



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2016A -

ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Vargiu Filippo

MATERIA: Vibration mechanics - Prof. Fasana Marchesiello

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

VIBRATION MECHANICS

SINGLE DEGREE OF FREEDOM:



Equation of motion: $m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t) = 0$

⇒ The solution of equation is formed by general integral and specific integral.

$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0$ → FREE RESPONSE (HOMOGENEOUS EQUATION)

⇒ $\ddot{x} + \frac{C}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0$ (□)

• con $\frac{K}{m} = \omega_n^2$

→ $\omega_n =$ NATURAL (ANGULAR) FREQUENCY

⇒ $\omega_n = 2\pi f_n$ → $[f_n] = \text{Hz} = \frac{1}{s}$

• $\frac{C}{m} = 2\zeta\omega_n$

⇒ $\zeta =$ ZETA = DAMPING FACTOR (SMORZAMENTO)

↓ is usually expressed in % (not dimensional)

• $T_n = \frac{1}{f_n}$ → PERIOD

The response, general form of solution, is:

(*) $x(t) = Ae^{st}$ con $A, s \in \mathbb{C}$

derivando (*) e sostituendo nella (□) si ha:

$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \cdot Ae^{st} = 0$

⇒ $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ → EQ. CARATTERISTICA

$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

Casi: $\zeta > 1$ → $s_1, s_2 \in \mathbb{R}, s_{1,2} < 0$

↓ "OVER DAMPED SYSTEM" The solution is: $x(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$

⇒ So, in order to be equal to a constant, $x(t)$ has to be a constant:

$$x_p(t) = A \rightarrow KA = f_0 \Rightarrow x(t) = A = f_0/K \Rightarrow \text{STATIC DISPLACEMENT}$$

So the GLOBAL RESPONSE will be:

$$x(t) = \frac{f_0}{K} + \text{FREE RESPONSE}$$

$f_0/K < 1$

$$x(t) = \frac{f_0}{K} + (a \cos \omega t + b \sin \omega t) e^{-\zeta \omega t}$$

To determine a and b → initial condition:

INITIAL CONDITIONS

$$\begin{cases} 1) x(t=0) = x_0 \\ 2) \dot{x}(t=0) = v_0 \end{cases}$$

$$1) \frac{f_0}{K} + a = x_0$$

$$\Rightarrow a = x_0 - \frac{f_0}{K}$$

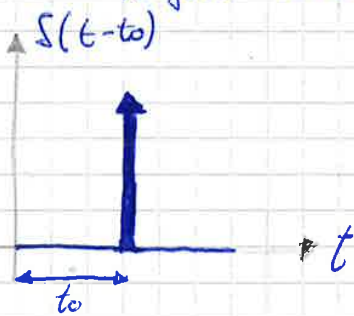
$$2) b \omega - \zeta \omega a = v_0$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{\omega} (v_0 + \zeta \omega a)$$

(Typically we have $x(0)=0, v(0)=0$)

2) IMPULSE FUNCTION (DIRAC'S DELTA FUNCTION):

→ function that it is always 0 except in a single point, that it goes to ∞ .



$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ \infty, & t = t_0 \end{cases}$$

Particular of delta function:

$$\begin{aligned} 1) & \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \\ 2) & \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t-t_0) dt = g(t_0) \end{aligned}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) f(t-\alpha) d\alpha$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

⇒ can be applied to any forcing function

steady state response

↳ the complete solution will be: GENERIC FORCES

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau + \text{TRANSIENT RESPONSE}$$

↓ disappear on time (piano piano scompare)

■ PARTICULAR CASE OF INPUT:

HARMONIC FUNCTION:

↳ tell us what is happening to the system at a particular frequency

⇒ Any periodic function can be expressed by using FOURIER'S SERIES:

$$f(t) = f(t + T_0), \forall t \quad T_0 = \text{PERIOD}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \text{FUNDAMENTAL FREQUENCY}$$

⇒ Using Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

MEAN VALUE of the start function

⇒ One function periodic può essere espressa con Fourier come somma di seno e coseno.

▪ If we have two input:



For Any LTI: if a system is linear a linear combination of f_1 & f_2 will produce a linear combination of the response.

$$\Rightarrow f = A f_1 + B f_2 \quad \Rightarrow x(t) = A x_1 + B x_2$$

SUPERPOSITION PRINCIPLE

→ In reality system are not linear, but we suppose that all the systems that we use are linear.

→ The solution (particular integral) will be:

$$(k - m\omega^2 + i\omega c) X e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}$$

Possiamo riscrivere:
Risposta del sistema alla forzante armonica

$$X = \frac{f_0}{k - m\omega^2 + i\omega c} \Rightarrow \text{Risposta del sistema a una forzante armonica}$$

$$X = \frac{f_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2 + i2\zeta\omega_n\omega} \quad \text{con } \zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$$

$$X = \frac{f_0/k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + i2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}} = \frac{f_0/k}{1 - v^2 + i2\zeta v}$$

→ Possiamo splittare nella parte Re e in quella Im (moltiplicando per il complesso coniugato).

$$\Rightarrow X = \frac{f_0/k}{1 - v^2 + i2\zeta v} \Rightarrow \frac{f_0}{k} \cdot \frac{(1 - v^2) - i2\zeta v}{(1 - v^2)^2 + (2\zeta v)^2}$$

Parte Im
Parte Re

In forma esponenziale abbiamo:

$$X = |X| e^{i\varphi} = X_0 e^{i\varphi}$$

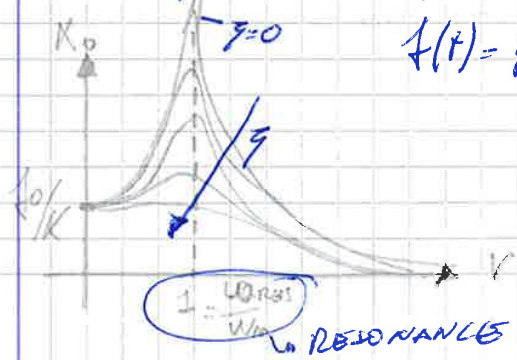
Con:

$$|X| = X_0 = \frac{f_0/k}{\sqrt{(1 - v^2)^2 + (2\zeta v)^2}} \quad \in \text{Re} \rightarrow \text{AMPIEZZA}$$

$$\tan \varphi = \frac{\text{Im}(X)}{\text{Re}(X)} = -\frac{2\zeta v}{1 - v^2} \quad \rightarrow \text{PHASE}$$

Possiamo scrivere: $x(t) = X e^{i\omega t} = X_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} = X_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$

→ If the force is: $f(t) = f_0 \cos \omega t \Rightarrow$ the output is $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$
 $f(t) = f_0 \sin \omega t \Rightarrow x(t) = X_0 \sin(\omega t + \varphi)$



→ Amplitude X_0 is very dependent on frequency
 If $\omega = 0 \rightarrow f_0 = \text{constant} = f_0/k$

→ it's very simple to form from ACCELERANCE to RECEPTANCE:

$$\frac{\ddot{x}}{f_0} = -\Omega^2 \cdot \text{RECEPTANCE}$$

It is usually use a "dB SCALE" (DECIBEL SCALE) → divide the
 this quantity for a common reference value → devo quindi esprimere
 la ~~questa~~ quantity di riferimento e uso una scala in dB

Example: $\frac{X}{f_0/k} = \frac{1}{1-r^2+i2\zeta r} = \text{GAIN} = Q(\Omega)$

→ in this case the referent value is f_0/k

$|Q| \text{ dB} = 20 \log_{10} |Q|$ → if we use this notation we
 have to specify the referent
 value

→ example: this case: $p_{ref} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

→ output has a sort of DELAY to input → the phase is needed

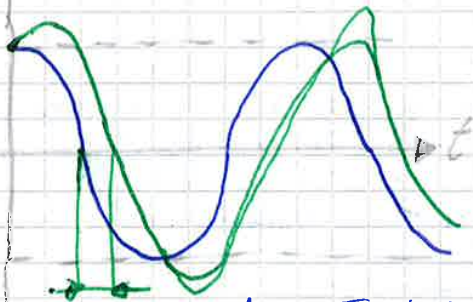
→ PHASE ↔ DELAY

Example: $f(t) = f_0 \cos \Omega t$

$x(t) = x_0 \cos(\Omega t - \theta)$

$\theta = 45^\circ$ for example → delay

$\Omega t = 45^\circ$

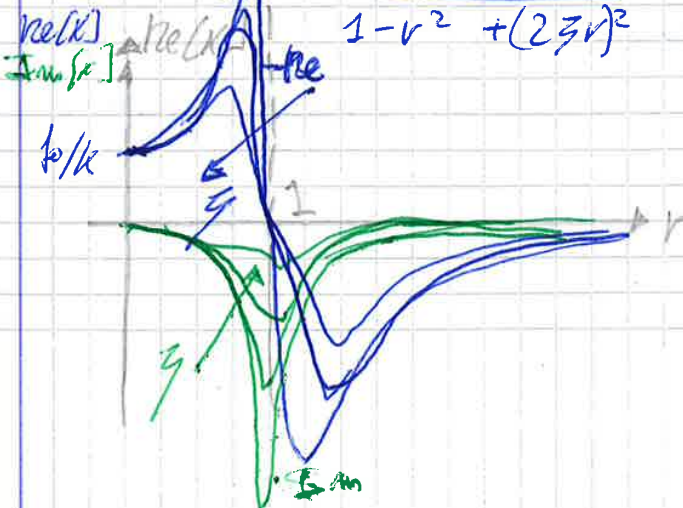


$\Delta t = \frac{\theta}{\Omega} = \frac{45^\circ}{\Omega}$

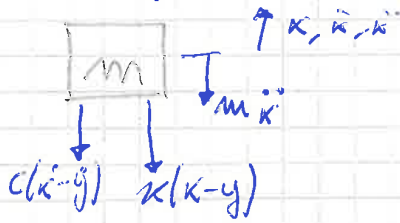
→ the output is in delay from the input.

$X = \frac{f_0/k}{1-r^2+i2\zeta r}$

→ this form of FRF can be plotted
 in the real and imaginary part.



free body diagram:



Eq. of motion:

$$m \ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

Introduce the relative displacement:

$$z = x - y \rightarrow \ddot{x} = \ddot{y} + \ddot{z}$$

$$\Rightarrow m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = -m \ddot{y}$$

with $y = y_0 e^{i\Omega t} \Rightarrow \ddot{y} = -y_0 \Omega^2 e^{i\Omega t}$

$$\Rightarrow m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = m y_0 \Omega^2 e^{i\Omega t}$$

assuming $z = z(t) = \bar{z} e^{i\Omega t}$ and substituting z, \dot{z}, \ddot{z} :

$$\Rightarrow |\bar{z}| = z_0 = \frac{m y_0 \Omega^2 / k}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = y_0 \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \left(\text{con } \frac{m}{k} = \frac{1}{\omega_n^2} \right)$$

$$\Rightarrow |\bar{z}| = z_0 = y_0 \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

|| We consider that $\zeta \ll 1$, and we suppose that the frequency Ω of excitation is much lower than $\omega_n \Rightarrow r \ll 1$ ($\approx \frac{1}{4}$)

\rightarrow in other $r \ll 1$, or $\zeta \ll 1 \rightarrow (2\zeta r)^2$ and r^2 are very small terms respect to $1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z_0 \approx y_0 \frac{r^2}{1} = y_0 \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}$$

but $y_0 \Omega^2 = \text{acceleration base}$

$$\Rightarrow z_0 = y_0 \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} = \frac{\text{acceleration base}}{\omega_n^2}$$

\rightarrow l'accelerazione della base è proporzionale all'ampiezza e quindi al cubo.

NB: l'accelerometro funziona se $\Omega \ll \omega_n$. ω_n dell'accelerometro è molto più alta e quindi della comparsa che lo produce.

\rightarrow if $\Omega \ll \omega_n$ otteniamo una risposta lineare e massima

dove: $\ddot{x} = -x_0 \Omega \sin(\Omega t - \theta)$

stituendo: $\Rightarrow L_c = \int_0^T c x_0^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t - \theta) dt = c x_0^2 \Omega^2 \frac{1}{\Omega} \int_0^T \sin^2(\Omega t - \theta) dt$

$\Rightarrow L_c = \pi c x_0^2 \Omega$ → Energy dissipated in one cycle for VISCOUS DAMPING

questo accade nel periodo T e con π

Ma i materiali VISCOELASTICI dissipano energia in modo quasi indipendente dalla frequenza con cui i cicli vengono percorsi. Si parla in questo caso di HYSTERETICAL DAMPING (smorzamento isteretico o strutturale):

→ The energy dissipated for HYSTERETICAL DAMPING is:

$L_i = a x_0^2$ (→ not proportional to Ω)
 a è una costante di proporzionalità dipendente dal materiale.

we have to find a link between viscous and hysteretical damping.

I consider that the same energy is dissipated:

$\Rightarrow L_c = L_i$
 $\Rightarrow a x_0^2 = \pi c x_0^2 \Omega$

Equivalent viscous model $\Rightarrow C_{eq} = \frac{a}{\pi \Omega}$ → Abbiamo così ricavato lo smorzamento isteretico a uno smorzatore viscoso equivalente.

→ Posso sostituire nell'eq. del moto:

$m \ddot{x} + C_{eq} \dot{x} + Kx = f_0 e^{i\Omega t}$

→ con soluzione a regime:

$m \ddot{x} + \frac{a}{\pi \Omega} i \dot{x} + Kx = f_0 e^{i\Omega t}$

$x = X e^{i\Omega t}$

$m \ddot{x} + \left(K + i \frac{a}{\pi} \right) x = f_0 e^{i\Omega t}$

$\dot{x} = i \Omega X e^{i\Omega t}$

$m \ddot{x} + K \left(1 + i \frac{a}{\pi K} \right) x = f_0 e^{i\Omega t}$

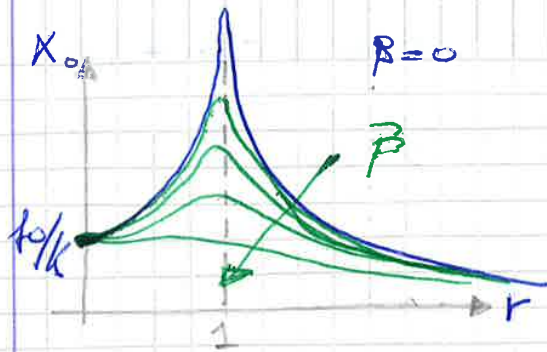
con $\frac{a}{\pi K} = \beta = \eta$ (not dimensional)

$\Rightarrow m \ddot{x} + K (1 + i \beta) x = f_0 e^{i\Omega t}$

β dipende dal tipo di moto e β LOSS FACTOR quantifica la capacità di dissipare energia.

Describe single degree of system with hysteretical damping (if system is forced by an harmonic function).

→ Parametro come uno rigidezza che ha parte reale e immaginaria



NB: The ω_{res} is always the same

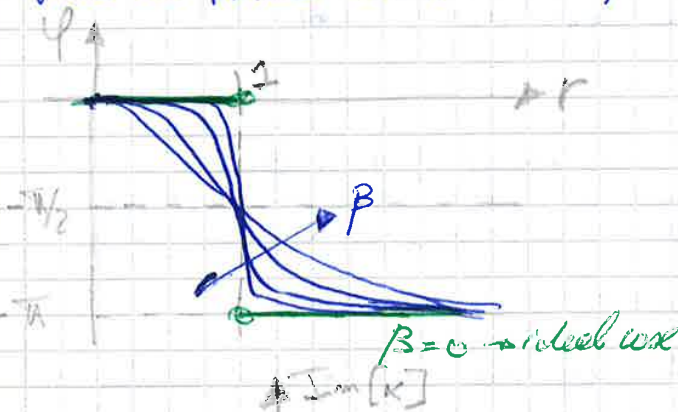
$$\left(\omega_{res} \equiv \omega_n \right) \rightarrow \text{if the } \frac{dX_0}{dr} = 0$$

Resonance = conditione per cui l'ampiezza è massima:

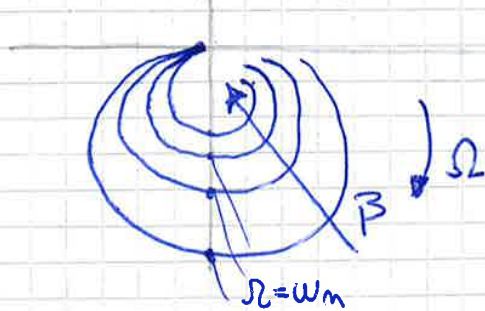
$$\frac{dX}{dr} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \Omega = \omega_n = \omega_{res}$$

NB: A differenza del caso di smorzamento viscoso, la frequenza di risonanza non dipende dall'entità dello smorzamento, ma coincide con la frequenza naturale e la curva delle ampiezze di oscillazione presenta sempre un massimo per $\omega = \omega_n$.
 Si noti anche che per $\Omega = 0$ la fase assume valori diversi da zero: questo comportamento (la risposta è in ritardo anche quando la forza è una costante) è imputabile al modello che non può essere utilizzato quando il sistema non compie un ciclo d'isteresi (cioè con forze non armoniche)



The phase is negative for any value of β if $\Omega > 0$, but doesn't depart from 0. (Only in the ideal case of $\beta=0$)



→ NYQUIST DIAGRAM

This shape is a perfect circle, not starting from zero, and Ω increase in time sense.
 All the crosses to Im axes is $\Omega = \omega_n$. The circle get smaller with damping increased.

The step to move from the maximum to half power is:

$$\frac{1}{2} K_{max} \Rightarrow \left(\frac{K_0}{\sqrt{2}} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} K_0 \right)^2$$

If we compute this quantity in dB scale, we get almost 3:

$$\Rightarrow 20 \log \sqrt{2} \approx 3$$

So to reduce the amplitude of system from maximum to half ~~power~~ we have to divided for $\sqrt{2}$ (or in dB scale ≈ 3)

\Rightarrow I can also divide the amplitude without $\sqrt{2}$ to have a general formula:

$$\boxed{20 \log \sqrt{M} \approx N \text{ dB}} \rightarrow \text{GENERAL FORMULA}$$

$$X_0 = \frac{f_0/K}{\sqrt{(1-r^2)^2 + \beta^2}}$$

$$(X_0)_{res} = \frac{f_0/K}{\beta}$$

\Rightarrow so I have to divide the maximum $(X_0)_{res}$ with \sqrt{M}

$$\Rightarrow \frac{f_0/K}{\beta \cdot \sqrt{M}} = \frac{f_0/K}{\sqrt{(1-r^2)^2 + \beta^2}}$$

$$\Rightarrow (1-r^2)^2 + \beta^2 = M \beta^2$$

$$(1-r^2)^2 = \beta^2 (M-1)$$

$$1-r^2 = \pm \beta \sqrt{M-1}$$

$$r^2 = 1 \pm \beta \sqrt{M-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} r_A^2 = 1 - \beta \sqrt{M-1} \\ r_B^2 = 1 + \beta \sqrt{M-1} \end{cases}} \rightarrow \text{Locus generale}$$

$$\Rightarrow r_B^2 - r_A^2 = 2 \beta \sqrt{M-1}$$

$$\frac{\Omega_B^2 - \Omega_A^2}{\omega_n^2} = 2 \beta \sqrt{M-1}$$

$$\beta \approx 25 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\Omega_B + \Omega_A}{2\omega_n} \cdot \frac{\Omega_B - \Omega_A}{\omega_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{M-1}}} \rightarrow \text{in termini generali (per sovrarisonanza ISTABILIZZO)}$$

Se è lento apparire zccs (vic $\beta \ll 1$, quindi curva molto sdoppiata), allora il picco di risonanza è stretto e simmetrico rispetto alla pulsazione naturale per cui $\frac{\Omega_B + \Omega_A}{2\omega_n} \approx 1$ perché Ω_A e Ω_B sono simmetrici e quasi.



equivalenti, separati da un tempo Δt detto PERIODO DI CAMPIONAMENTO (SAMPLING PERIOD \rightarrow da "SAMPLE" = Campione)
 NB: Periodo Δt da nulla ha a che vedere con l'eventuale periodicità del segnale in esame.

\rightarrow The inverse of sampling period Δt is the:

$$\frac{1}{\Delta t} = f_s = \text{SAMPLING FREQUENCY} \quad [\text{Hz}] \text{ or } [\text{SPS}] = \left[\frac{\text{samples}}{\text{second}} \right]$$

NB: Solo i valori, SAMPLES, corrispondenti agli istanti di lettura, sono memorizzati dalle macchine; la rimanente parte della misura è come se non esistesse.

Come va scelto il periodo di campionamento o la f_s ?

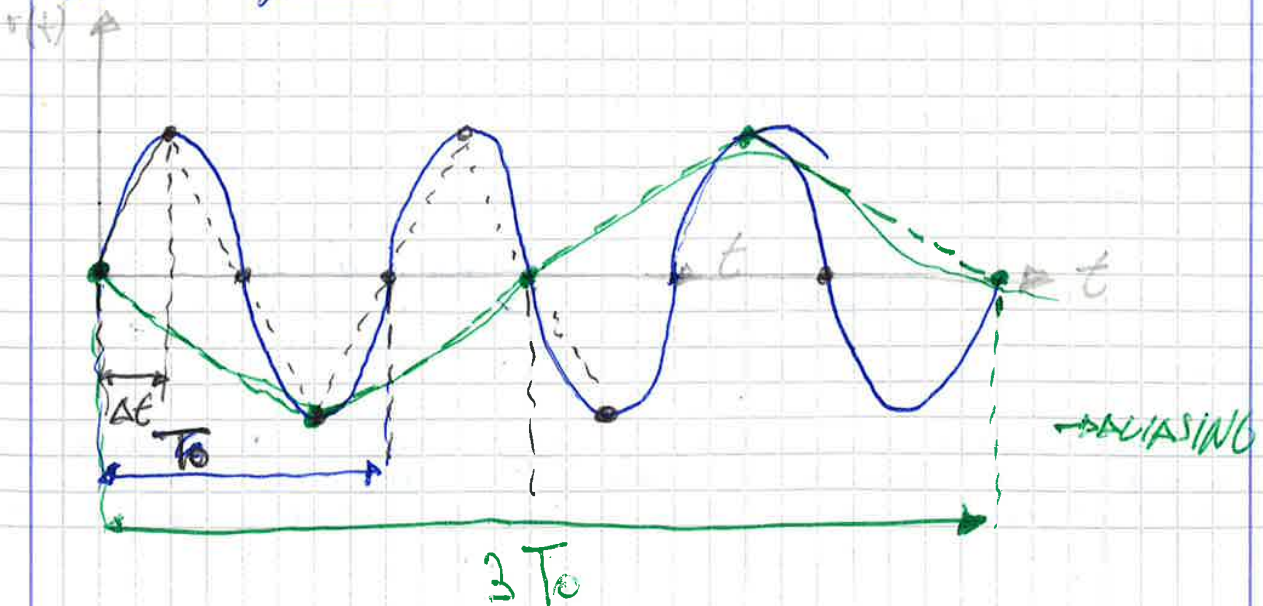
Un Δt troppo piccolo va a discapito dei tempi di calcolo e della risoluzione in frequenza.

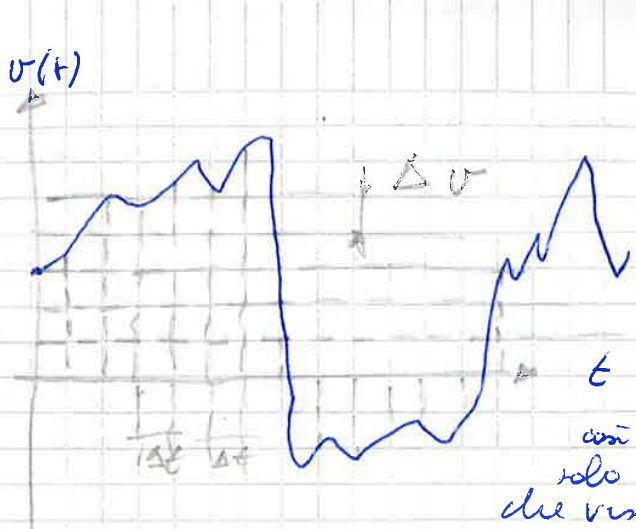
Volendo imporre un limite al periodo di campionamento si ricorre al teorema di Shannon (o Teorema di campionamento) secondo il quale la frequenza di campionamento f_s deve essere almeno il doppio della frequenza f_{max} contenuta nel segnale.

$$f_s \geq 2 f_{max} \quad \rightarrow \text{SHANNON'S THEOREM}$$

Rispettando questa disuguaglianza si è certi di non perdere informazioni su tutti i segnali fino alla frequenza f_{max} e di evitare l'errore di ALIASING, che consiste nel confondere una frequenza opportunamente presente con un altro valore sbagliato.

If we don't want ALIASING, we have to use this theorem \rightarrow so we take a period Δt smaller as to be enough to avoid aliasing.





$$\Delta v = \frac{E_c}{2^{n^{\text{bit}}} - 1}$$

→ Δv = AMPLITUDE RESOLUTION (risoluzione in ampiezza o passo di quantizzazione)

→ Come sono distribuiti i punti dell'asse dei tempi, con sono riconosciuti come legittimi solo alcuni valori dell'asse delle ampiezze, che vengono suddivisi in livelli Δv.

- Il gradino Δv dipende da due fattori:
- 1) - L'ESTENSIONE DEL CAMPO DEI VALORI AMMISSIBILI DEL CONVERTITORE (o RANGE) "E_c"
 - 2) - NUMERO DI BIT

$$\text{RANGE} = E_c = V_{\text{MAX}} - V_{\text{MIN}}$$

→ This range will be divided in many steps according to the number of bits that can be converted.

→ NB: l'errore implicito che si commette nella discretizzazione del segnale, detto ERRORE DI QUANTIZZAZIONE (= DIGITALIZATION ERROR), è dovuto al numero finito di livelli con i quali è possibile rappresentare il segnale stesso: l'errore di quantizzazione massimo è uguale alla metà del passo di quantizzazione.



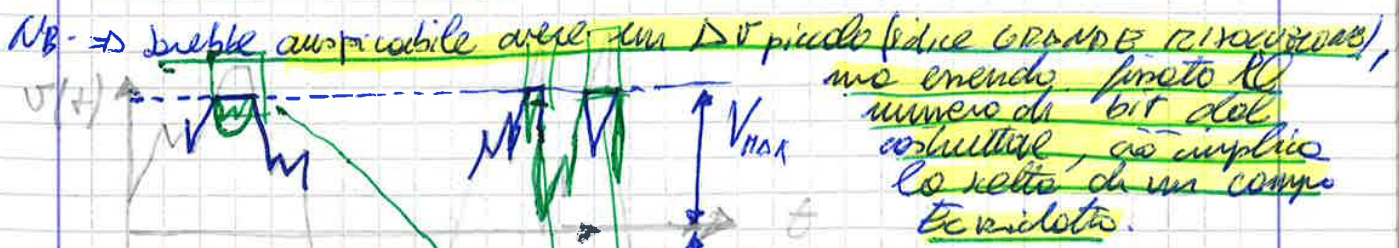
l'errore di quantizzazione massimo è uguale alla metà del passo di quantizzazione

$$\text{ERRORE} = \frac{\Delta v}{2}$$

→ AMPLITUDE RESOLUTION (passo di quantizzazione) $\Delta v = \frac{E_c}{(2^{n^{\text{bit}}} - 1)}$

Il rapporto tra i moduli V_{max} e V_{min} è indicato come FONDO SCALA. Il rapporto E_c/Δv è detto DINAMICA del convertitore.

NB: Ricordando, Tutti i valori che non corrispondono a un multiplo intero di Δv sono ignorati e i compresi sono rappresentati come multipli interi di Δv.



ma essendo finito il numero di bit del convertitore, ciò implica la scelta di un campo E_c ridotto.

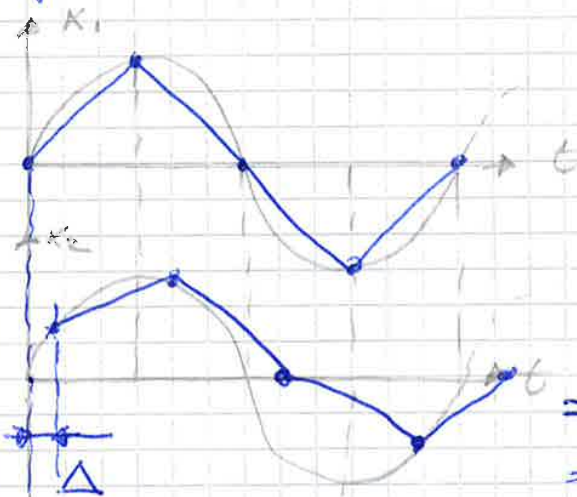
SATURATION of the converter (OVERLOAD)

CAMPIONAMENTO SINCRONO

Si distinguono i sistemi di acquisizione in grado di effettuare il campionamento contemporaneo di segnali differenti, o quelli che non sono invece provvisti di tale predisposizione (questi sono detti "a MULTIPLEXING" o "MULTIPLEXATI").

→ Nel primo caso (con canali / uso comune linee di trasmissione dei segnali elettrica analogica), dispone di un convertitore analogico-digitale su univariato con tutti gli A/D ed è possibile fissare il suo fondocella indipendentemente da ogni altro canale.

→ Nei sistemi MULTIPLEXATI invece un solo convertitore è usato a rotazione, su tutti i canali. Con questo, non solo si perde la fase tra i segnali ma non è neppure ipotizzabile una variazione del fondocella, che va fissato sul canale che riceve l'impulso il segnale di ampiezza massima, con conseguente perdita di risoluzione sui segnali di intensità inferiore.



→ Given a certain f_s , the first channel will be read at $t=0$, but the second channel will be read with a certain delay Δ .

with $\Delta < 1/f_s$

→ In multiplexed systems we have delay between the channels.
 → In multiplexed systems we can not remove the time delay, so these systems are not able to read the phase between the two signals.

NB.

→ In brief, le caratteristiche desiderabili che un sistema di acquisizione dovrebbe possedere sono:

- FILTRI ANTI-ALIASING;
- ACCOPPIAMENTO IN ALTERNATA (AC COUPLING);
- CAMPIONAMENTO SINCRONO;
- FONDOCCELLA INDIPENDENTE SUI VARI CANALI;
- NUMERO DI BIT BLEVATO.

$$\Rightarrow \boxed{v_0 = \int_0^t v_i(\tau) h(t-\tau) d\tau} \quad (1)$$

By using convolution integral and given the ~~output~~ input and the time t we can compute the output

$\rightarrow d\tau \rightarrow$ is $\Delta\tau = \text{SAMPLING PERIOD} = 1/f_s$

If we want to apply the response we have to move from $d\tau$ (infinite interval) to a finite quantity $\Delta\tau$.
to consider:

$$\boxed{t = n \Delta\tau} \quad (\text{with } n \text{ integer number})$$

$\rightarrow \tau$ is limited: $0 \leq \tau \leq t$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = k \Delta\tau} \quad \text{con } 0 \leq k \leq n \text{ and integer}$$

$$\Rightarrow v_0 = v_0(t) = v_0(n \Delta\tau) = y_n$$

$$\Rightarrow v_i(\tau) = v_i(k \cdot \Delta\tau) = x_k$$

$$\Rightarrow h(t-\tau) = \Delta\tau = h[(n-k)\Delta\tau] \cdot \Delta\tau = h_{n-k}$$

so we can have the digital form of the convolution integral
 \rightarrow the integral will substitute with a sum (Σ):

$$\Rightarrow \boxed{y_n = \sum_{k=0}^n x_k h_{n-k}} \rightarrow \text{DIGITAL VERSION OF CONVOLUTION INTEGRAL (1)}$$

\rightarrow All of inputs are multiplied by a certain constant h_{n-k} .

\rightarrow This is the basic structure of a filter.

\rightarrow But instead of using all the input (n) we can use only the input the generate output (P), but also these depends on the input before (autoregressive part)

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} & \text{output sequence} \leftarrow y_n = \underbrace{\sum_{p=0}^P a_p \cdot x_{n-p}}_{\text{MOVING AVERAGE (part which depend on input)}} - \underbrace{\sum_{q=1}^Q b_q \cdot y_{n-q}}_{\text{AUTOREGRESSIVE PART}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{General form of a digital filter}$$

\Rightarrow Usually is $P=Q \approx 10$

\rightarrow The order of the filter is usually something like 10.

\Rightarrow According to the value of the constant a_p and b_q we can have different filters:

NB: The form of the filters depends on the choice of a_p and b_q

$\Rightarrow \downarrow$

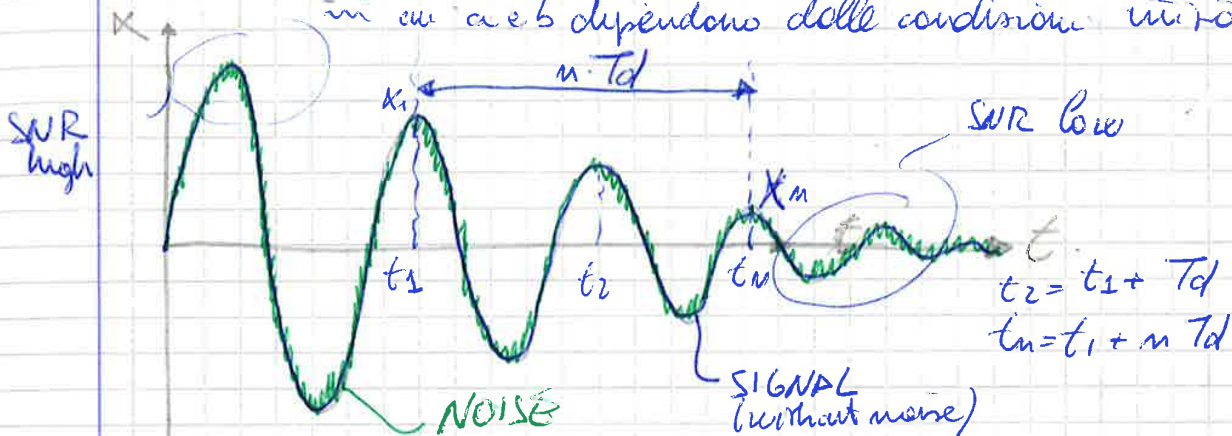
LOGARITHMIC DECREMENT MODE

È uno dei più "antichi" metodi di estrazione dei parametri modali e si basa sull'analisi della risposta libera di un sistema sotto smorzato ($\zeta < 1$)

→ Sotto queste ipotesi la risposta assume la forma:

$$\boxed{\zeta < 1} : x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (a \cos(\omega_d t) + b \sin(\omega_d t))$$

in cui a e b dipendono dalle condizioni iniziali:



Supponendo di aver misurato la risposta $x(t)$, e ne conosce il periodo T_d e quindi ω_d . Si vogliono determinare la pulsazione naturale ω_n e il fattore di smorzamento ζ :

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \rightarrow \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\omega_d = \text{damped frequency} \rightarrow \text{frequency of the damped oscillation}).$$

→ Calcolando il logaritmo naturale del rapporto delle ampiezze di oscillazione, detto DECREMENTO LOGARITMICO, δ , si ha:

$$\delta = \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \ln \left(\frac{A e^{-\zeta \omega_n t_1} \sin(\omega_d t_1 + \varphi)}{A e^{-\zeta \omega_n (t_1 + T_d)} \sin(\omega_d (t_1 + T_d) + \varphi)} \right) =$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \zeta \omega_n T_d} = \zeta \omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

→ so we have direct relation between δ and ζ → we can obtain ζ as function of δ :

$$\delta^2 = \frac{4\pi^2 \zeta^2}{1 - \zeta^2}$$

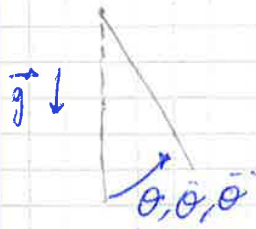
$$\Rightarrow \boxed{\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}}$$

→ se considero x_1 e x_2 (con x_2 distante di 1 periodo T da x_1)

Noti ζ e T_d si può facilmente a ω_n .

NB: Questa tecnica prevede di conoscere il periodo del sistema smorzato T_d .

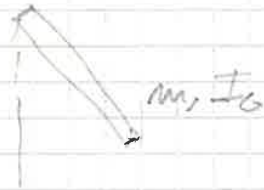
DYNAMICS OF A COMPOUND PENDULUM WITH COULOMB FRICTION:



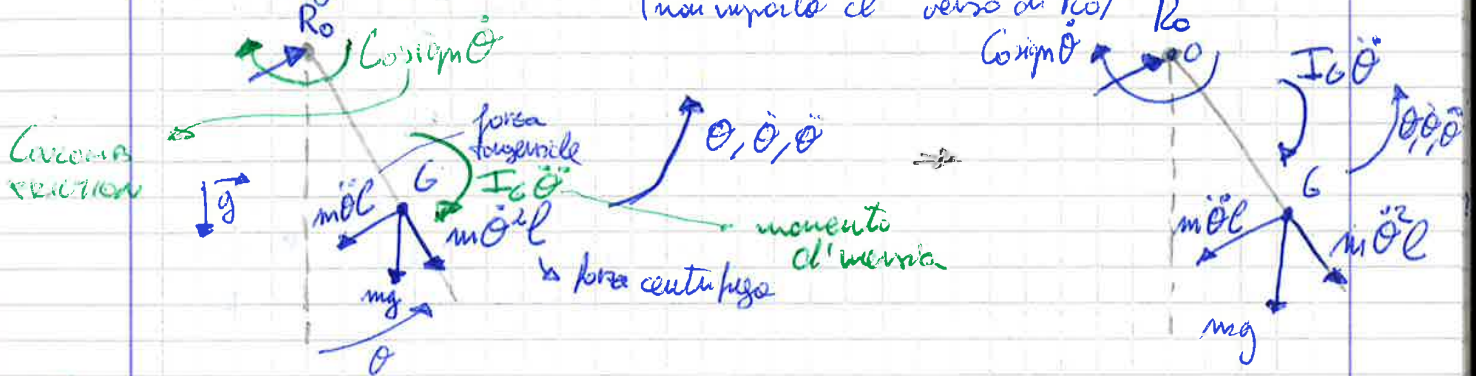
→ we have:
 - mathematical pendulum → Only have mass m



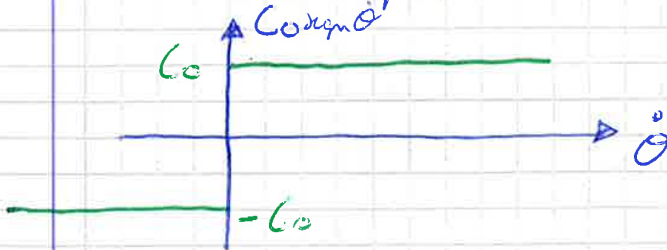
- physical pendulum → abbiamo massa e momento d'inerzia



Free body diagram:



What is Coulomb friction?



$l = OG$

→ $C_{viscos} = B \dot{\theta}$ → linear
 → nelle realtà però non abbiamo smorzamento viscoso

Se $\dot{\theta} < 0$ il contributo di $C_0 \text{sign} \dot{\theta}$ è positivo (usc. nel verso del moto).

NOTA: in generale noi consideriamo "viscous damping" perché è lineare ed è più pratico. Ma nelle realtà si crumble di più a "Coulomb friction".



Now I apply the initial conditions:

$$1) \theta(0) = \frac{C_0}{mgl} + a = \theta_0 \Rightarrow a = \theta_0 - \frac{C_0}{mgl}$$

$$2) \dot{\theta} = \omega_n (-a \sin \omega_n t + b \cos \omega_n t)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(0) = b \omega_n = 0 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \theta_0 - \frac{C_0}{mgl} \\ b = 0 \end{cases}$$

So the solution is:

$$\theta_{\pm}(t) = \frac{C_0}{mgl} + \left(\theta_0 - \frac{C_0}{mgl} \right) \cos \omega_n t \quad (1.2)$$

- valid for $\dot{\theta} = 0$

Angular position as function of time only as long as speed $\dot{\theta}$ is negative \Rightarrow this expression (1.2) is only a part of solution (since the rope can $\dot{\theta} > 0$) \Rightarrow so this is the first part of solution.

\Rightarrow When $\dot{\theta}_{\pm} = 0$ the first part will finish. So derive (1.2) e pongi = 0.

$$\dot{\theta}_{\pm} = 0 = \left(\frac{C_0}{mgl} - \theta_0 \right) \cdot \omega_n \sin \omega_n t$$

$$\Rightarrow \text{for } \dot{\theta}_{\pm}(t_1) = 0 \text{ in above: } \omega_n t_1 = \pi$$

$$\text{So the end of first interval is: } \boxed{t_1 = \frac{\pi}{\omega_n} = \frac{T_n}{2}}$$

\Rightarrow Then the second interval starts:

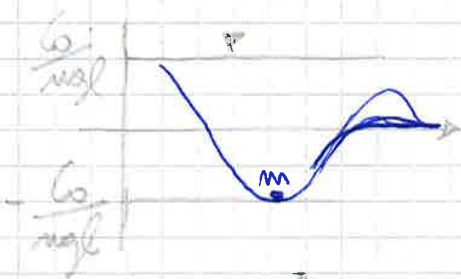
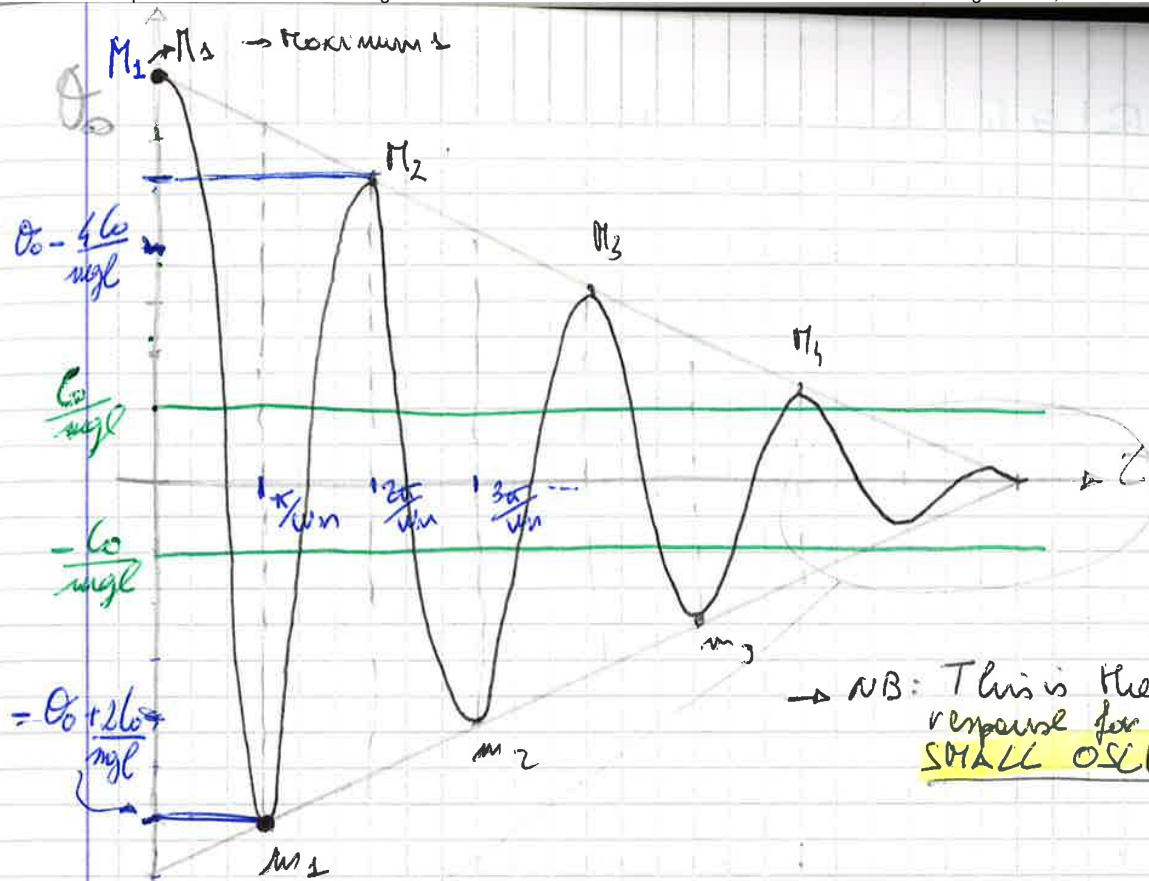
Part II): Now $\boxed{\dot{\theta} > 0}$ so the eq. of motion become different

$$\Rightarrow \boxed{-I_0 \ddot{\theta} + mgl \theta = -C_0} \quad (2.1)$$

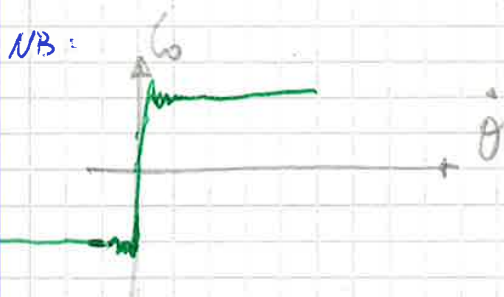
\rightarrow it is still linear but is different between the eq. before.

So the solution will be:

$$\theta(t) = \underbrace{-\frac{C_0}{mgl}}_{x_f} + \underbrace{a \cos \omega_n t + b \sin \omega_n t}_{x_g}$$



\rightarrow When the minimum or maximum θ in this zone, the motion stop, because we have an equilibrium of Coulomb friction and the other forces of motion.



$\rightarrow Co$ non è proprio costante. Quando θ tende a zero si hanno delle oscillazioni di Co . Ma a noi non interessa Co con $\theta = 0$.
 (Sarebbe molto difficile nella realtà risolvere il problema).

$\Delta \nu_2 - \nu_1 = \nu_0$; $\Delta \nu_3 - \nu_2 = \nu_0 \dots$

→ the step to move between two near spectral lines is always ν_0 .

• $f(t)$ → function which is depends on time → so it has time history and time domain.

→ if we plot something respect to frequency, we have frequency domain representation.

⇒ $a_0 = \text{MEAN VALUE}$ of the function (or EXPECTED VALUE)

$a_0 = E[f(t)]$

da non
riscordare

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt$$

→ // ma, di solito si sceglie: $[0; T_0]$ o $[-T_0/2; T_0/2]$ Nota: l'integrale va esteso ad 1 periodo

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(k \omega_0 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(k \omega_0 t) dt$$

→ L'insieme delle coppie a_k e b_k (o di cui) fornisce il contenuto in frequenza della funzione $f(t)$: quanto più è alto il valore di k , tanto maggiore è il contributo dell'armonica k -esima alle somme.

EXPONENTIAL FORM:

$$\begin{cases} e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \\ e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin \alpha = -i \cdot \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \frac{e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t}}{2} - ib_k \cdot \frac{e^{ik\omega_0 t} - e^{-ik\omega_0 t}}{2} \right) =$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} \cdot e^{ik\omega_0 t} + \frac{a_k + ib_k}{2} \cdot e^{-ik\omega_0 t} \right) (*) \rightarrow$$

→ Possiamo definire una nuova costante complessa " f_k ":

→ The spectrum contains both positive and negative frequency.
 NB: Non c'è nessun significato fisico di le frequenze negative, sono solo uno strumento matematico

$$\Rightarrow \boxed{f_{-k} = f_k^*}$$

with * indicates the CONJUGATED
 → cioè le frequenze + e - hanno modulo uguale ma fase diversa.

→ Example

$$f(t) = f_1 \cos(2\pi \frac{10}{T_0} t) + f_2 \cos(2\pi \frac{13}{T_0} t)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\omega_0}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\omega_0}$

$f(t)$ is not a periodic function because 13 is not an integer multiple of 10

Example

$$f(t) = A \cos \omega_0 t$$

→ by definition f_k is: $f_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A \cos \omega_0 t e^{-ik\omega_0 t} dt =$

$$= \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0} \cos \omega_0 t (\cos k\omega_0 t - i \sin k\omega_0 t) dt =$$

$$= \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0} \cos \omega_0 t \cos k\omega_0 t dt - i \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0} \cos \omega_0 t \sin k\omega_0 t dt$$

= 0 sempre (perché) nel periodo

→ l'integrale di questo prodotto nel periodo è sempre 0

questo risultato vale $\left\{ \begin{array}{l} 0, \forall k \neq 1 \\ k=1 \end{array} \right.$

→ moltiplico e divido per ω_0

$$\Rightarrow f_k = \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0} \cos \omega_0 t \cos 1 \omega_0 t \frac{d(\omega_0 t)}{\omega_0} \Rightarrow \frac{A}{T_0} \cdot \frac{1}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow f_k = \frac{A}{T_0} \cdot \frac{1}{\omega_0} \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega_0 t) d(\omega_0 t) = \frac{A}{2\pi}$$

$f_{\pm 1} = A/2$ and all the other coefficients are 0

$$\Rightarrow \boxed{f_{-1} = f_{+1} = \frac{A}{2}}$$

→ When we compute Fourier's series with exponential form, we not only have f_{+1} , but we also have negative frequency f_{-1} and $f_{-1} = f_{+1}$

→ So we start from a periodic function with single frequency ω_0 : $f(t) = A \cos \omega_0 t$

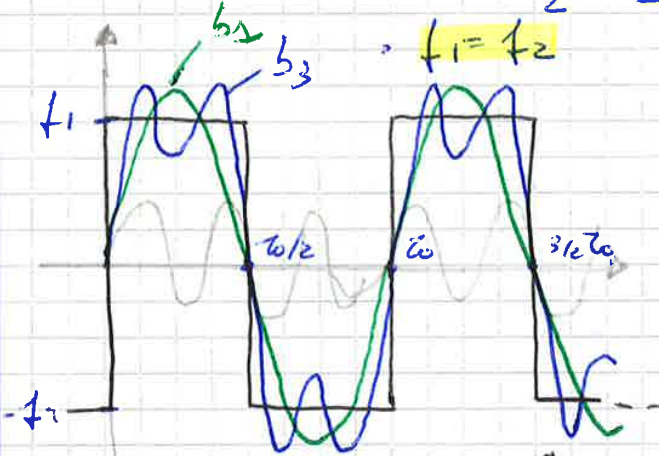
$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin k\omega_0 t dt = \frac{1}{k\pi} \left[-f_1 \cos(k\omega_0 t) \Big|_0^{T_1} + f_2 \cos(k\omega_0 t) \Big|_{T_1}^{T_0} \right] =$$

$$= \frac{1}{k\pi} \left[-f_1 (\cos k\omega_0 T_1 - 1) + f_2 (\cos k\omega_0 T_0 - \cos k\omega_0 T_1) \right] =$$

$$= \frac{1}{k\pi} \left[f_1 (1 - \cos(k\omega_0 T_1)) + f_2 (1 - \cos k\omega_0 T_1) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{1}{k\pi} (f_1 + f_2) (1 - \cos k\omega_0 T_1 / T_0)$$

If we chose: $T_1 = \frac{T_0}{2}$ \rightarrow we obtain a SYMMETRICAL SQUARE WAVES:
 $f_1 = f_2$



What is the mean value?

$$a_k = \frac{2f_1}{k\pi} \sin k\pi \frac{1}{2} = 0$$

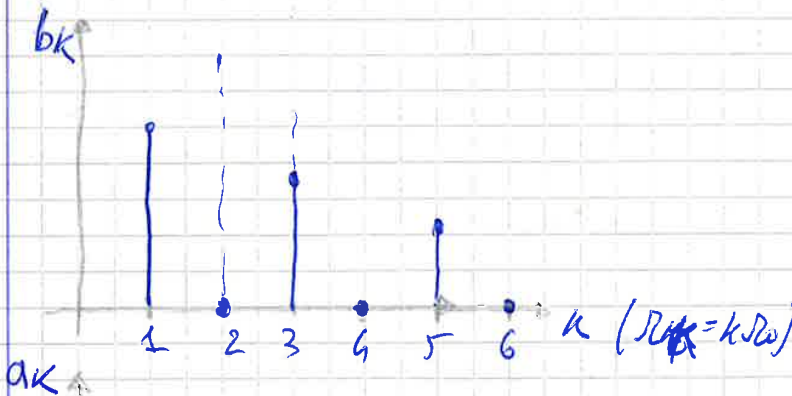
$\Rightarrow a_k = 0$
 so we have no cos. terms that describe the harmonic function.

$$f(t) = a_0 + \sum [a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t]$$

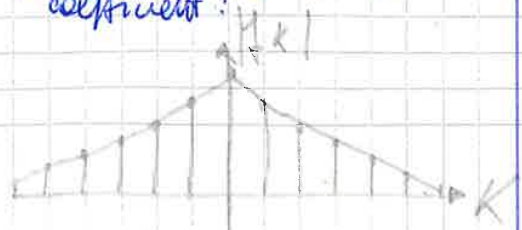
\Rightarrow where $a_k = 0$

$$b_k = \frac{2f_1}{k\pi} (1 - \cos k\pi)$$

$b_1 = \frac{4f_1}{\pi}$ \rightarrow in verde (all graphs (he do in verde))
 $b_2 = 0$
 $b_3 = \frac{4f_1}{3\pi}$ \rightarrow in blue (ho 3 punti \rightarrow 2 max e 1 min)



but usually we represent the modulus of exponential coefficient:



$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$
② → INVERSE FOURIER TRANSFORM

move back from frequency domain to time domain.

$$f_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-ik\omega t} dt$$
①

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k e^{ik\omega t}$$
②

→ 1' e 2' sono ciò che riguarda le Fourier series.

In Fourier transform ① ω is a continuous function.

18/10

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}[f(t)]$$
①

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$
②

FOURIER TRANSFORM PAIR

→ Le due equazioni si definiscono COPPIA DI TRASFORMAZIONE: la ① permette di passare dal dominio del tempo a quello delle frequenze ed è detta TRASFORMATA DIRETTA, indicata con $\mathcal{F}[\cdot]$, mentre la seconda ② è la trasformata INVERSA, $\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$ e si passa dalle frequenze al tempo. Le serie e la trasformata di Fourier permettono di ~~trasformare~~ evidenziare quali e quante armoniche le formano collegando e quali impedenze di oscillazione esse possiedono.

► PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA

1) ⇒ The FOURIER TRANSFORM is a LINEAR OPERATION, which means that if I have:

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega) \quad , \quad \mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$$

→ The linear combination of the two functions gives:

$$f(t) = a_1 f_1 + a_2 f_2$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (a_1 f_1 + a_2 f_2) e^{-i\omega t} dt = a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 e^{-i\omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_2 e^{-i\omega t} dt =$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[f(t)] = a_1 F_1 + a_2 F_2$$

→ So, linear combination of time domain function, gives the linear combination of the ~~same~~ Fourier transform of frequency domain function.

⇒ // → È quindi possibile collegare separatamente le due trasformate $F_1(\omega)$ e $F_2(\omega)$ e sommarle gli effetti:

→ Le equazioni (1) e (2) indicano che la trasformata di una funzione pari è reale e pari, mentre la trasformata di una funzione dispari è immaginaria e dispari. Inoltre risulta che i coefficienti $F(\Omega)$ e $F(-\Omega)$ sono complessi coniugati e dunque hanno il medesimo modulo, con stessa parte reale ma opposta parte immaginaria.

→ If: $f(t) \equiv e(t) \Rightarrow F(\Omega) \in \mathbb{R} \Rightarrow F(\Omega) = F(-\Omega)$

→ the Fourier transform of an even function will be only real, and $F(\Omega)$ and $F(-\Omega)$ have the same expression.

• $f(t) \equiv o(t) \Rightarrow F(\Omega) \in \text{Im} \Rightarrow F(\Omega) = -F(-\Omega)$

• $|F(\Omega)| = |F(-\Omega)| \rightarrow$ the modulus will be equal every times

CONDIZIONI DI ESISTENZA DELLA TRASFORMATA

We can compute Fourier transform of any time domain function if the modulus of this time domain function $f(t)$ can be integrated and it doesn't go to ∞ .

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (*)$$

Ciao F. AND

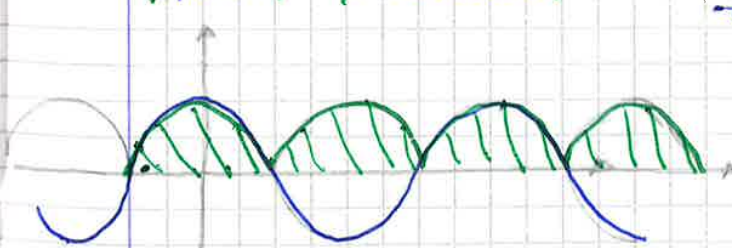
Accanto a queste condizioni si vanno dare anche quelle dette di Dirichlet:

- la funzione ha un numero finito di massimi e di minimi;
- la funzione ha un numero finito di discontinuità ma nessuna è infinita.

This condition (*) doesn't permit to compute the transform of a very simple function. For example:

$|f(t)| = |A \cos \Omega t|$

→ the integral of this function in green (the modulus), that it is the area in green, goes to ∞ . So I can't compute the Fourier transform of this simply harmonic function.



→ So to compute the Fourier transform of simply harmonic I have to introduce DIRAC (δ) DELTA FUNCTION.

For the conjugated is:

$$S(f^* - g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\Omega(t-g)} d\Omega$$

→ do also if we write the conjugated we obtain the same $S(t-g)$

→ we can also write (delta function in frequency domain):

$$S(\Omega \pm \Omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm i(\Omega - \Omega_0)t} dt \rightarrow (*)$$

2) TRASFORMATA DELLA FUNZIONE ARMONICA:

By using impulse I can write the Fourier transform of an harmonic function:

$$f(t) = A \sin \Omega_0 t$$

$$\Rightarrow F(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \sin \Omega_0 t e^{-i\Omega t} dt = \rightarrow \text{have to use the exponential function: } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{\frac{i\Omega_0 t}{2i} - \frac{-i\Omega t}{2i} - \frac{i\Omega t}{2i}} dt =$$

$$= -\frac{A}{2} \cdot \frac{i}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-i(\Omega - \Omega_0)t} - e^{-i(\Omega + \Omega_0)t}] dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow = -iA\pi [S(\Omega - \Omega_0) - S(\Omega + \Omega_0)]$$

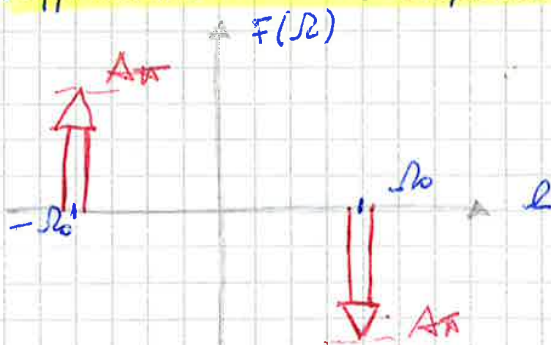
Si ottiene:
- per il seno:

$$F[A \sin \Omega_0 t] = -iA\pi [S(\Omega - \Omega_0) - S(\Omega + \Omega_0)] \quad (1)$$

- per il coseno:

$$F[A \cos \Omega_0 t] = \pi A [S(\Omega - \Omega_0) + S(\Omega + \Omega_0)] \quad (2)$$

NB: → Per un il contenuto in frequenza di un'armonica è così rappresentato da due impulsi centrati, rispettivamente, in Ω_0 e $-\Omega_0$.



→ Nota: If the impulse function is "cosine wave", what we get is that we have two REAL impulses.

↓
Per $f = A \cos \Omega_0 t \rightarrow$ ottengo due impulsi real
→ determinati ottengo due impulsi immaginari.

PARSEVAL'S THEOREM

Il **TEOREMA DI PARSEVAL** afferma che l'energia associata ad un segnale deve assumere lo stesso valore sia nel dominio del tempo sia in quello delle frequenze:

The energy of a certain time domain function is defined by:

$$\text{ENERGY} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) F(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega dt$$

questa equazione, rispetto alle frequenze è una costante, per cui potremo dedurre l'integrale

I can change the order of integration, so first in time and then by frequency:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) F(\Omega) e^{i\Omega t} dt \right] d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\pm i\Omega t} dt \right]^* d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) \cdot F^*(\Omega) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F|^2 d\Omega$$

→ in due ib - qui abbiamo che la Fourier transform of $f(t)$ $(e^{i\omega t})^* = e^{-i\omega t}$
 → fanno il conjugated e ottengo -
 → e poiché rimane riconoscendo che $\Omega = 2\pi f$ si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} |F(\Omega)|^2 d\Omega = \text{ENERGY} \rightarrow \text{TEOREMA DI PARSEVAL}$$

→ indica che l'energia del segnale si mantiene costante passando dal tempo alle frequenze e viceversa.

I can find energy in frequency domain by computing the Fourier transform of energy in time domain.

5) TRASFORMAZIONE DELLA CONVOLUZIONE.

Un'importante proprietà delle trasformate di Fourier consiste nella sua capacità di convertire l'operazione di **convoluzione** nel dominio del tempo (o delle frequenze) in una **moltiplicazione** in quello delle frequenze (o del tempo).

The general representation of convolution integral is:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{y(\tau)}_{\text{force}} \cdot \underbrace{z(t-\tau)}_{\text{impulse}} d\tau$$

La (1) è di grande importanza per due motivi:

- il primo, banale, è che numericamente è molto più efficiente calcolare una moltiplicazione piuttosto che una convoluzione, con evidenti benefici sui tempi di calcolo;

→ il secondo, importante, è che la (1) permette di dimostrare che la trasformata di Fourier della risposta all'impulso coincide con la funzione di risposta in frequenza. $\Rightarrow H(\Omega) \equiv \mathcal{F}[h(t)]$

Grazie alla (1) posso calcolare la trasformata di Fourier di y e di z e ho subito:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\Omega)]$$

→ If we imagine that " f " is the force and " h " is the impulse response function:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

→ If we compute the Fourier transform:

$$X(\Omega) = F(\Omega) \cdot \mathcal{F}[h(t)]$$

with $F(\Omega)$ generic force that we apply to the system (it is the amplitude of the force at a certain frequency and $X(\Omega)$ is the amplitude at Ω).

→ So FT of impulse response function is:

$$\mathcal{F}[h(t)] = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)}$$

(0) $\rightarrow f(t)$ can be any function, even non periodic

the transform of any response function is given by $X(\Omega)/F(\Omega)$

→ Si pensi alla definizione di FRF, per esempio in forma di rettanza:

$$FRF = H(\Omega) = A(\Omega)/f_0 \quad (-)$$

in cui $A(\Omega)$ è l'ampiezza della risposta nel tempo $x(t)$ a fronte di un ingresso armonico di ampiezza f_0 alla frequenza Ω . Ammettendo che l'ampiezza dell'ingresso possa variare con la frequenza, la (-) assume l'espressione:

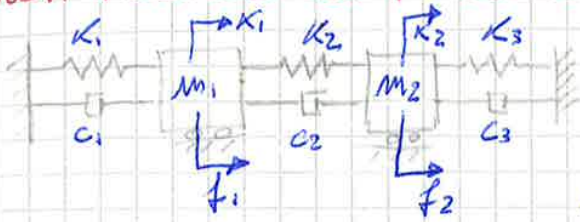
$$FRF = H(\Omega) = A(\Omega)/F(\Omega) \quad (x)$$

con la quale si rivela che, per ogni frequenza Ω , la FRF è il rapporto tra l'ampiezza di oscillazione e l'intensità delle forzate.

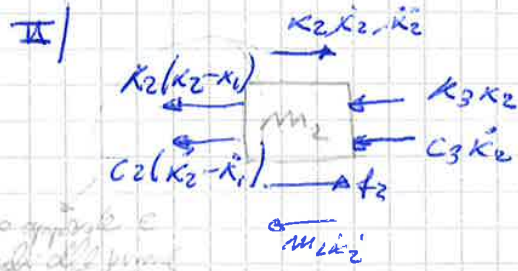
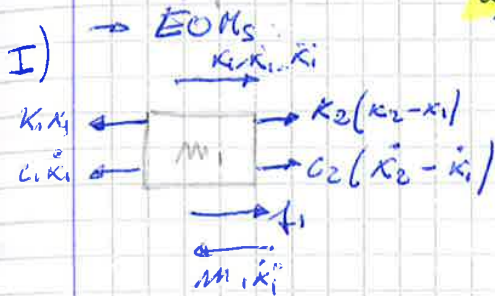
→ Se si pensa invece alla risposta nel tempo calcolate mediante l'integrale di convoluzione si ha:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

MULTI DEGREE OF FREEDOM SYSTEM (MDOF):



Consider the two degree of freedom system formed dalle due masse collegate tra loro ed al telaio fisso per mezzo di molle elastiche e smorzatori viscosi. Il moto di ciascuna massa è di tipo rettilineo ed avviene nel piano orizzontale, per effetto di due forze concentrate agenti sulle masse.



The dynamic equilibrium for the I body diagram is:

$$\text{I) } m_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 + C_1 \dot{x}_1 - K_2(x_2 - x_1) - C_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - f_1 = 0$$

it is a differential equation of second order.

For the II body diagram:

$$\text{II) } m_2 \ddot{x}_2 + K_2(x_2 - x_1) + C_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_3 x_2 + C_3 \dot{x}_2 - f_2 = 0$$

→ In matrix form will be:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 + C_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

↓ MASS MATRIX
 ↓ DAMPING MATRIX
 ↓ STIFFNESS MATRIX

→ This is just a particular case, but in general we can write the eq. of motion for MDOF systems like:

$$\underline{[m] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [k] \{x\} = \{f\}} \rightarrow \text{EOM for MDOF system}$$

I

Properties of matrices:

→ for natural systems ($T=T_2$) in which the Kinetic energy is a quadratic form, and in presence of viscous damping, for those systems it is always possible to write the eq. of motion in such a way that these 3 matrices are symmetric.

→ so it is always possible to have symmetric matrices.

Note: il sistema vibrante si dice accoppiato e le equazioni del moto non sono indipendenti.

→ we assume that the damping matrix is proportional by $[m]$ and $[k]$ by two coefficients:

PROPORTIONAL DAMPING $[C] = \alpha [m] + \beta [k] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

→ so we suppose that the damping is PROPORTIONAL

→ To solve the equation (1) we start from a simple case without $[C]$ and $\{f\}$.

→ If the damping $[C]$ is proportional, then we can only consider the underdamped case.

→ so, if $[C]$ is proportional: [UNDERDAMPED CASE]

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

and if we suppose that the solution is SYNCHRONOUS we have:

$$\{x(t)\} = \{x_0\} \cos(\omega t + \theta)$$

(we can demonstrate that the synchronous solution is also harmonic)

→ we substitute the solution in the eq. of motion and we get:

$$([k] - \omega^2 [m]) \{x_0\} \cos(\omega t + \theta) = \{0\}$$

and we can also remove the time.

→ so by searching the synchronous solution we obtain this problem:

$$([k] - \omega^2 [m]) \{x_0\} = \{0\} \rightarrow \text{EIGEN VALUE PROBLEM}$$

→ so we have to find ω^2 and $\{x_0\}$

$$0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2 \quad (\text{br m det})$$

$\omega^2 = \text{EIGEN VALUES}$
 $\{x_0\} = \text{EIGEN VECTOR}$
 or $\{y_i\}$

If we have a m det we have to find our eigenvalues by solving the characteristic equations.

→ we can collect the eigen values in a diagonal matrix:

EIGEN VALUES MATRIX $[\Delta] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$

→ it is a diagonal matrix with always positive number (maybe in some case can be $\omega_i = 0$)

Once we have obtain eigen values we can solve the algebraic system:

$$([k] - \omega_i^2 [m]) \{\psi_i\} = \{0\}$$

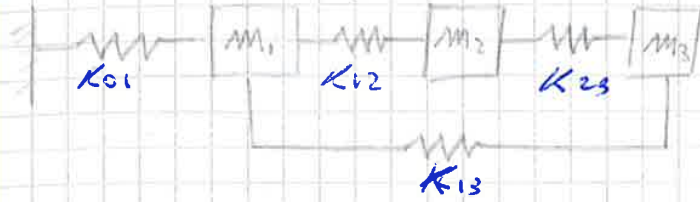
(we have to solve the homogeneous algebraic system)

The square of eigen values are the frequencies of the system:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$$

→ Evidently perché $\{\psi_i\}$ non diventino zero deve essere: $\det([k] - \omega_i^2 [m]) = 0 \rightarrow$ tempo autovalori ω_i^2

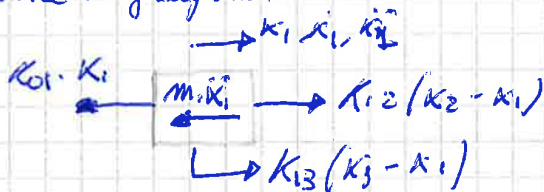
EXERCISE: 3 DOFS



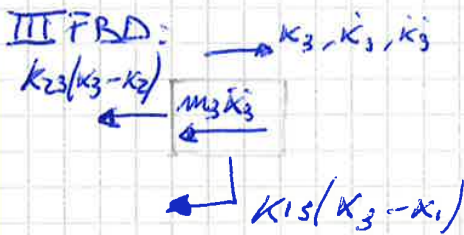
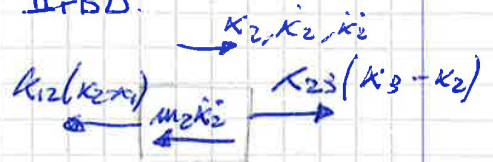
I have to compute eigenvalues and eigenvector?

Write eq. of motion:

I Free Body Diagram:



II FBD:



Eq. of motion:

$$\text{I) } m_1 \ddot{x}_1 + K_{01} x_1 - K_{12} (x_2 - x_1) - K_{13} (x_3 - x_1) = 0$$

$$\text{II) } m_2 \ddot{x}_2 + K_{12} (x_2 - x_1) - K_{23} (x_3 - x_2) = 0$$

$$\text{III) } m_3 \ddot{x}_3 + K_{23} (x_3 - x_2) + K_{13} (x_3 - x_1) = 0$$

To resolve we have to do modal analysis; so we have to transform these equations in matrices form:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{01} + K_{12} + K_{13} & -K_{12} & -K_{13} \\ -K_{12} & K_{12} + K_{23} & -K_{23} \\ -K_{13} & -K_{23} & K_{13} + K_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

The important is that this matrix is symmetric (and it can be not always diagonal) → because if it is symmetric we can use modal analysis.

→ But it is always possible to write the eq. of motion in such a way that we have symmetrical matrices.

• Now we can compute eigen values and eigenvectors.

→ In order to simplify the computation we consider a particular case: ↓

(1) $K\psi_{11} - K\psi_{21} = 0$

(2) $-K\psi_{11} + 2K\psi_{21} - K\psi_{31} = 0$ → we don't need this equation because it is a linear combination of the other two. → so I can remove 1 of the 3.

(3) $-K\psi_{21} + K\psi_{31} = 0$

From (1): $\psi_{11} = \psi_{21} = 1$

(3): $\psi_{31} = \psi_{21} = 1$

↓
become $\psi_{21} = \psi_{11}$

but $\psi_{11} = 1 \rightarrow$ never = 0 →
have to chose a number,
and simplest is 1.

→ the first eigenvector is: $\{\psi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ → 1st eigenvector

→ in this mode $\{\psi_1\}$ the 3 masses moves all together at the same ways and at the same direction and amplitude → it's called RIGID BODY MOTION
→ so we don't have a variation of potential energy

$V = \frac{1}{2} [\psi_1]^T [k] \{\psi_1\} = 0$ → so we found a special vector that gives this value of potential energy.

• Second eigenvector:

$\omega_2^2 = K/m$ → $([k] - \frac{K}{m} [m]) \cdot \{\psi_2\} = \{0\}$

$\begin{bmatrix} 0 & -K & 0 \\ -K & K & -K \\ 0 & -K & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_{21} \\ \psi_{22} \\ \psi_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ → $\psi_{22} = 0$
 $\psi_{32} = -\psi_{21} = -1$

→ $\{\psi_2\} = [1 \ 0 \ -1]^T$ → 2nd eigenvector

• Third eigenvector:

$\omega_3 = 3K/m$ • $(K - m \frac{3K}{m}) \psi_{13} - K\psi_{23} = 0 \Rightarrow -2\psi_{13} - \psi_{23} = 0$

• $-K\psi_{23} + (K - m \frac{3K}{m}) \psi_{33} = 0 \Rightarrow -\psi_{23} - 2\psi_{33} = 0$

→ $\{\psi_3\} = [1 \ -2 \ 1]^T$ → 3rd eigenvector

→ The MODAL MATRIX ω :

$[\Psi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
↑ ↑ ↑
 ψ_1 ψ_2 ψ_3

$$\Rightarrow [C] = \alpha [m] + \beta [k] \quad \leftarrow \text{PROPORTIONAL DAMPING}$$

Now the equation of motion is:

$$[m] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\}$$

So to solve the eq. we need the modal transformation

$$\{x(t)\} = [\Psi] \{y(t)\}$$

So we will use the new "coordinates" y instead x
 $y_r(t)$ are called MODAL COORDINATE

→ AS: $[\Psi]$ is computed using $[m]$ and $[k]$ only and not using $[C]$ → so it is important to decoupling the eqs.

Procedures:

- 1) Compute $[\Psi]$
- 2) Apply modal transformation → we have new eq. in modal $[\Psi]^T$ coordinates:

$$[\Psi]^T [m] [\Psi] \{\ddot{y}\} + [\Psi]^T [C] [\Psi] \{\dot{y}\} + [\Psi]^T [K] [\Psi] \{y\} = \{0\}$$

→ multiply by $[\Psi]^T$ before because we are sure that the matrices are diagonal, and we are also sure that this matrix is diagonal because if $[C]$ has this particular form (proportional) we will obtain a diagonal matrix.

$$\rightarrow [\Psi]^T [C] [\Psi] = \text{diag } c_v = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & c_v \end{bmatrix}$$

→ it is simple to demonstrate: $c_v = \alpha m_v + \beta k_v$

→ if this product gives not a diagonal matrix is not proportional damping.

so we obtain: $m_v \ddot{y}_v + c_v \dot{y}_v + k_v y_v = 0$ → so it's ^{single} 1 DOF equation

→ now we have M (modal) uncoupled equations, it is only a mathematical procedure.

So now we have a SDOF eq:

$$\ddot{y}_v + \frac{c_v}{m_v} \dot{y}_v + \frac{k_v}{m_v} y_v = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_v + 2\zeta_v \omega_v \dot{y}_v + \omega_v^2 y_v = 0 \quad \text{with } \frac{k_v}{m_v} = \omega_v^2$$

So we search the solution:

$$y_v = y_0 e^{s t} \rightarrow s^2 + 2\zeta_v \omega_v s + \omega_v^2 = 0$$

$$\frac{c_v}{m_v} = 2\zeta_v \omega_v$$

↓

→ now we can get the response in the physical domain because now we have: $\{y(t)\}$ and $[\Psi]$ was note from the stud.

$$\Rightarrow \{x(t)\} = \sum_{r=1}^n \{\psi_r\} \cdot y_r(t) = [\Psi] \cdot \{y(t)\}$$

MODAL SYNTHESIS

It's the contrary of modal analysis → divide the physical problem in to many different problem.

In any case, it is also possible to use the method:

$$\{y\} = [\Psi]^{-1} \{x\}$$

but with $[\Psi]$ too big, is difficult to compute this method.

(and in this method we have to know all frequencies, but with the modal mode we have to know all have to know only r frequencies that we need.

FORCED RESPONSE: GENERIC FORCE

Consideriamo una forzante $\{f(t)\}$ nota.

Applicando la trasformazione modale e premoltiplicando per $[\Psi]^T$ l'equazione del moto diventa:

$$[\Psi]^T [m] [\Psi] \{\ddot{y}\} + [\Psi]^T [c] [\Psi] \{\dot{y}\} + [\Psi]^T [k] [\Psi] \{y\} = [\Psi]^T \{f(t)\} = \{Q(t)\}$$

che introduce in un insieme di n equazioni differenziali non omogenee del tipo:

$$m_r \ddot{y}_r + c_r \dot{y}_r + k_r y_r = Q_r(t) \quad (\square)$$

Il vettore $\{Q(t)\} = [\Psi]^T \{f(t)\}$ prende il nome di VETTORE DELLE FORZE MODALI.

Ogni equazione delle (□) può essere integrata separatamente utilizzando l'integrale di convoluzione.

→ Nel caso di sistemi SOVROSCORZATI, la soluzione completa in termini di coordinate modali è:

$$y_r(t) = e^{-\zeta_r \omega_r t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta_r}{\sqrt{1-\zeta_r^2}} \sin(\omega_d t) \right) y_r(0) + \frac{e^{-\zeta_r \omega_r t}}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \dot{y}_r(0) + \frac{1}{m_r \omega_d} \int_0^t Q_r(\tau) e^{-\zeta_r \omega_r (t-\tau)} \sin(\omega_d (t-\tau)) d\tau$$

→ Le coordinate modali vengono poi combinate applicando nuovamente la trasformazione diretta, per avere la risposta del sistema nello spazio delle configurazioni.

2) APPROCCIO MODALE

The response is: $\{x(t)\} = \{x_0\} e^{i\omega t}$ (steady-state solution)

We can apply the modal transformation:

$$\{x(t)\} = [\Psi] \cdot \{\eta(t)\} \rightarrow \text{DIRECT MODAL TRANSFORMATION}$$

multiply by $[\Psi]^T$ and obtain this expression:

$$[\Psi]^T [m] [\Psi] \{\ddot{\eta}\} + [\Psi]^T [c] [\Psi] \{\dot{\eta}\} + [\Psi]^T [k] [\Psi] \{\eta\} = [\Psi]^T \{F_0\} e^{i\omega t}$$

Now we have decoupled the eq. of motion

MODAL FORCES VECTOR

For a m DOF system we have:

$$m_r \ddot{\eta}_r + c_r \dot{\eta}_r + k_r \eta_r = \{\Psi_r\}^T \{F_0\} e^{i\omega t} \quad (2)$$

NB: → The damping distribution is proportional. By using $[\Psi]$ we can also obtain a diagonal matrix for $[c]$. But if damping is not proportional we can not do this.

→ the steady state solution of (2) is: $\eta_r(t) = \eta_{r0} e^{i\omega t}$ with $\eta_{r0} \in \mathbb{C}$

We substitute this solution in the eq and we get:

$$(k_r - m_r \omega^2 + i\omega c_r) \eta_{r0} e^{i\omega t} = \{\Psi_r\}^T \{F_0\} e^{i\omega t}$$

→ So we switch into frequency domain by removing the depending on time

$$\Rightarrow \eta_{r0} = \frac{\{\Psi_r\}^T \{F_0\}}{k_r - m_r \omega^2 + i\omega c_r} \quad \Rightarrow \eta_{r0} \in \mathbb{C}$$

NB: → Now we have a complex number because of the presence of damping. → So the damping producing the phase in the response.

→ Anche le coordinate ~~o~~ ~~ve~~ modali a regime saranno armoniche in cui n ha:

$$\{x(t)\} = \{x_0\} e^{i\omega t} = [\Psi] \{\eta(t)\} = \left(\sum_{r=1}^m \{\Psi_r\} \eta_{r0} \right) e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \{x_0\} = \sum_{r=1}^m \frac{\{\Psi_r\}^T \{F_0\} \{\Psi_r\}}{k_r - m_r \omega^2 + i\omega c_r} \quad (*)$$

↓

NB: Per la rettanza vale la condizione di reciprocità, che contraddistingue i sistemi vibranti lineari.

$$\alpha_{jk}(\Omega) = \alpha_{kj}(\Omega) \rightarrow \text{RECIPROCALITY CONDITION}$$

⇒ Assegnata una certa rettanza $\alpha_{jk}(\Omega)$ è possibile definire le frequenze di risonanza come quelle che rendono massimo il modulo della funzione $\alpha_{jk}(\Omega)$.

⇒ Essi sono in numero di massimo pari o numero di gradi di libertà del sistema, n .

⇒ La novità rispetto ai sistemi ad 1 g.d.l. è rappresentata dalla possibilità di avere frequenze di ANTI RISONANZA tra due risonanze successive, ovvero frequenze in corrispondenza delle quali la rettanza è nulla in onore di smorzamento.

CIAO CIAO
 AMORINO
 TI REGALO
 UN CUCCIOLLO
 DI PANDA
 PER IL COMPLEANNO
 TI AMO
 GIUSTO UN PO'

Example:
Consider a 3 dof system:

$$\alpha_{21}(\omega) = \sum_{r=1}^3 \frac{\psi_{2r} \cdot \psi_{1r}}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2)} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{2r} \cdot \phi_{1r}}{\omega_r^2 - \omega^2}$$

$[z_r = 0]$

$$\Rightarrow \left\{ \phi_r \right\} = \frac{\left\{ \psi_r \right\}}{\sqrt{m_r}} \rightarrow m\text{-normalized eig. vector}$$

The product: $[\phi]^T [m] [\phi] = [I]$ is the identity matrix

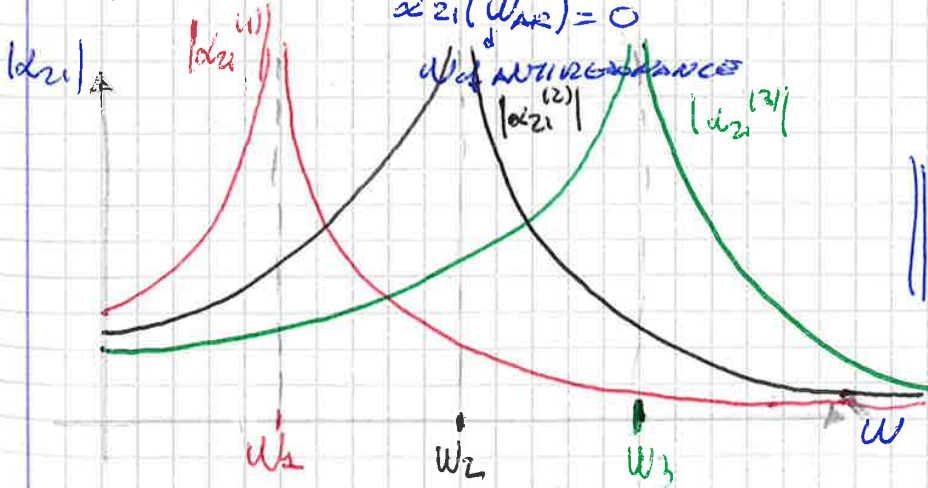
$$\Rightarrow [\psi]^T [m] [\psi] = [m_r]$$

$$\Rightarrow \alpha_{21}(\Omega) = \frac{\phi_{21} \cdot \phi_{11}}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{22} \cdot \phi_{12}}{\omega_2^2 - \Omega^2} + \frac{\phi_{23} \cdot \phi_{13}}{\omega_3^2 - \Omega^2}$$

$|\alpha_{21}^{(1)}|$ $|\alpha_{21}^{(2)}|$ $|\alpha_{21}^{(3)}|$

It is possible to have:

$$\alpha_{21}(\omega_{ant}) = 0$$



⇒ If we sum this expression the possible diagram could be:

continuo.

FOURIER TRANSFORM:

We said that Fourier transform of a time domain signal is:

$$F[x(t)] \rightarrow X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\Omega t} dt$$

Ma dal punto di vista applicativo non è neppure pensabile di poter disporre di funzioni $f(t)$ estese da $-\infty$ a $+\infty$ e questo per 3 motivi:

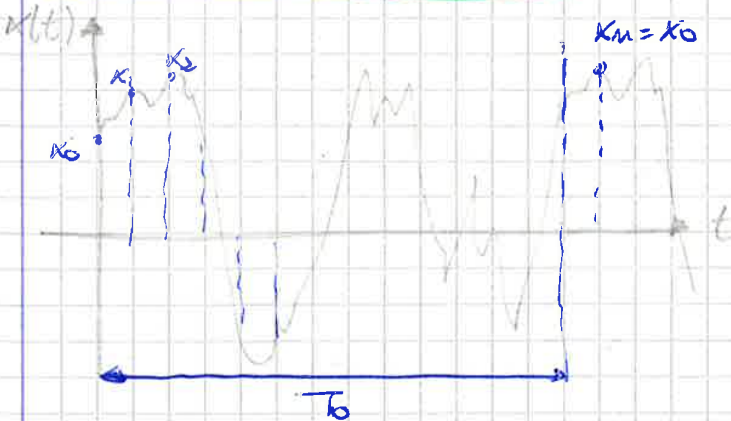
- 1) è impossibile avere sempre e sempre per un tempo limitato, magari lungo ma pur sempre finito.
- 2) dalle misure di una certa quantità variabile nel tempo non è sempre possibile (e neppure necessario) risalire a una funzione.
- 3) even, with a given function it is difficult to compute analogical integrals.

Quindi è indispensabile ricominciare le definizioni di serie e di trasformate alla luce del fatto che al posto della funzione $f(t)$ si ha a disposizione un insieme finito di suoi campioni

$f_k = f(k \Delta t)$, const period of sampling e $k=0, \dots, N-1$.

NB: N il numero di punti di cui si dispone non è lecito utilizzare la trasformata di Fourier, che prevede un dominio infinito per la funzione e si deve ricorrere al calcolo della serie. Il fatto che si impieghi la serie implica la supposizione che la sequenza di punti f_k sia periodica di N .

⇒ è così come si utilizza in modo scorretto uno strumento matematico (la serie) basato sull'ipotesi di periodicità e si introduce un errore detto LEAKAGE



$\Delta\Omega = \Omega_0 = \text{FREQUENCY RESOLUTION}$
 $\rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \text{FUNDAMENTAL FREQUENCY}$

⇒ Instead of compute Fourier transform we can compute Fourier series (which is defined in a limited time duration $0 \leq t < T_0$)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e^{ik\Omega_0 t}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-ik\Omega_0 t} dt \quad (1)$$

⇒ // Fourier series is only valid for // periodic signals

→ But in practice we have only a series of samples:

$$t \rightarrow n \Delta t$$

$\Delta t = \text{SAMPLING PERIOD}$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\Rightarrow x(t_n) = x_n$$

$$1/\Delta t = f_s = \text{SAMPLING FREQUENCY}$$

$N = \text{numero di punti di cui si dispone, NUMBER OF SAMPLES (samples)}$

⇒ So we have: $(X_k) = X_{k+N} = X_k$ - PERIODICITÀ
(with N = NUMBER OF SAMPLES)

↳ Proprietà di Fourier è periodica di N.

• And considering: $|k' = N - k|$ we have:

$$\Rightarrow X_{N-k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-i2\pi(N-k)\frac{n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-i2\pi n} e^{i2\pi k \frac{n}{N}} =$$

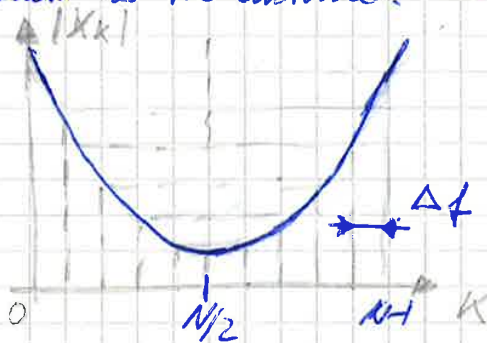
$$\Rightarrow X_{N-k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cdot e^{+i2\pi k \frac{n}{N}}$$

$$\Rightarrow X_{N-k} = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cdot e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \right)^*$$

devo essere - qui: allora
premultiplico per - e ottengo
il coniugato perché sto
a cambiare la parte
immaginaria.

⇒ $X_{N-k} = X_k^*$ → SIMMETRIA
→ indica una sorta di simmetria
delle linee spettrali.

Δf → FREQUENCY RESOLUTION → we do not have indication of frequency
in discrete form.
What is the distance? → Well, what is the FREQUENCY RESOLUTION?



Suppose that we have this spectrum
of starting function:

So we have:

$$\Delta f = \frac{\Delta \Omega}{2\pi} = \frac{\Delta \omega}{2\pi} = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{N \Delta t} = \frac{f_s}{N}$$

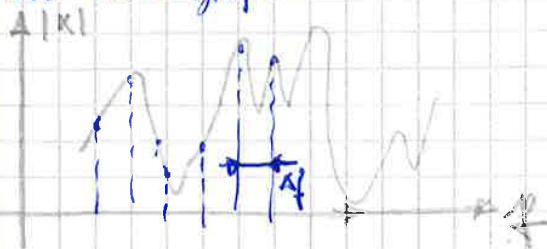
⇒ So, the frequency resolution Δf , the
distance between two spectral lines is:

frequency resolution - $\Delta f = f_s/N$ with N =
NUMBER OF
SAMPLES

⇒ In time domain we would like to have very short Δt
(in theory) and in the same way we would like to have
very short Δf (frequency resolution) to look every variation of
the function.

we decided to
measure

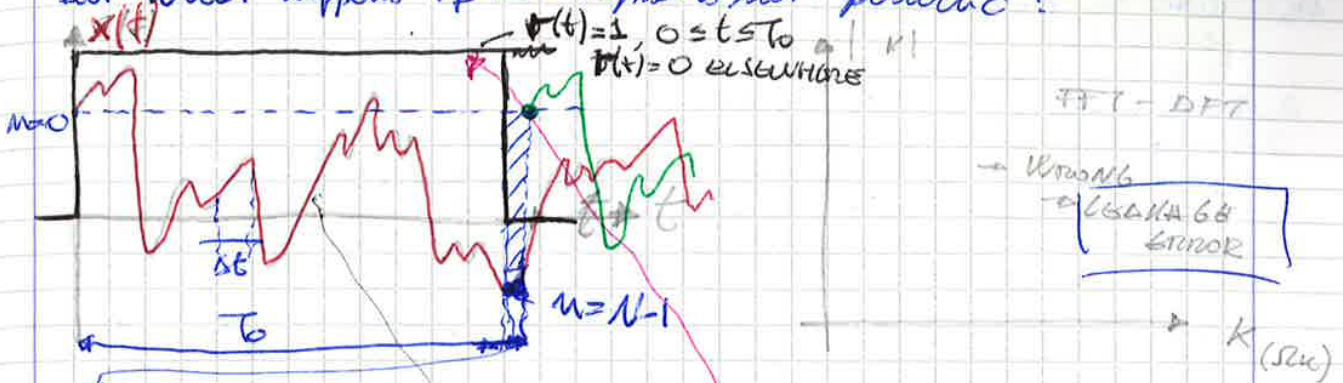
⇒ Imagine that the frequency representation of time domain signal is
that on the graph:



⇒ If Δf is not enough we are
unable to measure, but if Δf
is too large we always be able to
measure.

la DFT si basa sul calcolo dei coefficienti della serie di Fourier
 ma è implicita la necessità che i segnali siano periodici.

But what happens if the signal is not periodic?



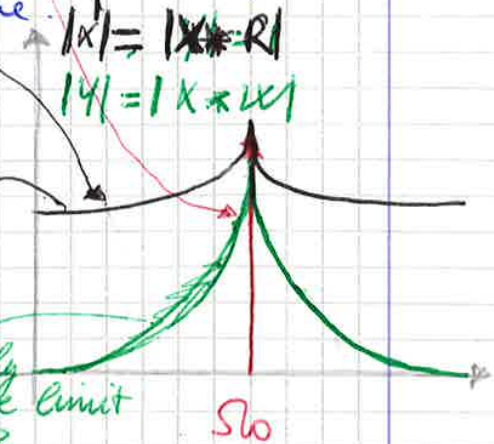
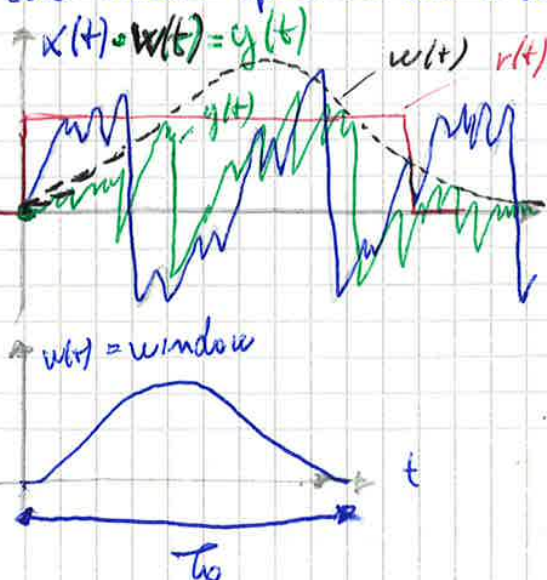
There is a jump here. If we do not have a periodic signal, allora FFT or DFT spectrum is wrong → we are limiting the time duration so we are forcing → is wrong.

⇒ Compriamo la funzione con un tempo T_0 non coincidente con un numero intero di periodi e come si vede il segnale obbia l'incrocamento in verde. Per cui si introduce una variazione sulla funzione originale con il conseguente mutamento delle armoniche che essa contiene.

⇒ Questa variazione si manifesta in modo marcato nella rappresentazione in frequenza del segnale: al posto dell'unica linea spettrale che (prima) della pulsazione ω_0 si ottiene la curva nera. Questo perché, avendo introdotto una discontinuità nella storia temporale, si è dato origine a un contenuto in frequenza più ampio di quanto non si abbia in realtà, il che si manifesta con la presenza di linee spettrali di ampiezza non trascurabile.

⇒ Per limitare questo effetto, si procede prima del calcolo della DFT all'operazione di FINESTRATURA (windowing). → cioè la serie di campioni è moltiplicata per una (finestra) (window) allo scopo di limitare la discontinuità della storia temporale e di imporre una periodicità a frequenze sequenti che non sono. Non si accetta di modificare, prendendoli con la finestra, i campioni originali.

⇒ Dunque che la DFT del segnale finestrato è molto più simile alle linee spettrali che si dovrebbe ottenere.



before multiply by window

after multiply by window at limit leakage

LEAKAGE ERROR → we lose information about part of signal

ELEMENTS OF PROBABILITY THEORY:

Tutti i dati che rappresentano un fenomeno fisico possono essere descritti come DETERMINISTICI (descritti da precise relazioni matematiche) e NON DETERMINISTICI (se ripetendo l'esperimento più volte non si riescono a riprodurre gli stessi risultati allora i dati vengono considerati intrinsecamente casuali).

Per descrivere i segnali non deterministici è necessario fornire alcuni elementi di teoria della probabilità.

If we have a random signal $x(t)$:



→ We are not able to describe what will happen.
 → What we usually adopt to describe the behaviour (components) of the signal is probability parameters:

$p(x)$ = PROBABILITY DENSITY FUNCTION

μ_x = MEAN VALUE (= EXPECTED VALUE) = $E[x(t)]$

$$\mu_x = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \cdot x \, dx \quad \text{MEAN VALUE (or EXPECTED VALUE)}$$

Ψ_x^2 = MEAN SQUARE VALUE = $E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) x^2 \, dx$
(it is the expected value of $x^2(t)$)

$$\Psi_x^2 = E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) x^2 \, dx \quad \text{MEAN SQUARE VALUE}$$

Ψ_x will be > 0 : Ψ_x = ROOT MEAN SQUARE and indicate the energy of the signal.

σ_x^2 = VARIANCE = $E[(x - \mu_x)^2]$

$$\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 p(x) \, dx \quad \text{VARIANCE}$$

σ_x = STANDARD DEVIATION

È un bene sapere che queste tre grandezze espresse da:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x) (x - \mu_x)^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) x^2 \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \mu_x^2 \cdot p(x) \, dx - 2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \cdot \mu_x \cdot x \, dx \\ &= \Psi_x^2 + \mu_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \, dx - 2\mu_x \int_{-\infty}^{\infty} p(x) x \, dx \end{aligned}$$

by definition the quantity is equal to 1

$$\Rightarrow \sigma_x^2 = \Psi_x^2 + \mu_x^2 - 2\mu_x^2$$

$$\Rightarrow \sigma_x^2 = \Psi_x^2 - \mu_x^2$$

→ So we can compute the mean value by averaging all of the samples read at time t_1 :

MEAN VALUE $\rightarrow \mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N x_m(t_1)$ (N should be as large as possible)

We move of τ and we read another value and we can also define this new quantity that depend on t_1 and $t_1 + \tau$, which is the expected value of the product:

$R_{xx}(t_1, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N x_m(t_1) \cdot x_m(t_1 + \tau)$ AUTO-CORRELATION FUNCTION

- If:
- $\mu_x(t_1) = \mu_x(t_2) = \mu_x = \text{CONSTANT} \quad \forall t_1, t_2$
 - $R_{xx}(t_1, \tau) = R_{xx}(t_2, \tau) = R_{xx}(\tau)$
 - The process is: **STATIONARY RANDOM PROCESS**

→ A random process is said to be **STATIONARY** if mean value computed at any time t and also the auto-correlation function are constant. (this is a particular case).

(Nel caso generale in cui μ_x e R_{xx} siano effettivamente variabili con t allora il processo random $\{x(t)\}$ si dice non stazionario.)

→ Even if the process is not stationary we also can define the mean value as:

$\mu_x(m) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_m(t) dt = E[x_m(t)]$

and in the same way we can define the auto corr. function for each process:

$R_{xx}(m, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_m(t) x_m(t + \tau) dt = E[x_m(t) x_m(t + \tau)]$

→ If the process is stationary and the quantities $\mu_x(m)$ e $R_{xx}(m, \tau)$ non variano al variare della realizzazione m , allora il processo si dice **ERGODICO**.

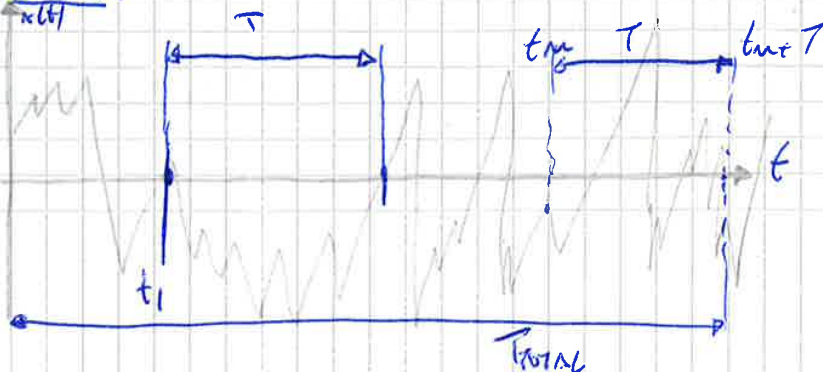
Case:

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau, m), \quad \forall m$$

$$\mu_x = \mu_x(m), \quad \forall m$$

→ **ERGODIC RANDOM PROCESS**

If the process is ergodic, it is also stationary, and we can take a single realization and this realization represent also the other.



→ I have a very long memory. If fix a certain starting time t_1 and $T < t_{total}$.

We can show that, for a stationary process:

$$R_{xx}(-\tau) = E[x_m(t) \cdot x_m(t-\tau)] = E[x_m(t+\tau) \cdot x_m(t)] = R_{xx}(\tau)$$

← con $t \rightarrow t+\tau$

Le funzioni di autocorrelazione sono pari $\Rightarrow R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$

\Rightarrow Instead, odd cross-correlation functions non-zero are pari in degree:

$$R_{xy}(-\tau) = E[x_m(t) \cdot y_m(t-\tau)] = E[x_m(t+\tau) \cdot y_m(t-\tau+\tau)] = E[y_m(t) \cdot x_m(t+\tau)] = R_{yx}(\tau)$$

$$\Rightarrow R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)$$

FUNZIONI DI DENSITA' SPETTRALE:

If we set the Fourier Transform of this quantities we have:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\Omega\tau} d\tau = S_{xx}(\Omega) \rightarrow \text{AUTO-POWER SPECTRAL DENSITY}$$

it is a function $S_{xx}(\Omega)$ called AUTO-POWER SPECTRAL DENSITY (PSD) and often indicate as "SPECTRUM" (occluso a non confondere).
 [in italiano "funzione densità di autospettro", funzione densità spettrale di potenza" o "AUTOSPECTRO".]

because SPECTRUM is the transform of the starting function SPECTRUM = $\int [x(t)]$

\Rightarrow We can also transform the cross correlation function xy :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\Omega\tau} d\tau = S_{xy}(\Omega) \rightarrow \text{CROSS-POWER SPECTRAL DENSITY}$$

to go back we use INVERSE FOURIER TRANSFORM:

$$R_{xy}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega$$

$\Rightarrow S_{xx}(\Omega)$ is the Fourier transform of R_{xx} .

Note: But from PSD we can not go back to original signal $x(t)$ or $y(t)$.

NB: S_{xx} is a real and an even function because is the Fourier transform of a real and even function.

$$\Rightarrow S_{xx}(\Omega) \in \mathbb{R} \Rightarrow S_{xx}(\Omega) = S_{xx}(-\Omega) = S_{xx}^*(\Omega)$$

↓ ↓
 indice è pari indice è reale

E si ha il legame:

$$G_{xx}(\Omega) = 2 S_{xx}(\Omega)$$

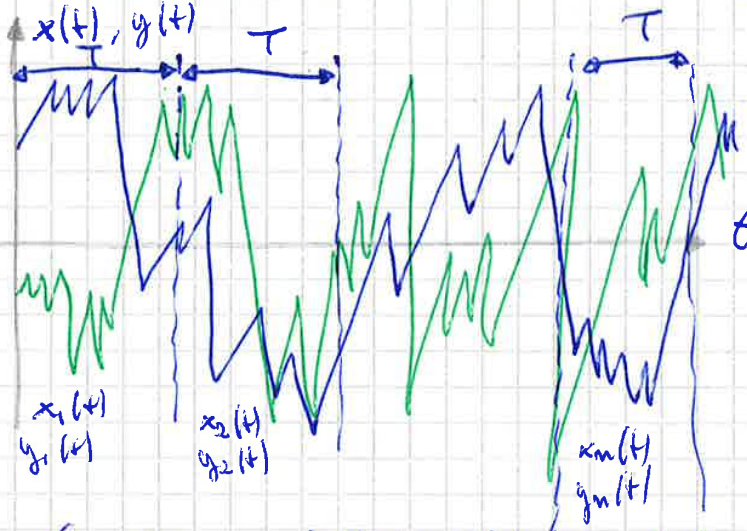
→ in questo modo $\Omega \geq 0$ sempre possiamo avere solo le parti positive.

Volendo la funzione di autocorrelazione per $\tau=0$ si ottiene l'importante relazione:

$$R_{xx}(0) = E[x^2(t)] = \Psi_x^2 = \int_0^{\infty} G_{xx}(\Omega) d\Omega$$

da cui si comprende che l'area sotto della curva che rappresenta G_{xx} corrisponde al momento del secondo ordine del processo.

CALCOLO DEGLI SPETTRI:



What we practically do to compute PSD: consider very long measurement of $x(t)$ and also $y(t)$.

How can I compute the PSD quickly? (over spectral density) $S_{xy}(\Omega)$?

→ Consider a first time block, of duration T , so I have $x_1(t)$ and $y_1(t)$ (first part of measurement). Then I move to second block with same duration T and I define the second measurement $x_2(t)$ and $y_2(t)$. ecc. fino a $x_m(t), y_m(t)$. → I divided the measurement into many blocks.

→ I will compute to any of these blocks the quantity (a sort of FT transform).

$$F[x_m(t)] = X_m(\Omega, T)$$

$$F[y_m(t)] = Y_m(\Omega, T)$$

Then I compute X_m^* and the expected value of this quantity:

$$\frac{1}{T} \cdot E[X_m^*(\Omega, T) \cdot Y_m(\Omega, T)] = \frac{1}{T} \cdot \frac{\sum_{m=1}^N [X_m^*(\Omega, T) \cdot Y_m(\Omega, T)]}{N}$$

With $X_m(\Omega, T)$ and $Y_m(\Omega, T)$ I can define the function:

$$S_{xy}(\Omega, T, m) = \frac{1}{T} \cdot X_m^*(\Omega, T) \cdot Y_m(\Omega, T)$$

→ Questa nuova funzione è evidentemente dipendente dallo

↳ we have different requirements → long time T because the number of samples m will be very large.

Example:

$f_s = 1000 \text{ Hz}$

$T_{\text{TOTAL}} = 60 \text{ s}$

number of $N = 10$

$m = S_{\text{TOTAL}} / N$

$m = 6000 \text{ samples}$

$S_{\text{TOTAL}} = 60000 \text{ samples}$

→ $\Delta f = m \cdot f_s \Rightarrow \frac{1}{T} m \cdot f_s$

$T \cdot m = f_s \cdot T$

$T = T_{\text{TOTAL}} / N = 6 \text{ s}$

→ $\Delta f = f_s / m \Rightarrow$ do not:

~~$\Delta f = \frac{f_s}{S_{\text{TOTAL}}}$~~
 (because we are just using blocks)

→ The only way to increase Δf is to increase T_{TOTAL} .

Continuum:

NON PROPORTIONAL VISCOUS DAMPING

Assume l'equazione del moto libero di sistemi con smorzamento viscoso:

$$[m] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [k] \{x\} = \{0\}$$

In generale non è detto che la matrice modale $[\Psi]$, calcolata a partire da $[m]$ e $[k]$, sia in grado di diagonalizzare la matrice $[c]$.

⇒ In general: $[\Psi]^T [c] [\Psi]$ non diagonal.

⇒ Proportional viscous damping is not realistic but it's simple. So in general case we have this situation:

$$\begin{aligned} \{x(t)\} &= \{x_0\} e^{st} \\ \{\dot{x}\} &= s \{x\} = s \{x_0\} e^{st} \\ \{\ddot{x}\} &= s^2 \{x\} = s^2 \{x_0\} e^{st} \end{aligned}$$

~~which~~ is different from proportional case

So we have:

$$([m]s^2 + [c]s + [k]) \cdot x_0 e^{st} = \{0\} \quad (1)$$

If we solve QEVP we obtain: $(Q) \rightarrow$ called QUADRATIC EIGENVALUE PROBLEM (QEVP)

$$s_r, \{\Psi_r\}$$

We can not demonstrate that $\{\Psi_r\}$ is orthogonal respect to $[m]$, $[c]$ and $[k]$ so we can not uncouple the equations. So the 'eigenvectors are not useful', we don't compute them.

If I impose: $\det(Q) = 0$ it is complex function in s → it is difficult to resolve.

⇒ So we need a completely different approach → STATE SPACE APPROACH

DUNCAN'S METHOD:

Duncan's method is a state space method in which $[A]$ and $[B]$ are symmetric. State space approach used by Genta is different, there are many state space approaches.

⇒ I have to increase the dimension of our problem → I have to define a state STATE SPACE VECTOR:

For example: $\rightarrow \{y\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix}$

$\Rightarrow [A]$ and $[B]$ are real.

$$\Rightarrow a_{2m} \cdot s^{2m} + a_{2m-1} \cdot s^{2m-1} + \dots + a_0 = 0$$

are real numbers
So the ~~these~~ poles are real or complex conjugated.

The eigenvectors (the solution of the EVP) are:

$$\{\theta_r\} = \left\{ \begin{matrix} \{y_r\} \\ s_r \{y_r\} \end{matrix} \right\}_{2m \times 1} \quad \rightarrow \text{it is possible to demonstrate}$$

where $\{y_r\}$ is the solution of α EVP. But α EVP is very difficult, solving the EVP is simpler.

~~A and B are ortho.~~ A- and B-orthogonality?

We don't demonstrate it; it's the same demonstration of the case of proportional damping.

If: $r \neq s \Rightarrow \{\theta_r\}^T [A] \{\theta_s\} = 0$ A-orthogonality

$r \neq s \Rightarrow \{\theta_r\}^T [B] \{\theta_s\} = 0$ B-orthogonality

$r = s \Rightarrow \{\theta_r\}^T [A] \{\theta_r\} = a_r$ MODAL MASS A

$r = s \Rightarrow \{\theta_r\}^T [B] \{\theta_r\} = b_r$ MODAL MASS B

We can also demonstrate that the system poles:

$$s_r = -\frac{b_r}{a_r} \in \mathcal{C}$$

\rightarrow This approach is also valid in case of proportional damping, but is not so simple to demonstrate. Proportional damping case is a particular case.

I can say that $\text{Re}[s] < 0$ because I'm sure that the system is stable. We don't study in this course instability phenomena.

If $[H]$ is positive definite, $[k]$ and $[c]$ are positive or semipositive definite.

If $\text{Re}[s] > 0$ I'm sure that I have at least one contribution that diverges.

Now we can uncoupling the equations of motion:

$$\text{MODEL MATRIX: } [\Theta] = [\{\theta_1\}, \{\theta_2\}, \dots, \{\theta_{2m}\}]_{2m \times 2m}$$

↓
MODEL MATRIX

Advantages: **one matrix [A]**

Disadvantages: - **we have to compute the inverse of matrices;**
 - **[A] is not symmetric** \Rightarrow it's a problem because we can't use eigenvectors to uncouple equations of motion.

\Rightarrow We can solve this problem using another property: **BIORTHOGONALITY**

\Rightarrow Biorthogonality is a generalization of orthogonality.
 \Rightarrow **Let's go back to Dunker's method:**

Free response (I need initial conditions)

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x(\dot{0}) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{cases} = \begin{cases} x_0 \\ v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [A]\{y\} + [B]\{\dot{y}\} = \{0\}$$

$$\{y_0\} = [0] \{y_0\} \quad \text{DMT}$$

$$\{\dot{y}_0\} = [0]^{-1} \{\dot{y}_0\} \quad \text{IMT}$$

first approach
 \downarrow
 faccio l'inverso della matrice \rightarrow non sempre è facile

Second approach:

$$\{y\} = [0] \{y\}$$

$$[0]^T [A] [0] \{y\} + [0]^T [B] [0] \{\dot{y}\} = \{0\}$$

I can also write the solution y using the expansion theorem:

$$\{y\} = \sum_{r=1}^{2n} \{\theta_r\} \cdot \eta_r \quad \rightarrow \text{expansion theorem}$$

metodo per $\{\theta_s\}^T$ \rightarrow evolve into

$$\{\theta_s\}^T [A] \{y_0\} = \sum_{r=1}^{2n} \{\theta_s\}^T [A] \{\theta_r\} \eta_{r0} = a_s \cdot \eta_{r0}$$

$$\text{So } \eta_{r0} = \frac{[\theta_r]^T [A] \{y_0\}}{a_r}$$

$$\Rightarrow \eta_r(t) = \eta_{r0} \cdot e^{-\frac{b_r}{a_r} t} = \eta_{r0} \cdot e^{s_r t}$$

If: $t=0, \eta_r(0) = \eta_{r0}$

$$\{y\} = \sum_{r=1}^{2n} \{\theta_r\} \cdot \eta_r(t) = \begin{cases} \{x\} \\ \{v\} \end{cases}$$

$j \leq m \rightarrow$ because in $\{y\}$ we collect displacements and velocities.

$i \leq m \rightarrow$ there is no physical meaning because in the second part of $\{P\}$ we have $\{0\}$.
We can write in this way:

$$\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{j0} \\ \vdots \\ y_{m0} \end{pmatrix} = \sum_{v=1}^{2m} [\theta_{1v}, \theta_{2v}, \dots, \theta_{kv}, \dots, \theta_{mv}] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_{k0} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \theta_{1v} \\ \theta_{2v} \\ \vdots \\ \theta_{jv} \\ \vdots \\ \theta_{mv} \end{matrix}$$

$i \omega a_v + b_v$

multiplying these two vectors we obtain a number $\Rightarrow \theta_{jv} \cdot f_{k0}$ because all other terms of columns are 0.

If $j \leq m$ there is no difference in writing k or j .
We have columns = coefficients · column
I am interested only in y_{j0} and θ_{jv}

$$\Rightarrow a_{jk}(\omega) = \sum_{v=1}^{2m} \frac{\theta_{jv} \cdot \theta_{kv}}{i \omega a_v + b_v} \quad \text{FRF (receptance)}$$

From a theoretical point of view if we use Duvau's method in the proportional case we obtain the same result. we have two different expressions but these expressions are the same.

(This is also an eigenvalue problem (EVP) very simple:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

So the system poles are:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

ω_n = frequency that we see without damping \rightarrow natural frequency

$(\underline{\underline{\square}})$ \rightarrow expression of the system poles.

\Rightarrow In the root locus we will plot the system poles in function of ζ

Particular case (under damped system $\rightarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$):

IF: $\zeta = 0 \rightarrow s_{1,2} = \pm i\omega_n \rightarrow$ in this case eigenvalues are purely imaginary

critical damping $\zeta = 1 \rightarrow s_{1,2} = -\omega_n \rightarrow$ point C in the plot

$\zeta > 1 \rightarrow s_{1,2} < 0 \in \mathbb{R}$ \rightarrow we see that both poles are real and negative

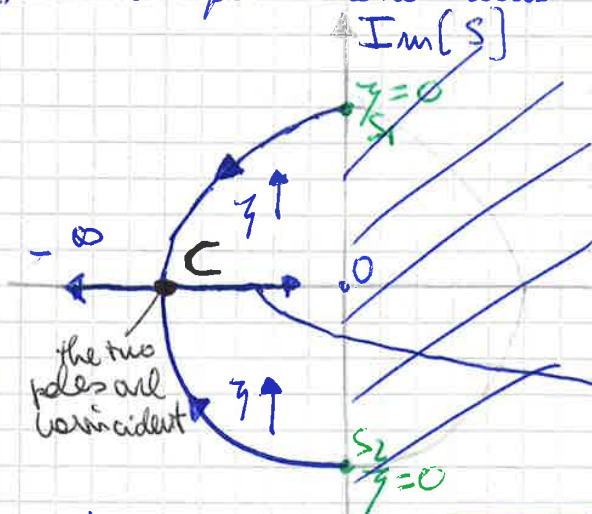
most important case $0 < \zeta < 1 \rightarrow$ $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

I can compute:

$$\begin{aligned} \text{Re}^2[s] + \text{Im}^2[s] &= (-\zeta\omega_n)^2 + (\pm\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2 = \\ &= \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2 - \omega_n^2\zeta^2 = \omega_n^2 \quad \forall \zeta \end{aligned}$$

NB. This number does not depend on ζ so it is a locus.

I can now plot the root locus:



this part is forbidden because in this part we have INSTABILITY.

Re[s]

le due forze laterali a homo $\rightarrow \zeta \rightarrow 0$ allora $s \rightarrow -\infty$
 $\zeta \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow s \rightarrow 0$

This is the root locus for a 2DOF system.

vedi: $(\underline{\underline{\square}})$

First of all I have to compute the system poles.
 these poles are computed by characteristic equation and to compute these I have to put the determinant equal to 0.

So I have an EVP:

$$\det(s[A] + [B]) = 0$$

$$\Rightarrow (s[A] + [B]) \cdot \{ \varphi_0 \} = \{ 0 \} \quad \text{EVP}$$

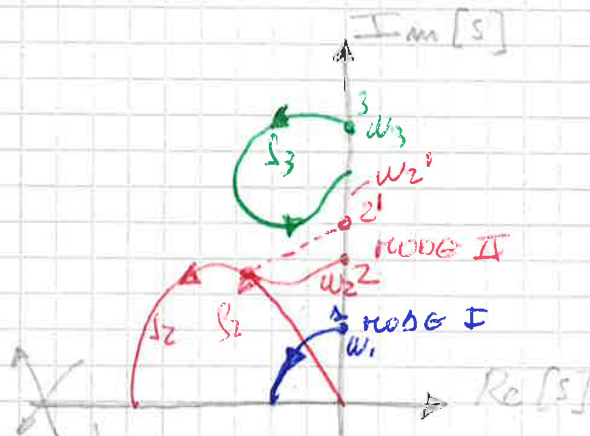
So I have 2n poles s_r that are complex ($\in \mathbb{C}$) and the real part is negative ($\text{Re}[s_r] < 0$)

Now I want to plot the root locus by increasing the damping. How can I increase the damping?

There isn't a single way to increase damping, so we can have different result because there is no more than one way to increase damping:

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & +c_2 \end{bmatrix} \cdot \sigma$$

- 1) I can increase c_1
- 2) I can multiply for a constant σ
- 3) I can increase c_2 etc etc



It depends on how I modify the damping.

There is no unique root locus for non proportional damping.

What about ω_n ? What is the physical meaning of point 1, 2, 3? (320)

It is correct $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

In case of non proportional damping someone write the poles with this way:

$$s_r = -\zeta_r \omega_r \pm i \cdot \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \in \mathbb{C}$$

I can always write a complex number: $s_r = a + i b$

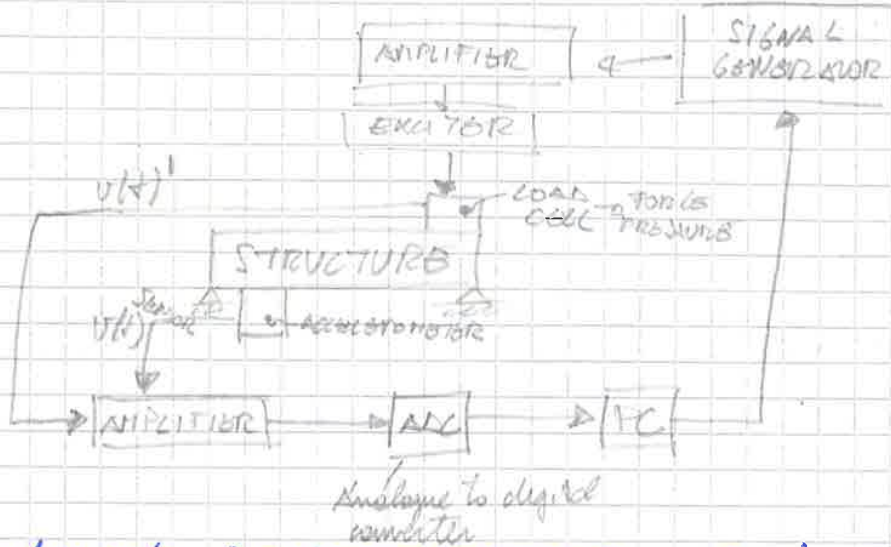
$$|s_r| = \omega_r'$$

In the case of $p_2 \rightarrow \omega_2$ is not the natural frequency ω_n put here $\Rightarrow \omega_2' \neq \omega_n$

25/11 TASSARA

MISURE SPERIMENTALI e IDENTIFICAZIONE

We want to perform model analysis of the structure:
 First step: chose the structure you want to analyze:



→ we have to **DECIDE BORDER CONDITIONS**. Sometimes can be chosen but sometimes can be given by the structure.

have 2) (Typical solution, as collected) **FREE-FREE CONDITIONS** (the structure is simply connected by the roof with a long elastic cable → e' facile da riprodurre).
 "STRUTTURA LIBERA"
 una struttura libera nello spazio ha xi moti rigidi.
 La cosa è difficile da analizzare ma è facile da riprodurre.

2) **SIMPLY SUPPORTED STRUCTURE**: questo caso è + difficile da riprodurre ma è facile da analizzare.

⇒ In condizione free-free, utilizzabile quando la struttura non è troppo grande e pesante, e è difficile analizzarla.

x) **ACCELEROMETER (TRASDUTTORI DI ACCELERAZIONE)**: se scelta cell'accelerometro dipende dall'oggetto che deve misurare. (Small accelerometer con massima amplitudine). Sono in genere piezoelettrici, ma sono in uso anche quelli capacitivi e induttivi.

y) **LOAD CELL (TRASDUTTORI DI FORZA)**: "CELLE DI CARICO"
 In genere sono formati da cristalli piezoelettrici e misurano la forza agente lungo il loro asse.

Ma: i trasduttori x) e y) non possono creare microonde o troncamenti. Perovamente si usano i **TRASDUTTORI DI VELOCITÀ** → ESPOSIMETRO
 La load cell da un v(t) o voltaggio proporzionale a una forza