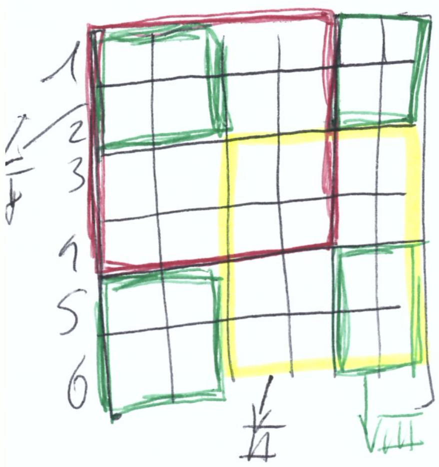
NUMERO: 2013A - ANNO: 2016

A P P U N T I

STUDENTE: Scarcello Domenico

MATERIA: Fondamenti di meccanica strutturale - Teoria + esercizi - Prof. Curà



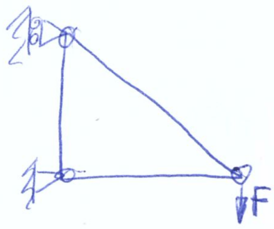
sono noti

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ -100 \cdot 10^3 N \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix}$$

incognite

non c'è vincolo → NO REAZIONE VINCOLARE

RISOLUZIONE DEL SISTEMA



risolvo le equazioni con spostamenti incogniti → u_3, u_4, u_6

$$K_{33} \cdot u_3 + K_{34} \cdot u_4 + K_{36} \cdot u_6 = 0$$

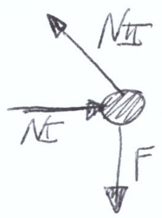
$$K_{43} u_3 + K_{44} u_4 + K_{46} u_6 = -100 \cdot 10^3 N$$

$$K_{63} u_3 + K_{64} u_4 + K_{66} \cdot u_6 = 0$$

si ricavano le incognite mettendole nelle righe

→ si scrivono le righe 1, 2, 5 per ottenere le forze incognite F_1, F_2, F_5

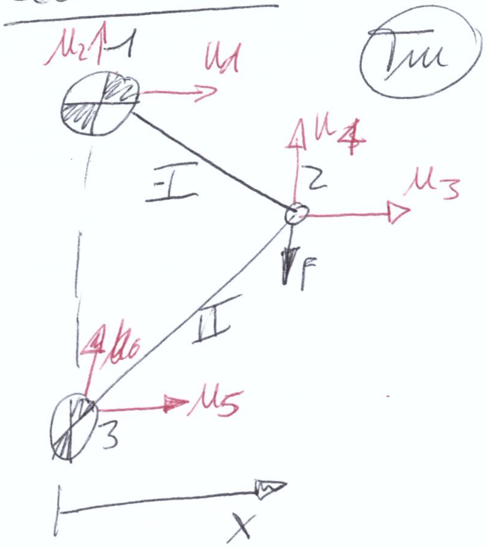
vale la regola del parallelogramma →



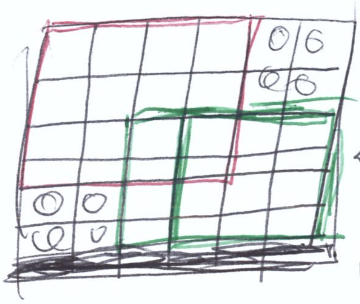
deve essere tutto in equilibrio

N_{II} fa equilibrio a N_I e F → equilibrio fra forze esterne ed interne

per ~~...~~ ottenere il diagramma degli sforzi velocemente esercizio 3



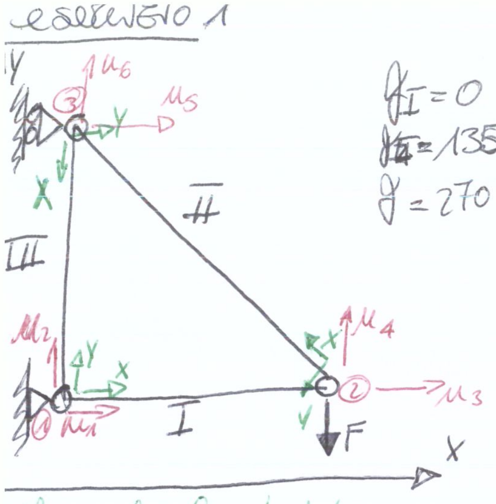
I	1	2	3	4	-30
II	3	4	5	6	-120



$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ -F \\ F_3 \\ F_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -C^{I} \\ -S^{I} \\ C^{I}-C^{II} \\ S^{I}-S^{II} \\ C^{II} \\ S^{II} \end{Bmatrix}$$

$$\{f_e\}_{xyz} = \alpha T_m EA \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \{f_e\}_{xyz} = \alpha T_m EA \begin{pmatrix} -c \\ -s \\ c \\ s \end{pmatrix}$$

esercizio 1



$\vartheta_I = 0$

$\vartheta_{II} = 135°$

$\vartheta = 270°$

$$[R] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$$

$[K]^I_{xyz} \rightarrow [K]^I_{XYZ}$

→ passare da locale a globale

in rosso spostamenti in coordinate globali

In verde il sist. di riferimento locale

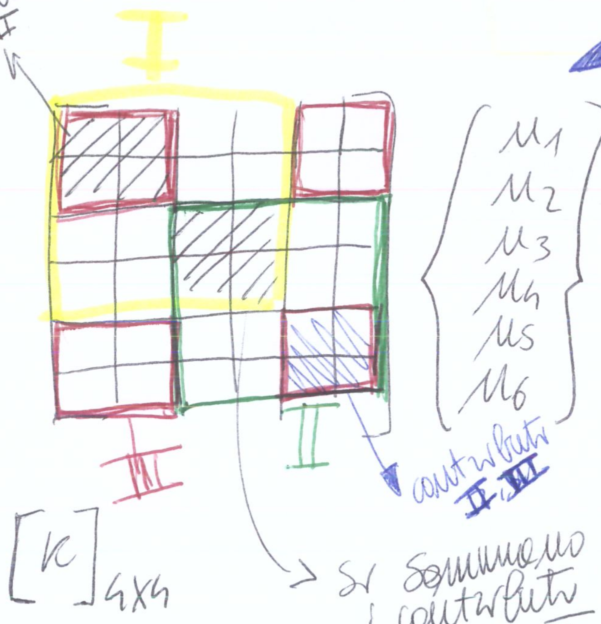
mappa di corrispondenza → permette di calcolare le rotazioni

spostamenti nel sist. globali

elem	1	2	3	4	ϑ
I	1	2	3	4	0
II	3	4	5	6	135
III	5	6	1	2	-90

si sommano i contributi di I e III

abbiamo 6 spostamenti



$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix}$$

$[K]_{4 \times 4}$

→ si sommano i contributi di I e II

$$[K]^I_{xyz} \rightarrow [K]^I_{XYZ}$$

$$[K]^I_{xyz} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^I_{XYZ} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$$

$\cos\vartheta^I = 1$

$\operatorname{sen}\vartheta^I = 0$

TRAVE

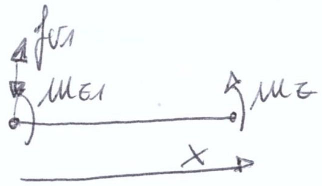
$$[a]\{\delta\}_{xyz} = [b]\{f\}_{xyz}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -l & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \alpha_{E1} \\ v_2 \\ \alpha_{E2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -l & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{l^2}{EI_z} & \frac{l}{EI_z} & 0 & 0 \\ -\frac{l^3}{6EI_z} & \frac{l^2}{2EI_z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{v1} \\ m_{E1} \\ f_{v2} \\ m_{E2} \end{Bmatrix}$$

(1) $f_{v1} + f_{v2} = 0$

(2) $m_{E2} + m_{E1} - f_{v1} \cdot l = 0$

(3) $\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{m_z}{EI_z}$



$m_z = -m_{E1} + f_{v1} \cdot x$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{m_{E1}}{EI_z} - \frac{f_{v1} x}{EI_z} \rightarrow \int_0 \frac{dv}{dx} = \frac{m_{E1} x}{EI_z} - \frac{f_{v1} x^2}{2EI_z}$$

rotazione totale elemento

$$\boxed{\alpha_{z2} - \alpha_{z1} = \frac{m_{E1} \cdot l}{EI_z} - \frac{f_{v1} \, l^2}{2EI_z}} \quad (3)$$

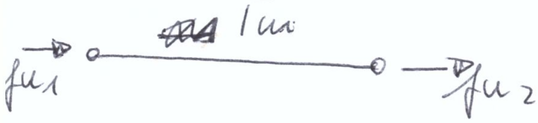
vado ad integrare di nuovo

$$\int_0^l dv = \frac{1}{EI_z}\left[\int_0^l m_{E1} x \, dx - \int_0^l \frac{f_{v1} \cdot x^2}{2} dx\right]$$

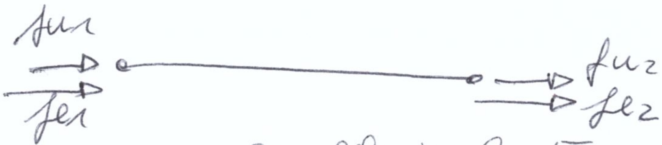
$$\boxed{v_2 - v_1 - \underbrace{\alpha_{E1} \cdot l}_{\text{effetto della rotazione}} = \frac{1}{EI_z} \frac{m_{E1} l}{2} - \frac{1}{EI_z} \cdot \frac{f_{v1} l^3}{6}} \quad (4)$$

→ da qui si ricava k invertendo b

$$[K]\{S\} = \begin{Bmatrix} f_{u1} \\ f_{u2} \end{Bmatrix} + \frac{q u \ell}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \underbrace{\alpha T_m EA \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}}_{\text{si considera la temperatura}} + \frac{f_u}{\ell}\{x\} \quad (3)$$



caso vero



caso equivalente

αT_m

$$f_{u1}+f_{u2}+f_{e1}+f_{e2}=0$$

$$f_{u2}+f_{u2}=0$$

$$\boxed{f_{e1}+f_{e2}=0} \quad (1)$$

$$\Delta u = \frac{N}{EA}\cdot \ell + \alpha T_m \cdot \ell$$

$$u_2-u_1=\frac{1}{EA}\left[f_{u2}\cdot \ell\right]+\alpha T_m \ell \qquad u_2-u_1=\frac{1}{EA}\ell\left[f_{u2}+f_{e2}\right]$$

Confronto le relazioni

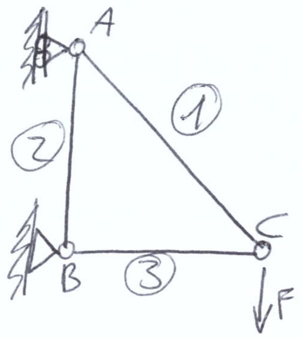
$$\boxed{\alpha T_m = \frac{f_{e2}}{EA}} \quad (2)$$

$(2) \rightarrow (1)$

$$f_{e1}=-f_{e2}=-\alpha T_m EA$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 204

CALCOLO MATRICIALE



Considereremo ogni elemento considerando la rigidezza

Il calcolo matriciale studia un'intera struttura assemblando i vari elementi

1) elementi strutturali → asta, trave, barra di torsione
2) matrice rigidezza
3) assemblaggio del sistema: locali → globali

si passa da coordinate

vincoli dalle cerniere $2(N-1)$

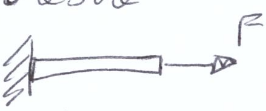
$$m = \underbrace{2+1}_{A} + \underbrace{2+2}_{B} + \underbrace{2}_{C} = 9$$

Sistema isostatico

$n = 9$

FORMULAZIONE DI RIGIDEZZA

• asta



sez A
E

$$\Delta l = \frac{N}{EA} \cdot l$$

$$N = \Delta l \left(\frac{EA}{l}\right) \rightarrow \text{rigidezza asta}$$

• molla

$$\Delta l \cdot k = F$$

Considereremo l'analogia con la molla

• barra di torsione

$$M_t = \Delta\theta \cdot \frac{G I_p}{l}$$

per ottenere l'equazione [illegible] (5)
di staccare la trave

con $N = \frac{EA}{\ell} \cdot \Delta\ell$

$$\boxed{f_{u2} = N = \frac{EA}{\ell}\Delta\ell = \frac{EA}{\ell}\cdot(u_2 - u_1)}$$

$$u_2 - u_1 = f_{u2} \cdot \frac{\ell}{EA}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \ell/EA \end{bmatrix}}_{\text{deve invertirla}}\begin{Bmatrix} f_{u1} \\ f_{u2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$b^{-1} = \frac{1}{\frac{\ell}{EA} - 0}\begin{bmatrix} \ell/EA & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -EA/\ell \\ 0 & EA/\ell \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -EA/\ell \\ 0 & EA/\ell \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u1} \\ f_{u2} \end{Bmatrix} \Rightarrow [b]^{-1}[a] = [K]$$

$$\begin{bmatrix} EA/\ell & -EA/\ell \\ -EA/\ell & EA/\ell \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u1} \\ f_{u2} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u1} \\ f_{u2} \end{Bmatrix}$$

formulazione rigidezza elemento asta con coordinate locali

5

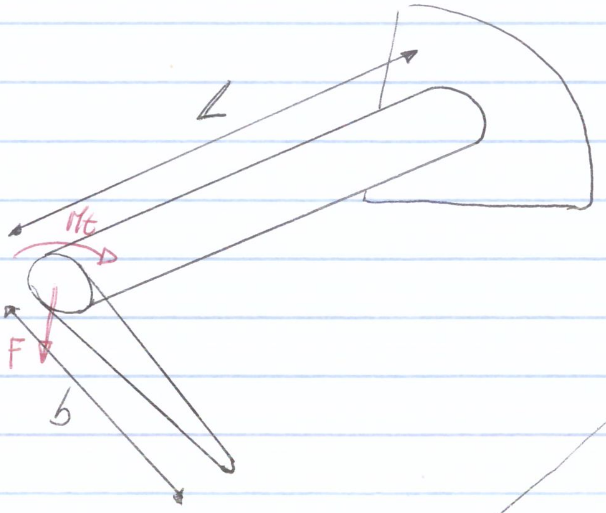
$$\boxed{[a]\{s\} = [b]\{f\}}$$

eq. statica

eq spostamenti

~~le equazioni di momento~~
gli spostamenti sono sempre dovuti al nodo 1

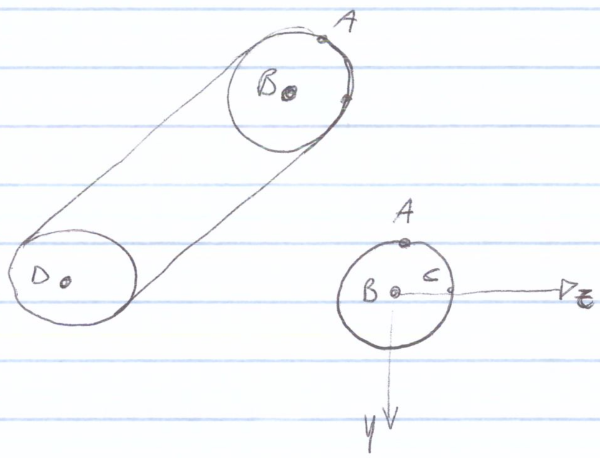
ESERCIZIO TEMA D'ESAME



$R_{p02} = 355\ MPa$

$D = ?$

$CS = 4$



$X = 0 \quad M_t \quad M_z = -FL \quad T = F$

$X = L \quad M_t \quad M_z = 0 \quad T = F$

Il punto più sollecitato della struttura è il punto A nell'incastro

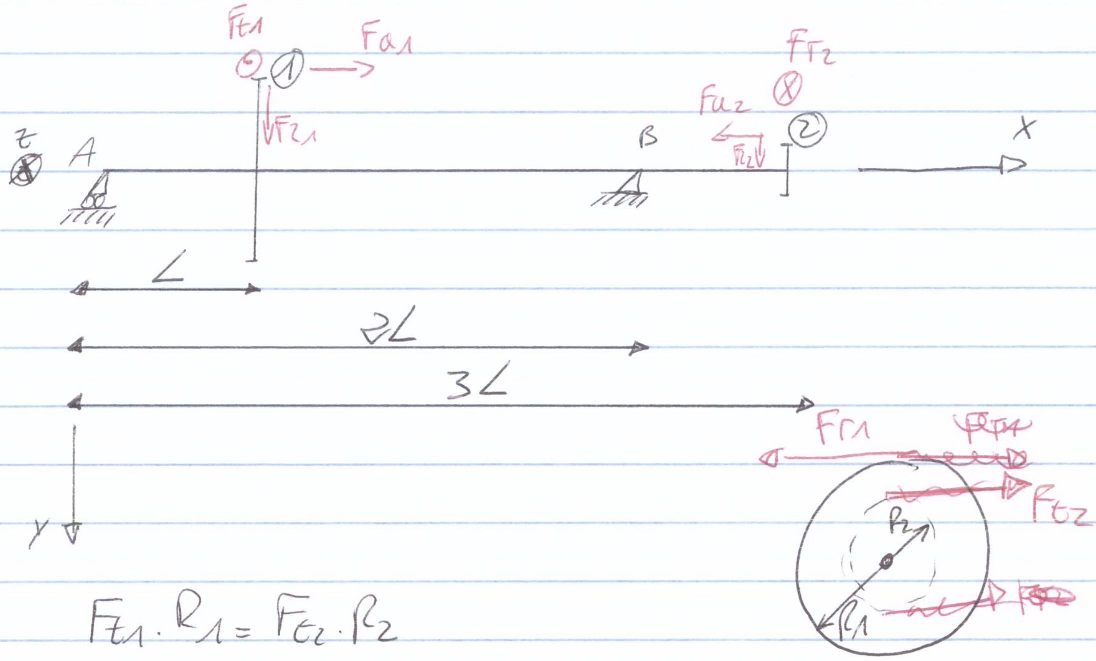
$$\left.\begin{aligned} \sigma_{x_A} &= \frac{FL\,32}{\pi D^3} \\ \tau_{xz} &= \frac{Fb\,16}{\pi D^3} \end{aligned}\right\}$$

$$\sigma_{eq_A} = \sqrt{\sigma_{x_A}^2 + 4\,\tau_{xz_A}^2}$$

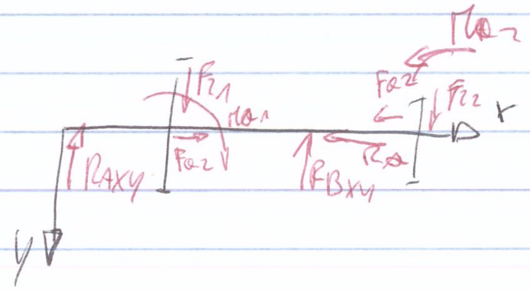
$$4 = \frac{R_{p02}}{\sigma_{eq_A}}$$

$$\sigma_{eq_A} = \sqrt{\left(\frac{FL\,32}{\pi D^3}\right)^2 + 4\left[\frac{Fb\,16}{\pi D^3}\right]^2} \rightsquigarrow D_{min}?$$

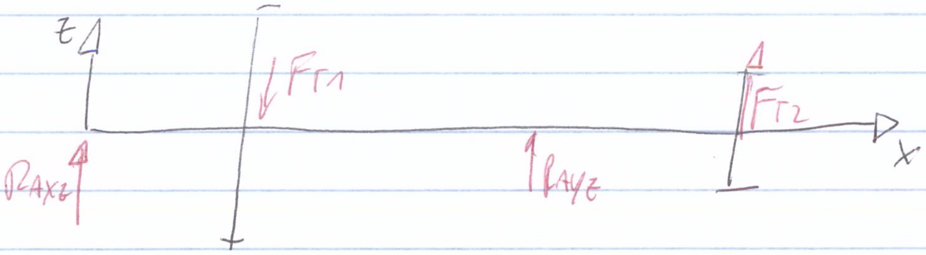
esercizio



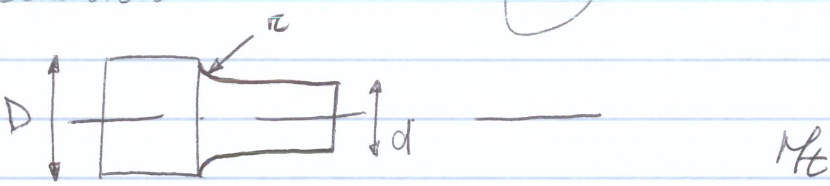
$$F_{t1} \cdot R_1 = F_{t2} \cdot R_2$$



$$M_{a1} = F_{a1} \cdot R_1$$
$$M_{a2} = F_{a2} \cdot R_2$$



esercizio C40



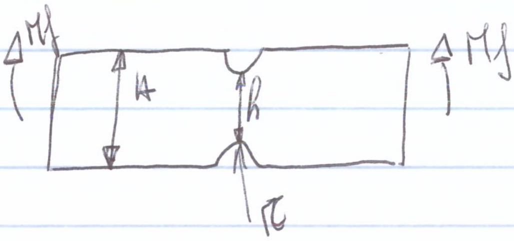
Riferimento carico di snervamento
$R_{p02} = 370 \div 490$ MPa

① CS? $\quad CS = \frac{R_{p02}}{\sigma_{eq}} \quad \sigma_{eq_T} = 2\tau$
$\sigma_{eq_{VM}} = \sqrt{3}\,\tau$

$\tau = \frac{M_t\,16}{\pi d^3}$ ← teniamo conto della dimensione più piccola

② d_{min}? $\quad 1,5 = \frac{R_{p02}}{2\tau_{max}}$ → dalla τ_{max} ricaviamo il d_{min}

esercizio



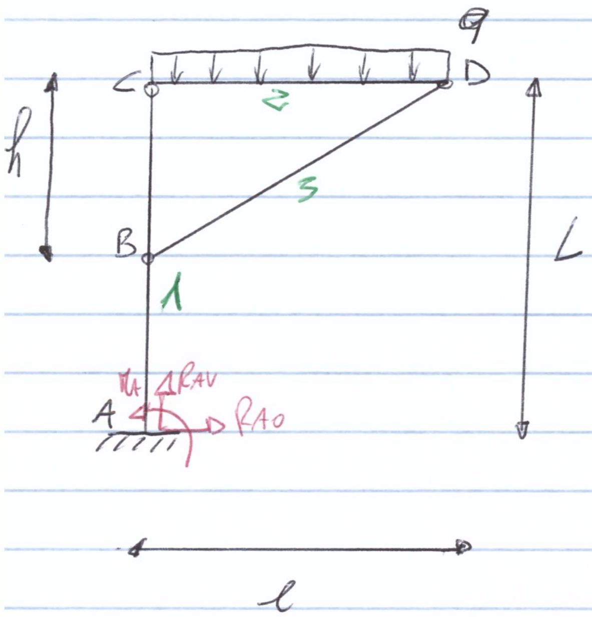
CS? ① acciaio → duttile
② ghisa → fragile

① $\sigma_{eq} = \sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{M_f}{W_f} = M_f.$
$CS = \frac{R_{p02}}{\sigma_{eq}}$

② $\sigma_{max} K_t$

LEZIONE 44 FONDAMENTI DI MECCANICA STRUTTURALE (1)

esercizio → tema d'esame



$$\ell = m - n = 3\cdot 3 - \underset{A}{3} - \underset{B}{2} - \underset{C}{2} - \underset{D}{2} = 0$$

sistema isostatico

R_{AV}, R_{AO}, M_A ✓

R_{BV}, R_{BO} ✓

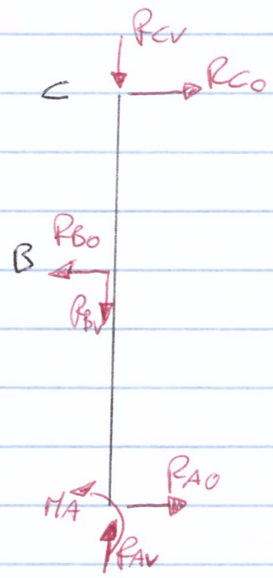
R_{CV}, R_{CO}

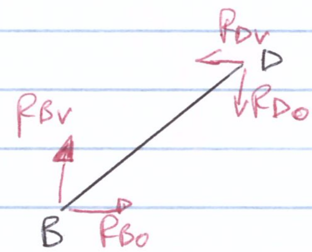
R_{DV}, R_{DO} ✓

$\rightarrow \; R_{AO} = 0$

$\uparrow \; R_{AV} = q\cdot\ell$

$\circlearrowleft \; M_A = q\dfrac{\ell^2}{2}$





$R_{BO} = R_{DO}$

$R_{BV} = R_{DV}$

$\circlearrowleft_B \; R_{DO}\,h - R_{DV}\cdot\ell = 0$

$R_{DO} = \dfrac{R_{DV}\,\ell}{h}$

$R_{BO} = \dfrac{M_A}{h} = R_{DO}$

si ricavano le altre reazioni ←

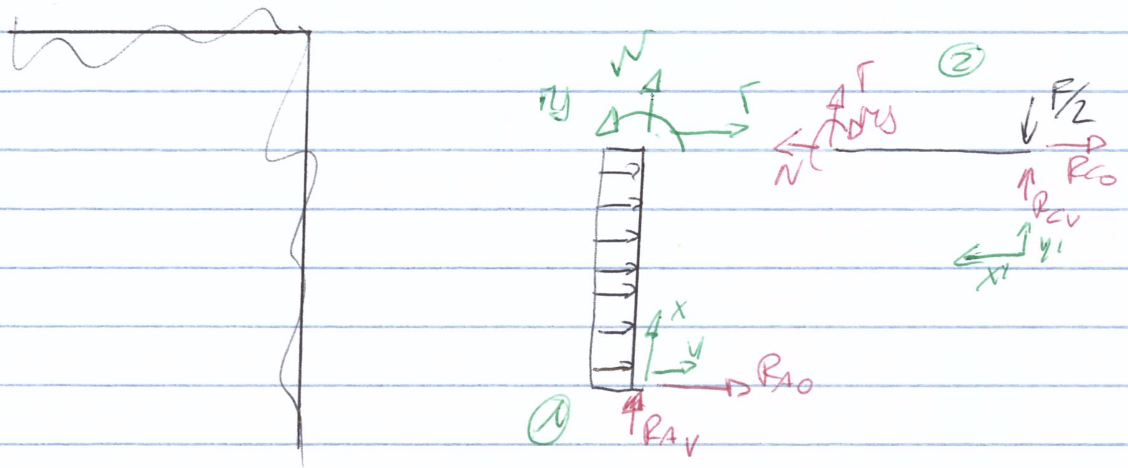
$R_{CO} = R_{BO}$

$R_{AV} - R_{BV} - R_{CV} = 0$

$\circlearrowleft \; -R_{BO}\cdot h + M_A = 0$

abbiamo 4 campate

3



① $N = -R_{AV}$ → compressione

$T + R_{AO} + qx = 0 \rightarrow T = -R_{AO} - qx$ ⟨ $x=0$, $x=2\ell$

$Mf = -R_{AO}x - q\frac{x^2}{2}$ ⟨ $x=0$, $x=2\ell$

② $R_{CO} = N$

$T + R_{CV} - F/2 = 0$

$T = F/2 - R_{CV}$

$Mf = R_{CV}x' - F/2\, x'$ ⟨ $x'=0$, $x'=\ell/2$

→ $Mf_1 = Mf_2$

LEZIONE 43 FONDAMENTI DI MECCANICA STRUTTURALE

materiale

$$C.S. = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{eq}} \qquad CS' = \frac{R_m}{\sigma_{eq}}$$ rispetto al carico di rottura

modello di calcolo

$\boxed{\sigma_{amm} \geq \sigma_{calcolato}}$

materiale → modello di calcolo

materiale → prove statiche, a fatica

come passare da R_m, R_{p02} a σ_{amm}?

$$\sigma_{amm} = \frac{R_{p02}}{1,5} \qquad \sigma_{amm} = \frac{R_m}{3}$$

acciaio STATICA

$R_{p02} \rightarrow \sigma_{amm} \rightarrow$ coeff. sicurezza $= \dfrac{\sigma_{amm}}{\sigma_{eq}}$

τ_{amm}? → deriva sempre dal materiale

si calcola → attraverso un'ipotesi di cedimento

$\sigma_{eq} = $

galileo $\sigma = \tau$

Tresca $\sigma = 2\tau$

Von Mises $\sigma_{eq} = \sqrt{3}\,\tau$

$$\tau_{amm} = \frac{\sigma_{amm}}{2} = 0,5\,\sigma_{amm}$$

$0 = \cancel{\cos} A + \delta \rightarrow A = -\delta$

facendo la derivata

$0 = -A \underbrace{\sin\sqrt{\ }}_{0} x [\ ] + \underbrace{B \cos\sqrt{\ }}_{1}$

$B = 0$

$$\boxed{y = -\delta \cos\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\, x + \delta}$$

$y = \delta\left(1 - \cos\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\, x\right)$

Soluzione armonica

per $y = \delta$ per $x = L$

$\delta = \delta\left(1 - \cos\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\, L\right)$

$$\boxed{\cos\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\, L = 0}$$

quando $\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\, L = \frac{\pi}{2} + n\pi$

↓

per questi valori

minimo per far collassare la trave $\rightarrow$ $P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_0^2}$ $\rightarrow$ quando $n = 0$

$\frac{P_{cr}}{EI_z} L^2 = \frac{\pi^2}{4} \rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_z}{4 L^2}$

$L_0 = 2L$

LEZIONE 42 FONDAMENTI DI MECCANICA STRUTTURALE

(1)

IPOTESI ENERGIA DI DISTORSIONE → VON MISES

~~[illegible]~~

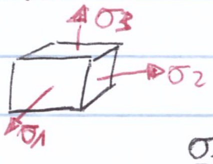
applicando un M_t → le due energie sono disaccoppiate

per calcolare il lavoro $L = \frac{1}{2} F_1 f_1 + \frac{1}{2} M_t \Delta\vartheta$
→ lavoro mutuo $= 0$

$L_e = L_i = \Phi$ → sul volume $\Phi = \frac{1}{2}\int_V \sigma \varepsilon \, dV$

Supponendo di avere un piano in trazione
→ $\frac{1}{2}\int_l N \cdot dl = \frac{1}{2}\int_l \frac{N \cdot N}{EA} \cdot dl = \frac{1}{2}\int_l \frac{N^2}{EA} \cdot dl = L_i$ $\qquad \Delta l = \frac{N}{EA} \cdot l$

Ip. di rottura di Von Mises → si porta a rottura un comp. quando in un punto si raggiunge la max energia di distorsione



$\sigma_1 \sim \varepsilon_1$
$\sigma_2 \sim \varepsilon_2$
$\sigma_3 \sim \varepsilon_3$

$$\Phi_{3D} = \frac{1}{2}\left\{\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right\}$$ VOLUME UNITARIO

$\Phi_{3D} = \Phi_{3D}' + \Phi_{3D}''$ → si ha cedimento quando si raggiunge $\Phi''_{3D\,max}$

Φ_{3D}' → statica (varia solo il volume)

Φ_{3D}'' → deviatorica (distorce l'elemento)

lui ipotizza l'indipendenza fra i due
→ SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

3

$$\phi'_{3D} = \frac{1}{2E3}\left[(1-2\nu)[A+2B]\right]$$

$$\phi''_{3D} = \phi_{3D} - \phi'_{3D} = \frac{1}{2E}\left[A - 2\nu B - \left(\frac{1-2\nu}{3}\right)[A+2B]\right]$$

$$\phi''_{3D} = \frac{1}{2E}\left\{A - 2\nu B - \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\nu A - \frac{2}{3}B + \frac{4\nu}{3}B\right\}$$

$$\frac{1}{2E}\left\{A\left(\frac{2}{3}\right)(1+\nu) - \frac{2}{3}B(1+\nu)\right\}$$

$$\phi''_{3D} = \frac{1}{2E}\cdot\frac{2}{3}\left\{(1+\nu)(A-B)\right\}$$

$$\phi''_{3D} = \frac{1}{3E}(1+\nu)\left\{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_1\sigma_3-\sigma_2\sigma_3\right\}$$

$$\underset{\sigma_{eq},0,0}{\phi''_{1D}} = \frac{1}{3E}(1+\nu)\left\{\sigma_{eq}^2\right\} \longrightarrow \phi''_{3D} = \phi''_{1D}$$

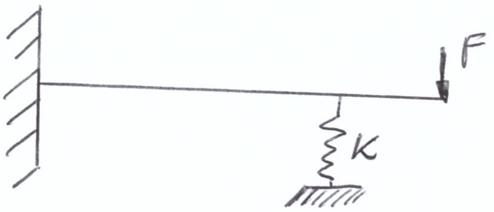
$$\boxed{\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2}}$$

Torre colonne caso piano $\sigma_2 = 0$ $\quad \sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{2}{2}}\cdot\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_3} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}+\sqrt{\ }\right)^2+\left(\frac{\sigma}{2}-\sqrt{\ }\right)^2-\left[\left(\frac{\sigma}{2}+\sqrt{\ }\right)\left(\frac{\sigma}{2}-\sqrt{\ }\right)\right]}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4}+\left(\frac{\sigma^2}{4}+\tau^2\right)+\cancel{2\frac{\sigma}{2}\sqrt{\ }}+\frac{\sigma^2}{4}+\left(\frac{\sigma^2}{4}+\tau^2\right)-\cancel{2\frac{\sigma}{2}\sqrt{\ }}-\left[\frac{\sigma^2}{4}-\left(\frac{\sigma^2}{4}-\tau^2\right)\right]}$$

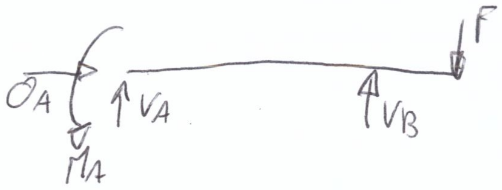
esercitazione



Struttura vincolata con vincoli cedevoli

$\Delta f = \frac{V_B}{K} \Rightarrow \boxed{F = K\Delta x}$

Immaginiamo di avere



$$\begin{cases} F - V_A - V_B = 0 \\ \theta_A = 0 \\ M_A + V_B 2\ell - F \cdot 3\ell \end{cases}$$

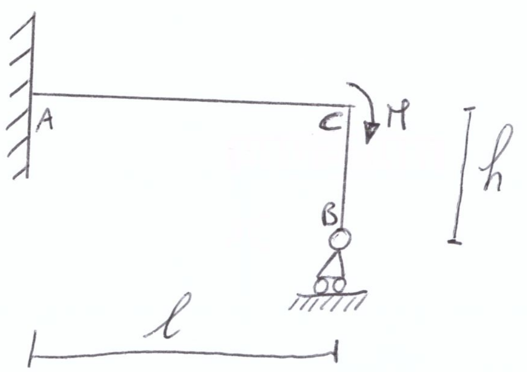
manca l'equazione di congruenza

$\Rightarrow$ si riduce il sistema a uno isostatico

$y_I(2\ell) + y_{II}(2\ell) = \Delta f$ perché il vincolo ha ceduto un po'

$= \frac{V_B}{K}$ $\Rightarrow$ cambia la cond. di congruenza perché il vincolo ha ceduto

esercizio



iperstatica

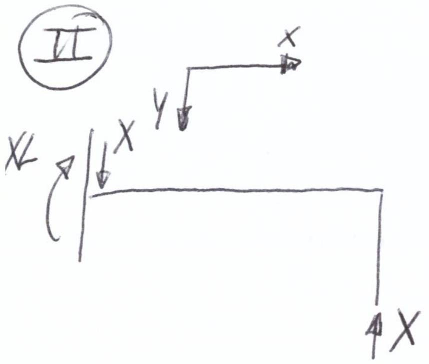
$$\frac{d^2 y_{I_1}}{dx^2} = \frac{+M}{EJ}$$

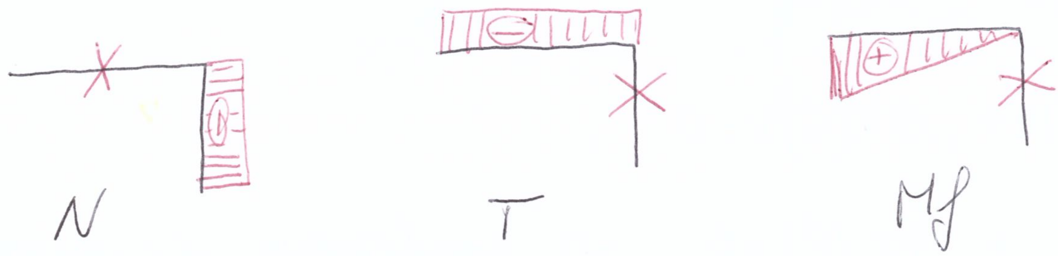
$$\boxed{\frac{dy_{I_1}}{dx} = \frac{M}{EJ} \cdot x + C_1 \qquad y_{I_1} = \frac{M}{EJ} x^2 + C_1 x + C_2}$$

$$y_I(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\frac{dy_I}{dx}(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

II





$$\frac{d^2 y_{II_1}}{dx} = \frac{X}{EJ}(x-\ell)$$

$$\boxed{\frac{dy_{II_1}}{dx} = \frac{X}{EJ}\left(\frac{x^2}{2} - \ell x\right) + C_3 \qquad y_{II_1} = \frac{X}{EJ}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{\ell x^2}{2}\right) + C_3 x + C_4}$$

$$y_{II}(0) = 0$$

$$\frac{dy_{II}(0)}{dx} = 0$$

$$C_4 = C_3 = 0$$

Condizione di congruenza.

Se il I tende a spostare B, II tende a riportarlo nella sua condizione originaria

$$\Delta v(B)_M + \Delta v(B)_X = 0 \Rightarrow$$

$\vec{N}$ → su ogni sezione → σ_x^N

N ⇒ 

$\sigma_x^N = \frac{N}{A}$

$\varepsilon E = \frac{N}{A}$

$\varepsilon_x = \frac{N}{EA}$

tornando all'esercizio

$\Delta l = \frac{N}{EA} \cdot l$

$\Delta l = \frac{-X l}{EA}$

↓

condizione che eguagliare alla condizione di congruenza

→ si ha un effetto di compressione

$\Delta l = \int_0^l \varepsilon_x \, dx = \int_0^l \frac{\sigma x}{E} dx = \int_0^l \frac{N}{EA} dx$

$\rightarrow = \frac{N}{EA} \int_0^l dl = \frac{N}{EA} \cdot l$ = allungamento

$N \frac{l}{EA} = \Delta l$

causa → effetto

Simile a $F = kx$

→ a a che vedere con la rigidezza della trave

· esercitazione

Struttura iperstatica

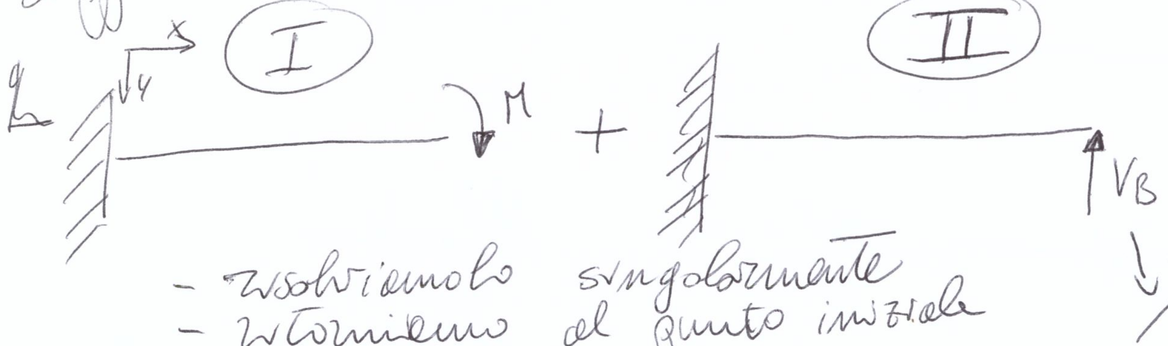
$$\begin{cases} O_A = 0 \\ V_A + V_B = 0 \\ M_A + M = V_B \cdot L \end{cases}$$

4 incognite in 3 equazioni

per trovare l'equazione facciamo ricorso al modello deformabile

scegliere un'incognita iperstatica ad esempio V_B

supponiamo che in B ci sia una forza

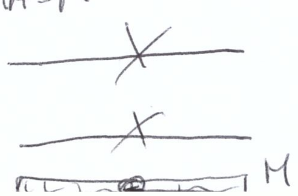


forza finta

- risolviamolo singolarmente
- ritorniamo al punto iniziale

1ª

$M_A = M$ $\quad 0 < x < l$



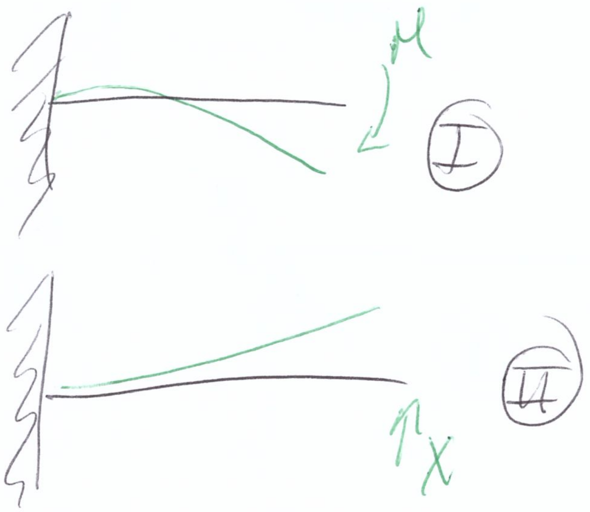
$y_{II}(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{X}{EJ}$

$\left.\frac{du}{dx}\right|_0 = 0$ $\quad C_4 = 0$

$C_3 = 0$

$$y_{II} = \frac{X}{EJ}\left[\frac{x^3}{6} - \frac{\ell}{2}x^2\right]$$

$$y_{II}(\ell) = \frac{X}{EJ}\left(\frac{\ell^3}{6} - \frac{\ell^3}{2}\right) = -\frac{X}{EJ}\frac{\ell^3}{3}$$



ciò che il 1° fa il 2° disf

$$\frac{M}{EJ}\frac{\ell^2}{2} + \frac{X}{EJ}\left(\frac{\ell^3}{6} - \frac{\ell^3}{2}\right) = 0$$ → 4ª equazione mancante

– condizione di congruenza

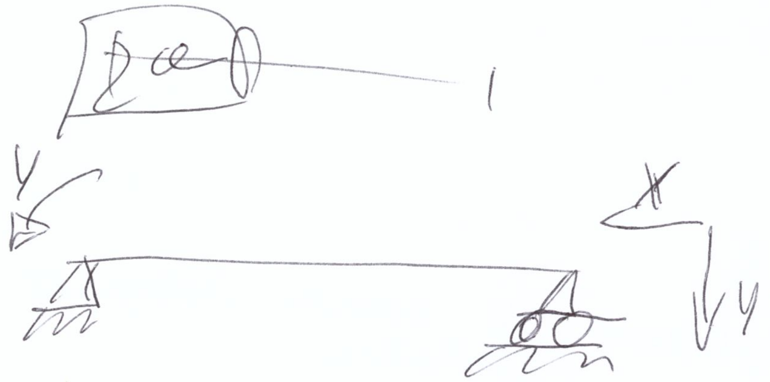
$$X = \frac{M}{2}\cdot\frac{3}{\ell} = \frac{3}{2}\frac{M}{\ell}$$

~~$y_I(x) = -M$~~

$$y_I(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y_I(\ell) = 0 \quad \frac{-M}{6\ell EJ}\ell^3 + C_1 \ell \Rightarrow C_1 = \frac{+M\ell}{6EJ}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_I(\ell) &= \frac{-M}{6\ell EJ}x^3 + \frac{M\ell}{6EJ}x \\ \frac{dy}{dx}(\ell) &= \frac{-M}{2\ell EJ}x^2 + \frac{M\ell}{6EJ} \end{aligned}}$$



Sistema speculare del ℓ

$$y_{II} = \frac{-\cancel{M}\,Y}{6\ell EJ}x^3 + \frac{M\ell}{6EJ}x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-Y}{2\ell EJ}x^2 + \frac{Y\ell}{6EJ}$$

$$\left.\frac{dy_I}{dx}\right|_0 + \left.\frac{dy_{II}}{dx}\right|_\ell = 0$$

IPOTESI DI ROTTURA O CEDIMENTO

σ_{eq} → ideale, monodimensionale, equivalente

definisco uno stato di tensione monodimensionale che viene rapportato ad uno stato di tensione tridimensionale

→ SCOPO: Calcolare il coeff. di sicurezza statico

$CS_{STATICO} \rightarrow R_m, R_{p02}$

R_m ↓ rottura

R_{p02} ↓ snervamento

$$CS_{STATICO} = \frac{\boxed{R_m, R_{p02}}}{\sigma_{eq}}$$

R_m, R_{p02} ← caratt. del materiale sperimentale

σ_{eq} ← modello di calcolo

$\boxed{\text{dovrà essere maggiore di 1}}$

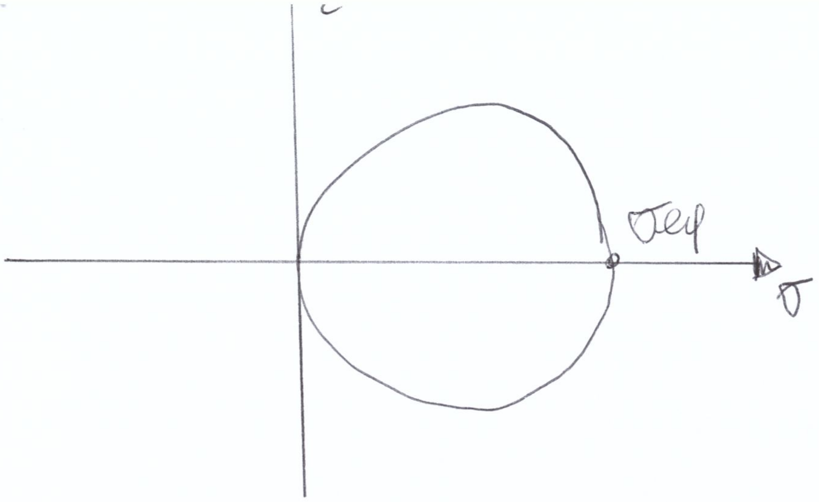
↓ a volte dipende da normativa

1) IPOTESI DI GALILEO O DELLA σ_1 → mat. fragili

2) / / TRESCA O DELLA τ_{max} → acciai: mat. non a elevatissima duttilità

3) / / VON MISES O MAX ENERGIA DISTORSIONE → acciai duttili

IPOTESI	$\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 \neq 0$	$\sigma \neq 0$, $\tau \neq 0$	$\sigma = 0$, $\tau \neq 0$	$\sigma \neq 0$, $\tau = 0$
Galileo	$\sigma_{eq} = \sigma_1$	$\sigma_{eq} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$	$\sigma_{eq} = \tau$	$\sigma_{eq} = \sigma$
Tresca	$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3$	$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$\sigma_{eq} = 2\tau$	$\sigma_{eq} = \sigma$
Von Mises		$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$	$\sigma_{eq} = \sqrt{3}\,\tau$	$\sigma_{eq} = \sigma$



sistema monodimensionale con tensione di trazione

$$\tau_{max} \Rightarrow = \frac{\sigma_{eq}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\cancel{2}} = \frac{\sigma_{eq}}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3}$$

dimostrazione per $\sigma \neq 0$ e $\tau \neq 0$

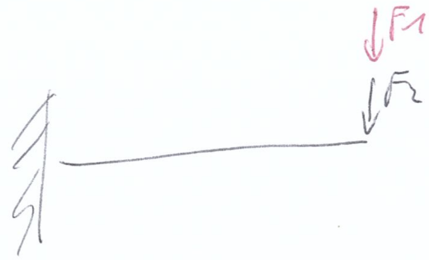
$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \boxed{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}$$

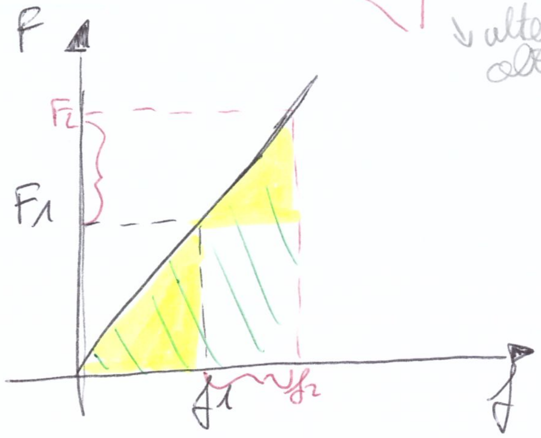
$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_3 = \cancel{\frac{\sigma}{2}} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Betti

$$f_1 = \frac{F_1 l^3}{3EI_z}$$





↓ valore abbassamento

$$L_e = \frac{1}{2}F_2 f_2 + \frac{1}{2} f_1 F_1 + F_2 \cdot f_e$$

Energia elastica immagazzinata = area sottesa →

$$L_e = \frac{1}{2}F_1 f_1 + \frac{1}{2}F_2 f_2 + F_1 \cdot f_2$$

↓ perché quando applico F_2 c'è già F_1

Il concetto di lavoro mutuo serve proprio ad evidenziare il motivo per cui non si possono sommare più energie

poiché il lavoro non può cambiare si dimostra che il lavoro mutuo non può cambiare

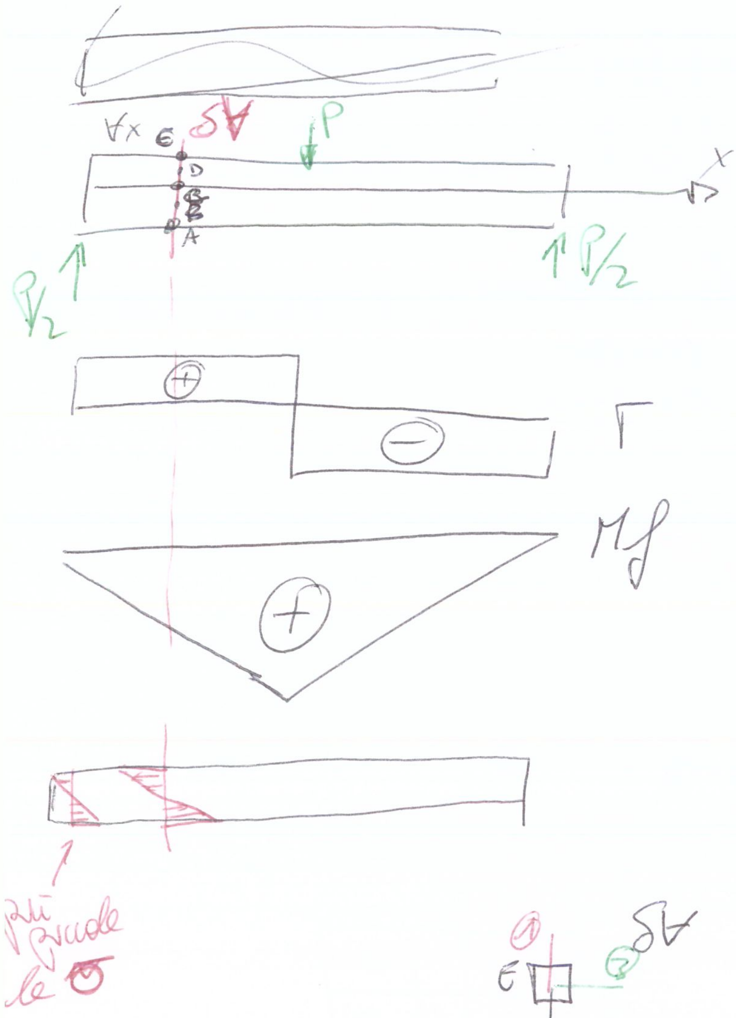
$$\boxed{F_1 f_2 = F_2 f_1}$$

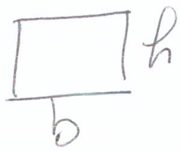
dim. teo di Betti

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 204

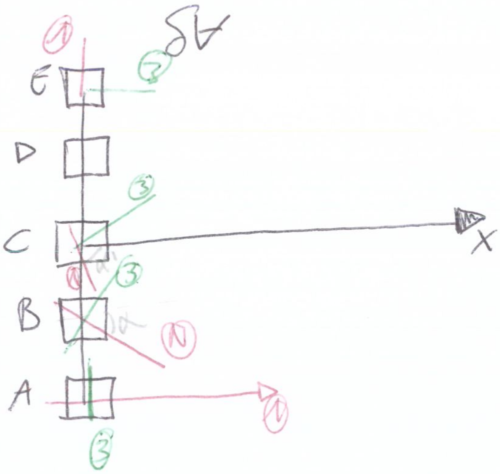
nel punto a non posso raggiungere un tensione come quella principale

→ in casi del genere la σ generica è uguale al raggio





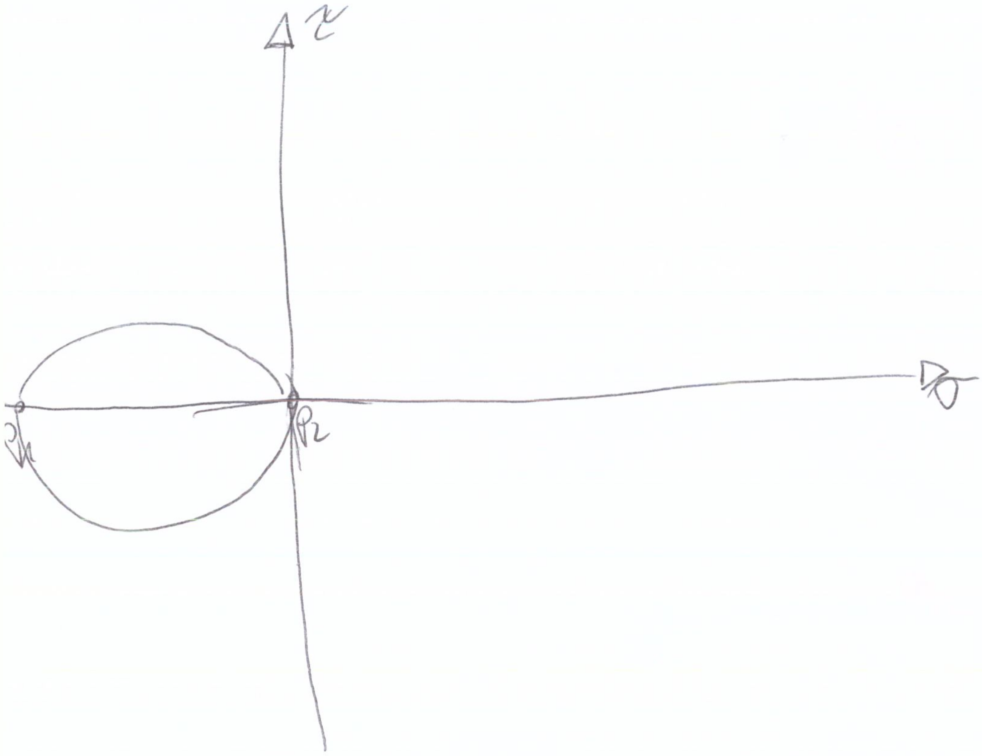
(NB) nel punto A il cerchio di Mohr sarà il più grande possibile per raggiungere σ in C e passare dalla parte negativa in D e E



(4)

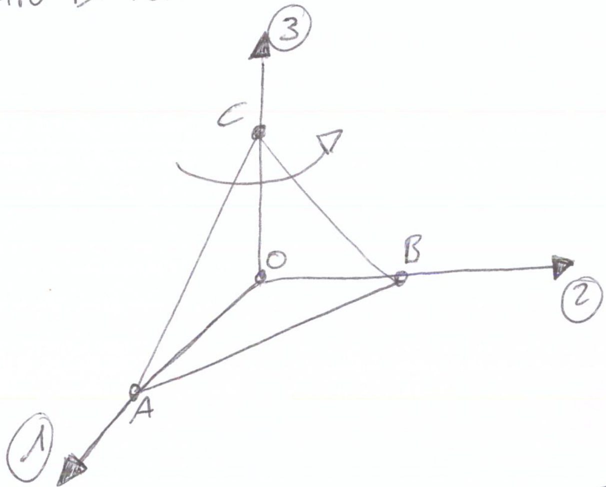
E) $\sigma_{XE} = \sigma_{X\,min}$

$\tau_{XYE} = 0$

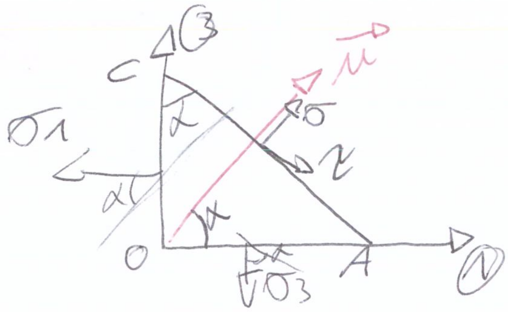


STATO DI TENSIONE IN UNA DIREZIONE QUALSIASI

σ, τ



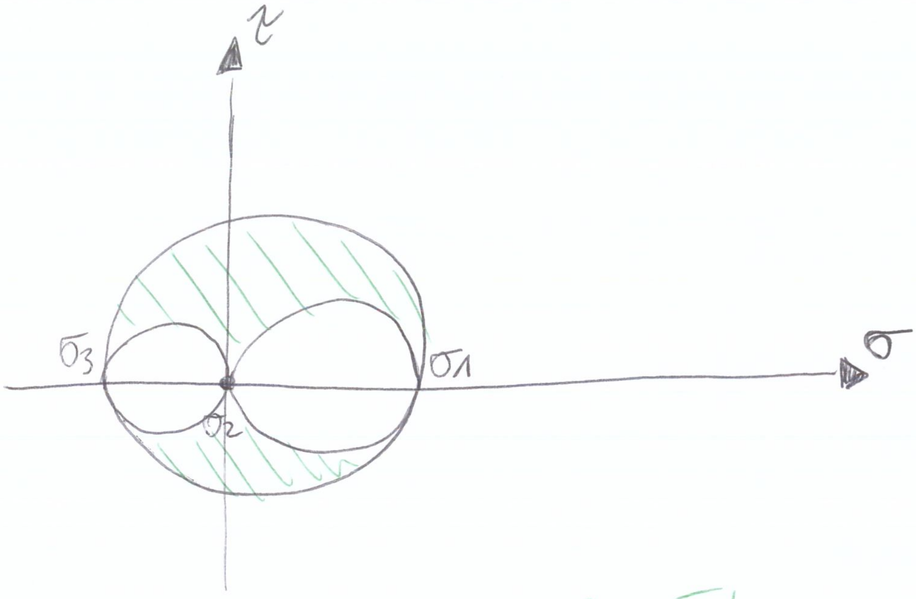
Immaginiamo una rotazione intorno a (3)

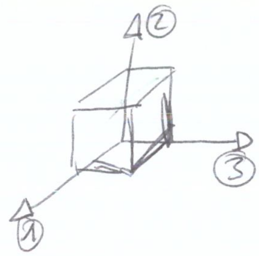


facendo l'equilibrio nelle due direzioni ~~rappresente~~

$\vec{n}$: $\sigma_1 \cos\alpha \cdot OC + \sigma_3 \operatorname{sen}\alpha\, OA = \sigma CA$

$\perp\vec{n}$: $\sigma_1 \operatorname{sen}\alpha\, OC - \sigma_3 \cos\alpha\, OA = \tau CA$



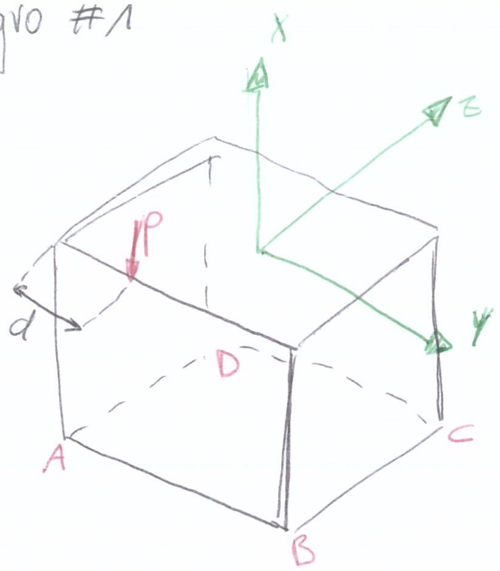


tagliando uno spicchio con un piano orientato in maniera qualsiasi → su di esso sarà presente uno stato σ_{ux}, τ_{ux}

lo stato di tensione generico sta nell'area tratteggiato fra cerchio di Mohr grande e piccoli

↓

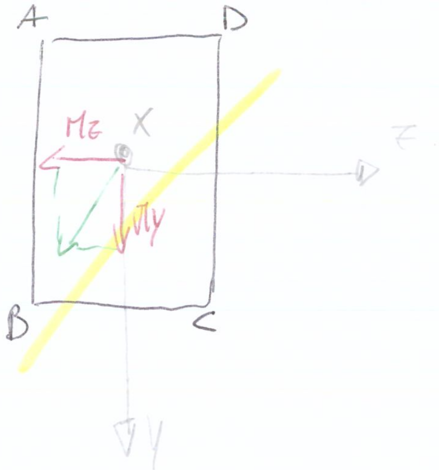
lo dimostro intersecando 3 circonferenze descritte ciascuna da uno stato di tensione qualunque esempio #1



$N = -P$

$M_z = P \cdot (h/2 - d)$ positivo perché fa inflettere le fibre delle y positive

$M_y = P\, b/2$

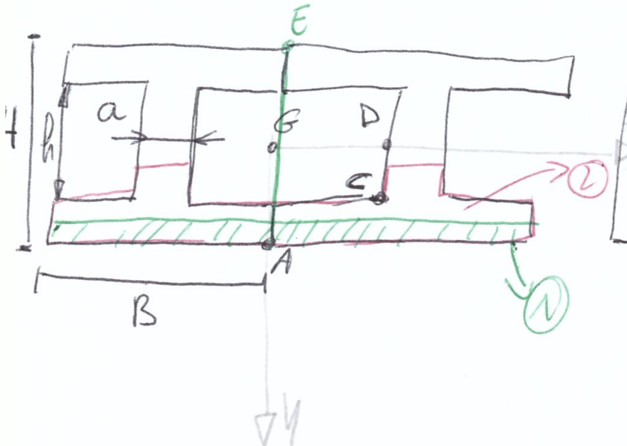


$$\sigma_{x\,max_C} = \frac{M_z}{I_z} \cdot h/2 + \frac{M_y}{I_y} \cdot b/2 - \frac{P}{bh}$$

$$\sigma_{x\,min_A} = -\frac{M_z}{I_z}\, h/2 \; - \frac{M_y}{I_y}\, b/2 - \frac{P}{b \cdot h}$$

$$\frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{P}{bh} = 0$$ per trovare la retta del piano neutro

esercitazione



2 sezioni uguali saldate

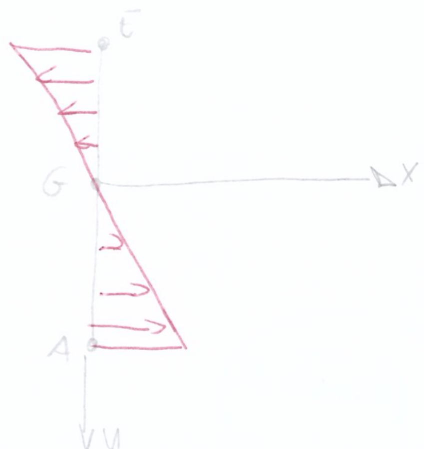
I_z = noto
Area noto
$W_z = \frac{2 I_z}{H/2}$

Se I_z è noto per una sezione per n sezioni sarà $n \cdot I_z$

difficoltà: tener conto delle sezioni

$\sigma_x = \frac{M_z}{2 I_z} y$

Immaginiamo di considerare tutta la sezione



Supponendo un momento flettente positivo

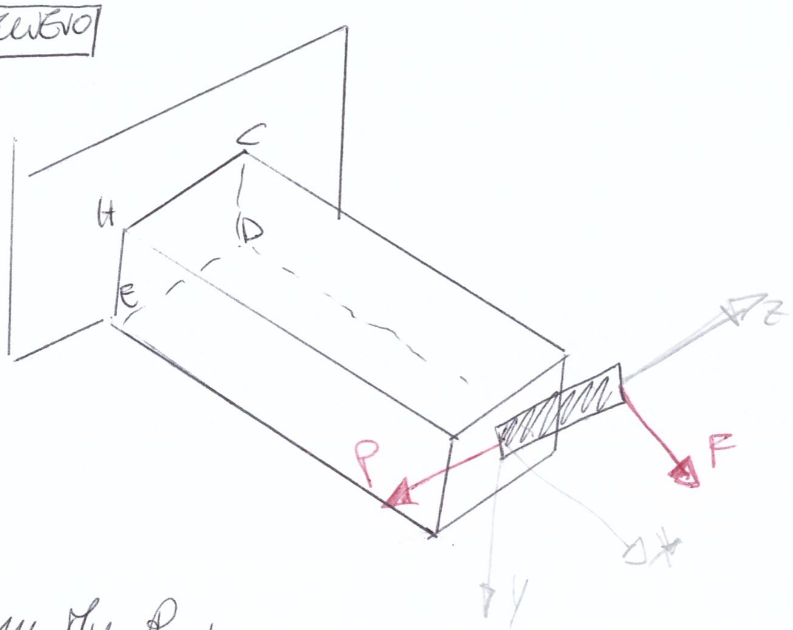
Ⓐ $\sigma_{xA} = \sigma_{xMAX} = \frac{M_z \, H/2}{2 I_z}$; $\tau_{xyA} = 0$ nel punto A ~~il tensore~~ si ha una direzione principale

Ⓒ $\sigma_{xC} = \frac{M_z}{2 I_z} h/2$; $\tau_{xyC} = \frac{T}{\text{corda} \, 2 I_z} S_z^*$

Ⓖ $\sigma_{xG} = 0$; $\tau_{xyG} = \tau_{xyMAX}$

nel punto (E) la σ sarà principale e sarà la
σ_3 ovvero la più piccola.

ESERCIZIO

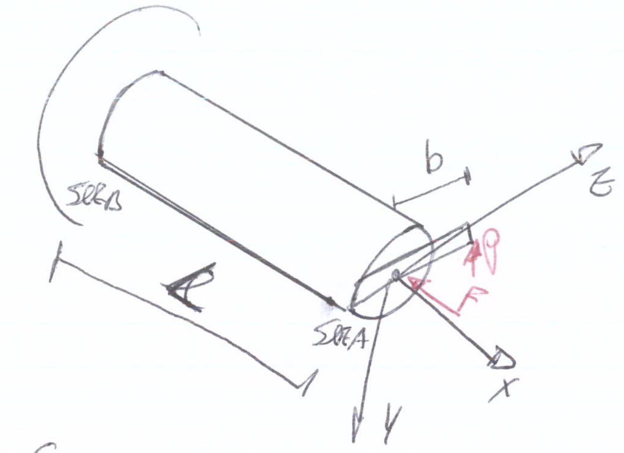


$P\left(\cancel{N} \; M_y = P x' \right. \rightarrow$ massimo all'incastro
$\cancel{T_E}$)

$F\left(\begin{array}{l} N = F \\ M_y = F \cdot b \end{array} \right)$

Zone più sollecitate nel tratto CD

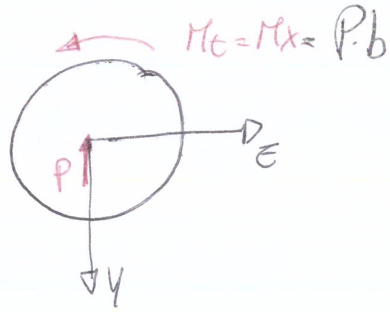
esercizio → TEMA D'ESAME



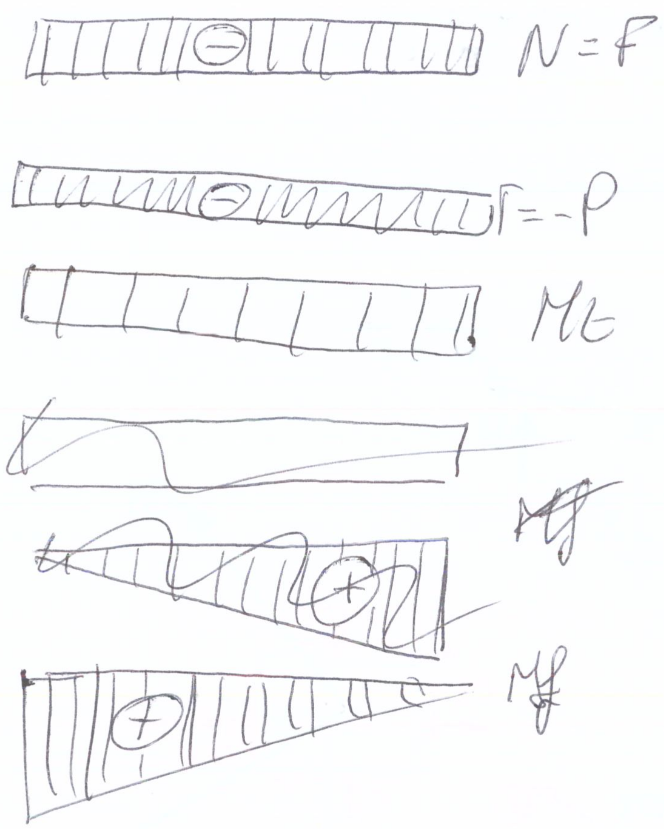
c'è una piastra rettangolare saldata

D=diametro

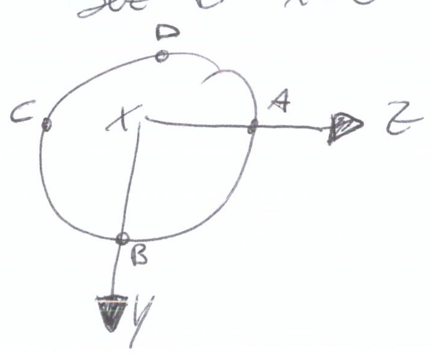
$$\begin{cases} \text{sez A} \quad x = L \\ \text{sez B} = x = 0 \end{cases}$$

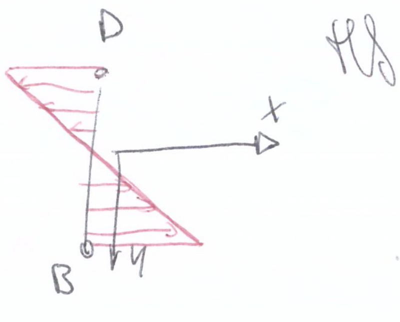


si ha una trasposizione di P aggiungendo il momento

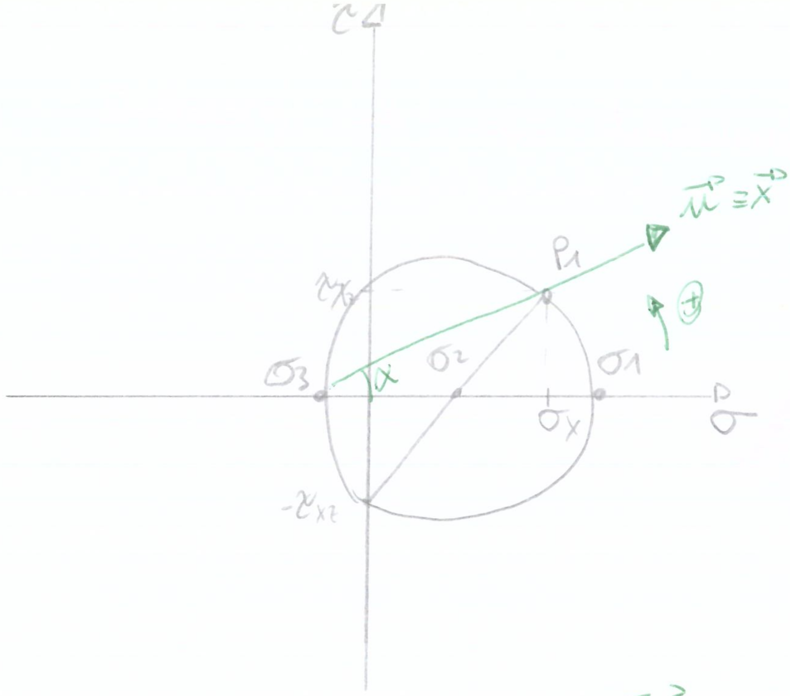


Sez B x=0

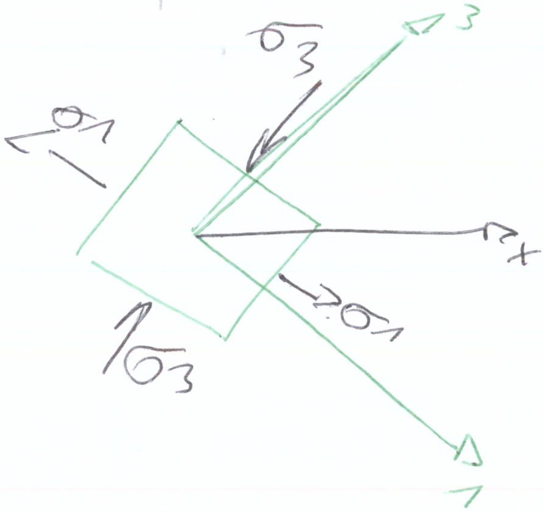




$$\sigma_{xB} = \frac{PL}{I_d} \frac{d}{2} = \frac{32 PL}{d^3 \pi}$$



P1
σ3
σ2
σ1
σx
σ
α



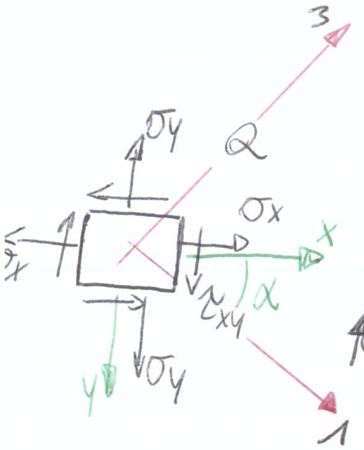
σ3
σ1
3
1

CERCHI DI MOHR

2

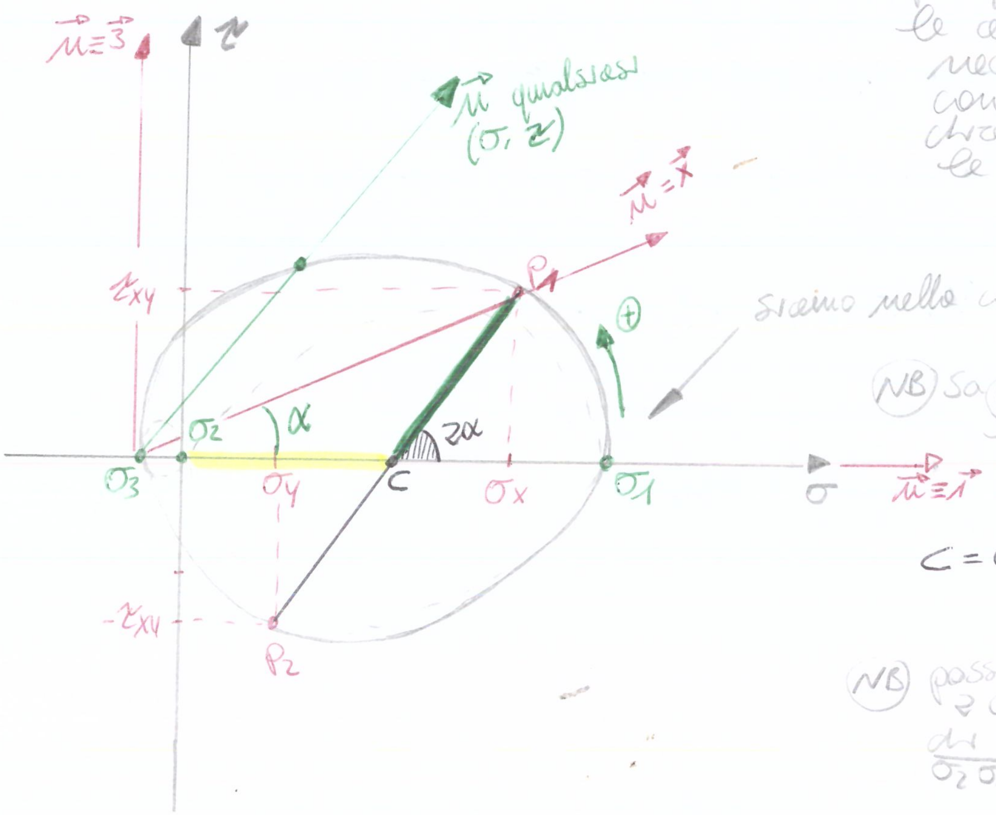
- calcolo grafico autovalori $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ princ.
- calcolo direzioni $\vec{v}_{1,2,3}$
- calcolo grafico di σ, τ in una direzione qualsiasi

3 cerchi fanno riferimento a un punto fisico



stato di tensione Q

$$\circlearrowleft(+) \quad \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



z è anche direzione principale, mentre per quanto riguarda le altre due è necessario ritracciarle considerando ~~tra~~ direzioni in cui le τ sono nulle

siamo nella condizione di $\tau = 0$

(NB) Sapendo che una σ è uguale a zero abbiamo i 3 autovalori

C = centro cerchio di Mohr

(NB) possiamo disegnare altri 2 cerchi all'interno di diametro $\overline{\sigma_1\sigma_2}$ e $\overline{\sigma_2\sigma_1}$

$P_1(\sigma_x, \tau_{xy})$
$P_2(\sigma_y, -\tau_{xy})$

Il diametro del cerchio di Mohr più grande è $\overline{P_1P_2}$

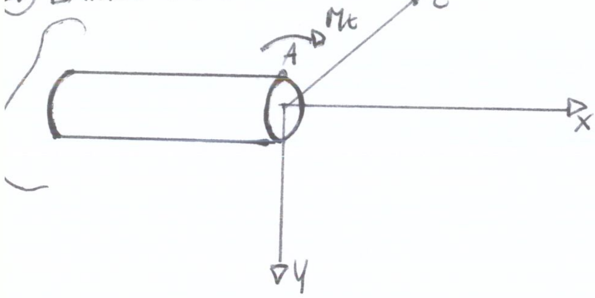
$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \rightarrow \text{raggio}$$

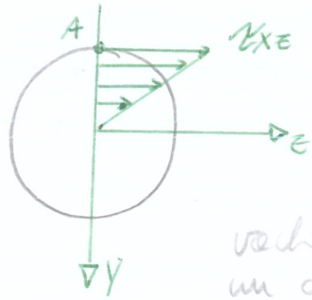
$$C\left[\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} ; 0\right]$$

coordinate centro

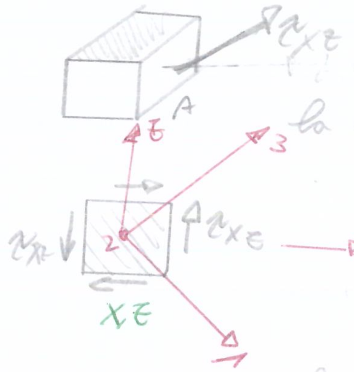
PERMETTE DI OTTENERE LE σ

1) BARRA DI TORSIONE





vado a considerare un dV elementare nell'intorno del punto A



la direzione y è già principale

Calcoliamo le tensioni principali

$$\sigma_{a,b} = 0 \pm \sqrt{0 + \tau_{xz}^2}$$

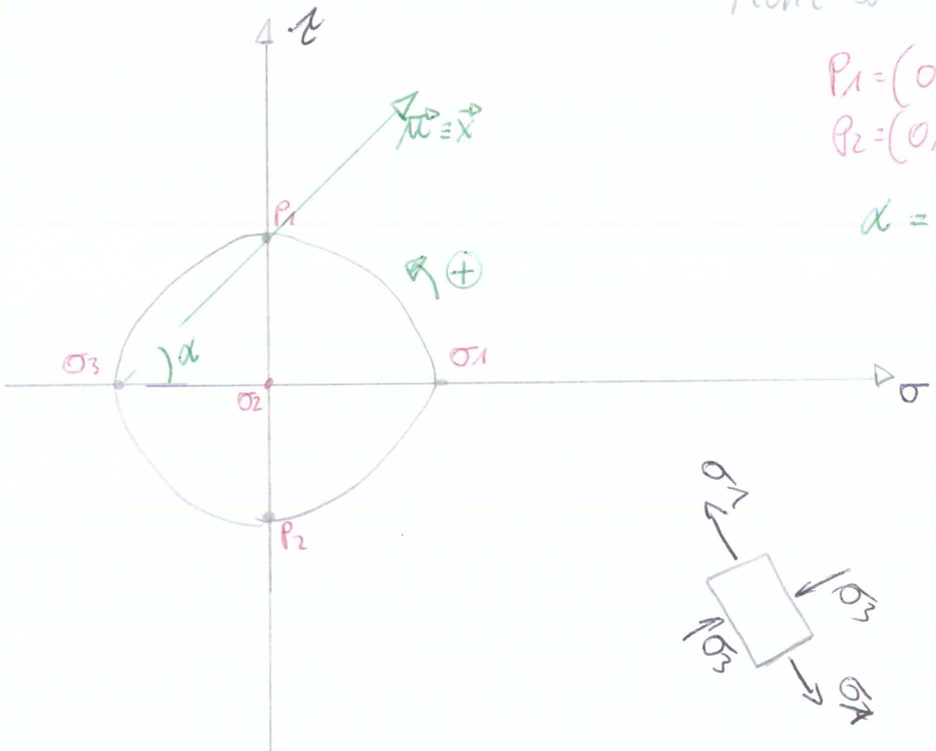
$\tau_{xz} \neq 0$

$$\sigma_a = + \tau_{xz} = \sigma_1$$
$$\sigma_b = - \tau_{xz} = \sigma_3$$
$$\sigma_c = 0 = \sigma_2$$

se le σ sono opposte di segno il cerchio di Mohr sarà segnato nell'origine

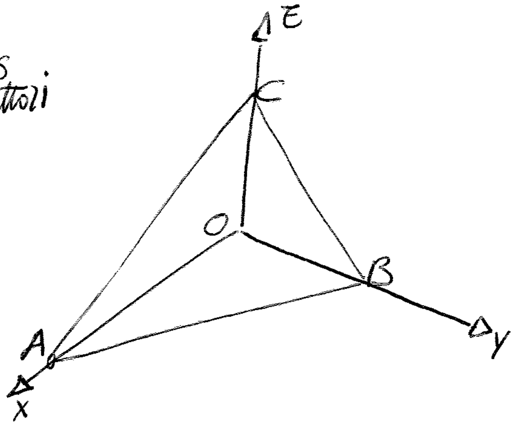
$P_1 = (0; \tau_{xz})$
$P_2 = (0; -\tau_{xz})$

α = dalla geometria si osserva che è 45°



TETRAEDRO DI CAUCHY

$\left.\begin{array}{l} l \\ m \\ n \end{array}\right\}$ cos direttori



$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$\vec{x}$ $\quad \sigma_x\, COB + \tau_{yx}\, COA + \tau_{zx}\, AOB = \rho_x\, ABC$

divido per ABC $\quad \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx}\, n = \rho_x$

$\vec{y}$ $\quad \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n = \rho_y$

$\vec{z}$ $\quad \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n = \rho_z$

equazioni di Cauchy

se taglio l'elemento con un piano per il quale $\vec{\rho}$ è parallelo alla normale di ABC ho solo σ

$\vec{\rho} = \sigma \vec{n}$
$(\vec{\tau} = 0)$

risolvere le equazioni di Cauchy considerando $\vec{\rho} \parallel \vec{n}$

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{x} & \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{zx} n = \sigma l \\ \vec{y} & \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n = \sigma m \\ \vec{z} & \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = \sigma n \end{array}\right\}$$

lo risolvo come un problema di autovalori e autovettori associare la condizione di ortogonalità degli autovettori

$$l^2+m^2+n^2=1$$

→ la terna 1,2,3 che indica ~~le direzioni~~ soluzioni $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ è cartesiana

$$l_1^2+m_1^2+n_1^2=1$$

→ gli autovettori ovvero la terna 1,2,3 si calcola con il metodo grafico dei cerchi di Mohr

$$\det[\ ]=0 \Rightarrow \det\left\{[\ ]-\sigma\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}=0$$

$$\sigma^3-I_1\sigma^2+I_2\sigma-I_3=0$$

I_1, I_2, I_3 invarianti dello stato di tensioni

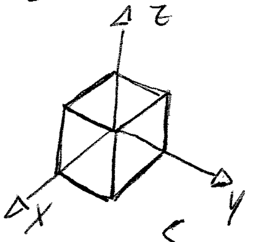
$$I_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$$

$$I_2=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{yx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sigma_y & \tau_{zy}\\ \tau_{yz} & \sigma_z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{zx}\\ \tau_{xz} & \sigma_z\end{bmatrix}$$

$$I_3=\det[\ ]=0$$

riassunto

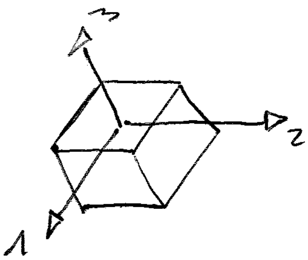
1)



tensore x,y,z

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 1,2,3

2)



$$\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{bmatrix}$$

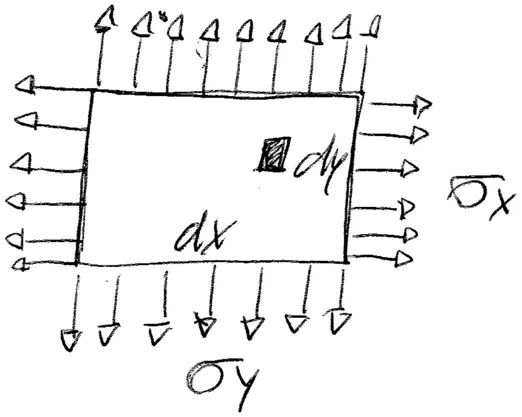
tensore molto più semplice composto solo da σ → definiscono lo stato migliore e peggiore in quel punto esempio in [illegible]

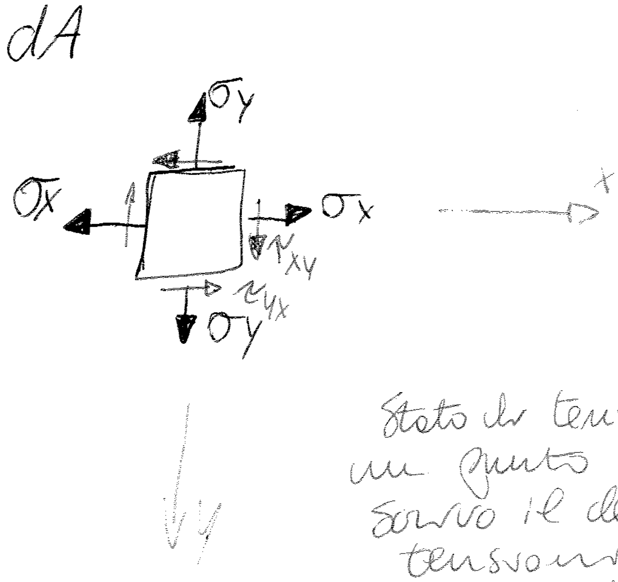
plain stress

$\sigma_z = 0$ $\quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \neq 0$

$\sigma_x \neq 0$

$\sigma_y \neq 0$ $\quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$





Stato di tensione in un punto
scrivo il det delle tensioni per individuare le direzioni principali

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} = 0$$

la direzione z è una direzione principale perchè le τ sono nulle per $X=0$ $\quad C_2=0$ (2)

per $x=l$ $\quad 0 = -\frac{C}{\cancel{l}EI_z}\frac{\cancel{l^3}^{\,2}}{6} + C_1 l + 0 \Rightarrow C_1 = \frac{Cl}{6EI_z}$

sostituendo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{C}{EI_z l}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{Cl}{6EI_z}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_0 = \frac{Cl}{6EI_z}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_l = -\frac{Cl^2}{lEI_z\cdot 2} + \frac{Cl}{6EI_z} = -\frac{Cl}{3EI_z}$$

$$y = -\frac{C}{EI_z l}\cdot\frac{x^3}{6} + \frac{Cl}{6EI_z}x$$

annullando dove è la derivata sappiamo dove sarà il massimo o il minimo.

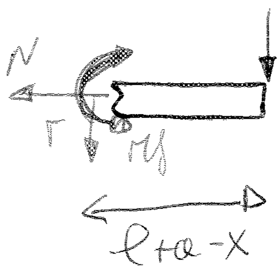
$$0 = -\frac{C}{EI_z l}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{Cl}{6EI_z} \Rightarrow x^2 = \frac{l^2}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}l$$

la soluzione negativa non ha significato

Ora per calcolare la fmax sostituiamo nell'equazione il valore di x

$$y = -\frac{C}{EI_z\cancel{l}}\,\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{27}\,9}\,l^{\cancel{3}\,2} + \frac{Cl}{6EI_z}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}l =$$

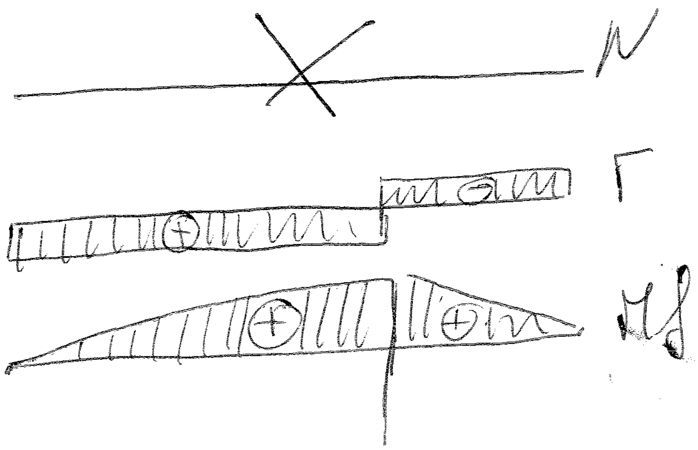
$\ell < x < \ell + a$ (4)



$N = 0$

$T = -F$

$M_f = F(\ell + a - x)$



punto più sollecitato sulla sezione B

calcolo linea elastica → avendo 2 campate dobbiamo calcolarne 2

I $0 < x < \ell$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_f}{EI_z} = -\frac{Fa}{\ell EI_z}x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Fa}{\ell EI_z}\cdot\frac{x^2}{2} + C_1$$

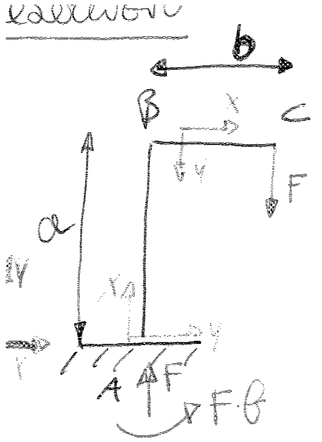
$$y = -\frac{Fa}{\ell EI_z}\cdot\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

II

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F}{EI_z}(x - \ell - a)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F}{EI_z}\left(\frac{x^2}{2} - (\ell + a)x\right) + C_3$$

$$y = \frac{F}{EI_z}\left(\frac{x^3}{6} - (\ell + a)\frac{x^2}{2}\right) + C_3 x + C_4$$



$$I_{AB} = \frac{D_1^4 \pi}{64} - \frac{d_1^4 \pi}{64}$$

$$I_{BC} = \frac{(D_2^4 \cancel{\pi} - d_2^4)\pi}{64}$$

$$W_{AB} = \frac{(D_1^4 - d_1^4)\pi}{32 D_1}$$

$$W_{BC} = \frac{D_2^4 - d_2^4}{32 D_2}\pi$$

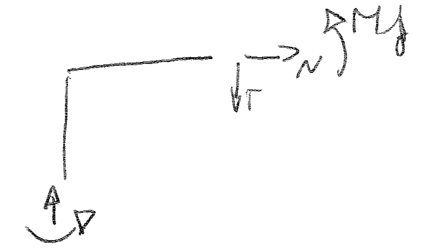
AB $0 < x < a$

$N = -F$

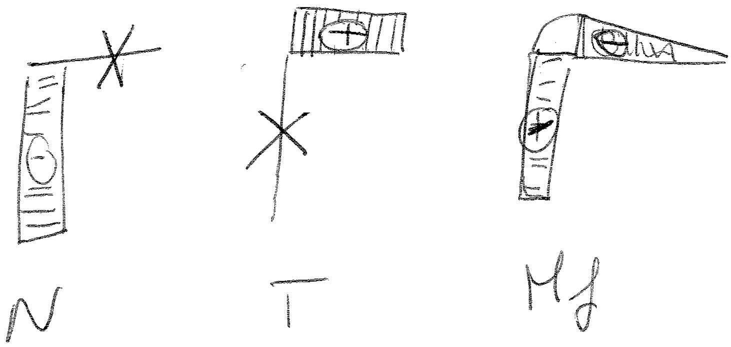
$T = 0$

$Mf = -F \cdot b$

BC $0 < x < b$



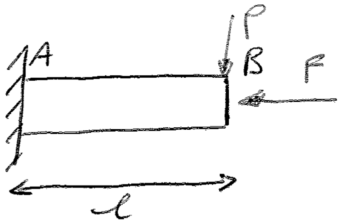
$$\boxed{\begin{aligned} T &= F \\ N &= 0 \\ Mf &= -F(b - x) \end{aligned}}$$

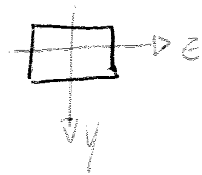


Calcolare la rotazione

esercitazione

Linea elastica





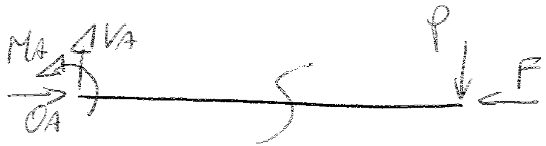
SISTEMA ISOSTATICO

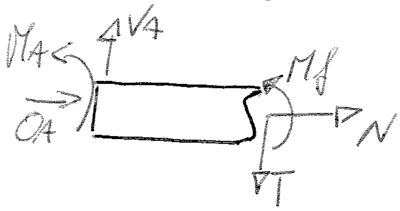
$V_A = P$

$O_A = F$

$M_A = P \cdot l$

Calcolo le azioni interne → 1 sola campata





$N = -O_A = -F$

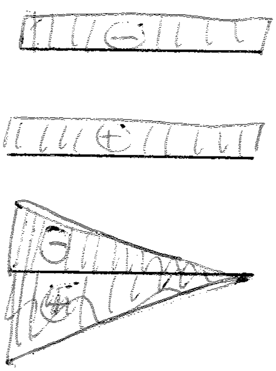
$T = V_A = P$

$\cancel{M_f = M_A - Plx}$ ~~x=0 Mf=0~~ ~~x=l ⇒ Mf=-Pl~~

$M_f = -M_A + V_A x = P(x-l)$

$x=0$, $M_f = Pl$

$x=l$, $M_f = 0$



N

T

Mf

la sezione più sollecitata è all'incastro

y_{max} è la freccia massima: 5

$$M_f(x) = -P(\ell - x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-M_f}{EI_z} = \frac{P}{EI_z}(\ell - x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI_z}\left(\ell x - \frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

$$y = \frac{P}{EI_z}\left(\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1 x + C_2$$

Si applicano le condizioni al contorno

Sappiamo che:

- $y=0$ quando $x=0$ (in A)

Sostituendo

$$\boxed{C_2 = 0}$$

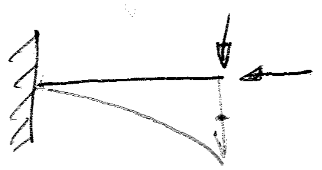
- in A non c'è rotazione

$\rightarrow \frac{dy}{dx}$ in $A = 0$

$$\boxed{C_1 = 0}$$

$$y = \frac{P}{EI_z}\left[\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI_z}\left(\ell x - \frac{x^2}{2}\right)$$



← freccia max in $x=\ell$

$$y(\ell) = \frac{P}{EI_z}\left[\frac{\ell^3}{2} - \frac{\ell^3}{6}\right] = \frac{P}{EI_z}\left[\frac{\cancel{2}^{1}\ell^3}{\cancel{6}_3}\right]$$

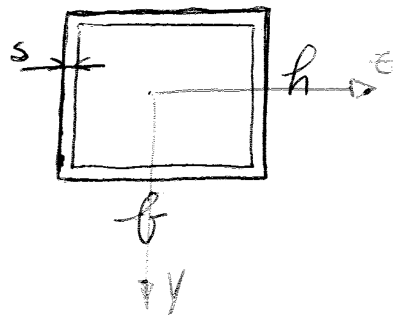
deformazione ε_x max?

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\cancel{\sigma_y} + \sigma_z) = \cancel{\sigma_{xmax}}$$

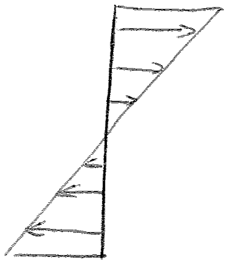
$$\varepsilon_{xmax} = \frac{\sigma_{xmax}}{E} = \frac{1}{E}\left(-\frac{F}{A} - \frac{P\ell}{I_z}\frac{h}{2}\right)$$

verificare la ~~tensione più~~ ...

INCASTRO



$$I_z = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-2s)(h-2s)^3}{12}$$



$$\sigma_x^{Mf} = \frac{Mf\, y}{I_z} = -$$

$$|\sigma_{x\,max}| = \frac{Pl + q\frac{l^2}{2}}{I_z} \cdot \frac{h}{2}$$

parti più sollecitate sono il bordo superiore e inferiore

- Calcolare la freccia max

$$\frac{d^2y}{dx} = -\frac{Mf}{EI_z} = \frac{1}{EI_z}\left(P(l-x) + \frac{q}{2}\left(l^2 - 2lx + x^2\right)\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI_z}\left(P\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{q}{2}\left(l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3}\right)\right) + C_1$$

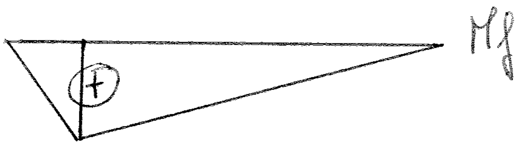
$$y = \frac{1}{EI_z}\left(P\left(l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{q}{2}\left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)\right) + C_1x + C_2$$

condizioni al contorno

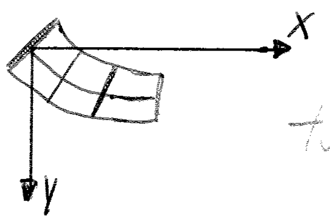
$x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow C_2=0$

$\frac{dy}{dx}=0$ quando $x=0$ $C_1=0$

F_i	σ, τ	ε, γ	spost. finiti	v = freccia
M_f	$\sigma_x = \frac{M_f\, y}{I_z}$	$\varepsilon_x = \frac{M_f\, y}{E I_z} = \frac{y}{R}$		
T	$\tau_{xy} = \frac{T S_z^x}{\text{corda}\, I_z}$			

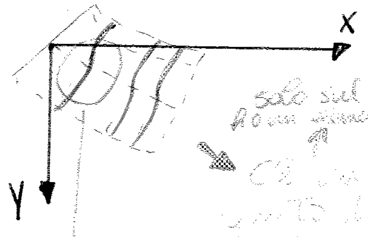


$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_f}{E I_z}$$



solo M_f

tutte le sezioni si mantengono [illegible] all'asse della trave



solo T

solo sul piano neutro [illegible]

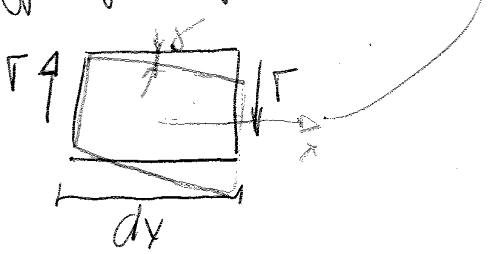
tendono ad [illegible] allo stesso modo [illegible] T è costante

[illegible]

$$\alpha_T = \frac{dv_1}{dx} = \tan \alpha_T = \gamma_{xy}$$

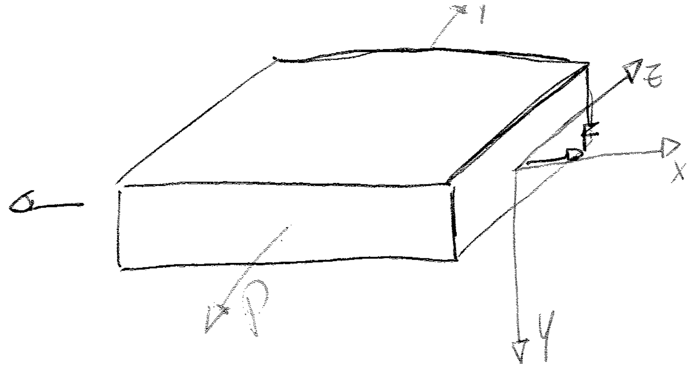
[illegible]

per tener conto di tutto si sovrappongono gli effetti



$$\alpha_T = \frac{dv_1}{dx} = \frac{\tau_{medio}}{G} = \frac{T}{AG}\chi$$

fattore correttivo



$\sigma_x \neq 0$

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$

$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$

$\sigma_z \neq 0$

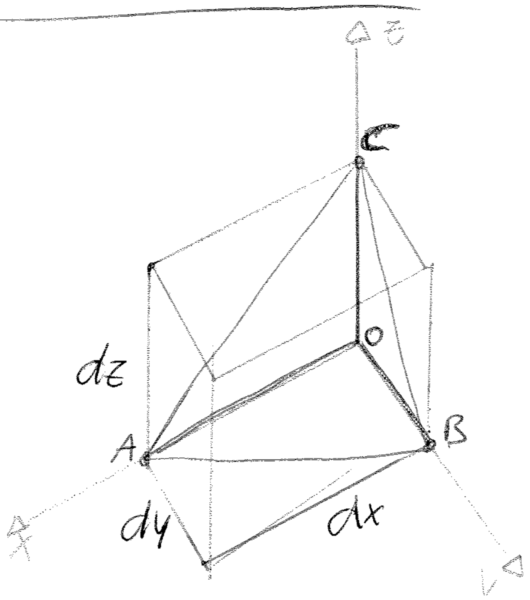
$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$

$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z$

$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z$

1. EQUILIBRIO DEL TETRAEDRO DI CAUCHY
2. TENSIONI PRINCIPALI → AUTOVALORI, AUTOVETTORI → CERCHI DI MOHR
3. CERCHI DI MOHR
4. TENSIONI IDEALI EQUIVALENTI
5. COEFF. SICUREZZA STATICO

EQUILIBRIO DI CAUCHY

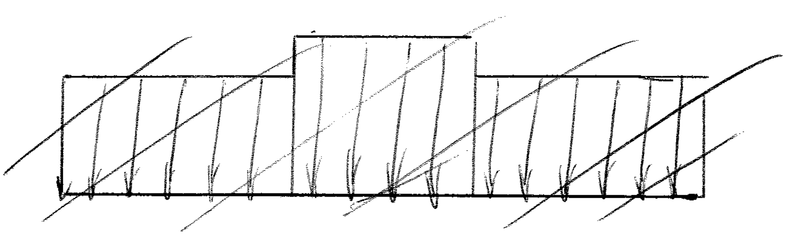


σ_x	τ_{yx}	τ_{zx}
τ_{xy}	σ_y	τ_{zy}
τ_{xz}	τ_{yz}	σ_z

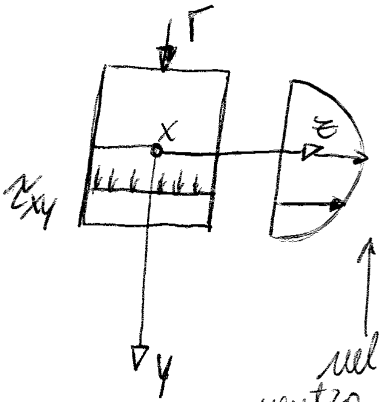
lo taglio ottenendo un tetraedro elementare

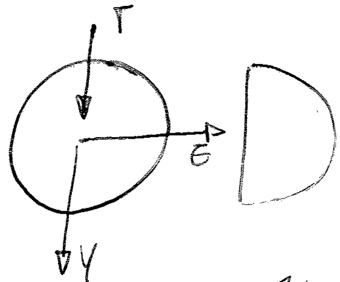
noto x y z

incognito: normale n qualsiasi



Calcolo tensioni dovute a T in sezioni ≠ rettangolare, quadrato, circolare





nel piano neutro si ha ampiezza massima

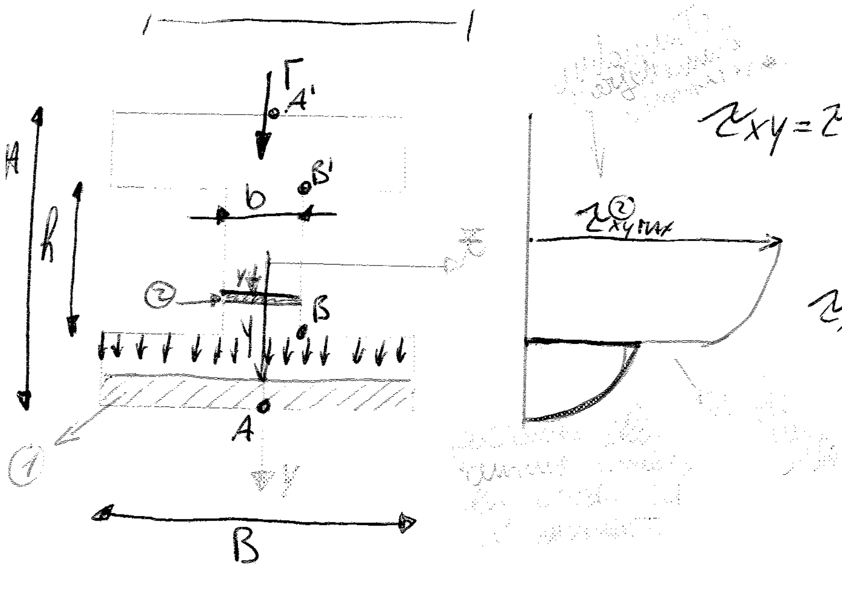
$$\tau_{xy\,max} = \frac{4}{3}\frac{T}{area}$$

$$\tau_{xy\,max} = \frac{3}{2}\frac{T}{b \cdot h}$$

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{T}{A} = 1{,}5\,\tau_m$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{T S^*_z}{corda\, I_z}$$

CONCLUSIONE: la sollecitazione maggiore è nell'anima



$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{T S^*_z}{I_z\, corda}$$

$$\tau^{(1)}_{xy} = \tau^{(1)}_{yx} = \frac{T \int_A y\, dA}{I_z \cdot B} = \frac{T \int_y^{H/2} y B\, dy}{I_z B} = \frac{T B}{I_z B\, 2}\left[\frac{H^2}{4} - y^2\right]$$

$h/2$ $H/2$