frac{1}{f_o}$$

Perciò $\lambda_o = 64,27 \Rightarrow \lambda_M = 2^{-1/2} \times 64,27 = 45,45$ $\hookrightarrow \lambda_o^2 = \frac{8g}{f_o}$

Sostituiremo:

$$\lambda_o^2 = \frac{8g}{f_o} \Rightarrow f_M = \frac{8g}{\lambda_M^2} = 0,038$$

Se riportassi il valore sul diagramma di Moody notiamo che il modello appartiene all'area di Tubo Turbolento! Cio' non è positivo!

$$\lambda_{Re} = 2,83 \times 0,00076 = 0,00215$$

$$Re_m = Re_o \cdot \lambda_{Re} = 0,9 \cdot 10^7 \cdot 0,00076 \cdot 2,83 = 194 \cdot 10^2 = 19400$$

Il punto rappresentativo sul diagramma di Moody è coincidente alle linee di TUBO SCABRO \rightarrow il limite inferiore rispetto ancora il nostro ORIGINALE al di sotto del quale troverai soltanto correnti non applicabili all'originale.

Se mi interessa conoscere la corrente lungo un percorso, ad esempio la portata da monte a valle si utilizza:

$$Q = m \cdot \Omega \cdot \sqrt{2gH} \quad \text{con } m \text{ coeff. che cambia lungo il percorso}$$



A seconda della griglia di "cattura acqua" che si utilizza, il coefficiente m varia diversamente al variare di h/i

Si ottiene per $y(x,t)$ lo stesso valore.

$$y(x,t) = y_0 \sin m \left(x + \frac{2\pi}{m} - ct \right) = y_0 \sin [m(x-ct) + 2\pi] \\ = y_0 \sin m(x-ct)$$

Quindi $\lambda = \frac{2\pi}{m}$ è la PERIODICITÀ NELLO SPAZIO DELLA CURVA

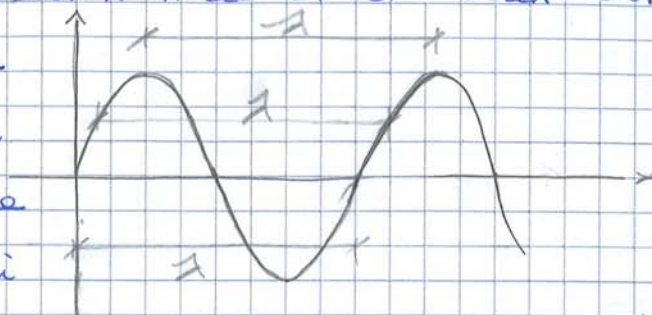
QUI RAPPRESENTATA: cioè la curva

ripete se stessa ogni lunghezza

d'onda λ . Dunque la grandezza

$m = \frac{2\pi}{\lambda}$ rappresenta il numero di lunghezze d'onda λ contenute nella distanza 2π volte l'unità di lunghezze ed è detta NUMERO D'ONDA. Dunque

$$y(x,t) = y_0 \sin m(x-ct) = y_0 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x-ct) \right) \quad (*)$$



Tale equazione rappresenta un'onda sinusoidale o armonica di lunghezza d'onda λ che si propaga verso destra lungo l'asse x con velocità c , e dalla (*):

$$y = y_0 \sin(m x - \underbrace{\omega}_{mc} t) \quad \text{con} \quad \omega = mc = \frac{2\pi}{\lambda} c$$

Chiameremo ω PULSAZIONE D'ONDA e poiché $\omega = 2\pi \nu$ dove ν è la frequenza con cui lo stato fisico varia in ciascun punto x si ottiene l'importante relazione: $\lambda \nu = c$. Naturalmente

se T è il periodo di oscillazione in ogni punto ($T = \frac{2\pi}{\omega}$)

$\Rightarrow (T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu})$ possiamo anche scrivere:

$$y = y_0 \sin m(x \pm ct) = y_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{ct}{\lambda} \right) = \\ = y_0 \sin 2\pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T} \right)$$

Otteniamo così lo stesso risultato. Dall'istante t_0 a $t_0 + T$ per quarti di periodo $T/4$ è riportata in slide:

$$\int_0^T x(t) dt \simeq a_0 \cdot T \Rightarrow a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Ma anche il valore medio della funzione

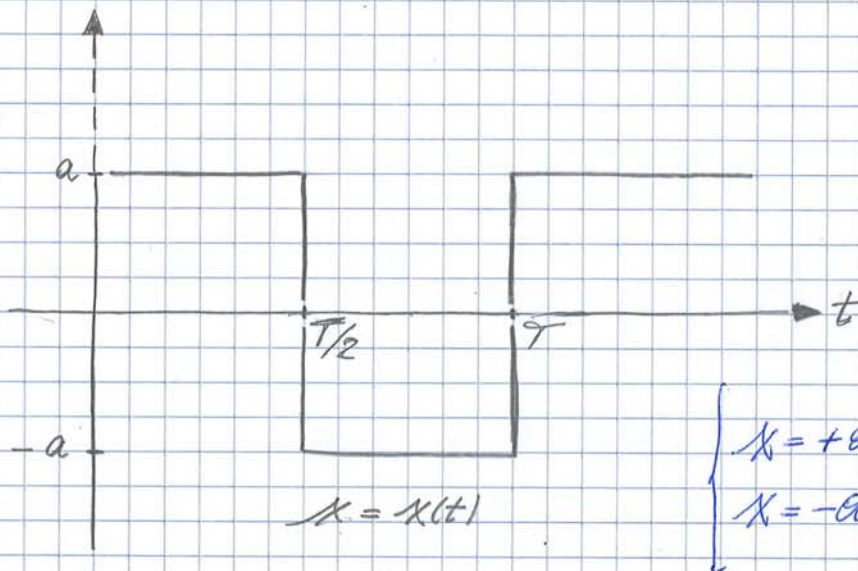
(1) x cos 2wt abbiamo

$$\int_0^T x(t) \cos 2wt dt = a_2 \int_0^T \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt = a_2 \frac{T}{2}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos 2\omega t dt$$

(1) x sen 2wt abbiamo (stesso procedimento)

$$b_2 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin 2\omega t dt$$



$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} a dt - \frac{1}{T} \int_{T/2}^T a dt = \frac{a}{T} \frac{T}{2} - \frac{a}{T} \frac{T}{2}$$

$$a_2 = \frac{2}{T} \int_0^T x \cos 2\omega t dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} a \cos 2\omega t + \int_{T/2}^T a \cos 2\omega t \right] dt$$

$a_0 = 0 \rightarrow$ essendo periodica \rightarrow PRESUMIBILE

$$= \frac{a}{\pi \omega} (2 \sin \pi \omega T - \sin 2\pi \omega T) = 0 \text{ per qualsiasi intero } \omega$$

le b_2 si ottengono sostituendo al coseno il seno

$$\Rightarrow b_2 = \frac{a}{\pi \omega} (1 + \cos 2\pi \omega T - 2 \cos \pi \omega T) \rightarrow \text{per qualsiasi intero } \omega$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= 0 && \text{EQ. DI CONTINUITA'} \\ i_f - \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{u^2}{K^2 R} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

L'equazione di continuità (la 1°) può essere anche scritta come:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \underbrace{\Omega}_{\Omega = \Omega \cdot u} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \quad (*)$$

Il secondo termine invece, per un alveo non prismatico

$$\left(u \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)_{y=\text{cost}} \right) \text{ con } \frac{\partial \Omega}{\partial y} = b$$

Essendo $\Omega = f(y(x,t); x)$

1. Per un canale rettangolare la (*) si scrive come:

$$b y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial b y}{\partial t} = 0$$

ovvero essendo $b = \text{cost.}$ avremo: $y \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$

2. Nella seconda equazione, nonché l'equazione dinamica o equazione del moto si ha:

$$i_f = - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{u^2}{K^2 R} \quad \text{Il termine che esprime la resistenza al moto con cui in idraulica I}$$

è stato posto uguale alla pendenza della linea dell'energia J .

Difatti è comunemente assunto, in prima approssimazione, che esso possa essere assimilata alla relazione stabilita per una corrente uniforme.

$$\begin{aligned} i_f &= \frac{u^2}{2g} \cdot \frac{f}{4R} = \frac{u^2}{2g} \frac{8g}{K^2} \frac{1}{4R} = \\ &= \frac{u^2}{K^2 R} = J \end{aligned}$$

Utilizzando la legge di Chezy:

$$u = K \sqrt{R J} = K \sqrt{R \left(i_f - \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} \right)}$$

Che per una CORRENTE UNIFORME:

$$u = K \sqrt{R \cdot i_f}$$

LE EQUAZIONI DI DE SAINT VENANT SEMPLIFICATE

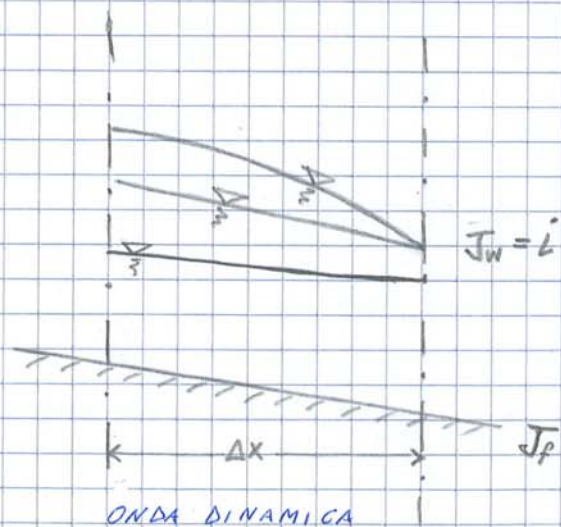
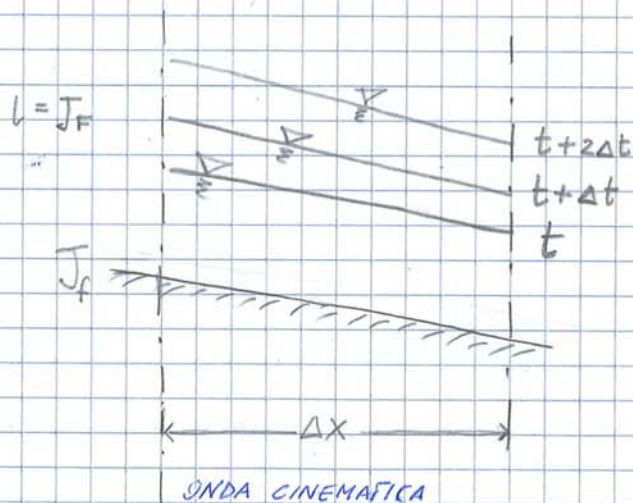
In considerazione dei differenti termini presenti nell'equazione del moto di una corrente NON PERMANENTE e gradualmente variata si distinguono abitualmente i seguenti modelli d'onda

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} = i_p - J$$



Però l'equazione di continuità resta sempre valida per ciascun tipo di onda

ONDA CINEMATICA E ONDA DINAMICA



Come già fatto notare un'onda CINEMATICA richiede una semplificazione dell'equazione del moto mentre un'onda DINAMICA è descritta tenendo presente tutti i termini di tale equazione. Un osservatore posto sulla riva o su una chiglia, tra le due sezioni distanti Δx :

- Nell'onda cinematica $i_p = i = J$ ossia le tre linee sono tra loro parallele
- Nell'onda dinamica invece $i_p \neq i \neq J$

$$\left\{ \begin{aligned} \cancel{lf} - \frac{\partial y}{\partial x} &= \left(\frac{u_0^2}{X_0^2 y_0} + \frac{2u_0 u}{X_0^2 y_0} + \frac{u^2}{X_0^2 y_0} \right) \left(1 - m \frac{y}{y_0} \right) + \frac{u_0}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u_0}{g} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \cancel{u_0} \frac{\partial y}{\partial x} + y_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right.$$

* Trascuriamo i termini del 2° ordine e superiori

$$\left\{ \begin{aligned} \cancel{lf} - \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{u_0^2}{X_0^2 y_0} + \frac{2u_0 u}{X_0^2 y_0} - \frac{u_0^2}{X_0^2 y_0} m \frac{y}{y_0} - \frac{2u_0 u}{X_0^2 y_0} m \frac{y}{y_0} + \frac{u_0}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \cancel{u_0} \frac{\partial y}{\partial x} + y_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{TRASCURO}$$

Bourmes

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{u_0}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 \\ \cancel{u_0} \frac{\partial y}{\partial x} + y_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{EQUAZIONE DI CONTINUITA'}$$

Combinando e otteniamo

$$\boxed{\left(1 - \frac{u_0^2}{g y_0} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{2u_0}{g y_0} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} - \frac{1}{g y_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

Se in tale equazione pongo $y = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$, allora:

CELERITA'

$$\boxed{c = u_0 \pm \sqrt{g y_0}}$$

Valida per rapporti $\frac{1}{H} \geq 25 \div 30$

ELEVATI

È un'equazione di tipo IPERBOLICO. Tali equazioni danno come risultato due integrali generali.

$$\begin{aligned} \text{Con } y = f\left(t - \frac{x}{c}\right) &\longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{c} y'\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} y''\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} &= -\frac{1}{c} y''\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{aligned}$$

Ricordando l'equazione del moto semplificato

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{u_0}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Sostituisce le varie entità

$$\left(\frac{Q}{K}\right)^{1/m} = y \rightarrow Q = by = b \left(\frac{Q}{K}\right)^{1/m}$$

Derivo

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{b}{K^{1/m}} \cdot \frac{1}{m} \cdot (Q)^{1/m-1} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{b}{K^{1/m}} \cdot \frac{Q^{1/m}}{Q} \cdot \frac{1}{m} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$= \frac{Q}{Q} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m \cdot m}$$

$$Ca = \frac{\frac{\partial Q}{\partial t}}{\frac{\partial Q}{\partial s} = -\frac{\partial Q}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial t}}{\frac{1}{m} \cdot m \cdot \frac{\partial Q}{\partial t}} = m \cdot m \cdot m$$

Le velocità con cui il colmo di piena si muove è moltiplicato per un coefficiente m: *da dove sotto fuori*

$m = 3/2 \rightarrow$ Sezione rettangolare

$m = 5/3 \rightarrow$ Sez rettangolare larga.

$$-\frac{m+2}{y_0} \cdot l_f \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{2 l_f}{M_0 y_0} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

$$y = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{1}{c} y' \left(1 - \frac{x}{c}\right) = y'$$

$$\frac{m+2}{y_0} \cdot l_f \cdot \frac{1}{c} y' - \frac{2 l_f}{M_0 y_0} y' = 0$$

Moltiplico per c tutti i termini:

$$(m+2) - \frac{2c}{M_0} = 0 ; \quad (m+2) M_0 = 2c \Rightarrow c = \frac{(m+2) M_0}{2}$$

Se $m=1 \rightarrow c = M_0 \cdot 3/2 = 1,5 M_0$

Se $m=4/3 \rightarrow c = M_0 \cdot 5/3 = 5/3 M_0$

Le FORMOLE DI DEFUSSO si ricavano:

$$Q = \underbrace{b}_{\Omega} \cdot \underbrace{y}_{X} \cdot \underbrace{c}_{\frac{1}{m}} y^{1/m} \cdot \sqrt{y} l_f$$

$$= b \cdot c \cdot y^{1 + \frac{1}{m} - \frac{1}{2}} \cdot l_f^{1/2} = b c y^{5/3} l_f^{1/2}$$

Se

$$y = A e^{-\lambda x} \sin m(x - ct)$$

Equazione di un'onda che tende ad attenuarsi (- nell'esponenziale)

Stettendo a confronto le due equazioni (perturbazione foverica e perturbazione su filo libero) posso ricavare una definizione di λ .

$$\cancel{u_0} - \sqrt{g y_0} = \cancel{u_0} + u_0 \cdot \frac{m l_f - 2 \lambda y_0}{2 (F_2^2 \lambda y_0 + l_f)}$$

Divido tutto per $\sqrt{g y_0}$

$$-1 = \underbrace{u_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{g y_0}}}_{F_2} \cdot \frac{m l_f - 2 \lambda y_0}{2 (F_2^2 \lambda y_0 + l_f)}$$

$$\Rightarrow -2 (F_2^2 \cdot \lambda y_0 + l_f) = F_2 (m l_f - 2 \lambda y_0) =$$

$$\Rightarrow -2 F_2^2 \cdot \lambda y_0 + 2 F_2 \lambda y_0 = F_2 m l_f + 2 l_f$$

$$\Rightarrow \text{per } m=1 \quad 2 F_2 \lambda y_0 (-F_2 + 1) = l_f (F_2 + 2)$$

$$\lambda = \frac{l_f (F_2 + 2)}{2 F_2 y_0 (1 - F_2)}$$

ONDA LENTA

ONDA LENTA:

ALVEO FLUVIALE: $l_f < l_c \quad F_2 < 1 \Rightarrow \lambda \cdot x < 0$

L'ONDA LENTA si propaga da valle verso monte (VERSO NEGATIVO DELL'ASSE X) $\Rightarrow e^{\lambda x} \rightarrow 0$ cioè l'onda risalendo le correnti si attenua.

ALVEO TORRENTIZIO: $l_f > l_c \quad F_2 > 1 \Rightarrow \lambda x < 0$

L'ONDA VELOCE si propaga da monte verso valle (VERSO POSITIVO NELLE X) $\Rightarrow e^{\lambda x} \rightarrow 0$ cioè l'onda si attenua andando verso valle

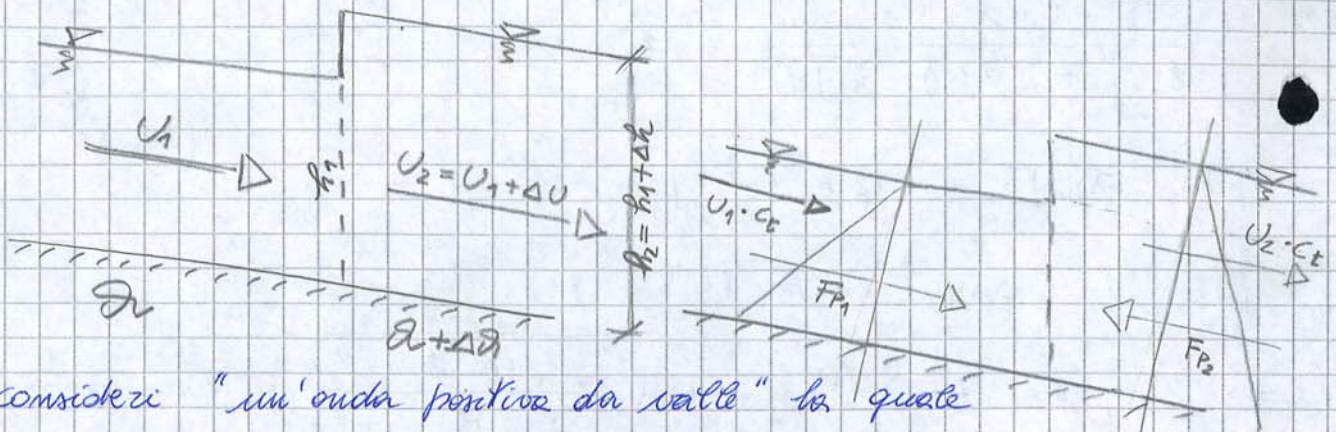
\Rightarrow L'onda che scade verso monte o che scade verso valle esse si DISSIPAN

ONDA VELOCE

$$\cancel{u_0} + \frac{l_f - 2 \lambda y_0}{2 (l_f + F_2^2 \lambda y_0)} u_0 = \cancel{u_0} + \sqrt{g y_0}$$

ONDE IDRONAUTICHE

DISCUTERE QUESTE ONDE



Si consideri "un'onda porticoe da valle" la quale si propaga in corrente uniforme (iniziale) con velocità U_1 generata a seguito di una variazione brusca di ΔR di portata liquida.

- Supponendo che il fronte d'onda rappresenti una brusca discontinuità
- la velocità U_2 è quella che compete al corpo della corrente (base + l'intumescenza)
- c_t è la velocità di propagazione del fronte d'onda o CELERITA' DELL'ONDA DI TRASLAZIONE.

Per un osservatore che si muove con la stessa velocità c_t dell'onda il fenomeno appare stazionario (NOTA BENE)

L'equazione di continuità Portata in ① = Portata in ②

$$(U_1 - c_t) S_1 = (U_2 - c_t) S_2 = (U_1 + \Delta U - c_t) (S_1 + \Delta S)$$

$$U_1 S_1 - c_t S_1 = (U_1 + \Delta U) (S_1 + \Delta S) - c_t (S_1 + \Delta S)$$

$$U_1 S_1 - c_t S_1 = (U_1 + \Delta U) (S_1 + \Delta S) - c_t S_1 - c_t \Delta S$$

$$c_t \Delta S = (U_1 + \Delta U) (S_1 + \Delta S) - U_1 S_1$$

$$c_t = \frac{Q_2 - Q_1}{\Delta S} = \frac{Q_2 - Q_1}{(h_2 - h_1) b}$$

$$c_t = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{\Delta Q}{(h_2 - h_1) b} = \frac{\Delta Q}{\Delta h} \rightarrow \frac{d(Uh)}{dh}$$

possiamo ora introdurre l'equazione del moto.

In un canale a sezione rettangolare le relazioni (1) e (2) permettono di calcolare (per tentativi) C_t e $\Delta h = h_2 - h_1$ allora quando U_1 , h_1 e ΔS siano noti. Per le altre onde le trattazioni è analoga e si ricava:

$$C_t(\pm) = U_1 \pm \sqrt{g h_1} \cdot \sqrt{\frac{h_2}{2h_1} \left(1 \pm \frac{h_2}{h_1}\right)}$$

Il segno - è per le due onde da valle; il segno + per quelle da monte.

Per un canale a sezione trapezoidale o parabolica

$$C_t = U_1 \pm \sqrt{g} \sqrt{(S_2 h_{c2} - S_1 h_{c1}) / S_1 (1 - S_1/S_2)}$$

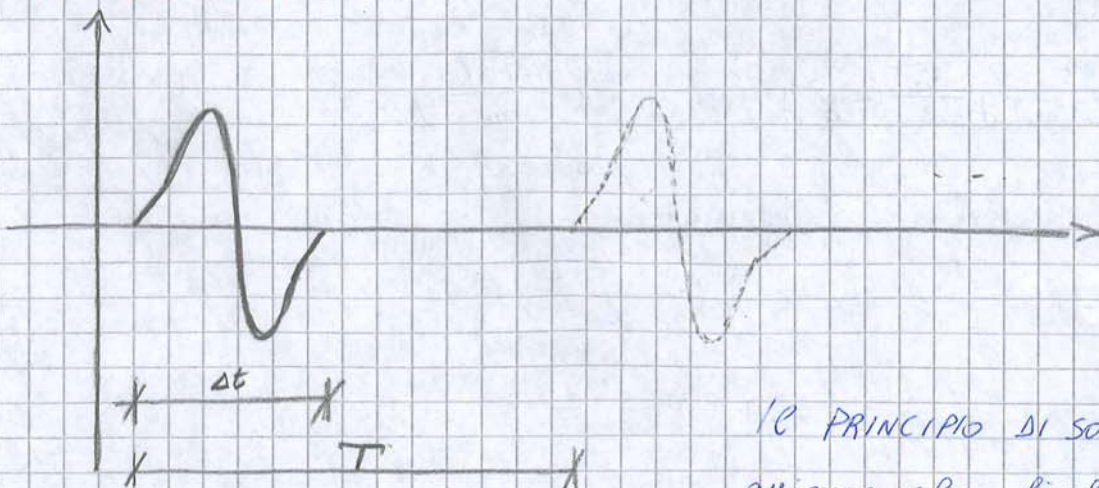
Un calcolo più raffinato condotto tenendo conto:

1. Fronte d'onda non verticale
2. Filletti fluidi hanno una certa curvatura

Si arriva all'espressione:

$$C_t = U_1 \pm \sqrt{g h_1} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{h_2 - h_1}{h_1} + \frac{h_1^2}{6(h_2 - h_1)} \frac{d^2(h_2 - h_1)}{dx^2} \right)$$

ONDE SINUSOIDALI



IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE
 assicura che, finché le perturbazioni sono piccole,

l'effetto della presenza contemporanea di più perturbazioni in un mezzo è pari alla somma degli effetti dovuti a ciascuna perturbazione

$$0 - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad |_{y=H}$$

\swarrow POTENZIALE
 \searrow \rightarrow 0 X 0, SOTTO SUL PELLO LIBERO
 \swarrow \rightarrow INFINITESIMO DEL II ORDINE $\Rightarrow 0$

$$-g\eta - \frac{p_{atm}}{\rho} - \frac{u^2 + v^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

η = Spostamento in direzione y
 ξ = Spostamento in direzione x

$$u = \frac{\Delta \xi}{\Delta t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + \dots$$

$$v = \frac{\Delta \eta}{\Delta t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + \dots$$

$$-g\eta - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad |_{y=0}$$

$$\eta + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad |_{y=H}$$

Derivo rispetto al tempo (X ottenuta un'eq) \rightarrow un'eq

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad |_{y=H}$$

VALIDA SUL PELLO LIBERO

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad |_{y=H}$$

CONDIZIONE DI POISSON

Chiamo:

$$\varphi = Y(y) \cdot X(x-ct) \quad \text{con} \quad X(y) = \text{sen } m(x-ct)$$

Sempre $\nabla \varphi = 0 \quad m = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \varphi = \text{sen}(x-ct)$

$$Y''(y) \text{sen } m(x-ct) - m^2 \text{sen } m(x-ct) \cdot Y(y) = 0$$

$$\hookrightarrow Y''(y) - m^2 Y(y) = 0$$

$$Y = A \text{sewh}(my) + B \text{cosh}(my) \quad \text{mentre sul fondo} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad |_{y=0}$$

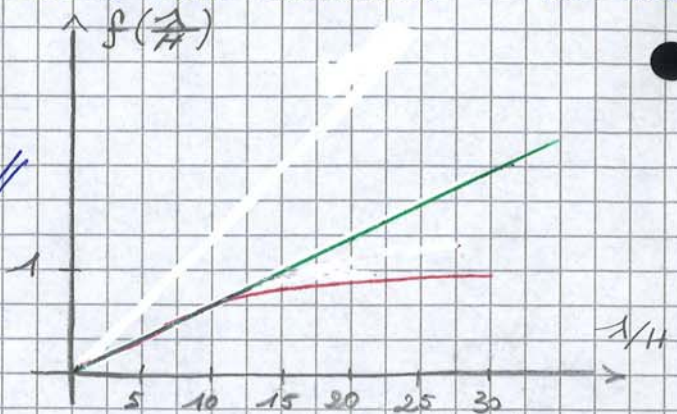
$$\varphi = (A \text{sewh}(my) + B \text{cosh}(my)) \text{sen } m(x-ct)$$

Supponiamo di chiamare $f(\frac{\lambda}{H}) = \frac{\lambda}{2\pi H} \tanh \frac{2\pi H}{\lambda}$ (ossia la parte sotto radice) e di tracciarne un andamento su un grafico $f(\frac{\lambda}{H})$ e λ/H :

$$\lim_{\frac{\lambda}{H} \rightarrow \infty} f(\frac{\lambda}{H}) = \frac{\lambda}{2\pi H} \cdot \frac{2\pi H}{\lambda} = 1$$

$f(\frac{\lambda}{H})$ si stacca sensibilmente dalla retta per valori di $\lambda/H = 2 \div 3$

$f(\frac{\lambda}{H})$ diventa asintotica per valori di $\lambda/H = 25 \div 30$



Tale valore, lo avevamo individuato quando, discutendo le Equazioni di De-Saint Venant eravamo giunti ad un valore $\lambda \approx 25 \div 30$ come intervallo di validità della celerità

$$c = \pm \sqrt{gH} \quad \text{per } \frac{\lambda}{H} \text{ PICCOLI} \quad \text{in cui } \tanh k = 1 \Rightarrow \text{Si ricade in Boussinesq}$$

in quanto abbiamo ipotizzato moto irrotazionale e trascurato gli stessi termini di forma

Un'opinione ora un canale all'interno del quale si muove dell'acqua con velocità u_0 , ciò che un osservatore sulla riva vede è:

$$C = u_0 \pm \sqrt{gH} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi H} \tanh \frac{2\pi H}{\lambda}}$$

Se $u_0 < \sqrt{gH} \cdot \sqrt{\dots}$ l'onda LENTA RISALE LA CORRENTE
 Se $u_0 > \sqrt{gH} \cdot \sqrt{\dots}$ l'onda LENTA VA VERSO VALLE

Se dividiamo entrambi i membri per \sqrt{gH}

$$\frac{u_0}{\sqrt{gH}} > \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi H} \tanh \frac{2\pi H}{\lambda}}$$

$$\frac{u_0}{\sqrt{gH}} < \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi H} \tanh \frac{2\pi H}{\lambda}}$$

Il valore $\frac{u_0}{\sqrt{gH}}$ è la definizione del numero di Froude

$$\Rightarrow F_2 < \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi H} \tanh \frac{2\pi H}{\lambda}} \quad \text{CORRENTE LENTA IN CUI L'ONDA RISALE VERSO MONTE}$$

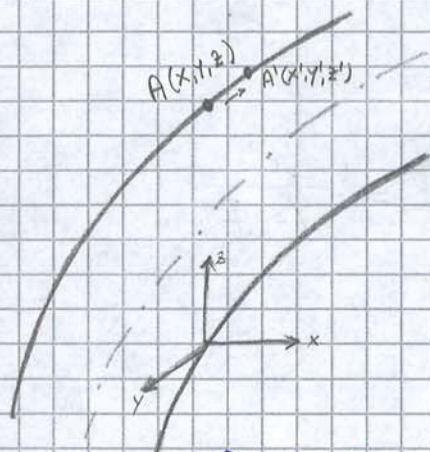
esm. Immaginiamo un canale percorso da acqua in moto uniforme $u_0 = 3,64 \text{ m/s}$ ed $H = 2 \text{ m}$. Si propagano in moto ondato con onde caratterizzate da $\lambda = 10 \text{ m}$

$$\frac{l_f}{l_c} = \frac{\lambda}{2\pi H} \cdot \text{tanh} \frac{2\pi H}{\lambda}$$

$$= \frac{10}{2\pi \cdot 2} \cdot \text{tanh} \frac{2\pi \cdot 2}{10}$$

$= 0,675 \Rightarrow$ se $l_f > 0,68 l_c$ E' VERIFICATA A UORA L'ONDA VA VERSO VALLE

Possiamo nella situazione:



CON SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSO le coordinate di un punto in movimento da A a A' diventano:

$$x' = x + \xi$$

$$y' = y + \eta$$

$$z' = z + \zeta$$

Perciò le componenti lungo x e lungo y si possono definire:

$$u = \frac{D\xi}{Dt} \approx \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$v = \frac{D\eta}{Dt} \approx \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Ricordando

$$\zeta \eta + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \Big|_{y=H}$$

$$\hookrightarrow \eta + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \Big|_{y=H}$$

Possiamo trovare η :

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{y=H}$$

$$\text{ma } \varphi = B \cosh(\eta) \sin m(x-ct)$$

Sostituendo in η la derivata di φ

$$\eta = -\frac{1}{g} (-mc) B \cosh m\eta \cos m(x-ct) \Big|_{y=H}$$

$-1 \leq \cos m(x-ct) \leq 1$

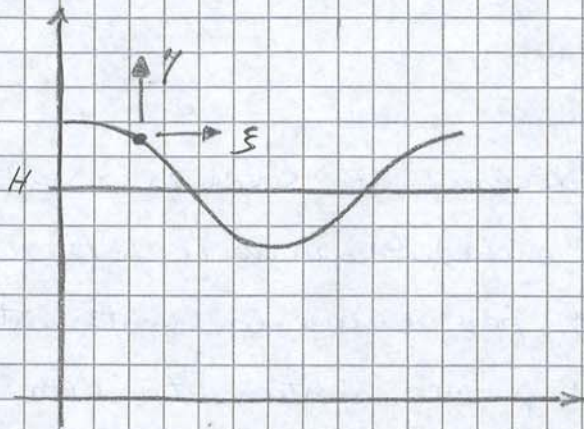
Con $a = \frac{mc}{g} B \cosh(2H)$

e $B = \frac{ag}{2mc^2 \cosh H}$

↑
AMPIEZZA
D'ONDA

Se invece l'orbita fosse aperta, ad ogni ciclo si ottiene lo spostamento delle particelle di una certa quantità con trasporto della massa:

Ricordando ciò che abbiamo detto precedentemente:



Indicando con ξ = SPOSTAM. RISPETTO L'ASSE DELLE X

e η = SPOSTAM. RISPETTO L'ASSE DELLE Y

Sappiamo essere u la derivata sostanziale di ξ rispetto a t , ossia simile con la sua derivata parziale. La u la sappiamo anche $u = \frac{\partial \xi}{\partial x}$

Per cui possiamo scrivere:

$$u = \frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

E analogamente per la v

$$v = \frac{D\eta}{Dt}$$

Più esplicitamente

$$\frac{D\xi}{Dt} = mB \cosh my \cos m(x-ct)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = mB \sinh my \sin m(x-ct)$$

Che integrate rispetto al tempo danno

$$\xi = -\frac{B}{c} \cosh my \sin m(x-ct)$$

$$\eta = \frac{B}{c} \sinh my \cos m(x-ct)$$

Se lo sommo al quadrato e lo sommo otterremo l'unità cioè lo spostamento unitario

$$\frac{\xi^2}{\frac{B^2}{c^2} \cosh^2 my} + \frac{\eta^2}{\frac{B^2}{c^2} \sinh^2 my} = 1$$

SECONDA APPROSSIMAZIONE - ORBITE APERTE

Riprendiamo le espressioni:

$$\xi = -\frac{B}{c} \cosh(my) \sin m(x-ct)$$

$$y = +\frac{B}{c} \sinh(my) \cos m(x-ct)$$

Il valore di B lo avevamo definito come:

$$B = \frac{A \cdot c}{2 \sinh(mH)}$$

e u definito come derivata sostanziale o porzione della componente spostamento lungo l'asse x :

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = mB \cosh(my) \cos m(x-ct)$$

Se il sistema è solido con le particelle dobbiamo tener conto dell'incremento $(x+\xi)$ e $(y+\eta)$ rispettivamente nelle coordinate x e y

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = mB \cosh(m(y+\eta)) \cos(m(x+\xi)-ct)$$

Se procedo a svilupparla:

$$u_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \approx mB [(\cosh my \cosh m\eta + \sinh my \sinh m\eta) (\cos m(x-ct) \cdot \cos m\xi - \sin m(x-ct) \sin m\xi)]$$

Non trascurate

Sostituendo la definizione di B (ricordate sopra) e considerando η e ξ due quantità piccole, rispetto ai valori "principali" x e y (che sono del primo ordine), trascurando le quantità del II ordine (o superiori) e sviluppando in serie le funzioni \cosh , \sinh , \sin e \cos stappate al primo ordine, otteniamo:

$$\cosh m\eta = 1; \sinh m\eta = m\eta; \cos m\xi = 1; \sin m\xi = m\xi$$

La u diventa:

$$u_1 = \frac{mAc}{2 \sinh mH} [(\cosh my + m\eta \sinh my) (\cos m(x-ct) + m\xi \sin m(x-ct)) - m\xi \sin m(x-ct)]$$

sono moltiplicato per t , cioè:

$$\int \dots = \frac{A^2 m^2 c}{8 \sinh^2 mH} \cosh 2my \cdot t$$

Concludendo la u di trasporto u_t :

$$u_t = \frac{A^2 m^2 c}{8 \sinh^2 mH} \cosh 2my$$

Tale VELOCITÀ DI TRASPORTO, sul fondo è definita ponendo $= 0$ la y .

$$u_{t_f} = \frac{A^2 m^2 c}{8 \sinh^2 mH} \cosh(0) \Big|_{y=0}$$

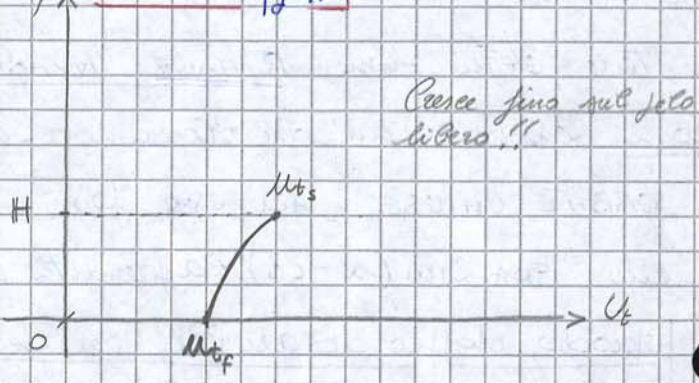
$$= \frac{A^2 m^2 c}{8 \sinh^2 mH} \Big|_{y=0}$$

Significativamente anche la velocità sul pelo libero è definita

Come:

$$u_{t_H} = \frac{A^2 m^2 c}{8 \sinh^2 mH} \cosh(2mH) \Big|_{y=H}$$

È possibile diagrammare la velocità di trasporto, come è rappresentato a lato:



È necessario notare come la velocità di trasporto è piccola rispetto alla velocità delle particelle

celle, in quanto quest'ultima è proporzionale a $\frac{A}{\lambda}$ (in prima approssimazione), mentre quella di trasporto è proporzionale a $\frac{A^2}{\lambda^2}$

Facciamo un esempio, : $A = 1 \text{ m}$ $\lambda = 20 \text{ m}$ avremo che:

$$u = \frac{1}{20} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \text{ mentre } u_t = \frac{1^2}{20^2} = \frac{1}{400} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Dedotto ciò le orbite descritte dalle particelle anche se di poco non sono chiuse, ad ogni giro della particella si sovrappone una velocità di trasporto, costante ad ogni quota, nella direzione dell'asse x . In definitiva l'orbita non si richiude mai. Per conoscere la velocità media di trasporto è sufficiente ricavare il valor medio delle u_t , nella sezione considerata.

- θ mentre $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ deve rimanere costante anche cambiando θ in $-\theta$

Semplicemente il $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$ ha la seguente spiegazione.

Consideriamo la figura precedente, l'intorno delle creste delimitate dalle due superfici, le cui tangenti rispetto alla verticale formano un angolo θ e $-\theta$. Il $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ ci fornisce l'incremento del potenziale per un incremento infinitesimo di θ . Per θ diverso da 0 significherebbe che esiste una velocità \perp al profilo dell'acqua; cioè è come se l'acqua uscisse da se stessa. Il $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ deve essere uguale a destra e a sinistra, il che significa che ponendo θ o $-\theta$ l'espressione di $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ deve essere la stessa, il che si può verificare \Leftrightarrow nell'espressione c'è un seno.

seno. Quindi $\varphi = A z^m \sin m\theta$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = A m z^m \cos(m\theta)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = A m z^{m-1} \sin m\theta$$

La particella che scivola dalla cuspidine lungo il profilo dell'onda, lo fa come lo farebbe un grave che cade lungo un piano inclinato dunque la velocità è proporzionale alla radice della distanza $\rightarrow m-1 = \frac{1}{2} \rightarrow m = \frac{1}{2} + 1 = 3/2$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{3}{2} A z^{3/2} \cos\left(\frac{3}{2}\theta\right)$$

Avremo detto che $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ deve annullarsi a destra e a sinistra

$$\hookrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = a m z^m \cos m\theta = \frac{3}{2} A z^{3/2} \cos \frac{3}{2}\theta$$

$\hookrightarrow \neq 0$ \hookrightarrow può essere $= 0$

Dunque $\cos \frac{3}{2}\theta = 0$ - Ogni valore di θ che confermi questa regola equivale ad un θ possibile

$$\theta = \frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ \quad \leftarrow \text{Condizione critica perché un'onda si trovi nella situazione di poter frangere}$$

Naturalmente il jump a spigolo vivo non risulta flangibile nelle

$$g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\rho} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} \Big|_{y=H}$$

L'ho ottenuta sostituendo opportunamente i termini e notiamo che il primo non è più uguagliato a zero, ma ad una certa quantità ($\neq 0$), essa tiene conto del salto di pressione esistente attraverso la superficie dovuto alla tensione superficiale. Ammettendo che l'ordine di derivazione sia totalmente inessenziale avremo:

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} \quad \varphi = B \cosh my - \sin m(x-ct)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = B m^2 \sinh my \cos \vartheta \quad \text{con } \vartheta = (x-ct)m$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -B m^3 \sinh my \sin \vartheta$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = B(-mc) \cosh(my) \cos \vartheta$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = B(-mc)(mc) \cosh(my) \sin \vartheta$$

Si può intendere come derivata seconda di φ rispetto a x della derivata prima di $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ rispetto a y

Dalla formula del potenziale

$$g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\rho} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} \Big|_{y=H}$$

Otteniamo

$$C = \sqrt{\frac{g}{m} \tanh(mH) \left(1 + \frac{\rho m^2}{\gamma}\right)} \quad \text{CELERITA' TENENDO CONTO DELLA TENSIONE TANGENZIALE}$$

A differenza di quella ricavata precedentemente

$$C = \sqrt{\frac{g}{m} \tanh(mH)}$$

Tale equazione (completa) non desta particolare interesse, perché abbiamo visto come per lunghezze d'onda abbastanza lunghe la TENSIONE SUPERFICIALE HA POCA IMPORTANZA. Viceversa per onde caratterizzate da $\lambda/H < 3$ la TENSIONE SUPERFICIALE gioca un ruolo importante ed occorre studiare la soluzione relativa alle onde in

Ottenere l'energia totale, indicheremo con "E" l'energia contenuta in una lunghezza d'onda. Immaginando di avere due onde una che si propaga verso destra e un'altra identica che si propaga in senso opposto, può succedere ad un certo istante ^{che} esse si sovrappongano eliminandosi per interferenza (cio' avviene quando si sono due onde che partono senza alcun sfasamento), ovvero si sovrappongono raddoppiando la loro ampiezza (cio' avviene quando le due onde sono sfasate di mezzo periodo). Nel primo caso non c'è moto ma esiste una certa energia dell'onda poiché essa è espressa da un'equazione in forma quadratica, definita positiva. Dunque le energie delle due onde si sommano. Ed allora è opportuno introdurre alcune considerazioni sul flusso di energia F associato ad un'onda, prescindendo dalle eventuali modificazioni di forma che un'onda può subire durante il moto. È noto dalla fisica che in un intervallo di tempo pari al periodo T dell'onda vale la relazione seguente:

$$\frac{F}{E} = \frac{C_g}{C} \quad \begin{matrix} F = \text{Flusso} \\ E = \text{Energia} \end{matrix}$$

Dove C_g è la velocità di gruppo cioè la velocità con cui si sposta il treno d'onde e C è la velocità di ogni singola onda.

Essendo in un mezzo dispersivo, la velocità d'onda è funzione di λ (lunghezza d'onda), l'altro di lunghezza d'onda $\lambda + d\lambda$ e così via. L'espressione di C_g invece scritta in funzione di m è

$$C_g = \frac{d(mc)}{dm} = c + m \frac{dc}{dm} \quad \text{con } m = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Per calcolare i valori dell'energia E useremo l'espressione infinitesimale dell'energia potenziale per unità di lunghezza.

Facendo riferimento alla figura sottostante si ha:

$$dE_p = \frac{\gamma y^2 dx}{2}$$

$$\frac{m}{C} \frac{dc}{dm} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{mH}{\cos^2(mH) \operatorname{sech}(mH)}$$

$$\frac{C_g}{C} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{mH}{\cos^2(mH) \operatorname{sech}(mH)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2mH}{\operatorname{sech}(2mH)} \right)$$

Uguaglio a $\frac{F}{E}$ utilizzando la relazione $\frac{F}{E} = \frac{C_g}{C}$

$$\frac{F}{E} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2mH}{\operatorname{sech}(2mH)} \right) \Rightarrow F = \frac{\rho a^2 \gamma}{4m} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2mH}{\operatorname{sech}(2mH)} \right)$$

per $H \rightarrow \infty$ $\frac{C_g}{C} = 1/2$

La velocità di gruppo è circa 2 volte la velocità di fase (onda singola)

È opportuno notare che l'espressione di Eror è stata ottenuta con l'ipotesi di LIQUIDO IRROTAZIONALE PERFETTO ma, in realtà, si tratta di un moto non rigorosamente irrotazionale e neppure il liquido è rigorosamente perfetto. Infatti tale liquido possiede una certa viscosità tenuta in considerazione nell'equazione di Navier-Stokes. I risultati però ottenuti, trascurando la viscosità, sono comunque di estrema utilità, in quanto eccetto uno strato limite sottilissimo il liquido si comporta come perfetto. E tale comportamento si riscontra anche nei modelli predisposti per lo studio delle onde, il liquido si comporta in modo molto prossimo a quello di un liquido perfetto.

Proviamo ad esaminare un caso studio

- onde di mare
- T (periodo) = 44.300 sec. (onda quasi inintercettibile) (circa 12 h)
 - 6 ore per salire e 6 ore per scendere
 - Le particelle sono estremamente allungate (km) quindi la $\frac{2E}{\rho t}$ è una velocità che dà luogo ad una corrente di andata e ritorno anche senza grossi trasporti di massa
 - λ molto elevato \rightarrow Ellissi sono molto schiacciate a tal punto da degenerare a segmenti di retta.

Braccio di mare lagunare

- Grande profondità e l'altezza dell'ordine di molte decine di metri
- Numeri di Re (10-15 milioni) portano un comportamento del liquido perfetto anche nello strato superficiale.

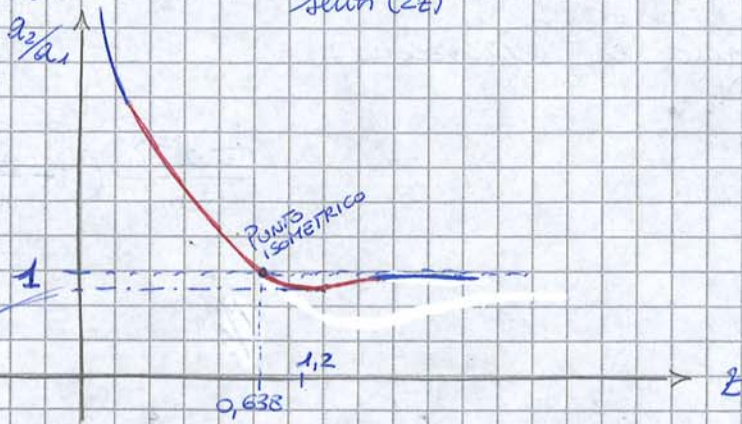
Primo: $m_2 H_2 = Z \rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{\tanh(z) \cdot \left(1 + \frac{2z}{\operatorname{sech} 2z}\right)^2}}$

Se $z \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{2z^2}} \Rightarrow \frac{1}{0} = \infty$

Se $z \rightarrow \infty \Rightarrow \tanh(z) \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{2z}{\operatorname{sech}(2z)} = 0$

Quindi $\frac{a_2}{a_1} = 1$
 Il punto isometrico indica il valore della

z per la quale l'onda a lungo torna ad avere la stessa ampiezza che aveva originariamente.



Se tenessimo conto dell' ONDA RIFLESSA



$a_1 - a_2 = a_2 \quad m_2 = m_1 \quad M_2 = M_1$

$\frac{a_1^2}{m_1} M_1 - \frac{a_2^2}{m_1} M_1 = \frac{a_2^2}{m_2} M_2$
 $(a_1^2 - a_2^2) \cdot \frac{M_1}{m_1} = \frac{a_2^2}{m_2} \cdot M_2$

$(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) = a_2^2 \frac{\tanh^2(m_2 H_2)}{\tanh(m_1 H_1)} \cdot \frac{M_2}{M_1}$

$\Rightarrow 2a_1 = a_2 \left(\frac{\tanh(m_2 H_2)}{\tanh(m_1 H_1)} \cdot \frac{M_2}{M_1} + 1 \right)$

Quindi il rapporto

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{\left(\frac{\tanh(m_2 H_2)}{\tanh(m_1 H_1)} \cdot \frac{M_2}{M_1} + 1 \right)}$

Se $H_1 \rightarrow 0$ allora

$= \frac{2}{\left(\tanh(m_2 H_2) \frac{M_2}{M_1} + 1 \right)} = \frac{2}{1 + \tanh z \cdot \frac{z_2}{\operatorname{sech} z_2}}$

$$\Rightarrow \frac{a_1^2}{m_1} \left(1 + \frac{2m_1 H_1}{\sinh 2m_1 H_1} \right) = \frac{a_2^2}{m_2} \left(1 + \frac{2m_2 H_2}{\sinh 2m_2 H_2} \right)$$

Ne ricavo il rapporto:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{1 + \frac{2m_1 H_1}{\sinh 2m_1 H_1}}{1 + \frac{2m_2 H_2}{\sinh 2m_2 H_2}}$$

È detto rapporto di TRASMISSIONE. Ho bisogno però di conoscere m_1 e m_2 in quanto indeterminati. A tale equazione associamo una seconda relazione, che si basa sull'invarianza del PERIODO D'ONDA. Ricordando che $\lambda = c \cdot T$ si ricava $T = \frac{\lambda}{c = \text{costante}}$ esm $\lambda = \frac{2\pi}{m}$ allora $T = 2\pi / (m \cdot c) = \text{cost} \Rightarrow m \cdot c = \text{cost}$ ma sapendo che

$$c = \sqrt{\frac{g}{m} \tanh(mH)} = \text{cost} \rightarrow m \sqrt{\frac{g}{m} \tanh(mH)} = \text{cost}$$

Come finire

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\tanh(m_1 H_1)}{\tanh(m_2 H_2)}$$

posto $m_2 H_2 = z$

$$m_1 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 = \frac{1}{\tanh(z)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{2z}{\sinh^2(z)} \right)}$$

Da cui

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{\tanh(z) \cdot \left(1 + \frac{2z}{\sinh^2(z)} \right)}}$$

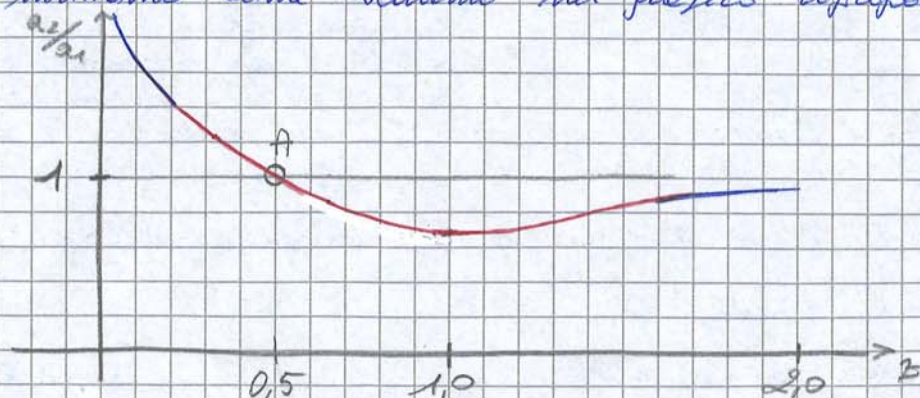
Da tale espressione possiamo dedurre che:

a) Se $z \rightarrow \infty$ $a_2/a_1 \rightarrow 1$

b) Se $z \rightarrow 0$ $a_2/a_1 \rightarrow \infty$

Utile si può controllare rapidamente che passando da $H \rightarrow \infty \Rightarrow e^{\lambda}$ relativamente piccolo in sezione 1 e viceversa in

sezione 2 a riva, l'onda va acquisita nel suo punto isometrico. A l'ampiezza che aveva a largo ($a_2 = a_1$) dopo essere decresciuta fino ad un minimo come vediamo nel grafico riportato



$$\left[\cancel{p} \Omega - \left(\cancel{p} + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \Omega - \gamma \Omega dx \sin \alpha \right] dt = - \cancel{p} \Omega dx \frac{dU}{dt}$$

Devono essere uguali alle quantità di moto

Dopo le proposte semplificazioni avremo

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \Omega dx - \gamma \Omega dx \sin \alpha = - \cancel{p} \Omega dx \frac{dU}{dt}$$

Osservato che $z = x \sin(\alpha)$ e quindi $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin(\alpha)$ si ha:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \frac{\partial z}{\partial x} = - \cancel{p} \frac{dU}{dt} \quad \text{DIVIDO PER } \Omega dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\cancel{p}}{\gamma} \frac{dU}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \right] = \frac{1}{\gamma} \frac{dU}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} \frac{dU}{dt}}$$

La VARIAZIONE DI CARICO PIEZOMETRICO è pari alla variazione nel tempo della velocità moltiplicato per l'inverso dell'accelerazione gravitazionale

Possiamo ancora processare la formula:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} \frac{dU}{dt}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}$$

\rightarrow TRASCURABILE RISPETTO A $\frac{\partial U}{\partial t}$

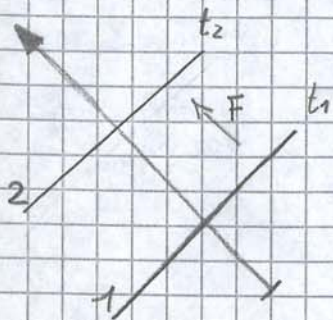
Per cui l'equazione al moto diventa

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} \frac{dU}{dt}}$$

Si trascura la $U \frac{\partial U}{\partial x}$ rispetto a $\frac{\partial U}{\partial t}$ non perché la U sia piccola

ma bensì perché è trascurabile la sua variazione lungo x , dal momento che le VARIAZIONI DI SEZIONE e di COMPRESSIBILITÀ SONO PICCOLE

Considero 2 sezioni



La forza F che si sposta da 1 a 2 negli istanti t_1 e t_2 si può definire come:

$$t_1 - \frac{x_1}{a} = t_2 - \frac{x_2}{a}$$

$$\frac{x_2}{a} - \frac{x_1}{a} = t_2 - t_1$$

$> 0 \quad > 0$

È ancora

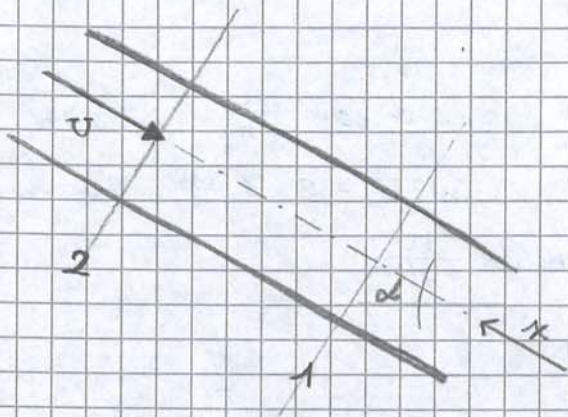
$$t_1 + \frac{x_1}{a} = t_2 + \frac{x_2}{a}$$

$$\frac{x_2 + x_1}{a} = t_1 - t_2$$

$> 0 \quad > 0$

Essendo t_1 il PASSATO e t_2 il FUTURO il loro $\Delta t = t_2 - t_1$ dovrebbe essere > 0 invece nel nostro caso $t_1 - t_2 > 0$ dunque ciò ci fa capire che F CAMBIA SEGNO per trasformarsi in f

EQUAZIONE DI CONTINUITA'



Nel tempo dt da 1 si vede trascinare la massa $\rho \Omega dx$, nel medesimo tempo entra in 2 la massa $\rho \Omega dx + \frac{\partial \rho \Omega}{\partial x} dx dt$.
 Conoscendo nel tempo dt la massa entrata differisce da quella uscita della quantità:

tra:

$$\left(\rho \Omega dx + \frac{\partial \rho \Omega}{\partial x} dx dt \right) - \rho \Omega dx = \frac{\partial \rho \Omega}{\partial x} dx dt$$

La massa contenuta tra 1 e 2 nel tempo dt è passata dal valore iniziale $\rho \Omega dx$ al valore finale $\rho \Omega dx + \frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} dt dx$,
 e poiché nel tempo dt la VARIAZIONE DI MASSA È:

$$\rho \Omega dx - \left(\rho \Omega dx + \frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} dt dx \right) = - \frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} dt dx$$

Per l'equazione di continuità però le due quantità devono essere uguali. Quindi:

$$\frac{\partial \rho \Omega}{\partial x} dx dt - \frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} dx dt = 0$$

Da cui:

$$\frac{\partial \rho \Omega}{\partial x} dx dt = \frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} dx dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \rho \Omega}{\partial t}} \Rightarrow \frac{\partial \rho \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \rho \Omega}{\partial t}$$

Tale equazione, alle derivate parziali da origine a:

~~$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \Omega + \rho \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega$$~~

~~$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \Omega = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega$$~~

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial t}}$$

Occorre far notare che nell'equazione del moto, si è trascurato $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ e si è tenuto $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Mentre in questo caso (EQUAZ. DI CONTINUITA')

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\gamma + \frac{\Delta \gamma}{E \Delta x} \right) \frac{\partial h}{\partial t} = \gamma \cdot \left(\frac{1}{E} + \frac{\Delta}{E \Delta x} \right) \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\gamma}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t}$$

capacità
che
onda
si
propaga
nel
fluido

Certamente se cambiamo il fluido oppure cambiamo lo spessore S o ancora la E il valore di a cambierebbe!

Ricordiamo che con a indichiamo la CELERITA' DELLE ONDE di pressione che si propagano lungo la tubazione. Essa è MASSIMA

QUANDO MANCA LA TUBAZIONE. In tal caso $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ed essendo nell'acqua $E = 2,07 \cdot 10^8 \text{ kg/m}^2$ e $\rho = 102 \text{ kg/m}^3$ si ricava $a = 1425 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Nel caso invece di una tubazione in acciaio ($E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$) di 1 cm di spessore S è percorsa da acqua $a \approx 1000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ mentre se il fluido fosse petrolio, a sarebbe $\approx 1037 \text{ m/s}$

EQUAZIONE CHE REGGE IL FENOMENO

Riprendendo le due equazioni

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (\text{EQUAZIONE DEL MOTO})$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\gamma}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{EQUAZIONE DI CONTINUITA'})$$

Deriviamo la 1° rispetto a x

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial U}{\partial t \partial x} \right]$$

Deriviamo la 2° rispetto a t

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = \frac{\gamma}{a^2} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \right]$$

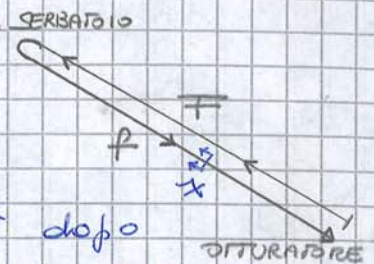
Esse combinate insieme danno:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$$

EQUAZIONE DI x colpo d'onda
D'ALAMBERT

Detta anche equazione delle corde vibranti essa ammette i due INTEGRALI GENERALI:

Iniziate una manovra di apertura o di chiusura dell'otturatore, nascerà una perturbazione nel regime di deflusso che si propagerà (come da figura precedente) con velocità a dell'otturatore al serbatoio. Essa è rappresentata dalla funzione F che parte dall'otturatore (senza la condotta, si riflette all'imbocco per il fatto che nel serbatoio il livello rimane costante e ritorna dopo aver cambiato segno (e nome da F a f) di nuova all'otturatore.



Pertanto nella generica sezione x , la F arriverà dopo il tempo $\frac{x}{a}$ e per tutto il tempo: $\Delta t = \frac{l-x}{a} + \frac{l-x}{a}$ esse non sono interessate dalle perturbazioni riflesse (f) $\Rightarrow \Delta t = \frac{2(l-x)}{a}$. $F=f$ perché il livello del serbatoio deve rimanere costante

Si noti che per la SEZIONE DI SBocco, questo tempo, detto FASE DI COLPO D'ARIETE DIRETTO è pari a $\frac{2l}{a}$ per la sezione d'imbocco; se $x=l$ allora $\Delta t=0$. Pertanto durante la fase di colpo d'ariete diretto, la generica sezione non è stata ancora interessata dalla f , e poiché il CARICO e la VELOCITÀ saranno rappresentati dalle seguenti relazioni: $h = h_0 + F(t - \frac{x}{a})$ $U = U_0 - \frac{g}{a} \cdot F(t - \frac{x}{a})$.

Durante un intervallo di tempo che ha inizio per $t_1 \geq \frac{x}{a}$ e termine con $t_2 < \frac{2l-x}{a} = \frac{l+(l-x)}{a}$ la durata del COLPO D'ARIETE DIRETTO È GENERICAMENTE MOLTO BREVE (DATO IL VALORE DI a): PER UNA CONDOTTA IN ACCIAIO LUNGA 1000 m CON SEZIONE DI SBocco DI $\frac{2l}{a}$ È CIRCA UGUALE A 2 s.



Se dalla relazione precedente eliminiamo la F ottengo:

$$h - h_0 = \frac{a}{g} (U_0 - U) \quad (\text{Sovraccarico})$$

Tale relazione dimostra che il carico in una qualunque sezione cresce di $\frac{a}{g}$ metri per ogni metro di velocità perduta!

Poiché $\frac{a}{g}$ vale all'incirca 100 s è usuale dire che il SOVRACCARICO IN FASE DI COLPO D'ARIETE CRESCE DI 100 m PER OGNI METRO DI VELOCITÀ PERDUTA.