



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 2006A -

ANNO: 2016

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Donati Francesca

MATERIA: Gasdinamica teoria + esercizi - Prof. Luso

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# 1. Problemi misti e richiami di teoria Larotto e Bello Ius-Quan

Esame scritto

3/28/15

- Struttura di un gas (Problemi e Note etc)

$$H = P_0 + \frac{V^2}{2} \rightarrow \text{contenuto energetico totale}$$

dove  $H = e + \frac{V^2}{2}$ . Generalmente  $H$  si mantiene costante ma la componente cinetica ad alte velocità ha lo stesso ordine di grandezza di  $H$  mentre a bassa Mach è trascurabile.

- Gli elementi costituenti sono molecole e atomi.

In genere parlo di particelle fluido, insieme di molecole, o un volume di elementi costituenti.

Questo volume deve essere sufficientemente grande: per darvi una  $\bar{v}$  <sup>mediante</sup> comportamento del fluido ma dar anche sufficientemente piccolo così da poter definire con accuratezza le proprietà del fluido.

La scala del volume è definita come  $dx, dy, dz$  dove il  $dx$  è il libero cammino medio molecolare

- Numero di Avogadro

$$N_0 = 6,023 \cdot 10^{23} \frac{\text{N. molecole}}{\text{mole}}$$

1 Kilo → Mole → 1000 mol

$$N_0 = 6,023 \cdot 10^{26} \frac{\text{molecole}}{\text{mol}}$$

- Volume di una mole (condizione normale / quiescente)

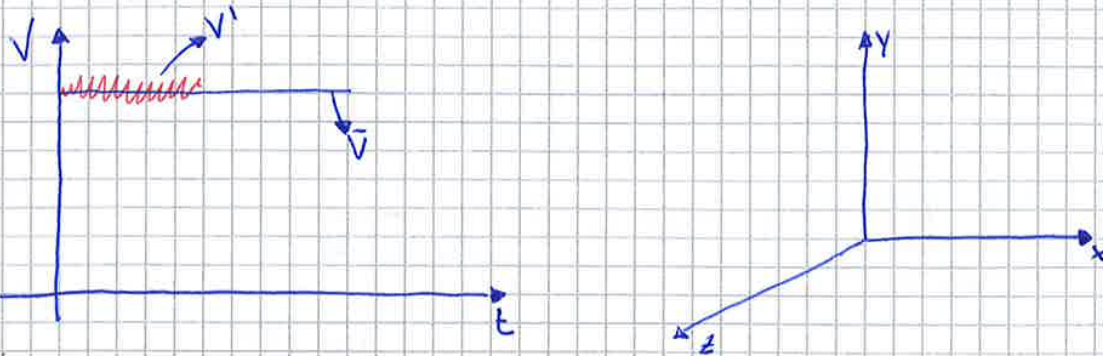
$$V = 22,4 \text{ m}^3$$

a  $t=0^\circ$  e  $p=760 \text{ mmHg}$



con  $\bar{V}$  velocità media e  $V'$  velocità dovuta alle fluttuazioni (equazione turbulenta)  
 Se il gas è fermo (quiescente)  $\rightarrow \bar{V}=0, V' \neq 0$   
 Se il gas è in movimento  $\rightarrow \bar{V} \neq 0, V' \neq 0 \rightarrow$  fluttua attorno a  $\bar{V}$   
 $\rightarrow$  moto medio baricentrico!

$$V = \bar{V} + V'$$



In un sistema di riferimento cartesiano avrà da:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} + u' &= u \\ \bar{v} + v' &= v \\ \bar{w} + w' &= w \end{aligned} \right\} \text{componenti lungo le tre direzioni}$$

ENERGIA CINETICA MEDIA TRASURBOLAZIONE GLOBALE

$\frac{1}{2} \rho (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)$  sostituisco le espressioni precedenti:

$$\frac{1}{2} \rho \left[ (\bar{u} + u')(\bar{u} + u') + (\bar{v} + v')(\bar{v} + v') + (\bar{w} + w')(\bar{w} + w') \right]$$

da ogni moltiplicazione ottergo

$$\bar{u} \cdot \bar{u} + \cancel{\bar{u} \cdot u'} + \cancel{u' \cdot \bar{u}} + u' \cdot u' \rightarrow \neq 0$$

$\downarrow$   $\bar{u} \cdot \bar{u}$        $\downarrow$   $\bar{u} = \text{cost}$  ma  $\bar{u}'$  è nullo

mi rimangono  $\bar{u} \cdot \bar{u} + \overline{u' \cdot u'}$  quindi

$$\frac{1}{2} \rho \left[ (\bar{u} \cdot \bar{u} + \overline{u' \cdot u'} + \bar{v} \cdot \bar{v} + \overline{v' \cdot v'} + \bar{w} \cdot \bar{w} + \overline{w' \cdot w'}) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \rho (\bar{u} \cdot \bar{u} + \bar{v} \cdot \bar{v} + \bar{w} \cdot \bar{w}) + \frac{1}{2} \rho (\overline{u' \cdot u'} + \overline{v' \cdot v'} + \overline{w' \cdot w'}) =$$

energia cinetica media (punto a punto)  
 del baricentro (macroscopica)

energia cinetica interna e : Et  
 calcola turbolenza

③



$v_{at}$  e  $\lambda$  hanno stessa identica parte in entrambe le propagazione nello spazio a causa di un impulso  $\rightarrow$  oscillazione molecolare, collisioni molecolari

Esempio dell'aria standard

l'aria si divide in percentuale:  $N_2 = 80\%$  e  $O_2 = 20\%$  entrambi biatomici con rispettive molasse molari:

$$\left. \begin{array}{l} M_{N_2} = 28 \frac{kg}{Mole} \\ M_{O_2} = 32 \frac{kg}{Mole} \end{array} \right\} M_{ARIA} = 29 \frac{kg}{Mole}$$

la velocità di agitazione termica vale  $v_{at} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{RT}{M}}$

$$\gamma_{ARIA} = 1,4$$

$$\begin{aligned} \text{A } T_{amb} = 298K &\rightarrow v_{at} = 498 \frac{m}{s} \\ &\rightarrow a = 340 m/s \end{aligned}$$

• Collisioni molecolari

In un contenitore con gas in quiete la pressione è causata dalle collisioni.

$$\text{Se } T \rightarrow 0 \quad v_{at} \rightarrow 0$$

Se  $T \neq 0$  allora  $p \propto \rho v_{at}^2 \rightarrow$  da Bernoulli

ed a livello microscopico  $p \propto \rho v_{at}^2$

Nel caso di fluido in movimento devo considerare anche la velocità macroscopica.

Posso parlare di quantità di moto lungo le 3 direzioni.

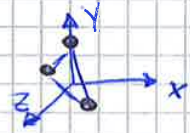


$$p = \frac{F}{S}$$

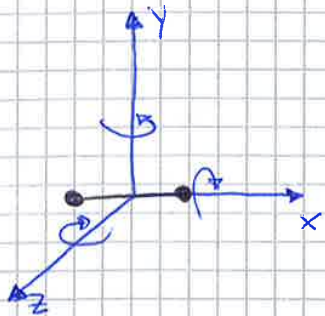
dove  $F$  è dato dalla variazione di  $q =$  quantità di moto.



Gradi traslazionali = sempre tre in tutti i casi: biatomico, monoatomico, triatomico →  $L_t = 3$



Gradi rotazionali



se biatomico e triatomico allineate po maggior rotazione agli assi d'inerzia:

$L_r = 2$  in entrambi i casi

Se triatomico non allineate o poliatomico  $L_r = 3$

A Temperature  $L_{tot} = L_t + L_r$  →  $3+2=5$   
 $3+3=6$

Gradi Vibrazionali

Aumentando T cambia la distanza tra atomi legati perché cede il legame atomico (cambio la distanza)

$L = 3 \cdot n$  con  $n =$  complessità atomica quindi  $L_{tot} = 3n = L_t + L_r + L_v$   
ovvero  $L_v = 3n - L_t - L_r$  lego tutto di tutto

Cambiando la distanza po accumulato di energia elastica ( $\propto \frac{1}{2} k \Delta x^2$ ) ed energia cinetica ( $x = \text{spost} \rightarrow \propto \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ )

Quindi  $L_v$  va moltiplicato per due perché po due forme di accumulato di energia:

$$L_{tot} = L_t + L_r + 2L_v = L_t + L_r + 2(3n - L_t - L_r) \Rightarrow L_{tot} = 6n - L_t - L_r$$

l'intero contributo energetico della particella è  $E = L \frac{1}{2} k_B T$

Definisco  $\bar{\epsilon} = E \cdot N_A = \frac{L}{2} N_A k_B T = \frac{L}{2} RT$   $\left[ \frac{J}{\text{Mole}} \right]$

dove  $\bar{\epsilon}$  è l'energia interna molare.



$$c_v = \frac{L}{2} \frac{R}{M} = \frac{5}{2} \frac{R}{M} = 414 \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$c_p = \frac{L+2}{2} \frac{R}{M} = \frac{7}{2} \frac{R}{M} = 1003 \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$C_v = c_v \cdot M = 20493 \frac{J}{Mole \cdot K}$$

$$C_p = c_p \cdot M = 29087 \frac{J}{Mole \cdot K}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_p}{C_v} = \frac{L+2}{L} = \frac{7}{5} = 1,4$$

Calcolo la velocità del suono in condizione standard:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T} = 340 \text{ m/s}$$

### Equazioni di Stato

- massa  $m$  [kg]

- volume  $V$  [m<sup>3</sup>]

- Temperatura  $T$  [K]

- pressione [Pa =  $\frac{N}{m^2}$ ]

- Massa molare  $M$

- Costante universale  $R = 8314 \frac{J}{M \cdot K}$

•  $pV = m \frac{R}{M} T$       sposta la massa

•  $p \cdot v = \frac{R}{M} T \Rightarrow \frac{p}{p} = \frac{R}{M} T$        $v = \text{volume specifico} = \frac{1}{\rho}$

$\frac{m}{M} = N \rightarrow \text{numero moli}$

$pV = NRT$





$$X_i = \frac{N_i}{N_T} = \frac{V_i}{V_T} = \frac{P_i}{P_T}$$

ponderale

$$c_i = \frac{m_i}{m_t}$$

Dare sempre valore che  $\sum X_i = 1$  e può collegarlo tra di loro:

$$\sum c_i = 1$$

$$c_i = \frac{X_i N_i}{\sum X_i M_i}$$

$$X_i = \frac{c_i / M_i}{\sum \frac{c_i}{M_i}}$$

Lo stesso valore dello miscelo è:  $M_{misc} = \frac{m_t}{N_t}$

$$m = NM \quad \text{quindi} \quad M_{misc} = \frac{\sum N_i M_i}{N_t} = \sum X_i M_i$$

$$M_{misc} = \frac{1}{\sum \frac{X_i}{M_i}}$$

Calcolo i carboni specifici dello miscelo

$$- C_{misc} = \sum X_i C_{pi}$$

$C_{vi}$  e  $C_{pi}$  sono funzione di  $L$

$$- C_{p_{misc}} = C_{v_{misc}} + R = \sum X_i C_{pi}$$

$$Y_{misc} = \frac{C_{p_{misc}}}{C_{v_{misc}}} = \frac{\sum X_i (N_i + 2)}{\sum X_i \cdot L_i}$$

ADM

$$- C_{v_{misc}} = \sum C_i C_{vi}$$

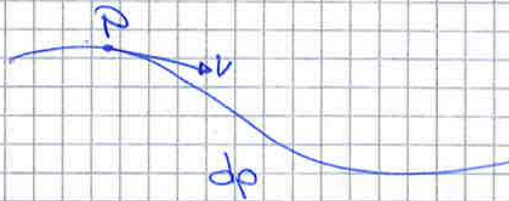
$$C_{p_{misc}} = \sum C_i C_{pi} = C_{v_{misc}} + \frac{R}{M}$$



se  $M$  basso la linea di corrente deve non può grosse variazioni di  $V \rightarrow p \rightarrow \rho$  (incompressibile)

se  $M$  alto anche se la linea è poco diversa la velocitàstante ha grosse variazioni.

Considero una linea di corrente (con  $V$  tangente in ogni punto)



$dp = -\rho V dV$   $\rightarrow$  legge di Eulero

Ad una variazione di posizione corrisponde una variazione di velocità

Se  $p = \text{cost}$  ottago  $p = p + \frac{1}{2} \rho V^2$

Se divido  $dp = -\rho V dV$  per  $dp$  ottago:  $\frac{dp}{dp} = -\frac{1}{dp} \cdot \rho V dV$

Se l'evoluzione avviene ad entropia costante  $\left(\frac{dp}{dp}\right)_{s=\text{cost}} = a^2$

Quindi  $a^2 = -\frac{1}{dp} \cdot \rho V dV$  divido ora per  $V^2$  (velocità)

$\frac{a^2}{V^2} = -\frac{\rho}{dp} \frac{1}{V^2} V dV \rightarrow \frac{1}{M^2} = -\frac{\rho}{dp} \frac{dV}{V}$   $\Delta V > 0$  acc  
 $\Delta V < 0$  dec

$\frac{dp}{p} = -M^2 \cdot \frac{dV}{V} \rightarrow \frac{\Delta p}{p} = -M^2 \frac{\Delta V}{V}$

Suppongo che  $\frac{\Delta V}{V} = 1$  ottago  $\frac{\Delta p}{p} = -M^2 \cdot 1 \rightarrow$  variazioni percentuali di  $M^2 =$

- $M < 0,3$  ho flusso incompressibile
- $M \approx 0,3$  iniziano a vedersi effetti della compressibilità
- $M > 0,3$  flusso compressibile



Dimensionalmente ho ottenuto uno sforzo  $\int \frac{kg}{m} \cdot \frac{m}{s} \cdot \frac{m}{s} = \int \frac{F}{s}$

Questo sforzo agisce nella direzione di  $\bar{u}$  e nella direzione della faccia con normale l'asse  $y \rightarrow$  dovremmo un doppio pedice

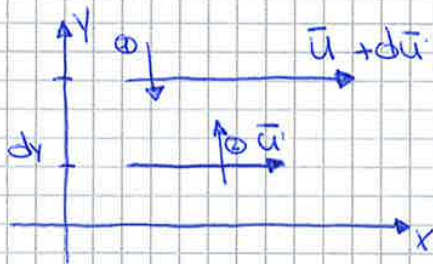
$$\text{sforzo} = \tau_{xy}$$

$$\tau_{xy} = \text{tensione sforzi viscosi}$$

$\rightarrow$  nasce dal trasporto di  $V$  sotto particelle

Lo stesso ragionamento avviene su tutte le 3 direzioni

Devo collegare  $\tau$  ai gradienti di velocità:



ho un ambiente simile allo stato liquido

Ho una qdm trasportata in corso delle perturbazioni molecolari

①  $-m(\bar{u} + d\bar{u}) V_{at} \cdot n \rightarrow$  flusso qdm verso il basso  
 La così leggendo conto di tutto

②  $m(\bar{u} + d\bar{u}) V_{at} \cdot n \rightarrow$  flusso qdm verso l'alto

La differenza di queste qdm rappresenta il flusso netto

$$m \cdot n = p$$

$$\begin{aligned} & -m(\bar{u} + d\bar{u}) V_{at} \cdot n + m(\bar{u} + d\bar{u}) V_{at} \cdot n = -m d\bar{u} V_{at} \cdot n = -p d\bar{u} V_{at} = \\ & = p \bar{u} \cdot \bar{u} = \tau_{xy} \end{aligned}$$

quanto vale  $d\bar{u}$ ?  $\rightarrow$  gradiente di velocità macroscopico

$$\begin{aligned} d\bar{u} &= \frac{d\bar{u}}{dy} \cdot dy \rightarrow dy \approx l \rightarrow p \bar{u} \cdot \bar{u} = m \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \cdot l \right) V_{at} \cdot n = -p \left( \frac{d\bar{u}}{dy} l \right) V_{at} \\ &= -p V_{at} \cdot \frac{d\bar{u}}{dy} = p \bar{u} \cdot \bar{u} = -\mu \frac{d\bar{u}}{dy} \end{aligned}$$

con  $\mu = p V_{at}$



Il flusso su  $y$  visib come trasporto delle perturbazioni vale  $q_y = \rho \bar{v} \epsilon$

Uguagliando le due espressioni di  $q_y$  espletando de:

$$d\epsilon = \frac{d\epsilon}{dy} dy = \frac{d\epsilon}{dy} \cdot \rho$$

$$q_y = -\mu \left( \frac{d\epsilon}{dy} \cdot \rho \right) V_{at} \cdot \mu \quad \text{con } \epsilon = c_v T$$

$$q_y = -\mu \left( c_v \frac{dT}{dy} \cdot \rho \right) V_{at} \cdot \mu \rightarrow q_y = -\mu c_v \mu V_{at} \rho \frac{dT}{dy} = \rho \bar{v} \epsilon$$

Eguagliando a Fourier vedo che fanno una struttura simile e quindi

$$-\lambda \frac{dT}{dy} = -\mu c_v \mu V_{at} \rho \frac{dT}{dy} \quad \text{con } \lambda = \mu \cdot c_v \cdot \mu V_{at} \cdot \rho \quad \text{con } \mu \cdot \nu = \rho$$

$$\lambda = c_v \underbrace{\rho V_{at} \cdot \mu}_{\mu} \Rightarrow \lambda = \mu c_v$$

Nel campo delle medie temperature  $\lambda = 1,45 \mu c_v$

- Stato fluido cinematico

Definisco il Reynolds  $Re = \frac{\text{velocità} \cdot \text{lunghezza} \cdot \text{densità}}{\text{viscosità}} = \frac{V \cdot L \cdot \rho}{\mu} = \frac{F_{inerzia}}{F_{viscose}}$

Definisco il Prandtl  $Pr = \frac{\mu c_p / \rho}{\lambda / \rho} = \frac{\mu / \rho}{\lambda / \rho c_p}$  dove  $\frac{\mu}{\rho} = \nu$

con  $\nu =$  viscosità cinematica

$\frac{\lambda}{\rho c_p} = k \rightarrow$  coeff di diffusione termica

$Pr = \frac{\nu}{k}$

se  $Pr \gg 1 \rightarrow$  diffusione della qm  $\approx$  diffusione di energia

$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{k} \approx \frac{\delta}{\delta_T} \rightarrow$  cinematico  
 $\rightarrow$  termico

$Pr(\text{aria}) = 0,71 \quad \delta < \delta_T$

Formulo di Eucken

$$Pr = \frac{2L+6}{2L+9} = \frac{4\gamma}{9\gamma-5}$$



$$P_2 = P_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$P_1 = \frac{P_1}{\frac{R}{M} T_1} = 3,162 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\gamma_{\text{mis}} = 1,41 \rightarrow \rho_2 = 1,01 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$T_2 = \frac{P_2}{\frac{R}{M} \rho_2} = 219^\circ\text{K}$$

8/10/15

### Richiami Termodinamici

Definisco l'entropia come  $s$ , ed è data in grado nel secondo principio della termodinamica, mentre l'energia interna è nel primo.

I principio: se fornisco una quantità  $Q$  di calore e compio un lavoro  $L$  sul sistema termodinamico vedo a variare l'energia interna.

$$de = \delta Q + \delta L$$

$d$ : differenziale esatto perché è una funzione di stato

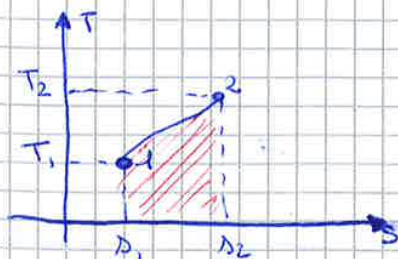
$\delta$ : non è esatto perché dipende dalla trasformazione, rappresenta una delle quantità indefinite

I  $\Rightarrow$  vale per sistemi stazionari  $\dot{V}=0$

Definisco  $ds = \frac{\delta Q}{T} + ds_{\text{irrevers}}$   $\rightarrow$  II principio  $\left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$

Per processi reversibili  $ds_{\text{irrevers}} = 0$

Nei processi isentropici  $\rho_0 ds_{\text{irrevers}} = 0$  e  $\delta Q = 0$



se processo reversibile  $q = \int_1^2 T ds$

Se  $\rho_0$  un processo reversibile ed adiabatico  $\rho_0$  un processo isentropico.



Se  $\rho$  è costante tutto il campo ottiene il flusso è isobarico

- Processi isobarici  $\rightarrow$  relazione

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{passo per la geometria}$$

ma se rispetto al flusso isentropicamente

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma \rightarrow \frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cost} \quad (\text{isobarico anche questo caso})$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \rightarrow \frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cost} \rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\text{cost}} = \text{cost} \cdot \gamma \rho^{\gamma-1} = \text{cost} \cdot \gamma \cdot \frac{P^\gamma}{\rho^\gamma} \cdot \frac{\rho}{P} = \text{cost} \cdot \frac{\rho}{P} \cdot \frac{\gamma P}{\rho} = \gamma \frac{P}{\rho}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T}$$

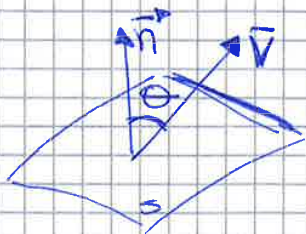
### leggi di conservazione (di bilancio)

- massa
  - quantità di moto
  - energia
- } G

Definisco  $f = \frac{G}{\text{volume}}$  dove il flusso di G è definito come:

$$f \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) = f \cdot (V \cos \theta) = f \cdot V_n \quad \left[ \frac{\text{Dimensione G}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right]$$

↳ prodotto scalare



$\vec{n}$  = versore normale, posizione uscente

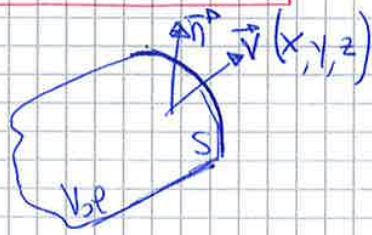
- Massa

$$G = \text{massa} \rightarrow f = \frac{G}{Vt} = \frac{\text{massa}}{Vt} = \rho$$

dove il flusso di massa sarà  $\rho(\vec{V} \cdot \vec{n})$  con segno a seconda 21



**Conservazione della massa**



$\rho dV_{CV} \rightarrow$  massa all'interno del volume che va estesa a volume integrale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{CV}} \rho dV_{CV} = \sum \text{flussi}$$

Il flusso di massa è  $\rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$  +  $\rightarrow$  uscente  
-  $\rightarrow$  entrante

$$- \int_S \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad \text{termine negativo per convenzione [kg/sec]}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

conservazione della massa in forma integrale (eq scalare)

nei flussi stazionari  $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \rightarrow \int_S \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0$

**Conservazione della quantità di moto**

$\rho \cdot \vec{v} dV_{CV}$   $d(\rho \vec{v})$  che va integrabile è:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{CV}} \rho \vec{v} dV_{CV} = \underbrace{\sum \text{flussi}}_{\rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n})} + \text{forze esterne}$$

ovvero  $- \int_S \rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$

Forze  $\int$  Superficie  $\left\{ \begin{array}{l} F_{pressione} \\ F_{viscose} \end{array} \right.$   
 Massa  $\rightarrow$  campo  $\left\{ \begin{array}{l} gravitazionale \rightarrow F_{peso} \\ magnetico \rightarrow F_{magnetica} \\ \text{ecc...} \end{array} \right.$

$$F_{pressione} = \int_S (p \cdot \vec{n}) dS$$

$$F_{viscose} = \tau_{ij} \quad (\text{non considerabili})$$



q/dt

Conservazione energia

$$-\frac{d}{dt} \int_S p \left( e + \frac{V^2}{2} \right) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad \left[ \frac{S}{s} \right]$$

Invariante si parla di energia ritenuta dell'eq sono dette potenze

Integro sul volume:

$$p \left( e + \frac{V^2}{2} \right) dV \quad [S] \quad \text{che sommato per tutti i volumi infinitesimi vale:}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_e} p \left( e + \frac{V^2}{2} \right) dV = - \int p \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \cdot \vec{n}$$

qui mancano espressioni di lavoro e calore

Calore fornito: 2 contributi

①  $\dot{q}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Input di calore RADIAZIONE} \\ \text{Emissione radiativa da parte del fluido stesso} \end{array} \right.$

$\dot{q} = \left[ \frac{S}{kg \cdot s} \right] \left\{ \begin{array}{l} \text{Processo di combustione} \\ \text{Presenza di resistenze ottiche} \end{array} \right.$

$$\dot{q} \frac{dV}{dm} \quad \left[ \frac{S}{s} \right] \quad \rightarrow \text{il contributo totale è: } \int_{V_e} \dot{q} dV$$

② Effetti della conduttività (danti alla parete)

Le producono un termico e di conseguenza flussi di calore in termini

$$\dot{Q}_{vis} \quad \text{(senza espressione per ora)}$$

Lavoro

Consideriamo solo il lavoro fornito dalla forza di pressione  $\vec{F}_p \cdot \vec{V}$  e massa

$-(p \cdot \vec{n}) dS$  va moltiplicato per  $\vec{V}$  per definire il lavoro elementare

$$\rightarrow -p(\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad \rightarrow \text{contributo totale } - \int_S p(\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad (25)$$



$$\boxed{\frac{dp}{dt} + \nabla \cdot (p \vec{v}) = 0} \rightarrow \text{forma differenziale della conservazione della massa}$$

Posso anche scriverlo come:

$$\boxed{\frac{dp}{dt} + \frac{pu}{dt} + \frac{pv}{dt} + \frac{pw}{dt} = 0}$$

forma alternativa differenziale della massa:

forma conservativa o della diverg.

Posso anche scriverlo (derivando la forma conservativa)

$$\frac{dp}{dt} + u \left( \frac{dp}{dx} + p \frac{du}{dx} \right) + \left( v \frac{dp}{dy} + p \frac{dv}{dy} \right) + \left( w \frac{dp}{dz} + p \frac{dw}{dz} \right) = 0$$

$$\frac{dp}{dt} + \underbrace{\frac{u}{p} \frac{dp}{dx} + \frac{v}{p} \frac{dp}{dy} + \frac{w}{p} \frac{dp}{dz}}_{\text{terme convettive}} = - \left( p \frac{du}{dx} + p \frac{dv}{dy} + p \frac{dw}{dz} \right)$$

derivato sostanziale,

$$\boxed{\frac{Dp}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{v}} \rightarrow \text{forma lagrangiana}$$

Questa e le successive equazioni non sono conservative e servono per flussi compressibile.

Se flusso incompressibile (p costante nello spazio e nel tempo)

$$\frac{Dp}{Dt} = 0$$

Equazione della quantità di moto

$$\frac{d}{dt} \int_V p \vec{v} dV = - \int_S p \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS - \int_S (p \cdot \vec{n}) dS + \int_V p \vec{f} dV$$

con  $\int_S p \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \rightarrow$  si proietta sul volume

$$\int_S (p \cdot \vec{n}) dS = \int_{V} \nabla p \cdot dV$$

$$p \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{x}_i \rightarrow p v_i (\vec{v} \cdot \vec{n}) \quad \text{Ringo } x$$



$$\rho \frac{D(\rho + \frac{v^2}{2})}{Dt} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \rho \ddot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v})$$

→ forma lagrangiana

Posso riscriverlo come:

- utilizzando l'energia interna

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\rho (\nabla \cdot \vec{v}) + \rho \ddot{q}$$

- utilizzando  $\frac{v^2}{2}$ :

$$\rho \frac{D(\frac{v^2}{2})}{Dt} = -\vec{v} \cdot \nabla p + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v})$$

- utilizzando  $p$

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{De}{Dt} + \frac{D(p/\rho)}{Dt} \rightarrow \frac{Dp}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \rho \ddot{q}$$

- utilizzando  $H$

$$\rho \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \ddot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v}) + \text{viscosità} + \text{conduttività}$$

Nel caso in cui  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ ,  $\ddot{q} = 0$ ,  $\vec{f} = 0 \rightarrow \rho \frac{DH}{Dt} = 0 \rightarrow H = \text{cost}$

Con  $H = \text{cost}$  ho un campo omotermodinamico con:

- flusso irrotazionale
- non conduttibile
- stazionario

Se corrente uniforme posso ~~calcolare~~ calcolare questo costante direttamente

$$H_{\infty} = h_{\infty} + \frac{v_{\infty}^2}{2} = c_p T_{\infty} + \frac{v_{\infty}^2}{2} = c_p T_{\infty} \rightarrow T_{\infty} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2\right)^2$$

$$\text{Quindi } c_p T + \frac{v^2}{2} = c_p T_0$$

A questo punto moltiplico e divido per  $\frac{\gamma R}{\gamma-1}$

$$\left( c_p T + \frac{v^2}{2} \right) \frac{\gamma R}{\gamma-1} = c_p T_0 \frac{\gamma R}{\gamma-1}$$

+  $\frac{v^2}{2}$  parte

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$$



Nel caso dell'aria  $\gamma = 1.4$

$$\frac{V_c}{a^*} = \sqrt{6} = 2.449$$

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1} = 0.833$$

$$\frac{a^*}{a_0} = 0.913$$

$$\frac{V_c}{a_0} = 2.236$$

- Determino la numero Mach e Mach in condizioni critiche

Parto da  $\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a^{*2}}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$  e divido tutto per  $V^2$  ottenuto

$$\frac{a^2}{V^2} \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2} = \frac{a^{*2}}{V^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rightarrow \frac{1}{M^2} \cdot \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{M^{*2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

Inserendo la relazione di Mach  $M^2 = \frac{2}{\left[\frac{\gamma+1}{M^{*2}}\right] - (\gamma-1)}$

$$M^{*2} = \frac{M^2(\gamma+1)}{2+M^2(\gamma-1)}$$

se  $M=1$   $M^*=1$

$M < 1$   $M^* < 1$

$M > 1$   $M^* > 1$

$M \rightarrow \infty$   $M^* \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \rightarrow \frac{V_c}{a_{c=0}}$

Rapporti in condizioni critiche

$M=1$   $M^*=1$

$$\frac{a^{*2}}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \frac{a^{*2}}{\gamma-1} \rightarrow \frac{a^{*2}}{a_0^2} = \frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1}$$

Se assegno  $M=1$  (condizione sonica) a  $T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \Rightarrow T = T^*$  ottenuto

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\right)} = \frac{2}{\gamma+1}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \rightarrow \frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \rightarrow \frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$



15/10/15

Teorema di Crocco

Usato nel caso di vortici staccati (vortice separato dal corpo)  
 Unisce termodinamica e cinematica del campo.

$$TVS = dh - \frac{dp}{\rho}$$
 → scrittura di analogazione del 1° e 2° principio

Per sostituire i gradienti alle quantità infinitesime:

$$TVS = \nabla h - \frac{\nabla p}{\rho}$$

Ricorrendo all'eq del moto (per fluidi non viscosi in forma lagrangiana):

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} \rightarrow \text{sostituendo} \quad TVS = \nabla h + \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

esplicito  $\frac{D\vec{v}}{Dt} \rightarrow TVS = \nabla h + \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right)$

Definisco  $H = h + \frac{v^2}{2} \rightarrow h = H - \frac{v^2}{2} \quad \nabla h = \nabla H - \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right)$

quindi  $TVS = \left[ \nabla H - \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] + \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right]$

sfruttando un'identità possiamo scrivere  $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} - \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) = - \underbrace{\vec{v} \times \nabla \times \vec{v}}_{\text{rotore}}$

$$TVS = \nabla H - \vec{v} \times \nabla \times \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \rightarrow \text{teorema di Crocco}$$

Nel caso di flusso stazionario  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \rightarrow TVS = \nabla H - \vec{v} \times \nabla \times \vec{v}$

↳ campo irrotazionale  $\nabla \times \vec{v} = 0 \rightarrow TVS = \nabla H$

↳ condizione termodinamica  $\nabla h \neq 0$  e  $\nabla s \neq 0$

↳ per il teorema di irrotazionalità del campo

ergo  $\nabla \times \vec{v} \neq 0 \rightarrow \text{campo rotazionale}$



che posso ricavare come  $\rho \cdot v dv = -dp$  ovvero

$$\boxed{dp = -\rho v dv}$$

se rinfaccio pagamento e ricavo.

Premessa:

Dato un campo irrotazionale con un vettore  $\vec{A}$  ( $\nabla \times \vec{A} = 0$ )  
allora  $\vec{A} = \nabla \phi$

Definito un vettore  $\vec{V}$  se  $\nabla \times \vec{V} = 0$   $\vec{V} = \nabla \phi$

con  $\phi$  (scalare) = velocità potenziale

$$\vec{V}_\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_y$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \phi_z$$

Parto dall'eq della continuità

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

ovvero  $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$  che riscrivo come

$$\frac{\partial(\rho \phi_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \phi_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \phi_z)}{\partial z} = 0$$

riscrivo con  $\phi_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$

derivo l'equazione e ottengo

$$\rho(\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}) + \phi_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \phi_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

Esprimo ora  $\rho$  tramite l'eq di Euler

$$dp = -\rho v dv = -\rho d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{\rho}{2} d(v^2) = -\frac{\rho}{2} d(u^2 + v^2 + w^2)$$

con  $v^2 = v$  modulo della velocità  $\Rightarrow v^2 = u^2 + v^2 + w^2$

che posso ricavare come  $dp = -\frac{\rho}{2} d(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)$

Considero le velocità derivate  $\Rightarrow a^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho=\text{cost}} = \frac{dp}{d\rho}$

però possiamo un passo indietro



Per flussi incompressibili la velocità potenziale è  $\phi_x + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0$   
 ovvero l'eq di Laplace.

### Flussi unidimensionali

Flussi per i quali la variabile dipendente solo da una coordinata  $x$  che indica la direzione di sviluppo del moto.

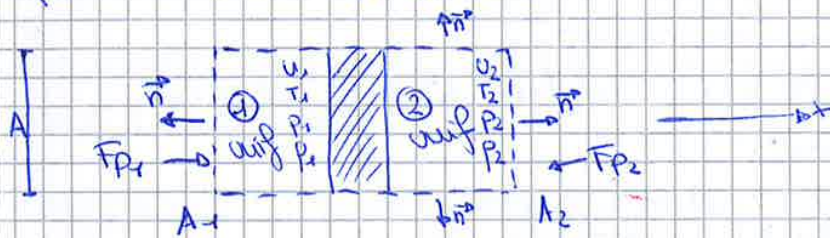
Valore solo  $V = u\vec{i}$  con  $v=0$  e  $w=0$   $p(x)$   $T(x)$  ecc..

Se la sezione trasversale a  $x$   $A = \text{cost}$  ed il flusso è uniforme su  $A$ .

### Equazioni del flusso unidimensionale

continuità - qdm - energia

Scrivere in forma integrale con volume di controllo fisso e finito dal punto di vista euleriano.



assumo:

- pressione nulla
- flusso stazionario  $\frac{d}{dt} = 0$
- forze di massa  $\vec{f} = 0$
- $\vec{V} = u\vec{i}$

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho dV + \int_S \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

$\hookrightarrow \text{flusso staz}$

$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$  sulle superficie superiore ed inferiore

$$\int_S \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \left[ \underbrace{p_1(-u_1)A_1}_{\text{discordi}} + \underbrace{p_2(+u_2)A_2}_{\text{concordi}} \right] \text{ ovvero}$$

$$-p_1 u_1 A_1 + p_2 u_2 A_2 = 0 \quad A_1 = A_2$$

$$p_1 u_1 = p_2 u_2 \quad \rightarrow p u = \text{cost}$$



quindi  $\frac{\dot{Q}}{A\rho v} + P_1 + \frac{v_1^2}{2} = P_2 + \frac{v_2^2}{2} \rightarrow P_1 + \frac{v_1^2}{2} + Q = P_2 + \frac{v_2^2}{2}$

$P + \frac{v^2}{2} = H$  quindi posso riscrivere come  $H_1 + Q = H_2$

Se avessi un flusso adiabatico allora  $H = \text{cost} = c_p T_0 \rightarrow T_{01} = T_{02}$

16/11/15

Piccole e grandi perturbazioni  $\rightarrow$  variazioni di pressione

Il suono è una piccola perturbazione (piccolo angolo)

Nel caso di onde sonore ho una trasformazione adiabatica (non si fanno scambi) e reversibile  $\rightarrow$  isentropica

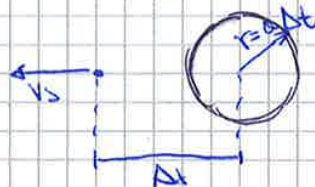
• Suppongo che la sorgente si muova con  $v_s < a$



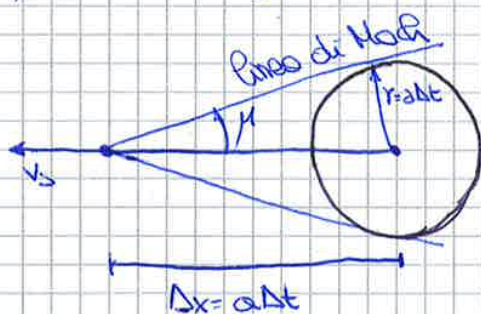
La sorgente si sposta dalla posizione originaria  $\Delta x = v_s \cdot \Delta t$  (con  $a > v_s$  e  $r > \Delta x$ )

• Supponendo  $v_s = a$  allora  $r = \Delta x$

• Supponendo  $v_s > a$   $\Delta x = v_s \Delta t$



In questo caso si forma il cosiddetto cono di Mach ovvero un cono all'interno di cui si propaga il suono (all'esterno non ho propagazione, c'è il vuoto)



$r = a \Delta t$   
 $\Delta x = v_s \Delta t$

$\frac{r}{\Delta x} = \frac{a}{v_s} = \text{sen } \mu = \frac{1}{M}$

quindi  $\mu = \text{arc sen} \left( \frac{1}{M} \right)$



ottergo  $dp = -2a p da - a^2 dp$  e  $da = \frac{dp + a^2 dp}{-2p}$

dividendo per  $dp \rightarrow \boxed{\frac{da}{dp} = \frac{dp/dp + a^2}{-2p}}$

egualizzando le due espressioni di  $\frac{da}{dp}$  ottergo:

$$\underbrace{\frac{dp}{dp} + a^2}_{\text{qdm}} = \underbrace{\frac{a}{p}}_{\text{cont}} \rightarrow 2a^2 = \frac{dp}{dp} + a^2 \rightarrow a^2 = \frac{dp}{dp}$$

essendo adiabatico e reversibile

$$\frac{dp}{dp} = \left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_{s=\text{cost}}$$

dall'eq di stato  $a = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$

Mecanismo fisico di generazione d'onde

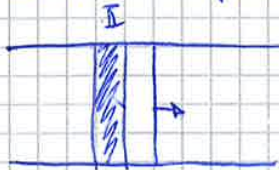
Ⓐ Tubo d'urto - fronte d'urto



Le due onde sono isentropiche

1. Il punto al primo ed al secondo di  $dp$  o stato prima e dopo l'urto...  
 Le due onde sono isentropiche

A sinistra del fronte il gas si raffredda mentre a destra si riscalda  
 Da un secondo impulso



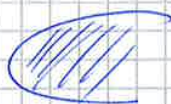
Ho più velocità perché il primo si muove più in avanti (dopo la prima compressione).

Le onde di espansione sono sempre più lente perché si muovono in un gas + freddo

Ⓑ

$$V_{\infty} \rightarrow \infty$$

$$M_{\infty} = \frac{V_{\infty}}{a_{\infty}}$$





Ricavo  $a^*$   $a^* = \frac{\gamma+1}{2} a^{*2} - \frac{(\gamma-1)}{2} u^2$

$$\left( \frac{\gamma+1}{2} \frac{a^{*2}}{\gamma u_1} - \frac{\gamma-1}{2\gamma} u_1 \right) - \left( \frac{\gamma+1}{2} \frac{a^{*2}}{\gamma u_2} - \frac{\gamma-1}{2\gamma} u_2 \right) = u_2 - u_1$$

Le condizioni critiche nei due campi sono identiche

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma} a^{*2} \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) + \frac{\gamma-1}{2\gamma} (u_2 - u_1) = u_2 - u_1$$

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma} a^{*2} \frac{1}{u_2 u_1} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} (u_2 - u_1) = u_2 - u_1$$

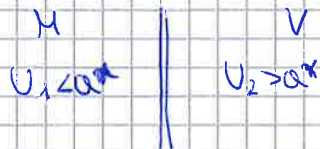
Divido per  $u_2 - u_1$  ottenendo

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma u_1 u_2} a^{*2} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{(\gamma+1)a^{*2}}{2\gamma u_1 u_2} = \frac{\gamma-1}{\gamma}$$

$a^{*2} = u_1 u_2$

Relazione di Prandtl

I  $u_1 < a^*$  (corrente a monte subsonica)  
 $u_2 > a^*$



Quando a valle c'è un'onda V allora si ha un'espansione ( $u_2 < a_2$ )

II  $u_1 > a^*$  } un'onda più veloce del fronte d'onda propagazione  
 $u_2 < a^*$

Quando si ha un'onda di espansione (o corrente supersonica, dipende dal sistema di riferimento)

Divido la relazione di Prandtl per  $a^{*2}$

$$1 = \frac{u_1}{a^*} \cdot \frac{u_2}{a^*} = M_1^* \cdot M_2^*$$

Da qui si può dire  $M_2^* = \frac{1}{M_1^*}$  (ricorda che voglio calcolare il campo 2)

$$M_1^{*2} = \frac{(\gamma+1)M^2}{2 + (\gamma-1)M^2}$$



Utilizzo della formula dell'energia:  $c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{cost} = \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{P}{\rho} \right) \cdot T + \frac{u^2}{2}$

$$= \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{P}{\rho} \right) + \frac{u^2}{2}$$

Quindi  $u_1^2 - u_2^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right)$

Faccio l'equivalenza con l'espressione  $u_1^2 - u_2^2$  ottenuto

$$\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) = (P_2 - P_1) \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

moltiplico per  $\frac{\rho_2}{P_1}$

$$\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{P_2}{P_1} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) = \left( \frac{P_2 - P_1}{P_1} \right) \left( \frac{\rho_2}{P_1} + 1 \right)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{P_2}{P_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{P_1}}$$

Relazione di Rankine-Hugoniot

Se assi subsonici allora  $\frac{P_2}{P_1} = \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma$

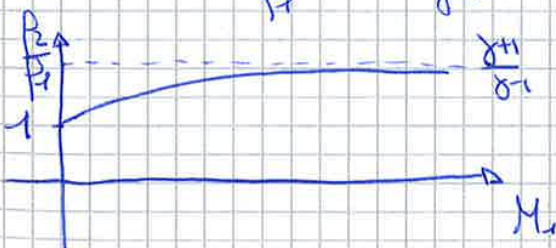
Calcolo  $\frac{P_2}{P_1}$  dall'equazione continua

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{u_1}{u_1} = \frac{u_1^2}{u_2 u_1} = \frac{u_1^2}{a_2^3} = M_1^{\gamma+2} = f(M_1^2)$$

Quindi  $\frac{P_2}{P_1} = \frac{(\gamma+1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_1^2} \rightarrow \frac{P_2}{P_1} = f(M_1)$

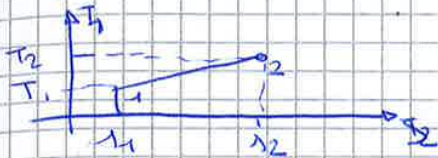
Se  $M_1 > 1$   $\frac{P_2}{P_1} > 1$   $P_2 > P_1$

Se  $M_1 \rightarrow \infty$   $\frac{P_2}{P_1} \rightarrow \frac{\gamma+1}{\gamma-1} > 1$  che per l'onda è  $\frac{P_2}{P_1} = 6$





$$\Delta_2 - \Delta_1 = \rho_2 z_2 - \rho_1 z_1$$



Le pressioni totali vengono ricavate dalla formula  $p_0 = p \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$  poiché sia a monte che a valle dell'orlo i flussi sono compatti e non avvengono irreversibilità

$$\frac{p_02}{p_01} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$



e sostituendo ottengo  $P_1 + \gamma P_1 M_1^2 = P_2 + \gamma P_2 M_2^2$  ovvero

$$P_2 - P_1 = \gamma P_1 M_1^2 - \gamma P_2 M_2^2 \quad \text{divido per } P_1 \text{ e ottengo:}$$

$$\left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right) = \gamma M_1^2 - \gamma \frac{P_2}{P_1} M_2^2$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$$

Per il rapporto di  $\frac{T_2}{T_1}$  uso l'eq. di stato + conservazione massa

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{u_2}{u_1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{u_2}{u_1}$$

$$\text{dove } \frac{u_2}{u_1} = \frac{M_2 a_2}{M_1 a_1} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2}$$

$$\rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{M_2}{M_1}\right)^2 = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}\right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2$$

Per il rapporto  $\frac{P_2}{P_1}$  scrivo:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2}\right) \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2$$

Per le grandezze totali ho:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{P_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

e sostituisco l'espressione di  $\frac{P_2}{P_1}$ :

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}\right) \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

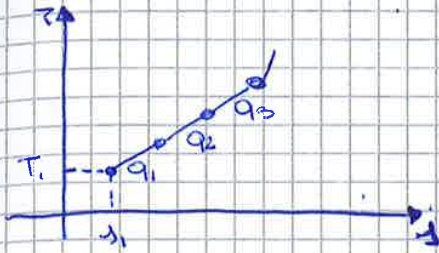
$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_2}{T_1} \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}$$

sostituisco anche presto così ottengo:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}\right) \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)}$$



⊗ B. condizione di choking  $M \rightarrow 1$   $q = q_{max}$



$q_1, q_2 \rightarrow$  valori finiti

$q_2 > q_1$

$M_2 < M_1$  per flusso subsonico

Raggiungo una condizione in cui il valore è al massimo valore possibile per la condizione di ingresso e allora avviene il choking

$q = q_{max} = q^* M_2 = M_1 = 1 \rightarrow$  sezione d'area critica

Ingresso subsonico  $M < 1$  ( $M^2 - 1 < 0$ )

$\frac{dT}{ds} > 0$  se  $\gamma M^2 - 1 < 0$   $M < \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$

$\frac{dT}{ds} = 0$   $\gamma M^2 - 1 = 0$   $M = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$

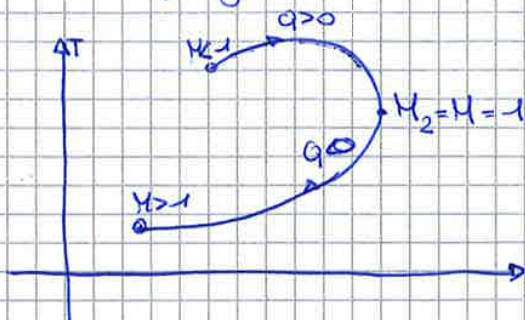
$\frac{dT}{ds} < 0$   $\gamma M^2 - 1 > 0$   $M > \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$

$\frac{du}{ds} = -\frac{u}{C_v} \frac{1}{\gamma(M^2 - 1)}$

$\frac{du}{ds} > 0$  Accelerazione  $M \uparrow$   $v_0$  finita

Qui  $q = q_{max} = q^* = f(M_1)$

Curva di Rayleigh



o accelerazione continua

$M_1 < 1$   $q > 0$   $q < 0$   $M_2 = 1$

o decelerazione continua

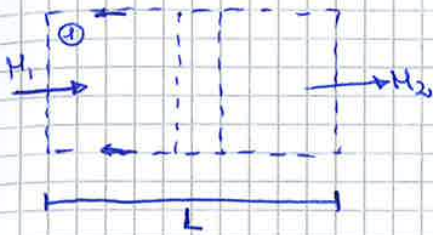
$M_1 > 1$   $q > 0$   $M_2 = 1$   
 $q < 0$   $M_2 < 1$



# Flusso di Fanno

23/1/15

È anche questo un flusso unidimensionale



Condotta adiabatica con  $q=0$  con presenza di effetti viscosi

$\mu \neq 0$ .

Lo strato viscoso nasce a parete con direzione tangente alle pareti  $x$  e fra due filotti successivi.

## Equazioni

• ENERGIA

$$H_1 = H_2 \quad p_1 + \frac{u_1^2}{2} = p_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad T_{01} = T_{02}$$

• CONTINUITÀ

$$\rho u = \text{cost} \quad \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad \Rightarrow \quad \text{velocità lo stesso caso dell'orologio}$$

• QDM

Devo scrivere il bilancio in forma integrale (conservazione)

$$\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S p \cdot \vec{n} dS - \int_S \tau_w dS$$

$$-\rho_1 u_1^2 A + \rho_2 u_2^2 A = (p_1 A - p_2 A) - \int_S \tau_w dS$$



Rispetto l'elemento integrale di fluido  $dS = \pi D dx$

$$-\rho_1 u_1^2 A + \rho_2 u_2^2 A = (p_1 A - p_2 A) - \pi D \int_0^L \tau_w dx$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \quad \text{ed in forma finale}$$

$$(p_2 - p_1) + (\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2) = - \frac{4}{D} \int_0^L \tau_w dx$$

eq. del moto nel flusso di Fanno



Rapporti  $\frac{p}{\rho}$

• Supponiamo che  $T_{tot} \rightarrow T_1 = T_2$

• dove  $T_1 = T_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)$  e stesso caso per  $T_2$

• Possiamo trovare il rapporto delle T statiche  $\frac{T_2}{T_1}$  moltiplicando e dividendo

per  $T_0 \rightarrow \frac{T_0}{T_1} \cdot \frac{T_2}{T_0} = \frac{T_0/T_1}{T_0/T_2}$  e quindi:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (\gamma-1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_2^2}$$

• Per il rapporto di pressione:

parto da  $a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \cdot \left(\frac{u}{a}\right)^2 \rightarrow p \rho = \text{cost} \rightarrow \text{cost} = \frac{\gamma \cdot p \cdot \rho}{a^2}$

può essere scritto per il campo 1 e per il campo 2

$$\frac{\gamma p_1 \rho_1}{a_1^2} = \frac{\gamma p_2 \rho_2}{a_2^2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{a_2 \cdot a_2}{a_1 \cdot a_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} =$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \frac{a_2}{a_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \left[ \frac{2 + (\gamma-1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} = f(M_1, M_2)$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_{01}} \rightarrow \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{M_1}{M_2} \left[ \frac{2 + (\gamma-1) M_2^2}{2 + (\gamma-1) M_1^2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$p_{02} < p_{01} \rightarrow$  eff dissipativo

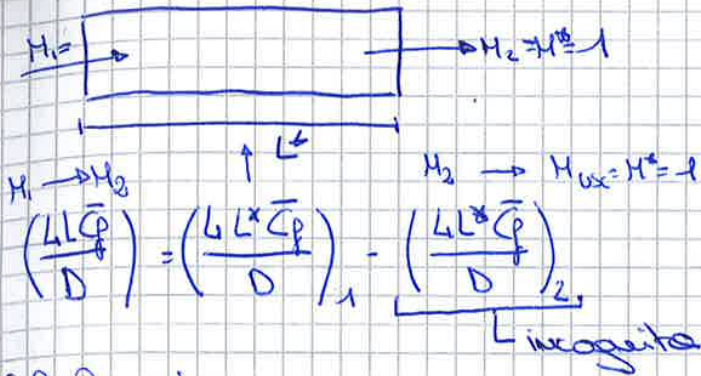
$$\Delta s_2 - \Delta s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{p_2}{p_1} = - \frac{R}{M} \ln \frac{p_{02}}{p_{01}} \propto f(M_1, M_2)$$

Calcolo campo 2

$$\frac{dT}{ds} = \frac{T}{c_p} \gamma \frac{M^2}{M^2-1}$$

$$\frac{du}{ds} = - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{T}{u} \frac{M^2}{(M^2-1)}$$





Calcolo di convergenza

$$P_2 = \frac{P_2}{P^*} \cdot \frac{P^*}{P_1} \cdot P_1$$

$$P_2 = \frac{P_2}{P^*} \cdot \frac{P^*}{P_1} \cdot P_1$$

$$T_2 = \frac{T_2}{T^*} \cdot \frac{T^*}{T_1} \cdot T_1$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = -\frac{R}{M} \ln \frac{P_2}{P_1} \rightarrow P_2 < P_1$$

$$\frac{L^* C_f}{D} = 0.82 \quad L^* = \frac{0.82 \cdot D}{4 \cdot C_f}$$

Dopiusco  $\lambda = \frac{(dp/dx) / D}{\frac{1}{2} \rho V^2 / D}$



Eq. qdm

$$\int_S p \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_S p \vec{n} dS$$

dato proiettore nelle due direzioni normale e tangenziale

$$N) \left[ \int_S p u (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \right] = - \left[ \int_S p \vec{n} dS \right]_u$$

forza @  $\vec{v} \cdot \vec{n}$

$$p_1 u_1 (-u_1) A_a + p_2 u_2 (u_2) A_d + p_1 u_1 (\cancel{w_1}) A_f + p_1 u_1 (\cancel{w_1}) A_b =$$

stessa cosa con contributi e ecc

Per variazione di qdm avviene la forza totale ed iniziale

$$= - (p_1 A_a + p_2 A_d) \text{ semplicemente la forza d'impulso}$$

$$p_1 + p_1 u_1^2 = p_2 + p_2 u_2^2$$

$$T) \int_S p w (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \underbrace{\left[ - \int_S p \vec{n} dS \right]}_{L=0}$$

$$p_1 w_1 (-u_1) A_a + p_2 w_2 (u_2) A_d + \text{contributi da s. curve} = 0$$

$$p_1 w_1 u_1 = p_2 w_2 u_2$$

$$p_1 u_1 = p_2 u_2 \Rightarrow w_1 = w_2$$

Eq. aargo.

$$\int_S p \left( e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int p (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

$$p_1 \left( e_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) (-u_1) A_a + p_2 \left( e_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) (u_2) + \text{componenti nulli} = - \left[ -p_1 u_1 A_a + p_2 u_2 A_d \right]$$



3/1/15

$$M_{1n} = M_1 \operatorname{sen} \beta = \frac{u_1}{a_1} = \frac{V_1}{a_1} \operatorname{sen} \beta$$

$$M_{2n} = \frac{u_2}{a_2} = V_2 \operatorname{sen}(\beta - \theta) = M_2 \operatorname{sen}(\beta - \theta) \quad \text{quindi} \quad M_2 = \frac{M_{2n}}{\operatorname{sen}(\beta - \theta)}$$

Nel caso di urto retto  $M_2 = f(M_1)$

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \rightarrow \text{cresce con } M_1$$

$$M_{2n}^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_{1n}^2}{2\gamma M_{1n}^2 - (\gamma - 1)}$$

Sostituendo a  $M_1$  e  $M_2$  le relazioni con i seni dell'urto obliquo

$$M_{2n}^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \operatorname{sen}^2 \beta}{2\gamma M_1^2 \operatorname{sen}^2 \beta - (\gamma - 1)} \quad \text{dove} \quad M_{2n}^2 = M_2^2 \operatorname{sen}^2(\beta - \theta)$$

Posso quindi dire che per l'urto obliquo  $M_2^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\beta - \theta)}$

$$M_2^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\beta - \theta)} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \operatorname{sen}^2 \beta}{2\gamma M_1^2 \operatorname{sen}^2 \beta - (\gamma - 1)} \right]$$

$M_2$  aumenta due volte perché è al quadrato

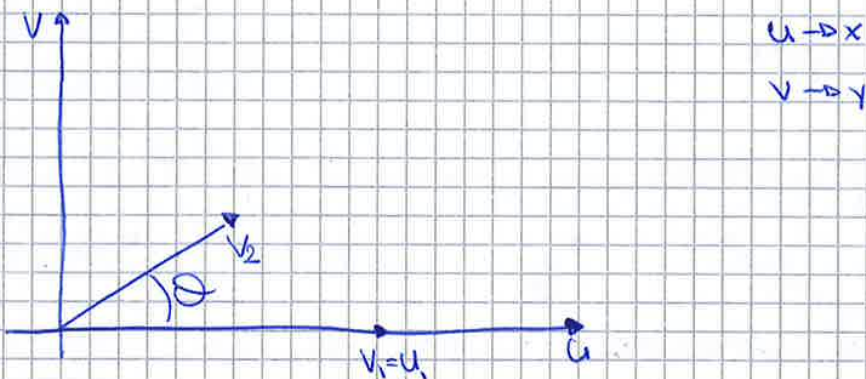
A volte la velocità raddoppia  $M_2 < 1 \rightarrow$  lo urto è passivo dal punto di vista del suono.



Definisco  $D_w$  come la resistenza d'onda che non esiste nel subsonico perché non ho presenza di erti.

Posso ora collegare tutti i rapporti delle grandezze.

Posso studiare gli erti da diversi piani tra cui un piano detto obliquo.



Nel campo amato la componente di  $u$  sarà  $u_1$ , mentre il vettore  $v_2$  (a volte) sarà inclinato di un certo  $\theta$ .

Per obliquità nel campo il luogo di tutte le estremità del vettore  $v_2$  che ho descritto nel vortice di  $u$ .

Questo modo di vedere  $v_2$  mi porta ad avere una parte Unisco tutti i punti successivi occupati da  $v_2$ .







Ammetti a  $\Theta_{u_2} = 1$  erro' au flusso superomica rotte.  
 Dando  $\beta = \mu$  con un'erro' più un urto de' raddio la corrente  
 una una annucente  
 Tra ① e ②  $P_0$   $H = \text{cost}$  e pido' nel teorema di Crocco  
 erro' de' :

$\nabla \times \bar{V} = \nabla H - \nabla S$  ma  $\nabla H = 0$   $\nabla S \neq 0 \rightarrow$  flusso rotazionale  
 Poche  $\nabla S \neq 0$  in ②  $\rightarrow \nabla \times \bar{V} \neq 0 \rightarrow$  non posso scrivere l'equazione  
 dell' energia potenziale

Cono

Poche in un cono è un'erro' intenso poche nella zona ② il campo  
 è un'erro' in tutto.



Questa riflessione rispetto sempre la condizione di tangenza nel campo ③ la corrente si deve infatti incanalare a parete (con deflessione  $\Theta$ )

$\Theta$  è sempre  $< \Theta_{max}$

$M_2 < M_1$  e  $M_3 < M_2 \rightarrow$  lo p statico è fatto di ogni vortice successivo ~~si~~ comprimendo la corrente però  $P_2 + P_3$  e  $P_2 > P_1$

I 3 vortici hanno intensità diverse dato:

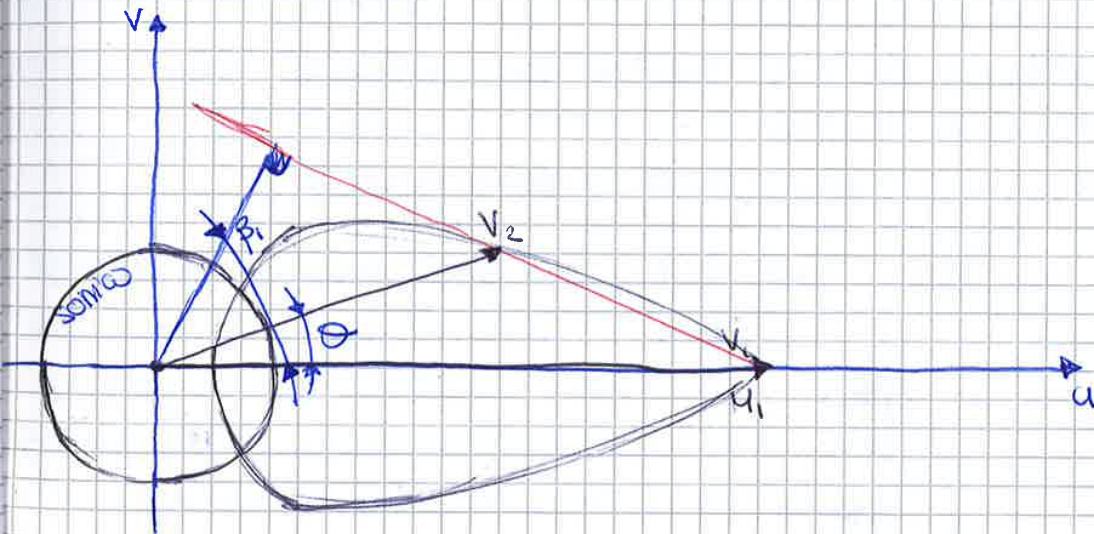
- nel I vortice avrà intensità maggiore perché  $M_1 > M_2$  e  $P_2 > P_1$   
quindi  $\frac{P_2}{P_1} > \frac{P_3}{P_2}$



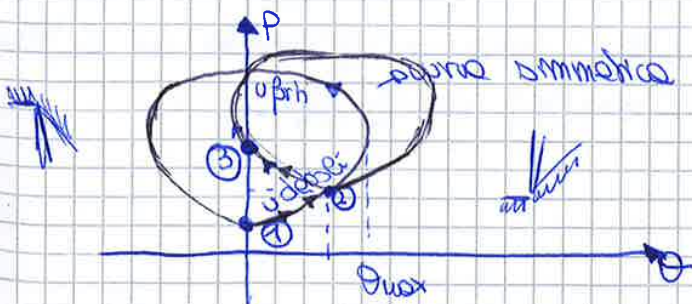
tutti e tre i campi non uniformi

Se il primo vortice fosse finto,  $M_2$  diventerebbe vortice subsonico e quindi non si formerebbe il secondo vortice d'urto.

Obografia



Piano pressione-deflessione



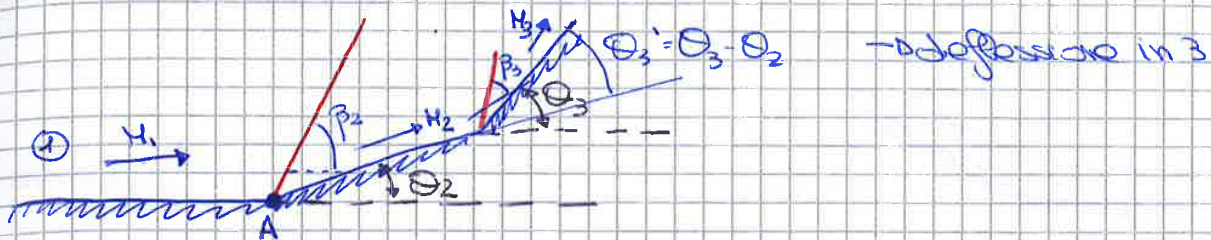
pressione avvertita dall'urto

Il punto  $\theta$  identifica  $\Theta=0$  e campo avanti

Per trovare il punto  $\theta$  devo ricostruire lo stesso campo dove al posto di  $M$  metto  $M_2$

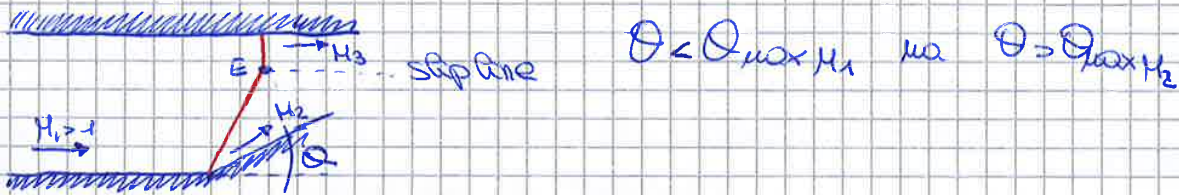


Integrazione di viti dello stesso famiglia



Dal punto c parte una slip line che separa i campi 4 e 5 che hanno stessa pressione ma curvatura differente.  
 Da c parte anche un'altra onda che può essere sia di compressione che di espansione e che nei punti da  $p_3$  a  $p_4 = p_5$

Riflessione di Mach



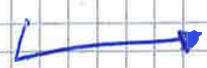
con un'onda retta raddrizza il flusso ma  $M_3$  diventa subsonico.  
 Non può esistere l'onda retta ma dovrebbe essere un'onda curva staccata ma a cui non interessa ed usiamo l'onda retta ugualmente.  
 Per fare in modo che campi 3 e campo 2 abbiano la stessa pressione ci sarà un'onda d'urto che partendo da E e avanti  $p_2$ .  
 Da E inoltre parte una slip line.

Parete con vortice

A ridosso di una parete curva arrivano tante onde espansive ognuna delle quali porta una dp. Aumentando p  $\uparrow T$  e  $\downarrow \mu$  con  $\downarrow \mu$   $\uparrow \mu$  cioè tutte le onde espansive vanno ad incontrarsi in un punto da dove poi parte un'onda obliqua.  
 I gradienti di pressione alle estremità dell'onda obliqua

Parete con viscosità

Se per  $x = dx$   $P_0 v_1 = M_1$  e per  $x=0$   $P_0 v_0 = 0$  allora ci sarà una linea di corrente con  $v=0$  detta lineaonica. Tutto quello fatto finora vale per lo zero sopra la lineaonica e non al di sotto perché il flusso è subsonico.  
 La viscosità inoltre arrotonda lo spigolo.



(71)



Espansioni supersoniche flussi piani supersonici 6/11/15  
 ausentropici

- Espansione (allontanando  $M_2$  da  $M_1$ )

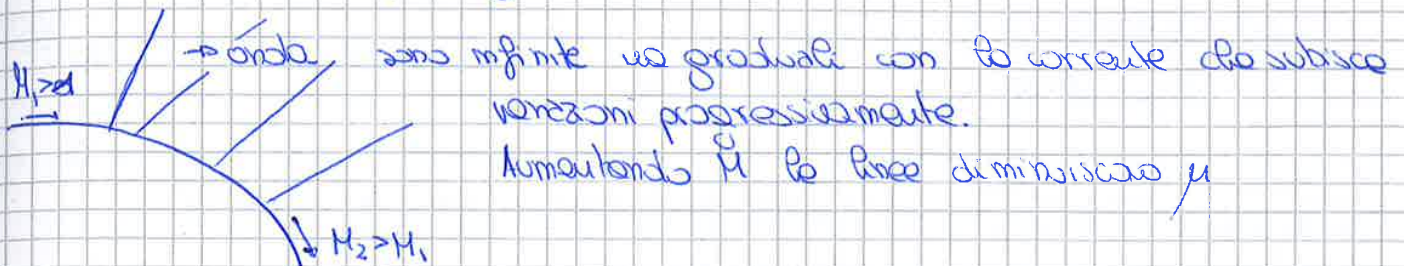


$P_2 < P_1$     $T_2 < T_1$     $P_2 < P_1$     $T_0_1 = T_0_2$     $P_{01} = P_{02}$   
 isentropica    $\Delta s = 0$

- Compressione (avvicinando  $M_2$  da  $M_1$ )



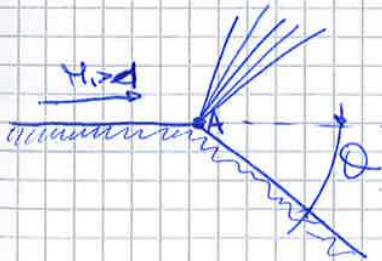
$P_2 > P_1$     $T_2 > T_1$     $P_2 > P_1$   
 $T_0_1 = T_0_2$     $\Delta s > 0$     $P_{02} < P_{01}$



sono infinite us graduati con la corrente che subisce variazioni progressivamente aumentando  $M$  le linee diminuiscono  $\mu$

$\text{sen } \mu = \frac{1}{M}$  con  $\mu = \arcsin \frac{1}{M}$  = angolo di deflessione.

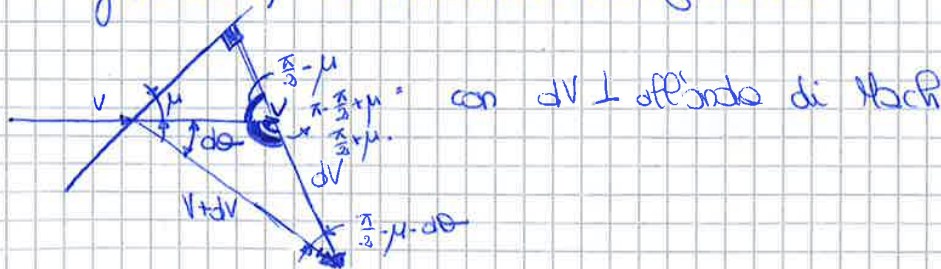
Sono onde divergenti che spariscono quando la deflessione sparisce, dato rispettare la condizione di tangente.



In A parte l'intero fascio di espansione  
dato ESPANSIONE DI PRANDTL-MEYER

Das sempre utolare il campo a valle dato quello a monte (come sempre) crescendo  $\theta$ .

Definisco  $\theta = f(\text{velocità})$  e considero una geometria linea di Mach



Applico la legge dei seni  $\rightarrow \frac{V+dv}{V} = \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2} + \mu)}{\text{sen}(\frac{\pi}{2} - \mu - d\theta)}$



inoltre  $a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$   $\rho = \frac{\gamma p}{a^2}$  quindi:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\gamma} \frac{a^2}{p} \cdot dp = -\frac{1}{\gamma M^2} \cdot \frac{dp}{p}$$

variazione percentuale di pressione

quindi  $\frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \frac{dV}{V}$   
(espansione)

se V aumenta p diminuisce con  $\gamma M^2 \rightarrow$  fattore di amplificazione.

Espansione

$\frac{dV}{V} \rightarrow f(M)$   $M = \frac{V}{a}$   $V = Ma$   $dV = a dM + M da$  e differenziando

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{da}{a}$$

$$\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 = \frac{T_0}{T} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \quad \text{con } a = a_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

dove  $da = a_0 \left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\dots\right)^{-\frac{1}{2}-1} \left(2 \cdot \frac{\gamma-1}{2} dM\right)\right)$

quindi  $\frac{da}{a} = -\left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1} \cdot M dM$  da sostituire nello  $f$  differenziale.

risultato:

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

quindi  $d\theta = \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \cdot \frac{dM}{M}$  Prandtl-Meyer

Suppongo



ed integro l'espressione di  $d\theta =$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \cdot \frac{dM}{M}$$

la funzione integranda in funzione di M  $\theta$  può essere definita come

$$\nu(M) = \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \rightarrow \text{funzione di Prandtl-Meyer}$$

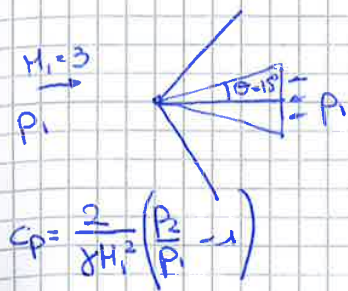
e restituisce dopo l'integrazione un certo valore  $\rightarrow$



$$v(H_2) = Q_2 + v(H_1) = -20 + 26,38 = 6,38^\circ$$

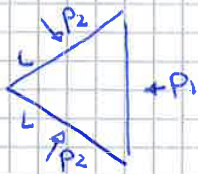
$$H_2 \rightarrow 1,3$$

esercizio

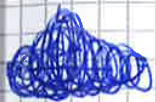


$$\text{con } q_1 = \frac{\gamma}{2} P_1 H_1^2$$

$$C_p = \frac{2}{\gamma H_1^2} \left( \frac{P_2}{P_1} - 1 \right)$$



e proiettando su  $x$  e  $y$



$$F_1 = \frac{c}{\sin 15^\circ} \cdot (1) \cdot P_2 \cos 15^\circ \quad \text{con } D = 2F_1 - P_1 \cdot c \cdot \lg 15^\circ$$

$$C_D = \frac{D}{\rho q_0 \cdot S} = \frac{2c P_2 \lg 15^\circ - 2c P_1 \lg 15^\circ}{c \cdot \frac{\gamma}{2} P_1 H_1^2}$$

$$= \frac{4}{\gamma H_1^2} \left( \frac{P_2}{P_1} - 1 \right) \lg 15^\circ = 0.155$$

$$C_D = \frac{1}{C} \int_{L_2}^{L_1} (C_{P1} - C_{P2}) dy \quad \text{con } dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx$$

$-\lg(15^\circ)$   
 $\lg(15^\circ)$

$$\frac{1}{C} \left[ \int_0^c C_{P1} \lg 15^\circ dx = - \int_0^c C_{P2} (-\lg 15^\circ) dx \right] \rightarrow C_D = \frac{\lg 15^\circ}{C} \int_0^c (C_{P1} + C_{P2}) dx$$

$$C_p = 0,289 \quad \rightarrow C_D = 0.155$$





per l'angolo  $\left(\frac{V_e}{\sigma^*}\right)^2 = 6$   
 quindi  $\frac{V}{\sigma^*} = \pm \sqrt{6 - \left(\frac{U}{\sigma^*}\right)^2}$

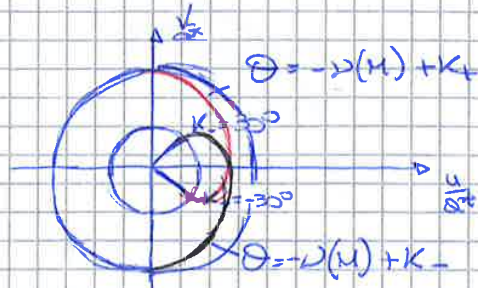
$0 \leq \frac{U}{\sigma^*} \leq \sqrt{6}$

possa definire  $K_+ = K_-$  o  $K_+ = -K_-$  → deciso io

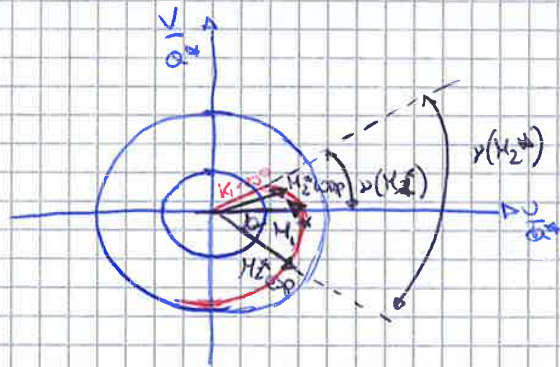
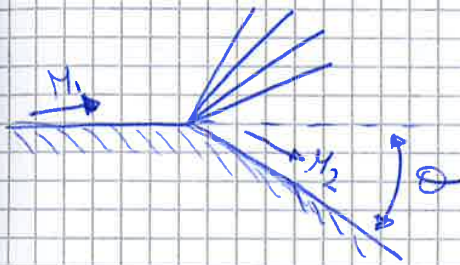
A seconda del valore scelto entrano con autombro in una situazione di ambiguità per il segno di  $\Phi$ .

- Fissato  $K_+ = K_- = 300$   $K = \nu(H_1)$  uso lo spigolo I° figura  
 gli da cui ricavare il valore di  $\nu(H_1) \rightarrow C_+$   
 Stesso caso per  $C_-$

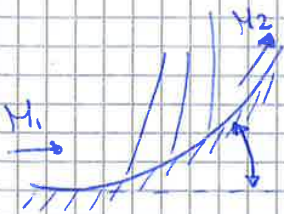
- Fissato  $K_+ = -K_- = -300$ 
  - $K = 300$
  - $K_+ = -300$



Esposizione



Compressione (lo spigolo uno stesso con corrente superiore Po (Pinto))



Poniamo anche su cui otteniamo il tipo di stati e uno come appare  
 fronte alla prima figura.



Punto  $x=x_0$  la velocità  $v$  (e la componente) è nota, così come

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$$

Da quindi calcolare  $\frac{du}{dx}$ :

$$\frac{du}{dx} = \frac{2uv \frac{\partial u}{\partial y} - \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y}}{\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)}$$

questa espressione vale sempre, a meno che il denominatore non si annulli.

$D=0$  se  $u=a$  ovvero se la componente lungo la linea è sonica

Il numero  $M$  è definito come  $M = \frac{v}{c} = \frac{1}{M}$  quindi  $x=x_0$  è una linea di Mach. Quindi ogni linea che forma un angolo  $\mu$  con la linea corrente istantanea è una linea di Mach.

Punto  $x=x_0$   $\frac{du}{dx}$  può essere indeterminato.

Regola generale  $\rightarrow$  per individuare le linee caratteristiche

$$I \left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2}\right) \phi_{xx} + \left(1 + \frac{\phi_y^2}{a^2}\right) \phi_{yy} - \frac{2\phi_x \phi_y}{a^2} \phi_{xy} = 0$$

Da trovare due altre equazioni:

$$I \left\{ d\phi_x = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} dy = \phi_{xx} dx + \phi_{xy} dy = du \right.$$

$$II \left\{ d\phi_y = \frac{\partial \phi_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} dy = \phi_{xy} dx + \phi_{yy} dy = dv \right.$$

Riscrivere le equazioni

$$I \left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2}\right) \phi_{xx} + \left(1 + \frac{\phi_y^2}{a^2}\right) \phi_{yy} - \frac{2\phi_x \phi_y}{a^2} \phi_{xy} = 0$$

$$I dx \phi_{xx} + 0 + dy \phi_{xy} = du$$

$$II 0 + dy \phi_{yy} + dx \phi_{xy} = dv$$

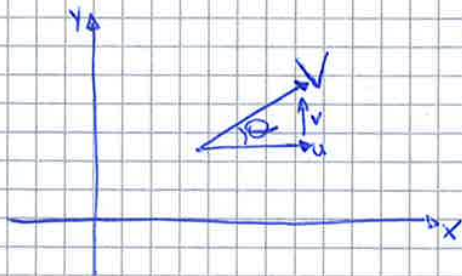
Ho 3 incognite  $\phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{xy}$



- se il flusso è supersonico  $M > 1$  quindi  $M^2 - 1 > 0$   
 ottengo quindi due radici, ovvero due direzioni caratteristiche.  
 ↳ EQ IPERBOLICA (del potenziale di V)

- se il flusso è sonico  $M = 1 \rightarrow M^2 - 1 = 0$   
 ottengo una sola radice quindi un'unica direzione  
 ↳ EQ PARABOLICA

- se il flusso è subsonico  $M < 1 \rightarrow M^2 - 1 < 0$   
 non ottengo radici reali, ovvero non ho delle linee caratteristiche.



$$u = V \cos \theta$$

$$v = V \sin \theta$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{char}} = - \frac{V^2 \sin \theta \cos \theta}{a^2} \pm \sqrt{\frac{V^2}{a^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 1}$$


---


$$-1 - \frac{V^2}{a^2} \cos^2 \theta$$

Trasformando

$$\mu = \arcsin \frac{a}{V} \rightarrow \frac{V^2}{a^2} = M^2 = \frac{1}{\sin^2 \mu}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{char}} = - \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sin^2 \mu} \pm \sqrt{\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin^2 \mu} - 1}$$


---


$$-1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \mu}$$

$$\sqrt{\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin^2 \mu} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \mu} - 1} = \sqrt{\frac{\cos^2 \mu}{\sin^2 \mu}} = \frac{1}{\tan \mu}$$

quindi

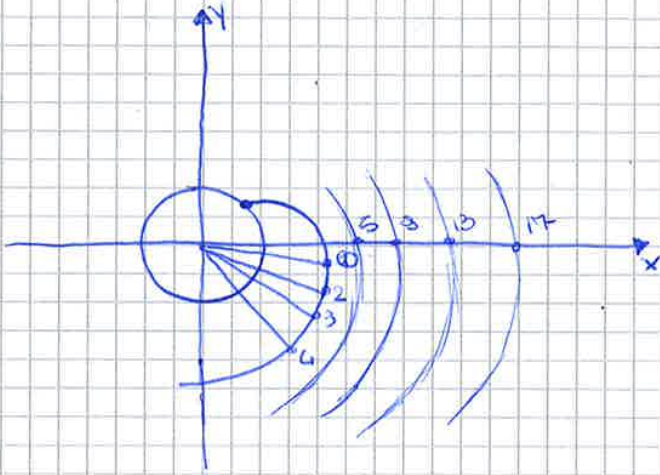
$$\boxed{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{char}} = \tan(\theta \pm \mu)}$$

↳ direzioni caratteristiche non  
 caso supersonico

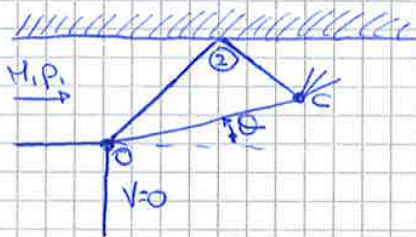
$$\rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{char}+} = \tan(\theta + \mu)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{char}-} = \tan(\theta - \mu)$$





se  $p_1 < p_{amb}$  → getto sovrappressurizzato, non può più espandersi



in O vorticoso d'origine

$p_2 = p_1$        $\frac{p_2}{p_1} = f(M_1, \theta, \beta)$  che permette di ricavare  $\beta$

calcolando  $\beta$  e  $M$  posso ricavarmi  $\theta$

In c B vortice è troppo compresso rispetto a  $p_{amb}$  quindi si espande di nuovo.

esempio pag. 182

$M_1 = 1.5$



$P_1 = 1400 \frac{Pa}{Pa}$

$T_1 = 460^\circ R$

$M_1 = 1.5$

$M_2, P_2, T_2, P_{02}, T_{02}$

$^\circ R = ^\circ C \cdot 1,8 + 273,15$  →  $^\circ C = \frac{^\circ R - 273,15}{1,8} = \frac{460 - 273,15}{1,8} = -117,53^\circ C = 253,41 K$

$p_1 = 1400 \cdot 47,88 = 81032 Pa$

Dalla tabella 5  $M_1 = 11,31^\circ$        $\mu_1 = 41,81^\circ$





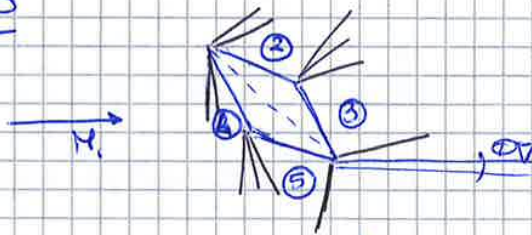
$$dD = 2 [p_2 \cdot ds \cos\theta - p_3 \cdot ds \sin\theta] = 2 [p_2 - p_3] \left[ \frac{ds \cos\theta}{dy} \right] = 2 dy (p_2 - p_3)$$

ed integrando  $D = 2(p_2 - p_3) \int_0^{t/2} dy$  dove  $t/2$  è il semi spessore del profilo  
 resistenza d'onda  
 incrementale

$$D = 2(p_2 - p_3) \cdot \frac{t}{2} \rightarrow D = t(p_2 - p_3) \quad \text{quindi } C_{DW} = \frac{D_w}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S} = \frac{(p_2 - p_3) \cdot t}{c}$$

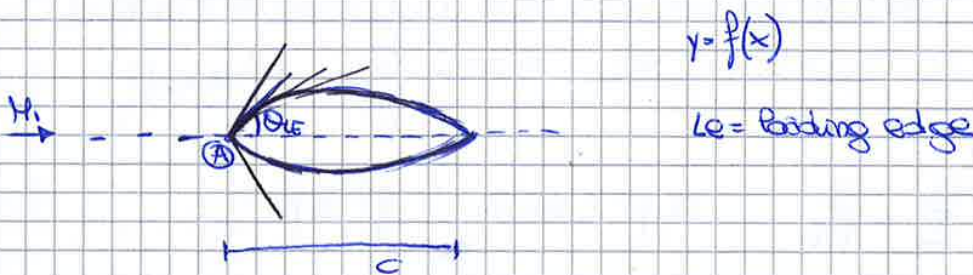
se  $\frac{t}{c} = \frac{t/2}{c/2} \rightarrow \tan\theta$  quindi  $C_{DW} = (p_2 - p_3) \tan\theta$

con  $\alpha > 0$

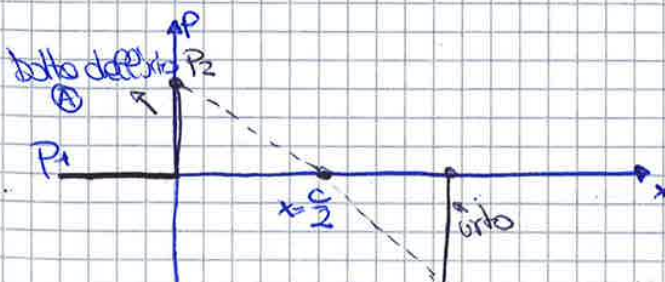


Avrà comunque resistenza d'onda ed aumenterà dell'angolo di incidenza.

profilo aereo biconvesso simmetrico



Localmente la corrente deve rispettare la condizione di tangenza



da  $p_2$  la portanza diminuisce  
 → espansione continue  
 dipende dalla geometria  
 $p_0$  dello stato di espansione  
 elevatori



Flussi laminari → Teoria delle piccole perturbazioni

$\phi = \phi(x, y, z)$        $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$

Corpo che perturba poco

profili sottili con piccole incisioni



$v_x = v_0 + u'$        $v_y = v'$        $v_z = w'$

$\vec{V} = (v_0 + u')\vec{i} + v'\vec{j} + w'\vec{k}$       con  $u', v', w'$  = componenti velocità di perturbazione

$\vec{V} = \nabla \phi$       con  $\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}$

$\Phi$  = funzione potenziale totale

$\phi$  = funzione potenziale di perturbazione

$\Phi(x, y, z) = v_0 x + \phi(x, y, z)$       con

$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_0 + u' = v_0 + \frac{\partial \phi}{\partial x}$

$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v' = \frac{\partial \phi}{\partial y}$

$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = w' = \frac{\partial \phi}{\partial z}$

$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$

$\frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$

$\frac{\partial w'}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$

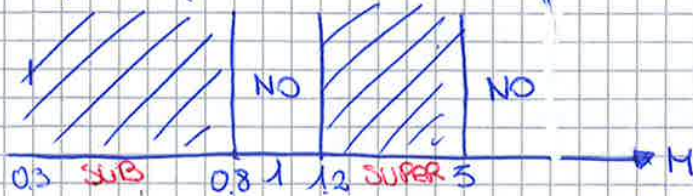
$\Phi_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$   
 $\Phi_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$

$\nabla^2 \Phi = \Phi_{xx}$

$\left(1 - \frac{\Phi_x}{a^2}\right) \Phi_{xx} + \left(1 - \frac{\Phi_y}{a^2}\right) \Phi_{yy} + \left(1 - \frac{\Phi_z}{a^2}\right) \Phi_{zz} - 2 \frac{\Phi_x \Phi_y}{a^2} \Phi_{xy} - 2 \frac{\Phi_x \Phi_z}{a^2} \Phi_{xz} +$   
 $- 2 \frac{\Phi_y \Phi_z}{a^2} \Phi_{yz} = 0$



Con queste ipotesi lo studio a ferma e flussi subsonici e supersonici



$$[1 - M_{\infty}^2] \frac{\partial u'}{\partial x} \rightarrow M_{\infty}^2 \left[ \frac{u'}{V_{\infty}} \quad \frac{v'}{V_{\infty}} \right] \frac{\partial u'}{\partial x}$$

confronto con il 10 termine a destra delle equazioni

Quindi semplifico i coeff delle derivate  $\frac{\partial u'}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v'}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial w'}{\partial z}$  oltre che  $\frac{v'w'}{V_{\infty}}$  ottenendo:  $(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$

Nel caso di subsonico compressibile l'eq linearizzata è ellittica:

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Nel caso di supersonico l'eq è iperbolica:  $(M_{\infty}^2 - 1) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$

### Calcolo coeff di pressione

Parto dal coeff di pressione del continuo incompressibile (pericoloso nel compressibile)

La definizione primaria di coeff di pressione è:

$$c_p = \frac{P - P_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2} \rightarrow c_p = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \left( \frac{P}{P_{\infty}} - 1 \right)$$

ed essendo il flusso isentropico

pico  $P = \text{cost}$

Non sono presenti fenomeni dissipativi quindi  $H = \text{cost}$  e  $\frac{P}{P_{\infty}} = \left( \frac{T}{T_{\infty}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

allora:

$$H = h + \frac{V^2}{2} \quad \text{quindi se } H = \text{cost} \quad P_{\infty} + \frac{V_{\infty}^2}{2} = h + \frac{V^2}{2}$$

$$c_p T_{\infty} + \frac{V_{\infty}^2}{2} = c_p T + \frac{V^2}{2} \rightarrow T_{\infty} + \frac{V_{\infty}^2}{2c_p} = T + \frac{V^2}{2c_p}$$

$$\begin{cases} h = c_p T \\ P_{\infty} = c_p T_{\infty} \end{cases}$$

sapendo che  $T - T_{\infty} = \frac{V_{\infty}^2 - V^2}{2c_p}$  e  $c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{\theta_0}$  ottengo

$$T - T_{\infty} = \frac{V_{\infty}^2 - V^2}{2 \gamma \frac{R}{\theta_0} / (\gamma-1)} \rightarrow \frac{T}{T_{\infty}} - 1 = \frac{V_{\infty}^2 - V^2}{(2 \gamma \frac{R}{\theta_0}) / (\gamma-1) \cdot T_{\infty}}$$

Introduco le piccole perturbazioni nella formula  $\frac{T}{T_{\infty}} - 1$  ottenendo:

$$V^2 = (V_{\infty} + u')^2 + v'^2 + w'^2 \rightarrow V_{\infty}^2 + u'^2 + 2u'V_{\infty} + v'^2 + w'^2$$



Con questa trasformazione torniamo in relazione da legare all'espressione precedente di  $\phi$ .

Scrivo il potenziale nel piano trasformato

$$\phi(\xi, \eta) = \beta \phi(x, y), \quad \phi(x, y) = \frac{1}{\beta} \Phi(\xi, \eta)$$

$$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \phi_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \phi_\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \quad \phi_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \quad \phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\phi_\eta = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$$

Ricaviamo  $\phi_x$

$$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]$$

per  $\xi = \beta x$   $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$   $\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$   $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$   $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \beta$

ovvero  $\left[ \phi_x = \frac{1}{\beta} \Phi_\xi \right]$

Ricaviamo  $\phi_{xx}$

$$\phi_{xx} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}$$

ovvero  $\left[ \phi_{xx} = \frac{1}{\beta} \Phi_{\xi\xi} \right]$

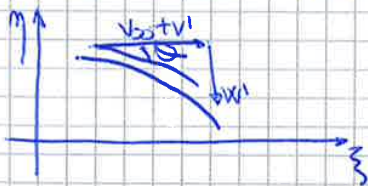
Analogamente  $\phi_y = \beta \Phi_\eta$  e  $\phi_{yy} = \beta \Phi_{\eta\eta}$  esaltando nella forma

di  $\beta^2$  ottergo  $\beta \cdot \left[ \frac{1}{\beta} \Phi_{\xi\xi} \right] + \beta \Phi_{\eta\eta} = 0$

$\beta (\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta}) = 0$  ovvero  $\boxed{\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta} = 0}$

eq di Laplace nel piano trasformato

Scrivo la condizione di tangenza per il piano trasformato



$$\eta = \phi(\xi) \quad \frac{d\phi}{d\xi} = \tan \theta$$

$$\frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} = \tan \theta = \frac{\partial \phi}{\partial \xi}$$

Introducendo le ipotesi di piccole perturbazioni  $|\eta'| \ll 1$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} \approx \eta' \rightarrow \eta' = \eta_0 \frac{d\phi}{d\xi} \quad \eta' = \frac{\partial \phi}{\partial \xi}$$



27/11/15

Linearizzazione dei flussi supersonici

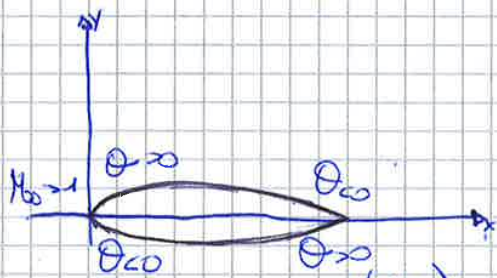
$M_{\infty} > 1$

$$(M_{\infty}^2 - 1) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (20)$$

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{iperbolico.}$$

potenziale di perturbazione in forma linearizzata

Le caratteristiche iperboliche del profilo sono descritte dalle curve  $C_{+1}$ ,  $C_{+2}$  e  $C_{-1}$



geometria  $x \rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)$  pendenza geometrica (rispetto all'asse x)  
 in ogni punto è definito  $\frac{dy}{dx} \rightarrow \tan \theta$  angolo  $\theta$  deflettore  $\theta$  locale

Dove  $\theta < 0$  avrà espansione mentre  $\theta > 0$  compressione.

Forma della soluzione dell'equazione:  $\phi(x,y) = f(x-ly) + g(x+ly)$

Dobbiamo cercare le due funzioni  $f$  e  $g$ .

Analizzo per primo il caso

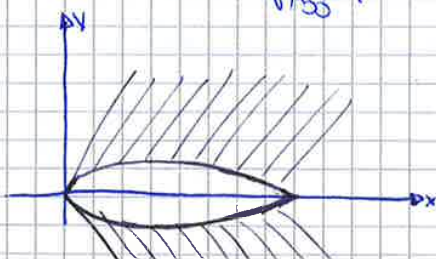
la prima più appropriata è quella con  $g=0$  ovvero  $\phi(x,y) = f(x-ly)$  e  $\phi = \text{cost} \rightarrow f(x-ly) = \text{cost}$  allora l'argomento è costante quindi

$x-ly = \text{costante}$  da cui ricaviamo:

$$y = \frac{x - \text{cost}}{l} \quad \text{e derivando ottengo} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{l} \quad \text{ma} \quad l^2 = M_{\infty}^2 - 1$$

e sostituendo  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}$  da cui ottengo sempre pendenze positive

finite



all'indietro perché  $\tan \theta > 0$

lungo queste linee propagano i disturbi